

Современные проблемы  
вычислительной  
математики  
и  
математического  
моделирования

**2**

*Математическое  
моделирование*

НАУКА

Современные проблемы  
вычислительной  
математики  
и  
математического  
моделирования

В двух томах



МОСКВА НАУКА 2005

Современные проблемы  
вычислительной  
математики  
и  
математического  
моделирования

Том 2

*Математическое  
моделирование*



МОСКВА НАУКА 2005

УДК 519.6  
ББК 22.19  
С56

Ответственный редактор  
академик *В.П. ДЫМНИКОВ*

Рецензенты:  
академик *А.С. АЛЕКСЕЕВ*,  
член-корреспондент РАН *Ю.Г. ЕВТУШЕНКО*

**Современные** проблемы вычислительной математики и математического моделирования : в 2 т. / Ин-т вычисл. математики. – М. : Наука, 2005. – ISBN 5-02-033436-7.

Т. 2. : Математическое моделирование / [отв. ред. В.П. Дымников]. – 405 с. – ISBN 5-02-033717-X.

Издание настоящего двухтомника приурочено к юбилею – 80-летию академика Г.И. Марчука. В работе представлены коллективные обзорные статьи современного состояния направлений вычислительной математики и математического моделирования, которые в течение многих лет развивались в Институте вычислительной математики и в работах Г.И. Марчука.

Том 2-й представляет методы моделирования климата и его изменений, математические модели динамики морей и океанов, проблемы окружающей среды, иммунологии и медицины.

Для специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования, а также для студентов и аспирантов соответствующих специальностей.

ТП 2005-І-149

**Contemporary** problems of numerical mathematics and mathematical modelling : in 2 vol. / Institute of Numerical Mathematics. – Moscow : Nauka, 2005. – ISBN : 5-02-033436-7.

Vol. 2. : Mathematical Modelling / [ed. by V.P. Dymnikov]. – 405 p. – ISBN 5-02-033717-X.

This collection of works is dedicated to the 80th birthday of Academician G.I. Marchuk. The themes of the works presented are associated with the scientific directions, in which G.I. Marchuk achieved the most outstanding results. Most of papers are of a review character demonstrating the current state of the art in numerical mathematics and mathematical modelling.

Volume 2 presents the methods for climate modelling, mathematical models of sea and ocean dynamics, environmental problems, and mathematical models in immunology.

The book is certainly interesting to the specialists in numerical mathematics and mathematical modelling and also to students and postgraduates.

ISBN 5-02-033436-7 (общ.)  
ISBN 5-02-033717-X

© Российская академия наук, 2005  
© Редакционно-издательское оформление.  
Издательство “Наука”, 2005



# Ядерная энергетика и математика

*В.С. Владимиров, В.И. Лебедев*

## Содержание

1. Из воспоминаний . . . . .	5
2. Краевые задачи теории ядерных реакторов . . . . .	7
3. Метод сопряженных уравнений . . . . .	15
4. Численные методы для стационарных неоднородных уравнений переноса . . . . .	21
5. Нестационарные задачи, спектральный анализ. Условия сшивки решений . . . . .	28
Литература . . . . .	35

### 1. Из воспоминаний

Около полувека тому назад перед нашей страной возникла проблема мирного использования энергии атома. Математикам предстояло решить новые математические задачи, описывающие процессы переноса нейтронов и тепла в веществе, выполнить невиданный до того времени объем вычислительной работы. Известно, что каждая новая важная область прикладной физики вызывает к жизни новые концепции в математике и своими глубокими достижениями она обязана строгим математическим исследованиям этих концепций. Задачи теории переноса частиц, будучи существенно многомерными, достаточно сложными и актуальными, представляют собой достойный пример исследования с точки зрения основных проблем вычислительной математики, да и математики в целом. Своеобразие и важность этих задач влияли и будут влиять на развитие основных концепций и методов вычислительной математики и на прогресс вычислительной техники. Вычислительные задачи по расчету ядерных реакторов оказались даже более сложными и трудоемкими, чем аналогичные задачи по ядерному оружию, работы над которыми развернулись несколько лет ранее.

На ранних этапах исследований, когда еще не было ЭВМ, вычислительные работы проводились вручную на электромеханических машинах типа

Mercedes. Это обстоятельство предъявляло особые требования к вычислительным методам и схемам: они должны были быть достаточно экономичными и устойчивыми, по возможности простыми и точными, что, в свою очередь, требовало надлежащей изобретательности и привлечения довольно "высокой" математики.

Работа осложнялась и тем, что в то время наши вузы только начинали готовить специалистов в области атомной энергетики, в частности по теоретическим и вычислительным аспектам ядерных реакторов. Работа и обучение проводились специалистами из других областей науки и техники ("чистыми" математиками, механиками, метеорологами, геофизиками, геодезистами и т.п.), которым на ходу приходилось перестраиваться и переучиваться. Не случайно, что в это время С.Л. Соболев — первый заместитель И.В. Курчатова по Институту атомной энергии — организует первую в Советском Союзе кафедру вычислительной математики на механико-математическом факультете МГУ.

Методы расчета ядерных систем возникли как синтез исследований многих ученых — математиков и физиков — и институтов как в теоретических, так и в прикладных аспектах. Гурий Иванович Марчук в короткий срок набирает сильный коллектив математиков, физиков и вычислителей, по крупицам кропотливо собирает лучшие и оригинальные достижения в математике<sup>1</sup>, могущие найти применения в исследованиях и расчетах ядерных систем, и, не останавливаясь перед трудностями, создает пакет оригинальных математических методов и программ, организует серийные расчеты различных типов ядерных реакторов и защиты от излучений, ориентированных на начальном этапе на ручной счет, а в дальнейшем — на все более мощные ЭВМ.

Первое публичное выступление Г.И. Марчука о приближенных методах расчета ядерных реакторов относится к июню 1955 г. на сессии Академии наук СССР по мирному использованию атомной энергии [24]. Через два года он защищает докторскую диссертацию по той же проблеме. В 1958 г. он выпускает известную монографию "Численные методы расчета ядерных реакторов" [25], а через три года — ее усовершенствованный и дополненный вариант [26]. Последняя монография стала настольной книгой многих исследователей, занимающихся ядерной энергетикой как в нашей стране, так и за рубежом. Подводит итог исследованиям монография Г.И. Марчука и В.И. Лебедева "Численные методы в теории переноса нейтронов" [30], вышедшая десять лет спустя (1971) и двадцать лет спустя (1981).

Многогрупповые расчеты ядерного реактора для первой в мире АЭС в г. Обнинске, запущенной 27 июня 1954 г., были успешно выполнены коллективом сотрудников под руководством Г.И. Марчука. За работы по ме-

---

<sup>1</sup>Как говорил Н.Н. Боголюбов, "... каждая веревочка шла в дело".

тодам расчета ядерных реакторов и их применениям к разработке АЭС и ядерного подводного флота Г.И. Марчук был удостоен Ленинской премии (1961).

С введением в эксплуатацию в 1964 г. Нововоронежской АЭС на реакторах ВВЭР настал новый "взрослый" этап в развитии вычислительных задач. В 1973 г. под Ленинградом был введен в эксплуатацию первый энергетический блок реакторов РБМК. Физические обоснования этих реакторов с сопровождающим их комплексом физико-технических проблем, а также вычислительные работы были в основном выполнены коллективом сотрудников ИАЭ. Одним из авторов (В.И. Лебедевым) была создана первая двухгрупповая двумерная программа для расчета регулирующих стержней, которая впоследствии широко использовалась при проектировании реакторов ВВЭР.

В этой работе авторы не стремились дать исчерпывающий обзор всех результатов и достижений математических и вычислительных методов в теории переноса. Они попытались лишь сформулировать свою точку зрения только по тем вопросам этой необъятной области исследований, которые находились в сфере интересов и внимания школы Г.И. Марчука. Авторы хотели показать, что эта тема и на сегодняшний день далека от своего завершения и является неисчерпаемым источником новых математических идей.

## 2. Краевые задачи теории ядерных реакторов

В качестве математической модели ядерного реактора принимается система интегро-дифференциальных уравнений переноса нейтронов (линеаризованное уравнение Больцмана) с учетом их замедления и термализации на завершающем этапе. Нестационарное уравнение переноса для плотности нейтронов  $N(x, \Omega, v, t)$  в фазовой области  $G \times S^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  переменных  $(x, \Omega, v, t)$  имеет вид [2-4, 37]

$$\frac{dN}{dt} + v\sigma(x, v)N = \int_0^\infty \int_{S^2} W(x, \mu_0, v, v')v'N(x, \Omega', v', t)d\Omega' dv' + q \quad (2.1)$$

с граничным условием на внешней границе  $S$  среды  $G$

$$N|_S = 0, \quad (n_x, \Omega) < 0, x \in S, \quad (2.2)$$

выражающим отсутствие падающих нейтронов извне на  $S$ , и начальным условием

$$N|_{t=0} = N_0(x, \Omega, v). \quad (2.3)$$

Здесь  $\frac{dN}{dt}$  — полная производная по времени от плотности нейтронов:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + v(\Omega, \nabla)N, \quad (2.4)$$

$S^2$  — единичная сфера в  $\mathbb{R}^3$ ,  $n_x$  — внешняя нормаль в точке  $x$  к поверхности  $S$ ,  $\mu_0(\Omega, \Omega')$ ,  $q$  — источник нейтронов.

Уравнение (2.1) сопровождается дополнительными дифференциальными уравнениями, описывающими распространение, влияние запаздывающих нейтронов, гидродинамические эффекты и т.п. Наконец, поскольку свойства среды под воздействием излучения могут меняться, то коэффициенты уравнения будут зависеть от решения. Для простоты будем считать, что результат этих дополнительных воздействий учитывается в источнике  $q$ .

Формулы (2.1) и (2.4) показывают, что характеристиками уравнения являются при любых  $x_0 \in G$ ,  $\Omega$  и  $v$  прямые

$$x = x_0 + \Omega vt. \quad (2.5)$$

Таким образом, мы видим, что уравнение (2.1) есть своеобразное интегро-дифференциальное уравнение, определенное в 7-мерном фазовом пространстве переменных  $(x, \Omega, v, t)$ . В полном объеме решение таких уравнений с сопровождающими их дополнительными системами уравнений не под силу даже современным ЭВМ. Поэтому, естественно, математические исследования исторически развернулись вокруг более простых, нежели (2.1), типов уравнений. Их можно разбить на две группы: стационарные и нестационарные.

Решения стационарных уравнений определяют так называемые критические состояния реактора, когда наименьшее собственное значение оператора переноса (при наличии деления) равно нулю. Опишем стационарные задачи. Пусть  $\varphi = vN$  — поток нейтронов, тогда в переменных  $(x, \Omega, v)$  из (2.1) получаем уравнение

$$(\Omega, \nabla)\varphi + \sigma(x, v)\varphi = \int_0^\infty \int_{S^2} W(x, \mu_0, v, v')\varphi(x, \Omega', v')d\Omega' dv' + q \quad (2.6)$$

с граничным условием (2.2) на внешней границе  $S$  среды  $G$

$$\varphi|_S = 0, \quad (n_x, \Omega) < 0, x \in S. \quad (2.7)$$

Сопряженная задача к задаче (2.6)–(2.7) имеет вид

$$-(\Omega, \nabla)\psi + \sigma(x, v)\psi = \int_0^\infty \int_{S^2} W(x, \mu_0, v', v)\psi(x, \Omega', v')dv'd\Omega' + p, \quad (2.6^*)$$

$$\psi|_S = 0, \quad (n_x, \Omega) > 0, x \in S. \quad (2.7^*)$$

Сопряженная система уравнений реактора широко использовалась Г.И. Марчуком и его школой еще на ранних стадиях построения теории и методов расчета ядерных реакторов [25, 26, 31]. Отметим некоторые из важных ее приложений.

**Теория возмущений** спектрального параметра  $\lambda$  — первого собственного значения соответствующей однородной задачи. Параметр  $\lambda$  и его возмущение  $\delta\lambda$  связаны с критической массой самоподдерживающейся цепной реакции. Полученные формулы (в абстрактной форме — это формулы типа (3.12)) играют важную роль в оценке первого собственного значения по отношению к тем или иным вариациям входных данных, необходимых для физического расчета ядерного реактора. Эти исследования послужили основой решения важнейших обратных задач по восстановлению физических параметров моделей.

Сюда относится также разработка систем ядерной безопасности с помощью наиболее точных расчетов критических масс ядерных систем различных спектров, подкрепленных экспериментальными данными. Последние работы инициировались И.В. Курчатовым, и их выполнение было высоко оценено самим Игорем Васильевичем (январь 1960 г.).

**Многогрупповые** методы расчета ядерных реакторов пришли на смену двухгрупповым, когда весь спектр нейтронов объединялся в две группы: замедляющихся и термализованных. Математически многогрупповая задача (2.1)–(2.2), соответствующая замедляющимся нейтронам, сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений следующего вида:  
для плотности —

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + v_k((\Omega, \nabla)N_n + \sigma_k N_k) = \sum_i \Delta v_i \int_{S^2} W^{k,i}(x, \mu_0) v_i N_i(x, \Omega') d\Omega' + q, \quad (2.8)$$

для потока —

$$\frac{1}{v_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + (\Omega, \nabla)\varphi_k + \sigma_k \varphi_k = \sum_i \Delta v_i \int_{S^2} W^{k,i}(x, \mu_0) \varphi_i(x, \Omega') d\Omega' + q, \quad (2.9)$$

где  $k = 1, 2, \dots, m$ , с начальными условиями вида (2.3) и граничными условиями вида (2.2), (2.7). Аналогично выписываются стационарная и сопряженная задачи. Уравнения (2.9) можно трактовать как уравнения с малым параметром при частной производной по времени.

Многогрупповые расчеты потребовали знания необходимой информации о сечениях ядерных реакций: константах  $\sigma_k$  и  $W_l^{k,i}$  в различных зонах реактора. (Здесь  $W_l^{k,i}, l = 0, 1, \dots$  — коэффициенты разложения функции  $\Delta v_i W^{k,i}(x, \mu_0)$  по полиномам Лежандра.)

Разработанная теория сопряженных уравнений позволила дать точную и приближенные формулировки усреднений ядерно-физических констант

по группам и по зонам через дробно-линейные функционалы. Эти работы обеспечили существенный прогресс в методах расчета ядерных реакторов различных спектров — "быстрых", "промежуточных" и "тепловых", позволили повысить точность расчетов и широко вошли в практику.

### Одногрупповое уравнение переноса с изотропным рассеянием.

В этом случае построена строгая математическая теория обобщенных решений и сформулированы вариационные принципы, что позволяет обосновывать численные методы решений [4, 5]. Пусть

$$L\varphi = (\Omega, \nabla)\varphi + \sigma(x)\varphi, \quad (2.10)$$

$$\varphi_0 = S\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \varphi(x, \Omega') d\Omega'. \quad (2.11)$$

Тогда одногрупповое уравнение (2.6) примет вид

$$L\varphi = \beta(x)S\varphi + q. \quad (2.12)$$

Любая прямая вида  $x = x_0 + \Omega\xi$ ,  $x_0 \in G$  является характеристикой этого уравнения; вдоль этой прямой уравнение принимает вид

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + \sigma(x)\varphi = \beta(x)S\varphi + q. \quad (2.13)$$

Если ввести функцию

$$u(x, \Omega) = \frac{1}{2}[\varphi(x, \Omega) + \varphi(x, -\Omega)], \quad (2.14)$$

то при  $\sigma(x) \neq 0$  и  $q(x, \Omega) = q(x, -\Omega)$  она будет удовлетворять уравнению в самосопряженной форме [5]

$$- [l(x)(\Omega, \nabla)]^2 u + u = c(x)Su + \frac{q}{\sigma} \quad (2.15)$$

с краевым условием на  $S$

$$u - l(\Omega, \nabla)u|_S = 0, \quad (2.16)$$

где  $l(x) = \sigma^{-1}(x)$ ,  $c(x) = \beta(x)/\sigma(x) \leq 1$ . Краевая задача (2.15)–(2.16) вдоль характеристики  $x_0 + \Omega\xi$  примет вид

$$- \left( l \frac{d}{d\xi} \right)^2 u + u = c(x)Su + \frac{q}{\sigma}, \quad (2.17)$$

$$u - l \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_1} = 0, \quad x_1 = x_0 + \Omega\xi_1 \in S, \quad (n_{x_1}, \Omega) < 0, \quad (2.18)$$

$$u + l \frac{du}{d\xi} \Big|_{\xi=\xi_2} = 0, \quad x_2 = x_0 + \Omega\xi_2 \in S, \quad (n_{x_2}, \Omega) > 0. \quad (2.19)$$

Если ввести скалярные произведения по формулам

$$\langle u, v \rangle = \int_G \int_{S^2} \sigma uv dx d\Omega,$$

$$[u, v] = \int_S \int_{S^2} |(\Omega, n)| uv d\Omega ds + \langle l(\Omega, \nabla)u, (\Omega, \nabla)v \rangle + \langle u, v \rangle \quad (2.20)$$

и норму

$$[u] = [u, u]^{1/2},$$

то функция  $u$ , реализующая минимум функционала

$$G(v) = [v]^2 - \langle cSv, v \rangle - 2 \langle v, q/\sigma \rangle, \quad (2.21)$$

будет решением задачи (2.15)–(2.16) [5].

Теперь сформулируем основные спектральные задачи для одногруппового уравнения, считая, что источник  $Q$  имеет вид

$$q = \sigma\nu\Sigma_f S\varphi. \quad (2.22)$$

При краевом условии (2.7) требуется найти первое собственное значение  $\lambda_1$  уравнения

$$-L\varphi + \beta(x)S\varphi + \nu\Sigma_f S\varphi = \lambda\varphi. \quad (2.23)$$

При критическом состоянии  $\lambda_1 = 0$ . Для условно-критических задач требуется найти такое  $k_{ef}$ , чтобы

$$-L\varphi + \beta(x)S\varphi + \frac{1}{k_{ef}}\nu\Sigma_f S\varphi = 0. \quad (2.24)$$

Простейшей системой одногруппового уравнения переноса с запаздывающими нейтронами является система уравнений

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi = \beta(x)S\varphi + \lambda C + (1 - \bar{\beta})\nu\Sigma_f S\varphi,$$

$$\frac{dC}{dt} = -\lambda C + \bar{\beta}\nu\Sigma_f S\varphi, \quad (2.25)$$

где  $C = C(x, t)$ ,  $\lambda > 0$ . Этим уравнениям соответствует уравнение на собственные значения

$$-L\varphi + \beta(x)S\varphi + \lambda C + (1 - \bar{\beta})\nu\Sigma_f S\varphi = \frac{1}{v}\gamma\varphi,$$

$$-\lambda C + \bar{\beta}\nu\Sigma_f S\varphi = \gamma C. \quad (2.26)$$

Исключая из этих уравнений  $C$ , получим обобщенную задачу на собственные значения для пучка операторов. Задачи (2.23), (2.24), (2.26) рассматриваются при краевом условии (2.7). Спектр задачи (2.26), (2.7) имеет следующую структуру на плоскости комплексного переменного  $\gamma$ : он состоит из дискретного спектра, среди которого имеются простое ведущее вещественное собственное значение и подпоследовательность, имеющая предельной точкой величину  $\gamma = -\lambda$ , а вся полуплоскость  $\text{Re}\gamma \leq -C_0$  для некоторого  $C_0 > 0$  является точками непрерывного спектра [13].

Даже на сегодня при наличии высокопроизводительных ЭВМ задачи для сформулированных выше уравнений остаются сложными для серийных "инженерных" расчетов. Их заменяют упрощенными моделями, простейшей из которых является так называемое *диффузионное приближение*, в котором аппроксимация для нулевого момента  $\varphi_0 = S\varphi$ , применительно, например, к краевой задаче (2.12), (2.7), находится как решение краевой задачи для диффузионного уравнения

$$-\text{div}D\nabla\varphi_0 + \alpha(x)\varphi_0 = q_0, \quad (2.27)$$

$$\varphi_0 + 2D\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\Big|_S = 0, \quad (2.28)$$

где  $D = 1/(3\sigma(x))$ ,  $\alpha(x) = \sigma(x) - \beta(x)$ ,  $q_0 = Sq$ .

**Проблема защиты от излучений.** Развитие ядерной энергетики поставило вопрос о расчетах излучений, выходящих из реактора. В этом случае необходимо было решать неоднородную задачу переноса нейтронного и  $\gamma$ -излучения, источником которого в основном является активная зона реактора, т.е. зона деления ядер и зона поглощения нейтронов неделяющимися ядрами с последующим испусканием нейтронов или  $\gamma$ -квантов. Требовалось вычислить серию линейных функционалов

$$I_p(\varphi_k) = \langle \varphi_k, p \rangle \quad (2.29)$$

от решений  $\varphi_k$  неоднородной задачи (2.6)–(2.7) при  $q = q_k$ , представляющую собой скалярное произведение функции измерения  $p$  поля излучения и решения  $\varphi_k$ . С помощью решения  $\psi_p$  сопряженной задачи (2.6\*)–(2.7\*)<sup>2</sup> удалось получить [31] новую формулу для функционалов

$$I_p(\varphi_k) = \langle q_k, \psi_p \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (2.30)$$

как скалярное произведение источника излучения  $q_k$  и решения  $\psi_p$  и его вариации

$$\delta I_p(\varphi_k) = - \langle (\delta L)\varphi_k, \psi_p \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (2.31)$$

(в абстрактной форме — это формулы (3.7) и (3.10)). Эти формулы по-

<sup>2</sup>Эта функция называется функцией ценности нейтронов.



зволили по-другому сформулировать проблему защиты от излучений на основе функции ценности нейтронов  $\psi_p$ , а также поставить ряд важных оптимизационных задач. В самом деле, при таком подходе достаточно один раз определить функцию  $\psi_p$  как решение сопряженного уравнения, а затем вычислять  $I_p(\varphi_k)$  непосредственно по формуле (2.30), не решая задачу (2.6)–(2.7).

Математическая теория ядерных реакторов позволила расширить класс канонических уравнений классической математической физики. К трем типам основных уравнений:

$$\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta \varphi + V(x)\varphi + f(x, t) \quad (2.32)$$

— уравнение теплопроводности (при  $\epsilon = 1$ ), уравнение Шредингера (при  $\epsilon = i$ ) (параболический тип),

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi + b(x)\varphi + f(x, t) \quad (2.33)$$

— волновое уравнение (гиперболический тип), и

$$-\Delta \varphi + \sigma(x)\varphi = f(x) \quad (2.34)$$

— уравнение Пуассона (эллиптический тип) следует прибавить четвертый тип уравнений — односкоростное уравнение переноса с изотропным рассеянием:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\Omega, \nabla)\varphi + \sigma(x)\varphi = \frac{\lambda}{4\pi} \beta(x) \int_{S^2} \varphi(x, \Omega') d\Omega' + f(x, t, \Omega) \quad (2.35)$$

в области  $G \times (0, T) \times S^2$  фазового пространства  $\mathbb{R}^4 \times S^2$  переменных  $(x, t, \Omega)$ . Типичное граничное условие для уравнения (2.35) в выпуклой области  $G$  с границей  $S$  есть (ср.(2.2))

$$\varphi|_S = 0, \quad (\Omega, n_x) < 0, \quad x \in S. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.35) наследует черты как параболического уравнения (2.32), так и гиперболического уравнения (2.33), а соответствующее стационарное уравнение

$$(\Omega, \nabla)\varphi + \sigma(x)\varphi = \frac{\lambda}{4\pi} \beta(x) \int_{S^2} \varphi(x, \Omega') d\Omega' + f(x, \Omega) \quad (2.37)$$

— черты эллиптического уравнения (2.34). Отметим, что задача на собственные значения для однородного уравнения (2.37) [30] с граничным

условием (2.36) эквивалентна интегральному уравнению Пайерлса [30, 1]

$$\varphi_0(x) = \lambda \int_G \beta(y) \exp\left(-\int_y^x \sigma(s) ds\right) \frac{\varphi_0(y)}{|x-y|^2} dy \quad (2.38)$$

относительно средней плотности  $\varphi_0 = S\varphi$ , где

$$\int_y^x \sigma(s) ds = \int_0^1 \sigma[ty + (1-t)x] dt.$$

Как видно из (2.38), ядро интегрального уравнения Пайерлса имеет полярную особенность вида  $|x-y|^{-2}$  на диагонали  $x=y$ , в то время как функция Грина для уравнения Лапласа имеет слабополярную особенность вида  $|x-y|^{-1}$ . Это обстоятельство существенно затрудняет применение численных методов непосредственно к уравнению (2.38).

**Особенности решения уравнения переноса.** Для повышения точности методов расчета сферическисимметричных задач были исследованы особенности производных решения стационарного уравнения переноса (2.37)

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \sigma(r)\varphi = Q(r) \quad (2.39)$$

с граничным условием (2.36)

$$\varphi(\mu, R) = 0, \quad -1 \leq \mu \leq 0 \quad (2.40)$$

как в окрестности раздела  $r=r_0$  двух сред, так и в окрестности характеристики  $r_0^2 - r^2(1-\mu^2) = 0$ , проходящей через границу раздела  $r=r_0$  двух сред.

В результате получена следующая картина. В области  $r < r_0$ ,  $|\mu| \leq 1$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{rM(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - r^2(1-\mu^2)}} + O(|\ln |\mu||), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{r^2 \mu M(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - r^2(1-\mu^2)}} + O(1); \quad (2.42)$$

в области  $r > r_0$ ,  $\mu < \sqrt{1 - (r_0/r)^2}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = O(|\ln |\mu||), \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = O(1); \quad (2.44)$$

в области  $r > r_0, \mu > \sqrt{1 - (r_0/r)^2}$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{2rM(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - r^2(1 - \mu^2)}} + O(|\ln |\mu||), \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{2r^2 \mu M(r_0)}{\sqrt{r_0^2 - r^2(1 - \mu^2)}} + O(1). \quad (2.46)$$

Здесь  $M(r_0) = \varphi(r_0, 0)[\alpha](r_0) - [Q](r_0)$ ,  $[f](r_0) = f(r_0 + 0) - f(r_0 - 0)$ .

Из формул (2.41)–(2.46) для средней плотности  $\varphi_0(r)$  следует такая асимптотика:

$$\varphi_0(r) \sim \frac{1}{2}M(r_0) \ln |r - r_0| + O(1), \quad r \rightarrow r_0. \quad (2.47)$$

Эти результаты были получены в 1952 г. и опубликованы в работе [6] (1968). (Подробности см. в работе Т.А. Гермогеновой [11].) Формула (2.47) другим методом была получена Н.А. Дмитриевым в 1949 г.

Подробная теория односкоростного уравнения переноса развита в монографии В.С. Владимирова [5], а относящиеся к нему численные методы — в статье [4].

### 3. Метод сопряженных уравнений

Сперва кратко изложим абстрактный метод сопряженных уравнений в линейном случае, следуя конкретной схеме, которая использовалась Г.И. Марчуком и его учениками в теории ядерных реакторов [25]–[31].

Пусть  $\mathcal{H}$  — вещественное или комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle \varphi, \psi \rangle$  и нормой  $\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$ . Пусть задан линейный оператор  $L$  с областью определения<sup>3</sup>  $\mathcal{D}(L)$ , плотной в  $\mathcal{H}$ . Рассмотрим неоднородное уравнение

$$L\varphi = q, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L) \quad (3.1)$$

с правой частью  $q \in \mathcal{H}$ .

Сопряженный оператор  $L^*$  к оператору  $L$  вводится на основе равенства

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L), \quad \psi \in \mathcal{D}(L^*). \quad (3.2)$$

---

<sup>3</sup>Как в линейном, так и в нелинейном случае это может быть дифференциальный, интегральный, интегро-дифференциальный или даже псевдодифференциальный оператор, заданный в области  $G$  фазовых переменных  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  с граничными условиями, включенными в определение области  $\mathcal{D}(L)$ . В качестве  $\mathcal{H}$  может быть  $\mathcal{L}_2(G)$ .

Равенство (3.2) нужно понимать следующим образом. Пусть элемент  $\psi \in \mathcal{H}$  таков, что форма  $\varphi \in \langle L\varphi, \psi \rangle$  определяет линейный непрерывный функционал в  $\mathcal{H}$ . Тогда по теореме Рисса существует (и единственный) элемент  $g \in \mathcal{H}$  такой, что

$$\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, g \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{H}. \quad (3.3)$$

Элемент  $g$  назовем значением сопряженного оператора  $L^*$  на элементе  $\psi$ ,  $L^*\psi = g$ , а элемент  $\psi$  отнесем к области определения  $\mathcal{D}(L^*)$  оператора  $L^*$ , так что равенство (3.3) есть не что иное, как равенство (3.2).

Оператор  $L$  называется *замкнутым*, если его график  $\{(\varphi, L\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$  замкнут в  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ , т.е. из  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  и  $L\varphi_k \rightarrow \psi$ ,  $k \rightarrow \infty$  в  $\mathcal{H}$  следует, что  $\varphi \in \mathcal{D}(L)$  и  $L\varphi = \psi$ .

*Замыканием*  $\bar{L}$  оператора  $L$  называется наименьшее замкнутое расширение  $L$ .

*Оператор  $L^*$  замкнут. Оператор  $L$  допускает замыкание тогда и только тогда, когда  $\mathcal{D}(L^*)$  плотна в  $\mathcal{H}$ . Если  $\mathcal{D}(L^*)$  плотна в  $\mathcal{H}$ , то справедливы равенства*

$$\bar{L} = L^{**}, \quad \bar{L}^* = L^*. \quad (3.4)$$

Рассмотрим задачу о вычислении линейного функционала от решения  $\varphi$  уравнения (3.1)

$$I_p(\varphi) = \langle \varphi, p \rangle, \quad p \in \mathcal{H}. \quad (3.5)$$

Для этого введем неоднородное уравнение, сопряженное к уравнению (3.1):

$$L^*\psi_p = p, \quad \psi_p \in \mathcal{D}(L^*). \quad (3.6)$$

Предположим, что его решение  $\psi_p$  существует и единственно в классе  $\mathcal{D}(L^*)$ ;  $\psi_p$  называется *сопряженной* функцией. Из (3.6), (3.5) и (3.2) для искомого функционала  $I_p(\varphi)$  немедленно следует равенство

$$I_p(\varphi) = \langle \varphi, \psi_p \rangle. \quad (3.7)$$

Предположим теперь, что оператор  $L$  обладает (обобщенным) решением  $\varphi$  из  $\mathcal{H}$  уравнения

$$L\varphi = \delta(X - X_0), \quad (3.8)$$

где  $\delta(X - X_0)$  — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке  $X_0$ . Пусть это решение непрерывно в окрестности точки  $X_0$ . Тогда формула (3.7) принимает вид

$$I_p(\varphi) = \psi_p(X_0). \quad (3.9)$$

Аналогичные рассуждения применимы и для теории возмущений.

Если оператор  $L$  возмущен оператором  $\delta L$ , то возмущение функционала  $I_p(\varphi)$  выражается через сопряженную функцию  $\psi_p$  формулой

$$\delta I_p(\varphi) = - \langle \psi_p, (\delta L)\varphi \rangle. \quad (3.10)$$

Возмущение  $\delta\lambda$  первого собственного значения<sup>4</sup>  $\lambda$  также выражается через сопряженную собственную функцию  $\psi$ ,

$$L^*\psi = \lambda\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(L^*), \quad (3.11)$$

по формуле

$$\delta\lambda = \frac{\langle (\delta L)\varphi, \psi \rangle}{\langle \varphi, \psi \rangle}. \quad (3.12)$$

Изложим абстрактный подход к методу сопряженных уравнений в нелинейном случае, следуя работам Г.И. Марчука и его учеников (см. [27]–[28]) и М.М. Вайнберга [2] с учетом нового (однозначного) определения сопряженного оператора, представленного в работе [10] В.С. Владимирова и Г.И. Марчука.

Пусть  $\mathcal{D}$  — линейное множество, плотное в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , и каждому элементу  $\varphi \in \mathcal{D}$  соответствует множество линейных операторов в  $\mathcal{H}$ ,

$$\{\psi \rightarrow A_\varphi\psi, \quad \psi \in \mathcal{D}(A_\varphi)\} \quad (3.13)$$

с областью определения  $\mathcal{D}(A_\varphi)$ , содержащей  $\mathcal{D}$ . Пусть, далее,  $\mathcal{D}(A_\varphi^*)$  также содержит  $\mathcal{D}$ , так что  $\mathcal{D}(A_\varphi)$  и  $\mathcal{D}(A_\varphi^*)$  плотны в  $\mathcal{H}$ . Введем (нелинейные) операторы

$$\varphi \rightarrow A_\varphi^*\varphi = A_\varphi^*\psi|_{\psi=\varphi}, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad (3.14)$$

с областью определения  $\mathcal{D}$ .

**Определение 3.1 [10].** Назовем множества линейных операторов  $\{A_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}\}$  и  $\{B_\varphi, \varphi \in \mathcal{D}\}$  эквивалентными,  $A_\varphi \sim B_\varphi$ , если выполнено равенство

$$A_\varphi^*\varphi = B_\varphi^*\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.15)$$

Введенная эквивалентность обладает свойствами: *рефлексивности*  $A_\varphi \sim A_\varphi$ , *симметричности*  $B_\varphi \sim A_\varphi$ , если  $A_\varphi \sim B_\varphi$ , *транзитивности*  $A_\varphi \sim C_\varphi$ , если  $A_\varphi \sim B_\varphi$  и  $B_\varphi \sim C_\varphi$ . Поэтому множества линейных операторов вида (3.13) распадаются на непересекающиеся классы эквивалентности.

**Пример 3.1.** Множества линейных операторов

$$\{\psi \rightarrow \varphi'\psi, \varphi \in \mathcal{D}\}, \quad \{\psi \rightarrow -(\varphi\psi)', \varphi \in \mathcal{D}\}, \quad \{\psi \rightarrow -\frac{\varphi}{2}\psi', \varphi \in \mathcal{D}\}$$

эквивалентны,

$$\varphi'\psi \sim -(\varphi\psi)' \sim -\frac{\varphi}{2}\psi'.$$

Пусть  $L(\varphi)$  — (нелинейный) оператор с линейной областью определения  $\mathcal{D}(L)$ , плотной в  $\mathcal{H}$ . По аналогии с линейным случаем определим сопряженный оператор  $L_\varphi^*$  к оператору  $L(\varphi)$ .

<sup>4</sup>В случае ядерного реактора оно положительное и простое.

**Определение 3.2 [10].** *Сопряженным оператором  $L_\varphi^*$  к оператору  $L(\varphi)$  назовем класс эквивалентности линейных операторов  $\{\psi \rightarrow L_\varphi^* \psi, \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$  таких, что область определения  $\mathcal{D}(L_\varphi^*)$  оператора  $L_\varphi^*$  содержит  $\mathcal{D}(L)$  и выполнено равенство (ср.(3.2))*

$$\langle L(\varphi), \psi \rangle = \langle \varphi, L_\varphi^* \psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(L_\varphi^*), \varphi \in \mathcal{D}(L). \quad (3.16)$$

Из этого определения вытекают такие утверждения.

*Если  $L$  — линейный оператор, то класс эквивалентности сопряженного оператора к  $L$  состоит из единственного оператора  $L^*$ , который не зависит от  $\varphi$ .*

*Сопряженный оператор  $L_\varphi^*$  к оператору  $L(\varphi)$  единственный (в том смысле, что единственный класс эквивалентности  $\{L_\varphi^*, \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$ ).*

*Необходимым условием существования сопряженного оператора  $L_\varphi^*$  к оператору  $L(\varphi)$  является его представление*

$$L(\varphi) = (L_\varphi^*)^* \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L), \quad (3.17)$$

*т.е. оператор  $L(\varphi)$  есть суперпозиция (нелинейного) оператора  $\varphi \rightarrow L_\varphi^{**} \varphi$  и линейного оператора  $\psi \rightarrow L_\varphi^* \psi$  при каждом  $\varphi \in \mathcal{D}(L)$ .*

С другой стороны, если оператор  $L(\varphi)$  допускает представление

$$L(\varphi) = A(\varphi)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L), \quad (3.18)$$

где  $\varphi \rightarrow A(\varphi)$  — (нелинейный) оператор с линейной областью определения  $\mathcal{D}(L)$ , плотной в  $\mathcal{H}$ , и при каждом  $\varphi \in \mathcal{D}(L)$   $\psi \rightarrow A(\varphi)\psi$  есть линейный оператор, причем области определения  $\mathcal{D}(A(\varphi))$  и  $\mathcal{D}(A^*(\varphi))$  содержат  $\mathcal{D}(L)$ . Тогда сопряженный оператор  $L_\varphi^*$  существует и эквивалентен оператору  $A^*(\varphi)$ , так что

$$L_\varphi^* \sim A^*(\varphi). \quad (3.19)$$

Итак, мы получили следующую теорему.

**Теорема 3.1 [10].** *Для того, чтобы для оператора  $L(\varphi)$  существовал сопряженный оператор  $L_\varphi^*$ , необходимо и достаточно, чтобы он допускал представление (3.18); при этом справедливо равенство (3.19).*

В работах [2], [27], [28] были введены различные определения сопряженных операторов  $L^*(\varphi)$  для нелинейного оператора  $L(\varphi)$ . Среди них отметим следующее:

$$A_0^*(\varphi), \quad \text{где } A_0(\varphi) = \int_0^1 L'(t\varphi) dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L) \quad (3.20)$$

при условии, что оператор  $L(\varphi)$  дифференцируем по Гато и  $L(0) = 0$ . В силу представления [2]

$$L(\varphi) = \int_0^1 L'(t\varphi)t\varphi dt = A_0(\varphi)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L),$$

оператор  $L(\varphi)$  имеет вид (3.18) и поэтому, по доказанному (см.(3.19)), это определение выделяет единственного представителя  $A_0^*(\varphi)$  из класса эквивалентности сопряженных операторов  $\{L_\varphi^*, \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$ , так что

$$L_\varphi^* \sim A_0^*(\varphi). \quad (3.21)$$

**Пример 3.2.** Для  $L(\varphi) = \varphi\varphi'$  формулы (3.19) и (3.20) дают

$$L_\varphi^*\psi = -\frac{\varphi}{2}\psi'.$$

**Пример 3.3.** Если  $L(\varphi) = \varphi^k(\partial^\alpha\varphi)^m$ , то

$$L_\varphi^* = \frac{k}{k+m}\varphi^{k-1}(\partial^\alpha)^m + \frac{m}{k+m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha[\varphi^k(\partial^\alpha\varphi)^{m-1}].$$

Важный для приложений достаточно широкий класс нелинейных операторов вида (3.18) был рассмотрен в работах [7]–[9]:

$$L(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \varphi) \partial^\alpha \varphi(x), \quad (3.22)$$

где  $\varphi \rightarrow A_\alpha(x, \varphi)$  — (нелинейные) операторы с общей линейной областью определения  $\mathcal{D}(L)$ , плотной в  $\mathcal{H}$ .

Обозначая

$$A(x, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, \varphi) \partial^\alpha,$$

представим оператор (3.22) в виде (3.18):

$$L(\varphi) = A(x, \varphi)\varphi.$$

В этом случае при каждом  $\varphi \in \mathcal{D}(L)$  сопряженный (по Лагранжу) оператор имеет вид

$$\tilde{A}(x, \varphi)\psi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha [A_\alpha(x, \varphi)\psi], \quad \varphi \in \mathcal{D}(L), \psi \in \mathcal{D}(A^*(\varphi)). \quad (3.23)$$

Были построены законы сохранения для уравнения

$$A(\varphi)\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(L), \quad (3.24)$$

с использованием решений  $\psi$  ассоциированного уравнения

$$\tilde{A}(x, \varphi)\psi = 0, \quad \psi \in \mathcal{D}(A^*(\varphi)), \quad (3.25)$$

где  $\varphi$  есть решение уравнения (3.24).

Сохраняющиеся токи  $J_\nu(\varphi, \psi; x)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n$ , для системы (3.24) при  $m \geq 1$  имеют вид

$$J_\nu(\varphi, \psi; x) = \sum_{q+k=0}^{m-1} \sum_{\nu_i, \lambda_j} (-1)^k \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_k} [A_{\nu\nu_1\dots\nu_k\lambda_1\dots\lambda_q}(x, \varphi) \psi \partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_q} \varphi], \quad (3.26)$$

где  $\psi$  — решения уравнений (3.25).

**Пример 3.4.** Пусть  $m = 1$ . Уравнения (3.24) и (3.25) принимают вид

$$A_0(x, \varphi) \varphi + \sum_{\nu=1}^n A_\nu(x, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = 0,$$

$$A_0(x, \varphi) \psi - \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\nu} [A_\nu(x, \varphi) \psi] = 0,$$

а токи (3.26) —

$$J_\nu(\varphi, \psi; x) = A_\nu(x, \varphi) \psi \varphi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (3.27)$$

Оператор  $\tilde{A}(x, \varphi)$  формально совпадает с представителем класса сопряженных операторов  $\{A^*(x, \varphi), \varphi \in \mathcal{D}(L)\}$ . Ввиду неоднозначности оператор  $\tilde{A}(x, \varphi)$  был назван в работах [7], [8] ассоциированным с оператором  $A(x, \varphi)$ , а не сопряженным к оператору  $L(\varphi)$ .

В работах [7], [8] рассматривалась система уравнений вида (3.24), в которой  $A_\alpha, \varphi(x)$  и  $\psi(x)$  предполагались  $q \times s$ -,  $s \times r$ - и  $r \times q$ -матрицами-функциями. В этом случае формула (3.26) дает  $r \times r$ -матрицу законов сохранения.

**Определение 3.3 [10].** Оператор  $L(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(L)$ , вида (3.18) называется *симметричным (существенно-самосопряженным, сопряженным)*, если в классе эквивалентности сопряженных к нему операторов существует симметричный (существенно-самосопряженный, самосопряженный соответственно) оператор.

**Пример 3.5.** Оператор

$$\partial^\alpha \{ [A(x, \varphi) \partial^\alpha] \varphi \}, \quad \varphi \in \mathcal{C}^{2|\alpha|}(\bar{G}),$$

симметричный, если функция  $A(x, \varphi)$  вещественная и непрерывная в  $\bar{G} \times \mathbb{C}$ ,  $G$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ .

**Пример 3.6.** Интегральный оператор

$$\int_G K(\varphi(x), \varphi(y); x, y) \varphi(y) dy$$



самосопряженный в  $\mathcal{L}_2(G)$ , если  $G$  — ограниченная область и  $K$  — эрмитово ограниченное ядро:

$$K(X, Y; x, y) = \bar{K}(Y, X; y, x), \quad |K(X, Y; x, y)| \leq M.$$

**Пример 3.7 [28].** Оператор

$$L(\varphi) = \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \varphi$$

самосопряженный, поскольку при каждом  $\varphi \in \mathcal{L}_2(a, b)$  оператор  $\psi \rightarrow \frac{\sin \varphi}{\varphi} \psi$  самосопряженный в  $\mathcal{L}_2(a, b)$ .

**Пример 3.8.** Уравнение Хартри–Фока для  $z$ -электронной волновой функции  $\psi$  имеет вид [33]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H(x, \psi) \psi, \quad \psi(x) = \psi_1(x_1) \psi_2(x_2) \dots \psi_z(x_z),$$

где  $H(x, \psi)$  — нелинейный оператор в  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{3z})$ ,

$$H(x, \psi) = \sum_{k=1}^z \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_k - \frac{ze^2}{|x_k|} + e^2 \sum_{j \neq k} \int \frac{|\psi_j(x_j)|^2 dx_j}{|x_k - x_j|} \right].$$

Если  $\psi_k, k = 1, 2, \dots, z$ , ограничены в  $\mathbb{R}^3$ , то оператор  $H(x, \psi)$  — существенно-самосопряженный, в силу критерия Като,  $\bar{H}(\psi, x) = H^*(\psi, x)$ .

Идея использования сопряженных уравнений оказалась весьма плодотворной не только в линейной теории и практике переноса нейтронов и излучения (ценность нейтронов, законы сохранения, теория возмущений и т.д.), но и во многих других прикладных разделах математической физики: физике атмосферы и океана, механике сплошной среды, квантовой механике, интегрируемых системах, охране окружающей среды, математических задачах иммунологии, оптимальном управлении, усвоении и обработке данных, включая и нелинейные задачи. Существенный вклад в эту проблематику был внесен Г.И. Марчуком и его учениками (см. [27], [28]).

## 4. Численные методы для стационарных неоднородных уравнений переноса

Несмотря на впечатляющие достижения за последние 50 лет в численных методах, сделавших возможным проектирование, пуск и работу АЭС, полномасштабная проблема нахождения решений нестационарного уравнения (2.1) представляется и на сегодняшний день, в силу ее многомерности, далеко не решенной задачей, требующей разработки новых, более

совершенных вычислительных алгоритмов и создания на качественно новом уровне вычислительной техники. Практический успех разработок был обусловлен тем, что достаточно точно давали необходимые решения упрощенные модели уравнения (2.1). Мы коснемся достаточно фрагментарно лишь некоторых вопросов, отсылая для более подробного ознакомления с библиографией по затронутым темам к монографиям [30, 1]. Мы рассмотрим лишь детерминированные методы, оставляя в стороне методы Монте-Карло. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением одногрупповых уравнений, записанных в виде (2.12), (2.13), (2.15), (2.17).

Для численного решения краевой задачи (2.27)–(2.29) в одномерном случае (пусть для шара  $|x| = r < R$ ) используется метод факторизации.

**Метод факторизации [3].** Рассмотрим классическую краевую задачу типа Штурма–Лиувилля для функции  $m(r) = r\varphi_0(r)$

$$-(Dm')' + \alpha m = q(r), \quad 0 < r < R, \quad (4.1)$$

$$m(0) = 0, \quad m(R) + hm'(R) = 0, \quad (4.2)$$

где  $D > 0$ ,  $\alpha \geq 0$  и  $h \geq 0$ .

Факторизуя оператор

$$-(Dm')' + \alpha m = -\left(\frac{d}{dx} + g/D\right)\left(D\frac{d}{dx} - g\right)m, \quad (4.3)$$

получим уравнение Риккати

$$g' + g^2/D = \alpha \quad (4.4)$$

для вспомогательной функции  $g$ , а уравнение (4.1) распадется на два линейных уравнения первого порядка

$$m_1' + g/Dm_1 = q(r), \quad (4.5)$$

$$Dm' - gm = -m_1(r). \quad (4.6)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (4.2), положим

$$g(0) = 0, \quad m_1(0) = 0, \quad m(R) = \frac{hm_1(R)}{D(R) + hg(R)}. \quad (4.7)$$

Уравнение Риккати (4.4) при начальном условии  $g(0) = 0$  имеет положительное решение на  $(0, R]$ . Поэтому уравнение (4.5) при условии  $m_1(0) = 0$  устойчиво численно интегрируется от точки  $r = 0$  до точки  $r = R$ , а уравнение (4.6) при условии (4.7) ( $m(R)$  известно) устойчиво численно интегрируется от точки  $r = R$  до точки  $r = 0$ . Таким образом, решение неустойчивой

краевой задачи (4.1), (4.2) свелось к решению трех устойчивых задач Коши: для уравнения Риккати (4.4) и для двух линейных уравнений (4.5) и (4.6) при начальных условиях (4.7).

Этим методом в течение 1953–1955 гг. было вручную рассчитано большое количество задач со сложным энергетическим спектром (и, стало быть, с большим количеством групп) в рамках усовершенствованного диффузионного приближения (Арзамас-16, расчет РДС-37 по заданию А.Д. Сахарова).

Существуют два метода получения систем линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих уравнение переноса: вариационный и конечно-разностный.

**Вариационные методы.** В вариационном методе, который можно трактовать как обобщенный метод Галеркина, приближенное решение ищут в виде

$$\sum_{k=0}^n a_k g_k(x) h_k(\Omega). \quad (4.8)$$

Если в (4.8)  $h_k(\Omega)$  — заданные сферические функции, то получают метод сферических гармоник, или  $P_n$ -приближения — систему дифференциальных по пространственным переменным уравнений. Для уравнения (2.15) и нечетных  $n$  обоснование метода было впервые получено в работе [5]; в этом случае он превращается в метод Ритца, решение которого минимизируют квадратичный функционал (2.21).

При заданных  $g_k(x)$  получаем систему вырожденных интегральных уравнений, а при заданных  $g_k(x)$ ,  $h_k(x)$  — методы конечных элементов; для уравнения (2.16) решения полученных уравнений минимизируют на соответствующих подпространствах квадратичный функционал (2.21) [30].

**Конечно-разностные методы.** Конечно-разностные аппроксимации многомерных уравнений переноса имеют непростую историю. На первых этапах их развития не учитывалась специфика решений, гладкость у которых наблюдается лишь вдоль характеристик, а возможные разрывы в решении по другим направлениям (возникающие в многозонных задачах с плоскими границами) также распространяются вдоль характеристик.

Впервые разностный метод характеристик, учитывающий упомянутую специфику решений, был предложен в работе [4] для решения задач в сферической геометрии (рис. 1) и в этой же работе доказана его сходимость.

По-видимому, только те разностные схемы способны удовлетворительно аппроксимировать уравнение переноса, в которых заложены идеи метода характеристик. Среди таких схем достойны внимания разностные уравнения с повышенной локальной аппроксимацией, что позволяет существенно сократить порядок решаемых уравнений. Приведем пример подобной аппроксимации для уравнения (2.17). Для этого рассмотрим точ-

ки  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , лежащие на характеристике  $x(\xi) = x_0 + \Omega\xi$  в области  $G$ . Пусть  $\xi_3 - \xi_2 = \xi_2 - \xi_1 = h > 0$ , а функция  $l(x)$  при  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_3$  постоянна. Пусть

$$\delta^2 \vartheta_2 = \vartheta_1 - 2\vartheta_2 + \vartheta_3, \quad \omega \vartheta_2 = \frac{5}{6} \vartheta_2 + \frac{1}{12} (\vartheta_1 + \vartheta_3)$$

разностные операторы, в которых  $\vartheta_i$  есть значение функции  $\vartheta_i$  в точках  $x_i = x_0 + \Omega\xi_i$  характеристики. Тогда разностное уравнение

$$-l^2 \frac{\delta^2 u_2}{h^2} = \omega(-u + cSu + q/\sigma)_2 \quad (4.9)$$

при достаточно гладком вдоль характеристики решении уравнения (2.17) будет с точностью  $O(h^4)$  аппроксимировать это уравнение [30].

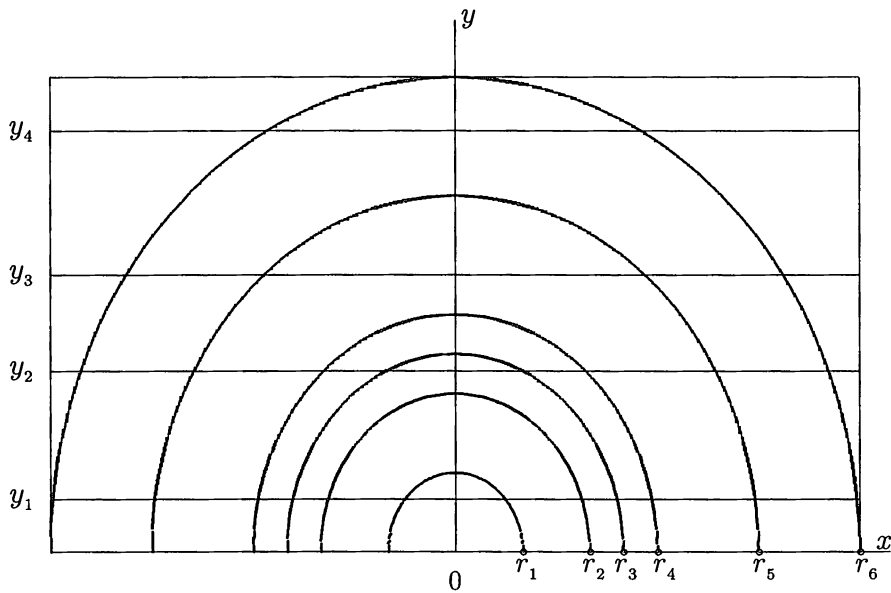


Рис. 1. Метод характеристик

**Аппроксимации интегральных операторов.** С целью существенно уменьшения числа угловых направлений в квадратурных формулах, аппроксимирующих интегральные операторы, представляющие интегрирование по единичной сфере, были разработаны методы получения квадратурных формул типа Гаусса, инвариантных относительно дискретных групп вращения [14, 15, 36, 20]. Были получены параметры таких квадратур повышенной алгебраической степени точности до 131-го порядка, инвариантных относительно группы октаэдра с инверсией. Веса этих квадратур оказались положительными и достаточно выровненными, а узлы — достаточно регулярно триангулируют поверхность единичной сферы. На рис. 2 показано

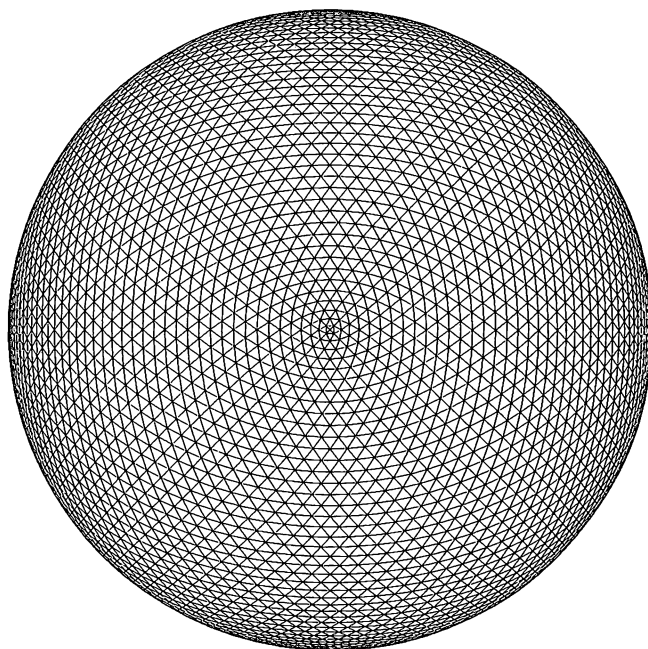


Рис. 2. Квадратура 131-го порядка для сферы

расположение узлов квадратуры 131-го порядка; она содержит 5810 узлов и точно интегрирует первые 17424 сферические гармоники.

Серьезную проблему при решении многомерных задач методом характеристик представляют разработки под эти задачи двух обоснованных методов продолжения функций: интерполяцию в расчетные точки характеристик значений правых частей  $Q$  уравнений (заданных на некоторой сетке  $D_n$ ) и разнос в точки  $D_n$  для вычисления функции  $Q$  значений  $\varphi(x_i, \Omega_k)$ , рассчитываемых на характеристиках (рис. 1).

**Итерационные методы. КР-метод.** При существующем уровне вычислительной техники классические линейные итерационные методы, а также методы ускорения их неприменимы для решения многомерных задач переноса, так как требуют запоминания в памяти ЭВМ непомерно большого объема информации о предыдущем приближении  $\varphi^k(x, \Omega)$ . Поэтому в начале 1960-х гг. были разработаны КР-метод и методы ускорения его в подпространстве функций, зависящих только от  $x$  [30]. Метод был в 1963 г. успешно внедрен для вычисления коэффициента теплового использования в ячейках реактора со сложными тепловыделяющими элементами. Метод требует запоминания только значений  $S\varphi^k$ . Опишем его простейшую схему на примере использования дифференциальных уравнений (2.12) и (2.27).

В нем по заданному приближению  $S\varphi^k$  следующее приближение  $S\varphi^{k+1}$  находят согласно реализации двух операций: операции  $K$ -простой итерации по источнику для уравнения переноса

$$L\varphi^{k+1/2} = \beta(x)S\varphi^k + q, \quad (4.10)$$

результатом которой является образование и запоминание массива величин  $S\varphi^{k+1/2}$ , и операции  $P$ -решения для поправки  $w^{k+1/2}$  краевой задачи для диффузионного уравнения типа (2.27)

$$-g_k \operatorname{div} D \nabla w^{k+1/2} + \sigma_1(x) w^{k+1/2} = \beta(x) S(\varphi^{k+1/2} - S\varphi^k), \quad (4.11)$$

после выполнения которой полагаем

$$S\varphi^{k+1/2} = S\varphi^{k+1} + w^{k+1/2}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.12)$$

В формуле (4.11)  $g_k$  — ускоряющие КР-метод итерационные параметры. Значения их найдены для модельных задач [30]:  $g_k = (1 + y_k)/2$ , где  $y_k$  — корни многочлена Якоби  $P_N^{(-1/2, 2N)}(y)$ .

Чебышевский одношаговый итерационный метод является универсальным алгоритмом ускорения методов итераций. Однако для плохо обусловленных систем уравнений этот метод считался неустойчивым. Попытки применения его приводили к катастрофическому возрастанию ошибок округления. Поэтому этот метод не находил широкого применения. Впервые в исследованиях В.И. Лебедева и С.А. Финогенова [21, 22] было показано, что устойчивость метода существенно зависит от порядка употребления параметров, и предложены алгоритмы перемешивания их, обеспечивающие устойчивость счета. Для ускорения внешних и внутренних медленно сходящихся итераций в задачах на  $k_{ef}$  (2.24) и (2.27), (2.28) были созданы устойчивые бесконечно продолжаемые чебышевские методы с применением  $T$ -последовательности [30, 40, 21], норма общего оператора перехода у которых на каждом итерационном шаге не выше единицы.

Многие оптимальные алгоритмы вычислительной математики основаны на использовании свойств экстремальных многочленов (ЭМ). В качестве ЭМ используются, как правило, многочлены Чебышева. Однако при наличии более точной информации об искомом решении задачи возникают новые постановки оптимизации методов решения, требующие разработки эффективных устойчивых методов нахождения ЭМ, коэффициенты которых подчинены нелинейным связям. Целью проведенных в [39, 40] исследований была разработка новых эффективных и устойчивых методов получения параметров экстремальных многочленов высокого порядка со связями для использования их в оптимальных методах решения задач вычислительной математики и математической физики по следующим направлениям.

Исследование свойств ЭМ Золотарева, Геронимуса, ЧМБС-многочленов. Эти многочлены удовлетворяют обобщенному условию альтернанса и зависят от нескольких свободных параметров, с их помощью найдены аналитические решения новых экстремальных задач со связями.

Изучение многочленов, наименее отклоняющихся от нуля в областях плоскости комплексного переменного, ограниченных лемнискатами специальных типов.

Оптимизация двух- и трехчленных итерационных методов нахождения решения линейных операторных уравнений и частичных задач на собственные значения. В этих задачах предполагается, что спектр оператора может принадлежать областям специального вида, отличного от отрезка или эллипса.

Определение параметров ЭМ для явных двухслойных устойчивых разностных схем 3-го и 4-го порядков точности с максимальным (по устойчивости) средним шагом для интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений.

Получение квадратурных формул типа Гаусса, точных для всех дробно-рациональных функций с фиксированным знаменателем.

**Параллельные вычисления.** Дальнейший прогресс в численных методах решения многомерных уравнений переноса невозможен без применения мощных параллельно действующих вычислительных систем. Поэтому становятся актуальными разработки методов решения исходной сложной задачи на основе методов решения составляющих ее подзадач и создание на этой основе эффективных итерационных методов. Естественно при этом каждую задачу рассматривать как некий "черный ящик", состояние которого определяется лишь входной и выходной информацией, а решение ее дается на откуп отдельной компьютерной системе.

При расчетах реакторов возникает и другая проблема. Вдали от неравномерностей нулевой момент  $S\varphi$  достаточно точно определяется из диффузионного приближения (2.27) (см. рис. 5). Поэтому возникает задача корректного согласования решений уравнений переноса и диффузии нейтронов. Аналогичные проблемы возникают и в параллельных системах, если каждая из подзадач решается своими методами (вариационными или разностными, в разных геометриях).

В методе композиции [16] исследованы условия, при выполнении которых задача, составленная из подзадач, поставлена корректно. Пусть для простоты изложения каждая из двух подзадач для нахождения  $u_i \in V_i$  задана вариационными уравнениями

$$a_i(u_i, v_i) = f_i(v_i), \quad \forall v_i \in V_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

где  $a_i(u_i, v_i)$  — ограниченные эллиптические формы, определенные на элементах  $u_i, v_i$  гильбертовых пространств  $V_i$ , а  $f_i(v_i)$  — ограниченные на  $V_i$

линейные функционалы. Тогда для нахождения  $u = (u_1, u_2)$  из нового гильбертова пространства  $\bar{V} \in V_1 \times V_2$ , можно сформулировать составную задачу вида

$$a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2) = \bar{f}_1(v_1) + \bar{f}_2(v_2), \quad \forall v = (v_1, v_2) \in \bar{V}, \quad (4.14)$$

с условиями согласования

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \gamma_1 u_1 &= \bar{U}_2 \gamma_2 u_2, \\ \bar{J}_1 \delta_1 u_1 + \bar{J}_2 \delta_2 u_2 &= \tau, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , — операторы, называемые *операторами Дирихле*, а  $\delta_i$  — соответствующие им *операторы Неймана*, определяемые по формуле Грина для  $a_i(u_i, v_i)$ . Исследованы условия на операторы  $\bar{U}_i$ ,  $J_i$ ,  $i = 1, 2$ , и пространство  $\bar{V}$ , при выполнении которых составная задача (4.14), (4.15) будет корректно поставлена. В связи с этим изучены свойства граничных операторов, названных *операторами Пуанкаре–Стеклова*. Они определяются равенствами

$$S_i \delta_i u_i = \gamma_i u_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.16)$$

где  $u_i$  — решение однородных (при нулевом внутреннем источнике) задач (4.13),  $i = 1, 2$ . Области определения и значений этих операторов определяют для каждой из подзадач вид передаваемой "внутри" и "вне" информации.

Строение ядерного реактора имеет ячеичную структуру, которая естественным образом определяет тип подзадач — расчет поля нейтронов внутри ячеек реактора. Решения же ячеичных задач представимы через собственные функции соответствующих для каждой ячейки операторов Пуанкаре–Стеклова

$$S_i e = \lambda e, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

На основе сказанного сформулированы и исследованы на операторном уровне чебышевские итерационные методы с переменными параметрами для решения общей задачи. Эффективность подобных методов для одногрупповых задач переноса в плоской геометрии была исследована в [17, 34].

## 5. Нестационарные задачи, спектральный анализ. Условия сшивки решений

**Жесткие системы дифференциальных уравнений и явные методы.** Рассматриваемые в едином комплексе три проблемы — методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка, разностные или вариационные методы решения задач пере-



носа и диффузии нейтронов и методы распараллеливания для многопроцессорных ЭВМ — побуждают вернуться еще раз к исследованию эффективности явных разностных схем, которые в разбираемой ситуации допускают почти идеальное распараллеливание вычислений.

Если аппроксимировать в нестационарных уравнениях (2.1), (2.4), (2.8), (2.9), (2.25) дифференциальные по  $x$  операторы конечномерными, то получим систему линейных обыкновенных по  $t$  дифференциальных уравнений (нестационарные уравнения метода прямых).

Благодаря упомянутой аппроксимации, наличию малого множителя при  $\frac{\partial u}{\partial t}$  в уравнениях (2.9), (2.25) и больших множителях в правых частях уравнений (2.1), (2.8) получаем на отрезке  $0 \leq t \leq T$  жесткую задачу Коши для системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка вида

$$\frac{du}{dt} = Au + q, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad (5.1)$$

где  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})$ ,  $q = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $A$  —  $(n \times n)$ -матрица. Пусть  $(\lambda_i, \varphi_i)$  — собственные пары матрицы  $A$ ,  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_i\}$ ,  $\{\varphi_i\}$  образуют базис в пространстве  $R^n$ , а лежащая в левой полуплоскости комплексного переменного  $z$  часть спектра  $\{\lambda_i\}$  принадлежит области  $B$ , содержащейся в круге  $K_r$  минимального радиуса  $r > 0$  вида

$$K_r = \{z : |z + r| \leq r\}. \quad (5.2)$$

Назовем задачу (5.2) жесткой, если

$$rT \gg 1. \quad (5.3)$$

Тогда для явных методов Эйлера с постоянным шагом  $h$  по времени последний, для устойчивого счета, должен удовлетворять неравенству

$$h \leq \text{cou} = r^{-1}, \quad (5.4)$$

которое накладывает сильное ограничение на размер временного шага. Однако существуют явно устойчивые алгоритмы с переменными шагами  $\tau_{k+1}$  вида

$$u_{k+1} = u_k + \tau_k(Au_k + q_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (5.5)$$

интегрирующие жесткую задачу Коши при затрате существенно меньшего количества шагов [38, 41]. Для них  $l_N = \sum_{i=1}^N \tau_i = P'_N(0)$ , где многочлен  $P_N(z)$  имеет вид

$$P_N(z) = \prod_{i=1}^N (1 + \tau_i z). \quad (5.6)$$

При выполнении условий аппроксимации он удовлетворяет условию устойчивости

$$\max_{z \in B} |P_N(z)| \leq 1 \quad (5.7)$$

и является решением задачи Маркова

$$P_N(z) = \arg \sup_{R_N} (R'_N(0)), \quad (5.8)$$

где  $l_N = \sup_{R_N} (R'_N(0))$  взят по всем многочленам вида (5.6), удовлетворяющим условиям (5.7). Если обозначить через  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , корни экстремального многочлена (5.8), то в оптимальном методе (5.5) временные шаги определяются из множества чисел:  $-z_i^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В предельном случае, когда  $B = [-M, 0]$ ,  $M \gg 1$ , решением (5.8) будет многочлен Чебышева, а тогда за  $N$  шагов оптимального метода (5.5) мы продвинемся по времени на величину

$$l_N = N^2 \cos \alpha. \quad (5.9)$$

Изложенный метод предполагает, что корни многочлена (5.8) действительны. Для общего случая получены другие формулы явного метода. Для простоты пусть  $N = 2n$ . Тогда многочлен  $P_N(z)$  (5.8) можно факторизовать на квадратичные множители и получить следующие формулы интегрирования задачи (5.1):

$$\begin{aligned} y_{k+1/2} &= u_k + h_{k+1} f(u_k, t_k), \\ t_{k+1/2} &= t_k + h_{k+1}, \\ y_{k+1} &= y_{k+1/2} + h_{k+1} f(y_{k+1/2}, t_{k+1/2}), \\ t_{k+1} &= t_{k+1/2} + h_{k+1}, \\ u_{k+1} &= y_{k+1} + \gamma_{k+1} h_{k+1} (f(u_k, t_k) - f(y_{k+1/2}, t_{k+1/2})), \\ k &= 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$f(u, t) = Au + q.$$

Этот метод состоит из двух эйлеровых шагов и поправки. В нем параметры  $h_i$ ,  $\gamma_i$  легко определяются по корням  $P_N(z)$ . Метод (5.10), учитывающий и комплексный спектр, был запрограммирован в программе DUMKA; в ней в зависимости от условий аппроксимации  $2 \leq N \leq 2^{16} \cdot 3^6$  [38, 41]. С помощью этой программы были успешно решены ряд линейных и нелинейных многомерных задач математической физики с действительным и комплексным спектром.

**Спектральные задачи.** Для создания добротных методов решения (включая итерационные) стационарных и нестационарных задач переноса следует иметь информацию о расположении спектра задач (2.1), (2.8),

(2.25) и их разностных аналогов. Здесь мы сталкиваемся с нетрадиционной для физики ситуацией: дискретный спектр имеет и конечные предельные точки, а непрерывный спектр заполняет массивную, вплоть до  $-\infty$ , часть плоскости комплексного переменного. Расположение полного спектра дискретных аналогов уравнений переноса исследовано мало. Впервые в работах [12, 35] дано полное описание спектра для плоской трехзонной разностной модели реактора ВВЭР в диффузионном приближении с шестью группами запаздывающих нейтронов. Оригинальная технология спектрального анализа, разработанная в [44], позволила исследовать эволюцию спектрального состава нестационарных решений: выделить главное инвариантное пространство и оценить нормы проекции решения на инвариантное подпространство, дополнительное к главному. Это позволило получить хорошую асимптотику для решения нестационарных задач, удерживая в разложении в ряд Фурье решения малое количество слагаемых.

На рис. 3, 4 показан полный спектр плоской, критической, трехзонной, дискретной задачи (2.26) с шестью группами запаздывающих нейтронов и

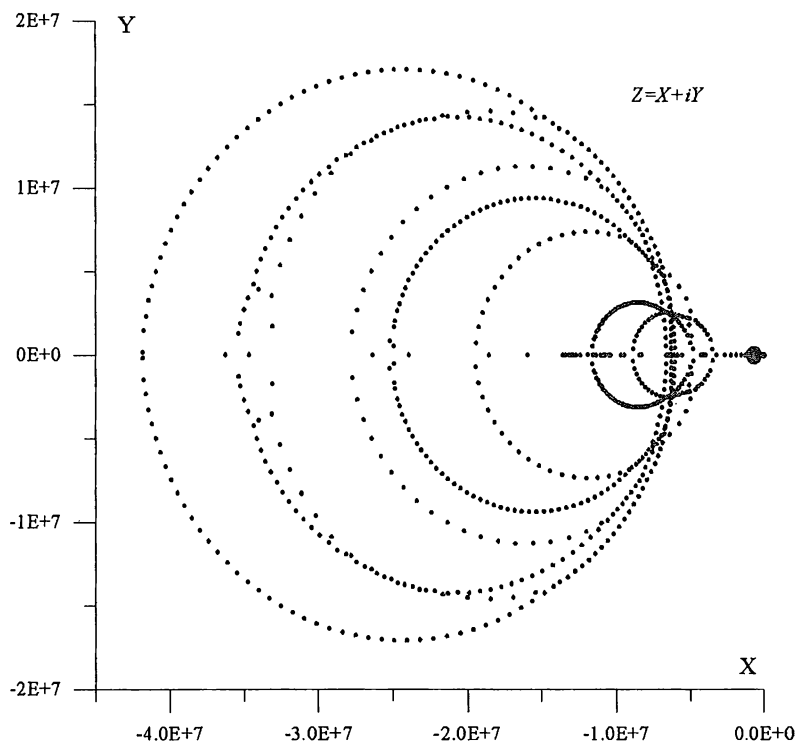


Рис. 3. Спектр двухгрупповой задачи

восемью угловыми направлениями, содержащий 1986 точек. Образованные точками овалы аппроксимируют точки непрерывного спектра исходной за-

дачи (на рис. 4 в увеличенном размере показано содержание "кляксы" на рис. 3). Разброс спектра свидетельствует, что соответствующая нестационарная задача является жесткой с комплексным спектром.

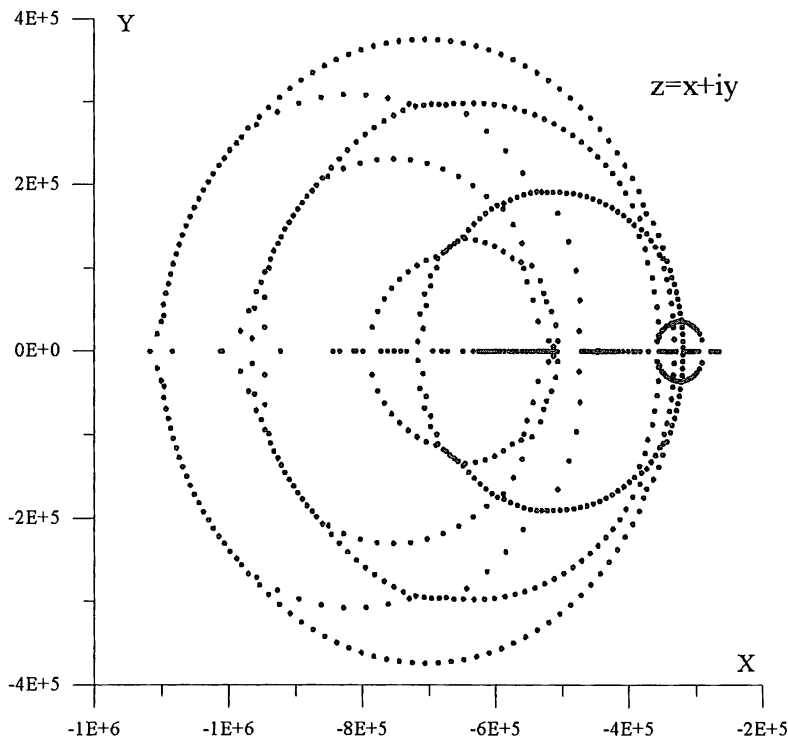


Рис. 4. Спектр внутри "кляксы"

**Что считать и как сшивать?** Представим нестационарные уравнения (2.1), (2.8), (2.25), записанные вдоль характеристик, в виде

$$\frac{du}{dt} = f(u, v, t), \quad (5.11)$$

где  $u$  есть  $N$  или  $\varphi$ , причем

$$\varphi = vN, \quad (5.12)$$

$v$  здесь удобно рассмотреть как параметр. Определим для уравнения (5.11) задачу Коши на отрезке  $[0, T]$  с начальным условием  $u|_{t=0} = u_0$ .

Специфика реакторных задач заключается в том, что реактор разбивается на зоны и коэффициенты уравнения в результате усреднения считаются кусочно-постоянными по  $x$  (в нелинейном случае зависящими от решения) с разрывами на границах зон. Таким образом, уравнение (5.11) — дифференциальное уравнение с разрывной правой частью. Это требует обобщения понятия решения. Так, при выполнении условий Каратеодори [32]

решением его естественно считать абсолютно непрерывную функцию, являющуюся решением интегрального уравнения

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s), v, s) ds. \quad (5.13)$$

Именно на аппроксимации этой формулы основаны численные алгоритмы нахождения решений уравнения (5.11).

Однако довольно часто в малогрупповых уравнениях (2.8), (2.9) скорости  $v$  в каждой группе считаются кусочно-постоянными по  $x$  функциями с разрывами на границах зон. Этот эффект возникает в результате усреднения их по энергии в зонах с различными свойствами. Это приводит к тому, что если мы требуем, чтобы при переходе границы зоны была непрерывна плотность  $N$ :

$$[N] = 0 \quad (5.14)$$

(здесь  $[N]$  означает скачок функции  $N$  на границе зон), то из формулы (5.12) следует, что тогда будет разрыв потока  $\varphi$ . А если потребуем непрерывности потока:

$$[\varphi] = 0, \quad (5.15)$$

то будет разрывна плотность  $N$ .

Аналогичные проблемы возникают при формулировке условий согласования на границах зон для  $\Phi = S\varphi$  или  $N_0 = SN$  в диффузионном приближении, связанных соотношением

$$\Phi = vN_0. \quad (5.16)$$

Выяснено, что условию (5.14) соответствуют условия

$$[N_0] = 0, \quad \left[ D \frac{\partial N_0}{\partial n} \right] = 0, \quad (5.17)$$

а условию (5.15) —

$$[\Phi] = 0, \quad \left[ D \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = 0, \quad (5.18)$$

где  $n$  — нормаль к поверхности раздела зон.

На рис. 5 показаны графики нулевых моментов первой собственной функции упомянутой ранее двухгрупповой задачи (2.25), (2.26) в кинетическом и диффузионном приближении; при условиях (5.15) и (5.18) эти функции (как и соответствующие решения задач в (5.14), (5.17)) хорошо совпадают между собой. А на рис. 6 показан соответствующий первой группе график для плотности  $N_0$ , вычисленной по формуле (5.16).

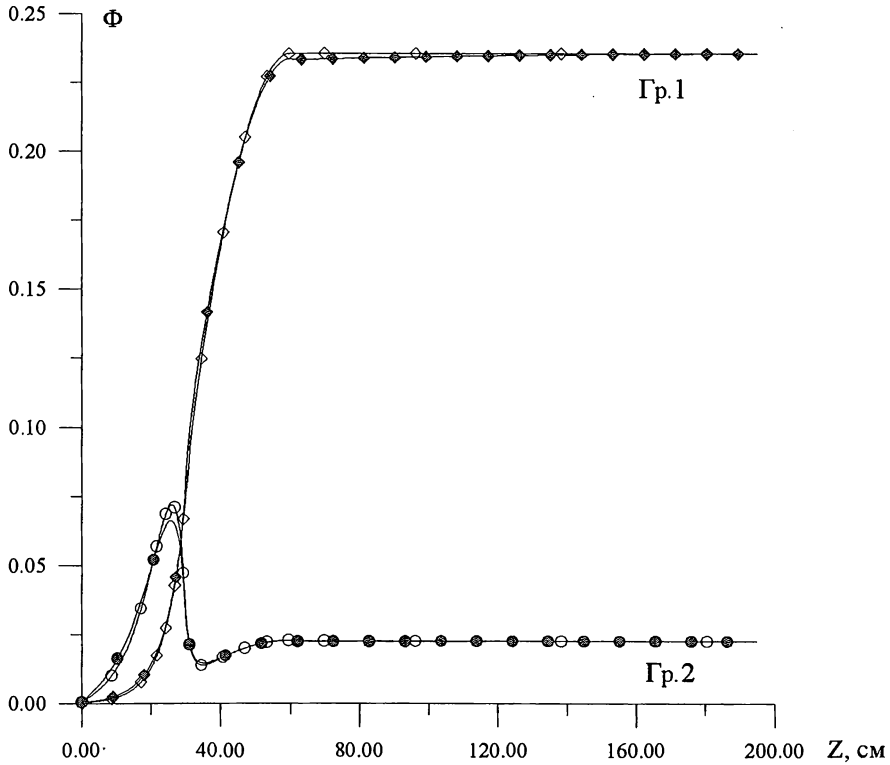


Рис. 5. Поток нейтронов в 1 и 2-й группах.

Двухгрупповая задача переноса и диффузии нейтронов:

- $\diamond$  — 1-я группа диффузии нейтронов;     $\blacklozenge$  — 1-я группа переноса нейтронов;  
 $\circ$  — 2-я группа диффузии нейтронов;     $\bullet$  — 2-я группа переноса нейтронов

Однако остается открытым вопрос: считать ли непрерывной плотность или поток? Каждый из этих вариантов дает разные  $k_{ef}$  собственные функции и заметное различие в темпах разгона мощности реактора в аварийных режимах для задач вида (2.25), когда реактивность близка к  $\bar{\beta}$ . Заметим, что использование вместо (5.17) условий

$$[N_0] = 0, \quad \left[ vD \frac{\partial N_0}{\partial n} \right] = 0,$$

обеспечивающих симметричность эллиптического оператора в диффузионном приближении, приводит к резкому возрастанию (в приведенном примере на 3 порядка) темпа разгона мощности [19, 18].

По-видимому, целесообразно рассчитывать уравнения для плотности, являющейся предельным значением трехмерного функционала, хотя исторически сложилась практика расчета многогрупповых констант для потока.

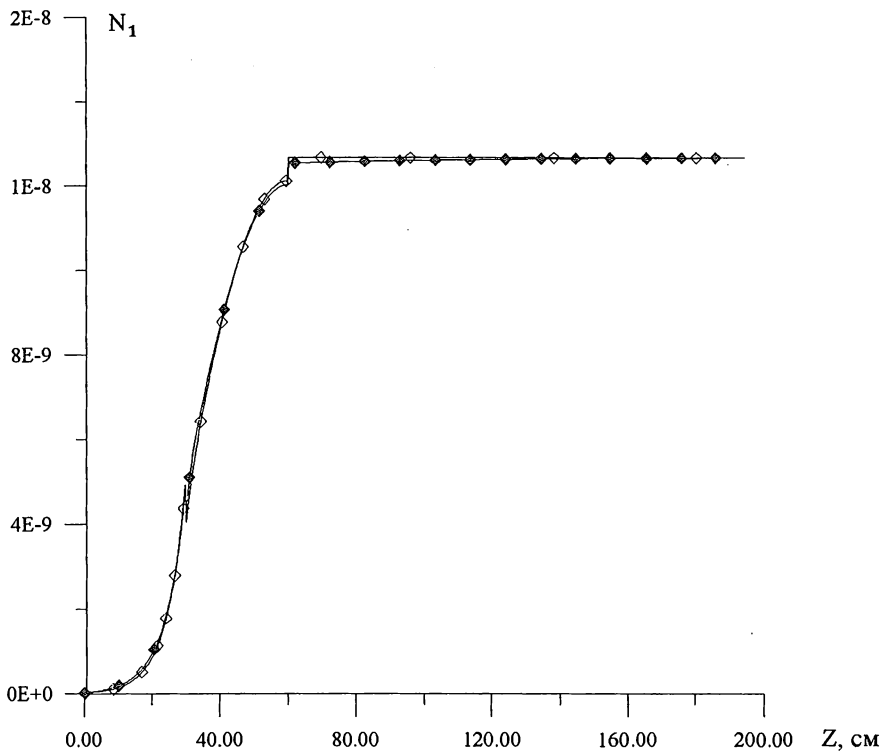


Рис. 6. Плотность нейтронов в 1-й группе.

Двухгрупповая задача переноса и диффузии нейтронов:

- ◇ — 1-я группа диффузии нейтронов;    ♦ — 1-я группа переноса нейтронов;  
 ○ — 2-я группа диффузии нейтронов;    ● — 2-я группа переноса нейтронов

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 00-15-96073, № 02-01-00651), гранта Президента РФ НШ-1542.2003.1.

## Литература

- [1] Белл В., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
- [2] Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
- [3] Владимиров В.С. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 3. С. 315–324.
- [4] Владимиров В.С. Численное решение кинетического уравнения для сферы // Вычислительная математика. 1958. Сб. 3. С. 3–33.
- [5] Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1961. Т. 61.
- [6] Владимиров В.С. Особенности решения уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 4. С. 842–852.

- [7] *Владимиров В.С., Волович И.В.* Законы сохранения для нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279, № 4. С. 843–847.
- [8] *Владимиров В.С., Волович И.В.* Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений // Теорет. и мат. физика. 1985. Т. 62, № 1. С. 3–29.
- [9] *Владимиров В.С., Волович И.В.* Законы сохранения для нелинейных уравнений // Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования. Новосибирск: Наука, 1985, № 1. С. 147–162.
- [10] *Владимиров В.С., Марчук Г.И.* Об определении сопряженного оператора для нелинейных задач // Докл. РАН. 2000. Т. 372, № 2. С. 165–168.
- [11] *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука. 1986.
- [12] *Дементьев В.Г., Лебедев В.И., Нечепуренко Ю.М.* Спектральный анализ модели ядерного реактора с запаздывающими нейтронами // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов. Нейтроника-98. Обнинск: ФЭИ, 1999. С. 143–150.
- [13] *Ершов Ю.И., Шихов С.Б.* Математические основы теории переноса: В 2 т. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [14] *Лебедев В.И.* О квадратурах на сфере // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 2. С. 293–306.
- [15] *Лебедев В.И.* Об одном типе квадратурных формул повышенной алгебраической точности для сферы // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 1. С. 32–34.
- [16] *Лебедев В.И.* Метод композиции. М.: ОВМ АН СССР, 1986.
- [17] *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. М.: ОВМ АН СССР, 1983.
- [18] *Лебедев В.И., Костенков В.И., Курченко Г.И.* Условия шивки в нестационарных многозонных задачах // Алгоритмы и программы для нейтронно-физических расчетов ядерных реакторов. Нейтроника-98. Обнинск: ФЭИ, 1999. С. 135–142.
- [19] *Лебедев В.И., Костенков В.И., Курченко Г.И.* Об условии шивки на границах зон в нестационарных диффузионных многозонных задачах // Вопр. атом. науки и техники. Физика ядер. реакторов. 1999. Вып. 1. С. 3–15.
- [20] *Лебедев В.И., Лайков Д.М.* Квадратурная формула типа Гаусса 131-го алгебраического порядка точности // Докл. РАН. 1999. Т. 366, № 6.
- [21] *Лебедев В.И., Финогенов С.А.* О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом итерационном методе // ЖВМ и МФ. 1971. Т. 11, № 2. С. 425–439.
- [22] *Лебедев В.И., Финогенов С.А.* Об использовании упорядоченных чебышевских параметров в итерационных методах // ЖВМ и МФ. 1976. Т. 16, № 4. С. 895–907.
- [23] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- [24] *Марчук Г.И.* О приближенных методах расчета ядерных реакторов // Сессия Академии наук СССР по мирному использованию атомной энергии, 1–5 июля 1955. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 371–374.
- [25] *Марчук Г.И.* Численные методы расчета ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1958.
- [26] *Марчук Г.И.* Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.



- [27] *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
- [28] *Марчук Г.И.* О некоторых подходах к построению сопряженных операторов в нелинейных задачах // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1994. Т. 203. С. 126–134.
- [29] *Марчук Г.И., Агошков В.И., Шутяев В.П.* Сопряженные уравнения и методы возмущений в нелинейных задачах математической физики. М.: Наука, 1993.
- [30] *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1971; 1981.
- [31] *Марчук Г.И., Орлов В.В.* К теории сопряженных функций // Нейтронная физика. М.: Госатомиздат, 1961. С. 30–45.
- [32] *Филитов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
- [33] *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: ИИЛ, 1950.
- [34] *Agoshkov V.I., Lebedev V.I.* Generalized Schartz algorithm with variable parameters // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1990. V. 5, № 1. P. 1–26.
- [35] *Dementiev V.G., Kosarev A.I., Lebedev V.I., Nechepurenko Yu.M., Shishkov L.K.* Spectral analysis of VVER-1000 reactor model at high negative reactivities // Proc. of the Ninth Symp. of AER, 1999. P. 453–468.
- [36] *Kazakov A.M., Lebedev V.I.* Gauss-type quadrature formulas for the sphere, invariant with respect to the Dihedral group // Proc. Steklov Inst. Math. 1995. Iss. 3. P. 89–99,
- [37] *Lebedev V.I.* The composition method and unconventional problems // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1991. V. 6, № 6. P. 485–496.
- [38] *Lebedev V.I.* How to solve stiff systems of differential equations by explicit method // Numerical Method and Applications. Boca Raton: CRC Press, 1994. P. 45–80.
- [39] *Lebedev V.I.* Extremal polynomials with restrictions and optimal algorithms // Advanced Mathematics: Computation and Applications / Ed. A.S. Alekseev and N.S. Bakhvalov. Novosibirsk: NCC Publ., 1995. P. 491–502.
- [40] *Lebedev V.I.* An Introduction to Functional Analysis and Computational Mathematics. B.: Birkhauser, 1996.
- [41] *Lebedev V.I.* Explicit difference schemes with variable time steps for solving stiff systems of equation // Numerical Analysis and its Applications: Proc. Lect. Notes in Comput. Science 1196. B.: Springer, 1997. P. 274–283.
- [42] *Marchuk G.I.* Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [43] *Marchuk G.I., Agoshkov V.I.* Conjugate operators and algorithms of perturbation in non-linear problems // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1988. № 1. P. 21–46; № 2. P. 115–136.
- [44] *Nechepurenko Yu.M.* A new spectral-analysis technology based on the Schur decomposition // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. V. 14. № 3.

# Моделирование климата и его изменений

*В.П. Дымников, В.Н. Лыков, Е.М. Володин,  
В.Я. Галин, А.В. Глазунов, А.С. Грицун,  
Н.А. Дианский, М.А. Толстых, А.И. Чавро*

## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	39
<b>1. Физико-математические основы построения климатических моделей</b> . . . . .	43
1.1. Основные уравнения гидротермодинамики климатической системы . . . . .	43
1.2. Горизонтальная диффузия . . . . .	50
1.3. Вертикальный турбулентный перенос . . . . .	51
1.4. Гравитационно-волновое сопротивление . . . . .	56
1.5. Конвекция, конденсация и осадки . . . . .	59
1.6. Радиационный перенос . . . . .	66
1.7. Взаимодействие атмосферы с деятельным слоем суши и криосферой . . . . .	72
1.8. Региональные аспекты . . . . .	77
1.9. Численная реализация . . . . .	82
<b>2. Воспроизведение современного климата</b> . . . . .	87
2.1. Моделирование общей циркуляции атмосферы при заданных пространственно-временных распределениях температуры поверхности океана . . . . .	87
2.2. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели . . . . .	99
<b>3. Теория чувствительности климатической системы к малым внешним воздействиям</b> . . . . .	114
3.1. Устойчивость аттракторов атмосферных моделей к постоянно действующим воздействиям . . . . .	114
3.2. Регуляризация атмосферных моделей по Зеemannу . . . . .	118
3.3. Численные эксперименты с моделями общей циркуляции атмосферы . . . . .	120
3.4. Построение оператора отклика по реальным данным . . . . .	133

<b>4. Моделирование изменений климата, обусловленных изменениями атмосферной концентрации малых газовых составляющих</b> . . . . .	135
4.1. Отклик климатической модели на увеличение содержания углекислого газа . . . . .	136
4.2. Экстремальные климатические проявления на территории России для современного климата и при удвоении содержания углекислого газа . . . . .	148
<b>Заключение</b> . . . . .	164
<b>Литература</b> . . . . .	168

## Введение

Одной из наиболее важных проблем, стоящих перед наукой в XXI столетии, является проблема предсказания климатических изменений, вызываемых человеческой деятельностью. В качестве антропогенных воздействий на климатическую систему можно рассматривать сжигание ископаемого топлива, приводящее к изменению концентрации углекислого газа в атмосфере, изменение концентрации малых газовых примесей, контролирующей концентрацию озона в атмосфере, вырубку лесов, приводящую к изменению альбедо и процессу опустынивания, и многие другие воздействия.

Согласно определению Всемирной метеорологической организации [125], климатическую систему планеты Земля образуют следующие, взаимодействующие между собой, компоненты: 1) атмосфера — газовая оболочка Земли сложного состава (кислород, азот, углекислый газ, водяной пар, озон и т.д.), воздействующая на перенос к поверхности Земли солнечной радиации, поступающей на ее верхнюю границу, и являющаяся наиболее изменчивой составляющей рассматриваемой системы; 2) океан — главный водный резервуар в системе, состоящий из соленых вод Мирового океана и прилегающих к нему морей, поглощающий основную часть поступающей на его поверхность солнечной радиации и представляющий собой, благодаря высокой теплоемкости воды, мощный аккумулятор энергии; 3) суша — поверхность континентов с ее гидрологической системой (внутренние водоемы, болота и реки), почва (в том числе с грунтовыми водами) и криолитозона (“вечная мерзлота”); 4) криосфера — континентальные и морские льды, горные ледники и снежный покров; 5) биота — растительность на суше и океане, а также живые организмы в воздухе, море и на суше, включая человека.

Климатическая система характеризуется конечным множеством параметров (компоненты скорости ветра и течений в океане, температура и

соленость, водяной пар, концентрация газовых составляющих, плотность, давление и др.), значения которых в фиксированный момент времени определяют ее состояние. Эта система глобальна, поскольку ее состояния характеризуются пространственными неоднородностями с масштабами от планетарных (порядка  $10^4$  км по горизонтали и порядка  $10^1$ – $10^2$  км по вертикали) до размеров мельчайших турбулентных неоднородностей в атмосфере и океане, элементов растительности и структурных неоднородностей почвы. Характерные временные масштабы энергетически значимых физических процессов лежат в диапазоне от минут до десятков и сотен лет.

Математически климат определяется как статистический ансамбль состояний, принимаемый климатической системой за достаточно большой интервал времени, который удобно выбрать очень большим (в пределе бесконечным). В этом случае собственная (внутренняя) изменчивость климата отсутствует и можно лишь говорить об изменениях климата под воздействием внешних сил на климатическую систему. В общем случае под ансамблем понимается не только множество состояний, но и некоторая вероятностная мера, заданная на этом множестве и определяющая вероятность того, что система может находиться на некотором подмножестве данного множества [18]. В практических приложениях часто под климатом понимаются некоторые характеристики части траектории климатической системы, проходимой ею за определенный промежуток времени  $\sim 30$  лет.

Сформулированные выше проблемы в отличие от других проблем физики имеют одну отличительную особенность: они не допускают прямого физического эксперимента. Более того, в силу специфических особенностей климатической системы адекватные лабораторные эксперименты представляются также весьма проблематичными. Действительно, с точки зрения рассмотрения крупномасштабных атмосферных процессов атмосфера есть тонкая пленка с отношением вертикального масштаба к горизонтальному  $H/L \sim 10^{-3}$ . Таким образом, на этих масштабах климатическую систему можно считать квазидвумерной, однако вертикальная стратификация по плотности очень важна и крупномасштабные вертикальные движения ответственны за бароклинные преобразования энергии. Более того, с физической точки зрения для изучения климата реальной климатической системы в наличии имеется лишь часть траектории протяженностью в несколько десятков лет, в течение которых проводились достаточно полные натурные измерения.

Все перечисленное позволяет сделать вывод, что главным средством изучения климатической системы (более точно, исследования проблемы предсказуемости и предсказания изменений климата) является математическое (численное) моделирование с помощью глобальных климатических моделей, основу которых составляют глобальные модели общей циркуляции атмосферы и океана. Разработка моделей климата требует проведения

натурных экспериментов, анализ результатов которых позволяет формулировать все более точные модели конкретных физических процессов, определяющих динамику климатической системы. Вместе с тем такие эксперименты не решают главной задачи — определение чувствительности реальной климатической системы к малым внешним воздействиям [18]. Необходимо ответить на вопрос: что и с какой точностью должна воспроизводить климатическая модель, чтобы ее чувствительность к разнообразным малым внешним воздействиям была близка к чувствительности реальной климатической системы? Важно подчеркнуть, что каждая современная модель конкретного физического явления есть отражение современного его понимания. Не исключением в этом смысле являются и глобальные климатические модели, включающие в себя описание большого числа разнообразных физических процессов и их взаимодействий.

В 1956 г. опубликованы результаты первого численного эксперимента по воспроизведению общей циркуляции атмосферы с помощью двухслойной, квазигеострофической, полусферной модели [101], а уже в начале 60-х гг. появилась первая 9-уровневая модель, основанная на полных (неупрощенных) уравнениях [113]. В 1969 г. появилась публикация [92], в которой были изложены результаты численных экспериментов с первой совместной моделью общей циркуляции атмосферы и океана. В России создание гидродинамических климатических моделей началась в 70-х гг. В 1973 г. по инициативе Г.И. Марчука Отделением океанологии, физики атмосферы и географии АН СССР было принято решение о разработке математических моделей климата, основанных на моделях общей циркуляции атмосферы и океана. Такого рода модель, базирующаяся на использовании законов сохранения и методов расщепления, была построена в Вычислительном центре СО АН СССР [29]. Однако возможности вычислительной техники того времени и недостаточная детализированность параметризаций физических процессов в атмосфере и океане не позволили тогда добиться необходимого качества воспроизведения климата, достигнутого в настоящее время. Тем не менее эти разработки послужили заделом представленных в данной работе исследований.

Климатические модели в настоящее время переживают период интенсивного развития, определяемого в итоге бурным развитием вычислительной техники. Процесс их создания происходит повсеместно. Связанный с этим "параллелизм" необходим для контроля воспроизводимости получаемых с их помощью результатов. В рамках международных программ AMIP (Atmospheric Model Intercomparison Project), CMIP (Coupled Model Intercomparison Project) и других, описание и результаты которых можно найти в Интернете (см. <http://www-pcmdi.llnl.gov>), проводится целенаправленное сравнение моделей, разработанных различными группами исследователей в разных странах мира, как между собой, так и с

данными наблюдений. Это дает возможность исследовать систематические ошибки в воспроизведении современного климата и оценить диапазон возможных его изменений, обусловленных, например, антропогенными воздействиями. В России, в частности, такого рода климатические модели разрабатываются в Институте вычислительной математики РАН (ИВМ РАН) и Главной геофизической обсерватории [34]. При верификации моделей на основе сравнения их результатов с данными наблюдений используются различные источники, в частности: реанализы Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (Великобритания) ERA-15 (1979–1993 гг.) и ERA-40 (1957–2001 гг.), информация о которых содержится по Интернет-адресу <http://www.ecmwf.int/research/era>; реанализы NCEP/NCAR (Национальный центр охраны окружающей среды / Национальный центр атмосферных исследований, США) за период 1958–1997 гг. (<http://wesley.wvb.noaa.gov/reanalysis.htm>); осадки за период с 1979 г. и по настоящее время (<http://www.cpc.ncep.noaa.gov/products/globalprecip>); архив NDP048, содержащий ряды многолетних наблюдений на 225 метеорологических станциях бывшего СССР (<http://cdiac.esd.ornl.gov/ftp/ndp048>). Следует заметить, что в ходе проведения численных экспериментов с современными глобальными климатическими моделями генерируется большой объем данных (вплоть до 1 Гб при расчете на 1 месяц), что требует специальных усилий по их визуализации, обработке и анализу.

В Институте вычислительной математики РАН разработан современный комплекс моделей общей циркуляции атмосферы и океана с наиболее полным на настоящее время описанием основных климатообразующих процессов. С помощью этого комплекса проводятся исследования различных аспектов проблемы глобальных изменений климата, и на его основе построена модель климатической системы. Коллектив разработчиков этих моделей принимает участие в проектах AMIP и CMIP. Настоящая работа носит обзорный характер и посвящена, с одной стороны, моделированию конкретных характеристик современного климата и его изменчивости, а с другой — исследованию его чувствительности по отношению к малым внешним воздействиям. Вначале (разд. 1) формулируются основные уравнения общей циркуляции атмосферы и океана, рассматриваются вопросы их замыкания и обсуждаются принципы сопряжения автономных моделей атмосферы и океана в климатической модели. Далее (разд. 2) представлены результаты расчетов по воспроизведению современного климата в сравнении с данными наблюдений. Затем (разд. 3) излагаются основные положения теории чувствительности, а в разд. 4 приводятся результаты численных экспериментов по моделированию отклика климатической системы на удвоение содержания углекислого газа. В заключении сформулированы основные выводы проведенных исследований.

# 1. Физико-математические основы построения климатических моделей

В основу построения современных моделей климата положен ряд принципов. Во-первых, такая модель должна базироваться на современных моделях общей циркуляции атмосферы и океана, центральным направлением развития которых является все более точное описание всех физических процессов, участвующих в формировании климата. Далее принимается, что локально справедливы уравнения классической равновесной термодинамики. Предполагается также, что для описания динамики атмосферы и океана справедливы уравнения Навье–Стокса для сжимаемой жидкости. Поскольку в современных моделях в силу, главным образом, вычислительных возможностей используются уравнения Рейнольдса — осредненные по некоторым пространственным и временным масштабам уравнения Навье–Стокса, то считается, что существует принципиальная возможность их замыкания. Процедура замыкания предполагает, что эффекты процессов подсеточных масштабов (масштабов меньших, чем масштаб осреднения) могут быть выражены через характеристики процессов крупных масштабов. Наконец, для описания крупномасштабных атмосферных и океанических движений справедливо приближение гидростатики: вертикальный градиент давления уравновешивается силой тяжести. Использование такого приближения требует дополнительных упрощений (постоянный радиус Земли, пренебрежение составляющими силы Кориолиса с вертикальной компонентой скорости) с тем, чтобы в системе уравнений при отсутствии внешних источников энергии и диссипации выполнялся закон сохранения энергии. Приближение гидростатики сводит систему трехмерных уравнений Навье–Стокса к системе "2.5" измерений, что весьма существенно для формулирования теорем однозначной разрешимости этих уравнений на произвольном конечном интервале времени.

## 1.1. Основные уравнения гидротермодинамики климатической системы

Принимая в качестве вертикальной координаты давление, нормированное к его значению на поверхности Земли, и используя гидростатическое приближение, систему нелинейных уравнений гидротермодинамики атмосферы можно записать в сферической  $\sigma$ -системе координат в следующей форме [29]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \left( f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} \right) &= F_u, \\ \frac{dv}{dt} + \left( f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) u + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right) &= F_v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} &= -\frac{RT}{\sigma}, \\
\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial p_s u}{\partial \lambda} + \frac{p_s v \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial p_s \dot{\sigma}}{\partial \sigma} &= 0, \\
\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{c_p \sigma p_s} \left[ p_s \dot{\sigma} + \sigma \left( \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right) \right] &= F_T + \epsilon, \\
\frac{dq}{dt} &= F_q - (C - E),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma};$$

$\lambda$  — долгота;  $\varphi$  — широта;  $\sigma$  — вертикальная координата ( $\sigma = p/p_s$ ,  $p$  — давление,  $p_s$  — его значение на поверхности Земли);  $t$  — время;  $u$ ,  $v$ ,  $\dot{\sigma}$  — составляющие скорости ветра по долготе, широте и вертикальной координате соответственно;  $T$  — абсолютная температура;  $q$  — удельная влажность воздуха;  $\Phi$  — геопотенциал ( $\Phi = gz$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $z$  — высота над уровнем моря);  $f$  — параметр Кориолиса ( $f = 2\omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли);  $R$  — газовая постоянная воздуха;  $c_p$  — его теплоемкость при постоянном давлении;  $F_u$ ,  $F_v$  — скорости изменения импульса за счет напряжений Рейнольдса;  $F_T$ ,  $F_q$  — слагаемые, описывающие процессы мелкомасштабной диффузии тепла и влаги;  $\epsilon$  — неадиабатические притоки тепла ( $\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_f$ ;  $\epsilon_r$  — радиационный приток тепла,  $\epsilon_f$  — фазовый);  $C$ ,  $E$  — члены, описывающие процессы конденсации и испарения влаги соответственно. Атмосферу можно трактовать как бароклинную жидкость (плотность  $\rho$  воздуха зависит как от давления  $p$ , так и от температуры  $T$ ). Поэтому при выводе уравнений (1.1) использовано уравнение Клапейрона состояния идеального газа  $p = \rho RT$ , а также уравнение квазистатики  $\partial p / \partial z = -g\rho$ . Уравнения движения (первые два из системы (1.1)) могут быть также записаны в форме Громеки–Лэмба [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - Q p_s v + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} \right] &= F_u, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + Q p_s u + \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \Phi + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right] &= F_v,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где

$$Q = \frac{1}{p_s} \left[ f + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Слагаемые, записанные в правой части уравнений (1.1), возникают в результате реализации процедуры замыкания и отражают эффекты процессов подсеточных масштабов.



В качестве краевых условий для системы уравнений (1.1) предполагается периодичность решения по долготе, а также условие ограниченности решения на полюсах. Подстилающая поверхность как твердое тело одновременно является  $\sigma$ -координатной поверхностью ( $\sigma = 1$ ). Соответствующее кинематическое условие записывается в виде

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 1. \quad (1.3)$$

Аналогичное условие ставится на верхней границе атмосферы ( $p = 0$ ):

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 0. \quad (1.4)$$

При  $\sigma = 1$ , кроме условия (1.3), задается также распределение геопотенциала

$$\Phi_s = gz_s \text{ при } \sigma = 1, \quad (1.5)$$

где  $z_s$  — превышение земной поверхности над уровнем моря.

Уравнения гидротермодинамики океана в сферической  $\sigma$ -системе координат в приближении Буссинеска, гидростатики и "твердой" крышки могут быть записаны следующим образом [2]:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \left( f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v + \frac{1}{a \cos \varphi \rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) &= F_u, \\ \frac{dv}{dt} + \left( f + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) u + \frac{1}{a \rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) &= F_v, \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma} &= gH\rho', \\ \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial uH}{\partial \lambda} + \frac{\partial vH \cos \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{dT}{dt} = F_T, \quad \frac{dS}{dt} = F_S, \\ \rho' &= \rho(T, S, p) - \rho_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\dot{\sigma}}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Здесь  $\sigma = z/H$ ;  $z$  — глубина, отсчитываемая от невозмущенного уровня океана;  $H = H(\lambda, \varphi)$  — рельеф дна океана (предполагается, что  $0 < H_{\min} \leq H \leq H_{\max}$ );  $u, v, \dot{\sigma}$  — компоненты вектора скорости течения вдоль долготы, широты и вертикальной координаты соответственно;  $T, S, p, \rho'$  — температура, соленость, давление и отклонение плотности от значения  $\rho_0 = 1200 \text{ кг/м}^3$  (при этом  $\rho(T, S, p)$  — известная нелинейная функциональная зависимость, определяющая состояние морской воды, в том числе ее сжатие с увеличением глубины); слагаемые  $F_u, F_v, F_T$  и  $F_S$  в правой

части уравнений (1.6) имеют тот же самый смысл, что и соответствующие члены в правой части уравнений (1.1) атмосферной циркуляции, и ответственны за параметризацию процессов турбулентной диссипации и турбулентного обмена теплом и солью. Система (1.6) записана для цилиндрической неодносвязной области, ограниченной сверху невозмущенной поверхностью океана ( $\sigma = 0$ ), а снизу — его дном ( $\sigma = 1$ ). Краевые условия для аналога вертикальной скорости  $\dot{\sigma}$  на этих горизонтах имеют вид (1.3), (1.4).

Модельная область охватывает весь Мировой океан, простираясь по широте от берегов Антарктиды до  $89^\circ\text{N}$ . Эта область включает в себя также следующие "острова": Австралию, Антарктиду, Исландию, Кубу, Мадагаскар, Новую Зеландию, Шпицберген и Японию. Приближение "твердой крышки" (1.4) позволяет ввести функцию тока для плоской (баротропной) циркуляции океана. На твердых границах Евразии, Африки, Северной и Южной Америки, объединенных в один континент, задается нулевое значение функции тока. На контурах вышеназванных островов значения функции тока рассчитываются по методу, изложенному в работе [30]. Для бароклинных составляющих скорости на твердых границах (в том числе и на дне) ставится условие прилипания, а для температуры и солености принимаются условия отсутствия их потоков. На границе раздела "атмосфера-океан" записываются условия теплового и водного балансов, а вертикальные потоки импульса считаются непрерывными.

При интегрировании климатической модели на длительный срок необходимо также рассчитывать сток больших рек, влияющих на распределение солености в акваториях, близких к местам впадения этих рек. С этой целью на границах раздела рек и соответствующих акваторий в модели ИВМ РАН задаются значения солености по всей глубине в соответствии с данными из атласа Левитуса [90]. Таким способом учитываются стоки основных сибирских рек (Енисей, Лена и Обь), а также Амазонки, Брахмапутры, Ганга и Инда. Кроме того, аналогичным образом параметризуется влияние Красного моря и Персидского залива на распределение солености в Аравийском море. В океаническом блоке климатической модели реализован также расчет эволюции морского льда, позволяющий реалистично описать сезонную изменчивость ледового покрова в Арктике и Южном океане.

Как уже отмечалось, слагаемые, записанные в правой части уравнений (1.1), (1.2) и (1.6), возникают в результате реализации процедуры замыкания и отражают эффекты процессов подсеточных масштабов, к которым относятся, например, турбулентность в пограничном слое атмосферы, в верхнем и придонном слоях океана, конвекция и орографические волны в атмосфере. Расчет неадиабатических источников тепла, связанных с радиационными и фазовыми процессами, облачности и осадков также связан с необходимостью разработки параметризации соответствующих

физических процессов. Наконец, во внимание должны быть приняты такие процессы как цикл углерода, фотохимические трансформации, тепловлагоперенос в растительном и снежном покрове, образование и перенос метана в почве и т.п. Основные идеи, используемые при параметризации процессов подсеточных масштабов, иллюстрируются далее на примере климатической модели, разрабатываемой в Институте вычислительной математики РАН [29, 1, 19]. Информацию об особенностях параметризаций, используемых в других моделях, участвующих в проектах AMIP и CMIP, можно найти на сайте <http://www-pcmdi.llnl.gov> (см., в частности, работу [102]).

Очевидно, что получить аналитические решения при произвольных начальных данных сложных нелинейных уравнений гидротермодинамики атмосферы и океана практически невозможно, поэтому ищутся их приближенные решения с помощью конечномерных аппроксимаций. Как известно [29], при отсутствии диссипации и источников для рассматриваемой системы уравнений существует квадратичный закон сохранения энергии (или закон, который с помощью некоторых нелинейных преобразований искомым функций можно сделать квадратичным). Необходимо, чтобы конечномерные аппроксимации строились таким образом, чтобы (при отсутствии стоков и источников энергии) в них также был квадратичный закон сохранения — аналог исходного закона. Этот закон сохранения автоматически приводит к вычислительной устойчивости решения разностной задачи, если под устойчивостью понимается непрерывная зависимость нормы решения от нормы правой части и нормы начальных данных [30].

Важно отметить также, что в отличие от задач прогноза погоды, где необходимо воспроизвести как можно точнее решение задачи на конечном промежутке времени, в задачах климата требуется аппроксимировать аттрактор исходной модели как множество и меру на нем или статистическое стационарное решение (см. разд. 3). Имеется доказательство глобальной разрешимости конечномерных моделей климата, и существование для них глобального аттрактора не вызывает особых затруднений [68]. Проблема же состоит в доказательстве сходимости аттракторов конечномерных аппроксимаций к аттрактору исходной модели при стремлении параметров аппроксимации к нулю. Поскольку теорем сходимости нет, то при моделировании климатической системы используется подход, связанный с аппроксимацией наиболее значимых физических процессов, участвующих в формировании климата [30].

Так как атмосфера и океан квазидвумерны, то каскад энергии по спектру в этих средах определяется законами двумерной жидкости. Известно, что в идеальной несжимаемой двумерной жидкости имеется два квадратичных инварианта — энергия и энстрофия, которые запрещают

каскад энергии по спектру в сторону больших волновых чисел. Вместе с тем распределение энергии в инерционном интервале по существу определяется каскадом энстрофии в сторону высоких волновых чисел. Конечномерный аналог модели должен быть построен таким образом, чтобы в ее двумерной асимптотике также имели место оба закона сохранения — энергии и энстрофии. Это обстоятельство играет особую важную роль в случаях, когда имеются мощные источники генерации волн различного масштаба, например, связанные с орографическими неоднородностями поверхности Земли. Построение конечномерного аналога модели в этом случае удобно проводить, используя исходную систему дифференциальных уравнений гидротермодинамики в форме Громеки–Лэмба.

Если же дискретная система обладает лишь одним квадратичным инвариантом (энергией), то при наличии генерирующего источника возникает проблема параметризации подсеточной диссипации с тем, чтобы скомпенсировать избыточный каскад энергии по спектру и правильно описать ее трансформацию. Каскад энергии в сторону длинных волн принципиально определяется рэлеевской диссипацией в планетарном пограничном слое, что накладывает требования на правильное его описание. Закон сохранения момента количества движения относительно оси вращения Земли (углового момента) по существу определяет распределение скорости ветра у поверхности Земли (наличие пассатов). Важным также является закон сохранения энтропии в адиабатическом приближении.

Кроме того, следует отметить конкретные физические явления типа циклогенеза, правильное воспроизведение которого требует хорошей аппроксимации по спектру некоторых линейных операторов (по собственным и сингулярным числам), 30–60-дневных колебаний в тропиках, распространения квазистационарных волн и многих других процессов, ответственных за климатические характеристики. Особое значение имеет решение уравнений переноса малых примесей, имеющих большие пространственные градиенты, что накладывает очень сильное требование на условие монотонности разностных схем. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в разделе, посвященном численной реализации климатических моделей.

При моделировании совместной циркуляции атмосферы и океана возникает определенная трудность, связанная с тем, что характерные времена термической релаксации атмосферы и океана отличаются на два порядка. Поскольку время релаксации совместной модели должно быть не меньше максимального из этих двух времен, то прямое моделирование совместной циркуляции требует значительных вычислительных ресурсов. В первых климатических моделях использовался метод искусственной синхронизации времен термической релаксации атмосферы и океа-

на [92, 29], исходя из предположения, что один модельный атмосферный год соответствует примерно ста модельным океаническим годам. Характерное время обмена информацией между атмосферой и океаном выбирается в этом случае равным характерному времени (примерно 14 суток) перемешивания в верхнем квазиоднородном слое океана. Для того чтобы синхронизировать характерные времена обмена информацией в атмосфере и океане, все атмосферные характеристики, используемые в качестве граничных условий для системы уравнений гидротермодинамики океана, с помощью экспоненциального фильтра осреднялись за этот двухнедельный период.

При использовании изложенной процедуры несогласованность приводных потоков тепла, влаги и импульса ( $H_s$ ,  $E_s$  и  $\vec{\tau}_s$  соответственно), вычисляемых в атмосферном блоке климатической модели, и потоков, которые требует модель океана для адекватного воспроизведения океанической циркуляции (в том числе температуры поверхности океана), порождает так называемый "дрейф климата" — систематическое отклонение модельных характеристик климата от реально наблюдаемых. Чтобы преодолеть эту трудность, в работе [108] был предложен метод "коррекции потоков":

$$(\tilde{H}_s, \tilde{E}_s, \tilde{\tau}_s) = (H_s, E_s, \tau_s) + (\delta H_s, \delta E_s, \delta \tau_s),$$

где корректирующие значения величин  $\delta H_s$ ,  $\delta E_s$ ,  $\delta \tau_s$  выбираются пропорциональными разности между модельными и наблюдаемыми значениями температуры и солёности поверхности океана. В моделях, не использующих процедуру коррекции потоков, ошибки воспроизведения климата, как правило, превышают те, что генерируют модели без использования такой процедуры. Однако по мере совершенствования моделей (в частности, схем параметризации процессов в пограничном слое атмосферы и в верхнем слое океана) происходит уменьшение как корректирующих поправок, так и ошибок воспроизведения климата в моделях без коррекции потоков. В климатической модели ИВМ РАН процедура коррекции потоков не используется.

Начальные условия для совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана в обсуждаемых в последующих разделах экспериментах брались в виде климатических распределений прогностических атмосферных и океанических переменных на 1-е января, рассчитанных в отдельных экспериментах с моделью атмосферы [1] (при заданных в соответствии с наблюдаемыми в период с 1979 по 1996 г. распределениях температуры поверхности океана и границ морских и континентальных льдов) и с моделью океана [14] (при заданном годовом цикле атмосферного воздействия согласно климатическим данным реанализа NCEP [80]). Для модели атмосферы длительность такого эксперимента составляла 17 лет, а для модели океана — 50 лет.

## 1.2. Горизонтальная диффузия

Скорости изменения импульса, температуры и удельной влажности (солености), обусловленные подсеточной турбулентностью, можно представить в виде суммы

$$F_\psi = F_\psi^h + F_\psi^v,$$

где  $\psi$  — любая из переменных  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $q$  или  $S$ , а верхними индексами  $h$  и  $v$  обозначены вклады горизонтальной диффузии и вертикального перемешивания соответственно. При описании турбулентной горизонтальной диффузии целесообразно потребовать выполнения двух условий: 1) соответствующее слагаемое в уравнениях должно обеспечивать интегральную диссипацию энергии; 2) глобальный угловой момент системы должен сохраняться. Вывод такого замыкания, в основе которого лежат идеи теории двумерной турбулентности [86] и использование оператора Лапласа, приведен в монографии [29].

Однако выбор того или иного замыкания для описания эффектов подсеточной горизонтальной диффузии в конкретной модели в значительной степени зависит от "согласованности" всех ее блоков. Ошибки, возникающие при воспроизведении каких-либо физических процессов и обусловленные как недостаточным их знанием или чересчур упрощенным описанием, так и имеющие вычислительный характер, могут приводить в итоге к ложному каскаду энергии в коротковолновой части ее спектра. Для воспроизведения нелинейных по своей природе колебаний в климатической системе (в первую очередь в атмосфере) необходимо правильно воспроизвести не только уровень генерации вихревой кинетической энергии (и цикл преобразований энергии в целом), но и перераспределение этой энергии по спектру. Использование в этом случае замыканий и с оператором Лапласа может оказаться не эффективным для подавления избыточного накопления энергии в коротких масштабах.

В работе [1] для описания горизонтальной диффузии использован оператор типа бигармонического. Вводится оператор  $\Delta_k$ , при этом

$$\Delta_k \psi = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} k \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} k \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right),$$

где  $k(\lambda, \varphi)$  — коэффициент горизонтальной диффузии. Обозначив через  $\Delta_1$  оператор  $\Delta_k$  с тождественно единичным коэффициентом  $k$ , соответствующее замыкание для импульса можно записать в виде

$$F^h(u, v) = -\Delta_k \Delta_1(u, v).$$

Здесь оператор горизонтальной диффузии используется для описания этого процесса вдоль поверхностей  $\sigma = \text{const}$ . Экспериментальным путем было

установлено, что для температуры и влажности более адекватной оказалась диффузия вдоль поверхностей равного давления. Соответствующее замыкание имеет вид

$$F^h(T, q) = -\Delta_k \Delta_p(T, q),$$

где

$$\Delta_p \psi = \Delta_1 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial \ln \sigma} \Delta_1 p_s,$$

т.е. учтена поправка, связанная с несовпадением  $\sigma$ - и  $p$ -поверхностей.

При моделировании общей циркуляции океана в настоящее время так же используется диффузия четвертого порядка для составляющих скорости течений [14]. В то же время для скалярной субстанции  $\psi$  (температуры и солености) оказалось предпочтительным применение диффузии второго порядка, представляющей собой точную форму преобразования оператора горизонтальной диффузии из  $z$ - в  $\sigma$ -систему координат.

### 1.3. Вертикальный турбулентный перенос

Пограничный слой атмосферы, располагающийся вблизи поверхности Земли и имеющий характерный вертикальный размер  $h_a \sim 100-1000$  м, верхний слой океана ( $h_o \sim 10-100$  м) и придонный слой океана ( $h_b \sim 1-10$  м) являются ключевыми звеньями климатической системы; они обеспечивают преобразование энергии солнечной радиации, поглощенной подстилающей поверхностью, в энергию крупномасштабных движений в атмосфере и океане (с помощью турбулентного переноса); контроль уровня диссипации кинетической энергии всей климатической системы и теплового переноса между атмосферой и почвой и между океаном и нижерасположенным грунтом. Важно также и то, что пограничный слой атмосферы — это среда обитания человека, не только непосредственно воздействующая на его жизнедеятельность, но и сама зависящая от результатов этой деятельности.

Условно пограничный слой атмосферы можно разбить на два: непосредственно примыкающий к подстилающей поверхности, именуемый слоем постоянных потоков, и расположенный над ним переходный к свободной атмосфере. Динамика пограничного слоя в его переходной к свободной атмосфере области описывается теми же уравнениями, что и динамика свободной атмосферы, но с включением дополнительных слагаемых, представляющих собой вертикальный турбулентный перенос соответствующей субстанции. Пусть  $\psi$  — любая из метеорологических переменных: горизонтальные компоненты скорости ветра, потенциальная температура или удельная влажность. Тогда имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = F_\psi^v + (\dots) = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho \overline{\partial \psi' w'}}{\partial z} + (\dots), \quad (1.7)$$

где  $z$  — относительная высота, отсчитываемая от высоты подстилающей поверхности над уровнем моря; черта сверху является знаком турбулентного осреднения; штрихи означают отклонения от этих средних (турбулентные флуктуации); точками представлены слагаемые, отвечающие за вклад других (не турбулентных) процессов в динамику пограничного слоя. В уравнениях типа (1.7) фигурируют новые неизвестные функции (турбулентные потоки)  $\overline{\psi'w'}$ , которые должны быть выражены через характеристики осредненного течения. В настоящее время в моделях принято, как правило, следующее замыкание:

$$\overline{\psi'w'} = -K_\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} + (\dots), \quad (1.8)$$

где предполагающиеся положительными коэффициенты  $K_\psi$  имеют смысл коэффициентов турбулентной вязкости, теплопроводности и диффузии. Уравнение (1.7) принимает при этом следующий вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} K_\psi \rho \frac{\partial \psi}{\partial z} + (\dots). \quad (1.9)$$

Известно, что в слое постоянных потоков наблюдаемые вертикальные распределения метеорологических величин имеют логарифмические асимптотики при приближении к поверхности Земли. При подходящем выборе коэффициентов турбулентного обмена уравнения типа (1.9) обеспечивают эти асимптотики, но при их численном решении возникают чрезвычайно жесткие ограничения на вертикальное разрешение в слое постоянных потоков. В современных моделях принят компромиссный подход: для расчета эволюции переходного слоя используются конечномерные аналоги уравнений (1.9), а решение в слое постоянных потоков выражается в виде аналитических зависимостей, полученных в результате анализа экспериментальных данных на основе теории подобия Мони́на–Обухова [36]. "Склейка" решений на границе раздела слоя постоянных потоков и переходного слоя проводится на основе предположения о непрерывности рассчитываемых метеорологических величин (скорость ветра, потенциальная температура и удельная влажность) и их потоков.

Согласно теории подобия Мони́на–Обухова, безразмерные вертикальные профили скорости ветра, температуры и влажности в приземном слое описываются некоторыми универсальными функциями, зависящими от безразмерной переменной  $z/L_{\text{mo}}$ , где  $L_{\text{mo}}$  — так называемый масштаб длины Мони́на–Обухова. В практическом плане эта процедура эквивалентна аэродинамическому методу, сводящемуся к расчету приповерхностных потоков импульса, тепла и влаги с помощью коэффициентов обмена, скорости ветра и дефицитов соответствующих субстанций. Асимптотическое поведение универсальных функций (при сильно устойчивой или сильно



неустойчивой стратификации плотности) изучено достаточно подробно, но требуются данные наблюдений, чтобы восстановить их поведение для промежуточных режимов. Этот подход хорошо зарекомендовал себя в условиях статистически однородной подстилающей поверхности, прост в реализации и было вполне естественным использовать его в моделях общей циркуляции атмосферы (см., например, [110]). Вместе с тем в размерах элементарной ячейки сетки модели подстилающая поверхность редко бывает однородной, а наличие растительного и снежного покровов специфика турбулентного перемешивания внутри растительности, особенно в лесу, радиационные процессы, сальтация и диффузия частиц почвы и снега в атмосферу, перенос брызг с поверхности океана в штормовых условиях — все это существенно воздействует на процессы турбулентного взаимодействия атмосферы и подстилающей поверхности.

Турбулентные потоки импульса ( $\tau_\lambda, \tau_\varphi$ ), явного  $H_s$  и скрытого тепла  $LE_s$  на поверхности земли определяются с помощью аэродинамического метода:

$$\begin{aligned}\tau_\lambda &= \overline{\rho u'w'} = -\rho_h C_D V_h u_h, & \tau_\varphi &= \overline{\rho v'w'} = -\rho_h C_D V_h v_h, \\ H_s &= c_p \overline{\rho \theta'w'} = -c_p \rho_h C_H V_h (\theta_h - \theta_s), \\ LE_s &= L \overline{\rho q'w'} = -L \rho_h C_E V_h (q_h - r q_{\max}(p_s, T_s)),\end{aligned}$$

где  $V = (u^2 + v^2)^{1/2}$ ;  $\rho$  — плотность;  $\theta$  — потенциальная температура;  $r$  — относительная влажность;  $q_{\max}$  — насыщающая удельная влажность;  $C_D$ ,  $C_H$ ,  $C_E$  — коэффициенты сопротивления, тепло- и влагообмена соответственно;  $L$  — скрытая теплота испарения. Индекс  $h$  указывает, что соответствующие величины рассчитываются на верхней границе слоя постоянных потоков; индекс  $s$  относится к функциям, определенным при  $\sigma = 1$ . Коэффициенты сопротивления  $C_D$  и теплообмена  $C_H = C_E$  связаны с интегральными коэффициентами переноса  $C_m$  и  $C_\theta = C_q$  соотношениями

$$C_D = C_m^2, \quad C_H = C_m C_\theta, \quad C_E = C_m C_q.$$

В свою очередь интегральные коэффициенты переноса в соответствии с теорией подобия Монина–Обухова [36] представляются в виде

$$C_i = \frac{\kappa}{\ln(h/z_{0i}) - \Psi_i(\zeta)}, \quad i = m, \theta, q,$$

где  $\zeta = z/L_{\text{mo}}$ ;  $\Psi_i$  — соответствующие универсальные функции;  $z_{0i}$  — параметр шероховатости,  $\kappa$  — постоянная Кармана. По определению, масштаб Монина–Обухова имеет вид

$$L_{\text{mo}} = \frac{u_*^3}{\kappa B_s},$$

где  $u_* = [(\tau_\lambda^2 + \tau_\varphi^2)/\rho^2]^{1/4}$  — скорость трения,  $B_s$  — поток плавучести.

В модели общей циркуляции ИВМ РАН [29, 1] использованы универсальные функции, представляющие собой комбинацию [21] получивших широкое распространение эмпирических интерполяционных функций Бусинджера–Дайера [55] с законом "степени  $-1/3$ ". Эти функции асимптотически описывают режим свободной конвекции и позволяют избежать нереально заниженных значений турбулентных потоков при малых скоростях ветра.

Необходимо сделать одно замечание по поводу универсальных функций. Взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью в высоких широтах в зимний период происходит на фоне, как правило, устойчивой стратификации пограничного слоя. В условиях дефицита коротковолновой радиации поверхность снега выхолаживается (особенно интенсивно — при безоблачном небе), что приводит к дальнейшему усилению устойчивости приземного слоя и, как следствие, к ослаблению компенсирующего этот процесс турбулентного переноса явного и скрытого тепла. В рамках традиционного подхода интегральные универсальные функции  $\Psi_i$  при устойчивой стратификации, т.е. при  $\zeta > 0$ , задаются так:

$$\Psi_i = -\beta(\zeta - \zeta_{0i}), \quad (1.10)$$

где  $\zeta_{0i} = z_{0i}/L_{mo}$ , а  $\beta \approx 5$  — эмпирический безразмерный коэффициент. Заметим, что, как показывают результаты обработки данных наблюдений [55], эти формулы справедливы лишь для относительно небольших значений  $0 < \zeta < 2$ . В работе [50] предложены более общие выражения для универсальных функций:

$$\begin{aligned} -\Psi_m &= a\zeta + b \left( \zeta - \frac{c}{d} \right) e^{-d\zeta} + \frac{bc}{d}, \\ -\Psi_\theta &= \left[ \left( 1 + \frac{2}{3}a \right) \zeta \right]^{3/2} + b \left( \zeta - \frac{c}{d} \right) e^{-d\zeta} + \frac{bc}{d} - 1, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $a = 1$ ,  $c = 5$ ,  $d = 0.35$ ;  $b = (c - a)/(c + 1)$ . Нетрудно видеть, что эти функции, нелинейные по  $\zeta$ , близки к традиционным линейным формулам ( $c\beta = c$ ) при малых значениях  $\zeta$ .

Особый интерес представляет так называемое потоковое число Ричардсона  $Rf$ , связанное с  $\zeta$  и функцией  $\Psi_m$  соотношением

$$Rf = \frac{\zeta}{1 - \zeta d \Psi_m / d\zeta}.$$

Легко убедиться, что  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} Rf = Rf_\infty$ , причем "критическое значение"  $Rf_\infty = \beta^{-1}$  для функции  $\Psi_m$ , задаваемой формулой (1.10), и  $Rf_\infty = a^{-1}$  — в более общем случае (1.11). Согласно теоретическим представлениям [36], стационарная развитая турбулентность над статистически однородной под-

стилающей поверхностью не может существовать при  $Ri > 1$ . Приведенные выше значения констант  $\beta$  и  $a$  удовлетворяют этому требованию. Следует, правда, заметить, что в реальных условиях подстилающая поверхность редко бывает однородной, а происходящие над ней процессы — стационарными.

Поэтому часто вместо теоретических универсальных функций, зависящих от  $\zeta$ , для расчета непосредственно коэффициентов сопротивления и теплообмена используются экспериментальные ("подгоночные") зависимости от характеристик состояния атмосферы (скорости ветра, в первую очередь) или от динамического числа Ричардсона:

$$Ri = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta / \partial z}{(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2}.$$

При описании переходного слоя в моделях общей циркуляции атмосферы необходимо принять во внимание, что имеют место три типа движений: полностью упорядоченное среднее течение; когерентные структуры типа крупных вихрей или внутренних волн; хаотическая трехмерная турбулентность. В ранних моделях турбулентное замыкание уравнений Рейнольдса осуществлялось с помощью классической гипотезы Буссинеска, согласно которой турбулентный поток какой-либо субстанции предполагался пропорциональным градиенту соответствующей средней величины, взятому с обратным знаком. Коэффициент пропорциональности либо задавался в виде той или иной зависимости от числа Ричардсона, либо для его расчета привлекалось дополнительное уравнение для кинетической энергии турбулентности и гипотезы подобия Колмогорова. В дальнейшем была учтена специфика конвективного пограничного слоя, в ядре которого процесс переноса тепла и влаги имеет противогradientный характер. Но все еще остается необходимость учета специфики, связанной с мезомасштабными орографическими неоднородностями подстилающей поверхности (катабатический ветер, горно-долинная циркуляция и т.п.), инверсионными слоями, слоистыми и слоисто-кучевыми облаками, образующими облачность достаточно высокого балла, и мелкими кучевыми облаками, формирующими, как правило, сильно разреженную облачность.

Для расчета коэффициентов турбулентности  $K_\psi$ , используемых в уравнениях (1.9), в модели общей циркуляции атмосферы, разрабатываемой в ИВМ РАН [1], привлекается следующее хорошо известное соотношение из работы [37]:

$$K_\psi = l_\psi^2 \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right| F_\psi(Ri), \quad (1.12)$$

где  $l_\psi$  — масштаб турбулентности;  $\vec{V}$  — вектор горизонтальной скорости; а  $F_\psi$  — "универсальная" безразмерная функция числа Ричардсона  $Ri$ , опреде-

ляемая на основе теоретических рассмотрений и анализа экспериментальных данных. В частности, функции  $F_\psi$  должны стремиться к единице в случае нейтральной стратификации ( $Ri = 0$ ), иметь линейную зависимость от  $Ri$  при сильной устойчивости ( $Ri > 0$ ) и отражать асимптотику режима свободной конвекции (закон степени  $-1/3$ ) в случае сильно неустойчивой стратификации ( $Ri < 0$ ). Конкретный вид функций  $F_\psi$  приведен в работе [1]. Для расчета же масштаба турбулентности  $l_\psi$  ( $\psi = m, h$ ) используется модифицированное соотношение типа формулы Блэкадара [53]:

$$l_\psi = \frac{\kappa z}{1 + \kappa z / l_{\psi\infty}} F_l(Ri, z/h_{bl}), \quad (1.13)$$

$$F_l = \begin{cases} 1 - z/z_i, & \text{если } Ri > 0; \\ 1, & \text{если } Ri \leq 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

в котором асимптотически учтено, что  $l_\psi \approx \kappa z$  при  $z \rightarrow 0$ ,  $l_\psi \rightarrow l_{\psi\infty}$  при  $z \rightarrow \infty$  в случае нейтральной или неустойчивой стратификации и  $l_\psi \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow h_{bl}$  ( $h_{bl}$  — высота пограничного слоя) в противном случае.

В качестве высоты пограничного слоя выбирается величина

$$h_{bl} = \max(h_d, h_c),$$

где  $h_d = u_* / 2f$  — толщина слоя Экмана (параметр Кориолиса  $f$  ограничен по модулю снизу величиной  $0.00005 \text{ с}^{-1}$ ), а высота конвективного пограничного слоя  $h_c$  определена как ближайший к поверхности Земли уровень, на котором  $\theta_v > \theta_{v,13}$ . Предполагается, что на данной высоте отсутствуют турбулентные потоки всех рассматриваемых в модели прогностических переменных:

$$K_\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=h_{bl}} = 0. \quad (1.15)$$

В океаническом блоке модели [14] использован аналогичный подход: коэффициенты вертикальной вязкости и диффузии рассчитываются с помощью зависящих от числа Ричардсона функций. Детали параметризации горизонтальной диффузии и турбулентных процессов в верхнем и придонных слоях океана изложены в отдельной статье данного издания.

#### 1.4. Гравитационно-волновое сопротивление

Параметризации гравитационно-волнового сопротивления представляют собой учет переноса импульса и энергии гравитационными волнами, которые генерируются в основном в тропосфере и разрушаются в более высоких слоях — стратосфере и мезосфере. Известны параметризации двух типов. К первому из них относится параметризация орографического сопротивления, представляющая собой учет эффекта волн, генерируемых

взаимодействием крупномасштабного потока с неоднородностями поверхности Земли. В параметризации второго типа (неорографического сопротивления) рассматриваются гравитационные волны, генерируемые другими источниками, например вертикальным сдвигом скорости ветра и конвекцией.

#### 1.4.1. Неорографическое гравитационно-волновое сопротивление

Учет неорографического волнового сопротивления необходим при моделировании стратосферы и особенно мезосферы, где обрушение гравитационных волн решающим образом влияет на средний поток. Первые попытки учесть это влияние были связаны с введением так называемого поглощающего слоя — ньютоновского трения на верхних модельных уровнях. Более детальный способ учета гравитационных волн (с заданными пространственными и временными волновыми числами) следует из результатов работы [91], в которой рассматриваются теоретические основы описания гравитационно-волнового сопротивления. Наиболее физически полной на настоящий момент является предложенная в работах [74, 75] параметризация, в которой рассматривается спектр распространяющихся волн с различными вертикальными волновыми числами. Предполагается, что гравитационные волны генерируются на заданном уровне и распространяются вверх, перенося импульс и энергию. Конвергенция потоков импульса и энергии из-за разрушения волн приводит к изменению горизонтального импульса и температуры. Именно эта параметризация используется в модели ИВМ РАН.

Все горизонтальные направления, в которых могут распространяться гравитационные волны, разбиты на  $N$  азимутов (далее  $\xi$  — индекс азимута). Порождаемый ими вертикальный поток горизонтального импульса в направлении  $\xi$  записывается в виде

$$F_{\xi} = \overline{\rho v'_{\xi} w'}, \quad (1.16)$$

где  $v_{\xi}$  — компонента скорости горизонтального ветра в рассматриваемом направлении;  $w$  — вертикальная скорость, рассчитываемая в  $z$ -системе координат; штрихи означают возмущения, наведенные гравитационными волнами, а черта сверху — осреднение по времени. Зональная и меридиональная компоненты волнового потока импульса рассчитываются с помощью следующих соотношений:

$$F_E = \sum_{\xi=1}^N \cos \alpha_{\xi} F_{\xi},$$

$$F_N = \sum_{\xi=1}^N \sin \alpha_{\xi} F_{\xi},$$

где  $\alpha_\xi$  — угол между вектором горизонтальной скорости основного движения и направлением  $\xi$ . Тенденции для соответствующих компонент  $u$  и  $v$  скорости ветра вследствие разрушения гравитационных волн вычисляются затем как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{GW} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_E}{\partial z}, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{GW} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_N}{\partial z}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается выражение для источника тепла и коэффициента вертикальной диффузии, обусловленных разрушением гравитационных волн. В рассмотрение вводится вертикальный поток тепловой энергии через единичную площадку

$$E = \overline{p'w'}, \quad (1.17)$$

где  $p'$  — возмущение давления за счет гравитационных волн. Предполагается, что этот поток формируется за счет суммарного эффекта процессов вертикального переноса энергии гравитационными волнами, распространяющимися в различных горизонтальных направлениях  $\xi$ . Тенденция температуры, обусловленная конвергенцией потока  $E$ , вычисляется как

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{GW} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial E}{\partial z}. \quad (1.18)$$

В модели ИВМ РАН количество азимутов, на которые разбиваются все горизонтальные направления, положено равным 12. Значения "подгоночных" параметров выбраны в диапазонах, рекомендованных в работах [74, 75], и близки к тем, что используются в работах [93, 94].

#### 1.4.2. Орографическое гравитационно-волновое сопротивление

Параметризация орографического гравитационно-волнового сопротивления построена на основе метода, предложенного в [99]. Вводятся квадрат частоты Вейселя–Брента

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

число Ричардсона

$$\text{Ri} = \frac{N^2}{|\partial \vec{V} / \partial z|^2} = \left( \frac{N}{g\rho |\partial \vec{V} / \partial p|} \right)^2$$

и операция осреднения (обозначаемая далее как индекс  $av$ ) по столбу воздуха, заключенного между некоторым уровнем  $z_i$  и поверхностью Земли. Тогда

$$u_p = \frac{u_{av}u + v_{av}v}{\sqrt{u_{av}^2 + v_{av}^2}}$$

есть проекция осредненного вектора скорости ветра на его направление в приземном слое. Если обозначить

$$\mu = 2 + \sqrt{1/Ri}, \quad h^2 = [u_p(2\sqrt{\mu} - \mu)]^2/N^2, \quad d_s^2 = \min(\delta, h^2),$$

где  $\delta$  — величина, характеризующая подсеточную дисперсию орографии, то напряжение трения на поверхности, вызванное гравитационными волнами, может быть записано как

$$\tau_{ws} = K\rho_{av}d_s^2N_{av}\sqrt{u_{av}^2 + v_{av}^2},$$

где числовой коэффициент  $K$  в модели ИВМ РАН принят равным  $4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1}$ .

Принимается, что в слое ниже уровня  $z_i$  напряжение  $\tau_w$  не меняется с высотой (используется его значение на поверхности), а выше этого уровня оно вычисляется в зависимости от волнового числа Ричардсона

$$Ri_w = \frac{Ri(1 - \alpha)}{(1 + \alpha\sqrt{Ri})^2},$$

где  $d = \sqrt{\tau/(K\rho N|u_p|)}$  и  $\alpha = Nd/|u_p|$ . При этом тенденции составляющих скорости и температуры, обусловленные орографическим волновым сопротивлением, могут быть вычислены следующим образом:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial t} = -\frac{g(u_{av}, v_{av})}{\sqrt{u_{av}^2 + v_{av}^2}} \frac{\partial\tau_w}{\partial p},$$

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} = [u^2 - (u + 2\frac{\partial u}{\partial t})^2 + v^2 - (v + 2\frac{\partial v}{\partial t})^2]/4.$$

## 1.5. Конвекция, конденсация и осадки

Решение проблемы параметризации процессов выделения тепла при конденсации в случае кучковой конвекции и нагревания атмосферы за счет этого тепла (особенно в низких широтах) является одной из ключевых задач в моделировании климата. Можно выделить три основных подхода к решению этой проблемы. Первый из них [92] базируется на идее согласования полей метеорологических элементов, исходя из некоторых энергетических принципов, второй основан на принципе условной неустойчивости второго рода [87], а третий связан с описанием ансамбля кучевых облаков [46].

В настоящее время в моделях общей циркуляции атмосферы реализованы несколько видов параметризации глубокой конвекции. В параметризациях типа конвективного приспособления считается, что если в каком-то вертикальном столбе имеет место влажная неустойчивость, то в результате процесса конвекции профили температуры и влажности становятся либо влажноадиабатическими, либо имеют заранее заданный вид, несколько отличающийся от влажноадиабатического распределения. Известны также параметризации, в которых с некоторым характерным временем, составляющим, как правило, несколько часов, осуществляется приближение модельных профилей температуры и влажности к заданным (реперным) распределениям. К числу таких параметризаций относится схема [51].

В параметризации конвекции типа Куо [87] полагается, что в случае влажной неустойчивости формируется конвективная облачность от верхней границы пограничного слоя до уровня нулевой плавучести. При этом конвективные притоки тепла в облачном слое зависят от конвергенции водяного пара и от некоторого параметра  $\beta$  (см. ниже), характеризующего перемешивание облачного воздуха с окружением.

Наиболее физически полными являются схемы конвекции типа Аракавы–Шуберта [46], а также модифицированный вариант этой схемы [100]. В этих параметризациях считается, что существует ансамбль конвективных облаков с одинаковой нижней границей, совпадающей с высотой пограничного слоя, и с различной верхней границей. Каждое такое облако создает свой поток массы, вследствие чего происходят изменения температуры, влажности и импульса в рассматриваемой области.

В схеме параметризации Тидтке [118] также используется предположение о вертикальном потоке массы вследствие развития конвективной облачности, однако эта схема не предусматривает спектрального представления облачного ансамбля, а учитывает лишь интегральные соотношения.

В настоящий момент нет однозначного мнения о том, какой тип параметризации конвекции является наилучшим при использовании в качестве блока атмосферной модели. Тем не менее следует отметить, что схему Аракавы–Шуберта, несмотря на физическую полноту описания конвективного облачного ансамбля, труднее настроить на то, чтобы модель с использованием этой схемы воспроизводила реалистичный климат. Более того, модели, наиболее реалистично описывающие климатические параметры, связанные с конвекцией, чаще всего используют упрощенную схему Тидтке для расчета потока массы (см., например, [35]).

В модели ИВМ РАН используется не очень распространенная схема конвективного приспособления [51]. В ранней версии модели, в которой эта схема была использована с параметрами, рекомендованными в работе [51], имели место недостатки, связанные с воспроизведением функции распределения относительной влажности в тропиках, а также амплиту-



ды низкочастотной изменчивости, в частности 30–60-дневных колебаний. После настройки параметров конвекции, а именно, увеличения характерного времени конвекции с 2 до 12 ч., а также изменения реперных профилей температуры и влажности таким образом, чтобы большая часть скрытого тепла реализовывалась бы в средней тропосфере, модель стала воспроизводить климат тропиков более реалистично. На настоящий момент по большинству параметров модель ИВМ РАН воспроизводит климат тропиков на уровне современных моделей, в том числе и использующих параметризацию глубокой конвекции Тидтке [118]. Кроме параметризации глубокой конвекции, в рассматриваемой модели реализована схема расчета мелкой конвекции, а также проводится конвективное согласование двух расположенных один под другим слоев. Все детали излагаемых вычислительных процедур, связанных с излагаемыми ниже алгоритмами, представлены в работе [1].

### 1.5.1. Конвективное согласование

Исторически при создании модели ИВМ РАН для параметризации конвекции первой была использована идея о согласовании полей метеоэлементов, которая ниже излагается следуя работе [29].

Пусть кучевая облачность формируется в области между двумя уровнями  $z_b$  (нижний) и  $z_t$  (верхний). Предполагается, следуя работе [45], что в облаке сохраняется статическая энергия

$$h = c_p T + Lq + \Phi.$$

Поскольку облачный воздух насыщен паром, то

$$h = h^* \equiv c_p T + Lq_{\max} + \Phi.$$

Считая, что воздух в облако поступает только через его основание, можно записать необходимое условие его существования:

$$h(z_b) \geq h^*(z_t),$$

или

$$c_p T(z_b) + Lq(z_b) + \Phi(z_b) \geq c_p T(z_t) + Lq_{\max}(z_t) + \Phi(z_t).$$

Учитывая, что  $\Phi = gz$ , это соотношение приводится к следующему виду:

$$\frac{T(z_b) - T(z_t)}{z_b - z_t} \geq \frac{g}{c_p} - \frac{L}{c_p} \left[ \frac{q_{\max}(z_b) - q_{\max}(z_t)}{z_t - z_b} + \frac{(1-r)q_{\max}(z_b)}{z_t - z_b} \right],$$

где  $r = q(z_b)/q_{\max}(z_b)$ . Поскольку левая часть данного выражения аппроксимирует  $-\partial T/\partial z$ , а выражение  $\frac{g}{c_p} - \frac{L}{c_p} \frac{q_{\max}(z_b) - q_{\max}(z_t)}{z_t - z_b}$  аппроксимирует

влажноадиабатический градиент  $\gamma_{ma}$ , то условие возникновения влажной конвекции принимает вид

$$-\frac{\partial T}{\partial z} \geq \gamma_{ma} + \frac{L(1-r)q_{\max}(z_b)}{c_p(z_t - z_b)}.$$

Если ввести понятие критической относительной влажности  $r_{cr}$  из условия, что градиент температуры не может быть больше сухадиабатического ( $\gamma_a = g/c_p$ )

$$\gamma_a = \gamma_{ma} + \frac{L(1-r_{cr})q_{\max}(z_b)}{c_p(z_t - z_b)}$$

и, следовательно,

$$r_{cr} = 1 - \frac{c_p}{Lq_{\max}(z_b)}(\gamma_a - \gamma_{ma})(z_t - z_b),$$

то условие возникновения влажной конвекции можно записать следующим образом:

$$-\frac{\partial T}{\partial z} \geq \frac{1-r}{1-r_{cr}}\gamma_a + \frac{r-r_{cr}}{1-r_{cr}}\gamma_{ma} \equiv \gamma_{cr}.$$

Для описания состояния атмосферы после окончания конвекции привлекаются следующие уравнения, представляющие собой:

1) баланс полного влагосодержания:

$$\int_{z_b}^{z_t} \rho q^{\text{new}} dz = \int_{z_b}^{z_t} \rho q dz - P_c,$$

где индексом new отмечены величины, полученные в результате конвективного согласования, а величина  $P_c$  представляет собой суммарное количество выпавших осадков;

2) сохранение полной энергии:

$$\int_{z_b}^{z_t} \rho T^{\text{new}} dz = \int_{z_b}^{z_t} \rho T dz + \frac{L}{c_p} P_c,$$

3) "перемешивание" температуры и относительной влажности:

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_{cr}, \quad r = r_{cr}.$$

Следует заметить, что алгоритм параметризации сухой конвекции представляет собой частный случай изложенного с  $\gamma_{cr} = \gamma_a$  и  $P_c = 0$ .

### 1.5.2. Глубокая конвекция

Если температура воздуха на ближайшем к поверхности Земли уровне  $Nz$  превышает пороговое значение 287.15 К, то реализуется процедура расчета проникающей конвекции, в которой также учтен обмен импульсом, отсутствующий в параметризации [51]. Здесь и ниже индексом  $b$  обозначены величины на нижней границе конвективного слоя,  $m$  — на уровне таяния,  $t$  — на верхней границе конвективного слоя,  $r$  — реперные величины. Для наступления глубокой конвекции необходимо, чтобы рассматриваемый объем воздуха обладал плавучестью, позволяющей ему переместиться с уровня  $b$  до уровня  $t$ . В столбе воздуха между этими уровнями строятся реперные профили  $T_r$  и  $q_r$ , "приближающие" исходные величины  $T$  и  $q$ :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{dc} = \frac{T_r - T}{\tau}, \quad \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{dc} = \frac{q_r - q}{\tau}, \quad (1.19)$$

где  $\tau$  — характерное время глубокой конвекции (12 ч.).

Реперные профили строятся по следующим правилам, полученным в результате обработки данных наблюдений. Считается, что ниже уровня таяния

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_r = \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_{ma},$$

где  $\theta$  — эквивалентно-потенциальная температура,

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_{ma} = p^{-\kappa} \left[ -T\kappa/p + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{ma} \right], \quad (1.20)$$

а

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{ma} = \frac{RT}{pc_p} \left[ \left(1 + \frac{Lq_{\max}}{RT}\right) / \left(1 + \frac{L}{c_p} \frac{\partial q_{\max}}{\partial T}\right) \right]. \quad (1.21)$$

Здесь  $\kappa = c_p/c_v$ . Выше уровня таяния  $\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\right)_r$  не зависит от давления, так что  $\theta_r(p_t) = \theta(p_t)$ .

Вводится величина  $\delta p$ , представляющая собой разность давлений, соответствующую расстоянию, на которое надо переместить адиабатически данную частицу воздуха, чтобы в ней началась конденсация. Задаются реперные значения  $\delta p$  на нижней границе конвективного слоя, на уровне таяния и на верхней границе конвективного слоя:  $\delta p_b = -90$  гПа,  $\delta p_m = -70$  гПа и  $\delta p_t = -40$  гПа. Значения  $\delta p$  в других областях конвективного слоя получаются линейной интерполяцией в  $p$ -координатах.

Из этих условий можно однозначно найти реперные значения температуры и влажности, если привлечь дополнительно условие сохранения энергии:

$$\int_{p_t}^{p_b} (c_p T + Lq) dp = \int_{p_t}^{p_b} (c_p T_r + Lq_r) dp.$$

При этом количество влаги, выпавшей в виде осадков, вычисляется следующим образом:

$$P_{dc} = \Delta t \int_{p_t}^{p_b} \frac{q^{old} - q_r}{\tau} dp,$$

где  $\Delta t$  — шаг по времени, с которым рассчитывается конвекция (1 ч.). Если значение получается отрицательным, то считается, что не хватает влаги для реализации процесса глубокой конвекции и имеет место мелкая конвекция.

В столбе воздуха, где реализуется глубокая или мелкая конвекция, проводится также "перемешивание" профилей горизонтальных компонент скорости:

$$X^{new}(p) = X^{old}(p) + \alpha(\overline{X^{old}} - X^{old}(p))\Delta t/\tau,$$

где  $\overline{X} = \int_{p_t}^{p_b} X(p)dp/(p_b - p_t)$ ;  $X = u, v$  — среднее по конвективному слою значение скорости;  $\alpha$  — числовой множитель, пропорциональный количеству конвективных осадков в случае глубокой конвекции и равный единице для мелкой конвекции.

### 1.5.3. Мелкая конвекция

Процесс мелкой конвекции может осуществиться, если в столбе воздуха есть влажная неустойчивость, но глубокая конвекция не реализуется из-за того, что верхняя граница конвективного слоя находится слишком низко или для ее работы недостаточно влаги (отрицательное количество осадков). Тенденции  $T$  и  $q$  за счет мелкой конвекции выглядят так же, как и в случае глубокой (1.19), но реперные профили строятся по другим законам. А именно, реперная эквивалентно-потенциальная температура насыщения  $\theta_{es}$  линейно меняется с давлением, а величина  $\delta p$  не зависит от давления:

$$\theta_{es}(p) = \theta_{es}(p_b) + \left( \frac{\partial \theta_{es}}{\partial p} \right)_r (p - p_b)$$

и

$$\left( \frac{\partial \theta_{es}}{\partial p} \right)_r = \frac{\theta_{e,av} - \theta_e(p_b)}{p_{sat,av} - p_{sat}(p_b)}.$$

Здесь

$$\theta_{e,av} = \left( T_{av} + \frac{L}{c_p} q_{av} \right) p_{av}^{-\kappa},$$

$p_{sat}$  — давление, при котором наступает насыщение воздуха, адиабатически поднимающегося с уровня  $p_{av}$  или  $p_b$ .

Для вычисления величин с индексом  $av$  используются полусуммы величин с верхнего и нижнего уровней:  $X_{av} = [X(p_t) + X(p_b)] / 2$ ,  $X = p, T, q$ . Величина  $\delta p$  определяется как

$$\delta p = 0.5 \left[ \delta p_{av} + \int_{p_t}^{p_b} \delta p dp / (p_b - p_t) \right],$$

где  $\delta p$  рассчитывается по формуле

$$\delta p = \frac{p [q - q_{\max}(T, p)]}{\frac{RT}{c_p} \frac{\partial q_{\max}(T, p)}{\partial T} - q_{\max}(T, p)}, \quad (1.22)$$

причем

$$p_{sat} = p + \delta p,$$

а

$$\delta p_{av} = \delta p(T_{av}, q_{av}, p_{av}).$$

Считая, что  $(\theta_{es}(p_b))_r = \theta_{es}(p_b)$ , можно построить первоначальный реперный профиль температуры, а затем по значениям эквивалентно-потенциальной температуры насыщения  $\theta_{es}$  вычислить абсолютную температуру  $T$ , рассчитать несохранение тепла в столбе воздуха

$$\Delta T = \int_{p_t}^{p_b} (T_r(p) - T(p)) dp / (p_b - p_t)$$

и скорректировать профиль  $T_r$ :

$$T_r^{\text{new}}(p) = T_r^{\text{old}}(p) - \Delta T.$$

По значениям реперной температуры вычисляется реперный профиль влажности, рассчитывается несохранение влаги

$$\Delta q = \int_{p_t}^{p_b} (q_r(p) - q(p)) dp / (p_b - p_t)$$

и корректируется профиль  $q_r$ :

$$q_r^{\text{new}}(p) = q_r^{\text{old}}(p) - \Delta q.$$

Эти реперные профили принимаются в качестве окончательных.

#### 1.5.4. Крупномасштабные конденсация и осадки

Если влажность воздуха  $q$  превышает насыщающее значение  $q_{\max}(T, p)$ , то предполагается, что весь избыток водяного пара конденсируется, что позволяет вычислить количество выпавших (крупномасштабных) осадков  $P_{ls}$  (измеряемое в сантиметрах) и изменения температуры  $\Delta T$  и влажности  $\Delta q$ :

$$\begin{aligned} P_{ls} &= -\frac{1}{g} \int_0^{p_s} \Delta q dp, \\ \Delta T &= -\frac{L}{c_p} \Delta q, \\ \Delta q &= \frac{q_{\max}(T, p) - q}{1 + \frac{L}{c_p} \frac{\partial q_{\max}(T, p)}{\partial T}}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ниже уровня конденсации вычисляется также испарение выпадающих осадков:

$$E = \gamma \frac{q_{\max}(T, p) - q}{1 + \frac{L}{c_p} \frac{\partial q_{\max}(T, p)}{\partial T}}, \quad \gamma = 0.1.$$

При этом количество рассчитанной выпавшей влаги уменьшается:

$$P_{ls}^{\text{new}} = P_{ls}^{\text{old}} - \frac{1}{g} \int_0^{p_s} E dp,$$

изменяются температура и влажность воздуха:

$$T^{\text{new}} = T^{\text{old}} - \frac{L}{c_p} E, \quad q^{\text{new}} = q^{\text{old}} + E.$$

#### 1.6. Радиационный перенос

Радиационный приток тепла  $\epsilon_r$ , присутствующий в соответствующем уравнении системы (1.1), может быть представлен следующим образом:

$$\epsilon_r = \epsilon_{lw} + \epsilon_{sw},$$

где  $\epsilon_{lw}$  и  $\epsilon_{sw}$  ответственны за вклад тепловой и солнечной радиации соответственно. Радиационные источники тепла в моделях общей циркуляции атмосферы рассматриваются как результат взаимодействия теплового и солнечного излучения с атмосферными газами, аэрозолем, облаками и с подстилающей поверхностью. Из поглощающих газовых компонент атмосферы в модели ИВМ РАН включены  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $O_3$ ,  $O_2$ ,  $CH_4$ ,  $N_2O$ . Из

них только водяной пар является элементом динамического моделирования. Остальные газовые компоненты и аэрозоль присутствуют в модели, главным образом, в качестве фоновых. Происхождение облаков связывается с конвективными и крупномасштабными процессами, по составу допускаются жидкокапельные, кристаллические или смешанные типы облаков, а по мощности они могут занимать несколько модельных слоев по всей тропосфере. Радиационный блок является многоспектральным, а именно, в тепловой области спектра рассматриваются отдельно 10 спектральных участков, в солнечной — 18. Верхняя граница атмосферы в модели расположена примерно на высоте 90 км, при этом число атмосферных вертикальных уровней достигает 20–40. В модель включены суточный и сезонный ход высоты Солнца. Полное описание радиационного блока модели ИВМ РАН дано в работе [1, 10].

Для определения притоков тепла к атмосферным слоям и радиационных потоков на подстилающей поверхности, т.е. радиационных характеристик, входящих в правые части соответствующих уравнений теплового баланса, требуется модель облачной атмосферы. Это относится как к количеству облаков в ячейке интегрирования, под которым обычно понимается доля горизонтального покрытия неба облаками (балл облаков), так и к взаимному вертикальному расположению облачных слоев относительно друг друга (вертикальное перекрывание облаков). Необходимо выбрать алгоритмы разделения облаков на капельные и кристаллические, задать радиусами капель и размерами кристаллов, найти способы расчета водности и ледности облачных образований, их оптических характеристик. Эта весьма важная часть модели существенно влияет как на точность воспроизведения климата и его изменений, так и на вычислительные затраты при проведении численных экспериментов.

Облака в модели связаны с конвективными и с крупномасштабными процессами. Следуя работе [111], количество конвективных облаков определяется в зависимости от количества конвективных осадков. Высотные границы расположения конвективных облаков определяются областью конвективной активности. Широтная зона действия этого механизма расположена в основном в пределах тропической области тропосферы, но определяет в ней основную массу облаков. Наличие облаков допускается во всех тропосферных слоях. Для отдельных ярусов введены следующие границы: выше 400 гПа — верхний ярус, ниже 700 гПа — нижний ярус, между ними — средний.

Следует подчеркнуть, что схема параметризации облачности в климатических моделях построена на основе сопоставления данных моделирования и различных характеристик реальной атмосферы на предмет их близости, а не на основе анализа собственно реальных облаков. Поэтому в каждой отдельно взятой модели облачная схема содержит ряд подгоноч-

ных параметров, подобных приведенным выше. Надо сказать, что влияние этих параметров на результаты моделирования достаточно велико и выбор необходимых их значений требует большой исследовательской работы. В частности, анализ результатов различных модельных групп из программы СМІР показал, что чувствительность моделей к удвоению концентрации углекислого газа в атмосфере сильно зависит именно от схемы параметризации облачности в пограничном слое [20].

### 1.6.1. Тепловое излучение

Для расчета нисходящих и восходящих потоков теплового излучения в модельной атмосфере используются следующие формулы:

$$F_{\Delta\nu}^{\downarrow}(p) = - \int_0^p B_{\Delta\nu}[T(p')] \frac{\partial \tau_{\Delta\nu}(p, p')}{\partial p'} dp',$$

$$F_{\Delta\nu}^{\uparrow}(p) = B_{gr} \tau_{\Delta\nu}(p, p_s) + \int_p^{p_s} B_{\Delta\nu}[T(p')] \frac{\partial \tau_{\Delta\nu}(p, p')}{\partial p'} dp',$$

$$B_{gr} = \delta_{\Delta\nu} B_{\Delta\nu}(T_s) + (1 - \delta_{\Delta\nu}) F_{\Delta\nu}^{\downarrow}(p_s), \quad (1.24)$$

где  $p$ ,  $p_s$  — давление в атмосфере и на подстилающей поверхности;  $T_s$ ,  $\delta_{\Delta\nu}$  — температура и излучательная способность этой поверхности;  $B_{\Delta\nu}(T)$  — функция Планка, проинтегрированная по спектральному участку  $\Delta\nu$ ;  $\tau_{\Delta\nu}(p, p')$  — функция пропускания диффузного излучения между уровнями  $p$  и  $p'$ . Вся длинноволновая часть спектра разбита на 10 интервалов  $\Delta\nu$  согласно результатам построения функций пропускания атмосферных газов в работах [57, 58, 59].

Функции пропускания атмосферных газов представлены в виде  $k$  распределений:

$$\tau(W) = \sum_{i=1}^6 c_i \exp(-1.66 k_i W), \quad (1.25)$$

где  $W$  — эффективная масса поглощающего вещества в слое  $(p, p')$ , определенная с учетом профилей температуры и давления в этом слое. Таблицы коэффициентов  $c_i$ ,  $k_i$  приведены в работе [59]. Эффективная масса  $W_k$  любой компоненты в слое определяется как

$$W_k = \frac{10}{9.81} q_k \Delta p_k \left( \frac{p_k}{p_r} \right)^m f(T_k, T_r), \quad (1.26)$$

где  $q_k$  — массовая доля поглощающего вещества (г/г);  $\Delta p_k$  — толщина слоя в (гПа);  $T_k$ ,  $p_k$  — температура и давление на уровне  $k$ ;  $T_r$ ,  $p_r$  — реперные значения температуры и давления, для которых определены функции про-



пускания. Функция  $f(T_k, T_r)$  имеет вид [59]

$$f(T_k, T_r) = 1 + a(T_k - T_r) + b(T_k - T_r)^2. \quad (1.27)$$

Для расчета потоков теплового излучения в облачной атмосфере применяется так называемое черное приближение [42], т.е. облака предполагаются абсолютно черными излучателями. Для аэрозольной компоненты атмосферы используются результаты работы [24]. Поскольку аэрозоль в модели ИВМ РАН является фоновой составляющей, то удастся воспользоваться заранее подготовленными таблицами характерных для суши и океанов оптических толщин, рассчитанных с учетом того, что функция пропускания аэрозоля экспоненциальна.

Эффективные массы поглощающих компонент атмосферы вычисляются для каждого из 10 спектральных интервалов, так как каждый из них имеет индивидуальный характер зависимости от температуры и давления. Учет перекрывания полос поглощения различных субстанций в пределах отдельного спектрального участка производится простым перемножением индивидуальных функций пропускания.

Расчеты потоков нисходящего и восходящего излучений проводятся по формулам [42] (индексы  $\Delta\nu$  для простоты опущены):

$$F_n^\downarrow = - \sum_{m=1}^{n-1} B_m^* (\tau_{nm} - \tau_{nm+1}), \quad n = 2, N,$$

$$F_n^\uparrow = B_{gr} \tau_{nm} + \sum_{m=n}^{N-1} B_m^* (\tau_{nm} - \tau_{nm+1}), \quad n = 1, N - 1, \quad (1.28)$$

где  $F_n^\downarrow, F_n^\uparrow$  — потоки на уровне  $n$ ;  $\tau_{nm}$  — функция пропускания всех компонент атмосферы в рассматриваемом спектральном участке между уровнями  $n$  и  $m$ ;  $N$  — число границ слоев;  $B_m^*$  — некоторая средняя величина функции Планка в слое;  $B_{gr}$  — излучение подстилающей поверхности. Легко видеть, что поток излучения на каждом уровне  $n$  складывается из суммы излучений всех слоев выше (для нисходящего потока) и ниже (для восходящего потока) с весом  $(\tau_{nm} - \tau_{nm+1})$ .

Следует отметить еще одну важную особенность радиационного блока. Чтобы избавиться от вычислительных неприятностей, связанных с заданием нулевых граничных условий для  $F_n^\downarrow$  на верхней границе расчетной области модели, а также для учета массы озона выше этой границы, в радиационном блоке введен дополнительный нулевой слой. Этот дополнительный слой содержит климатический озон и другие газовые составляющие. Хотя притоки тепла дополнительного слоя в модели не используются, но при этом учитывается очень важное влияние верхней атмосферы. Этот слой действует как в тепловой области спектра, так и в солнечной.

В результате последовательного использования описанной методики рассчитываются потоки нисходящего и восходящего излучений в каждом из спектральных участков тепловой области. Суммируя их по всем 10 участкам, вычисляют требуемые потоки  $F_n^\downarrow$ ,  $F_n^\uparrow$  для всего теплового диапазона. Далее определяются полные (эффетивные) потоки  $F = F^\uparrow - F^\downarrow$ , а затем и притоки к слоям

$$\varepsilon_{lw} = 0.97617 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta F}{\Delta p}, \quad (1.29)$$

где размерности переменных таковы:  $[F] = \text{Вт}/\text{м}^2$ ,  $[p] = \text{гПа}$ ,  $[\varepsilon] = \text{К}/\text{с}$ . Вместе с функцией  $\varepsilon_{lw}$  рассчитывается нисходящий поток излучения на подстилающей поверхности:

$$F_g = F^\downarrow(p_s). \quad (1.30)$$

Моделирование состояния атмосферы в ходе численных экспериментов практически всегда сопровождается одновременными диагностическими расчетами. На каждом временном шаге в модели используются потоки и притоки только для облачной атмосферы. Для диагноза требуются также расчеты и для безоблачных условий, например для оценки облачно-радиационного форсинга на верхней и нижней границах атмосферы. Эти характеристики заняли прочное место среди стандартных диагностических функционалов моделей. Поэтому в качестве искомым величин в радиационных блоках моделей выступают одновременно потоки как в облачных, так и в безоблачных ситуациях.

### 1.6.2. Солнечное нагревание

Для расчета потоков радиации в солнечном спектре применяются приближенные схемы учета эффектов рассеяния и поглощения в атмосфере на основе метода  $\delta$ -Эдингтона [79, 84, 61]. Поглощающие компоненты в атмосфере представлены  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $O_3$ ,  $O_2$ , аэрозолем, облаками. В модель включены релеевское и аэрозольное рассеяния, рассеяние в облаках, отражение от подстилающей поверхности. Следуя результатам работы [112], солнечный спектр первоначально разбивается на четыре интервала. Предполагается, что в каждом из них известны вертикальные распределения оптических толщин атмосферных слоев ( $\tau$ ) для релеевского рассеяния и аэрозольного ослабления, значения альбеда однократного рассеяния ( $\omega$ ) и параметра асимметрии индикатрисы рассеяния ( $\gamma$ ). Для вычисления оптических характеристик капельных и кристаллических облаков используются формулы из работы [112].

Для учета селективного поглощения газовых компонент атмосферы  $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $O_3$ ,  $O_2$  введено дополнительное разбиение каждого из четырех

интервалов на частичные подинтервалы в зависимости от поглощающих свойств рассматриваемых газов. В работе [54] приведены такие подинтервалы вместе с коэффициентами поглощения атмосферных газов, а также методы вычисления эффективных масс и оптических толщин в каждом из них. В итоге общее число интервалов в солнечном спектре вырастает до 18. Из них восемь первых охватывают область поглощения  $O_3$  в ультрафиолетовом и видимом диапазонах спектра 0.2–0.7 мкм. Последние три интервала относятся к слабому поглощению углекислого газа. Водяной пар представлен остальными семью интервалами, для которых коэффициенты поглощения получены из представления функции пропускания в виде  $k$ -распределений. Следует отметить, что необходимость такого способа учета поглощения газовых компонент увеличивает время расчета притоков. Альтернативным методом учета селективного поглощения является метод распределения фотонов по пробегам [42], который не требует дополнительного разбиения спектра и успешно используется в ряде современных климатических моделей [102].

Используемые в модели характеристики аэрозоля представлены в виде заранее подготовленных таблиц аэрозольных оптических толщин ( $\tau$ ) модельных слоев в четырех спектральных интервалах, рассчитанных на базе работы [24]. Задаются также альbedo однократного рассеяния аэрозоля (вероятность выживания фотонов,  $\omega$ ) в тех же спектральных интервалах и слоях, что и  $\tau$ , параметр асимметрии индикатрисы рассеяния аэрозоля ( $\gamma$ ). В солнечном спектре аэрозольное взаимодействие рассчитывается по совокупности указанных параметров  $\tau$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ . В тепловом диапазоне также имеется возможность учета влияния аэрозоля, но уже без рассеяния. Для этого в 10 спектральных интервалах теплового диапазона оптические толщины атмосферных слоев рассчитываются по оптической толщине первого поддиапазона коротковолнового спектра (длина волны 0.55 мкм) умножением на некие переводные коэффициенты. Однако длинноволновый эффект аэрозоля ничтожен. В качестве математического аппарата для расчета потоков солнечной радиации используется широко распространенный метод  $\delta$ -Эдингтона [79].

Система линейных дифференциальных уравнений для потоков нисходящей ( $D$ ) и восходящей ( $U$ ) радиации в отдельном спектральном интервале имеет вид [84]

$$\begin{aligned} \frac{dD}{d\tau} &= \gamma_2 U - \gamma_1 D + f_1, & \frac{dU}{d\tau} &= \gamma_1 U - \gamma_2 D + f_2, \\ f_1 &= \pi S_0 \omega \gamma_4 e^{-\tau/\mu_0}, & f_2 &= -\pi S_0 \omega \gamma_3 e^{-\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (1.31)$$

с граничными условиями при  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  соответственно:

$$D_1 = 0, \quad U_{L+1} = A_{\text{dif}} D_{L+1} + A_{\text{dir}} \pi S_0 \mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0}.$$

Здесь  $A_{\text{dif}}$  и  $A_{\text{dir}}$  — альbedo подстилающей поверхности для диффузного и прямого излучений;  $S_0$  — доля солнечной энергии в рассматриваемом интервале;  $\mu_0$  — косинус зенитного угла Солнца;  $\tau_0$  — полная оптическая толщина атмосферы с учетом всех компонент ослабления, свойственных для данного спектрального интервала;  $\tau$  — оптическая толщина атмосферы, рассчитываемая от верхней границы атмосферы до данного уровня;  $L = N - 1$  — число слоев в радиационном блоке модели. Параметры  $\tau$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  подвергнуты преобразованию подобия [84].

В результате решения системы (1.31) находятся направленные потоки  $U$  и  $D$ , а затем вычисляются полные потоки  $S = U - D$  и притоки тепла к отдельным слоям

$$\varepsilon_{sw} = 0.97617 \cdot 10^{-4} \frac{\Delta S}{\Delta p}, \quad (1.32)$$

где размерности переменных такие же, что и в тепловом диапазоне.

Вместе с функцией  $\varepsilon_{sw}$  в модели вычисляется полный поток солнечного излучения на подстилающей поверхности:

$$S_g = D_{L+1} - U_{L+1}. \quad (1.33)$$

Для контроля точности решения системы (1.31) было предпринято сравнение с иным способом решения этой системы, который является почти полностью аналитическим [61]. В этом подходе задача решается аналитически для каждого слоя дважды: для прямого и диффузного излучений. Затем, используя метод сложения, вычисляют потоки для комбинаций слоев [61]. Такой подход применяется в большинстве зарубежных моделей [102]. Расчеты показали, что в безоблачной атмосфере результаты методов [61] и [41] идентичны, а в облачной атмосфере точность выше [41].

## 1.7. Взаимодействие атмосферы с деятельным слоем суши и криосферой

В первых глобальных трехмерных климатических моделях (см., например, [92]) процессы тепловлагообмена между атмосферой и поверхностью суши рассматривались весьма упрощенно, следуя (интегральному) энергобалансовому подходу Будыко [3]. Использовалось лишь уравнение теплового баланса, связывающего потоки энергии с температурой поверхности. Испарение выражалось в виде простой функции от потенциально доступного для растительности влагосодержания и некоторого коэффициента, отражающего термическое состояние почвы. Доступное влагосодержание задавалось явно и варьировалось, в зависимости от осадков и испарения, от значения, характерного для точки увядания, до значения полевой влагоемкости. Любое превышение полевой влагоемкости интерпретировалось как составляющая стока.

Дирдорф [64] предложил альтернативный подход с упором на суточной временной масштаб и явное представление растительности. В его модели впервые учтены различия между транспирацией, испарением с кроны растительности и с оголенной почвы. Он также ввел многослойное представление почвы, позволившее рассчитывать вертикальные профили температуры и влажности. Этот подход затем был использован в ряде схем, описывающих взаимодействие атмосферы и поверхности суши, например SiB (Simple Biosphere model) [109], BATS (Biosphere-Atmosphere Transfer Scheme) [67] и CLASS (Canadian Land Surface Scheme) [120]. Дальнейшее развитие этого подхода в ИВМ РАН было связано с рассмотрением различных физических состояний влаги в почве (в том числе в условиях сезонного промерзания и вечной мерзлоты) и в снежном покрове с учетом их фазовых переходов [8, 9, 33], а также в растительном покрове [25].

При математическом описании тепловлагопереноса в почве все физические процессы предполагаются одномерными, поскольку вертикальные градиенты температуры и влаги в различных ее состояниях, как правило, значительно превосходят горизонтальные. Перенос тепла и влаги носит при этом диффузионный и взаимосвязанный характер; поток каждой субстанции (температура, водяной пар, жидкая влага) обусловлен не только наличием соответствующего градиента, но вызывается также неравномерностью распределения других характеристик состояния почвы. Уравнения тепловлагопереноса в почве с учетом корневой системы растительности могут быть записаны следующим образом [39, 26]:

$$\begin{aligned} \rho C \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial z} + \rho (L_i F_i - L_v F_v), \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \lambda_W \left( \frac{\partial W}{\partial z} + \delta \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial z} - F_i - F_v - R_f - R_r, \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \lambda_V \frac{\partial V}{\partial z} + F_v, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= F_i. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Здесь  $z$  — направленная вниз вертикальная координата;  $W$  — количество жидкой влаги в долях от массы сухой почвы;  $T$  — температура, °C;  $V$  — количество водяного пара;  $I$  — количество льда;  $\lambda_T$  — коэффициент теплопроводности;  $\lambda_W$  и  $\lambda_V$  — коэффициенты диффузии воды и водяного пара соответственно;  $\delta$  — коэффициент термовлагопроводности за счет градиента температуры;  $\rho$  — плотность почвы;  $C$  — ее теплоемкость;  $\gamma$  — скорость инфильтрации воды под действием силы тяжести;  $F_i$  — скорость изменения количества жидкой влаги и льда за счет процессов замерзания/таяния;  $F_v$  — скорость изменения содержания водяного пара и воды за счет процессов испарения/конденсации;  $R_f$  — изменение влагосодержания за счет

горизонтального стока воды;  $R_r$  — скорость всасывания воды корневой системой растительности. Уравнения (1.34) решаются в слое  $(0, H)$ , где  $H$  соответствуют горизонту в почве, на котором отсутствуют внутрисезонные изменения температуры.

Если поверхность почвы покрыта снегом толщиной  $h$ , то для описания процесса теплопереноса в слое  $(-h, 0)$  привлекаются следующие уравнения [9]:

$$\begin{aligned} \rho_{sn} C_{sn} \frac{\partial T_{sn}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \lambda_{sn} \frac{\partial T_{sn}}{\partial z} + \rho_{sn} L_i F_{sn}, \\ \frac{\partial W_{sn}}{\partial t} &= \frac{\partial \gamma_{sn}}{\partial z} - F_{sn}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

в которых  $T_{sn}$  — температура снега;  $W_{sn}$  — его суммарное (вода и лед) влагосодержание;  $\rho_{sn}$ ,  $C_{sn}$ ,  $\lambda_{sn}$  и  $\gamma_{sn}$  — его плотность, теплоемкость, коэффициент теплопроводности и гидравлическая проводимость соответственно. Слагаемое  $F_{sn}$  аналогично по своему физическому смыслу слагаемому  $F_i$  в уравнениях для почвы. Высота снежного покрова  $h$  связана с его водноэквивалентной толщиной, которая, в свою очередь, определяется осадками, испарением и таянием снега. При этом учитывается, что в течение всего периода существования снежного покрова плотность снега может значительно изменяться со временем вследствие процессов метаморфизма и гравитационного оседания. Кроме того, при расчете потока влаги за счет испарения приняты во внимание эффекты растительности.

В качестве граничных условий для системы (1.34)–(1.35) выбраны следующие формулировки. На нижней границе расчетной области  $z = H$  задается отсутствие диффузионных потоков воды и пара и считается известным поток тепла (равный, вообще говоря, геотермическому потоку). На верхней границе  $z = -h$  (почва покрыта снегом) или  $z = 0$  (отсутствует снежный покров) предполагаются известными количество водяного пара в воздухе, поток жидкой влаги, обусловленный дождевыми осадками, таянием снега и испарением с поверхности почвы, и температура поверхности раздела "атмосфера–снег/почва". В свою очередь эта температура находится из уравнения теплового баланса, включающего компоненты радиационного баланса, поток тепла из снега/в снег или почву и потоки явного и скрытого тепла. В качестве начальных условий используются либо наблюдаемые профили соответствующих величин, либо результаты специальной процедуры инициализации.

Сумарная теплоемкость почвы предполагается зависящей от содержания воды и льда [39], а коэффициент теплопроводности — от потенциала почвенной влаги [96]. Потенциал влаги, коэффициент влагопроводности и гидравлический поток вычисляются согласно работе [60]. Перечень всех параметров модели, зависящих от типа почвы, и их значения для каждого типа приведены в работе [1].

Теплоемкость снега  $C_{sn}$  считается равной теплоемкости льда  $C_i$ , а его плотность  $\rho_{sn}$  и теплопроводность  $\lambda_{sn}$  предполагаются зависящими от глубины и рассчитываются по эмпирическим формулам [39]. Высота  $h$  снежного покрова связана с рассчитываемой в модели общей циркуляции атмосферы водноэквивалентной его толщиной  $S_{sn}$  соотношением

$$\rho_w S_{sn} = \int_{-h}^0 \rho_{sn} dz,$$

где  $\rho_w$  — плотность воды. Водноэквивалентная толщина снега изменяется со временем по закону

$$\frac{\partial S_{sn}}{\partial t} = P - M - L_i E_s / \rho_w,$$

где  $P$  — интенсивность осадков при температуре подстилающей поверхности меньшей  $0^\circ\text{C}$ ;  $M$  — интенсивность снеготаяния;  $L_i E_s$  — поток скрытого тепла на поверхности снега.

Для расчета твердой фазы при  $T < 0$  пренебрегается вкладом водяного пара и используется эмпирическая зависимость для максимального количества жидкой влаги, которая может оставаться незамерзшей при отрицательной температуре [12]. При прогревании промерзшей почвы в модели реализован алгоритм расчета ее оттаивания. Вкладом водяного пара в фазовые переходы влаги в этом процессе также пренебрегается. Если же лед отсутствует, то в рассмотрение вводятся процессы испарения воды и конденсации водяного пара в почвенных порах. При этом учитывается тот факт, что в большинстве реальных случаев даже в слабоувлажненной почве водяной пар является насыщенным [39] и если влажность почвы превышает максимальную гигроскопичность, то представляется возможным использовать эмпирическое соотношение типа уравнения Меттса–Боуэна [95].

Расчет горизонтального стока влаги  $R_f$  складывается из поверхностного  $R_{f1}$  и подповерхностного  $R_{f2}$  стока. В основе схемы параметризации этих процессов лежат алгоритмы, использованные в модели [66] Института метеорологии общества Макса Планка (Гамбург, ФРГ).

Температура поверхности суши или снега  $T_s$  в предположении, что скорость изменения со временем теплосодержания верхнего слоя почвы (в модели толщиной 1 см) определяется бюджетом потоков тепла

$$C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \alpha) S_g + F_g - \epsilon \sigma_{SB} T_s^4 - L E_s - H_s + B, \quad (1.36)$$

где  $S_g$  — приходящая коротковолновая радиация;  $\epsilon \sigma_{SB} T_s^4$  — излученная длинноволновая радиация;  $L E_s$  — поток скрытого тепла;  $H_s$  — поток явного

тепла;  $B$  — поток тепла в почву;  $\sigma_{SB}$  — постоянная Стефана-Больцмана;  $\epsilon$  — коэффициент серости;  $\alpha$  — альbedo поверхности.

В рассматриваемой схеме тепловлагопереноса в системе "растительность-почва" возможное влияние растительности на параметр шероховатости не учитывается и основное внимание уделяется процессу испарения. Предполагается, что какая-либо приписанная к суше ячейка конечно-разностной сетки в модели общей циркуляции атмосферы может включать участки оголенной почвы, покрытые снегом, занятые внутренними водами, содержащими сухую и увлажненную растительность различных типов. Расчет потока  $E$  влаги за счет испарения вычисляется согласно [66] по формуле

$$E = \rho_a \sum_{i=1}^N \mu_i (q_i - q_a) / R_i. \quad (1.37)$$

Здесь  $\mu_i$  — доля площади ячейки, занятая  $i$ -м видом поверхности;  $q_i$  — эффективная влажность на поверхности;  $R_i$  — сопротивление. Для заснеженной и водной поверхности, а также увлажненного растительного покрова значение величины  $q_i$  равно насыщающему значению удельной влажности, рассчитанному при температуре поверхности  $q_{\max}(T_s)$ . В случае же открытой почвы  $q_i$  вычисляется аналогично [66] в зависимости от влагосодержания почвы.

В обоих этих случаях сопротивление  $R_i = 1/(C_T U)$ , где  $U$  — модуль скорости ветра на ближайшем к поверхности расчетном уровне в модели атмосферы, а  $C_T$  — коэффициент тепловлагообмена. Для сухой растительности также предполагается, что  $q_i = q_{\max}$ , но сопротивление  $R_i$  определяется согласно [109] по формуле

$$R_i = \frac{1}{C_T U} + \frac{R(S_{ph})}{F_T F_q F_W}, \quad (1.38)$$

где

$$\frac{1}{R(S_{ph})} = \frac{1}{kc} \left[ \frac{b_i}{d_i S_{ph}} \ln \left( \frac{d_i e^{kLt} + 1}{d_i + 1} \right) - \ln \left( \frac{d_i + e^{-kLt}}{d_i + 1} \right) \right]. \quad (1.39)$$

Здесь  $S_{ph}$  — часть достигающей поверхности коротковолновой радиации (в модели 55 % от  $S$ ), используемая в процессе фотосинтеза;  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — параметры, зависящие от типа растительности;  $Lt$  — листовой индекс. Функции  $F$ , определяющие зависимость сопротивления от температуры и влажности воздуха и влагосодержания почвы, приведены в работе [109]. Перечень всех параметров, зависящих от типов растительности, и их значения для каждого типа содержится в работе [1].

Описанная выше модель (в различных ее модификациях) опробована при заданных наблюдаемых параметрах атмосферного воздействия (скорость ветра, температура, удельная влажность, осадки) для ряда регио-



нов [8, 9, 33]. Суммируя результаты всех экспериментов с моделью, можно утверждать, что:

- 1) пренебрежение фазовыми переходами влаги в почве приводит к чрезмерному (в сравнении с данными наблюдений) ее выхолаживанию;
- 2) инфильтрация осадков и талой воды в почву существенным образом определяет процесс промерзания почвы;
- 3) пренебрежение просачиванием сквозь снежный покров талой воды и дождя и связанных с этим процессов фазового перехода приводит к слишком раннему сходу снежного покрова;
- 4) последнее сказывается на эволюции влажности почвы не только в зимне-весенний период, но и в последующие сезоны;
- 5) учет уплотнения снега под действием метаморфизма и силы тяжести существенно улучшает воспроизведение толщины снежного покрова и термического режима активного слоя вечной мерзлоты.

В целом же сравнение результатов расчетов с доступными данными наблюдений показало достаточно хорошее их согласие, что позволяет рассматривать построенную модель как один из "инструментов" решения разнообразных задач, возникающих при исследовании проблем климата и природной среды.

## 1.8. Региональные аспекты

Последствия климатических изменений, вызванных увеличением концентрации парниковых газов в атмосфере, уже сегодня сказываются на состоянии основных природных ресурсов (в первую очередь биосферы), разнообразных областей деятельности общества и здоровья людей. При исследовании региональных аспектов этих изменений приходится решать задачи двоякого типа. С одной стороны, рассмотренная выше проблема параметризации процессов подсеточного масштаба требует знания региональных особенностей процессов взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью, наиболее ярко проявляющихся в пограничном слое атмосферы. С другой стороны, для конкретных регионов мира необходимо оценить степень воздействия глобальных изменений климата на природную среду (состояние подстилающей поверхности, естественные экосистемы, водные ресурсы и т.д.) и возможности минимизации ущерба от неблагоприятных для человека последствий. Хотя глобальные численные гидродинамические модели являются в настоящее время наиболее мощным инструментом исследования климата, все же их разрешение является недостаточным для воспроизведения локальных особенностей конкретных регионов. В связи с этим возникает задача восстановления региональной структуры климатических характеристик на основе использования лишь информации об их,

осредненных по более крупным масштабам, распределениях. Здесь возможны два подхода. Первый из них связан с применением негидростатических региональных и локальных моделей (в том числе вихреразрешающих моделей пограничного слоя атмосферы [70]). Другой подход, который более подробно рассматривается ниже, базируется на использовании статистической априорной информации.

Первая работа в этом направлении была выполнена в США в Орегонском университете [83]. Авторы использовали многолетние наблюдения приземной температуры на сети метеостанций, расположенных на территории штата Орегон. Они также предположили, что существует некая модель общей циркуляции атмосферы, с помощью которой можно предсказать среднюю по всему штату температуру. Распределение температуры внутри рассматриваемого региона, точнее аномалий температуры, затем было представлено в виде разложения [38] по эмпирическим ортогональным базисам  $\varphi_i(x)$ :

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(x),$$

где  $x, t$  — пространственная и временная координаты;  $\alpha_i(t)$  — коэффициенты разложения по базису  $\varphi_i(x)$ . Базисы  $\varphi_i(x)$  строятся на основе статистической априорной информации и описывают пространственную изменчивость поля в регионе, а коэффициенты  $\alpha_i(t)$  характеризуют конкретную ситуацию восстанавливаемого поля. Авторы обсуждаемой работы ограничились лишь одним, наиболее информативным членом разложения  $\alpha_1(t)$ , который находился из регрессионного соотношения

$$\alpha_1(t) = a + b\bar{T}(t),$$

где  $a$  и  $b$  — константы;  $\bar{T}(t)$  — средняя по региону температура. Аналогичный подход был реализован в работе [23] при решении обратных задач восстановления распределения температуры и осадков в Приморском крае России. В работе [115] восстанавливалось поле осадков на территории Перинейского полуострова по полю атмосферного давления, причем поле осадков представлялось в виде разложения по каноническому базису и учитывалась только одна гармоника, а коэффициент разложения определялся по полю давления. Недостатком рассмотренных работ является то, что для решения задачи использовалась информация (например, в виде среднего) только в том регионе, в котором требовалось восстановить детальную структуру поля. Однако если известно осредненное поле в соседних регионах, то эту информацию также можно использовать.

Такой подход был реализован в работах [43, 16, 44], выполненных в ИВМ РАН. В этих работах построены многомерные статистические модели ре-

шения обратных задач по предсказуемости наиболее вероятных значений аномалий геофизических полей в отдельных регионах по осредненным значениям этих полей (или длинноволновой части спектра). Статистическая модель включает в себя: формулировку прямой задачи; метод построения оператора, с помощью которого получается оценка решения обратной задачи; оценку погрешности решения. Если с помощью модели общей циркуляции атмосферы удастся оценить осредненное по пространству и времени глобальное поле некоторого параметра атмосферы, то такого рода модели позволяют восстановить детальную структуру поля в интересующем нас регионе. При этом важно оценить, какое влияние оказывают другие регионы, т.е. оценить информативность их входных данных.

Суть предложенного подхода состоит в следующем. Пусть по крупномасштабному (осредненному) полю  $\xi$  нужно восстановить мелкомасштабное поле  $f$  в некотором регионе, связь между которыми задается с помощью линейного оператора  $A$ :

$$\xi = Af + \nu, \quad (1.40)$$

где  $\nu$  — погрешность вектора  $\xi$ ,  $\xi \in R^n$ ,  $f \in R^m$ ,  $\nu \in R^n$ . Необходимо заметить, что координатами вектора  $\xi$  являются пространственно осредненные значения мелкомасштабного векторного поля  $f$  в отдельных регионах. Решение обратной задачи (1.40) состоит в том, чтобы найти такой линейный оператор  $R$ , с помощью которого по известному вектору  $\xi$  можно было бы получить оценку вектора  $f$  с минимальной среднеквадратичной погрешностью, т.е.

$$E\xi = \hat{f}, \quad E\|R\xi - f\|^2 \sim \min,$$

где  $\hat{f}$  — оценка вектора  $f$ ;  $E$  — математическое ожидание. Если  $\langle f \rangle = 0$ ,  $\langle \xi \rangle = 0$  и  $\langle \nu \rangle = 0$  (угловые скобки означают вероятностное осреднение), а  $\langle f\nu^* \rangle = 0$  (векторы  $f$  и  $\nu$  некоррелированы), то оператор  $R$  можно найти из условия минимума правой и левой частей соотношения для среднеквадратичной погрешности решения обратной задачи [40]:

$$E\|R\xi - f\|^2 = E\|(RA - I)f + R\nu\|^2. \quad (1.41)$$

Минимизация функционала

$$\Phi(R) = M\|(RA - U)f + R\nu\|^2$$

на множестве операторов  $R$  приводит к соотношению

$$R_1 = FA^*Q^{-1},$$

где  $Q = AFA^* + \Sigma_\nu$  — ковариационная матрица обобщенной ошибки вектора  $\xi$ ;  $F = \langle ff^* \rangle$  и  $\Sigma_\nu = \langle \nu\nu^* \rangle$  — ковариационные матрицы векторов

$f$  и  $\nu$  соответственно. При этом оценка для вектора  $f$  получается из соотношения

$$\hat{f} = R\xi,$$

а дисперсия вектора априорной погрешности решения обратной задачи определяется формулой

$$h_1 = \text{tr}(F - FA^*Q^{-1}AF).$$

Если минимизируется функционал в виде левой части соотношения (1.41)

$$\Phi(R) = E\|R\xi - f\|^2,$$

то тогда

$$R_2 = \Sigma_{f\xi}\Sigma_{\xi\xi}^{-1},$$

где  $\Sigma_{f\xi} = \langle f\xi^* \rangle$ ,  $\Sigma_{\xi\xi} = \langle \xi\xi^* \rangle$ . Дисперсия вектора априорной погрешности решения обратной задачи в этом случае определяется соотношением

$$h_2 = \text{tr}[F - \Sigma_{f\xi}\Sigma_{\xi\xi}^{-1}\Sigma_{\xi f}].$$

Если оператор  $A$  и ковариационные матрицы  $F$  и  $\Sigma_\nu$  известны, то говорят, что задана модель  $[A, F, \Sigma_\nu]$ . Необходимо заметить, что матрицы  $F$  и  $\Sigma_\nu$  можно оценивать по разным выборкам, так что получаются разные модели  $\mu_1 = [A, F^{(1)}, \Sigma_\nu^{(1)}]$ ,  $\mu_2 = [A, F^{(2)}, \Sigma_\nu^{(2)}]$ , ... и, соответственно, разные операторы  $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots$ , или, другими словами, образуется некоторый класс моделей  $M$ . Возникает вопрос: какую модель выбрать для решения обратной задачи? Для решения проблемы выбора модели удобно ввести понятие ее надежности  $\alpha$  [40].

Пусть в принятой модели  $[A, F, \Sigma_\nu]$  задачи (1.40) про вектор  $\nu$  достоверно известно, что он имеет нормальное распределение  $N(0, \Sigma_\nu)$ . Тогда задача вычисления надежности модели состоит в проверке нулевой гипотезы  $H_0: \xi \in N(\bar{\xi}, \Sigma_\xi^{1/2}) = N(A\bar{f}, Q^{1/2})$ , где  $\bar{\xi}$  и  $\bar{f}$  — математические ожидания случайных векторов  $\xi$  и  $f$ . Для проверки гипотезы  $H_0$  строится контрольная величина

$$t_n = \|Q^{-1/2}(\xi - A\bar{f})\|^2, \quad (1.42)$$

которая при верной гипотезе  $H_0$  имеет  $\chi^2$ -распределение. Если задаться уровнем значимости  $\alpha$  и из условия  $t_n > t_n^\alpha$  вычислить границу критической области  $t_n^\alpha$ , то вероятность  $P(t_n > t_n^\alpha)$  того, что контрольная величина  $t_n$  лежит в критической области, будет определяться соотношением

$$P(t_n > t_n^\alpha) = \int_{t_n^\alpha}^{\infty} p_{\chi^2}^{(n)}(x) dx = \alpha, \quad (1.43)$$

где  $p_{\chi^2}^{(n)}$  — плотность вероятности  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы. При заданном уровне значимости  $\alpha$  соотношение (1.43) позволяет вычислить границу критической области  $t_n^\alpha$ . Затем по известному значению  $\xi$  по формуле (1.42) вычисляется конкретное значение  $t_n$ . Если  $t_n \geq t_n^\alpha$ , то  $t_n$  лежит в критической области и гипотеза  $H_0$  должна быть отвергнута. Если же  $t_n < t_n^\alpha$ , то можно утверждать только то, что гипотеза не противоречит конкретному наблюдению  $\xi$ . Понятие надежности модели относительно известного вектора  $\xi$  вводится [40] по аналогии с уровнем значимости  $\alpha$  и вычисляется по формуле

$$\int_{t_n}^{\infty} p_{\chi^2}^{(n)}(x) dx = \alpha.$$

Как видно из этого соотношения, надежность модели можно трактовать как минимальную вероятность ошибочно отвергнуть гипотезу  $H_0$ .

Параметр надежности модели можно использовать при решении обратной задачи двояким образом. Во-первых, если требуется выбрать модель  $\mu_i$  из класса  $M$ , то можно воспользоваться принципом максимальной надежности модели, суть которого состоит в следующем. Пусть известно, что истинная модель  $\mu$  принадлежит классу моделей  $M$ . Методом максимальной надежности называется метод выбора модели  $\tilde{\mu} \in M$ , основанный на наблюдении вектора  $\xi$ , при котором

$$\tilde{\alpha}_{\tilde{\mu}}(\xi) = \max_{\alpha_\mu} \{ \alpha_\mu | \mu \in M \}.$$

Во-вторых, можно установить минимальный порог надежности  $\alpha_{\min}$  и выбрать для интерпретации только те события, для которых  $\alpha > \alpha_{\min}$ .

Предложенная методика была проверена на серии численных экспериментов. Их результаты могут быть суммированы следующим образом.

1. При восстановлении поля аномалий высоты изобарической поверхности атмосферного давления 500 гПа (Н500) над европейским регионом (от 0 до 30° в.д. и от 40 до 70° с.ш. с пространственным разрешением 5° × 5° по набору функционалов, являющихся осредненными значениями этого поля по "территориям" 40° × 25°, удается реконструировать общую структуру регионального поля Н500 (восстанавливается 73 % среднемесячных вариаций его аномалий).

2. Точность применения изложенного подхода к восстановлению полей аномалий приземной температуры воздуха на сети метеостанций в Сибирском регионе по осредненным значениям по территориям с характерными горизонтальными масштабами 2–4 тыс. составляет 70 % или 1 °С при естественной изменчивости ~ 3 °С.

3. При сопоставлении значения абсолютной точности реконструирования поля температурных аномалий в регионе и надежности модели оказа-

лось, что наибольшие погрешности восстановления характерны для зимних реализаций и они получаются с довольно низкой надежностью. Если же установить минимальный уровень надежности 0.9 и исключить события с надежностью модели менее 0.9, то точность решения задачи становится равной 0.7°. Такой подход позволяет заранее высказать суждение об ожидаемой низкой точности восстановления регионального поля.

4. Установлено, что постановка обратной задачи для восстановления поля осадков возможна только на временном масштабе не менее одного сезона и для пространственно осредненного поля с характерным горизонтальным размером порядка 1000 км. При этом точность восстановления составляет 50 %.

### 1.9. Численная реализация

Для многократного интегрирования климатической модели в условиях ограниченных вычислительных ресурсов необходимо применение численных методов, обладающих внутренним параллелизмом и допускающих эффективную реализацию на современных параллельных вычислительных системах. Российская научная школа традиционно сильна разработками эффективных численных методов для задач моделирования климата и прогноза погоды [28, 29]. Предложенные Г.И. Марчуком в 60-х гг. методы расщепления для задач метеорологии и океанологии затем привели к созданию А. Робером полунявного метода [105], который позволил повысить шаг по времени в пять раз по сравнению с явными схемами интегрирования по времени. Этот метод до сих пор используется в большинстве моделей общей циркуляции атмосферы.

В моделях общей циркуляции атмосферы в основном применяются конечно-разностные методы второго порядка и спектральные эйлеровы методы решения уравнений гидротермодинамики атмосферы. Традиционно конечно-разностные модели атмосферы формулируются на смещенной сетке типа "С", предложенной Аракавой [98]. К числу достоинств этих методов относятся их локальность и линейная зависимость числа арифметических операций по мере увеличения (по одной координате) модельного разрешения. Вместе с тем наряду с большой фазовой ошибкой конечно-разностная модель атмосферы на регулярной широтно-долготной сетке обладает еще одним существенным недостатком. Из-за сходимости меридианов вблизи полюсов имеется большая неоднородность разрешения по долготе и широте, что приводит к сильному ограничению на число Куранта, проблемам в использовании параллельных итеративных алгоритмов, а также к неоправданным затратам на расчет "лишних" точек сетки (около 25 % от общих затрат).

По сравнению с традиционными конечно-разностными аппроксимациями второго порядка в спектральном методе отсутствует фазовая ошибка, а к числу других его достоинств можно отнести однородность разрешения на сфере, возможность использования редуцированной сетки (т.е. сетки с уменьшающимся числом узлов по долготе по мере приближения к полюсам) и возможность аналитического решения эллиптических уравнений на сфере. Основными недостатками спектрального метода являются кубический рост числа операций по мере повышения разрешения, существенная нелокальность и при реализации на параллельных компьютерах обеспечение баланса загрузки всех процессоров.

Для исследования проблем регионального климата целесообразно разрабатывать модели с переменным горизонтальным разрешением, в том числе в сферической системе координат. Наиболее гибким и удобным путем реализации такого подхода является использование конечно-разностного, конечно-элементного или конечно-объемного методов. Поэтому примерно с конца 80-х гг. появляются работы, посвященные исследованию и применению в моделировании атмосферы численных методов для дискретизации в горизонтальной плоскости, хорошо зарекомендовавших себя в других областях вычислительной газовой динамики — метод спектральных элементов [116], псевдоспектральный метод [114], двойные ряды Фурье [56], метод конечных элементов на икосаэдральных сетках [69], схемы с ограниченной вариацией, эйлеровы разностные и полулагранжевы методы высокого порядка.

По сравнению с эйлеровыми конечно-разностными схемами второго порядка полулагранжев метод дает значительно меньшую фазовую ошибку в решении, а в отличие от спектральных методов позволяет избежать эффекта Гиббса. В то же время в полулагранжевом методе расчета адвекции формально отсутствует свойство сохранения нормы переносимой величины, теоретически необходимое для интегрирования модели на длительные (несколько десятилетий и более) сроки. Практика показала, что это не очень сильно влияет на качество решения при использовании модели с разрешением порядка градуса и выше для среднесрочного прогноза погоды. Имеется также успешный опыт применения полулагранжевых методов для моделирования климата [124, 49]. В последнее время реализованы консервативные версии полулагранжевого метода, имеющие, однако, ряд ограничений [128].

Моделирование климата является проблемой, которая требует огромных вычислительных ресурсов, доступных только при использовании высокопроизводительных параллельных компьютеров. При этом программная реализация модели должна учитывать особенности параллельной архитектуры этих компьютеров. В настоящее время в основном используются параллельные вычислительные системы с распределенной памятью, орга-

низованные как вычислительные узлы, соединенные высокопроизводительной сетью, необходимость которой диктуется особенностями используемых алгоритмов (например, полунявная схема интегрирования по времени). Вычислительные узлы применяемых систем основаны либо на специализированных (как правило, векторных) высокопроизводительных процессорах, либо на многопроцессорных блоках (2–32 процессора). Многопроцессорный блок при этом работает на общей памяти.

### 1.9.1. Общая характеристика конечномерной модели

В модели ИВМ РАН использованы конечно-разностные аппроксимации дифференциальной системы уравнений динамики атмосферы, которые выполнены на сетке "С" [46, 98]. В конечно-разностной схеме выполняется закон сохранения массы, а также (при отсутствии диссипации и источников) полной энергии и (в приближении "мелкой воды") энтропии. Применяется полунявная схема интегрирования по времени [106] с фильтром [48]. При этом на каждом шаге по времени решается уравнение, являющееся дискретным аналогом уравнения Гельмгольца. Шаг по времени при расчете динамических процессов составляет 12 мин. Радиация вычисляется один раз в 3 ч., расчет других физических процессов подсеточных масштабов проводится один раз в 1 ч. Вблизи полюсов (начиная с 69° Северного и Южного полушарий) применяется Фурье-фильтрация высокочастотных гармоник вдоль круга широты для всех прогностических переменных.

При численной реализации океанского блока климатической модели применен метод расщепления [28] по физическим процессам и пространственным координатам, что позволяет эффективно реализовывать неявные методы интегрирования по времени. В разных версиях модели океана используются разнесенные пространственные аппроксимации на сетке "В" или "С". Метод расщепления позволяет вводить функцию тока только на промежуточном этапе расщепления (геострофического приспособления), на котором уравнение для функции тока является линейным [2]. Следует отметить важную роль подходящего выбора сетки для правильного воспроизведения океанической циркуляции. Так, например, по сравнению с сеткой "В" переход при численной реализации на сетку "С", обладающую меньшей диссипативностью, позволил существенно уменьшить коэффициент горизонтальной диффузии, а также более адекватно аппроксимировать расчетную область в проливах и точнее описать обмен солью между Атлантикой и Средиземным морем через Гибралтар, что очень важно для описания термохалинной циркуляции в Северной Атлантике.

Обмен информацией между моделями атмосферы и океана происходит каждые несколько часов модельного времени. Этот промежуток времени



служит и численным шагом модели океана. Он может меняться в зависимости от цели численного эксперимента. Внутри этого периода накапливаются, а затем осредняются потоки явного и скрытого тепла, пресной воды, импульса, суммарные (приходящие и уходящие) потоки длинноволновой и коротковолновой радиации, рассчитываемые моделью атмосферы на поверхности океана. Эти потоки служат атмосферным воздействием для модели океана. При этом 60 % суммарной коротковолновой солнечной радиации добавляется к потоку тепла на поверхности океана, представляющего собой сумму потоков явного, скрытого тепла и суммарной длинноволновой радиации. Остальная часть коротковолновой солнечной радиации имеет проникающую природу с экспоненциальным затуханием по глубине и описывается в модели особо. Такой способ учета коротковолновой радиации является упрощением известных моделей поглощения коротковолновой радиации в океане (см., например, [77]).

Поскольку в моделях атмосферы и океана может использоваться разное пространственное разрешение, необходимо пересчитывать параметры атмосферного воздействия на горизонтальную сетку модели океана. Этот пересчет осуществляется с помощью линейной интерполяции. При расчете потоков на поверхности океана в модели атмосферы температурой поверхности океана (ТПО) считается температура самого верхнего расчетного уровня океанической модели. Так как пространственная океаническая сетка мельче атмосферной, то для пересчета ТПО на атмосферную сетку использовалась процедура пространственного весового осреднения. Она заключается в том, что ТПО во всех узлах океанической сетки, попадающих в ячейку атмосферной сетки, берутся с весом, пропорциональным площади пересечения соответствующей океанической ячейки с ячейкой атмосферной сетки.

Быстродействие программной реализации модели, выполненной на языке программирования FORTRAN, составляет приблизительно 18 ч. процессорного времени на один год модельного времени при расчетах на рабочей станции COMPAQ с тактовой частотой 650 МГц. При этом на модель океана затрачивается не более 10 % общего времени расчета.

### 1.9.2. Реализация модели на компьютерах параллельной архитектуры

Уравнения климатической модели могут быть записаны в общем виде следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + A\vec{\varphi} + B\vec{\varphi} = \vec{F}, \quad (1.44)$$

где  $\vec{\varphi}$  — вектор состояния системы;  $A$  — оператор, отвечающий за трехмерную адвекцию и горизонтальную диффузию; оператор  $B$  представля-

ет градиент давления и силу Кориолиса; вектор правых частей  $\vec{F}$  отвечает за источники и стоки вследствие процессов подсеточного масштаба (вертикальный турбулентный перенос, орографические и неорографические гравитационные волны, конвекция, радиация и др.). Важной особенностью вектора  $\vec{F}$  является то, что он параметрическим образом зависит от горизонтальных координат. Это позволяет применить двумерное разбиение расчетной области в горизонтальной плоскости и достичь высокой степени параллелизма без использования обменов данными между процессорами.

Главное затруднение в распараллеливании атмосферной модели связано с алгоритмом интегрирования по времени дискретизированной системы уравнений (1.44). Это вызвано тем, что в модели используется полунеявный алгоритм интегрирования по времени для быстрых гравитационных волн. В результате на каждом шаге по времени необходимо решать двумерные уравнения типа Гельмгольца на сфере. Параллельная реализация прямого алгоритма для решения этой задачи строится следующим образом.

Система (1.44) без правых частей может быть записана в разностном виде

$$\frac{\vec{\varphi}^{n+1} - \vec{\varphi}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{2} \left( L\vec{\varphi}^{n+1} + L\vec{\varphi}^{n-1} \right) + N\vec{\varphi}^n = 0, \quad (1.45)$$

где  $L$  — линейная часть оператора  $B$  из уравнения (1.44), ответственная за быстрые гравитационные волны;  $N = B - L$ ;  $(\ )^{n+1}$  — значение элементов соответствующего уравнения на новом шаге времени;  $(\ )^n$  и  $(\ )^{n-1}$  — значение на текущем и предыдущем шагах по времени соответственно. Неявная часть системы (1.45) сводится к одному дискретному трехмерному уравнению типа Гельмгольца относительно переменной  $D$ :

$$D^{n+1} - (\Delta t)^2 G \nabla^2 D^{n+1} = R, \quad (1.46)$$

где  $D$  — горизонтальная дивергенция на  $\sigma$ -поверхности;  $G$  — некоторая матрица;  $\nabla^2$  — дискретный аналог горизонтального оператора Лапласа в сферических координатах;  $R$  объединяет все известные слагаемые системы (1.45) на уровнях времени  $n - 1$  и  $n$ . Диагонализующее преобразование, примененное к матрице  $G$ , позволяет расщепить (1.46) в вертикальном направлении и решать это уравнение независимо для каждого вертикального уровня прямым методом, основанном на быстром преобразовании Фурье по долготе и решении трехдиагональных линейных систем по широте. Для организации обменов данными между процессорами используется стандарт MPI (Интерфейс Передачи Сообщений). Используется подход "одна программа — много данных" (SPMD), где головной процесс также организует ввод/вывод и некоторые дополнительные вычисления. Параллельная версия модели общей циркуляции ИВМ РАН ре-

ализована на системе МВС1000М (Межведомственный суперкомпьютерный центр), SCI-кластере НИВЦ МГУ и других вычислительных системах параллельной архитектуры [119]. Аналогичный подход использован и для разработки параллельной версии модели общей циркуляции Мирового океана.

## **2. Воспроизведение современного климата**

При моделировании глобального климата требуется воспроизвести широкий спектр его характеристик: сезонные и месячные средние, внутрисезонную изменчивость (муссонный цикл, параметры шторм-треков и т.п.), климатическую изменчивость (ее доминирующие моды, такие как явление Эль-Ниньо или Арктическое колебание) и др. К числу основных задач моделирования регионального климата следует отнести воспроизведение с высокой степенью детализации его характеристик, исследование особенностей гидрологического цикла, оценку возможности экстремальных явлений, исследование последствий региональных климатических изменений для окружающей среды и socio-экономических отношений.

Последнее сравнение моделей общей циркуляции атмосферы, проведенное в рамках международного проекта АМІР II, показало, что наиболее совершенные из них на настоящий момент способны воспроизводить основные черты наблюдаемой атмосферной циркуляции с хорошей точностью. Ошибка воспроизведения такими моделями многих климатических величин уже ненамного превосходит неопределенность, с которой эта величина известна из наблюдений. Вместе с тем существуют и систематические ошибки в воспроизведении климата, присущие практически всем моделям. Качество современных моделей общей циркуляции атмосферы может быть проиллюстрировано тем, как воспроизводит некоторые черты атмосферной циркуляции модель ИВМ РАН. Наиболее полный анализ воспроизведения климата этой моделью, как и другими моделями, участвующими в АМІР II, можно найти в интернете по адресу: [www-pcmdi.llnl.gov/amip](http://www-pcmdi.llnl.gov/amip).

### **2.1. Моделирование общей циркуляции атмосферы при заданных пространственно-временных распределениях температуры поверхности океана**

В настоящем подразделе представлен выборочный анализ некоторых климатических параметров, для чего используются результаты численного эксперимента с моделью общей циркуляции ИВМ РАН, проведенного в рамках сценария АМІР II. Модель (с разрешением  $5^\circ \times 4^\circ$  по долготе и широте и 21 уровень по вертикали) была проинтегрирована на 17 лет, причем в качестве нижних граничных условий задавался наблюдавшийся в тече-

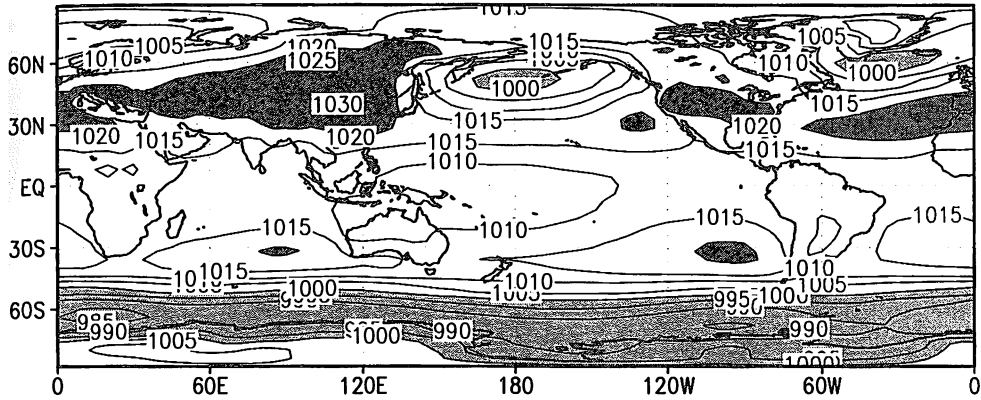
ние 1979–1995 гг. временной ход температуры поверхности океана и границ морского льда. По сравнению с вариантом модели, представленным в работе [1], а также на сайте [www-pcmdi.llnl.gov/amip](http://www-pcmdi.llnl.gov/amip), в рассматриваемой версии выполнены следующие изменения. Изменение конечно-разностной схемы расчета уравнений гидродинамики (вместо уравнений движения, записанных в форме Громеки–Лэмба (1.2), использован их адвективный вид (1.1)) привело [11] к улучшению воспроизведения высокочастотной изменчивости в средних широтах, особенно летом. Более точная настройка параметризации конвекции обусловила лучшее воспроизведение низкочастотной изменчивости в тропиках, в том числе амплитуды 30–60-дневных колебаний. Обе эти модификации привели также к более правильному воспроизведению стационарных волн зимой в северном полушарии как у поверхности, так и в верхней тропосфере и стратосфере. Учет подынверсионной облачности над океанами [4] обусловил улучшенное воспроизведение радиационного баланса и дал возможность использовать атмосферную модель в качестве блока совместной модели без применения процедуры коррекции потока тепла на поверхности океана.

На рис. 1 приведены географические распределения давления на уровне моря в зимний сезон (декабрь–февраль), построенные по данным реанализа NCEP, результатам моделирования, а также для их разности. Как видно из рисунка, все основные "центры действия" хорошо воспроизводятся моделью, включая их положение и давление в них. Тем не менее ошибка воспроизведения давления достигает в некоторых районах 4–6 гПа.

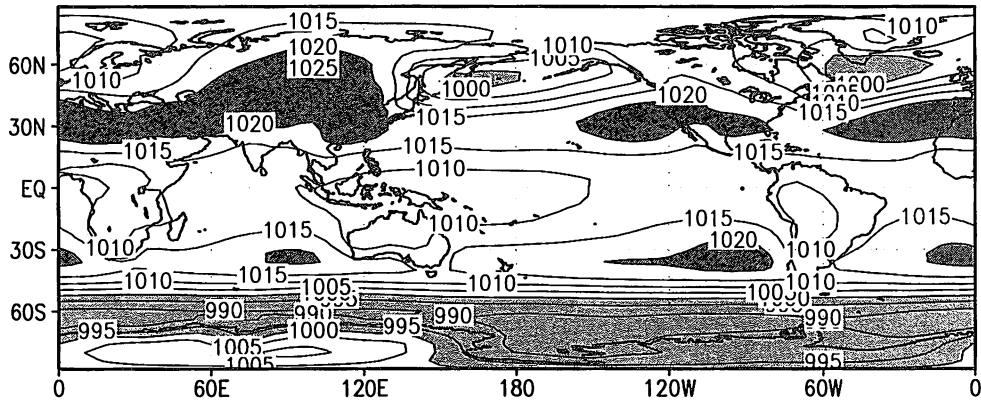
Среднегодовая ошибка воспроизведения зонально осредненной температуры и зональной скорости ветра представлена на рис. 2. Как и в большинстве современных моделей, в модели ИВМ РАН происходит занижение температуры вблизи тропопаузы в высоких широтах на 5–10 К. Причина такого поведения моделей на настоящий момент не ясна и нуждается в исследовании. В тропосфере ошибка воспроизведения температуры значительно меньше. В нижней тропосфере над Арктикой и Антарктикой температура завышена на 2–3 К, а в умеренных широтах южного полушария во всей тропосфере, а также в тропиках в верхней тропосфере занижена на 1–2 К. В соответствии с ошибками воспроизведения температуры скорость западного ветра в нижней стратосфере в умеренных широтах завышена на 5–10 м/с, а скорость восточного ветра в тропиках в нижней стратосфере — на 4–8 м/с. Эти ошибки также характерны почти для всех современных моделей. В тропосфере ошибка скорости зонального ветра почти всюду не превосходит 2 м/с.

Низкочастотная изменчивость атмосферной циркуляции в модели представлена на рис. 3, на котором изображено среднеквадратичное отклонение среднемесячного давления от климатического годового хода для зимы, построенное по данным NCEP за 51 год и по результатам модели за 17 лет.

# DJF SLP NCEP



# DJF SLP model



# DJF SLP model-NCEP

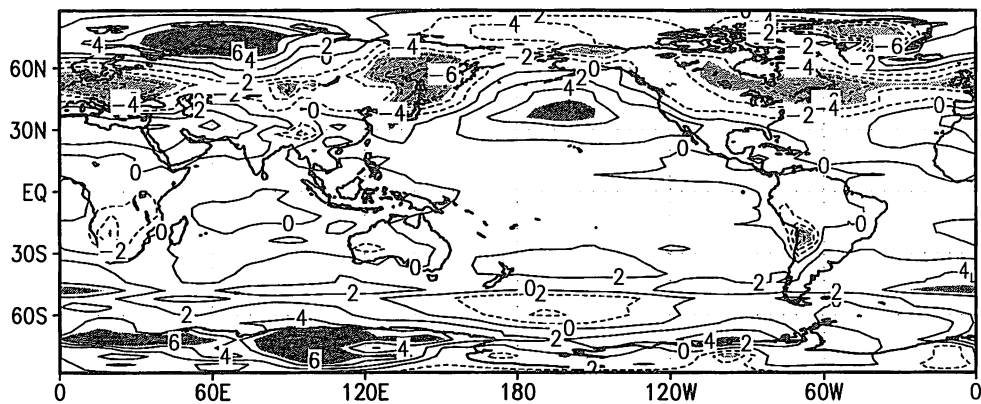
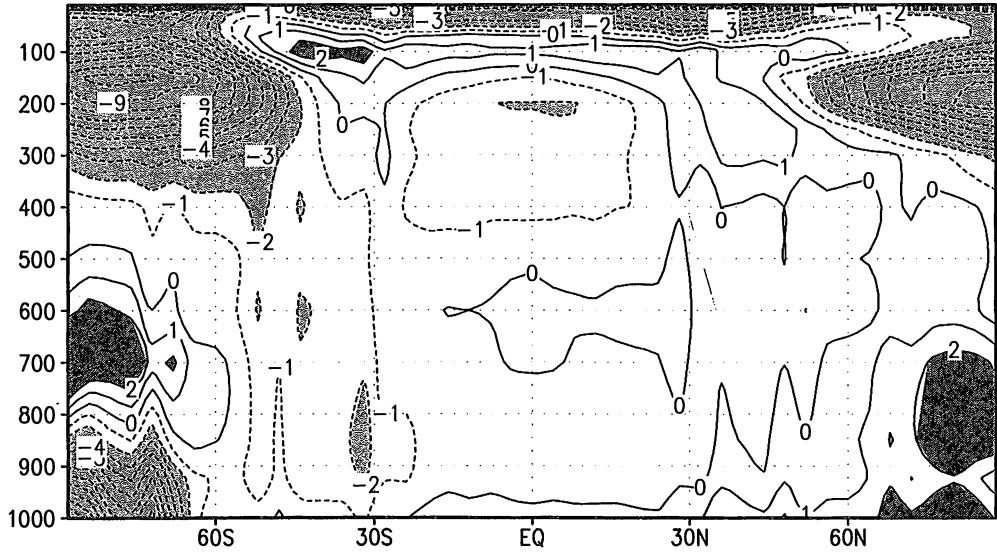


Рис. 1. Давление зимой на уровне моря (гПа): данные NCEP и модели, их разность

## T model-NCEP



## U model-NCEP

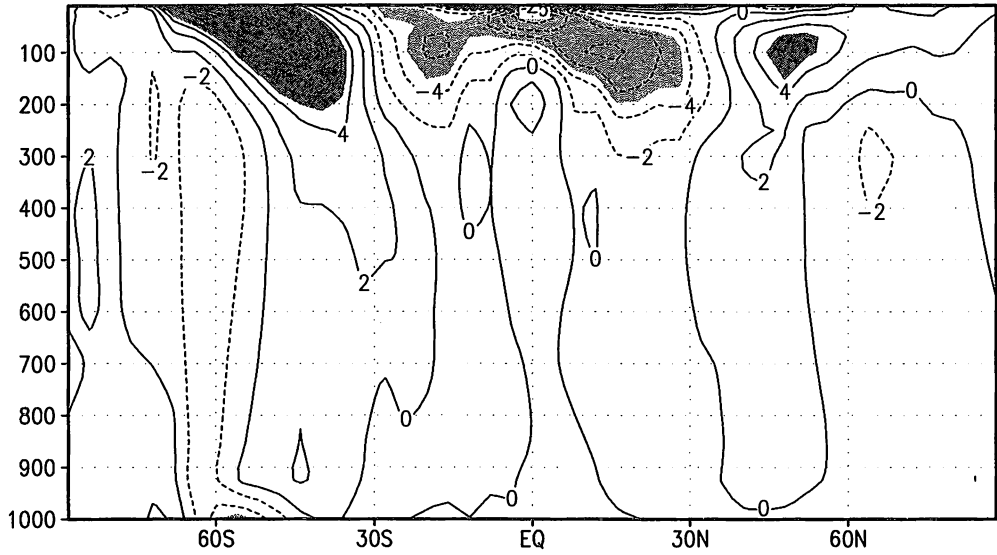
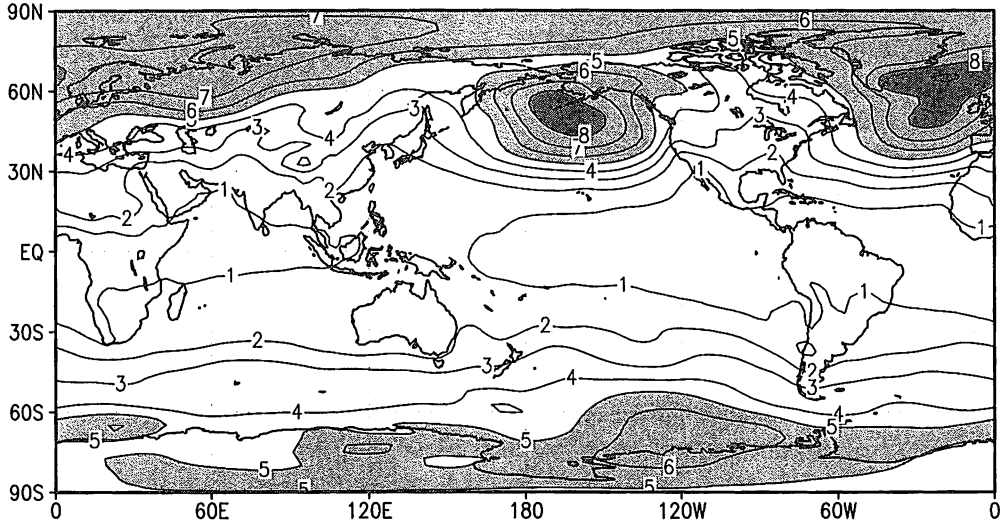


Рис. 2. Зонально осредненная среднегодовая ошибка температуры, К (вверху) и скорости зонального ветра, м/с (внизу) в модели по сравнению с данными NCEP

Моделью хорошо воспроизводятся максимумы изменчивости в зимнем полушарии на севере Тихого океана и Атлантики. Среднеквадратичное отклонение давления там, а также в целом по северному полушарию, в модели примерно на 10 % больше, чем по данным NCEP. В летнем полушарии, наоборот, изменчивость в модели занижена на 10–20 %, что обусловлено недостаточным разрешением синоптических вихрей, которые в летнем полушарии более мелкомасштабны, чем в зимнем, и под воздействием которых в значительной степени формируется низкочастотная изменчивость. Анализ воспроизведения климата с помощью атмосферной модели более высокого разрешения по горизонтали ( $2.5^\circ \times 2^\circ$  по долготе и широте) показывает, что в летнем полушарии амплитуда высокочастотной и низкочастотной изменчивости становится близкой к наблюдаемой. Однако систематические ошибки воспроизведения среднего состояния климата, а также изменчивости в зимнем полушарии при увеличении пространственного разрешения, вообще говоря, не уменьшаются. Это говорит о необходимости более точной настройки параметризаций модели или о необходимости введения еще не учтенных физических механизмов. Мировой опыт моделирования также в основном подтверждает, что систематические ошибки воспроизведения среднеклиматического состояния атмосферы не слишком сильно зависят от пространственного разрешения используемой модели.

Важной характеристикой низкочастотной изменчивости атмосферы являются первые естественные ортогональные функции (ЕОФ), которые представляют собой главные моды собственной изменчивости. В разд. 3 показано, что отклик модели на малые внешние воздействия во многом определяется структурой первой ЕОФ. На рис. 4 приведены первые две ЕОФ зимнего среднемесячного давления на уровне моря в северном полушарии, рассчитанные по данным NCEP и результатам модели. Первая ЕОФ представляет собой противофазное колебание давления в высоких широтах и субтропиках с максимумом амплитуды в северной Атлантике и, в меньшей степени, в Тихом океане. Такая структура известна как Арктическая осцилляция (АО). Первые ЕОФ по данным NCEP и результатам модели близки, за исключением того, что модельный максимум в Тихом океане выражен сильнее, чем по данным NCEP. Вторая ЕОФ имеет максимум на северо-востоке Тихого океана, вблизи Алеутских островов. В верхней тропосфере над севером Тихого океана и северной Америкой этой ЕОФ соответствует структура, называемая PNA [122]. В этом регионе данные NCEP и модели близки. Над северной Атлантикой и Россией различия между вторыми ЕОФ, рассчитанными по данным NCEP и модельным результатам, выражены сильнее. Это, однако, не является существенной ошибкой воспроизведения низкочастотной изменчивости, поскольку как вторая, так и следующие ЕОФ не отделены друг от друга по дисперсии так же сильно, как первая и вторая моды.

### DJF SLP RMS NCEP



### DJF SLP RMS model

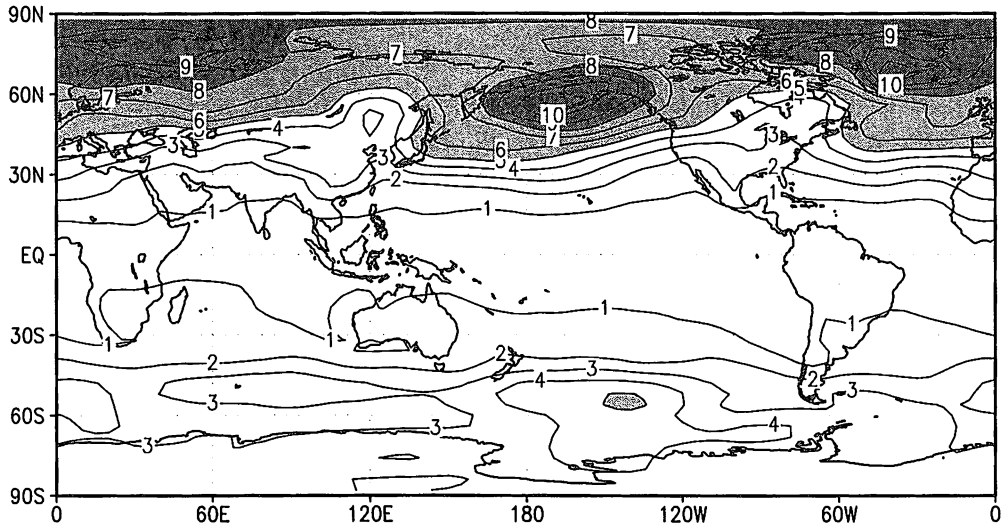
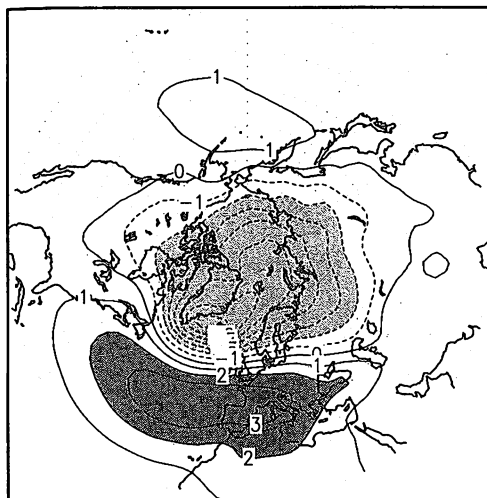


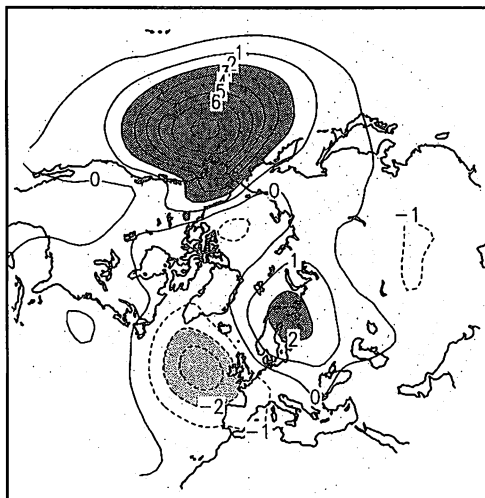
Рис. 3. Среднеквадратичное отклонение среднезимнего давления (гПа) по данным NCEP (вверху) и модели (внизу)



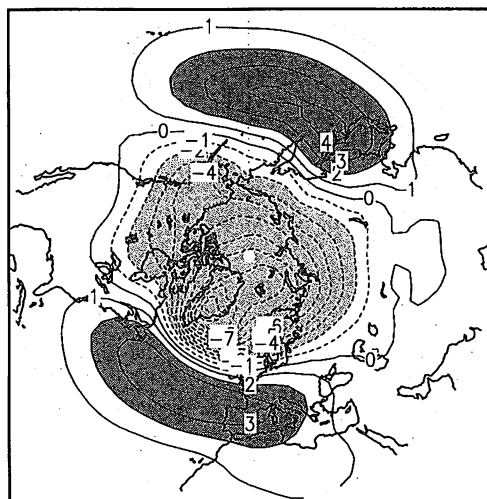
EOF-1 NCEP 23%



EOF-2 NCEP 13%



EOF-1 model 34%



EOF-2 model 14%

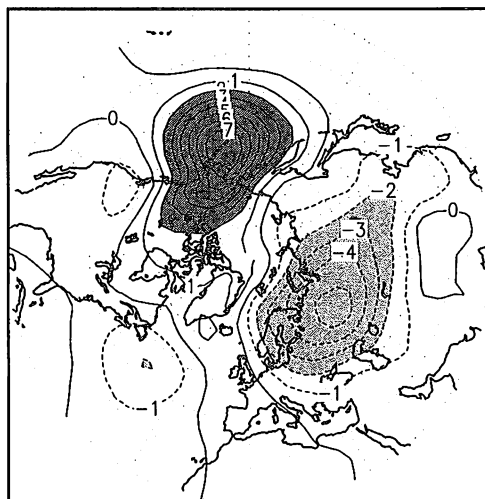


Рис. 4. Первая (слева) и вторая (справа) EOF (единицы произвольные) низкочастотной изменчивости среднемесячного давления на уровне моря в зимний сезон по данным NCEP (вверху) и модели (внизу).  
Приведен вклад EOF (в процентах) в дисперсию

Зимой Арктическая осцилляция выделяется в качестве первой ЕОФ не только по данным у поверхности Земли, но и в тропосфере и нижней стратосфере. Первая ЕОФ скорости зонального ветра (рис. 5) представляет собой аномалию скорости ветра одного знака вблизи  $60\text{--}70^\circ$  с.ш. и противоположного знака вблизи  $30\text{--}40^\circ$  с.ш. на всех высотах от 1000 до 10 гПа. Данные модели хорошо согласуются с данными NCEP. Первая ЕОФ зонально осредненной температуры имеет максимум в высоких широтах в нижней стратосфере как по данным NCEP, так и по данным модели. Положительному индексу АО соответствует более холодная арктическая нижняя стратосфера.

Важной задачей климатического моделирования является воспроизведение отклика атмосферной циркуляции на явление Эль-Ниньо. Здесь рассматривается отклик в течение лета северного полушария (июнь–август). В это время развивается летний азиатский муссон. Из данных наблюдений известно [104], что существует корреляция между Эль-Ниньо в Тихом океане и индексами, характеризующими азиатский муссон. Однако, эта корреляция не слишком велика. Так, коэффициент корреляции между всеиндийскими осадками за период летнего муссона и индексом Эль-Ниньо составляет 0.4–0.5, причем положительной аномалии ТПО в Тихом океане соответствует уменьшение осадков в Индии. Чтобы выяснить влияние аномалий ТПО в тропическом Тихом океане на тропическую циркуляцию, было выполнено следующее исследование.

Из 48 лет наблюдений 1951–1998 гг. были выбраны летние сезоны, когда аномалия ТПО в районе Эль-Ниньо ( $165^\circ$  в.д.– $90^\circ$  з.д.,  $4^\circ$  ю.ш.– $4^\circ$  с.ш.) превышала 0.5 К, а количество всеиндийских осадков было меньше нормы (всего было выбрано 14 таких лет и такие случаи обозначены как 1+). Затем была вычислена температура поверхности океана, осредненная по всем случаям 1+. Далее были взяты годы, когда аномалия ТПО в районе Эль-Ниньо была меньше  $-0.5$  К, а количество всеиндийских осадков было выше нормы (всего было выбрано 15 таких лет — случай 1–), была вычислена ТПО, осредненная по всем случаям 1–. Затем была вычислена разность ТПО между случаями 1+ и 1–, которая и представлена в верхней части рис. 6. В случаях 1+ и 1– знаки аномалий ТПО и всеиндийских осадков соответствуют знаку корреляции, рассчитанному по всем годам.

Были также рассмотрены случаи 2+, когда аномалия ТПО превышала 0.5 К, а всеиндийские осадки превышали норму (всего было выбрано 5 таких лет), и случаи 2–, когда аномалия ТПО была менее  $-0.5$  К, а всеиндийские осадки были меньше нормы (было выбрано 6 таких лет). Снова была вычислена разность ТПО между случаями 2+ и 2–, которая представлена в верхней части рис. 7. В случаях 2+ и 2– знаки аномалий ТПО и всеиндийских осадков не соответствуют знаку рассчитанной по всем годам

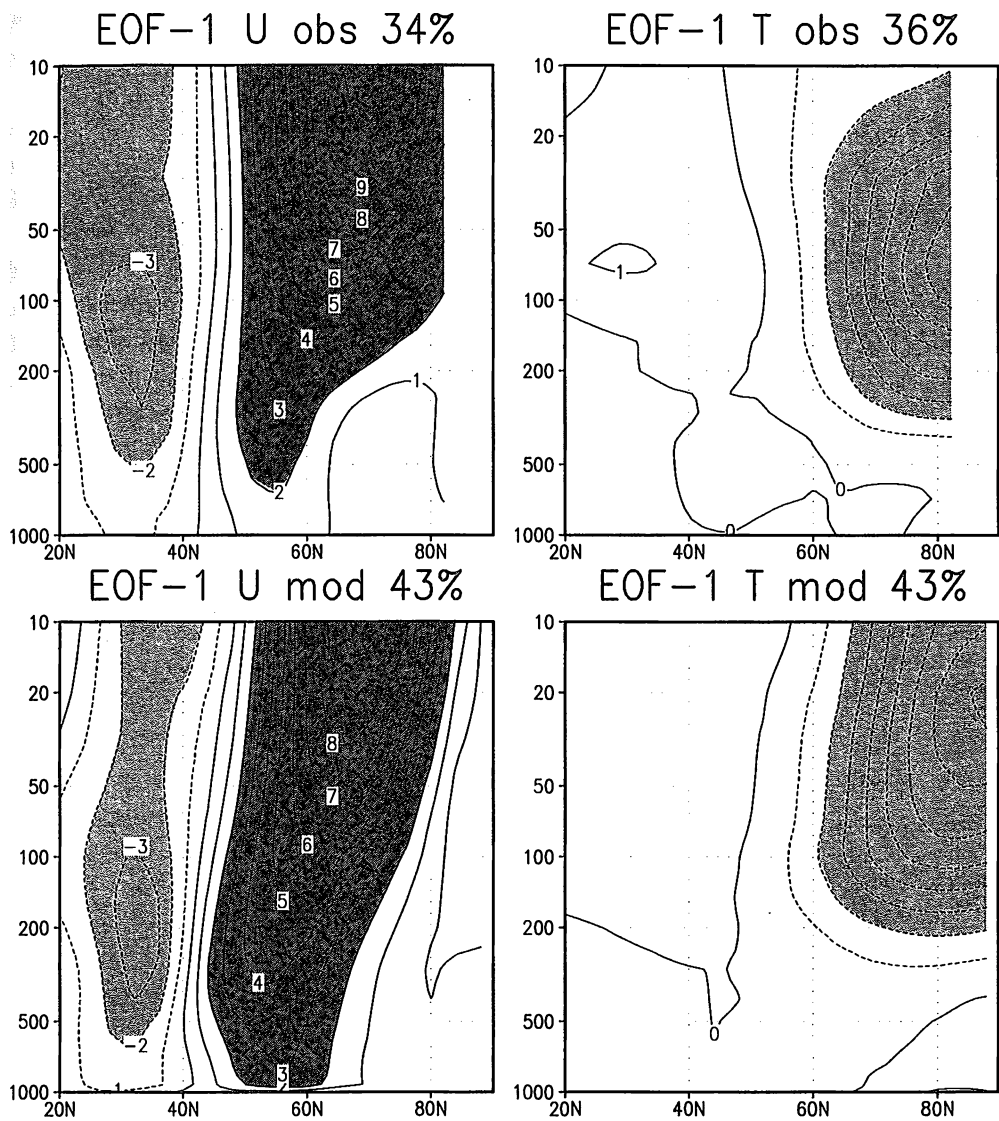


Рис. 5. Первая ЕОФ (единицы произвольные) низкочастотной изменчивости зонально осредненной скорости зонального ветра (слева) и температуры (справа) зимой по данным NCEP (вверху) и модели (внизу). Приведен вклад ЕОФ (в процентах) в дисперсию

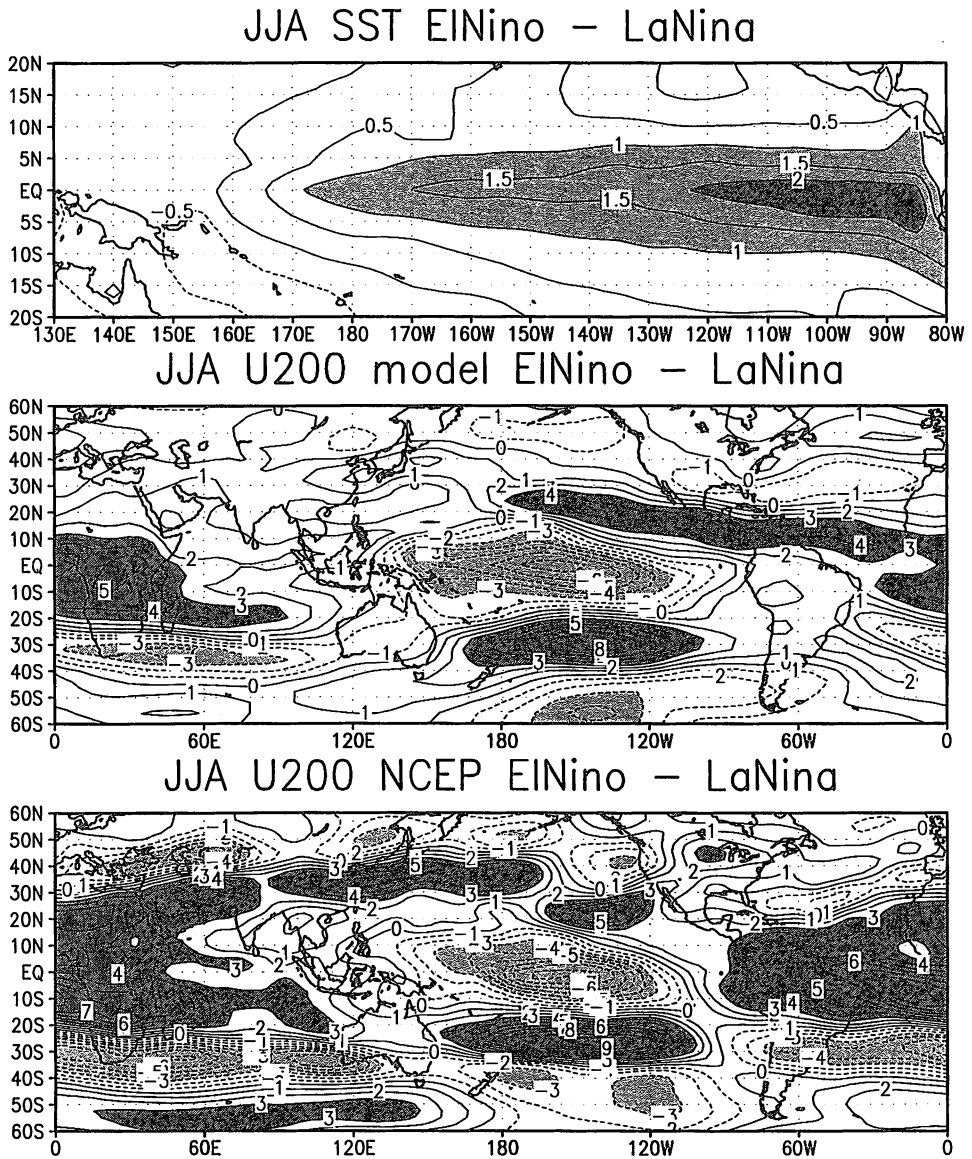


Рис. 6. Разность ТПО, К (вверху), скорости зонального ветра на высоте 200 гПа, м/с, по данным NCEP (в середине) и модели (внизу) для случаев 1+ и 1–

корреляции. Отличие разности ТПО для случаев 1+ и 1– от аналогичной разности для случаев 2+ и 2– состоит в том, что в случае 1, в среднем, аномалия ТПО имеет место как в центре, так и на востоке Тихого океана. В случае 2 аномалия ТПО в основном ограничена востоком Тихого океана.

Чтобы выяснить, насколько важны различия между аномалиями ТПО в случаях 1 и 2 для формирования аномалий атмосферной циркуляции, были проведены серии численных экспериментов с атмосферной моделью ИВМ РАН. В каждом эксперименте расчеты проводились для периода с 1 мая по 31 августа и анализировались данные за период с июня по август. Каждая серия состояла из 20 экспериментов, различающихся начальными данными. Всего были проведены четыре серии таких экспериментов. В первой серии задавалась температура поверхности океана, осредненная по всем случаям 1+, во второй — по случаям 1–, в третьей — по случаям 2+ и в четвертой — по случаям 2–. На рис. 6 представлена разность данных скорости зонального ветра на высоте 200 гПа для случаев 1+ и 1–, осредненная с июня по август. Эта разность есть не что иное, как отклик модели на аномалию ТПО, изображенную в верхней части рисунка. Здесь же представлена аналогичная разность по данным NCEP. На рис. 7 приведена разность данных по зональной скорости на поверхности 200 гПа для случаев 2+ и 2–, т.е. соответствующий отклик модели на аномалию ТПО, изображенную в верхней части рисунка, вместе с аналогичной разностью, рассчитанной по данным NCEP.

Сравнение рисунков показывает, что в случае 1, т.е. при наличии значительной аномалии ТПО в центре Тихого океана как в данных NCEP, так и в данных модели, кроме локального отклика на аномалию ТПО, возникающего в тропиках Тихого океана, возбуждается удаленный отклик большой амплитуды, который представляет собой ослабление восточного ветра на большей части тропиков, за исключением района Эль-Ниньо. В случае 2, когда аномалия ТПО в основном ограничена востоком Тихого океана, локальный отклик примерно такой же, как и в случае 1, однако удаленный отклик намного слабее, чем в случае 1. Анализ результатов модели показывает, что различие в удаленном отклике между случаями 1 и 2 связано с различным откликом ячейки Гадлея. В случае 1 происходит усиление восходящих движений непосредственно у экватора. В верхней тропосфере при удалении от экватора частицы воздуха приобретают дополнительную западную составляющую движения, что обусловлено законом сохранения полного вращательного момента, в том числе связанного с вращением Земли. В случае 2 столь больших изменений в циркуляции Гадлея не происходит.

Таким образом, связь явления Эль-Ниньо с количеством всеиндийских осадков проявляется сильнее тогда, когда Эль-Ниньо распространяется в

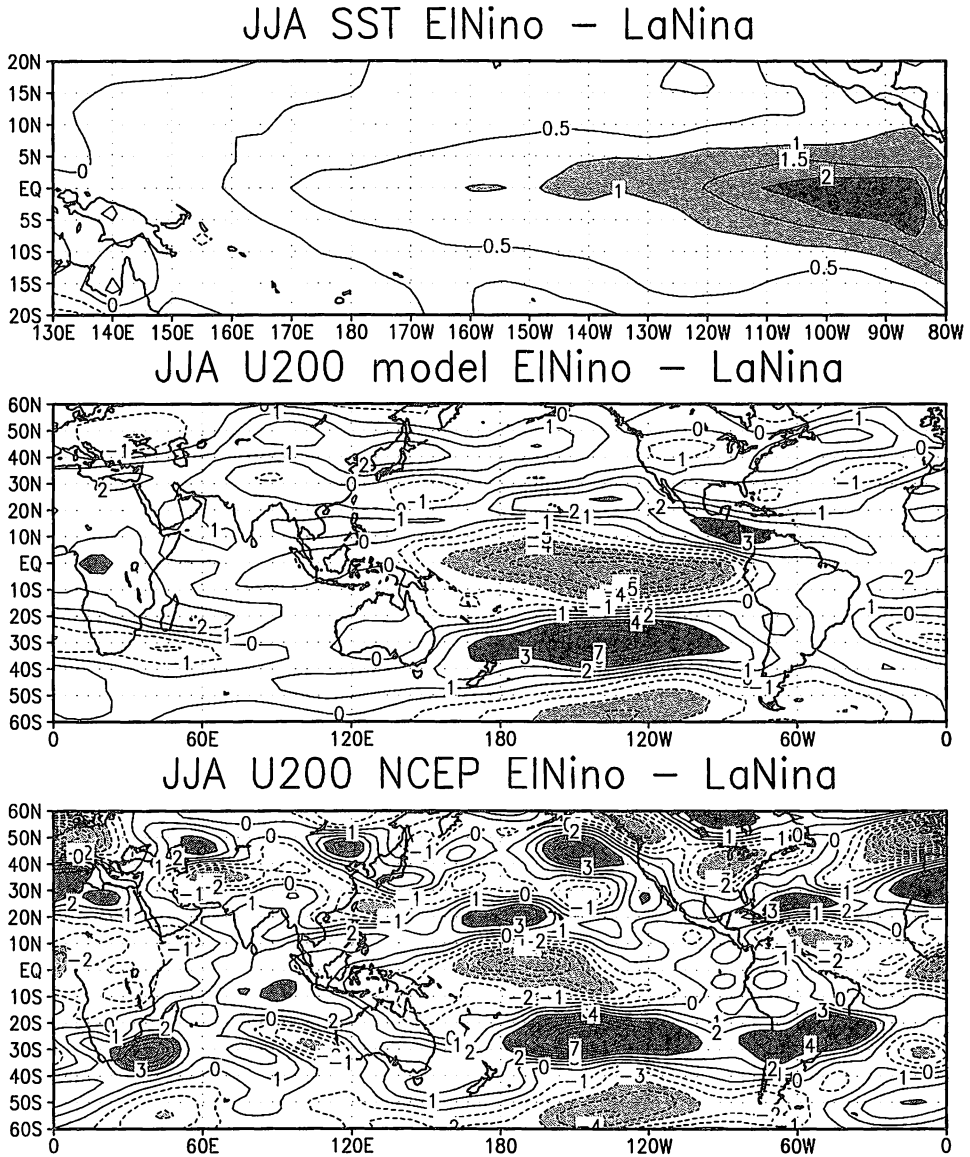


Рис. 7. Разность ТПО, К (вверху), скорости зонального ветра на высоте 200 гПа, м/с, по данным NCEP (в середине) и модели (внизу) для случаев 2+ и 2-

центральную часть Тихого океана, и в результате генерируется значительный удаленный отклик. Дополнительные эксперименты с моделью, в которых учитывались аномалии ТПО не только в тропиках Тихого океана, но и во всем океане, показывают, что учет аномалий вне района Эль-Ниньо не вносит существенного вклада в различие откликов для случаев 1 и 2.

## 2.2. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели

Современная тенденция развития климатических моделей, базирующихся на совместных моделях общей циркуляции атмосферы и океана, состоит во все более детальном учете всех физических механизмов, влияющих на климат. В настоящее время во всем мире существуют несколько десятков таких моделей, из которых более 20 участвуют в международном проекте СМIP по их сравнению [97, 62]. В климатической модели ИВМ РАН разрешение в атмосферном блоке составляет  $5^\circ$  по долготе,  $4^\circ$  по широте и 21 уровень по вертикали, а в модели океана использовано разрешение  $2.5^\circ \times 2^\circ$  (по долготе и широте) с 33 неравномерными  $\sigma$ -уровнями по глубине. Следуя современным тенденциям развития совместных моделей, при стыковке атмосферной и океанической частей коррекция потоков на поверхности океана не используется. В работе [1] балл облачности  $C$  описывается линейной функцией от относительной влажности  $r$ :

$$C = a + br,$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  зависят от температуры, высоты, типа подстилающей поверхности (суша или океан) и от вертикального градиента температуры. Зависимость от градиента температуры такова, чтобы ниже слоя инверсии балл облачности был выше, чем при той же относительной влажности в условиях менее устойчивой стратификации. В отличие от работ [1, 15] в данном подразделе в атмосферном блоке рассматриваемой совместной модели изменена настройка параметризации облачности нижнего яруса, а именно, его зависимость от температурной стратификации ослаблена. Кроме этого, в атмосферном блоке модели вместо конечно-разностной схемы [47], где используется запись уравнений в форме Громеки–Лэмба, применяется схема, описанная в работе [11], где уравнения даются в адвективной форме. Это позволило более корректно описать высокие пространственные гармоники и ввести горизонтальную вязкость и диффузию 8-го порядка вместо таковых 4-го порядка, применяемых в исходной версии модели. Изменения были внесены также в параметризацию глубокой конвекции.

С совместной моделью проведен 80-летний численный эксперимент по моделированию современного климата, аналогичный эксперименту с версией климатической модели, использованной в работе [15]. Начальные данные

в этом эксперименте формировались следующим образом: для атмосферы задавалось состояние, полученное при интегрировании предыдущей версии модели, а для океана — наблюдаемое распределение температуры и солености [90] и отсутствие движений. Затем эксперимент был продолжен еще на 130 лет, и ниже обсуждаются результаты именно этого эксперимента. В течение всего расчета тренд интегральной температуры поверхности океана не превосходит 0.1 К за 80 лет, а изменение площади морского льда за 80 лет не превышает 5 % от ее среднего значения. В течение 50 лет происходило установление климата модели, а для анализа были использованы результаты последующих 80 лет расчета.

### **2.2.1. Характеристики совместной модели на поверхности океана**

Среднегодовая ошибка воспроизведения ТПО, осредненная за 80 лет, в совместной модели по сравнению с данными наблюдений [90] представлена на рис. 8. Температура занижена на 1–3 °С в приэкваториальном Тихом океане вследствие завышенной интенсивности апвеллинга, что характерно практически для всех современных моделей. На 2–6 °С имеет место завышение температуры на северо-западе Атлантики, а также вблизи Японии, что связано с ошибками воспроизведения местоположения теплых течений Куроисио и Северо-Атлантического. С этим же связано занижение температуры в Норвежском и Баренцевом морях, а также в Тихом океане севернее Гавайских островов. В умеренных широтах южного полушария завышение температуры обусловлено, по всей видимости, недостаточно хорошим воспроизведением компонент радиационного баланса на поверхности. В целом интегральная температура поверхности в модели (с учетом суши и морского льда) составляет 14.7 °С, что близко к оценке 15 °С по данным наблюдений [78].

На рис. 9 представлены распределения в Северном полушарии концентрации морского льда в марте, когда количество льда максимально, и сентябре, когда количество льда минимально. Для сравнения приведены соответствующие данные, использованные в экспериментах АМIP II и осредненные за 1979–1995 гг. В марте в модели площадь льда на 10–15 % меньше наблюдаемой за счет того, что не образуется лед у восточного побережья Гренландии, а также между Гренландией и Канадой. В то же время Баренцево море замерзает, по данным модели, несколько сильнее, чем по данным наблюдений. Все это связано, по-видимому, с недостатками воспроизведения циркуляции океана в высоких широтах, что обусловлено, скорее всего, недостаточным разрешением по горизонтали, использованием сглаживания у полюса и, возможно, использованием функции тока вместо уровня в океанской части модели. В сентябре количество льда в Северном Ледовитом



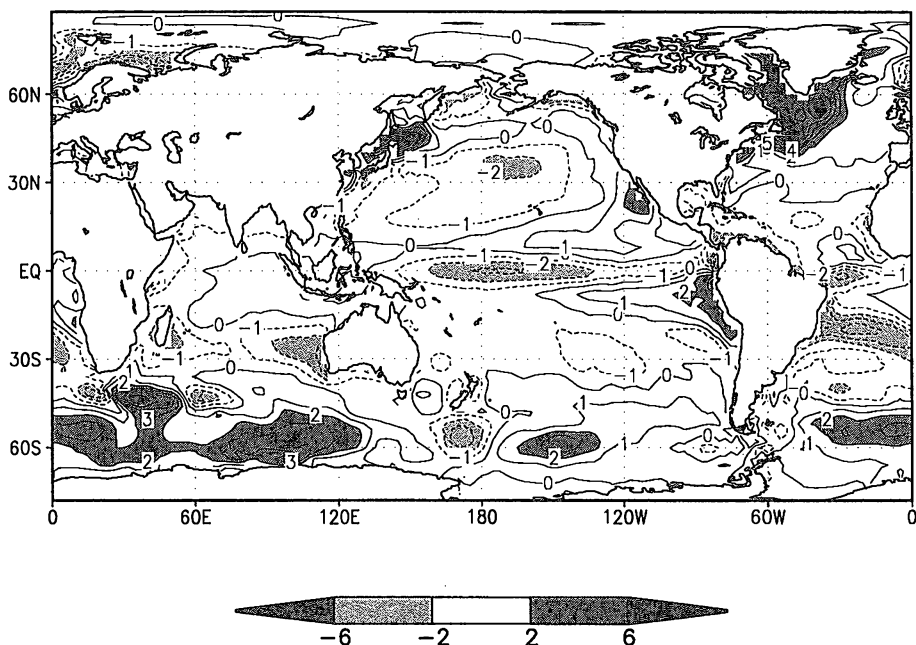


Рис. 8. Среднегодовая ошибка воспроизведения температуры поверхности океана. Изолинии проведены через  $1^{\circ}\text{C}$ .

океане в модели на 20–30 % меньше, чем по данным наблюдений. Излишне интенсивное таяние льда происходит около Аляски и Восточной Сибири, что объясняется завышением температуры поверхности на севере Сибири и Аляски вследствие недостаточно точного описания баланса тепла на поверхности.

Географическое распределение сплоченности льда в Южном полушарии приведено на рис. 10. Здесь перенос тепла океанскими течениями не играет такой определяющей роли в формировании льда, как в Северном полушарии. Модель в основном верно воспроизводит границу морского льда как в марте, так и в сентябре. Занижение площади льда на 10–20 % обусловлено, по-видимому, завышением температуры вследствие завышения приходящей к поверхности океана солнечной радиации.

### 2.2.2. Климатические характеристики океана в совместной модели

Постоянная работа по совершенствованию океанического и атмосферного блоков совместной модели реализуется в постепенном улучшении качества воспроизведения параметров климатической системы, что иллюстрируется с помощью рассматриваемых ниже характеристик океана.

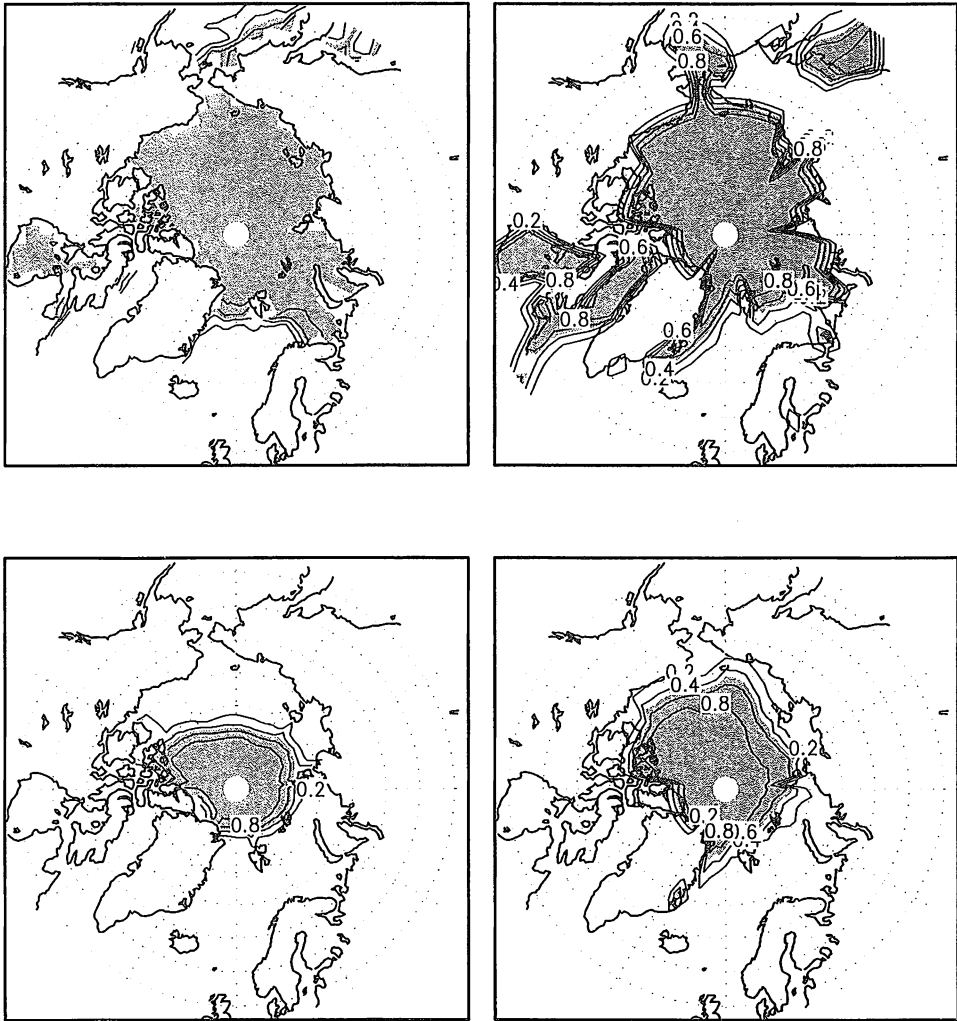


Рис. 9. Средняя сплоченность морского льда в Северном полушарии в марте (вверху) и сентябре (внизу) по результатам модели (слева) и данным наблюдений (справа). Изолинии проведены через 0.2. Закрашены области со сплоченностью льда более 0.5

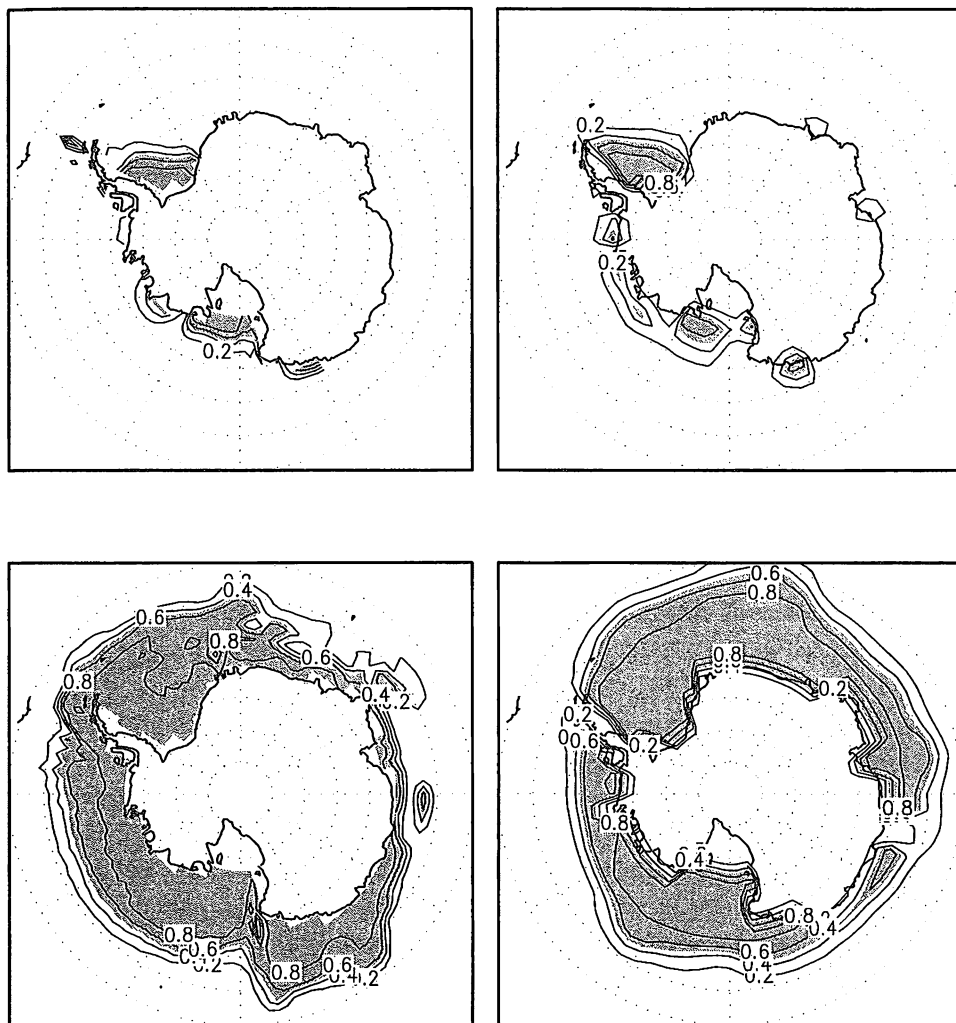


Рис. 10. Средняя сплоченность морского льда в Южном полушарии в марте (вверху) и сентябре (внизу) по результатам модели (слева) и данным наблюдений (справа). Изолинии проведены через 0.2. Закрашены области со сплоченностью льда более 0.5

На рис. 11 приведена средняя за 80 лет функция тока вертикально-осредненных движений. Среднегодовой расход Антарктического циркумполярного течения (АЦТ) в проливе Дрейка составляет порядка 100 Св, что более реалистично по сравнению с предыдущей версией модели [15], в которой он превышал 160 Св. Также интенсифицировались максимумы в главных среднеширотных круговоротах Северного полушария, западные периферии которых соответствуют Гольфстриму и Куроисио. Здесь расходы несколько превышают 40 Св, в то время как в предыдущей версии модели этот расход составлял чуть более 20 Св. Изменилась форма круговоротов в Северной Атлантике: удалось улучшить, даже для модели такого разрешения, структуру Гольфстрима. Однако интенсивность субполярного круговорота в Атлантическом океане, расход в котором согласно модели достигает 40 Св, несколько завышен как по сравнению с предыдущей версией модели, так и, например, с данными работы [88]. Сильные среднеширотные циклонические круговороты наблюдаются у восточных побережий Африки, Австралии и Южной Америки, их интенсивность достигает 60, 40 и 20 Св соответственно, уменьшаясь с запада на восток. В предыдущей версии модели интенсивность этих круговоротов была занижена по сравнению с основными моделями CMIP [97, 62], а также с данными работы [88]. Индонезийские проливы в модели аппроксимированы одним широким протоком, и расход в нем не превышает 20 Св. Можно отметить также, что в рассматриваемой версии модели улучшилась структура функции тока в Северном Ледовитом океане. В целом картина функции тока близка к средней по всем моделям CMIP [97, 62].

На рис. 12 изображена среднегодовая ошибка воспроизведения температуры и солёности на глубинах до 2,5 км, осредненная вдоль круга широты. Видно завышение температуры на 1–3 °С в средних широтах обоих полушарий не только на поверхности, но и на всех глубинах, что связано с конвективной неустойчивостью в зимний сезон. В тропиках, наоборот, на глубинах от 50 до 400 м температура занижена на 1–3 °С. Более холодная вода в тропиках является также и менее солёной. В целом у поверхности вода, по данным модели, менее солёная, а на больших глубинах — более солёная и более теплая, чем по данным наблюдений.

На рис. 13 представлены географические распределения осредненных за 80 лет потенциальной температуры океана и солёности на глубине 1000 м и их отклонений от данных Левитуса. За исключением высоких широт Северного полушария, как по значениям, так и по пространственному распределению, отклонения от данных наблюдений по температуре и солёности вполне соответствуют аналогичным средним по всем моделям CMIP характеристикам [62, 97]. Наибольшие положительные отклонения в температуре от данных наблюдений, достигающие 2.5 °С, расположены в средних широтах Северного и Южного полушарий. Этот эффект проявляется и в

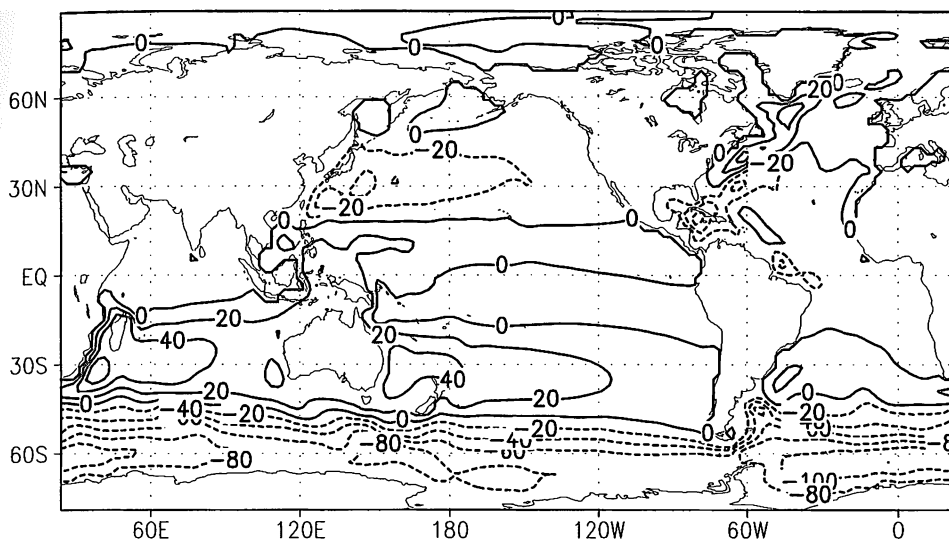


Рис. 11. Средняя за 80 лет функция тока вертикально-осредненной циркуляции глобального океана в совместной модели (изолинии с шагом 20 Св). Сплошными изолиниями показаны положительные значения, соответствующие движению по часовой стрелке, а пунктирными — отрицательные значения, соответствующие движению против часовой стрелки

экспериментах с моделью океана ИВМ РАН с предписанным атмосферным воздействием [14]. Возможно, он обусловлен недостаточно точным воспроизведением в модели океана развитой зимней конвекции в этих регионах. В средних широтах Южного полушария и Северной Атлантики отклонения от данных наблюдений для солёности имеют в основном положительные значения. В целом достигнуто значительное улучшение воспроизведения структуры глубинных полей температуры и солёности. В особенности это относится к Северному Ледовитому океану, где солёность была существенно завышена, а также к области в центральной части Северной Атлантики вблизи Гибралтара, где удалось улучшить описание обменов теплом и солью между Атлантикой и Средиземным морем через Гибралтарский пролив.

На рис. 14а показана средняя за 80 лет функция тока зонально-осредненной глобальной циркуляции. Характерной особенностью вертикальных круговоротов является дипольная структура у экватора, связанная с интенсивным экваториальным апвеллингом. Расходы в северной и южных от экватора ячейках достигают 35 Св. В Северном полушарии меридиональная функция тока принимает максимальное значение, превышающее 25 Св, на глубине около 1 км и широте 47° с.ш. Следует отметить, что до глубин 500 м рассчитанная меридиональная циркуляция хорошо совпадает

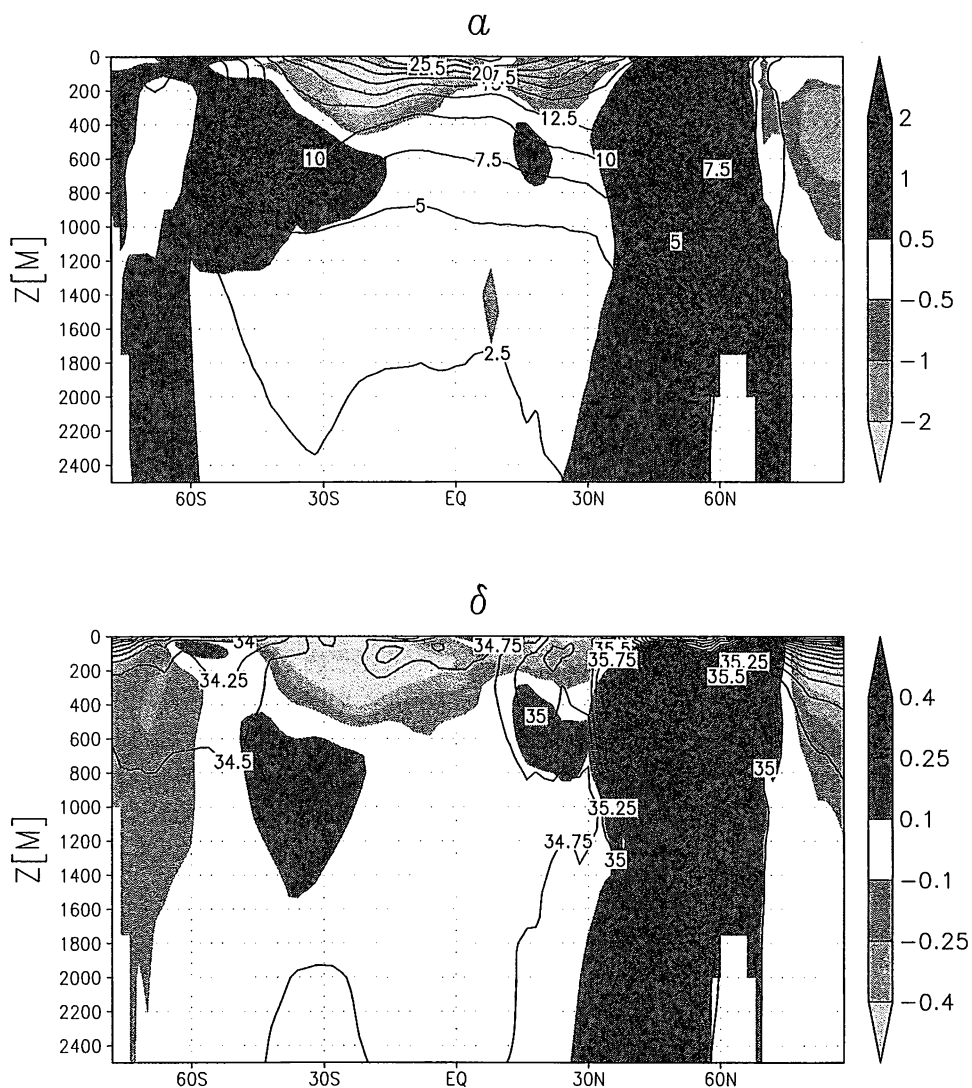


Рис. 12. Среднегодовое среднезональное распределение: а) для потенциальной температуры по результатам эксперимента (изолинии с шагом 2.5 °С) и ее отклонения от данных Левитуса (области отрицательных и положительных величин по модулю более 0.5 °С показаны с помощью различных оттенков серого цвета со шкалой градаций, расположенной справа от рисунка); б) для солености (изолинии проведены с шагом 0.5 ‰, а отклонения затемнены начиная от  $\pm 0.1$  ‰)

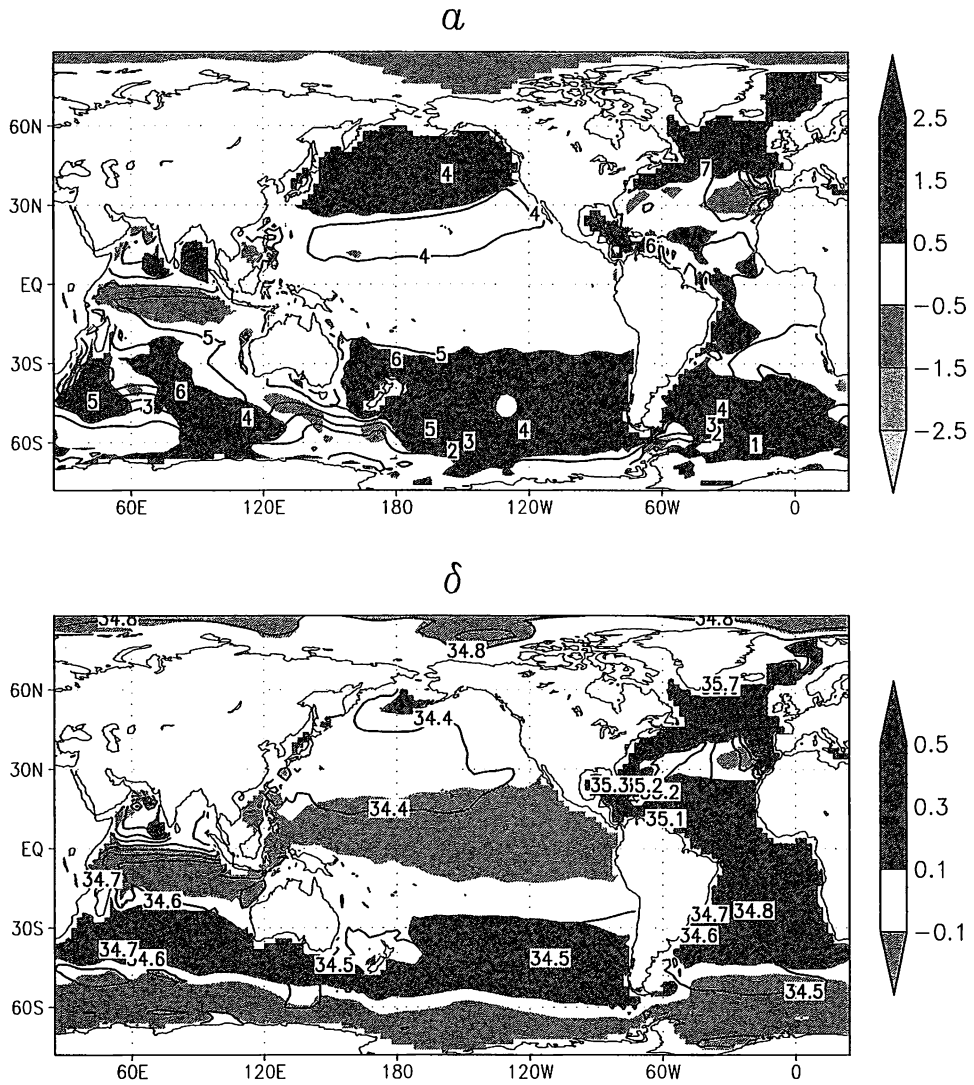


Рис. 13. а) Средняя за 80 лет потенциальная температура океана на глубине 1000 м в совместной модели (изолинии с шагом 10 °С) и ее отклонения от данных Левитуса, показанные с помощью затемнения разной интенсивности со шкалой градаций в °С, расположенной справа от рисунка.  
 б) То же самое для солёности (‰)

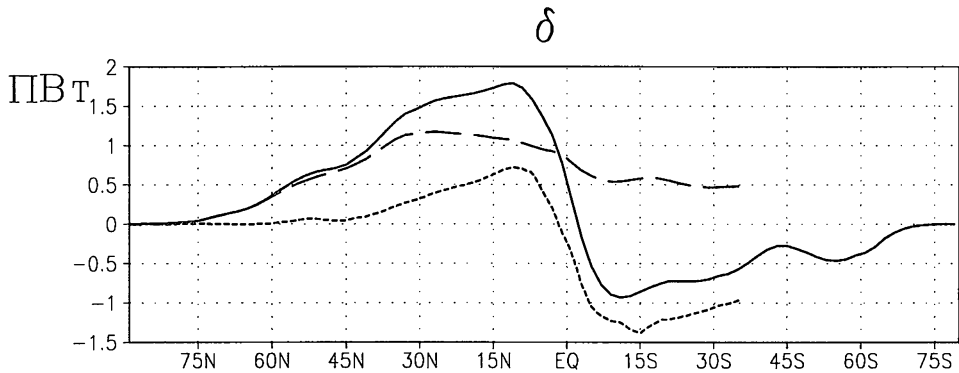
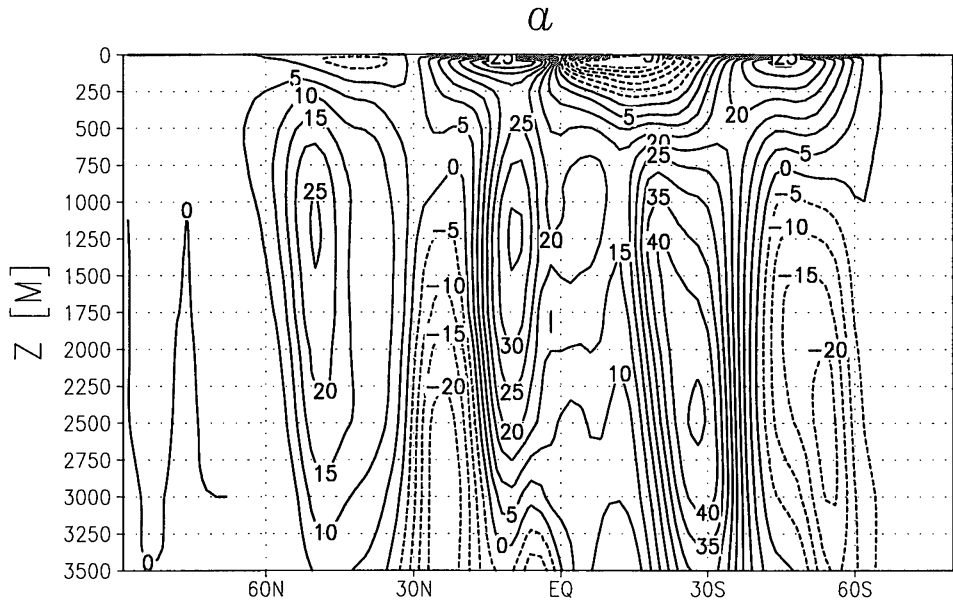


Рис. 14. а) Средняя за 80 лет функция тока зонально-осредненной меридиональной циркуляции глобального океана. Изолинии проведены с шагом 5 Св. Сплошными изолиниями показаны положительные значения, соответствующие движению против часовой стрелки, а пунктирными — отрицательные значения, соответствующие движению по часовой стрелке.  
 б) Средние за 80 лет меридиональные переносы тепла (МПТ) для глобального океана (сплошная линия), Атлантического океана (штрихованная линия), суммарного переноса в Тихом и Индийском океане (пунктир). Положительные значения МПТ соответствуют переносу тепла на север, а отрицательные — на юг



с результатами моделей СМІР [97, 62]. Однако в более глубоких слоях наблюдаются некоторые отличия, главное из которых связано с присутствием в Южном океане дополнительной циркуляционной ячейки отрицательного знака. Ее центр расположен на глубине около 2.5 км и широте около 50° ю.ш., а ее интенсивность несколько превышает 20 Св. Проявление этих отличий связано, по-видимому, с особенностями  $\sigma$ -модели океана, отличающимися ее от  $z$ -моделей океана, которые используются почти во всех моделях СМІР. В целом картина меридиональной циркуляции отличается от того, что было получено ранее, большей интенсивностью.

На рис. 14б показаны осредненные за 80 лет меридиональные переносы тепла (МПТ) для глобального океана, Атлантического океана, суммарного переноса в Тихом и Индийском океанах. В рассматриваемой версии модели увеличилась амплитуда МПТ приблизительно на 0.5 пВт как в Северном, так и Южном полушариях. Рассчитанный глобальный среднегодовой МПТ имеет максимумы около 1.75 пВт в Северном и  $-1$  пВт в Южном полушариях на широтах около 10°. Глобальный МПТ имеет вполне сравнимые значения с осредненными по моделям СМІР МПТ [97, 62] и оценками по данным наблюдений, приведенными там же. Также увеличились МПТ в Атлантическом и совместно Индийском и Тихом океанах. Теплоперенос в Атлантике (рис. 14б, штриховая линия) достигает максимума 1.2 пВт на 30° с.ш. и далее убывает вместе с поворотом на восток и уменьшением интенсивности Гольфстрима и Северо-Атлантического течения. В Южном полушарии перенос тепла определяется, главным образом, процессами в Тихом и Индийском океанах. Совместный перенос тепла в этих океанах на юг (рис. 14б, пунктирная линия) достигает максимума 1.4 пВт на 15° ю.ш.

Интенсификация МПТ в океане демонстрирует положительный эффект усовершенствований, проведенных в совместной модели. Ранее это было на уровне самых малых из моделей СМІР. Улучшение воспроизведения МПТ произошло за счет усиления меридиональной циркуляции в верхних слоях океана (рис. 14а), что, в свою очередь, объясняется как усилением пассатных ветров в совместной модели, так и эффектом пониженной вычислительной диссипации при переходе в океаническом блоке климатической системы на сетку "С".

### **2.2.3. Динамические характеристики крупномасштабного взаимодействия атмосферы и океана**

Совместная циркуляция атмосферы и океана порождает крупномасштабные динамические структуры, возникающие в результате взаимодействия этих сред. Они проявляются в виде крупномасштабных совместных колебаний в атмосфере и океане. Одними из самых значимых таких яв-

лений являются явление Эль-Ниньо и Северо-Атлантическое колебание. Ниже приводятся характеристики этих явлений, возбуждающихся в совместной модели, в сравнении с данными наблюдений.

**Явление Эль-Ниньо.** На рис. 15 приведен временной ход среднемесячных аномалий температуры поверхности океана, рассчитанных относительно климатического годового хода в районе возникновения Эль-Ниньо ( $180^\circ$  з.д.– $100^\circ$  з.д.,  $4^\circ$  ю.ш.– $4^\circ$  с.ш.) по данным наблюдений за 1950–2000 гг., а также по модельным результатам. Анализ этих временных рядов показывает, что изменчивость — среднеквадратичное отклонение (СКО) температуры в районе Эль-Ниньо — в модели примерно на 20 % больше, чем в данных наблюдений. В наблюдаемом спектре изменчивости ТПО в районе Эль-Ниньо наиболее заметны пики на периодах около 3.5 и 5 лет, но имеется также максимум изменчивости на периодах 10–15 лет. В модели главный спектральный пик расположен на периодах 3.5–4 года, а менее выраженные пики имеют место на периодах 5 и 8–12 лет. Модель правильно воспроизводит амплитуду колебаний с периодами 3–5 лет и завышает амплитуду изменчивости с большими периодами.

Согласно данным наблюдений, ТПО превышает среднеклиматическую менее половины всего времени (45 %). Максимальные положительные аномалии ТПО, по данным наблюдений, достигают 2.5–3 градусов, в то время как максимальные отрицательные аномалии не превосходят 2 К. В модели эта особенность изменчивости ТПО в районе Эль-Ниньо воспроизводится. Температура поверхности превышает среднеклиматическую в течение 44 % времени всего численного эксперимента, но положительные максимумы ТПО больше по абсолютной величине, чем отрицательные.

Важной характеристикой климатической модели является ее способность воспроизводить удаленный отклик атмосферной циркуляции на аномалии ТПО в приэкваториальном Тихом океане. На рис. 16 изображена осредненная по всем зимним сезонам разность давления на уровне моря в месяцы Эль-Ниньо и Ла-Нинья, рассчитанная по данным наблюдений и результатам модели. Как видно из рисунка, в тропиках во время Эль-Ниньо происходит уменьшение давления до 1 гПа над центральной и восточной частями Тихого океана и увеличение до 1–2 гПа на западе Тихого океана, над Индийским океаном, Австралией и Африкой. Эти изменения хорошо воспроизводятся моделью. В средних широтах наибольший отклик наблюдается над севером Тихого океана, где давление уменьшается на 2–6 гПа. Здесь данные модели также близки к наблюдениям. Основные отличия между модельными результатами и данными наблюдений имеют место над севером Канады и над Атлантикой к востоку от США. Это может быть связано с тем, что явление Эль-Ниньо возникает в модели западнее, чем по данным наблюдений.

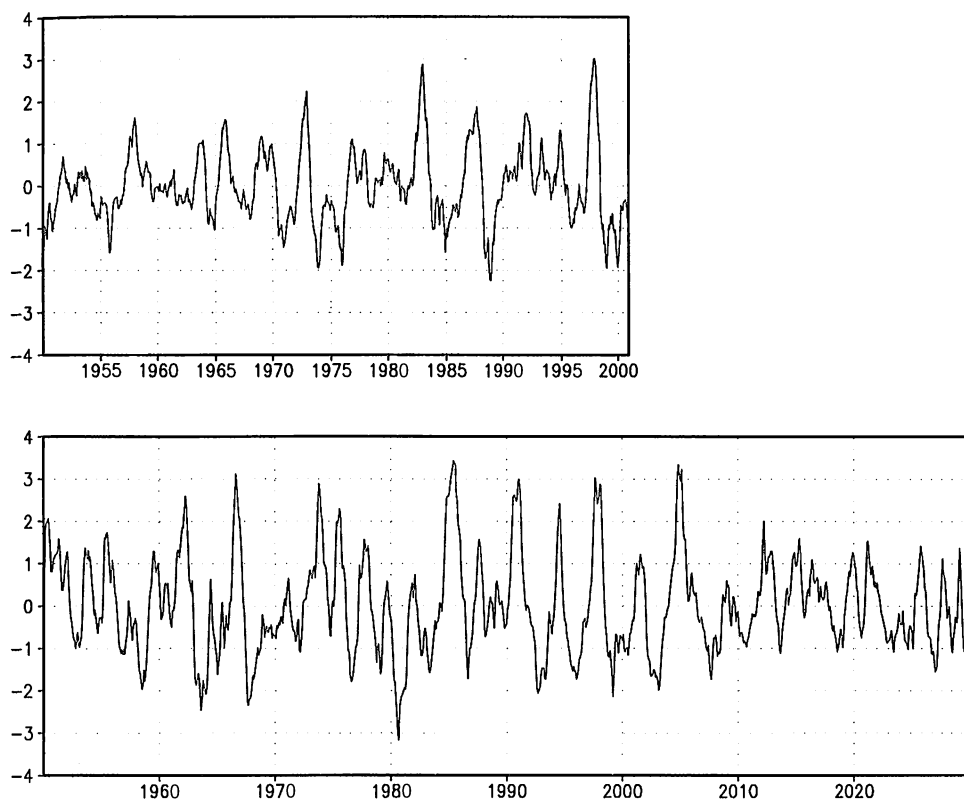


Рис. 15. Временной ход аномалии температуры поверхности океана (К) в районе  $180^{\circ}$  з.д.– $100^{\circ}$  з.д.,  $4^{\circ}$  ю.ш.– $4^{\circ}$  с.ш. по данным наблюдений за 1950–2000 гг. (вверху) и по данным модели (внизу)

**Северо-Атлантическое колебание.** Качество воспроизведения совместных колебаний аномалий атмосферной циркуляции и ТПО проанализированы также для района северной Атлантики. С этой целью, используя среднемесячные данные аномалий давления на уровне моря и ТПО, вычислены первые SVD-моды этих величин как по модельным результатам, так и по данным реанализа NCEP за 1950–2000 гг. Результаты вычислений приведены на рис. 17. Первая SVD-мода давления для модели и наблюдений практически совпадает с первой ЕОФ и представляет собой североатлантическое колебание. Его положительной фазе соответствует отрицательная аномалия ТПО — к востоку от Канады и у побережья Африки и положительная аномалия — к востоку от США и вблизи Северного моря. Первые SVD-моды по данным модели близки к наблюдаемым, что говорит о хорошем описании взаимодействия атмосферы и океана в средних широтах в совместной модели.

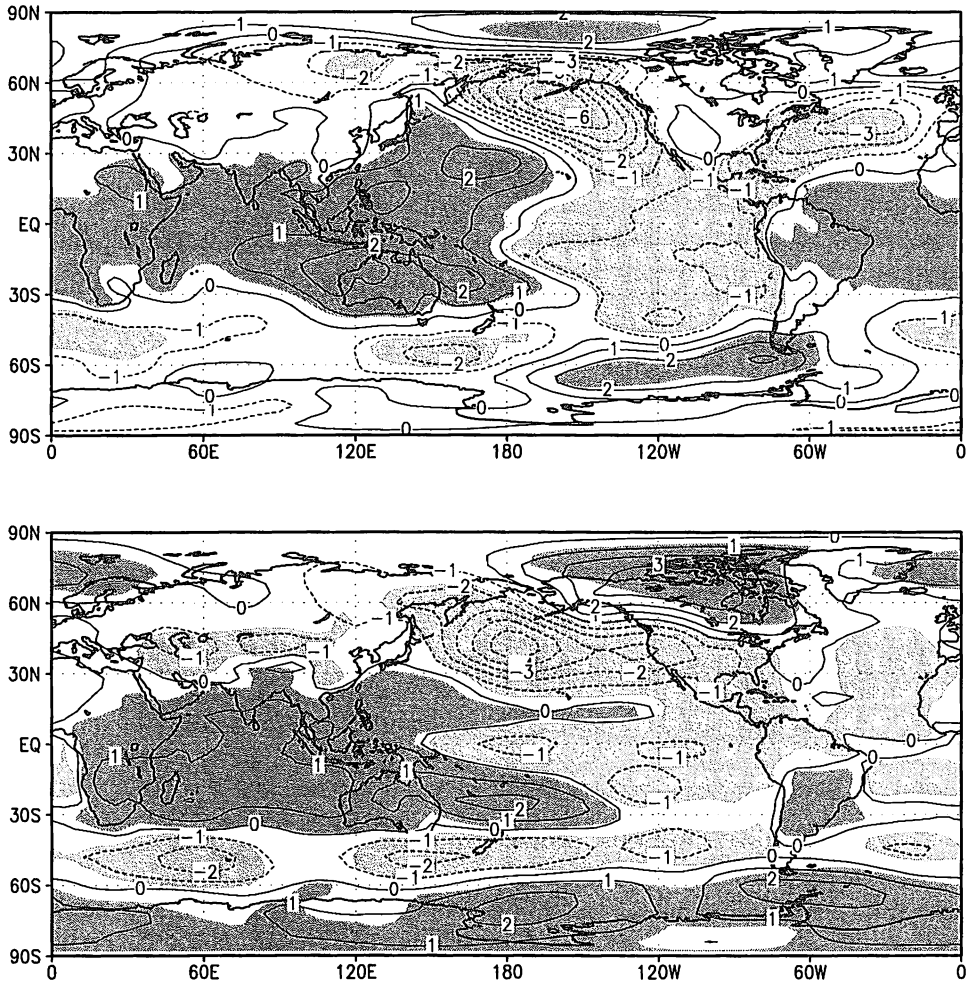


Рис. 16. Разность давления на уровне моря для зимних месяцев с Эль-Ниньо и Ла-Нинья по данным наблюдений (вверху) и модели (внизу). Закрашенные области соответствуют статистической значимости (согласно  $t$ -критерию Стьюдента) с вероятностью 0.95. Изолинии проведены через 1 гПа

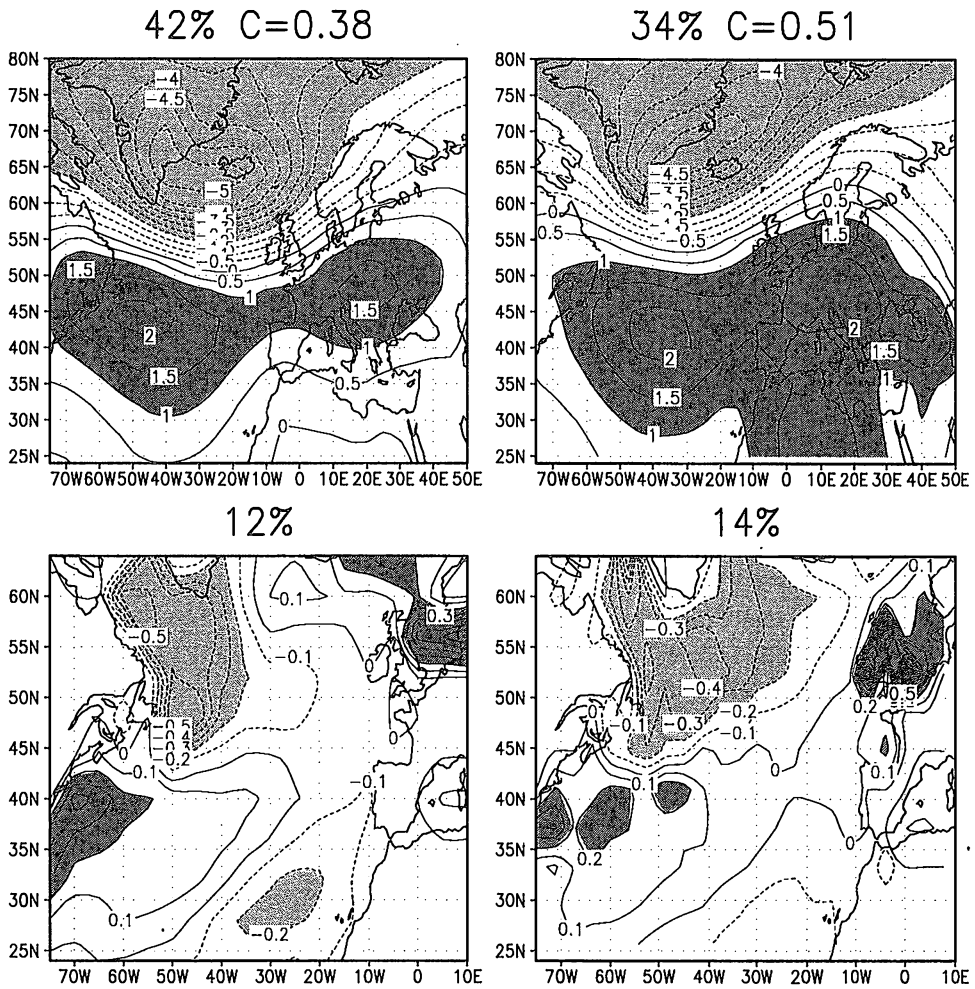


Рис. 17. Первые SVD-моды давления на уровне моря (вверху) и ТПО (внизу) в районе северной Атлантики по данным модели (слева) и реанализа NCEP (справа) (в безразмерных единицах). Приведены процент дисперсии, приходящейся на первые моды, а также коэффициент корреляции между коэффициентами Фурье

### 3. Теория чувствительности климатической системы к малым внешним воздействиям

Диагностические исследования поверхностной температуры воздуха показывают, что: а) за последние 30 лет произошли заметные изменения среднедекадной (поверхностной) температуры воздуха — произошло ее повышение; б) максимальные изменения температуры произошли зимой в Сибири и на северо-западе Канады; в) летние изменения температуры существенно меньше; г) поверхностная температура Северной Атлантики не только не повысилась, а даже понизилась.

Возникают вопросы: В чем причина этих изменений? Являются ли эти изменения следствием собственных колебаний параметров климатической системы или это есть следствие антропогенных воздействий, связанных с увеличением, например, концентрации углекислого газа и сульфатных компонентов в атмосфере? Чтобы получить ответы на эти вопросы, необходима теория чувствительности климатической системы к малым внешним воздействиям, которая давала бы конструктивный метод вычисления изменений климата под влиянием этих воздействий. В основу такой специальной, математической, теории климата целесообразно положить методы теории динамических систем. С этой целью реальной климатической системе необходимо сопоставить некоторый математический объект, представляющий идеализацию реальной системы и который можно назвать ее "идеальной" моделью. Предполагается, что такая "идеальная" модель существует и что наблюдаемая динамика климатической системы представляет собой реализацию траектории, порождаемой этой моделью.

#### 3.1. Устойчивость аттракторов атмосферных моделей к постоянно действующим воздействиям

В основе большинства современных климатических моделей лежат системы уравнений гидротермодинамики в частых производных, фазовые пространства которых бесконечномерны. Поскольку аналитическое решение таких сложных систем в общем случае невозможно, приходится решать их численно. С этой целью исходная бесконечномерная система уравнений при помощи подходящего метода (например проекционного или конечно-разностного) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений большой, но конечной размерности. Эта система может быть записана в следующем общем виде:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi) + f, \quad \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad \phi \in R^N. \quad (3.1)$$

Здесь  $\phi$  — вектор состояния системы, представляющий собой совокупность спектральных коэффициентов (или значений в узлах сетки) полей темпе-

ратуры, скорости ветра, влажности и др.;  $N$  — размерность вектора состояния  $\phi$  (и фазового пространства системы), которая для модели общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН с горизонтальным разрешением  $5^\circ \times 4^\circ$  и 21 уровнем по вертикали имеет значение  $\sim 10^5$ ;  $F(\phi)$  — некоторый нелинейный оператор;  $f$  — внешнее воздействие.

Системы уравнений, полученные после аппроксимации уравнений гидротермодинамики атмосферы, обычно имеют некоторые общие свойства. Во-первых, начиная с определенного момента норма решений системы, выпущенных из произвольных начальных условий, не превосходит некоторой фиксированной величины:

$$|\phi(t)| < C_0, \quad t \geq T_0,$$

и, таким образом, все ее траектории попадают в шар радиуса  $C_0$ , который является поглощающим множеством системы. Во-вторых, типичные атмосферные системы диссипативны: дивергенция правой части рассматриваемых систем строго меньше нуля, и, следовательно, происходит постоянное сжатие фазового объема. В-третьих, траектории систем неустойчивы по Ляпунову. Это означает, что вдоль некоторых направлений (которые соответствуют положительным показателям Ляпунова) происходит рост  $k$ -мерной части фазового объема (разумеется,  $k < N$ ).

Первое свойство гарантирует существование конечномерного аттрактора — инвариантного, компактного, притягивающего множества, находящегося внутри поглощающего шара (см., например, [18]). Как следует из определения, если начальные состояния системы выбраны на аттракторе системы, то соответствующие траектории будут принадлежать аттрактору. Все остальные траектории системы будут достаточно быстро притягиваться к нему. Следовательно, при изучении эволюции системы за достаточно длительный промежуток времени можно считать, что ее траектория находится на аттракторе. Поскольку, по определению, аттрактор компактен, то на нем существует мера, инвариантная относительно динамики системы. Инвариантность меры означает, что мера множества состояний (начальных условий) не изменяется под действием динамики и результат осреднения по мере не зависит от времени. Если система является эргодической, то такая инвариантная мера единственна. В этом случае результат осреднения по траекториям не зависит от их выбора (с точностью до множества нулевой меры) и совпадает с результатом осреднения по инвариантной мере.

Естественно предположить, что исследуемая система (3.1) имеет аттрактор с эргодической инвариантной мерой. Траектории системы рассматриваются на этом аттракторе, а статистические характеристики системы (средние, моменты и т.д.) вычисляются при помощи усреднения по мере (или усреднения вдоль траектории системы).

Поскольку эволюция системы происходит на аттракторе, то весьма важным является вопрос о его структуре как множестве. К сожалению, как правило, аттрактор имеет весьма сложную, фрактальную структуру. Дело в том, что согласно третьему свойству фазовый объем системы сжимается, и, следовательно, размерность аттрактора оказывается меньше размерности фазового пространства. Поскольку в  $k$ -направлениях происходит экспоненциальное расширение части объема ( $k$  — число положительных показателей Ляпунова), то размерность аттрактора не может быть меньше  $k$ . При этом аттрактор должен находиться внутри ограниченного поглощающего множества. В результате аттрактор представляет собой фрактальное множество размерности  $r$  ( $k \leq r < N$ ), "упакованное" в поглощающий шар. Следует заметить, что размерность  $r$  аттрактора, как правило, достаточно велика, хотя и значительно меньше  $N$ .

Поскольку в правые части уравнений климатической системы входит большое число параметров, то естественно возникает проблема устойчивости характеристик системы при изменении данных параметров. В этой статье рассматривается частный случай проблемы — задача об устойчивости (и чувствительности) первых и вторых моментов по отношению к изменению внешнего воздействия.

Пусть система (3.1) имеет аттрактор  $A$  с инвариантной мерой  $\mu$ . По определению, среднее состояние и дисперсия этой системы есть

$$\bar{\phi} = \int_A \phi d\mu$$

и

$$D\phi = \int_A (\phi - \bar{\phi})^2 d\mu.$$

Для простоты считается, что переменные выбраны так, чтобы среднее состояние было нулевым:

$$\bar{\phi} = 0, \quad D\phi = \int_A \phi^2 d\mu.$$

Наряду с системой (3.1) рассматривается возмущенная система с дополнительным внешним воздействием  $\delta f$ :

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial t} = F(\phi^1) + f + \delta f, \quad \phi^1|_{t=0} = \phi_0^1, \quad \phi^1 \in R^N, \quad (3.2)$$

которая имеет свой собственный аттрактор  $A^1$  (в общем случае не совпадающий с  $A$ ) и инвариантную меру  $\mu^1$  на нем. Среднее состояние и дисперсия возмущенной системы вычисляются по формулам:

$$\bar{\phi}^1 = \int_{A^1} \phi^1 d\mu^1$$



и

$$D\phi^1 = \int_A (\phi^1 - \bar{\phi}^1)^2 d\mu^1.$$

Таким образом, изменения среднего состояния и дисперсии системы равны соответственно

$$\delta\bar{\phi} = \int_{A^1} \phi^1 d\mu^1 = U(\delta f)$$

и

$$\delta D\phi = \int_A \phi^2 d\mu - \int_A (\phi^1 - \bar{\phi}^1)^2 d\mu^1 = V(\delta f).$$

Здесь  $U$  и  $V$  — некоторые операторы (возможно нелинейные), связывающие изменения внешнего и среднего состояний и дисперсии системы (операторы отклика).

С физической точки зрения естественно предположить, что при малых изменениях внешнего воздействия операторы отклика  $U$  и  $V$  будут линейными. Для реальных атмосферных систем обосновать такое предположение теоретически не удастся. Основная проблема здесь заключается во фрактальности аттрактора — носителя инвариантной меры. Поскольку плотность меры сосредоточена на фрактальном множестве, то неясно, как дифференцировать ее моменты. Частично решена гораздо более узкая задача — задача о непрерывной зависимости аттрактора системы от ее параметров [22, 17]. Результаты же по устойчивости самой инвариантной меры в настоящий момент неизвестны. Однако известно, что гладкая зависимость инвариантной меры (и, соответственно, всех ее моментов) от параметров задачи имеет место для так называемых гиперболических хаотических систем (см. обзор [107]). Класс таких систем достаточно узок, и, по-видимому, большинство атмосферных систем относятся к более широкому классу систем с ненулевыми показателями Ляпунова. Вопрос гладкой зависимости инвариантной меры от параметров в этом классе систем к настоящему моменту до конца не исследован.

Чтобы построить оператор отклика, можно действовать двумя способами. Во-первых можно попытаться изменить исходную систему так, чтобы ее мера стала "хорошей". Или, во-вторых, формально использовать теорию хаотических гиперболических систем в надежде на то, что моменты меры исходной системы все-таки дифференцируемы по параметрам [81]. Ниже будет рассмотрен первый из этих способов.

Необходимо также отметить, что при анализе исходной (бесконечномерной) системы уравнений гидротермодинамики и при переходе от нее к конечномерной аппроксимации возникает большое количество "математических" трудностей. Так, например, далеко не всегда удается доказать

теоремы о корректной разрешимости исходной задачи, о существовании аттрактора бесконечномерной системы (если есть разрешимость), о близости аттракторов исходной системы (если он существует) и приближенной и т.д. (см., например, [18, 17]).

### 3.2. Регуляризация атмосферных моделей по Зееману

Весьма конструктивным способом регуляризации фрактального аттрактора хаотической системы является подход, предложенный Зееманом [127]. Суть его заключается в добавлении малого случайного шума в правую часть системы, в результате чего аттрактор перестает быть фрактальным множеством, что существенно упрощает ситуацию. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, заданная на некотором компакте  $X$ :

$$\frac{du}{dt} = F(u). \quad (3.3)$$

Предполагается, что эта система уравнений порождает диссипативную динамическую систему, обладающую некоторой инвариантной мерой  $\rho$ . Далее рассматривается регуляризованная система

$$\frac{dv}{dt} = F(v) + \varepsilon\eta(t), \quad (3.4)$$

где  $\eta(t)$  — случайный процесс, представляющий собой гауссов белый шум с единичной дисперсией, а  $\varepsilon$  — малое положительное число. Инвариантная мера такой системы  $\rho_\varepsilon$  является стационарным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка

$$\frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon^2 \Delta \rho_\varepsilon - \operatorname{div}(F \rho_\varepsilon) \quad (3.5)$$

и называется  $\varepsilon$  — сглаживанием меры  $\rho$ . В предположении, что  $v \in \Omega$  ( $\Omega$  — компактное множество без границ) в работе [127] показано, что стационарное решение уравнения Фоккера–Планка существует, единственно и непрерывно зависит от параметров задачи. В этом случае можно вычислить линейный оператор отклика системы (например, первого момента от решения) на достаточно малые внешние воздействия.

Реальные атмосферные модели всегда содержат параметризации подсеточных масштабов, имеющие "стохастическое происхождение". "Компьютерные реализации" моделей также являются источниками псевдослучайных шумов. В связи с этим вместо исходной детерминистической модели за основу можно взять возмущенную малым случайным шумом стохастическую систему, для которой уже имеется гладкая мера.

В некоторых случаях оператор отклика может быть приближенно вычислен непосредственно по статистическим характеристикам невозмущенной системы при помощи флуктуационно-диссипационной теоремы. Следуя работе [65], целесообразно рассмотреть систему с малым случайным возмущением (3.4). Пусть соответствующее уравнение Фоккера-Планка (3.5) записано в следующем символьном виде:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = LP, \quad (3.6)$$

где  $L = \varepsilon^2 \Delta - \text{div}$ . Если в  $j$ -ую компоненту правой части уравнения (3.4) добавить не зависящее от времени детерминистическое воздействие  $\delta f_j$ , то можно выписать уравнение Фоккера-Планка для возмущенной меры:

$$\frac{\partial P'}{\partial t} = (L + \delta L)P',$$

где  $\delta LP' = \delta f_j \partial / \partial v_j (P')$ . При этом среднее состояние изменится следующим образом:

$$\delta \bar{v}_i(t) = \int v_i P_{st} dv - \int v'_i P'_{st} dv'.$$

В работе [65] показано, что в линейном приближении справедливо соотношение

$$\delta \bar{v}_i(t) = \int_0^t \int_v v_i(t) \left( \frac{\partial P_{st}}{\partial v_j} \right) (t') P_{st}(t') dt' dv \delta f_j, \quad (3.7)$$

где  $P_{st}$  — инвариантная мера уравнения (3.6). Если  $P_{st}$  является нормальным распределением, то формула (3.7) принимает вид

$$\delta \bar{v}(t) = \int_0^t C(\tau) C^{-1}(0) d\tau \delta f, \quad (3.8)$$

где  $C(\tau)$  — ковариационная матрица со сдвигом  $\tau$ . Соотношение (3.8) есть не что иное как флуктуационно-диссипационное соотношение, связывающее оператор отклика среднего состояния системы на малые внешние воздействия с ее статистическими характеристиками. В результате для оператора отклика  $U$  получается следующее выражение:

$$U = \int_0^t C(\tau) C^{-1}(0) d\tau. \quad (3.9)$$

В эргодическом случае (когда статистические характеристики вычисляются осреднением по времени вдоль одной траектории) это означает, что оператор отклика может быть построен по одной достаточно длинной траектории системы.

Точно такое же выражение для оператора отклика первого момента можно получить и для так называемых детерминистических "квазирегулярных" систем ([13, 71]). В этом случае для вывода используется версия флуктуационно-диссипационной теоремы, доказанная Крейкнэном [85] для регулярных систем (детерминистических систем, удовлетворяющих уравнению Лиувилля несжимаемости фазового объема и имеющих точный квадратичный закон сохранения). Суть требований "квазирегулярности" заключается в том, что рассматриваемая система должна иметь приближенный квадратичный закон сохранения, приближенно сохранять фазовый объем на аттракторе и находиться в равновесии (на своем аттракторе). Такими свойствами обладают многие модели атмосферы большой размерности [13, 71], в частности модель баротропной атмосферы и двухслойная квазигеострофическая модель атмосферы.

Разработка, реализация и верификация метода построения приближенного оператора отклика, основанного на использовании флуктуационно-диссипационной теоремы для моделей общей циркуляции атмосферы, представляет собой сложную технологическую проблему. Исходными уравнениями моделей общей циркуляции атмосферы является система прогнозных уравнений в частных производных для горизонтальных компонент скорости  $u$  и  $v$ , температуры  $T$ , влажности  $q$  и приземного давления  $p_s$ . Каждая из этих переменных (кроме приземного давления) зависит от трех пространственных координат. При аппроксимации таких уравнений по вертикальной координате обычно используется конечно-разностный метод с характерным количеством уровней от 10 до 70. По горизонтальным координатам чаще всего применяется метод Галеркина с характерным числом базисных функций от 500 до 5000. Таким образом, после проведения пространственной аппроксимации возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений порядка не менее чем  $4 \times 10 \times 500$ . В то же время для того чтобы построить приближенный оператор отклика конечномерного аналога модели, необходимо вычислить достаточно длинную траекторию системы, проинтегрировав модель численно. Затем по полученным данным необходимо определить матрицы  $C(t)$  и  $C(0)$  и по формуле (3.9) вычислить оператор  $U$ . Далее следует провести проверку метода путем прямого интегрирования возмущенной системы для некоторого базового набора воздействий  $\delta f$  и сравнения векторов  $U\delta f$  с реальными откликами нелинейной системы, а также исследовать устойчивость вычислений.

### 3.3. Численные эксперименты с моделями общей циркуляции атмосферы

Как процедура построения оператора отклика, так и сам процесс интегрирования рассматриваемой системы на длительное время являются

трудоемкой задачей. Более того, требуется значительное количество компьютерных ресурсов для хранения большого объема данных. В работе [72] были предложены следующие способы понижения размерности задачи, позволяющие значительно снизить количество необходимых данных, а также упростить процесс вычисления самого оператора.

1. Использование только части "физических" переменных при построении приближенного оператора (например, только поля температуры). Это является оправданным в том случае, если остальные физические переменные функционально от них зависят. Известно, например, что в средних широтах поле скорости ветра в сильной степени связано с полем температуры, и этот факт может быть использован при построении оператора.

2. Использование переменных не со всех, а лишь с некоторых базисных уровней по вертикали. Основанием для этого может служить слабая зависимость горизонтальной структуры рассматриваемых переменных от вертикальной координаты (то есть их квазибаротропность) для крупномасштабных процессов.

3. При построении оператора отклика можно ограничиться полями физических переменных меньшей размерности, чем количество базисных функций в соответствующем методе Галеркина. Этот подход оправдан, если мелкомасштабные процессы не оказывают большого влияния на формирование отклика системы.

4. Можно также понизить размерность задачи, рассматривая ее в каких-либо базисах, отличных от базиса "обычных" координат. Например, можно перейти в базис трехмерных естественных ортогональных составляющих системы, составленный из собственных векторов полной ковариационной матрицы системы  $C(0)$ , нормированной каким-либо способом, и при построении оператора использовать проекцию решения только на векторы, отвечающие наибольшим собственным числам матрицы  $C(0)$ . Таким способом будут учтены все процессы, обладающие достаточно большой изменчивостью. Заметим, что данная методика может быть особенно эффективна, если известны физические механизмы, формирующие стационарный отклик системы.

### **3.3.1. Построение оператора отклика для модели общей циркуляции атмосферы ССМ0**

В этом разделе будут изложены основные результаты работы [72], посвященной построению оператора отклика для модели общей циркуляции атмосферы ССМ0 Национального центра атмосферных исследований США [103]. Выбор этой модели обусловлен главным образом тем, что с ней уже было проведено большое количество численных экспериментов и,

в том числе, была вычислена модельная траектория длительностью в один миллион дней.

Модель ССМ0 представляет собой модель общей циркуляции атмосферы с 9 вертикальными уровнями в  $\sigma$ -системе координат. Прогностическими переменными являются вертикальная компонента относительной завихренности и горизонтальная дивергенция скорости, а также температура воздуха, относительная влажность и приземное давление. Для аппроксимации уравнений по горизонтали в модели ССМ0 применяется метод Галеркина с базисом, состоящим из сферических гармоник. При этом используется ромбоидальное усечение  $R15$  (сумма номера полинома Лежандра  $l$  и азимутального числа  $m$  сферических гармоник не превосходит 15), в котором число ненулевых коэффициентов составляет 496. Таким образом, система обыкновенных дифференциальных уравнений модели состоит из  $(4 \times 9 + 1) \times 496$  уравнений (для относительной завихренности, дивергенции, температуры и влажности на девяти вертикальных уровнях, а также приземного давления, с размерностью каждого поля равной 496), при этом размерность фазового пространства составляет величину 18352.

Для рассматриваемой модели был проведен длительный расчет с граничными условиями, соответствующими непрерывному январю (один миллион дней, всего два миллиона точек на траектории системы — каждая с шагом в 12 часов). Эти данные использованы для построения приближенного оператора отклика. Кроме того, с моделью ССМ0 был проведен ряд дополнительных экспериментов по моделированию ее отклика на термические источники, расположенные на экваторе и в средних широтах, которые использовались для тестирования метода.

Эксперименты проводились следующим образом. В правую часть уравнения для температуры добавлялся постоянно действующий термический источник вида  $\delta f = AT_f(\sigma, \lambda, \phi) = T_1(\sigma) \cdot T_2(\lambda - \lambda_c, \phi - \phi_c)$ . При каждом пространственном распределении нагревания (охлаждения), то есть при каждом заданном  $T_f$ , выполнялись два эксперимента при  $A = +T_0$  и при  $A = -T_0$  с тем, чтобы выделить линейную часть отклика. В каждом случае для определения нового среднего состояния проводился расчет на 10000 дней и определялось изменение среднего состояния как

$$\bar{\psi}_1 - \bar{\psi} = W(\delta f) \equiv W(T_f(\sigma, \lambda, \phi)),$$

где  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\psi}_1$  представляют собой средние состояния невозмущенной и возмущенной систем, соответственно. Далее вычислялась линейная часть отклика системы по формуле

$$U\delta f = (W(T_0 T_f(\sigma, \lambda, \phi)) - W(-T_0 T_f(\sigma, \lambda, \phi)))/2,$$

а также оценивалась его остаточная нелинейная часть.

Вертикальный профиль источника  $T_1(\sigma)$  задавался двумя способами. В первом случае предполагалось, что  $T_1(\sigma) = \sin(\sigma)$ , что соответствует максимуму нагревания на уровне  $\sigma = 0.5$  и обращению  $T_1$  в ноль на подстилающей поверхности и на верхней границе атмосферы. Во втором случае считалось, что  $T_1 = 1$  при  $\sigma = 0.991, 0.926$ ,  $T_1 = 0.5$  при  $\sigma = 0.811$  и  $T_1 = 0$  при остальных значениях  $\sigma$ . Такой профиль  $T_1$  означает, что нагревание происходит только на приземных уровнях атмосферы. Горизонтальный профиль воздействия максимален (принимает значение 1) в центральной точке с координатами  $\lambda = \lambda_c$ ,  $\phi = \phi_c$  и убывает линейно до нуля на расстоянии 1500 км.

Были проведены три серии экспериментов с различными значениями  $(\lambda_c, \phi_c)$ . В первой серии широта центральной точки была фиксирована и равна  $40^\circ$  с.ш., а долгота изменялась от 0 до  $2\pi$  с шагом  $\pi/12$  (общее число экспериментов — 24). Во второй серии экспериментов широта центра была принята равной  $20^\circ$  с.ш., а в третьей — максимум нагревания приходился на экватор. Величина максимума нагревания  $|T_0|$  принимала значение  $2.5^\circ/\text{день}$  для двух экваториальных серий экспериментов (напомним, что при каждом заданном пространственном распределении воздействия проводилось два численных эксперимента с  $+T_0$  и с  $-T_0$ ) и  $5^\circ/\text{день}$  — в остальных случаях. Всякий раз выделялась линейная часть отклика среднего состояния системы и проводилось ее сравнение с окликом, построенным с помощью приближенного оператора отклика ( $U\delta f$ ). Заметим, что описанный выше выбор вертикальных и горизонтальных профилей воздействия позволяет всесторонне проверить работу метода в разных условиях формирования отклика системы.

Размерность фазового пространства модели общей циркуляции атмосферы слишком велика, чтобы проводить длительные численные расчеты, поэтому были использованы перечисленные выше способы понижения размерности задачи, а также исследована их чувствительность к параметрам метода. В каждом случае процедура построения оператора выглядела следующим образом. Для выбранного набора переменных и вертикальных уровней вычислялась автоковариационная матрица  $C(0)$ . Далее рассчитывались ее собственные векторы (эмпирические ортогональные функции) и собственные числа. Матрица  $C(0)$  обращалась в пространстве собственных векторов, отвечающих наибольшему собственному числу (в этом базисе  $C(0)$  имеет диагональный вид). В этом же пространстве вычислялась матрица  $C(t)$ . В результате вычислений строился приближенный оператор отклика  $U$ , вычислялись его сингулярное разложение и значения на тестовых воздействиях (описанных выше термических источниках  $\delta f$ ). Заключение о качестве метода формулировалось по результатам сравнения векторов  $U\delta f$  (предсказанных откликов) и линейных частей отклика, построенных по результатам прямых численных экспериментов с моделью ССМО.

Оказалось, что наилучшие результаты были получены в случае, когда приближенный оператор строился с использованием полей функции тока и температуры. При этом, для правильного воспроизведения вертикальной структуры отклика, важно было использовать полный набор полей (на всех девяти вертикальных уровнях) данных переменных. В то же время оказалось возможным сократить пространственную размерность каждого поля до 100 — для функции тока и до 300 — для температуры, используя разложение по естественным ортогональным функциям для соответствующего ряда данных. Таким образом размерность задачи удалось понизить примерно до 5000. Оптимальная размерность пространства собственных векторов матрицы  $C(0)$  должна быть в диапазоне от 2500 до 3000. При таких значениях число обусловленности матрицы  $C(0)$  еще не слишком велико (ошибки вычислений достаточно малы), а в то же время структура исходного оператора воспроизводится довольно хорошо. Результаты численных экспериментов суммированы в следующих четырех таблицах.

Таблица 1. Отклик модели ССМ0 на приземный термический источник в средних широтах ( $40^\circ$  с.ш.)

Поле	Корреляция между предсказанным и реальным откликом	Отношение нормы реального отклика к норме предсказанного	Отношение нормы нелинейной части к норме линейной
$\psi_{336}$	0.11	0.63	0.16
$\psi_{811}$	0.16	0.53	0.19
$T_{336}$	0.21	0.50	0.20
$T_{811}$	0.54	0.92	0.19

Характерной чертой этого случая является "локальный" характер отклика системы. Эффект от термической аномалии не распространяется выше уровня 0.664 и максимален вблизи источника нагревания. Время формирования отклика составляет величину 10–15 суток. Отметим также, что отклик системы в достаточной степени линеен по отношению к воздействию. Линейная часть отвечает примерно за 85 % от нормы отклика. Корреляции соответствующих полей температуры и функции тока на нижних уровнях (0.926 и 0.991) составляют в среднем (по всем 24 экспериментам) величину 0.68, при этом приближенный оператор завышает величину отклика примерно на 15 %. В ряде случаев как отклик модели, так и его предсказанное значение оказываются малыми и ошибки вычислений становятся значительными по отношению к самому отклику. Отклики на верхних уровнях в большинстве случаев слабы и не могут быть воспроизведены при помощи приближенного оператора. Если ограничиться рассмотрением случаев с сильным по величине откликом (5 случаев), то средняя пространственная корреляция окажется равной 0.79. По-видимому, это объясняется



тем, что при формировании "сильного" отклика задействованы "значимые" физические механизмы, информация о которых содержится в корреляционных матрицах, а значит, и в приближенном операторе отклика. Это имеет место даже несмотря на применение различных процедур понижения размерности фазового пространства, что приводит к потере информации о системе.

Таблица 2. Отклик модели на приземное воздействие на экваторе

Поле	Корреляция	Отношение норм	Нелинейность
$\psi_{336}$	0.69	1.06	0.21
$\psi_{811}$	0.63	1.05	0.17
$T_{336}$	0.78	0.91	0.27
$T_{811}$	0.72	0.82	0.17

Линейная часть в этом случае составляет примерно 70 % от величины отклика. В отличие от предыдущего случая эффект от термического источника наблюдается на всех уровнях модели и носит глобальный характер, а время его формирования занимает почти 30 суток. Имеет место высокая корреляция между предсказанным и реально полученными откликами на всех уровнях (в среднем 0.75). В целом приближенный оператор отклика несколько завышает норму отклика системы (на величину в 15 %). Как и в предыдущем случае, лучше воспроизводятся "сильные" отклики. Здесь отклик носит глобальный характер как по вертикали, так и по гори-

Таблица 3. Отклик модели на протяженное по вертикали экваториальное воздействие

Поле	Корреляция	Отношение норм	Нелинейность
$\psi_{336}$	0.88	1.09	0.13
$\psi_{811}$	0.87	1.13	0.10
$T_{336}$	0.85	1.16	0.17
$T_{811}$	0.76	0.92	0.15

зонтали. Характерное время его формирования составляет 60 суток. Приближенный оператор отклика воспроизводит пространственную структуру линейной части отклика с точностью до 85 % и несколько занижает его амплитуду (в среднем на 12 %). Линейная часть в этом случае отвечает за 90 % от величины отклика. Отклик носит глобальный характер с характерным временем формирования примерно 30 суток. Приближенный оператор достаточно хорошо воспроизводит пространственную структуру отклика (с точностью в 67 %) и несколько завышает его амплитуду (в среднем на 20 %).

Таблица 4. Отклик модели на протяженное по вертикали воздействие в средних широтах

Поле	Корреляция	Отношение норм	Нелинейность
$\psi_{336}$	0.67	1.06	0.11
$\psi_{811}$	0.60	1.12	0.12
$T_{336}$	0.85	1.42	0.12
$T_{811}$	0.55	0.94	0.12

В качестве иллюстрации работы метода на рис. 18. приведены результаты экспериментов по воспроизведению линейной части откликов модели на протяженный по вертикали экваториальный термический источник (на рисунке они показаны в левом столбце). В правом столбце представлены отклики, полученные с помощью построенного приближенного оператора отклика. Показаны отклики в поле температуры на уровне  $\sigma = 0.926$ . Центры нагревания находятся в точках  $60^\circ$  в.д. и  $150^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $15^\circ$  з.д.

Исходя из приведенных выше результатов, можно утверждать, что приближенный оператор отклика способен с высокой точностью воспроизвести линейные части откликов модели общей циркуляции атмосферы ССМ0 на источники нагревания различной пространственной и вертикальной структуры. Следовательно приближенный оператор отклика системы аппроксимирует ее "настоящий" оператор отклика с высокой точностью, что может быть использовано при решении различных прикладных задач.

### 3.3.2. Построение оператора отклика для модели общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН

Для исследования чувствительности реальной климатической системы необходимо использовать максимально реалистическую модель атмосферы, поскольку в выражение для оператора отклика входят корреляционные коэффициенты с запаздыванием. Следовательно, естественно предположить, что оператор отклика модели будет близок к оператору отклика климатической системы, если, по крайней мере, статистика модели является близкой к статистике реальной атмосферы. Поэтому метод построения оператора отклика был использован не только для модели ССМ0, но и для более сложной и современной модели ИВМ РАН, которая участвовала в международном сравнении моделей по программе АМIP II и показала, что качество воспроизведения ею современного климата в целом соответствует мировому уровню. Обсуждаемые далее результаты были получены для варианта модели [1] с 21 вертикальным уровнем и горизонтальным разрешением  $4^\circ$  по широте и  $5^\circ$  по долготе, размерность фазового пространства для которой  $\approx 300000$ .

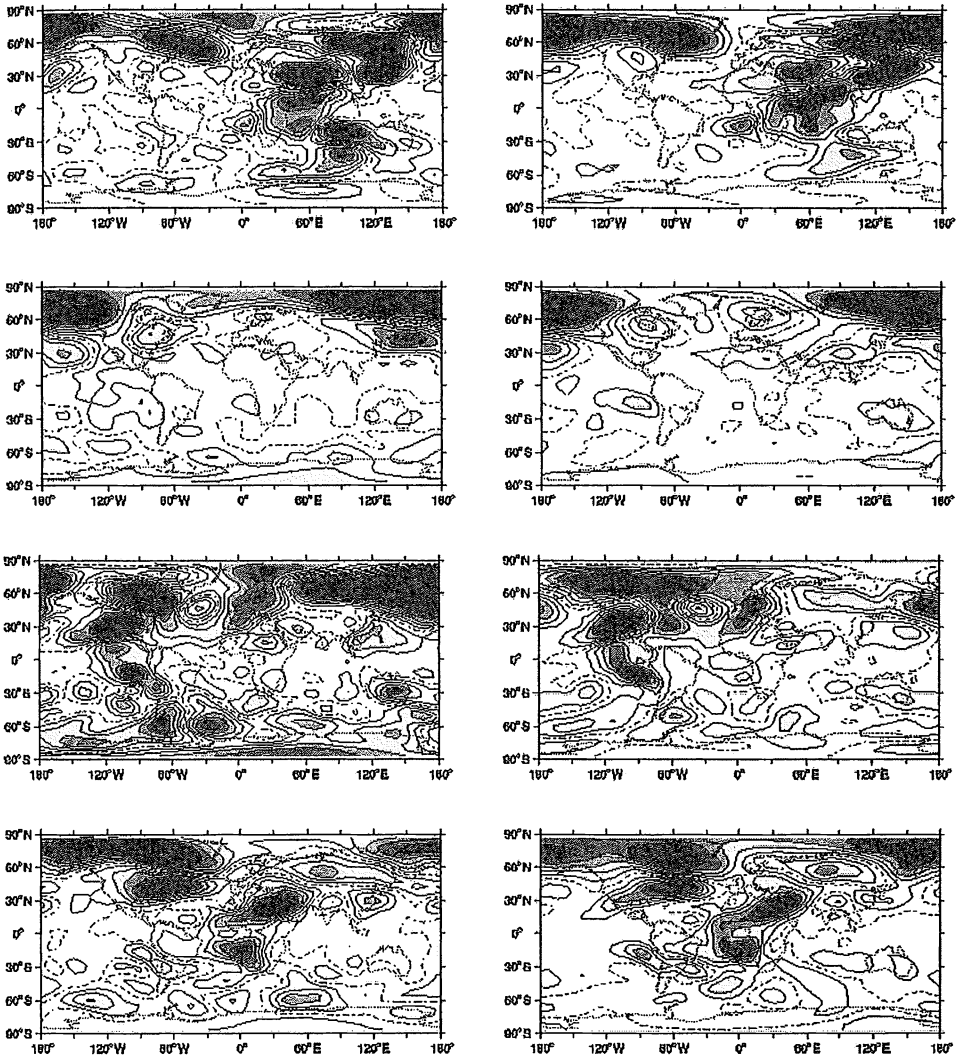


Рис. 18. Линейная часть отклика модели на протяженную по вертикали аномалию температуры на экваторе (слева) и отклик, полученный с помощью флуктуационно-диссипационных соотношений (справа). Показаны отклики в поле температуры (К) на уровне  $\sigma = 0.926$ . Центры нагрева находятся в точках  $60^\circ$  в.д. и  $150^\circ$ ,  $105^\circ$ ,  $15^\circ$  з.д.

Как следует из результатов работы [72], для обеспечения необходимой точности при вычислении оператора необходимо с большой точностью вычислять ковариационные матрицы системы. Источником ошибок является недостаточная длина ряда данных, т.е. недостаточная статистика о поведении траектории. Из практических требований к точности следует, что длительность временного интервала, на котором рассчитывается траектория системы, должна быть порядка миллиона суток. Для интегрирования рассматриваемой модели общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН на 1 месяц на 1 процессоре рабочей станции требуется примерно 3 часа и, следовательно, использование однопроцессорного режима невозможно. Параллельная версия модели также не дает желаемого ускорения. Более перспективным является использование метода Монте-Карло по начальным условиям.

Действительно, для расчета ковариационной матрицы необходимо вычислить различные средние характеристики. В предположении эргодичности рассматриваемой системы усреднение можно производить как вдоль траектории, так и по равновесному ансамблю состояний. Равновесность означает, что состояния находятся на аттракторе системы. Такой ансамбль можно получить, задав некоторое распределение начальных условий и проинтегрировав затем систему на длительное время. При увеличении числа точек ансамбля вычислительные затраты растут. Наиболее эффективной с вычислительной точки зрения оказалась комбинация двух методов. На первом этапе в однопроцессорном режиме вычисляется достаточно длинная траектория системы. На этой траектории задается набор состояний, в поле скорости каждого состояния вносится возмущение (значение скорости в каждой точке увеличивается на 1 %) и затем строится равновесный ансамбль состояний. Для его формирования оказалось достаточно провести интегрирование системы на 1000 дней. После того как равновесный ансамбль состояний был получен, проводились основные вычисления по схеме, идентичной предварительному расчету. Следует заметить, что для хранения получаемой информации требуется огромная емкость дискового пространства. Поэтому применялась процедура понижения размерности задачи, позволившая значительно уменьшить объем необходимых данных, а также упростить процесс вычисления самого оператора.

При построении приближенного оператора были использованы только поля температуры и двух компонент скорости. Это обусловлено тем, что, по-видимому, остальные физические переменные в значительной степени с ними функционально связаны. Дальнейшее уменьшение размерности задачи было достигнуто путем учета только процессов, обладающих достаточно большой изменчивостью. Затем были вычислены автокорреляционные матрицы и автоковариационные матрицы с запаздыванием, построены трехмерные естественные ортогональные функции и, наконец, приближенный оператор отклика. Все эти вычисления проводились с

использованием стандартных параллельных библиотек линейной алгебры LAPACK.

Для построенного приближенного оператора отклика было вычислено сингулярное разложение и, тем самым, были найдены воздействия, вызывающие наибольшие (в евклидовой норме) изменения среднего состояния системы. На рис. 19 для поверхностей 10, 50, 500 и 1000 гПа в произвольных единицах приведены первые два правых сингулярных вектора (оптимальные воздействия). В левом столбце показан первый правый сингулярный вектор, в правом столбце — второй сингулярный вектор.

Соответствующие левые сингулярные векторы приближенного оператора, очевидно, являются откликами системы на данные аномалии нагревания. Для проверки работоспособности предложенного метода в правую часть уравнений модели были введены термические источники, соответствующие первому и второму правому сингулярному вектору (см. рис. 19). Для каждого воздействия модель была проинтегрирована в течение длительного времени и затем были определены реальные изменения ее среднего состояния. Как и ожидалось, они с хорошей точностью совпали с левыми сингулярными векторами приближенного оператора. Тем самым было показано, что, как и в случае с моделью ССМ0, предлагаемый метод построения оператора отклика обладает хорошей точностью. На рис. 20 справа показан отклик модели на воздействие вдоль первого сингулярного вектора, слева — соответствующий левый сингулярный вектор. В первом ряду приведены отклики в поле приземного давления (в барах), во втором, третьем и четвертом рядах показаны отклики на уровнях 10, 50 и 1000 гПа, соответственно (в градусах Кельвина). Аналогичные результаты для второго сингулярного вектора представлены на рис. 21.

Знание приближенного оператора отклика дает возможность решить ряд физических проблем. Например, можно вычислить воздействие оптимальным образом возбуждающее Арктическую осцилляцию (АО) в модели общей циркуляции (под Арктической осцилляцией понимается первая естественная ортогональная функция приземного давления, показанная на рис. 22). Это воздействие, вычисленное для модели ИВМ РАН, приведено в левом столбце рис. 23. Снова, как и на рис. 18, показаны величины нагревания на уровнях 10, 50, 500 и 1000 гПа, соответственно. Оказывается, что это воздействие практически совпадает по структуре с третьим оптимальным воздействием (соответствующим третьему правому сингулярному вектору приближенного оператора отклика модели). Это означает, что процесс возбуждения АО в системе является важным фактором в определении ее чувствительности. Умножение матрицы приближенного оператора на этот вектор дает приближенную картину пространственной структуры отклика модели на данное воздействие. В правом столбце рис. 23 приведены реальные отклики модели на данный вектор.

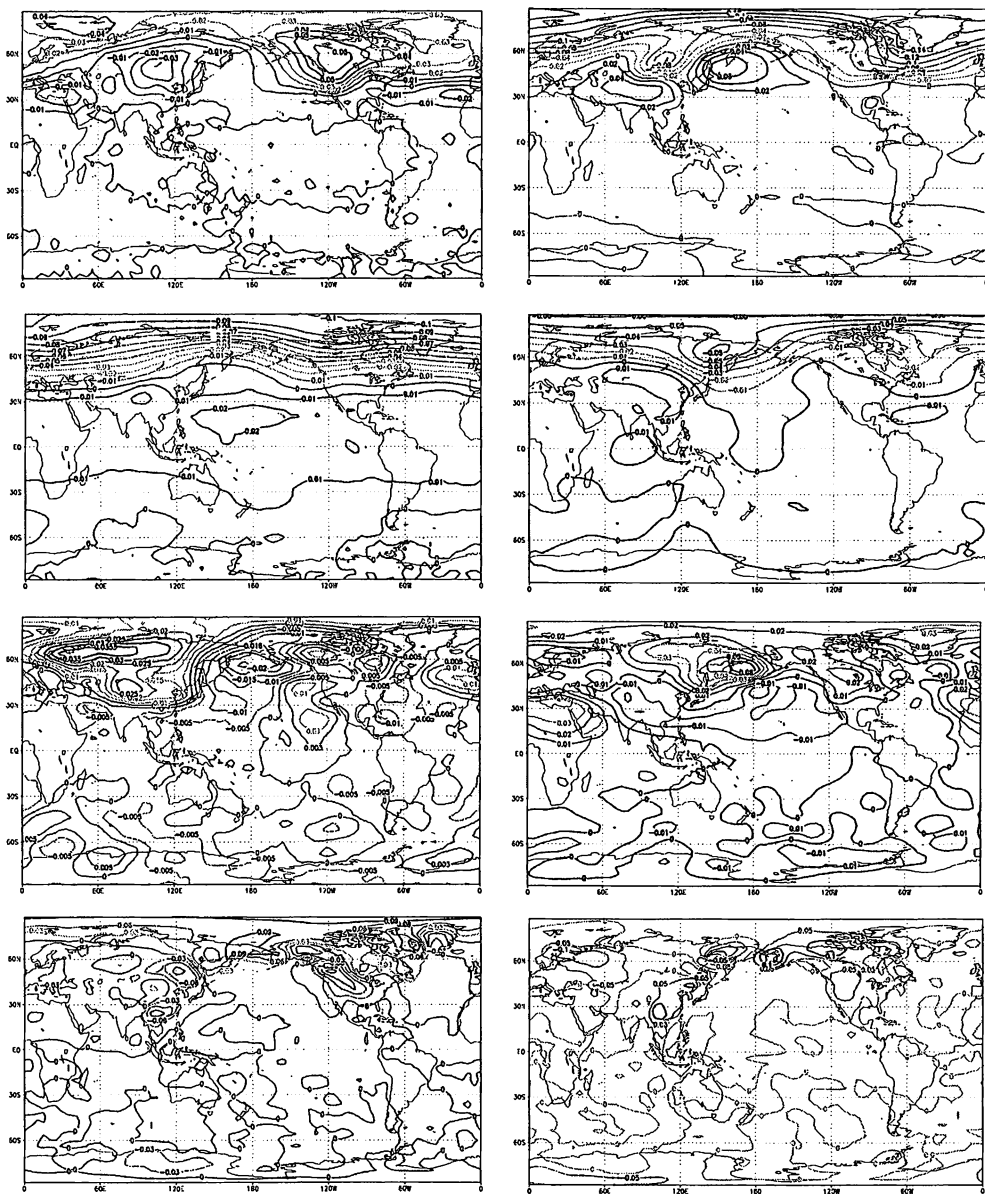


Рис. 19. Правые сингулярные векторы приближенного оператора отклика. Слева представлен первый сингулярный вектор, справа — второй. Показаны компоненты векторов на уровнях (сверху вниз) 10, 50, 500 и 1000 гПа

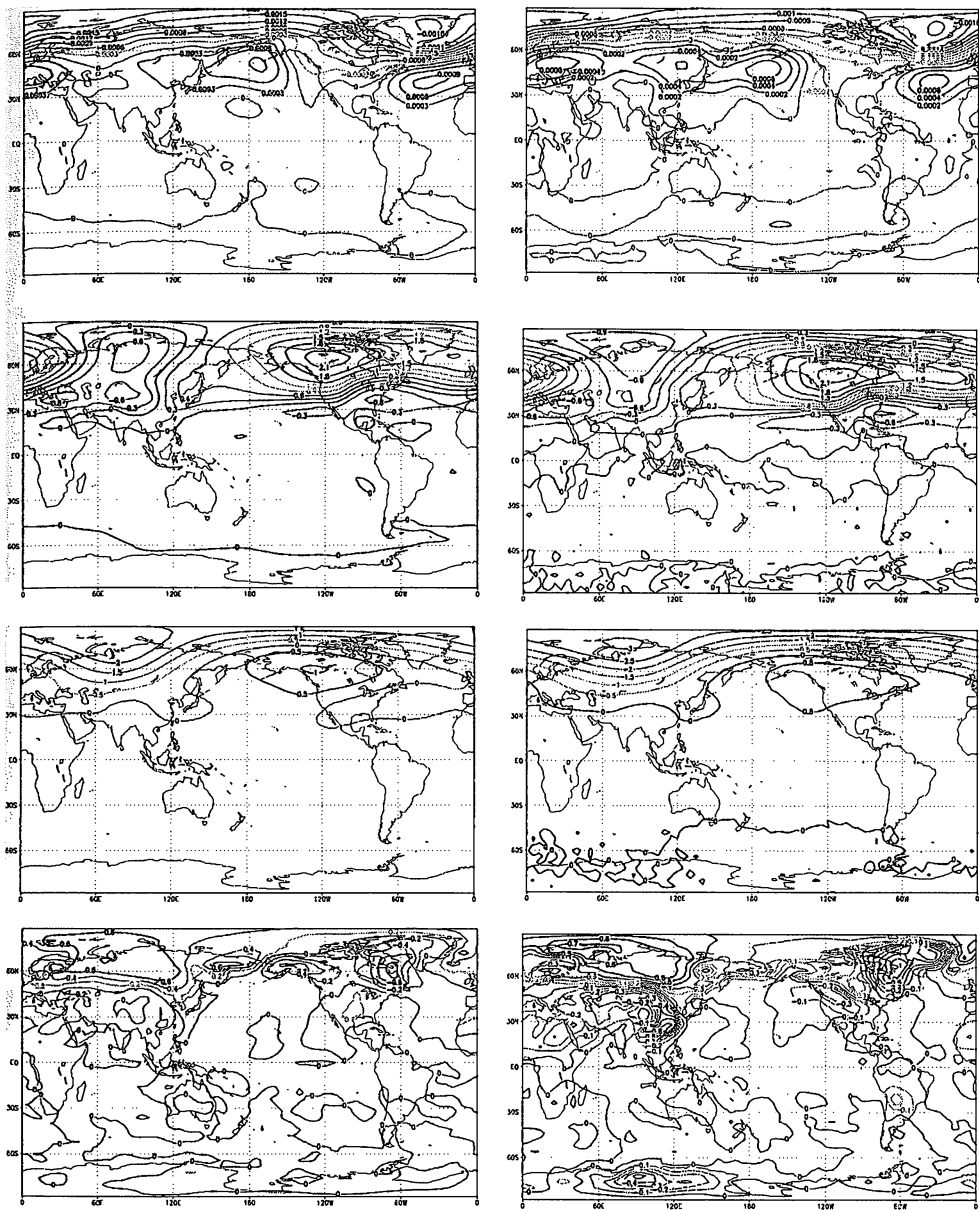


Рис. 20. Отклик модели ИВМ РАН на первый правый сингулярный вектор приближенного оператора отклика (слева). Справа представлен соответствующий левый сингулярный вектор. Показаны отклики в поле приземного давления (вверху) и полях температуры на уровнях (сверху вниз) 10, 50 и 1000 гПа

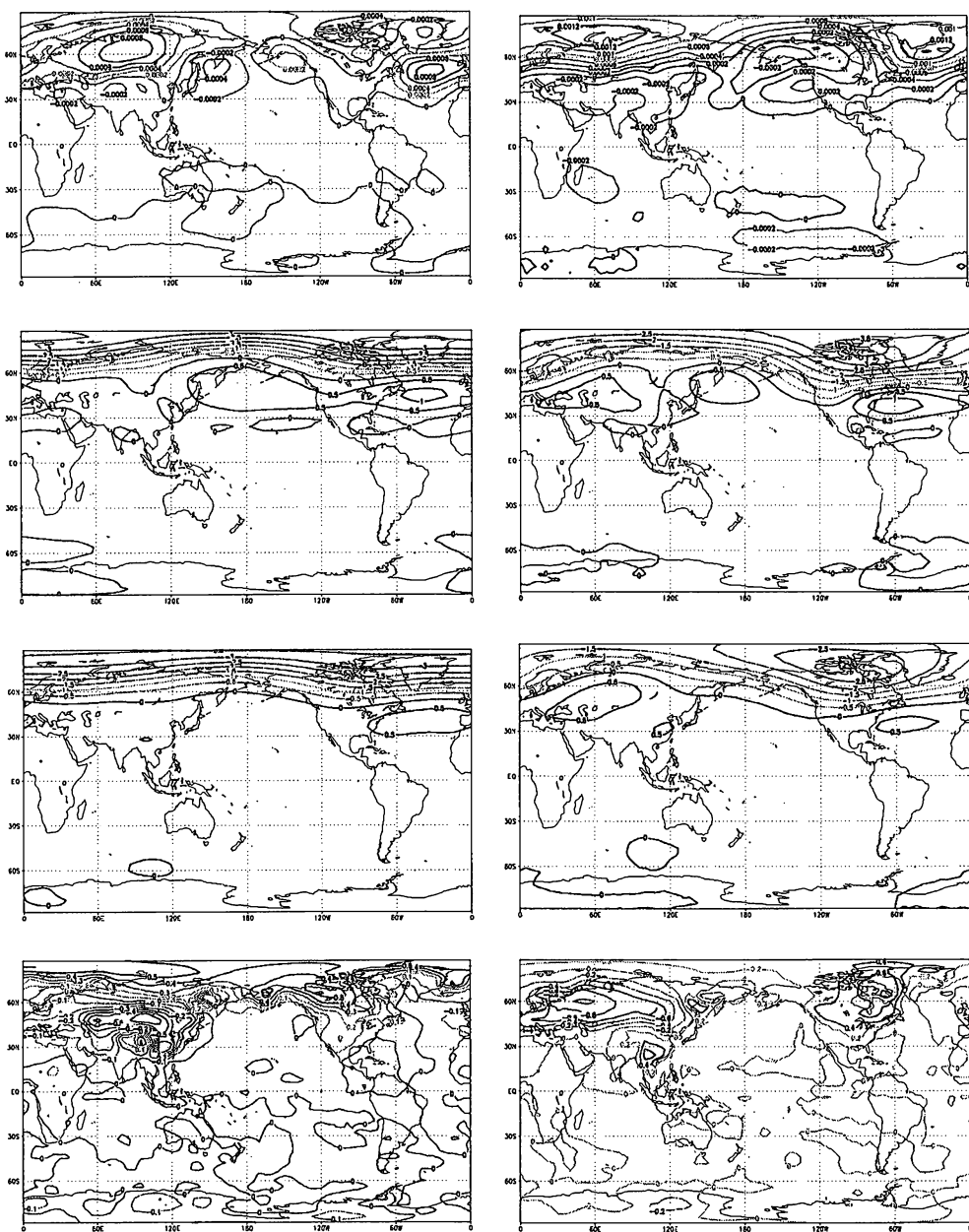


Рис. 21. Отклик модели ИВМ РАН на второй правый сингулярный вектор приближенного оператора отклика (слева). Слева представлен соответствующий левый сингулярный вектор. Показаны отклики в поле приземного давления (вверху) и полях температуры на уровнях (сверху вниз) 10, 50 и 1000 гПа



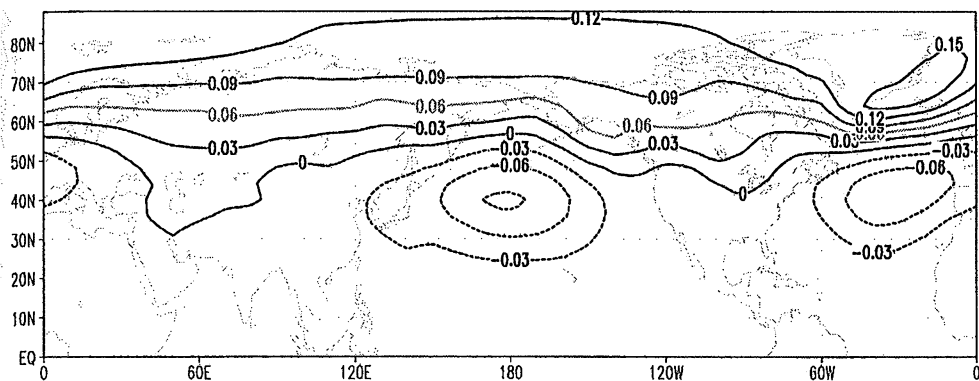


Рис. 22. Арктическая осцилляция (первая ЕОФ приземного давления) в модели ИВМ РАН

### 3.4. Построение оператора отклика по реальным данным

Для построения оператора отклика реальной климатической системы были использованы данные реанализа NCEP/NCAR полей температуры и горизонтальных компонент скорости на 17 стандартных уровнях, а также поля приземного давления, за период с 1948 по 2004 г. с горизонтальным разрешением  $4^\circ$  по долготе и  $5^\circ$  по широте. Полная размерность оператора составила, таким образом, примерно 160000. В данном пространстве была вычислена матрица  $S(0)$  и построены ее собственные функции (ЕОФ). Дальнейшие вычисления проводились в пространстве первых 50 ЕОФ, поскольку количество данных наблюдений мало. Необходимо отметить, что в задаче определения динамического отклика климатической системы на увеличение содержания атмосферного углекислого газа это ограничение не существенно, поскольку как само воздействие, так и отклик системы являются крупномасштабными. С помощью построенного оператора отклика было вычислено воздействие, вызывающее наибольший отклик климатической системы в направлении АО.

Арктическая осцилляция климатической системы (первая ЕОФ приземного давления, вычисленная по данным реанализа NCEP/NCAR) показана на рисунке 24. Хорошо видно, что модель ИВМ РАН воспроизводит пространственную структуру АО климатической системы с высокой точностью (см. рис. 22 и рис. 24). Более того, воздействия, оптимальным образом возбуждающие отклик систем вдоль АО, также оказываются близкими (см. рис. 25). Таким образом, можно сделать вывод, что модель ИВМ РАН адекватно воспроизводит и процесс возбуждения АО. Из рисунка 25 также

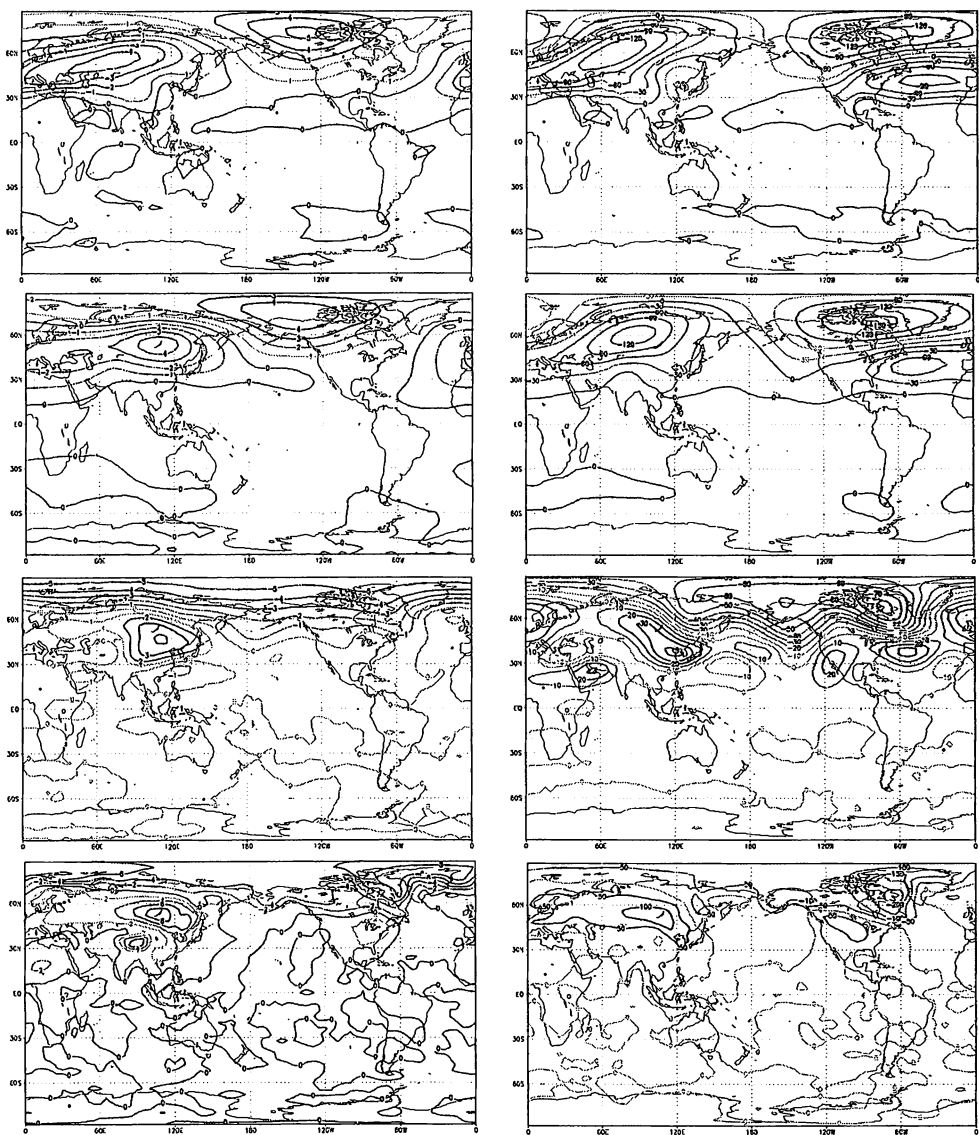


Рис. 23. Вектор, вызывающий наибольшее изменение Арктической осцилляции в модели ИВМ РАН (слева). Показаны значения нагрева на уровнях (сверху вниз) 10, 50, 500 и 1000 гПа. Соответствующие распределения, полученные с помощью приближенного оператора отклика, показаны справа. Приведены отклики в полях температуры на уровнях (сверху вниз) 10, 50, 500 и 1000 гПа

следует, что АО наиболее чувствительна к термическим воздействиям в верхних широтах нижней стратосферы. Это хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования (см., например [5]).

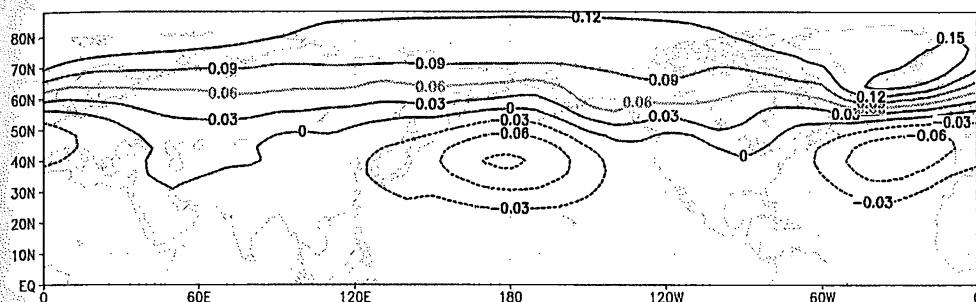


Рис. 24. Арктическая осцилляция (первая ЕОФ приземного давления) реальной климатической системы

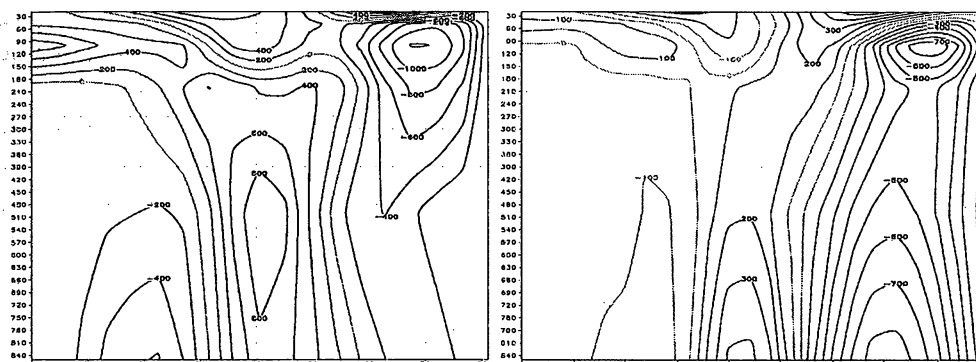


Рис. 25. Термические воздействия (зонально-средненные), оптимальным образом возбуждающие АО. Справа — полученные с помощью приближенного оператора отклика, построенного по данным NCEP/NCAR, слева — вычисленные по данным моделирования

#### 4. Моделирование изменений климата, обусловленных изменениями атмосферной концентрации малых газовых составляющих

В разд. 2 представлены результаты контрольного эксперимента по воспроизведению характеристик современного климата, в котором концентрация углекислого газа  $\text{CO}_2$  была задана неизменной и равной наблюдавшей-

ся в конце XX столетия. В разделе 4.1 основное внимание уделено анализу результатов эксперимента, в котором концентрация  $\text{CO}_2$  увеличивалась на 1 % в год от современного значения в начальный момент, что примерно вдвое превышает наблюдаемый рост углекислого газа. Условия обоих численных экспериментов полностью аналогичны тем, что использовались в международном проекте СМIP [62]. Раздел 4.2 посвящен обсуждению некоторых экстремальных погодных ситуаций на территории России в условиях современного климата и при удвоении содержания углекислого газа.

#### **4.1. Отклик климатической модели на увеличение содержания углекислого газа**

По условиям программы СМIP, с каждой моделью было проведено два эксперимента. В первом (контрольном) эксперименте [15] воспроизводился современный климат и с этой целью задавался наблюдаемый годовой ход приходящей к верхней границе атмосферы солнечной радиации. Концентрация всех радиационно активных газов была фиксирована и равна наблюдавшейся в конце XX столетия. Во втором эксперименте [6] моделировалось глобальное потепление, для чего задавалось увеличение концентрации  $\text{CO}_2$  на 1 % в год от современного значения в начале эксперимента. Это примерно в 2 раза больше, чем наблюдаемая скорость увеличения содержания  $\text{CO}_2$ . Продолжительность каждого численного эксперимента составляла 80 лет. В эксперименте, моделирующем глобальное потепление, удвоение концентрации  $\text{CO}_2$  происходит примерно к 70-му году расчета. Под откликом модели на увеличение  $\text{CO}_2$ , так же как и в работе [62], всюду, если не оговорено особо, подразумевается разность данных эксперимента с увеличением  $\text{CO}_2$  и результатов расчетов в контрольном эксперименте за последние двадцать лет модельного времени (годы 61–80). Средним откликом будет называться отклик, осредненный по результатам всех моделей, участвовавших в программе СМIP2, и представленный в публикации [62].

При анализе отклика климатической системы целесообразно [20] использовать понятия "динамический" отклик и отклик "радиационный". Показано [6], что в суммарном отклике системы на изменение концентрации  $\text{CO}_2$  главную роль играет радиационный отклик. Это проявляется в том, что чувствительность климатической модели к увеличению содержания атмосферного  $\text{CO}_2$  определяется, в первую очередь, количеством тепла, расходуемым на прогрев океана, а также тем, насколько меняется радиационный баланс Земли в результате изменения облачности при изменении климата, то есть изменением радиационно-облачного форсинга [123]. Вместе с тем необходимо адекватно воспроизвести и динамический отклик, главной компонентой которого является Арктическая осцилляция (см. раздел 3).

Средняя температура приповерхностного воздуха в контрольном эксперименте составляет 12.6 °С, что на 1.4 градуса ниже, чем температура по данным наблюдений за период 1961–1990 гг. [78]. Среднеквадратичное отклонение (СКО) среднегодовой глобально осредненной температуры поверхности в модели равно 0.09 К, а отклик модели на увеличение CO<sub>2</sub> составляет 0.99 К. Это меньше, чем средний модельный отклик в температуре приповерхностного воздуха, который равен 1.7 К. В целом по моделям СМIP повышение среднеглобальной температуры приповерхностного воздуха находится в диапазоне значений от 0.75 К до 3.77 К.

Установлено [7], что модели, предсказывающие большую величину глобального потепления, характеризуются, как правило, увеличением коротковолнового радиационного баланса на подстилающей поверхности. Почти все рассмотренные в [7] модели в местах образования облачности нижнего яруса завышают поток тепла в океан и, вероятно, занижают само количество нижней облачности. Связано это, по-видимому, с тем, что подынверсионная облачность нижнего яруса плохо воспроизводится моделями, в которых облачность зависит только от относительной влажности (как правило, из-за грубого разрешения по вертикали). Для адекватного воспроизведения нижней облачности нужен специальный учет ее зависимости от вертикальной температурной стратификации. Связано это с тем, что при увеличении содержания CO<sub>2</sub> тропосфера нагревается сильнее, чем поверхность Земли [62]. В результате вблизи поверхности возрастает частота возникновения инверсий и, следовательно, чаще формируется подынверсионная облачность. Это приводит к уменьшению приходящей коротковолновой радиации и ослаблению величины глобального потепления. В свою очередь, правильное воспроизведение подынверсионной облачности является ключевым условием для воспроизведения правильной чувствительности модели к увеличению содержания углекислого газа.

#### 4.1.1. Отклик в атмосфере

Отклик модели для зонально осредненных температуры и зональной скорости ветра в атмосфере представлен на рис. 26. В стратосфере происходит выхолаживание, максимальное на уровне 10 гПа и достигающее там величины 5–7 К. В умеренных широтах в стратосфере происходит также усиление западного ветра до 2–2.5 м·с<sup>-1</sup>. Это неплохо согласуется со средним откликом для всех моделей, где похолодание в стратосфере достигает 5 К, а усиление скорости западного ветра в умеренных широтах стратосферы достигает 2–3 м·с<sup>-1</sup>. В тропосфере происходит нагревание, максимальное в тропиках на высотах 200–500 гПа, а также в высоких широтах Северного полушария на высоте 500–1000 гПа и достигающее там 1.5 К. Статистически значимое усиление западного ветра в умеренных широтах обоих

полушарий происходит также и в тропосфере. Пространственная структура модельного отклика здесь близка к структуре отклика, усредненного по всем моделям. Однако величина потепления в модели ИВМ примерно в 1.5 раза меньше, чем в среднем по всем моделям [62].

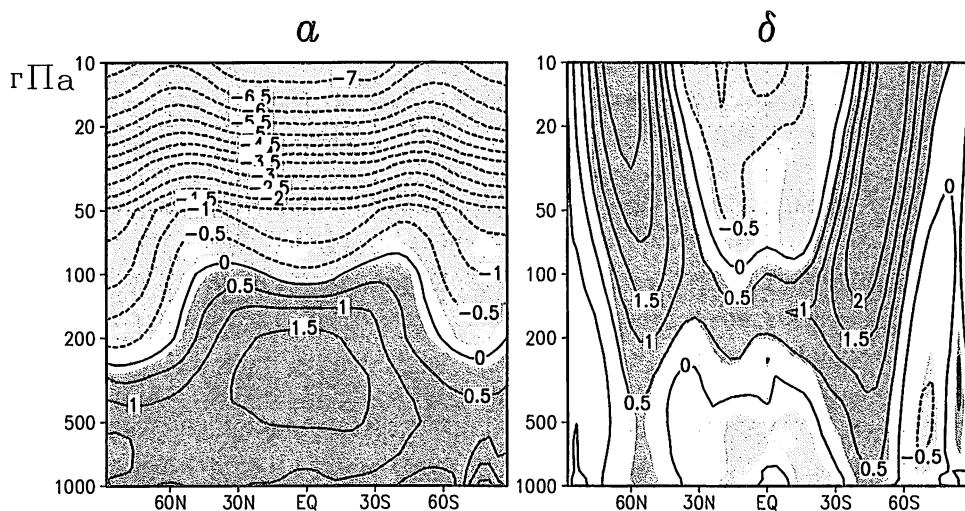


Рис. 26. Среднегодовой отклик совместной модели на увеличение  $\text{CO}_2$  для зонально-осредненной температуры (а) и зональной скорости ветра (б). Изолинии проведены через 0.5 К для температуры и через 0.5  $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$  для скорости ветра. Серым показаны области статистической значимости отклика с вероятностью 95 %

Пространственные распределения среднегодового отклика модели для температуры поверхности, давления на уровне моря и осадков приведены на рис. 27. В модели потепление максимально в центре Евразии (рис. 27а) и достигает там 3.5 К, а также в Антарктиде (до 2.5 К). На большей части остальных континентов потепление составляет 1–1.5 К, а на большей части океанов 0.5–1 К. В Южном океане, а также на севере Атлантики и Тихого океана, есть области, где в модели величина потепления меньше 0.5 К. В Евразии отклик модели в температуре близок по величине к среднему по всем моделям, а в остальных районах он меньше среднего примерно в 2 раза. По усредненным данным всех моделей минимальная величина потепления (около 1 К) имеет место в тех же местах, где потепление минимально, и в модели ИВМ РАН: в Южном океане и на севере Атлантики.

Давление при увеличении  $\text{CO}_2$  в модели ИВМ уменьшается в высоких широтах обоих полушарий на 1–2 гПа и несколько возрастает в субтропиках обоих полушарий (рис. 27б). Это неплохо соответствует отклику, усредненному по всем моделям.

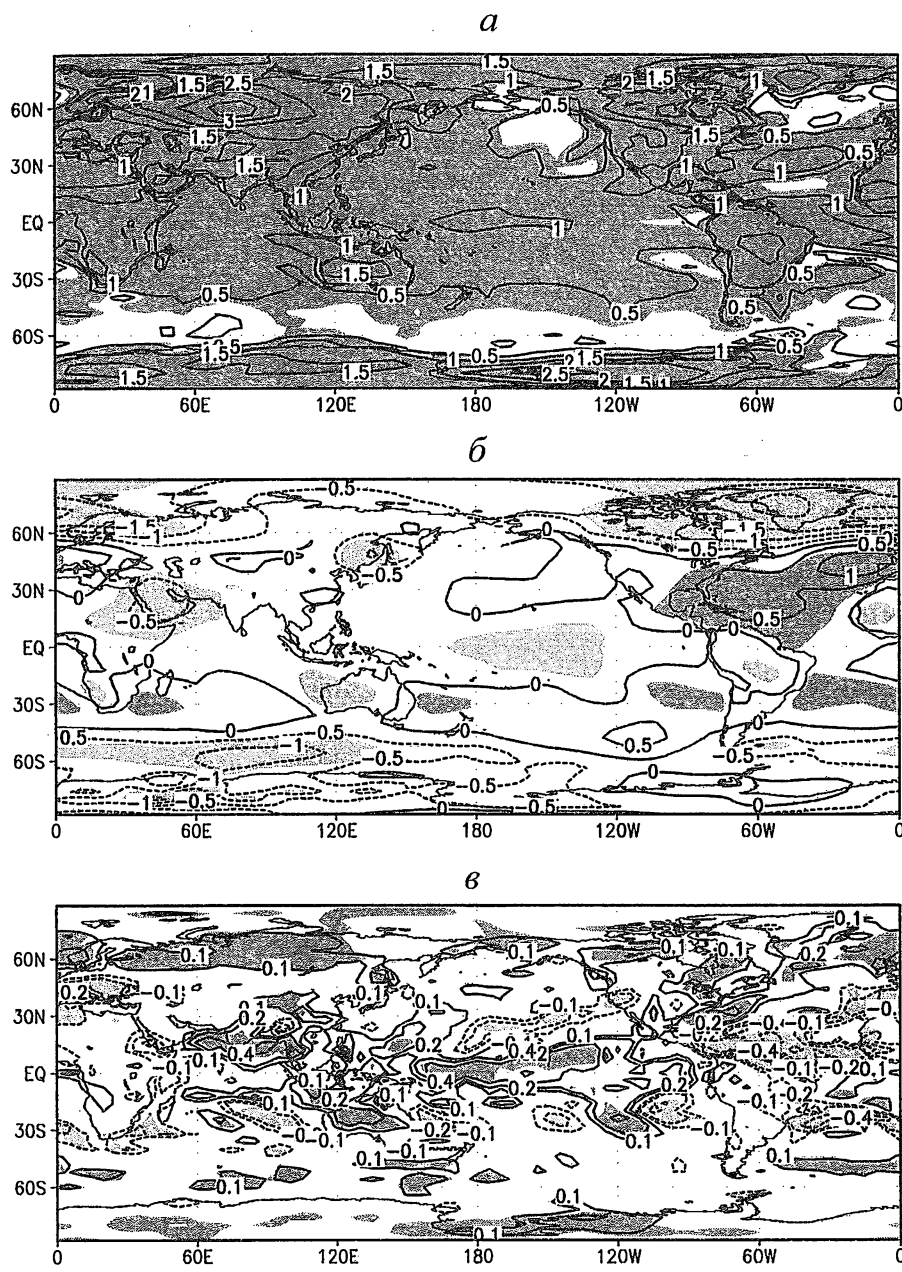


Рис. 27. Среднегодовой отклик для температуры поверхности (а), давления на уровне моря (б) и осадков (в). Изолинии проведены через 0.5 К для температуры, через 0.5 гПа для давления. Для осадков изолинии соответствуют значениям -0.8, -0.4, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.4, 0.8 мм·сут<sup>-1</sup>. Серым показаны области статистической значимости отклика с вероятностью 95 %

Глобально осредненные среднегодовые осадки в контрольном эксперименте составляют величину  $2.76 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ , что близко к среднему по всем моделям значению  $2.83 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$  и оценкам по данным наблюдений [126]  $2.66\text{--}2.82 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ . Среднеквадратичное отклонение среднегодовых осадков в контрольном эксперименте составляет около  $0.01 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ , а отклик модели на увеличение  $\text{CO}_2$  достигает значения  $0.03 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ . Для моделей СМIP величина этого отклика изменяется от  $0.03$  до  $0.15 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ . Таким образом, и для глобально осредненных осадков отклик модели ИВМ РАН оказывается одним из наименьших среди всех СМIP-моделей.

Рассматривая пространственное распределение отклика осадков в модели (рис. 27в), можно отметить статистически значимое увеличение осадков в центре Тихого океана, в районе летнего азиатского муссона, в северной половине Евразии и Северной Америки, а также в некоторых районах средних и высоких широт Южного полушария. Статистически значимое уменьшение осадков произошло на юге Европы, в тропической Атлантике, а также в некоторых субтропических районах обоих полушарий. География уменьшения и увеличения осадков в модели ИВМ хорошо согласуется с откликом, усредненным по всем моделям. В тропиках и субтропиках отклик модели ИВМ имеет более пестрый характер, чем отклик, усредненный по всем моделям СМIP [62], поскольку усреднение по моделям приводит к дополнительному сглаживанию.

Большая часть среднегодового потепления в Евразии вызвана потеплением в холодную половину года. Вклад динамики в потепление на континентах Северного полушария в холодное полугодие достигает на севере Европы и западе Сибири  $1\text{--}2 \text{ К}$ , что составляет  $20\text{--}50 \%$  от общего потепления. В остальных районах вклад изменения динамики в потепление близок к нулю или даже слабоотрицателен. В давлении в Северной полушарии отклик в этот период также больше по величине, чем среднегодовой, и значительная часть его обусловлена Арктической осцилляцией [117]. Большая часть увеличения осадков на севере Атлантики и Европы, а также большая часть уменьшения осадков на юге Европы, обусловлена изменениями динамики атмосферы.

#### 4.1.2. Отклик в океане

Температура поверхности океана является одним из главных факторов, формирующих отклик совместной модели на увеличение содержания  $\text{CO}_2$ . Поскольку парниковый эффект в возмущенной совместной системе проявляется, в первую очередь, в перераспределении радиационных потоков, то отклик в ТПО должен быть связан с откликом в радиационном балансе поверхности океана.



При рассмотрении связи между откликом ТПО и откликами для составляющих потоков импульса и тепла на поверхности океана, полагается, что потоки в океан имеют положительные значения, а из океана — отрицательные. Приведенные в табл. 5 коэффициенты пространственной корреляции показывают, что сильные связи имеются между откликом ТПО и величиной отклика в поверхностном напряжении трения ветра ( $\tau_w$ ), откликами в потоке скрытого тепла (LH) и балансах длинноволновой (LW) и коротковолновой (SW) радиации, а также их суммы (LW+SW). Это справедливо как для глобального океана, так и для его основных акваторий — Тихого, Атлантического и Индийского океанов, к которым отнесены и соответственные секторы Южного океана. Коэффициенты корреляции и средние значения откликов в потоках рассчитывались для полосы  $55^\circ\text{S}$ – $55^\circ\text{N}$ . Такой выбор обусловлен тем, что здесь круглый год практически отсутствует сплошной лед, значительно изменяющий теплообмен между атмосферой и океаном. Следует отметить, что все корреляции значимы на уровне 99 %.

Таблица 5. Коэффициенты пространственной (в полосе  $55^\circ\text{S}$ – $55^\circ\text{N}$ ) корреляции между откликом в ТПО и откликами для составляющих потоков на поверхности океана ( $r$ ) и их средние по пространству величины ( $M$ ). Значения  $r$  и  $M$  приводятся для глобального (ГО), Тихого (ТО), Атлантического (АО) и Индийского (ИО) океанов. Приведены значения для откликов следующих составляющих потоков на поверхности океана:  $\tau_w$  — поверхностного напряжения трения ветра; НВ — баланса тепла; LH — скрытого тепла; SH — явного тепла; LW и SW — балансов длинноволновой и коротковолновой радиации и их суммы LW+SW. Средние величины для составляющих потоков тепла приведены в  $\text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ , а для напряжения трения — в  $\text{Н}\cdot\text{м}^{-2}$

	$\tau_w$		НВ		LH		SH	
	$r$	$M \times 10^3$	$r$	$M$	$r$	$M$	$r$	$M$
ГО	-0.41	4.0	-0.14	0.94	-0.54	-0.91	-0.19	0.96
ТО	-0.43	3.2	-0.21	0.92	-0.50	-0.86	-0.16	1.09
АО	-0.31	5.9	-0.04	0.78	-0.60	-0.18	-0.16	0.75
ИО	-0.64	4.0	-0.24	1.14	-0.51	-1.91	-0.43	0.85

	LW		SW		LW+SW	
	$r$	$M$	$r$	$M$	$r$	$M$
ГО	-0.43	3.35	0.48	-2.46	0.45	0.89
ТО	-0.25	3.38	0.31	-2.69	0.30	0.69
АО	-0.61	3.70	0.63	-3.49	0.57	0.21
ИО	-0.09	2.84	0.41	-0.64	0.50	2.20

Для всех регионов Мирового океана и, следовательно, для глобального океана в целом характерно увеличение по модулю ветрового воздействия на океан при увеличении концентрации  $\text{CO}_2$ . Значительные отрицательные

величины корреляции для  $\tau_W$  свидетельствуют о том, что отклик динамического локального воздействия атмосферы в значительной мере участвует в формировании отклика в ТПО. Причем это участие может быть как за счет ветрового перемешивания, так и за счет модуляции потоков скрытого и явного (SH) тепла. Ветровое перемешивание понижает ТПО за счет вовлечения нижележащих, более холодных, слоев океана. Поток скрытого тепла практически всегда способствует теплотерям океана. Поэтому рост его величины за счет усиления ветра также уменьшает величину ТПО.

Наибольшая связь, с корреляцией  $-0.64$ , для  $\tau_W$  наблюдается в Индийском океане. По-видимому, это связано с тем, что наиболее сильно ветровое воздействие на структуру течений проявляется именно в Индийском океане в связи с изменчивостью, в частности, муссонной циркуляции. Поэтому повышение корреляции в этом регионе может быть обусловлено нелокальным ветровым воздействием через адвекцию посредством изменения структуры поверхностных течений. В Атлантике, несмотря на то, что средняя величина изменения  $\tau_W$  ( $0.0059 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-2}$ ) выше, чем в остальных регионах, корреляция оказывается наименьшей.

Во всех основных акваториях Мирового океана в полосе  $55^\circ\text{S}$ – $55^\circ\text{N}$  изменение среднего по пространству притока тепла к океану при увеличении концентрации  $\text{CO}_2$  осуществляется за счет длинноволновой радиации и потока явного тепла, что вполне объясняется парниковым эффектом: происходит задержка длинноволновой радиации в тропосфере и рост ее температуры. Средние по пространству теплотерии в выделенных регионах океана при увеличении концентрации  $\text{CO}_2$  формируются за счет изменений потока скрытого тепла и баланса коротковолновой радиации. В полосе  $55^\circ\text{S}$ – $55^\circ\text{N}$  глобального океана средний за последние 20 лет эксперимента приток тепла в океан, обусловленный увеличением концентрации  $\text{CO}_2$ , составляет  $0.94 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ .

Учет знаков и величин корреляций позволяет сделать предположение, что формирование пространственной структуры отклика в ТПО осуществляется в основном за счет изменения суммарного радиационного баланса. При этом сам этот баланс зависит от ТПО, так как формирование облачности над океаном, определяющей пространственную структуру радиационного баланса, в свою очередь зависит от ТПО.

На рис. 28а показаны пространственные распределения откликов в ТПО (с помощью градаций серого цвета) и в радиационном балансе поверхности океана (с помощью изолиний). Как уже было показано выше, среднеглобальная ТПО увеличилась (см. рис. 27). Однако это увеличение, обусловленное парниковым эффектом, неоднородно по акватории Мирового океана (рис. 28а). Более того, в отдельных областях отклик в ТПО имеет отрицательные значения. Из рис. 28а видно, что области больших положительных значений отклика для ТПО связаны с положительными значениями откли-

ка для радиационного баланса. Наоборот, области с меньшими значениями отклика для ТПО привязаны к областям с отрицательными значениями радиационного отклика. Эта связь проявляется в довольно сильной пространственной корреляции между этими откликами, составляющей величину 0.45 для полосы  $55^{\circ}\text{S}$ – $55^{\circ}\text{N}$  акватории Мирового океана.

Отрицательная корреляция между откликом в ТПО и откликом в LW объясняется тем, что в областях малых значений температурного отклика наблюдаются большие положительные значения отклика в LW. Последние обусловлены высокой облачностью в этих районах, которая, в свою очередь, ослабляет проникновение коротковолновой радиации к поверхности океана. Поэтому в областях малого отклика ТПО наблюдаются большие отрицательные отклики в SW. Отрицательные значения отклика в SW превосходят по величине положительные значения отклика в LW в этих регионах, что обуславливает большую пространственную корреляцию между откликами в ТПО и LW+SW.

Из рис. 28а видно, что имеется несколько регионов со значительным отрицательным откликом радиационного баланса поверхности океана. Три из них расположены в Тихом океане и привязаны к Американскому побережью, два находятся в тропиках Южного и Северного полушарий и один — в средних широтах Северного полушария. Еще три области расположены в Атлантическом океане, из которых две находятся в тропиках Южного и Северного полушарий и одна — в средних широтах Северного. Следует отметить, что эти области захватывают всю ширину Атлантики.

Сформированная картина пространственного отклика в ТПО оказывает существенное влияние на формирование отклика для скрытого тепла, что проявляется в большой отрицательной корреляции для LH. Через поток скрытого тепла океан отдает тепло, накопленное за счет изменения радиационного баланса, в атмосферу. Атмосфера также нагревает океан за счет изменения потока явного тепла. Однако последнее уже не столь сильно привязано к пространственной структуре отклика в ТПО, что проявляется в малых значениях корреляций для SH (см. табл. 5). Процессы потери тепла за счет LH и его приобретения за счет SH, в среднем по океанам, почти компенсируют друг друга (табл. 5). Поэтому главным фактором роста среднеглобальной ТПО при увеличении концентрации  $\text{CO}_2$  оказывается изменение радиационного баланса поверхности океана.

Поскольку соленость поверхности океана сильно зависит от баланса пресной воды (осадки минус испарение) на поверхности океана, то их отклики должны быть сильно связаны. Это хорошо проявляется на рис. 28б. Из этого рисунка видно, что отрицательные значения отклика для солености привязаны к областям больших значений отклика для потока пресной воды в океан, где осадки превышают испарение и происходит распреснение поверхностных вод. Наоборот, области положительных отклонений солено-

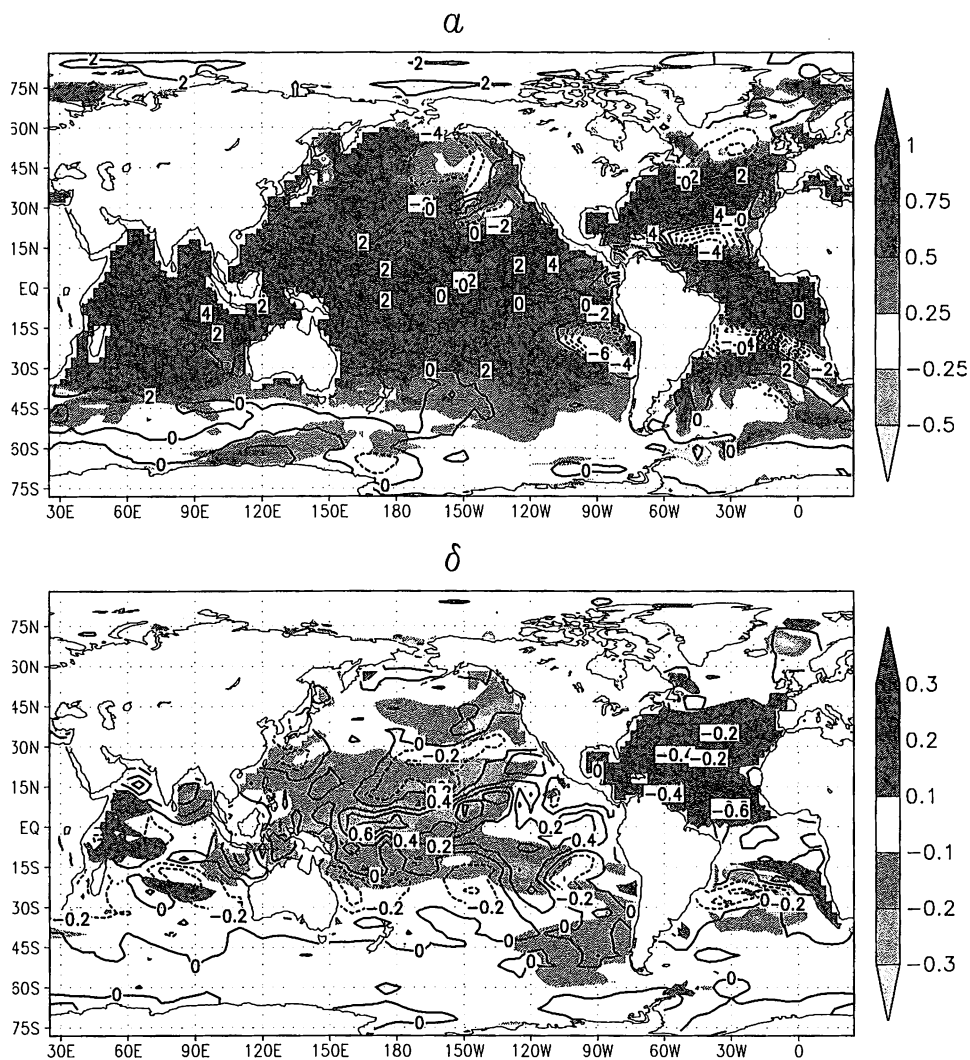


Рис. 28. а – Пространственные распределения откликов в ТПО ( $^{\circ}\text{C}$ , градации серого цвета) и в радиационном балансе на поверхности океана (изолинии с шагом  $2 \text{ Вт}\cdot\text{м}^{-2}$ ); б – Пространственные распределения откликов в солености ( $\text{‰}$ , градации серого цвета) и в потоке пресной воды (осадки минус испарение) на поверхности океана (изолинии с шагом  $0.2 \text{ мм}\cdot\text{сут}^{-1}$ ). Темная штриховка и непрерывные изолинии соответствуют положительным областям, светлая штриховка и прерывистые изолинии – отрицательным

сти связаны с областями повышенного испарения. Эта связь проявляется в большой пространственной корреляции между пространственными распределениями откликов для солености и потока пресной воды на поверхности океана, которая достигает величины  $-0.52$  для полосы  $55^{\circ}\text{S}-55^{\circ}\text{N}$  акватории Мирового океана.

Следует отметить, что если в Тихом океане наблюдается распреснение, то в Атлантическом океане в основном имеет место осолонение поверхностных вод. Это вполне соответствует пространственной структуре отклика в потоке пресной воды на поверхности океана, обусловленного увеличением концентрации  $\text{CO}_2$ . Такой характер изменения солености соответствует также и пространственному распределению отклика осадков в модели (рис. 27), где статистически значимое увеличение осадков наблюдается в Тихом океане, а уменьшение — в тропической и субтропической Атлантике.

#### **4.1.3. Чувствительность модели общей циркуляции атмосферы к изменению содержания парниковых газов**

Целесообразно сравнить чувствительность совместной климатической модели и чувствительность автономной модели общей циркуляции атмосферы. С рассмотренной в разделе 2 версией модели ИВМ РАН был проведен численный эксперимент, в котором модель аналогично контрольному эксперименту (заданы пространственно-временные распределения температуры поверхности океана (ТПО) и границ морского льда) интегрировалась на 17 лет, но с удвоенным содержанием  $\text{CO}_2$ . На рис. 29 изображен среднегодовой отклик этой модели на удвоение  $\text{CO}_2$  для зонально осредненной температуры, скорости зонального ветра, а также температуры вблизи поверхности Земли. Характерное время приспособления атмосферы к внешнему воздействию составляет не более нескольких месяцев, так что отклик можно считать установившимся. В стратосфере из-за увеличения длинноволнового выхолаживания происходит понижение температуры до 7 градусов, практически совпадающее с тем, что происходит при удвоении содержания  $\text{CO}_2$  в совместной модели атмосферы и океана (см. выше). В то же время повышение зонально осредненной температуры в тропосфере при фиксированной ТПО выражено гораздо слабее и составляет всего 0.2–0.5 градуса. У поверхности потепление оказывается максимальным на континентах в умеренных и высоких широтах, достигая там 0.5–1.0 градуса. Неравномерность охлаждения стратосферы создает небольшие изменения в скорости зонального ветра, которые в северном полушарии близки к Арктической осцилляции, а в южном — к аналогичной Антарктической осцилляции. Величины изменений скорости ветра не превышают 1–2 м/с.

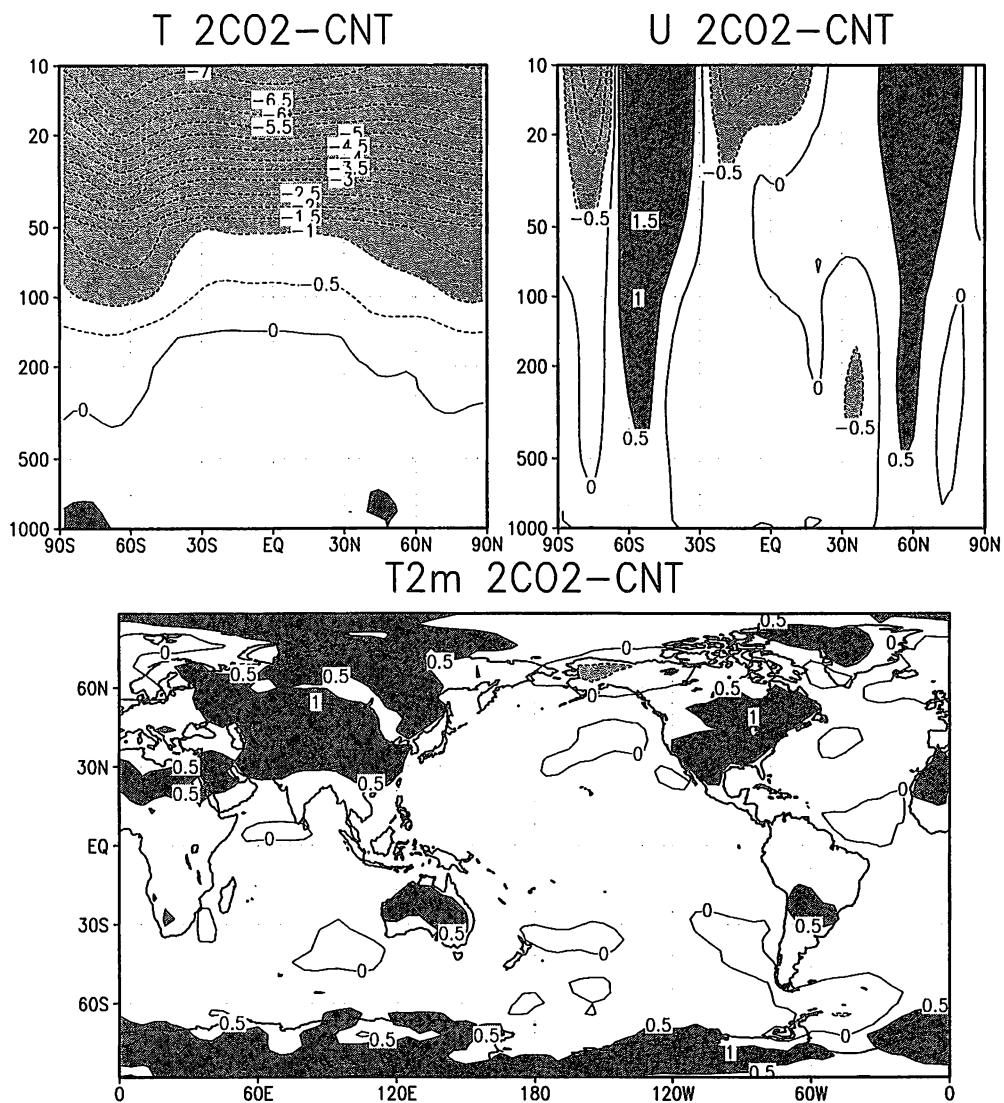


Рис. 29. Среднегодовой отклик зонально осредненной температуры, К (вверху слева), скорости зонального ветра, м/с (вверху справа) и температуры приземного воздуха, К (внизу) на удвоение содержания CO<sub>2</sub> в модели общей циркуляции атмосферы

На рис. 30 представлен глобально осредненный отклик температуры на увеличение содержания углекислого газа на 5 %, на уменьшение содержания озона на 5 % и их сумма. Указанные изменения близки к наблюдаемым

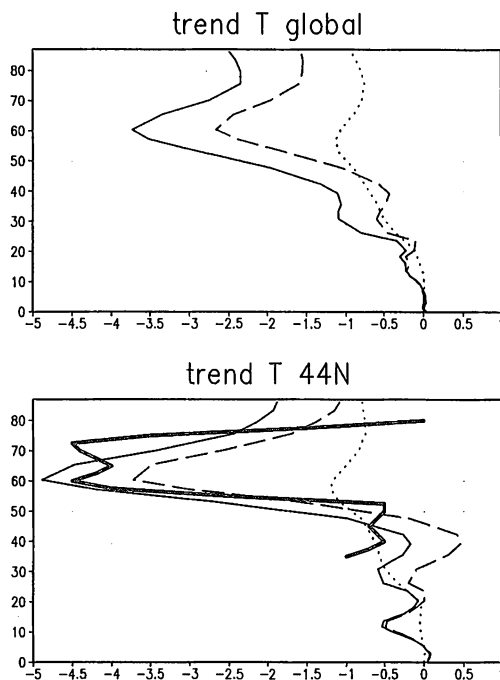


Рис. 30. Вверху — среднегодовой глобально осредненный отклик температуры, К, на 5 % уменьшение озона (штриховая линия), на 5 % увеличение содержания углекислого газа (точечная линия) и на их сумму (сплошная линия). Внизу — те же величины на 44° с.ш., а также данные наблюдений [82] (жирная линия)

трендам этих величин за 10 лет. Соответствующие расчеты были проведены по результатам численных экспериментов с 39-уровневой версией атмосферной модели, в которой верхняя граница расчетной области располагается на высоте около 90 км [121]. Максимальное похолодание происходит в нижней мезосфере. В стратосфере вклады изменения содержания озона и углекислого газа в похолодание примерно равны, а в нижней мезосфере вклад уменьшения озона в 2–2.5 раза превосходит вклад увеличения содержания  $\text{CO}_2$ . По данным наблюдений [82], проводившихся на 44° с.ш., похолодание также максимально в нижней мезосфере и достигает там 4 градусов за 10 лет. Данные модели неплохо согласуются с наблюдениями, так что наблюдаемый тренд температуры в стратосфере и нижней мезосфере в основном может быть объяснен изменением содержания озона и углекислого газа.

## 4.2. Экстремальные климатические проявления на территории России для современного климата и при удвоении содержания углекислого газа

При исследовании климата и его изменений особый интерес представляют экстремальные климатические ситуации, которые часто оказывают наибольшее отрицательное влияние на природную среду и на экономическую деятельность и здоровье человека в отдельных регионах. В связи с этим при моделировании глобального потепления, связанного с увеличением содержания  $\text{CO}_2$ , наряду с изменением средних климатических характеристик необходимо рассматривать экстремальные климатические ситуации, связанные с аномалиями температуры и осадков в умеренных и высоких широтах Евразии. Ниже эта проблема рассматривается с упором на особенности их проявления на территории России.

### 4.2.1. Методология

Для ее исследования была использована одна из версий климатической модели ИВМ РАН, атмосферная часть которой имеет разрешение  $2.5^\circ$  по долготе,  $2^\circ$  по широте и 21 уровень по вертикали от поверхности Земли до высоты 10 гПа, а океанский блок представлен моделью однородного по вертикали 50-метрового слоя океана, включающей возможность образования морского льда [73]. Использование процедуры коррекции потока тепла на поверхности обеспечивает то, что температура поверхности океана (ТПО), а также распределение морского льда, в такой модели близки к наблюдаемым. Ошибки воспроизведения среднегодовой ТПО почти всюду не превосходят 1 градуса, а среднегодовая площадь морского льда отличается от наблюдаемой не более чем на 5 %.

С этой моделью были проведены два численных эксперимента, в первом из которых (контрольном) моделировался современный климат. Для этого после интегрирования модели на 15 лет и достижения равновесного состояния была проведена серия из 20 расчетов с использованием различных начальных данных. Продолжительность каждого такого расчета составляла 2 года. Кроме контрольного проводился эксперимент с удвоением содержания углекислого газа, который полностью аналогичен контрольному, но концентрация  $\text{CO}_2$  была задана вдвое превышающей современное значение. Таким образом, был получен набор данных, покрывающий 40 лет контрольного эксперимента и 40 лет эксперимента с удвоением  $\text{CO}_2$ . Для анализа использованы как среднемесячные, так и ежедневные данные о приземной температуре и осадках. Ниже рассматривается установившийся отклик модели на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  и анализируется климат и его изменения в умеренных и высоких широтах Евразии в регионе от  $35^\circ$  до  $80^\circ$  с.ш. и от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  в.д. с особым акцентом на их



особенностях для территории России. Результаты моделирования современного климата сравниваются с данными о приземной температуре реанализа NCEP за 1963–2002 гг. и с данными наблюдений за осадками на суше за 1959–1998 гг. [76].

На рис. 31 показано изменение зонально осредненной температуры при удвоении  $\text{CO}_2$  в рассматриваемом эксперименте и рассчитанное по версии модели с горизонтальным разрешением в атмосферном блоке  $5^\circ$  по долготе и  $4^\circ$  по широте и с полным океаном для условий, когда содержание  $\text{CO}_2$  увеличивалось со скоростью  $1\%$  в год. Хотя в последнем случае отклик не

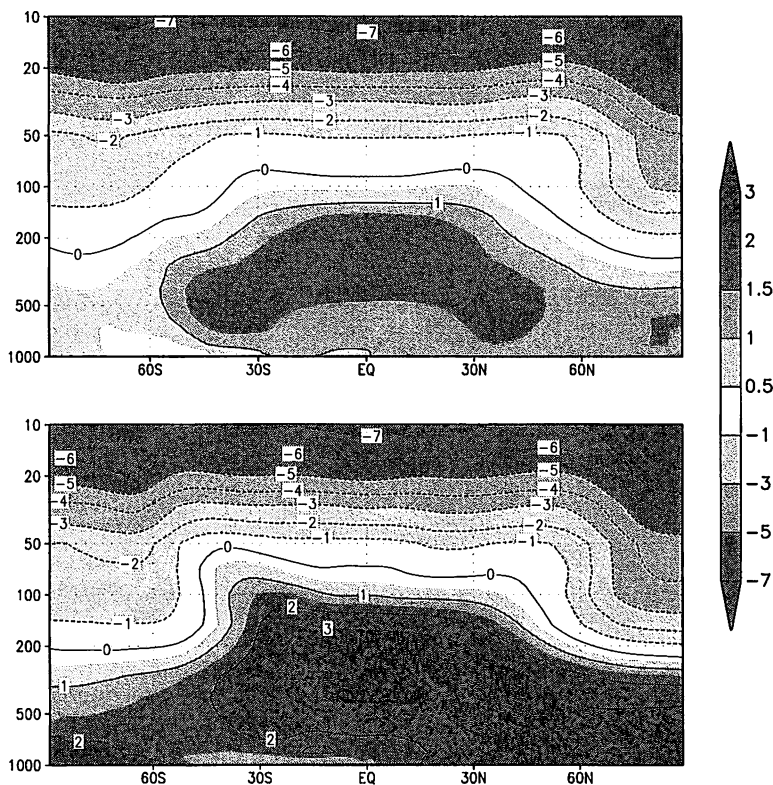


Рис. 31. Отклик зонально осредненной температуры на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  для модели с полным океаном (вверху) и с 50-метровым океаном (внизу). Изолинии проведены через  $1\text{ K}$

является установившимся, из рисунка видно, что величина похолодания в стратосфере в обоих экспериментах очень близка и достигает 7 градусов. Потепление в тропосфере в случае 50-метрового океана примерно в 2 раза сильнее, чем в случае полного океана.

Географическое распределение изменения температуры приповерхностного воздуха для обеих версий модели изображено на рис. 32. Для удобства

сравнения результаты по модели с полным океаном умножены на 2. В обоих случаях максимальное потепление происходит в высоких широтах, а также на континентах в умеренных широтах, где изменение температуры составляет 3–5 градусов. Над тропическими океанами повышение температуры составляет 1.5–2 градуса. Отличия между двумя моделями больше всего

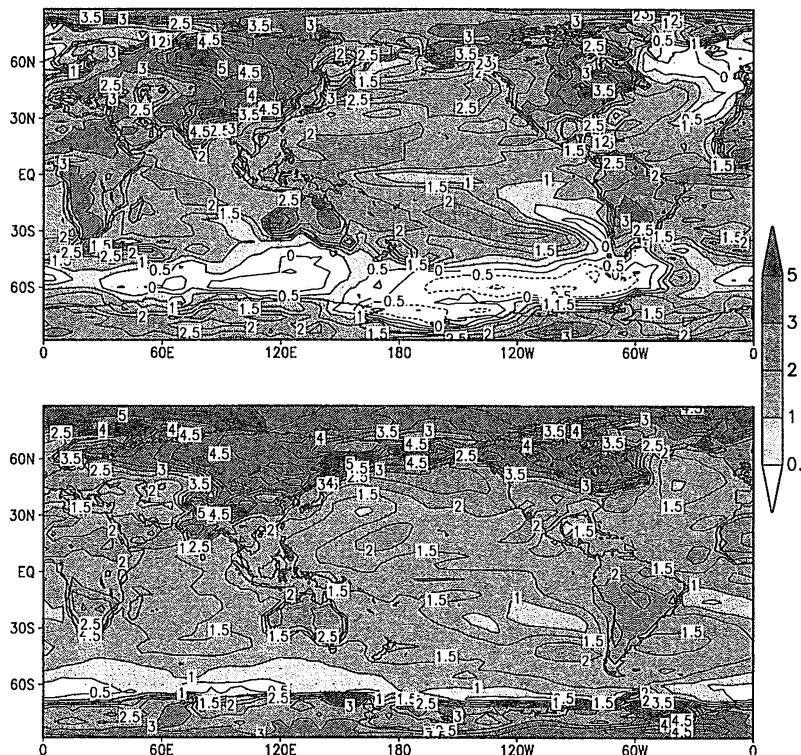


Рис. 32. Отклик температуры воздуха у поверхности на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  для модели с полным океаном (вверху) и с 50-метровым океаном (внизу).

Изолинии проведены через 0.5 К. Результаты модели с полным океаном умножены на 2

проявляются над океанами в средних и высоких широтах в тех районах, где в океане происходит конвекция. В модели с полным океаном потепление там не превышает 0.5–1 градуса, а в случае 50-метрового слоя достигает 1–1.5 градуса. Однако в целом результаты, полученные по модели с 50-метровым слоем океана, оказываются близкими к тем, что дает модель с полным океаном. В связи с эти с указанными оговорками рассматриваемый здесь равновесный отклик модели с 50-метровым океаном можно считать реалистичным подобием неравновесного отклика полной модели.

#### 4.2.2. Воспроизведение климата и его изменений на территории России

На рис. 33 представлено распределение среднеклиматической температуры в декабре–феврале и в июне–августе по данным NCEP и результатам модели. Модель в основном верно воспроизводит распределение средней температуры. К числу недостатков можно отнести завышение зимой температуры в южной и центральной Европе, а также в Казахстане и Средней Азии, примерно на 5 градусов. Летом модель на 3–5 градусов завышает температуру на крайнем севере Сибири и несколько занижает в Казахстане и Средней Азии.

Среднеквадратичное отклонение (СКО) приземной температуры для зимних месяцев на большей части России составляет 3–4 градуса, что правильно воспроизводится моделью. Летом на большей части России СКО среднемесячной температуры по данным наблюдений составляет величину примерно в 1.5 градуса, а на северо-востоке Сибири достигает 2–2.5 градусов, что также хорошо воспроизводится моделью.

Целесообразно выбрать в качестве меры "климатической экстремальности" самые большие по величине аномалии среднемесячной температуры, имевшие место за 40 лет наблюдений, и сравнить их с аналогичными данными, полученными за 40 лет интегрирования модели в контрольном эксперименте. На рис. 34 вверху представлены самые большие положительные аномалии среднемесячной температуры, рассчитанные за зимний сезон (декабрь, январь, февраль). В умеренных широтах России самые большие наблюдаемые положительные аномалии составляют 6–8 градусов, на севере они достигают 10 градусов. Эти значения в основном хорошо воспроизводятся моделью. Модель несколько занижает значения этой величины только на юге европейской части России. Большие значения максимальной аномалии в некоторых точках Ледовитого океана по данным реанализа объясняются заданием там отсутствия льда в некоторые годы.

Максимальная отрицательная аномалия среднемесячной температуры по данным наблюдений составляет в России в основном 10–14 градусов. Это больше по величине, чем максимальная положительная аномалия. Модель в основном верно воспроизводит наблюдаемую величину максимальной отрицательной аномалии температуры.

В летние месяцы величины максимальных аномалий по данным наблюдений меньше, чем зимой (не показано), и не превышают в умеренных широтах 4–5 градусов, в то время как на севере и северо-востоке Сибири они достигают 6–8 градусов. В модели величина максимальных положительных аномалий в основном близка к данным наблюдений, а величина максимальных отрицательных аномалий близка или немного меньше, чем наблюдаемые.

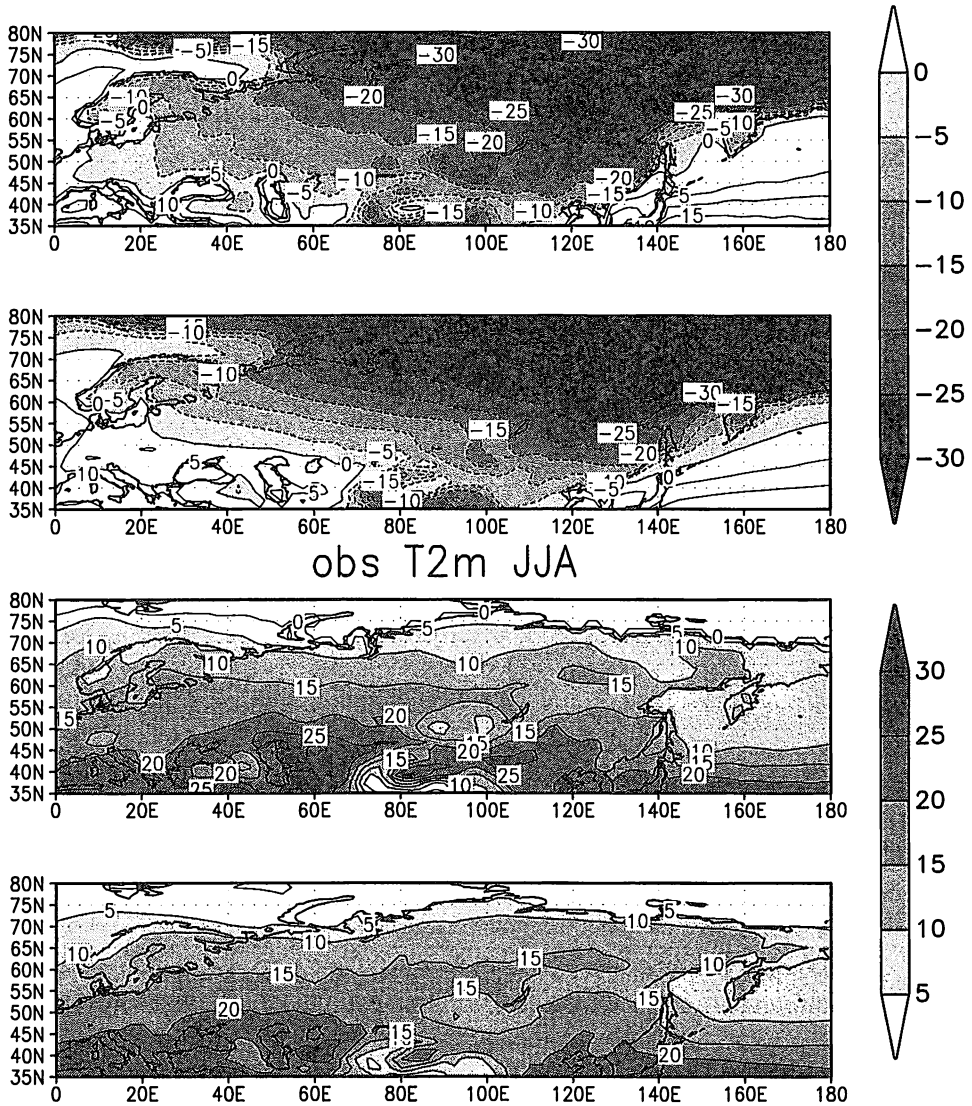


Рис. 33. Сверху вниз: температура приземного воздуха (C) по данным NCEP и модели в декабре-феврале; температура приземного воздуха по данным NCEP и модели и июне-августе. Изолинии проведены через 5 градусов

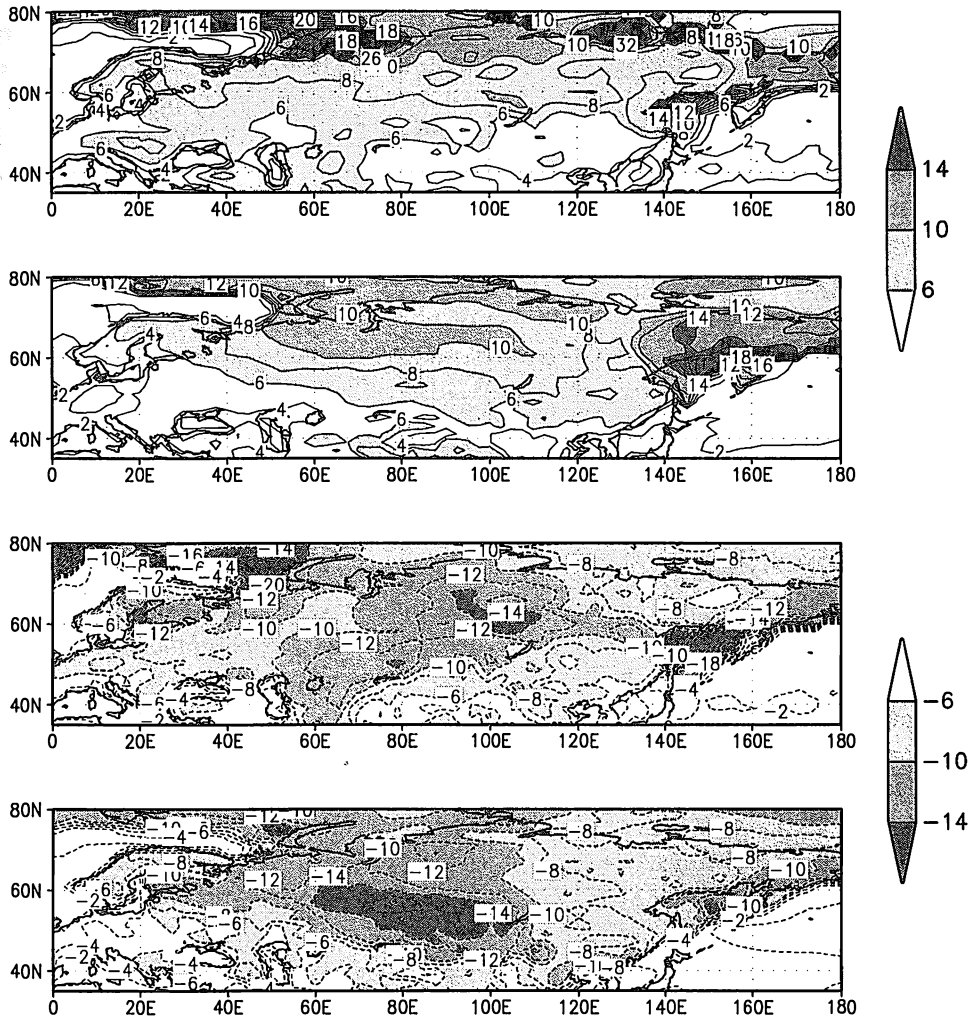


Рис. 34. Сверху вниз: самая большая положительная среднемесячная аномалия приземной температуры по данным NCEP и по данным модели; самая большая отрицательная аномалия приземной температуры по данным NCEP и по данным модели. Изолинии проведены через 2 К. Данные — для зимнего сезона

Изменения температуры в зимние месяцы в результате удвоения в модели содержания  $\text{CO}_2$  представлены на рис. 35. Как видно из рисунка, максимальное потепление происходит над Баренцевым, Карским и Охотским морями в тех местах, где при удвоении  $\text{CO}_2$  тает лед. Там потепление достигает 8–10 градусов. На большей части Сибири повышение температуры составляет 5–7 градусов, а в европейской России величина потепления изменяется от 3 до 5 градусов. На этом же рисунке приведено распределение изменений температуры в самые теплые и самые холодные зимние месяцы. Повышение температуры в самые теплые месяцы в основном на 1–2 градуса меньше, а в самые холодные месяцы на 1–2 градуса больше, чем потепление, осредненное за все месяцы. Это свидетельствует о том, что при удвоении  $\text{CO}_2$  зимний климат становится менее экстремальным, поскольку температура самых холодных зимних месяцев повышается сильнее, чем температура всех зимних месяцев в целом.

Летние (июнь, июль, август) изменения температуры при удвоении содержания  $\text{CO}_2$  представлены на рис. 36. Самое большое потепление (до 4–5 градусов) происходит над Охотским морем и на юге региона (около 3 градусов). В умеренных широтах потепление составляет около 2 градусов, а на севере оно не превосходит 1–1.5 градусов. Над Северным Ледовитым океаном и северной Атлантикой изменения температуры близки к нулю. Изменения температуры самых теплых летних месяцев составляют на большей части России, в том числе и на севере, 2–3 градуса и лишь на северо-западе Европейской части не превосходят 1–1.5 градусов. Таким образом, во многих районах России летом температура самых теплых месяцев повышается сильнее, чем температура в среднем. Температура самых холодных летних месяцев повышается в высоких широтах на 0–2 градуса, в умеренных широтах повышение составляет около 2 градусов, а на юге региона не превосходит 2–3 градусов. Повышение температуры самых холодных летних месяцев происходит примерно также или выражено несколько слабее, чем потепление в среднем.

Чтобы проиллюстрировать, как меняется при удвоении  $\text{CO}_2$  экстремальность климата, связанная с аномалиями температуры, на рис. 37 представлены изменения: средней температуры; температуры, осредненной по самым теплым месяцам; температуры, осредненной по самым холодным месяцам; максимальной за сутки температуры, осредненной по самым теплым месяцам, и минимальной за сутки температуры, осредненной по самым холодным месяцам. Чтобы уменьшить случайный шум, все рассматриваемые данные осреднены вдоль кругов широты от  $30^\circ$  до  $130^\circ$  в.д., т.е. по всей территории России, исключая Дальний Восток.

В зимние месяцы в средних широтах России повышение температуры в экстремально холодные месяцы происходит примерно на 1 градус сильнее, чем потепление в среднем, а минимальных за сутки температур — на

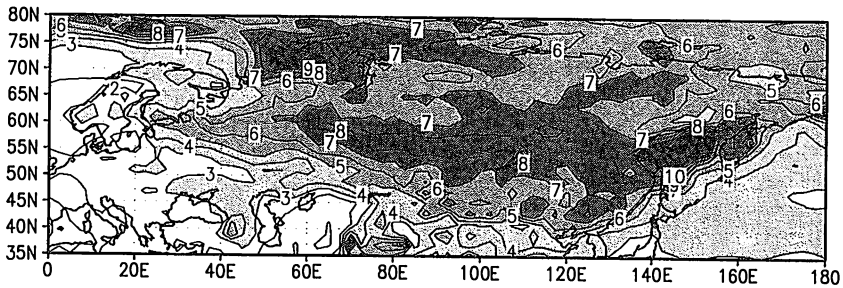
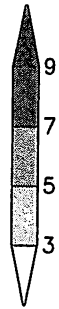
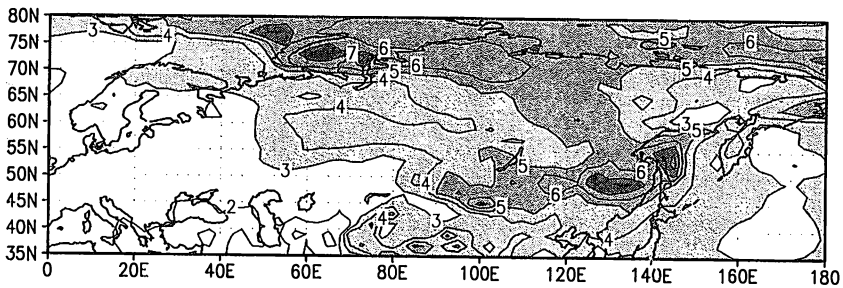
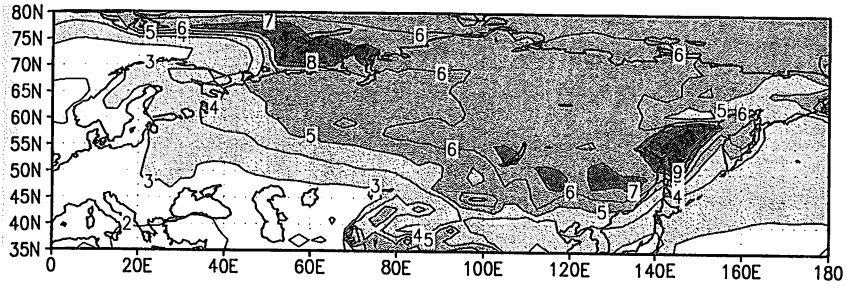


Рис. 35. Изменение приповерхностной температуры зимой при удвоении содержания  $\text{CO}_2$ : для всех зимних сезонов (вверху), для самых теплых (в середине) и холодных (внизу) месяцев. Изолинии проведены через 1 К

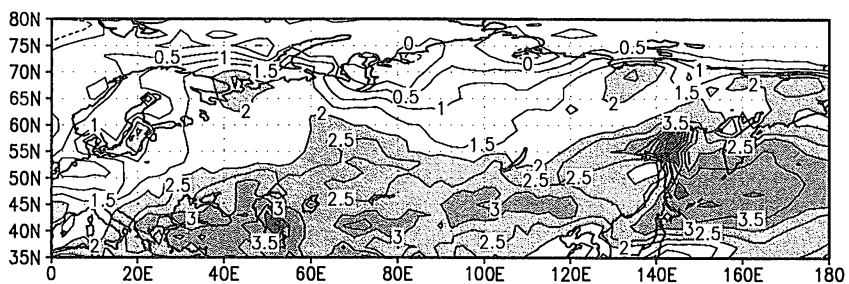
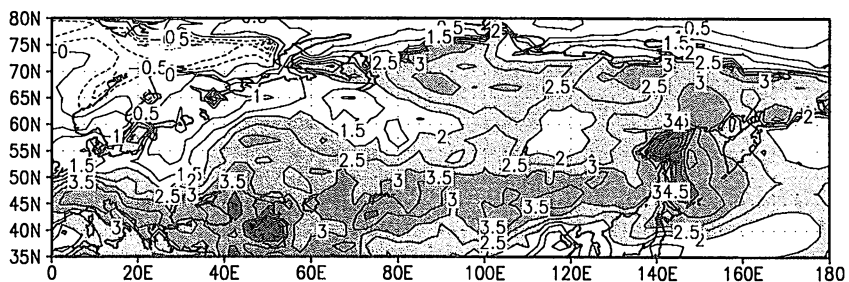
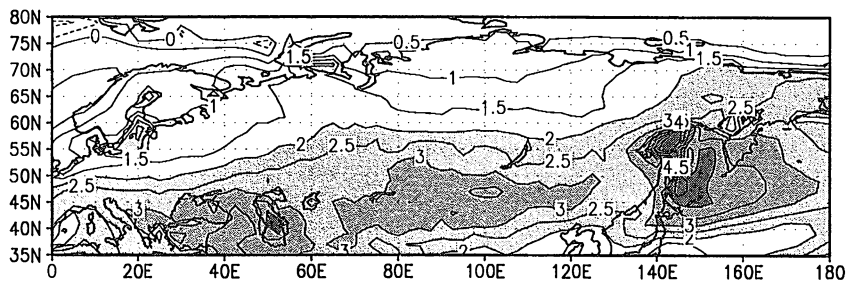


Рис. 36. Изменение приповерхностной температуры летом при удвоении содержания  $\text{CO}_2$ : для всех летних сезонов (вверху), для самых теплых (в середине) и холодных месяцев (внизу). Изолинии проведены через 0.5 К



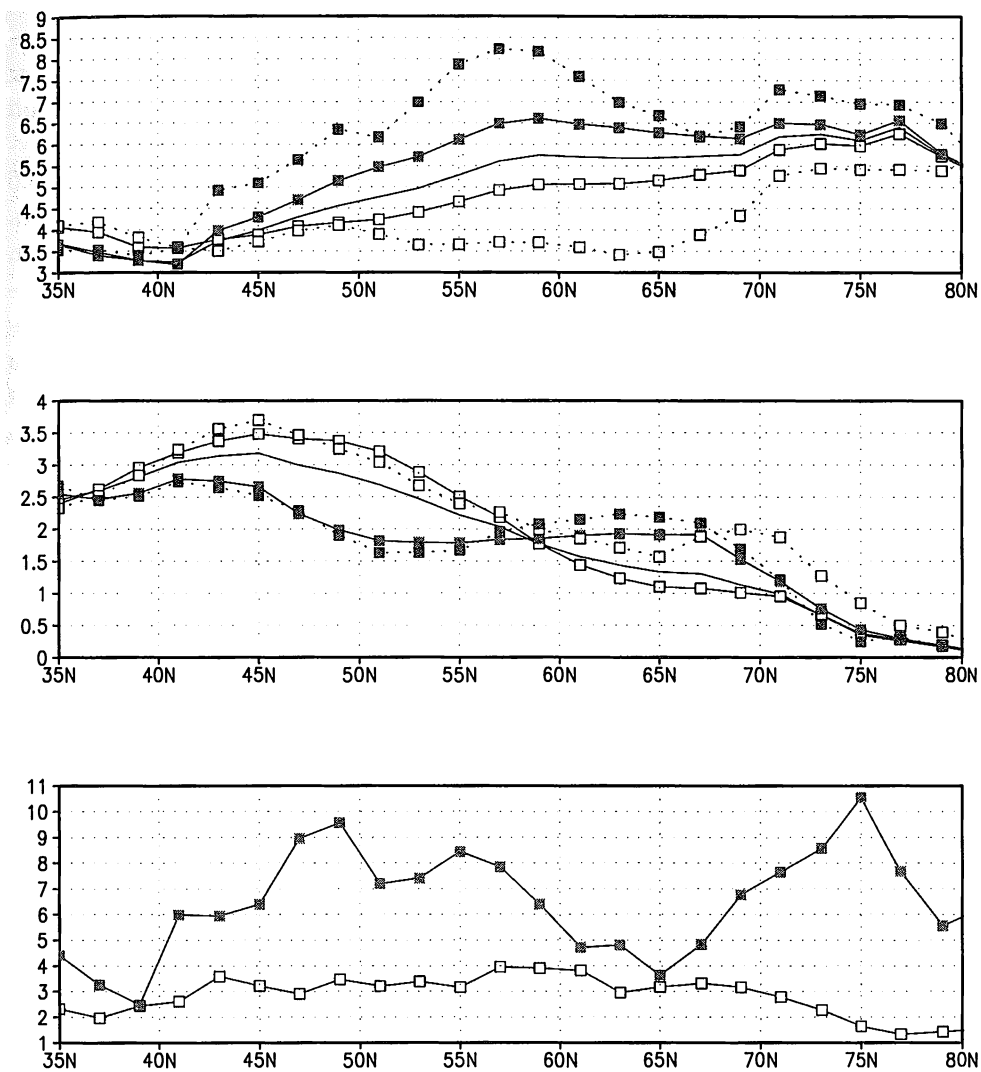


Рис. 37. Распределение изменений приповерхностной температуры: осредненной по всем месяцам (сплошная линия); осредненной по самым холодным месяцам (сплошная линия с черными квадратами); осредненной по самым теплым месяцам (сплошная линия с пустыми квадратами); минимальной за сутки, осредненной по самым холодным месяцам (пунктирная линия с черными квадратами), и максимальной за сутки, осредненной по самым теплым месяцам, для зимы (вверху) и лета (в середине). Внизу — изменения максимальной (линия с пустыми квадратами) и минимальной (линия с черными квадратами) температуры. Данные осреднены с 30° по 130° в.д.

2–3 градуса сильнее, чем среднее потепление. Потепление в экстремально теплые месяцы происходит на 0.5 градуса слабее, чем среднее потепление, а максимальных температур за сутки в экстремально теплые месяцы — на 1–2 градуса слабее, чем потепление в среднем. Так, на широте Москвы среднее потепление зимой составляет 5.3 градуса, повышение минимальной за сутки температуры в экстремально холодные месяцы равно 8.0 градуса, а повышение максимальной за сутки температуры составляет лишь 3.6 градуса. Таким образом, зимой на большей части России экстремальность климата при удвоении CO<sub>2</sub> ослабевает. Летом южнее 55° с.ш., наоборот, повышение температуры в экстремально теплые месяцы сильнее, чем потепление в целом, а изменение температуры в экстремально холодные месяцы меньше, чем среднее потепление. Это свидетельствует об усилении экстремальности климата летом южнее 55° с.ш. Существенных различий между летними изменениями максимальной, минимальной и средней за сутки температуры по данным модели не обнаруживается. Севернее 60° с.ш. летом, как и зимой, происходит ослабление экстремальности климата, связанной с аномалиями температуры. В нижней части рис. 37 представлены изменения максимальных и минимальных температур, имевших место за весь период эксперимента. Повышение минимальных температур в средних и высоких широтах достигает 6–11 градусов и почти всюду превосходит как повышение средних зимних, так и максимальных зимних температур. Повышение максимальных температур в средних широтах составляет, в основном 3–4 градуса. Это намного меньше, чем повышение минимальных температур. Тем не менее в северной половине территории повышение максимальных температур выражено сильнее, чем повышение средних за летний сезон температур.

Воспроизведение моделью среднесезонных осадков в сравнении с наблюдаемыми представлено на (рис. 38). Зимой модель на большей части России завышает количество осадков в 1.5–2 раза. Летом географическое распределение осадков получается в модели в основном верно. Исключение составляет юг Европы, где количество осадков в модели занижено в 1.5–2 раза.

Удобной для сравнительного анализа характеристикой является среднеквадратичное отклонение (СКО) среднемесячных осадков, нормированное на среднемесячное значение этой величины, которое представлено на рис. 39. Зимой на большей части России эта величина составляет по данным наблюдений 0.4–0.5, но в засушливых регионах, таких как Средняя Азия и юг Сибири, она достигает значений 0.6–1.0. В модели изменчивость осадков на большей части России несколько меньше наблюдаемой и составляет 0.3–0.4, однако на юге рассматриваемой территории она достигает 0.6–1.0. Летом в большей части умеренных широт по данным модели и наблюдений СКО осадков составляет около 0.4, а на юге территории, особенно в Сред-

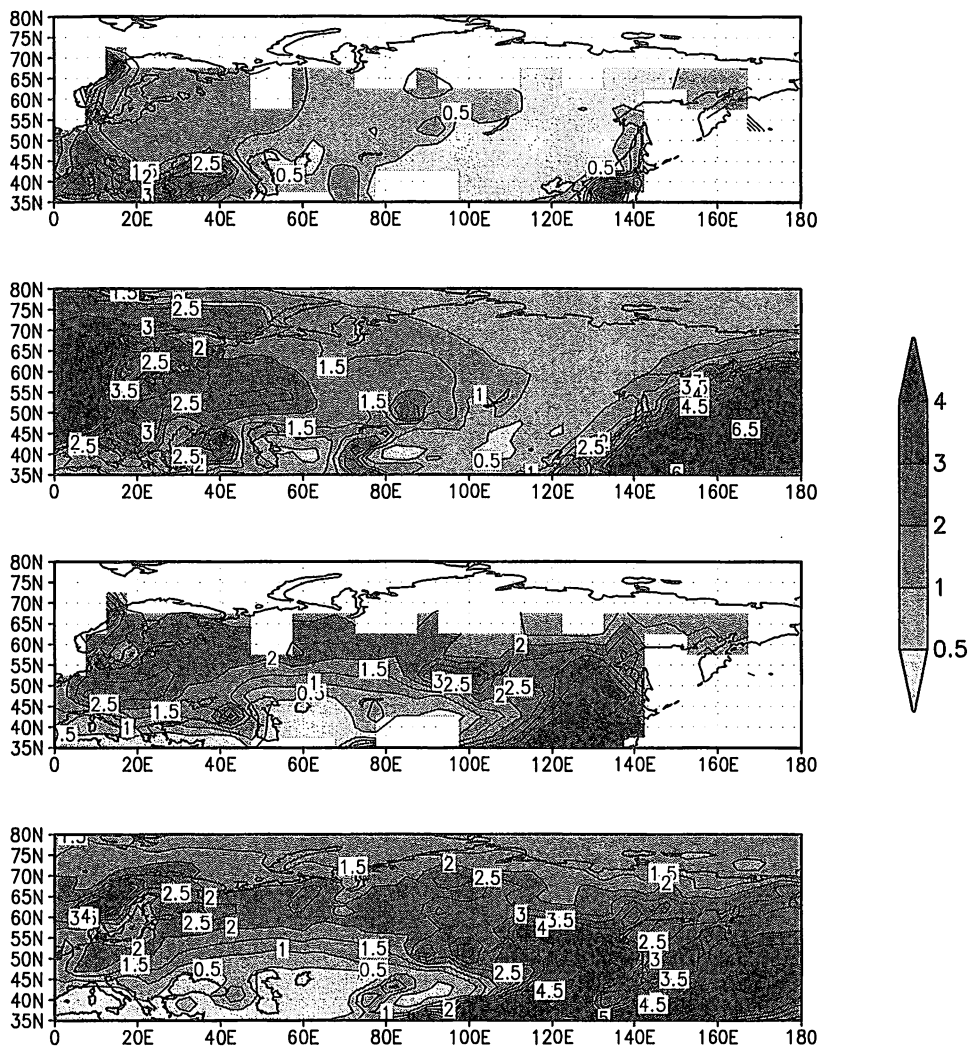


Рис. 38. Зимние (верхняя пара рисунков) и летние (нижняя пара) осадки по данным наблюдений (вверху каждой пары) и модели (внизу каждой пары).

Изолинии проведены через 0.5 мм/сут. Незакрашенные места здесь и на следующем рисунке означают отсутствие наблюдений

ней Азии, его величины достигает значения 1 и больше. Данные модели для летнего сезона в основном согласуются с наблюдениями.

Как зимой, так и летом, по данным наблюдений максимальные среднемесячные осадки превышают климатические на большей части России примерно в 2 раза, но в засушливых районах (юг Сибири зимой и Средняя Азия летом) отношение максимальных величин осадков к средним достигает 4–6 и более. Зимой отношение максимальных осадков к среднеклиматическим в модели почти всюду немного (на 10–20 процентов) меньше наблюдаемого или близко к нему, однако максимум на юге Сибири в модели выражен недостаточно. Летом отношение максимальных осадков к средним в модели почти везде не слишком отличается от наблюдаемого.

Отношение минимальных среднемесячных осадков к средним зимой по данным наблюдений составляет около 0.2–0.3, но в засушливых районах оно не превосходит 0.1. В модели эта величина в основном меняется от 0.3 до 0.4, однако в засушливых районах достигает 0.1. Завышение этой величины моделью связано, вероятно, с завышением средних осадков. Как по данным наблюдений, так и по данным модели, в летние месяцы в достаточно увлажненных районах отношение минимальных осадков к средним составляет 0.2–0.4, а в Средней Азии и Казахстане эта величина не превышает 0.1, поскольку в засушливые месяцы там практически не выпадает осадков.

При увеличении содержания  $\text{CO}_2$  в модели зимой севернее  $45^\circ$ – $50^\circ$  с.ш. происходит увеличение осадков на 20–50 % , а южнее — их уменьшение на 10–30 % (рис. 40). Такие изменения осадков связаны в основном с увеличением индекса Арктической осцилляции (АО). Летом увеличение осадков на 10–30 % происходит севернее  $55$ – $60^\circ$  с.ш., а уменьшение наиболее сильно заметно на юге Европы и в Средней Азии, где оно достигает 20–40 %. Эти изменения также связаны с изменением динамики атмосферы, а именно, с увеличением индекса АО. Рис. 41 показывает, как меняется экстремальность климата, связанная с аномалиями осадков. На этом рисунке представлены относительные изменения средних осадков, осадков в самые влажные месяцы и осадков в самые сухие месяцы. Как зимой, так и летом, севернее  $55^\circ$  с.ш. увеличение экстремальных осадков примерно соответствует изменению средних осадков. Однако в южной части территории как зимой, так и летом, изменения максимальных осадков невелики, а минимальных осадков — в несколько раз превышают средние и достигают зимой величины  $-0.5$ , а летом значения  $-0.3$ . Это означает, что уменьшение осадков на юге территории достигается в основном за счет месяцев с очень малым количеством осадков, в то время как количество осадков в экстремально дождливые месяцы почти не меняется.

Чтобы понять, за счет каких факторов произошло изменение количества выпавших осадков при удвоении  $\text{CO}_2$ , были рассчитаны интенсивность

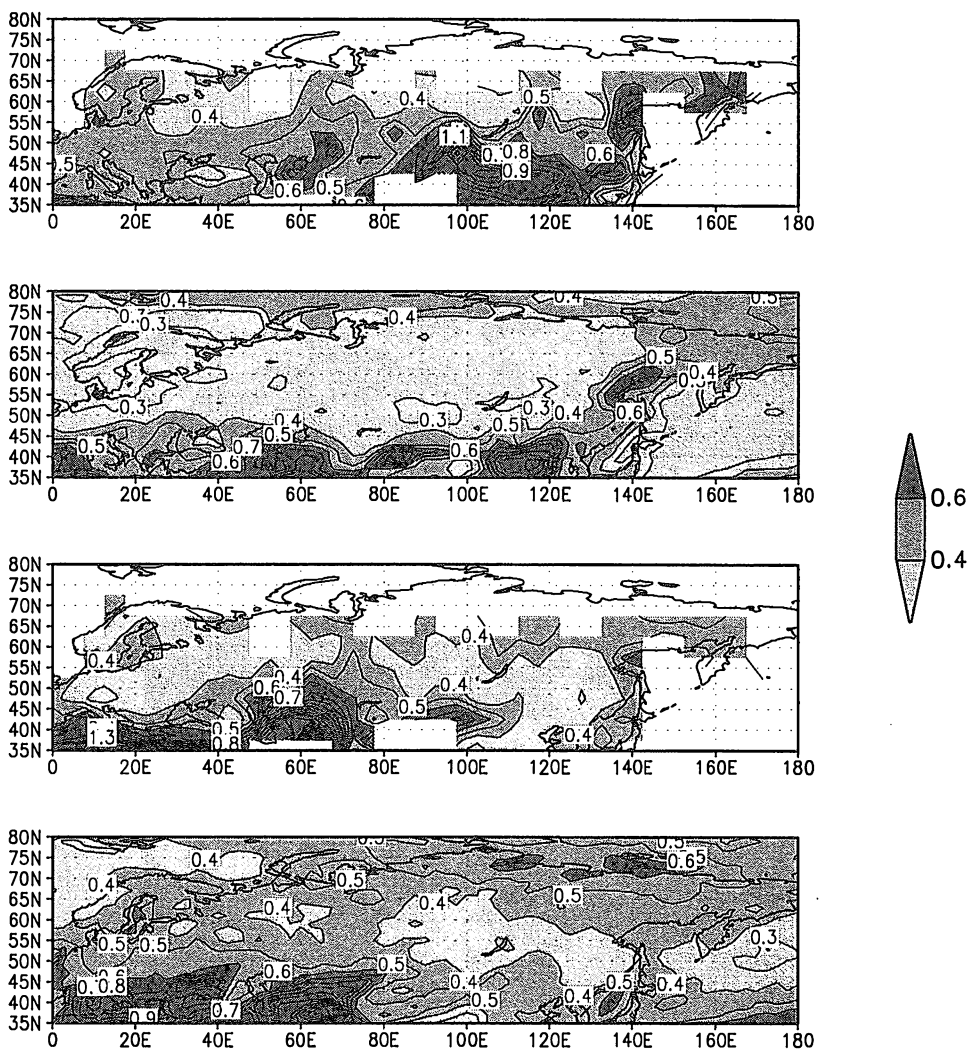


Рис. 39. Сверху вниз: средноквадратичное отклонение среднемесячных осадков, нормированное на их среднеклиматическое значение для зимнего сезона по данным наблюдений и модели, то же для летнего сезона по данным наблюдений и модели. Изолинии проведены через 0.1

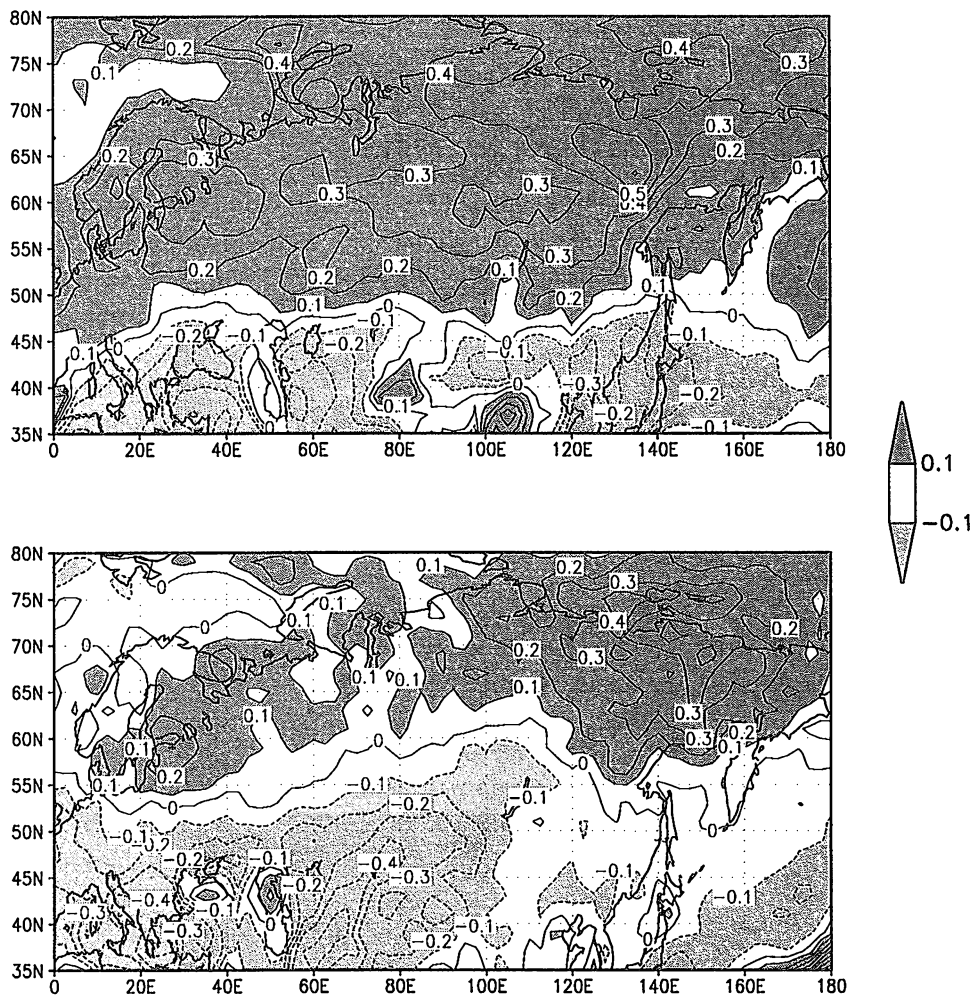


Рис. 40. Географическое распределение изменений осадков в эксперименте с удвоением  $\text{CO}_2$  по сравнению с контрольным экспериментом, нормированное на величину осадков в контрольном эксперименте, для зимнего (вверху) и летнего (внизу) сезонов. Изолинии проведены через 0.1

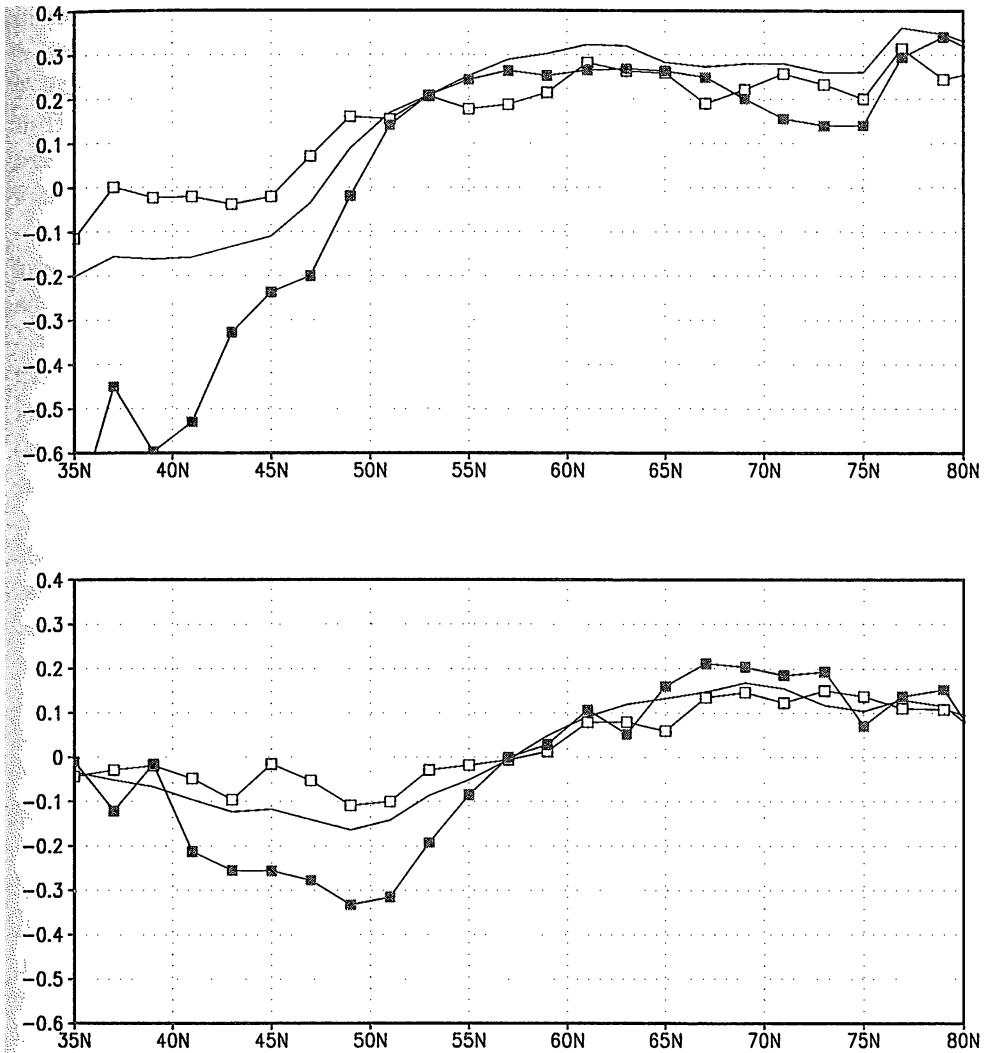


Рис. 41. Широтное распределение изменений осадков в эксперименте с удвоением  $\text{CO}_2$  по сравнению с контрольным, нормированное на значение осадков в контрольном эксперименте для зимнего (вверху) и летнего (внизу) сезонов. Линия без маркировки — данные для всех месяцев, линия с черными квадратами — данные для самых сухих месяцев, линия с пустыми квадратами — данные для самых влажных месяцев. Данные осреднены с  $30^\circ$  по  $130^\circ$  в.д.

осадков и количество дней с осадками. Полагалось, что в каком-либо узле сетки модели данные эксперимента включали сутки с осадками, если их количество за этот период превышало 0.5 мм. Средняя интенсивность осадков вычислялась как среднее количество осадков в те сутки, когда количество осадков превышало 0.5 мм. Зимой севернее 45° с.ш. при увеличении содержания CO<sub>2</sub> интенсивность осадков увеличивается на 10–20 % по сравнению с интенсивностью осадков в контрольном эксперименте. При этом количество дней с осадками увеличивается не очень существенно. Это означает, что увеличение зимой количества выпавших осадков в умеренных широтах происходит в большей степени за счет увеличения их интенсивности, чем количества дней с осадками. Летом, наоборот, в северной половине территории увеличение количества осадков большей частью происходит за счет увеличения количества дней с осадками. В южной половине территории происходит уменьшение количества осадков и это уменьшение почти целиком обусловлено сокращением числа дней с осадками, в то время как интенсивность осадков меняется незначительно. Максимальное количество осадков, выпавших за сутки в контрольном эксперименте в данном узле сетки, составляет на большей части России величину 50–55 мм и лишь в Арктике оно уменьшается до 30–35 мм. При увеличении содержания CO<sub>2</sub> во всех рассматриваемых районах происходит увеличение на 10–20 % максимального количества осадков, выпавших за сутки, в том числе и на юге территории, где в среднем происходит уменьшение количества осадков.

## Заключение

Основные результаты, представленные в данной работе, могут быть суммированы следующим образом.

**Климатические модели.** Разработан комплекс моделей общей циркуляции атмосферы с различным пространственным разрешением:  $4 \times 5 \times 21$  (4° по широте, 5° по долготе, 21 уровень по вертикали),  $4 \times 5 \times 39$ ,  $2 \times 2.5 \times 21$ ,  $1 \times 1.25 \times 21$ , описывающих процессы как в тропосфере и стратосфере, так и в мезосфере. Отдельные модели реализованы на современных параллельных вычислительных системах.

В рамках международных проектов сравнения атмосферных моделей АМIP-I и АМIP-II проведены численные эксперименты по моделированию современного климата (поверхностная температура океана и распределение морских и континентальных льдов заданы как функции времени для периода 1979–1995 гг.). Исследовано качество воспроизведения климатических характеристик (первого момента, высокочастотной и низкочастотной изменчивости атмосферной циркуляции и др.) в зависимости от важного свойства конечномерных аппроксимаций — точного воспроизведения квадратичных и линейных интегралов движения в двумерном приближе-



нии. Показано, что для разрешения  $4 \times 5 \times 21$  воспроизведение линейных интегралов играет решающую роль при формировании бароклинических зон и бароклинической неустойчивости. Анализ результатов показал, что разработанные в ИВМ РАН модели находятся на уровне лучших зарубежных моделей. Численные эксперименты по исследованию отклика мезосферы и стратосферы на реальные изменения концентрации углекислого газа и озона в верхней атмосфере показали, что наблюдаемый тренд температуры в верхней атмосфере может быть объяснен только при условии включения изменений озона в термодинамический цикл.

Построена модель циркуляции Мирового океана с разрешением  $2.5^\circ \times 2^\circ \times 33$ . С помощью этой модели воспроизведен современный климат Мирового океана с качеством на уровне лучших зарубежных моделей. Разработана совместная модель общей циркуляции атмосферы и океана с учетом динамики ледового покрова и на основе этой модели в рамках международного проекта сравнения совместных моделей (CMIP) воспроизведен современный климат. Важно отметить, что в модели не используется процедура коррекции потоков на поверхности океана. Этого удалось достичь главным образом за счет того, что модели атмосферы и океана сами по себе достаточно хорошо воспроизводят климатические состояния атмосферы и океана. Результаты численных экспериментов показали, что модель находится на уровне современных мировых достижений. Это следует из сравнения характеристик климата, полученных в ходе экспериментов с совместной моделью ИВМ РАН по сценарию CMIP, с результатами обработки данных по сообществу моделей, участвующих в этом проекте [62]. Модель удовлетворительно воспроизводит не только первые и вторые моменты динамических и термических характеристик, но и такие специфические явления, как статистика Эль-Ниньо, отклик атмосферной циркуляции на это явление, арктические колебания и другие фундаментальные характеристики атмосферной и океанической циркуляции.

Реализован также вариант совместной модели с упрощенным представлением океана — описанием процессов лишь в его верхнем 50-метровом слое. Численные эксперименты показали, что модель в основном неплохо воспроизводит как среднеклиматическое распределение температуры и осадков, так и их межмесячную изменчивость, а также экстремальные климатические ситуации, связанные с аномалиями температуры и осадков.

**Теория чувствительности.** Сформулирован метод вычисления оператора отклика климатических моделей и реальной климатической системы на малые внешние воздействия (расчет возмущения первого момента). Метод основан на применении диссипационно-флуктуационных соотношений для систем с большим числом положительных показателей Ляпунова. Хотя законченной теории чувствительности для моделей климата в настоящее время не существует, нет принципиальных затруднений, которые

бы препятствовали ее созданию. Численные эксперименты, проведенные с моделями общей циркуляции атмосферы, показывают, что при нахождении отклика атмосферной циркуляции на малые внешние возмущения хорошие результаты можно получить с помощью линейного приближения. Флуктуационно-релаксационное соотношение дает возможность аппроксимировать линейный оператор отклика среднего состояния модели, причем для этого достаточно знать только ее статистические характеристики. Построенный приближенный оператор отклика позволяет с высокой точностью воспроизвести как величину, так и пространственную структуру линейной части отклика современных моделей общей циркуляции атмосферы на малые внешние воздействия. Кроме того, оказывается возможным построить такой оператор по данным наблюдений для реальной климатической системы. Это дает возможность решить ряд важных физических проблем, в частности построить внешнее воздействие, оптимальным образом возбуждающее Арктическую осцилляцию, провести идентификацию климатических моделей по отношению к их чувствительности. Представленные результаты должны стимулировать дальнейшие усилия по созданию теории чувствительности реальной климатической системы к малым внешним воздействиям, что явилось бы первым шагом для решения другой важнейшей проблемы — проблемы управления климатом.

**Чувствительность климатических моделей к малым внешним воздействиям.** Главный результат здесь — исследование чувствительности климата по отношению к изменяющейся во времени концентрации углекислого газа (рост на 1 % в год), выполненное с помощью численного эксперимента с совместной моделью общей циркуляции атмосферы и океана в рамках международной программы СМIP. С этой целью проанализирован отклик совместной модели атмосферы и океана на увеличение атмосферного содержания  $\text{CO}_2$ . Глобально осредненное потепление на поверхности составляет по данным модели около 0.99 К. Максимальное потепление происходит в центре Евразии и достигает там 2–3.5 К. В холодную половину года это потепление выражено сильнее (3–5 К), чем в теплую половину (1–1.5 К). Приблизительно третья часть величины потепления в холодное полугодие в Евразии (1–2 К) объясняется изменением динамики атмосферы, а именно, увеличением индекса Арктической осцилляции. Аналогичное изменение динамики атмосферы в средних широтах Северного полушария происходит и при удвоении  $\text{CO}_2$  в модели атмосферы с фиксированной температурой поверхности океана. Главным же фактором роста среднеглобальной ТПО при увеличении концентрации  $\text{CO}_2$  является изменение радиационного баланса поверхности океана.

Результаты численного эксперимента с моделью общей циркуляции атмосферы с верхним слоем океана по исследованию отклика атмосферы на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  показали, что при увеличении содержания

CO<sub>2</sub> зимой в основном происходит уменьшение экстремальности климата на территории России. Летом над южной ее частью экстремальность, связанная с положительными аномалиями температуры и с малым количеством осадков, усиливается. Над северными регионами экстремальность климата, как и зимой, в основном ослабевает. Увеличение осадков над северными районами и уменьшение их на юге во многом обусловлено изменением динамики атмосферы, а именно — увеличением индекса Арктической осцилляции. Однако величина изменения индекса АО при глобальном потеплении, и даже ее знак, сильно меняются от модели к модели. Поэтому физические закономерности, определяющие изменение индекса АО при глобальном потеплении в реальной климатической системе, безусловно нуждаются в дополнительном исследовании.

Суммируя все вышеизложенное, следует подчеркнуть, что стратегия научной деятельности ИВМ РАН в рамках национальной климатической программы может быть охарактеризована как базирующаяся на следующих трех основных положениях: 1) создание оригинальной климатической модели, 2) реализация модели на параллельных вычислительных системах, 3) разработка математической теории климата и 4) исследование актуальных для России региональных проблем климатической изменчивости. Можно утверждать, что в Институте вычислительной математики РАН созданы теоретические и технологические предпосылки для решения задач, связанных с проблемой предсказания климатических изменений — как естественных, так и вызываемых деятельностью человеческого сообщества. Разработанные в Институте модели общей циркуляции атмосферы и океана достигли в настоящее время мирового уровня сложности описания физических процессов и адекватности воспроизведения характеристик современного климата. Результаты моделирования совместной циркуляции атмосферы и океана свидетельствуют о перспективности дальнейшего развития климатической модели ИВМ РАН с целью исследования изменений климата на различных масштабах времени. Все это позволяет надеяться на создание в будущем национальной экспертной системы, на базе которой должны осуществляться оценки и научно обоснованные прогнозы колебаний и изменений климата как в глобальном, так и региональном масштабах.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику Г.И. Марчуку за его постоянный интерес к проблеме математического моделирования климата; совместная деятельность с Гурием Ивановичем всегда проходила в творческой взаимообогащающей атмосфере. Авторы также благодарны А.В. Багно, Е.В. Дмитриеву, В.Н. Глухову, В.Б. Залесному, С.В. Кострыкину, А.А. Корневу, Е.Е. Мачульской, С.П. Смышляеву и А.Н. Филатову за плодотворное сотрудничество при исследовании различных вопросов, связанных с моделированием климата и его изменений.

Представленные в данной работе исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий (контракт № МО-10(00)-П), Российского гранта "Научная школа" НШ-1958.2003.5, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 01-05-64150, 02-05-64901, 02-05-64909, 02-05-64911, 02-05-65020, 02-15-98515, 03-05-64358, 03-05-64660, 04-05-64919, 04-05-64898), а также ИНТАС (гранты №№ 00-189, 01-732, 01-2132).

## Литература

- [1] *Алексеев В.А., Володин Е.М., Галин В.Я., Дымников В.П., Лысков В.Н.* Моделирование современного климата с помощью атмосферной модели ИВМ РАН. Описание модели А5421 версии 1997 года и результатов эксперимента по программе АМIP II. Деп. ВИНТИ: 03.07.98, № 2086-В98, 215 с.
- [2] *Алексеев В.В., Залесный В.Б.* Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы. Под ред. Г.И. Марчука. Вып. 10. М.: Наука, 1984. С. 232–252.
- [3] *Будыко М.И.* Тепловой баланс поверхности Земли. Л.: Гидрометеоздат, 1956, 255 с.
- [4] *Володин Е.М.* Численная модель совместной циркуляции глобальной атмосферы и тропиков Тихого океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 5–19.
- [5] *Володин Е.М.* Проекция на арктическую осцилляцию модельного отклика, возбуждаемого зонально-симметричными термическими источниками // Известия РАН, Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. С. 589–595.
- [6] *Володин Е.М., Дианский Н.А.* Отклик совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана на увеличение содержания углекислого газа // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. С. 193–210.
- [7] *Володин Е.М. и группы-участники СМIP.* Связь величины глобального потепления при увеличении содержания углекислого газа и баланса тепла на поверхности по данным СМIP // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2004 (в печати).
- [8] *Володин Е.М., Лысков В.Н.* Параметризация процессов тепло- и влагообмена в системе растительность–почва для моделирования общей циркуляции атмосферы. Описание и расчеты с использованием локальных данных наблюдений // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34. С. 453–465.
- [9] *Володина Е.Е., Бенгтссон Л., Лысков В.Н.* Параметризация процессов тепловлагопереноса в снежном покрове для целей моделирования сезонных вариаций гидрологического цикла суши // Метеорология и гидрология. 2000, № 5. С. 5–14.
- [10] *Галин В.Я.* Параметризация радиационных процессов в атмосферной модели ИВМ РАН // Изв.РАН.Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34. С. 380–389.

- [11] Галин В.Я., Володин Е.М., Смышляев С.П. Модель общей циркуляции атмосферы ИВМ РАН с динамикой озона // Метеорология и гидрология. 2003. № 5. С. 13–23.
- [12] Глобус А.М. Экспериментальная гидрофизика почв. Л.: Гидрометеиздат, 1969, 355 с.
- [13] Грицун А.С., Дымников В.П. Отклик баротропной атмосферы на малые внешние воздействия. Теория и численные эксперименты // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. С. 511–525.
- [14] Дианский Н. А., Багно А. В., Залесный В. В. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 537–556.
- [15] Дианский Н.А., Володин Е.М. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 824–840.
- [16] Дмитриев Е.В. Оценка среднемесячных аномалий регионального поля приземной температуры по осредненным характеристикам глобального поля // Метеорология и гидрология. 2000. № 8. С. 25–36.
- [17] Дымников В.П., Грицун А.С. Хаотические аттракторы климатических моделей // Препринт ИВМ РАН. № 293/200, 2000, 52 с.
- [18] Дымников В.П., Филатов А.Н. Устойчивость крупномасштабных атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1990, 236 с.
- [19] Дымников В.П., Володин Е.М., Галин В.Я., Глазунов А.В., Грицун А.С., Дианский Н.А., Лыков В.Н. Климат и его изменения: математическая теория и численное моделирование // Сиб. журн. вычисл. математики. 2003. Т. 6. С. 347–379.
- [20] Дымников В.П., Володин Е.М., Галин В.Я., Глазунов А.В., Грицун А.С., Дианский Н.А., Лыков В.Н. Чувствительность климатической системы к малым внешним воздействиям // Метеорология и климатология. 2004. № 4. С. 77–92.
- [21] Казаков А.Л., Лыков В.Н. О параметризации взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью при численном моделировании атмосферных процессов // Тр. Зап. Сиб. НИИ М. Гидрометеиздат, 1982, вып. 55. С. 3–20.
- [22] Корнев А.А. Об одной критерии полной непрерывности аттрактора по параметру для некоторого класса полудинамических систем // Доклады РАН. 1999. Т. 369. С. 597–599.
- [23] Краснопеов С.М. Статистическая модель регионального климата. Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: Гидрометцентр СССР, 1990.
- [24] Креков Г.М., Рахимов Р.Ф. Оптические модели атмосферного аэрозоля. Томск: Изд. Томского филиала СО АН СССР, 1986, 294 с.
- [25] Крупчатников В.Н., Володин Е.М., Галин В.Я., Лыков В.Н. Климатология приповерхностных потоков CO<sub>2</sub> в совместной модели общей циркуляции атмосферы, растительности и почвы: случай с заданной архитектурой растительности // "Вычислительная математика и математическое моделирование" (Труды международной конференции, посвященной 75-летию академика Г.И. Марчука и 20-летию Института вычислительной математики РАН, Москва, Россия, 19–22 июня 2000 г.) Т. II. С. 97–112.

- [26] *Лыкосов В.Н., Палагин Э.Г.* Динамика взаимосвязанного переноса тепла и влаги в системе атмосфера–почва // *Метеорология и гидрология*. 1978. № 8. С. 48–56.
- [27] *Мазин И.П.* О климатологии и физическом строении облаков // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*, 1994, Т. 30. С. 338–344.
- [28] *Марчук Г.И.* Численные методы в прогнозе погоды. Л.: Гидрометеиздат, 1967, 353 с.
- [29] *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б., Лыкосов В.Н., Галин В.Я.* Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1984, 318 с.
- [30] *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.А.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализаций. Л.: Гидрометеиздат, 1987, 296 с.
- [31] *Матвеев Л.Т.* Динамика облаков. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 311 с.
- [32] *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии: Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1965, 876 с.
- [33] *Мачульская Е.Е., Лыкосов В.Н.* Моделирование термодинамической реакции вечной мерзлоты на сезонные и межгодовые вариации атмосферных параметров // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2002. Т. 38. С. 20–33.
- [34] *Мелешко В.П., Катцов В.М., Спорышев П.В., Вавулин С.В., Говоркова В.А.* Изучение возможных изменений климата с помощью моделей общей циркуляции атмосферы и океана // *Изменения климата и их последствия, Материалы специальной сессии Ученого совета Центра международного сотрудничества по проблемам окружающей среды, посвященной 80-летию академика М.И. Будыко (19–20 мая 1999 г.)* СПб., 2002. С. 13–35.
- [35] *Мелешко В.П., Рэнделл Д.А., Вавулин С.В., Школьник И.М.* Зависимость климатического режима в модели общей циркуляции атмосферы ГГО от методов параметризации конвекции // *Моделирование общей циркуляции атмосферы и климата. Труды Главной геофизической обсерватории им. А.И. Воейкова*, вып. 550, СПб.: Гидрометеиздат. 2001. С. 44–84.
- [36] *Монин А.С., Обухов А.М.* Основные закономерности турбулентного обмена в приповерхностном слое // *Тр. Института геофизики АН СССР*. 1954. № 24. С. 163–187.
- [37] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т.1. М.: Наука, 1965, 640 с.
- [38] *Обухов А.М.* О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций // *Известия АН СССР. Серия геофизическая*. 1960. С. 432–439.
- [39] *Палагин Э.Г.* Математическое моделирование агрометеорологических условий перезимовки озимых культур. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 191 с.
- [40] *Пытьев Ю.П.* Математические методы интерпретации эксперимента. М.: Высшая школа, 1989, 351 с.
- [41] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978, 592 с.
- [42] *Фейгельсон Е.М.* Радиация в облачной атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1981, 280 с.

- [43] *Чаєро А.И.* О возможности восстановления среднемесячных значений поля H500 по некоторым функционалам этого поля // *Метеорология и гидрология.* 1998. № 1. С. 46–54.
- [44] *Чаєро А.И., Дмитриев Е.В.* Статистическая модель восстановления региональной структуры геофизических полей // *Метеорология и гидрология.* 2002. № 6. С. 39–49.
- [45] *Arakawa A.* Design of the UCLA General Circulation Model // *Numerical simulation of weather and climate, 1972, Technical Report № 7, Dept. of Meteorol., University of California, Los-Angeles, California, 116 p.*
- [46] *Arakawa A., Schubert W.H.* Interaction of cumulus cloud ensemble with the large-scale environment. Part 1 // *J. Atmos. Sci.* 1974. V. 31, P. 674–701.
- [47] *Arakawa A., Lamb V.R.* A potential enstrophy and energy conserving scheme for shallow water equations // *Month. Wea. Rev.* 1981. V. 109. P. 18–36.
- [48] *Asselin R.* Frequency filter for time integrations // *Month. Wea. Rev.* 1972. V. 100. P. 487–490.
- [49] *Bates J.R., Chen M.* A comparison of climate simulations from a semi-Lagrangian and an Eulerian GCM // *J. of Climate.* 1996. V. 9. P. 1126–1149.
- [50] *Beljaars A.C.M., Holtlag A.A.M.* Flux parametrization over land surfaces for atmospheric models // *J. Appl. Meteorol.* 1991. V. 30. P. 327–341.
- [51] *Betts A.K.* A new convective adjustment scheme. Part I. — Observational and theoretical basis // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1986. V. 112. P. 677–691.
- [52] *Betts A.K., Miller M.J.* A New Convective Adjustment Scheme // *ECMWF, 1984, Technical Report № 43, 68 p.*
- [53] *Blackadar A.K.* The vertical distribution of wind and turbulent exchanges in neutral atmosphere // *J. Geoph. Res.* 1962. V. 67. P. 3095–3102.
- [54] *Briegleb B.P.* Delta — Eddington approximation for solar radiation in the NCAR community climate model // *J. Geophys. Res.* 1992. V. 97. № D7. P. 7603–7612.
- [55] *Businger J.A., Wyngaard J.C., Izumi I., Bradley E.F.* Flux profile relationships in the atmospheric surface layer // *J. Atmos. Sci.* 1971. V. 28. P. 181–189.
- [56] *Cheong H.-B.* Application of double Fourier series to the shallow water equations on a sphere // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 165, P. 261–287.
- [57] *Chou M.-D., Kratz D.P., Ridgway W.* Infrared radiation parameterizations in numerical climate models // *J. Climate.* 1991. V. 4. P. 424–437.
- [58] *Chou M.-D., Kouvaris L.* Calculations of transmission functions in the infrared  $CO_2$  and  $O_3$  bands // *J. Geophys. Res.* 1991. V. 96, № D5. P. 9003–9012.
- [59] *Chou M.-D., Ridgway W., Yan M.-H.* One-parameter Scaling and Exponential-sum fitting for water vapor and  $CO_2$  infrared transmission functions // *J. Atm. Sci.* 1993. V. 50, № 14. P. 2294–2303.
- [60] *Clapp R.B., Hornberger M.G.* Empirical equations for some soil hydraulic properties // *Water Resources Research.* 1978. V. 14, № 4. P. 601–604.
- [61] *Coakley J.A., Cess R.D., Yurevich F.B.* The effect of tropospheric aerosols on the Earth's radiation budget: A parametrization for climate models // *J. Atm. Sci.* 1983. V. 40, № 2. P. 116–138.
- [62] *Covey C., AchutaRao K.M., Lambert S.J., Taylor K.E.* Intercomparison of Present and Future Climates Simulated by Coupled Ocean–Atmosphere GCMs // *PCMDI Report № 66, 2000. P. 1–20.*

- [63] *Covey C., Abe-Ouchi A., Boer G.J., Boville B.A., Cubasch U., Fairhead L., Flato G.M., Gordon H., Guilyardi E., Jiang X., Johns T.C., Le Treut H., Madec G., Meehl G.A., Miller R., Noda A., Power S.B., Roeckner E., Russell G., Schneider E.K., Stouffer R.J., Terray L., von Storch J.-S.* The seasonal cycle in coupled ocean–atmosphere general circulation models // *Climate Dynamics*. 2000. V. 16. P. 775–787.
- [64] *Deardorff J.W.* Efficient prediction of ground surface temperature and moisture with inclusion of a layer of vegetation // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P. 1889–1903.
- [65] *Deker U., Haake F.* Fluctuation–dissipation theorems for classical processes // *Phys. Rev.* 1975. V. A11. P. 2043.
- [66] Deutsches Klimarechenzentrum. The ECHAM3 Atmospheric General Circulation Model // Technical Report № 6, Hamburg, 1992, 188 p.
- [67] *Dickinson R.E., Henderson-Sellers A., Kennedy P.J.* Biosphere–Atmosphere Transfer Scheme (BATS) Version 1e as coupled to the NCAR Community Climate Model // NCAR Tech. Note, TN383+STR, Boulder: National Center for Atmospheric Research. 1993. 72 p.
- [68] *Dymnikov V., Filatov N.* Mathematics of Climate Modelling. Boston: Birkhauser, 1997, 264 p.
- [69] *Giraldo F.X.* Lagrange–Galerkin methods on spherical geodesic grids: the shallow water equations // *J. Comput. Phys.* 2000. V. 160. P. 336–368.
- [70] *Glazunov A.V., Lykossov V.N.* Large-eddy simulation of interaction of ocean and atmospheric boundary layers // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2003. V. 18. P. 279–295.
- [71] *Gritsoun A.S.* Fluctuation–dissipation theorem on the attractors of atmospheric models // *Russ. J. Numer. Analysis Math. Modelling*. 2001. V. 16. P. 115–133.
- [72] *Gritsoun A.S., Branstator G., Dymnikov V.P.* Construction of the linear response operator of an atmospheric general circulation model to small external forcing // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2002. V. 17. P. 399–416.
- [73] *Hansen J., Lacis A., Rind D., Stone P., Fung I., Ruedy R., Lerner J.* Climate sensitivity: analysis of feedback mechanisms in climate processes and climate sensitivity. *Geophys. Monograph*. 1983. V. 29. 130 p.
- [74] *Hines C.O.* Doppler spread parameterization of gravity wave momentum deposition in the middle atmosphere. Part 1. Basic formulation // *J. Atm. Sol. Terr. Phys.* 1997. V. 59. P. 371–386.
- [75] *Hines C.O.* Doppler spread parameterization of gravity wave momentum deposition in the middle atmosphere. Part 1. Broad and quasimonochromatic spectra, and implementation // *J. Atm. Sol. Terr. Phys.* 1997. V. 59. P. 387–400.
- [76] *Hulme A.* 1951–1980 global land precipitation climatology for the evaluation of general circulation models // *Climate Dynamics*. 1992. V. 7. P. 57–72.
- [77] *Jerlov N.* Optical Oceanography. Berlin: Elsevier, 1968.
- [78] *Jones P.D., New M., Parker D.E., Martin S., Rigor I.G.* Surface air temperature and its changes over the past 150 years // *Rev. Geophys.* 1999. V. 37. P. 173–199.
- [79] *Joseph J.H., Wiscombe W.J., Weinman J.A.* The delta — Eddington approximation for radiative flux transfer // *J. Atm. Sci.* 1976. V. 33, № 12. P. 2452–2459.



- [80] *Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R., Collins W., Deaven D., Gandin L., Iredell M., Saha S., White G., Woollen J., Zhu Y., Leetmaa A., Reynolds B., Chelliah M., Ebisuzaki W., Higgins W., Janowiak J., Mo K.C., Ropelewski C., Wang J., Jenne R., Joseph D.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 1996. V. 77. P. 437–471.
- [81] *Kazantsev E.* Sensitivity of the attractor of the barotropic ocean model to external influences: approach by unstable periodic orbits // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2001. V. 8. P. 281–300.
- [82] *Keckhut P., Hauchecorne, Chanin M.L.* Midlatitude long-term variability of the middle atmosphere: Trends and cyclic and episodic changes // *J. Geophys. Res.* 1995. V.100. P. 18887–18897.
- [83] *Kim J.W., Chang J.T., Baker N.L., Gates W.L.* The climate inversion problem: Determination of the relation between local and large-scale climate // *Climate Research Institute and Department of Atmospheric Sciences Oregon State University, Report № 22, 1981, 25 p.*
- [84] *King M.D., Harshvardhan.* Comparative accuracy of selected multiple scattering approximations // *J.Atm.Sci.* 1986. V. 43. P. 784–801.
- [85] *Kraichnan R.* Classical fluctuation–relaxation theorem // *Phys. rev.* 1959. V. 113. P. 1181–1182.
- [86] *Kraichnan R.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence. — *Phys. Fluids.* 1967. V. 10, P. 1417–1423.
- [87] *Kuo H.L.* Further studies on the parameterization of the influence of cumulus convection on large-scale flow // *J. Atm. Sci.* 1974. V. 31. P. 1231–1240.
- [88] *Large W. G., Danabasoglu G., Doney S. C., McWilliams J. C.* Sensitivity to surface forcing and boundary layer mixing in a global ocean model: Annual-mean climatology // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. P. 2418–2447.
- [89] *Lemus L.D., L.Rikus, C.Martin, R.Platt.* Global cloud liquid water path simulations // *J. Climate.* 1997. V. 10, № 1. P. 52–64.
- [90] *Levitus S.* World Ocean Atlas. Technical report. U.S.Department of Commerce, National Oceanographic Data Center, Ocean Climate Laboratory, 1994.
- [91] *Lindzen R.S.* Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown // *J. Geophys. Res.*, 1981, V. 86. P. 9707–9714.
- [92] *Manabe S., Bryan K.* Climate and the ocean circulation // *Mon. Wea. Rev.* 1969. V. 97. P. 739–827.
- [93] *Manzini E., McFarlane N.A., and McLandress C.* Impact of the Doppler-spread parameterization on the simulation of the middle atmosphere circulation using the MAECHAM4 general circulation model // *J. Geoph. Res.* 1997. V. 102. P. 751–762.
- [94] *Manzini E., McFarlane N.A., and McLandress C.* Middle atmosphere simulations with the ECHAM4 model: Sensitivity to the Doppler spread gravity wave parameterization. In: *Gravity wave processes. Their parameterization in global climate models.* Edited by Hamilton K. NATO ASI Series. Series I. Global Environmental Change. 1997. V. 50. P. 367–381.
- [95] *Mattes R.K., Bowen H.D.* Water vapor transfer in the soil by thermal gradients and its control // *Trans. ASAE.* 1963. V. 6. P. 244–248.
- [96] *McCumber M.C., Pielke R.A.* Simulation of the effects of the surface fluxes of heat and moisture in a mesoscale numerical model. Part 1. Soil layer // *J. Geoph. Res.* 1981. V. 86, № C10. P. 9929–9938.

- [97] *Meehl G.A., Boer G.J., Covey C., Latif M., Stouffer R.J.* The coupled model intercomparison project (CMIP) // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 2000. V. 81. P. 313–318.
- [98] *Mesinger F., Arakawa A.* Numerical methods used in atmospheric models. Vol. I // JOC, GARP Publication Series, v. 17, Geneva, World Meteorological Organization, C.P. V. 5, CH-1211, Geneva, 1976, 64 p.
- [99] *Palmer T.N., Shutts G.J., Swinbank R.* Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1986. V. 112. P. 1001–1031.
- [100] *Pan D.M., Randall D.A.* A cumulus parameterisation with prognostic closure // *Quar. J. Roy. Met. Soc.* 1998. V. 124. P. 949–981.
- [101] *Phillips N.* The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment // *Q. J. Roy. Met. Soc.* 1956. V. 82. 123 p.
- [102] *Phillips T.J.* A summary documentation of the AMIP models // PCMDI Report № 18, 1994, Lawrence Livermore National Laboratory, CA, 343 p.
- [103] *E.J.Pitcher, R.C.Malone, V.Ramanathan, M.Blackmon, K.Puri, W.Bourke* January and July simulations with a spectral general circulation model // *J. Atmos. Sci.* 1982. V. 40. P. 580.
- [104] *Rasmusson E.M., Carpenter T.H.* The relationship between equatorial Pacific sea surface temperature and rainfall over India and Sri Lanka // *Mon. Wea. Rev.* 1983. V. 111. P. 517–528.
- [105] *Robert A.J.* The integration of a low-order spectral form of the primitive meteorological equations // *J. Met. Soc. Japan.* 1966. V. 44. P. 237–245.
- [106] *Robert A.J., Henderson J., Turnbull C.* An implicit time integration scheme for baroclinic modes in the atmosphere // *Mon. Wea. Rev.* 1972. V. 100. P. 329–335.
- [107] *Ruelle D.* Smooth dynamics and new theoretical ideas in nonequilibrium statistical mechanics // *J. Statist. Phys.* 1999. V.95. P. 393–468.
- [108] *Sausen R., Barthel K., Hasselmann K.* Coupled ocean–atmosphere models with flux correction // *Clim. Dyn.* 1988. V. 2. P. 145–163.
- [109] *Sellers P.J., Minth Y., Sud Y.C., Dalcher A.* A simple biosphere model (Sib) for use within general circulation models // *J. Atm. Sci.* 1986. V. 43. P. 505–531.
- [110] *Simmons A.J., Bengtsson L.* Atmospheric General Circulation Models: Their Design and Use for Climate Studies // *The Global Climate.* / Ed. J.T. Houghton, 1984, Cambridge University Press. P. 37–62.
- [111] *Slingo J.M.* The development and verification of a cloud prediction scheme for the ECMWF model // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1987. V. 133. P. 899–927.
- [112] *Slingo A.* A GCM parameterization for shortwave radiative properties of water clouds // *J.Atm.Sci.* 1989. V. 46, P. 1419–1427.
- [113] *Smagorinsky J.* General circulation experiment with the primitive equations. I. The basic experiment // *Mon. Wea. Rev.* 1963. V. 91, P. 99–164.
- [114] *Spotz W.F., Taylor M.A., Swarztrauber P.N.* Fast shallow-water equations solvers in latitude-longitude coordinates // *J. Comput. Phys.* 1998. V. 145. P. 432–444.
- [115] *Storch H., Zorita E., Cubasch V.* Downscaling of Global Climate Change Estimates to Regional Scales: An Application to Iberian Rainfall in Winter Time. Max Plank Institute für Meteorologie, Hamburg, Germany, Report № 64, 1991, 36 p.

- [116] *Taylor M., Tribbia J., Iskandarani M.* The spectral element method for the shallow water equations on the sphere // *J. Comput. Phys.* 1997. V. 130. P. 92–108.
- [117] *Thompson D.W.J., Wallace J.M.* Annular modes in the extratropical circulation. Part I. Month-to-month variability // *J. Climate.* 2000. V. 13. P. 1000–1017.
- [118] *Tiedtke M.* A comprehensive mass flux scheme for cumulus parameterization in large-scale models // *Mon. Wea. Rev.* 1989. V. 117. P. 1779–1800.
- [119] *Tolstykh M.A., Gloukhov V.N.* Implementation of global atmospheric models on parallel computers // *Вычисл. технологии.* 2002. Т. 7. Спец. вып. С. 101–109.
- [120] *Verseghy D.L., McFarlane N.A., Lazare M.* CLASS — a Canadian land surface scheme for GCMs. II: vegetation model and coupled runs // *Int. J. Clim.* 1993. V. 13. P. 347–370.
- [121] *Volodin E.M., Schmitz G.* A troposphere–stratosphere–mesosphere general circulation model with parameterization of gravity waves: climatology and sensitivity studies // *Tellus.* 2001. V. 53a. P. 300–316.
- [122] *Wallace J.M., Gutzler D.S.* Teleconnections in the geopotential heightfield during the Northern Hemisphere winter // *Mon. Wea. Rev.* 1981. V. 109. P. 784–811.
- [123] *Watterson I.G., Dix M.R., Colman R.A.* A comparison of present and doubled CO<sub>2</sub> climates and feedbacks simulated by three general circulation models // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104. P. 1943–956.
- [124] *Williamson D.L., Olson J.G.* A comparison of semi-Lagrangian and Eulerian polar climate simulation // *Mon. Weather Rev.* 1998. V. 126. P. 991–1000.
- [125] WMO: World Meteorological Organization. The Physical Basis of Climate and Climate Modelling. GARP Publications, 1975, Series No. 16, WMO, Geneva. (Физические основы теории климата и его моделирования / Перевод под ред. А.С. Мони́на. Л.: Гидрометеиздат, 1977).
- [126] *Xie P., Arkin P.* Global precipitation: a 17-year monthly analysis based on gauge observations, satellite estimates and numerical model outputs // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 1997. V. 78. P. 2539–2558.
- [127] *Zeeman E.C.* Stability of dynamical systems // *Nonlinearity.* 1987. V. 1. P. 115–135.
- [128] *Zerroukat M., Wood N., Staniforth A.* SLICE: A semi-Lagrangian inherently conserving and efficient scheme for transport problems // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 2002. V.128. P. 2801–2820.
- [129] *Zobler L.* A World Soil File for Global Climate Modelling. NASA Technical Memorandum 87802, 1986.

# Математические модели циркуляции океанов и морей

*А.С. Саркисян, В.Б. Залесный,  
Н.А. Дианский, Р.А. Ибраев, В.И. Кузин, С.Н. Мошонкин,  
Е.В. Семенов, Р. Тамсалу, Н.Г. Яковлев*

## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	178
<b>1. Математическая формулировка задачи</b> . . . . .	179
1.1. Уравнения общей циркуляции морей и океанов . . . . .	180
1.2. Граничные условия . . . . .	183
1.3. Начальные условия . . . . .	187
1.4. Закон сохранения полной энергии . . . . .	188
1.5. Модель общей циркуляции океана в $\sigma$ -системе координат . . . . .	188
<b>2. Параметризация процессов турбулентного обмена в моделях общей циркуляции океана</b> . . . . .	190
2.1. Модели развитой турбулентности . . . . .	192
2.2. Параметризация глубокой конвекции . . . . .	195
2.3. Параметризации перемежающейся турбулентности . . . . .	196
<b>3. Решение уравнений динамики морей и океанов по времени</b> . . . . .	198
3.1. Метод расщепления как методологическая основа построения численной модели морской циркуляции . . . . .	199
3.2. Метод слабой аппроксимации . . . . .	201
3.3. Метод декомпозиции . . . . .	201
3.4. Метод покомпонентного расщепления . . . . .	202
3.5. Метод расщепления по физическим процессам . . . . .	202
<b>4. Аппроксимация уравнений по пространству</b> . . . . .	204
4.1. Уравнения адаптации. Балансная конечноразностная аппроксимация и искажение локальных свойств решения . . . . .	205
4.2. Анализ дисперсионных свойств численных решений . . . . .	206
4.3. Стационарная ветровая циркуляция в океане с многосвязной границей . . . . .	208

4.4.	Комбинация метода конечных элементов и метода расщепления для двумерного уравнения адвекции-диффузии . . . . .	212
4.5.	Расщепление трехмерных уравнений переноса-диффузии в океане . . . . .	214
<b>5.</b>	<b>Прямые и сопряженные модели . . . . .</b>	<b>217</b>
5.1.	Анализ данных наблюдений и вычислительного эксперимента	217
5.2.	Задача усвоения данных наблюдений . . . . .	218
5.3.	Задача инициализации . . . . .	220
5.4.	Оценка чувствительности решения на основе метода сопряженных уравнений . . . . .	221
<b>6.</b>	<b>Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра . .</b>	<b>223</b>
6.1.	Описание модели и ее особенностей . . . . .	224
6.2.	Условия на поверхности океана и описание экспериментов .	226
6.3.	Основные характеристики среднегодового состояния модели океана с атмосферным воздействием из данных NCEP . . .	227
6.4.	Чувствительность характеристик модельной циркуляции океана к изменениям напряжения трения ветра . . . . .	230
6.5.	Выводы . . . . .	232
<b>7.</b>	<b>Моделирование динамики Гольфстрима с высоким пространственным разрешением . . . . .</b>	<b>233</b>
7.1.	Западная интенсификация течений и отрыв Гольфстрима от берега . . . . .	234
7.2.	Модели Северной Атлантики с высоким пространственным разрешением . . . . .	236
<b>8.</b>	<b>Моделирование полярного океана . . . . .</b>	<b>241</b>
8.1.	Роль полярных областей в климате Земли . . . . .	241
8.2.	Некоторые особенности состояния Северного Ледовитого океана . . . . .	241
8.3.	Особенности современных численных моделей циркуляции СЛО . . . . .	243
8.4.	Описание термодинамики морского льда . . . . .	243
8.5.	Описание динамики морского льда . . . . .	244
8.6.	Основные нерешенные вопросы . . . . .	247
8.7.	Результаты моделирования наблюдаемого состояния СЛО .	248
8.8.	Выводы по результатам моделирования . . . . .	251

<b>9. Модель сезонной изменчивости циркуляции и уровня вод Каспийского моря</b> . . . . .	256
9.1. Уравнения модели гидродинамики внутреннего моря . . . . .	256
9.2. Моделирование внутригодовой изменчивости циркуляции и уровня вод Каспийского моря . . . . .	258
9.3. Сезонная изменчивость циркуляции и уровня вод моря . . . . .	259
9.4. Выводы . . . . .	262
<b>10. Моделирование динамики Белого моря</b> . . . . .	263
10.1. Общая характеристика гидрологических процессов Белого моря . . . . .	263
10.2. Прилив в Горле и Бассейне Белого моря . . . . .	265
10.3. Переходные процессы . . . . .	266
10.4. Остаточная циркуляция . . . . .	266
10.5. Краевые волны . . . . .	267
10.6. Остаточная циркуляция и термохалинная структура вод . . . . .	268
10.7. Роль ветровой циркуляции вод . . . . .	269
10.8. Взаимодействие динамических процессов в Белом море . . . . .	269
<b>Литература</b> . . . . .	271

## Введение

Изучение процессов, формирующих общую циркуляцию морей и океанов, имеет давние традиции. Оно обусловлено исторически потребностями судоходства, рыболовства, прогноза погоды, морскими торговыми и военными операциями.

Математические модели циркуляции морей и океанов направлены на описание и изучение ярких общих закономерностей и явлений, имеющих глобальный характер [1–20, 22–39, 44–55, 57–71, 73–103, 105–151]. К ним относятся прибрежные струйные течения и крупномасштабные океанские круговороты (Гольфстрим, Куро시오, Антарктическое циркумполярное течение и т.д.); процессы экваториальной динамики и явление Эль-Ниньо; мезомасштабные вихри открытого океана и фронтальные ринги; глубокая конвекция и процессы замерзания и таяния льда; глобальный перенос, схематически отражающий сложную трехмерную геометрию многослойной термохалинной циркуляции.

С физической точки зрения под общей циркуляцией океана (ОЦО) понимается среднее по времени движение морских и океанских вод в больших акваториях. Это движение отражает некоторое равновесное состояние трехмерных полей скорости, температуры, солёности и плотности, которое формируется в результате долгопериодного взаимодействия климати-

ческой системы атмосфера–океан–континент–льды. Если в климатической системе выделить океанскую среду, то можно говорить о том, что общая циркуляция океана возбуждается внешними по отношению к морской среде термохалинными (нагревание, охлаждение, осадки, испарение) и механическими (ветер, атмосферное давление, силы лунно-солнечного потенциала) факторами.

Океанские движения развиваются в тонком вращающемся сферическом слое сложной геометрии, ограниченном материковыми границами и донной поверхностью. Характерные масштабы области: по вертикали  $H \sim 4$  км, по горизонтали  $L \sim 10000$  км. Их отношение составляет  $H/L \sim 4 \times 10^{-4}$ . Характерное отношение горизонтального масштаба явления к размеру бассейна  $L_r/L$  также мало и равно, примерно,  $10^{-3}$ . Движения в океане достаточно медленные, особенно в его глубоководных частях, время обращения вод в океанском бассейне около ста лет. При характерной величине скорости течений  $u \sim 1-10$  см/сек, время установления равновесного режима в Мировом океане — более 1 000 лет.

Современным инструментом теоретических и практических исследований крупномасштабной океанской циркуляции является численное моделирование. Приведенные оценки показывают, что задача численного расчета и анализа общей циркуляции океана требует больших вычислительных затрат и высокого сеточного разрешения.

Наша работа посвящена проблемам математического моделирования циркуляции морей и океанов. В разделах 1–6 излагаются некоторые общие вопросы, связанные с формулировкой математических моделей и численных методов их решения. В разделах 7–11 приводятся и обсуждаются результаты численного моделирования конкретных объектов: Мирового океана, Северной Атлантики и Гольфстрима, Северного Ледовитого океана, Каспийского и Белого морей.

## 1. Математическая формулировка задачи

Модель общей циркуляции океана основывается на нелинейных уравнениях крупномасштабной гидротермодинамики. Уравнения модели вытекают из уравнений Рейнольдса, описывающих бароклинное движение вращающейся жидкости с некоторыми традиционными в океанологии приближениями.

Под термином "уравнения Рейнольдса" понимаются осредненные по времени уравнения движения идеальной жидкости. Это связано с тем, что движение в морских и океанских водах почти всегда турбулентное. Его качественный анализ и воспроизведение с помощью "точных" моделей, описывающих весь спектр природных турбулентных пульсаций, неупорядоченных потоков, упорядоченных мезомасштабных структур и крупно-

масштабных циркуляций, невозможны. В этой связи при построении математических моделей используется подход, предложенный Рейнольдсом в 1895 г. Подход основан на переходе от "точных" уравнений к уравнениям, описывающим осредненное турбулентное движение. Эти специальным образом осредненные уравнения называются уравнениями турбулентного движения Рейнольдса.

Техника построения осредненных уравнений состоит в следующем. Искомая вектор-функция  $\psi$  с компонентами: скорость, давление, плотность, и т.д. представляется в виде суммы быстро и медленно меняющихся слагаемых  $\psi'$ ,  $\hat{\psi}$ :

$$\psi = \psi' + \hat{\psi}, \quad \hat{\psi} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \psi dt.$$

Ось времени разбивается на равные интервалы длиной  $\tau$  и исходные уравнения, описывающие нелинейную динамику идеальной жидкости, интегрируются по времени на каждом интервале. В качестве новой искомой вектор-функции выбирается ее медленно изменяющаяся компонента  $\hat{\psi}$ , равная соответствующим средним значениям на каждом интервале длиной  $\tau$ . Интегралы от быстро меняющихся слагаемых, или пульсаций, всех величин на интервалах  $\tau$  полагаются равными нулю. Интегралы от их нелинейных взаимодействий выражаются через комбинации осредненных функций с помощью некоторых физических гипотез *турбулентного замыкания*.

### 1.1. Уравнения общей циркуляции морей и океанов

Уравнения динамики морей и океанов, описывающие осредненную крупномасштабную эволюцию турбулентных термохалинных полей, в сферических координатах  $\lambda$ ,  $\phi$ ,  $z$  имеют вид

$$\frac{du}{dt} + mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} uv - lv = -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial\lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} + D_u, \quad (1.1)$$

$$\frac{dv}{dt} - mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} u^2 + lu = -\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} + D_v, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho_w, \quad (1.3)$$

$$mn \left[ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{u}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{v}{m} \right) \right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + D_T + (\rho_0 c_p)^{-1} I_z \cdot (1 - A), \quad (1.5)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + D_S, \quad (1.6)$$

$$\rho_w = \rho_w(T, S, p) \quad \text{в } \Omega(\lambda, \phi, z), \quad (1.7)$$



где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial \lambda} + nv \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z},$$

$$D_* = mn \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{m}{n} \mu_* \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{n}{m} \mu_* \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Координата  $\lambda$  направлена вдоль широты (на восток), координата  $\phi$  — вдоль долготы (на север), координата  $z$  — по вертикали (вниз от невозмущенной поверхности моря). Система уравнений (1.1)–(1.7) рассматривается на интервале по времени  $(0, t]$  в трехмерной области  $\Omega$ . Область  $\Omega$  ограничена границей  $\partial\Omega$ . Граница состоит из поверхности моря  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$ , боковой поверхности  $\partial\Omega = \partial\Omega_S + \partial\Omega_O$ , где  $\partial\Omega_S$  — твердая береговая, а  $\partial\Omega_O$  — жидкая морская граница и рельефа дна  $H(\lambda, \phi)$ . Здесь  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости,  $T$  — потенциальная температура,  $S$  — соленость,  $p$  — давление,  $\rho_0$  — отсчетная (средняя по области) плотность,  $\rho_w$  — отклонение от нее реальной плотности,  $\rho$  — отклонение потенциальной плотности,  $\nu_u, \nu_v, \nu_T, \nu_S$  — коэффициенты вертикальной турбулентной вязкости и диффузии;  $\mu_u, \mu_v, \mu_T, \mu_S$  — коэффициенты горизонтальной турбулентной вязкости и диффузии;  $l$  — параметр Кориолиса:  $l = 2\Omega_E \sin \phi$ . Величины  $m$  и  $n$  — метрические функции, равные: в сферической системе  $m = \frac{1}{R \cos \phi}$ ,  $n = \frac{1}{R}$ ,  $R$  — радиус Земли,  $\Omega_E$  — угловая скорость вращения Земли; в декартовой системе  $m = n = 1$ . Слагаемые  $D_u, D_v, D_T, D_S$  описывают процессы горизонтальной турбулентной диссипации и диффузии.

К уравнениям (1.1)–(1.7) присоединяются граничные и начальные условия. Более подробно они обсуждаются в специальных пунктах, здесь приводится один из их типичных вариантов.

#### Граничные условия:

по вертикальной переменной при  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$

$$\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_\lambda}{\rho_0}, \quad \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_\phi}{\rho_0}, \quad \frac{d\zeta}{dt} + w = 0, \quad p = p_{\text{atm}}, \quad (1.8)$$

$$\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_T(T - T_s) + Q_T, \quad \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = \gamma_S(S - S_s) + Q_S; \quad (1.9)$$

по вертикальной переменной при  $z = H(\lambda, \phi)$

$$w = m \frac{\partial H}{\partial \lambda} u + n \frac{\partial H}{\partial \phi} v, \quad (\mathbf{D}u, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (\mathbf{D}v, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{D}T, \mathbf{n}_H) = 0, \quad (\mathbf{D}S, \mathbf{n}_H) = 0; \quad (1.11)$$

на боковой поверхности  $\Sigma$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla u, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla v, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \\ (\nabla T, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \quad (\nabla S, \mathbf{n}_\Sigma) = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\tau_\lambda, \tau_\phi$  — компоненты напряжения трения ветра,  $T_s, S_s, Q_T, Q_S$  — заданные значения температуры, солёности, потоков тепла и соли на поверхности воды,  $p_{\text{atm}}$  — атмосферное давление,  $\mathbf{n}$  — нормаль к соответствующей поверхности,

$$\mathbf{n}_H = -m \frac{\partial H}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda - n \frac{\partial H}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{n}_\Sigma = \mathbf{i}_\lambda \cos(\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{i}_\lambda) + \mathbf{i}_\theta \cos(\mathbf{n}_\Sigma, \mathbf{i}_\theta),$$

$$\mathbf{D}a = \mu_a \left( m \frac{\partial a}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + n \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \right) + \nu_a \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{i}_z, \quad \nabla a = \mu_a \left( m \frac{\partial a}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + n \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \right).$$

**Начальные условия** (при  $t = 0$ ):

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad T = T_0, \quad S = S_0, \quad \zeta = \zeta_0. \quad (1.13)$$

Функция  $\rho_w(T, S, p)$ , определяющая уравнение состояния морской воды выбирается на основе эмпирических соотношений. В некоторых случаях, например, для неглубоких морей, плотность может зависеть лишь от температуры и солёности:  $\rho_w = \rho_w(T, S)$ .

Система уравнений (1.1)–(1.7) по традиции в океанологии называется системой "примитивных" уравнений общей циркуляции. Она получена из классических уравнений гидродинамики вращающейся жидкости при использовании традиционных в океанологии приближений Буссинеска, гидростатики, несжимаемости, линейного замыкания турбулентного обмена моментом, теплом и солью.

**Доопределение задачи.** Уравнения (1.1)–(1.7) сформулированы в предположении о том, что во все моменты времени жидкость устойчиво стратифицирована по плотности. Выполнение физического условия устойчивой стратификации требует соответствующего математического выражения — доопределения математической постановки задачи. С физической точки зрения это является параметризацией подсеточного процесса конвективного перемешивания. Этот процесс не описывается уравнениями общей циркуляции и его следует параметризовать.

Одной из возможных параметризаций конвективного перемешивания является введение нелинейной зависимости коэффициента вертикальной турбулентной диффузии тепла и соли от градиента потенциальной плотности по вертикали. Например, можно положить

$$\nu_T = \nu_S \equiv \nu_{\min} + \frac{(\nu_{\max} - \nu_{\min})}{2} \left( 1 - \text{sign} \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right) \quad (1.14)$$

или

$$\nu_T = \nu_S \equiv \nu_{\min} \exp \left( \alpha_1 \left[ 1 - \tanh \left( \alpha_2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right] \right), \quad (1.15)$$

где  $\nu_{\max}, \nu_{\min}, \alpha_1, \alpha_2$  — положительные постоянные,  $\nu_{\max} \gg \nu_{\min}$ ,  $\alpha_1 = \frac{1}{2} \ln [\nu_{\max}/\nu_{\min}]$ .

## 1.2. Граничные условия

Задача общей циркуляции морей и океанов формулируется как начально-краевая задача для системы уравнений (1.1)–(1.7). При постановке краевых условий границу области  $\Omega$  разделяют на несколько частей: верхнюю поверхность раздела атмосфера–море, нижнюю донную поверхность, боковую береговую границу. Верхняя граница в общем случае является движущейся поверхностью моря  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$ . В большинстве рассматриваемых случаев для донной поверхности выполняется ограничение  $z = H(\lambda, \phi) \geq H_0 \geq 0$ , так что береговой контур неподвижен.

Ранее (третье соотношение (1.8)) приведено кинематическое граничное условие без учета потока массы на поверхности воды. С учетом потока массы (осадков, испарения, таяния льда) динамика верхней границы моря описывается следующим неоднородным уравнением свободной поверхности моря (Каменкович, 1973):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\zeta + w = \rho_f^{-1}W, \quad (1.16)$$

где  $\rho_f$  — плотность пресной воды;  $W = P + M - E$  — интенсивность потока воды в море [ $\text{кг с}^{-1} \text{ м}^{-2}$ ];  $P$ ,  $E$  — интенсивность осадков и испарения;  $M$  — интенсивность таяния льда,  $M < 0$ , если происходит намерзание льда.

**Условия на границах атмосфера–океан и лед–океан.** Граничные условия для физических потоков субстанций (соли, тепла, импульса) на границе раздела атмосфера–море в общем случае можно представить как:

$$F = F_{\text{ext}} + (c_p P + c_M M - c_E E). \quad (1.17)$$

Первый член правой части ( $F_{\text{ext}}$ ) — это поток субстанции, не связанный с потоком воды через границу (например, касательное напряжение трения ветра, поток явного тепла). Второй член — перенос субстанции, связанный с потоком воды через границу.

Не углубляясь в оценки величин потоков различных субстанций, связанных с потоком воды, отметим, что наиболее значимые для крупномасштабной термогидродинамики морей и океанов потоки — это поток скрытого тепла при испарении и фазовых переходах вода–лед, поток соли при фазовых переходах вода–лед, вода–пар и, при некоторых условиях, поток тепла при осадках на лед.

При изменении массы жидкости свойства ее субстанции могут изменяться и при нулевых внешних потоках. Пример — это изменение солености морской воды при испарении и осадках. Аналогичный эффект имеет место и для других характеристик жидкости. Например, осадки, при пренебрежении приносимыми с осадками теплом и импульсом, должны изменять температуру и кинетическую энергию верхнего слоя моря только из-за увеличения массы воды. Испарение должно приводить к изменению теплозапаса

столба воды не только как результат потока скрытого тепла, но и вследствие уменьшения массы воды. Оценки показывают, что для шельфовых мелководных районов влияние испарения на состояние морей и океанов не должно ограничиваться только учетом потока скрытого тепла.

Граничные условия на поверхности моря  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$ , удовлетворяющие закону сохранения субстанций при изменении объема жидкости из-за массообмена через поверхность, могут быть выбраны следующим образом (Ибраев, 2002):

$$\begin{aligned}\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} &= -(1 - A)\rho_0^{-1}\tau^\lambda + \rho_f^{-1}Wu, \\ \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} &= -(1 - A)\rho_0^{-1}\tau^\phi + \rho_f^{-1}Wv,\end{aligned}\tag{1.18}$$

$$p = p_a,\tag{1.19}$$

$$-c_p\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} + c_p T \rho_f^{-1}W = \rho_0^{-1}[Q_h^{aw}(1 - A) + Q_h^{iw}A],\tag{1.20}$$

$$-\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} + S\rho_0^{-1}W = \rho_0^{-1}S^{iw}MA.\tag{1.21}$$

Здесь  $\rho_f$  — плотность пресной воды;  $Q_h^{aw}(\lambda, \phi, t)$  — поток тепла на границе воздух-вода;  $Q_h^{iw}(\lambda, \phi, t)$  — поток тепла на границе лед-вода;  $c_p$  — теплоемкость морской воды;  $S^{iw}M$  — интенсивность выделения соли в море при намерзании и таянии льда.

**Условия на границах атмосфера-океан и лед-океан с параметризацией потоков воды.** В случаях, когда водообмен через границу атмосфера-океан оказывает несущественное влияние, например, при моделировании внутрисезонной изменчивости океана, в уравнении для свободной поверхности моря при описании потоков импульса и тепла влиянием переноса воды можно пренебречь, а опресняющее (осолоняющее) влияние осадков и испарения — параметризовать. В этом случае в уравнении для свободной поверхности и граничных условиях для потока импульса и тепла полагают  $W = 0$ , а для потока солености ставится условие:

$$-\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = (E - P)S.\tag{1.22}$$

Отметим, что применение условия (1.22) в общем случае приводит к нарушению закона сохранения соли в области. Этот факт часто игнорируется. Как показали эксперименты с моделью Мирового океана (Roulett and Madec, 2000), нарушение закона сохранения соли в области из-за применения условия (1.22) становится значимым на временном интервале 25 лет. В экспериментах с моделью Каспийского моря неконсервативность условия (1.22) приводит к систематическому повышению солености на 1–2 ‰/год в относительно изолированных восточных районах Северного Каспия.

**Учет потока солнечной радиации.** Хотя более половины солнечной радиации, проникающей в морскую воду, поглощается в верхнем полуметровом слое (длинноволновая часть солнечной радиации), оставшаяся коротковолновая часть может значительно влиять на термодинамику верхнего слоя моря. Подповерхностный профиль потока солнечной энергии в большинстве случаев рассчитывается по двухполосной формуле (Paulson and Simpson (1977)):

$$I(z) = Q_S [R \cdot \exp(-z/\zeta_1) + (1 - R) \cdot \exp(-z/\zeta_2)], \quad (1.23)$$

где  $Q_S$  — поток солнечной энергии на поверхности моря;  $R$  — эмпирическая константа;  $\zeta_1, \zeta_2$  — вертикальные масштабы ослабления для длинной и коротковолновой части солнечной радиации.

**Граничные условия с учетом температуры и солености на поверхности моря.** При отсутствии надежных данных о потоках тепла, испарения и осадков, а также когда постановка задачи позволяет, в граничных условиях для уравнений переноса тепла и соли используются двумерные распределения значений температуры и солености на поверхности морей и океанов. Это — краевое условие Дирихле:

$$T = T^S, \quad S = S^S \quad (1.24)$$

или Ньютона :

$$\begin{aligned} \nu_T \frac{\partial T}{\partial z} &= \gamma(T^S - T), \\ \nu_S \frac{\partial S}{\partial z} &= \gamma(S^S - S). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Иногда ставятся так называемые "смешанные краевые условия" Ньютона — для температуры

$$\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_T(T - T_s)$$

и Неймана — для солености ( $\gamma_S = 0$ )

$$\nu_S \frac{\partial S}{\partial z} = Q_S.$$

Постановка смешанных краевых условий лучше отражает реальную ситуацию. Поток тепла в океан определяется локальными условиями на поверхности и для него выполняется условие третьего рода (условие Ньютона). Поток солености связан с удаленными от поверхности моря процессами формирования осадков.

**Линеаризация условия на свободной поверхности и условие "твердой" крышки.** Граничное условие (1.16) для некоторых задач можно упростить. Линеаризуем уравнение (1.16) относительно малых возмущений свободной поверхности  $\zeta$ , предполагая, что  $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right| \gg \left| u \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \right|, \left| \nu \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \right|$ . В этом случае (1.16) сводится к следующему:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + w = 0. \quad (1.26)$$

Условие (1.26) отражает частичную линеаризацию относительно состояния покоя  $\zeta(\lambda, \phi, t) = 0$ . Полная линеаризация включает также условие  $\left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right| \gg \left| \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \right|_{z=0}$  и в (1.26) вместо  $w$ , определяемой на свободной поверхности, должна фигурировать  $w|_{z=0}$  — вертикальная скорость на невозмущенной поверхности моря  $z = 0$  (Бреховских, Гончаров, 1982). Заметим, что при полной линеаризации в общем случае невозможно удовлетворить условию сохранения соли в бассейне. Для применимости линейного приближения при описании баротропных волн на мелкой воде (при  $H \ll L$ ) необходимо, чтобы выполнялось условие  $\zeta/H \ll 1$  (Бреховских, Гончаров, 1982).

Часто в задачах общей циркуляции верхнюю границу моря отождествляют с невозмущенной поверхностью  $z = 0$ . В этом случае вместо двух условий на подвижной границе  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$ : для вертикальной скорости (1.16) и давления (1.19), ставится одно условие

$$w = 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (1.27)$$

известное как приближение "твердой" крышки.

**Условия на дне.** В некоторых случаях на дне моря, при  $z = H(\lambda, \phi)$ , вместо второго и третьего условий (1.10) ставятся условия трения о дно:

$$\nu_u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\tau_B^\lambda}{\rho_0}, \quad \nu_v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\tau_B^\phi}{\rho_0}, \quad (1.28)$$

где  $\tau_B^\lambda(\lambda, \phi, t)$ ,  $\tau_B^\phi(\lambda, \phi, t)$  — зональная и меридиональная компоненты напряжения трения о дно.

**Условия на боковых границах.** По физическому смыслу различаются два типа боковых границ — твердые и жидкие. На твердых боковых границах ( $\partial \Omega_S$ ) ставятся условия свободного скольжения вдоль границ:

$$\mathbf{v}_n = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\tau}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (1.30)$$

или условия прилипания:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad (1.31)$$

а также условия тепло- и солиизоляции — два последних соотношения (1.13).

На участках жидких боковых границ, где вода втекает, можно поставить условия

$$(u, \nu, T, S) = (u^{in}, \nu^{in}, T^{in}, S^{in}), \quad (1.32)$$

а на участках, где вода вытекает, —

$$(u, \nu) = (u^{out}, \nu^{out}), \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (1.34)$$

Для расчета динамики в искусственно вырезанных акваториях можно также использовать условия излучения волн из рассматриваемой области.

### 1.3. Начальные условия

Основной проблемой, связанной с постановкой начальных условий (1.13), является отсутствие данных наблюдений о полях горизонтальных компонент вектора скорости  $u_0$ ,  $v_0$ , уровня  $\zeta_0$ , температуры и солёности  $T_0$ ,  $S_0$ . Начальные поля должны быть заданы в момент времени  $t = 0$  во всех точках трехмерной области  $\Omega(\lambda, \phi, z)$ . При решении практических задач, для большинства рассматриваемых морских и океанских акваторий, информация о начальных полях весьма скудна. Измерения гидрологических полей в один момент времени, во всех точках  $\Omega(\lambda, \phi, z)$  почти невыполнимая, дорогостоящая процедура. В этой связи в задаче динамики океана возникают важные вспомогательные задачи: построение динамически согласованных полей и построение собственно начальных условий. Вариационный метод решения задачи инициализации (построения начальных полей) рассматривается далее в разделе 6, здесь мы отмечаем некоторые аспекты, связанные с первой задачей.

Исторические массивы данных о температуре и солёности представляют собой комбинацию различных типов данных. В них входят распределения температуры и солёности по вертикали в отдельных точках горизонтальной плоскости; данные на 2-мерных плоскостях — разрезах  $(\lambda, z)$ ,  $(\phi, z)$ ; измерения уровня моря и температуры поверхности, полученные со спутников, и т.д. По этим данным методами интерполяции и экстраполяции восстанавливаются 3-мерные распределения полей температуры и солёности. В большинстве случаев поэтому поля относятся к некоторому временному интервалу, например: месяц, сезон или год.

Данные наблюдений о поле скорости более скудны — для большого числа акваторий они практически отсутствуют. В этой связи возникает задача построения полей течений по данным измерений температуры и солености.

Основное требование к реконструированным полям температуры, солености и течений состоит в том, чтобы при использовании их в модели в качестве начальных условий в модельном решении отсутствовал инициализационный шок. Инициализационный шок — это резкое изменение решения математической модели на начальном интервале ее интегрирования по времени. Он вызывается рассогласованными начальными условиями и сопровождается большими градиентами решения по пространству и времени. К динамически согласованным полям течений, температуры и солености можно отнести те, которые не вызывают инициализационный шок в модельном решении.

#### 1.4. Закон сохранения полной энергии

Пусть в модели крупномасштабной циркуляции отсутствуют источники и стоки энергии (т.е. из (1.1)–(1.12) исключены члены, описывающие турбулентный обмен, трение и внешние силы) и на поверхности используется условие твердой крышки. Пусть также функция состояния морской воды  $\rho_w(T, S, p)$  такова, что из уравнений для температуры и солености вытекает уравнение для потенциальной плотности морской воды  $\rho$  вида

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (1.35)$$

В этом случае имеет место закон сохранения полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \frac{1}{mn} \left[ \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2} - g\rho z \right] d\Omega = 0. \quad (1.36)$$

Закон сохранения (1.36) справедлив также при включении в уравнение для плотности морской воды слагаемых, описывающих горизонтальный турбулентный обмен:

$$\frac{d\rho}{dt} = D\rho. \quad (1.37)$$

#### 1.5. Модель общей циркуляции океана в $\sigma$ -системе координат

Наряду с системой "примитивных" уравнений общей циркуляции морей и океанов, записанной в рамках традиционных приближений, используются и другие постановки задач. Условно их можно разбить на 3 группы: *обобщенные*, *концептуальные* и *альтернативные* модели. Обобщенные мо-



дели являются развитием исходной, более полно описывающие спектр допустимых решений. Характерным примером является негидростатическая модель морской динамики, основанная на полном уравнении для вертикального компонента вектора скорости [25].

Концептуальные, или фильтрованные модели, вытекают из исходной при дополнительных упрощающих предположениях. Они используются для выяснения качественных особенностей выделенного явления, входящего в спектр допустимых решений исходной системы. Упрощения связаны с выделением некоторых пространственно-временных масштабов, масштабным анализом слагаемых в уравнениях (1.1)–(1.7) и пренебрежением малых членов. Решения фильтрованных моделей описывают асимптотическое поведение общих решений исходной системы. Их использование полезно как для улучшения понимания отдельных процессов и элементов, слагающих общую картину морской циркуляции, так и для оценки необходимого пространственно-временного разрешения численной модели, поиска и апробации эффективных численных алгоритмов.

Под альтернативными понимаются модели близкие к исходной, но записанные для других независимых переменных и/или для других искомым функций. Альтернативные модели могут быть эквивалентными в некотором смысле исходной, но могут и отличаться от нее. Отличие часто происходит за счет изменения граничных и начальных условий, а также слагаемых, описывающих турбулентный обмен. В этой группе наиболее известными являются модели, основанные на различном представлении вертикальной координаты. Это — обычные  $z$ -модели, описываемые системой (1.1)–(1.7);  $\rho$ -модели, где в качестве вертикальной используется потенциальная плотность, отнесенная к заданному давлению; и  $\sigma$ -модели с вертикальной координатой, следующей изолиниям рельефа дна. Наряду с  $z$ -моделями, разработанными в ИВМ РАН и ИО РАН, результаты расчетов которых приводятся в трех заключительных разделах нашей работы, в ИВМ РАН и ИВМиМГ СО РАН созданы также модели, использующие  $\sigma$ -систему координат. Они применяются в различных экспериментах по расчету крупномасштабной динамики Мирового океана, Северной Атлантики и Гольф-стрима с высоким пространственным разрешением, а также совместной глобальной циркуляцией атмосферы и океана [2, 151].

Приведем формулировку модели динамики океана, записанной в  $\sigma$ -системе координат [2]. Введем новую вертикальную координату  $\sigma = z/H(\lambda, \phi)$ . Тогда уравнения (1.1)–(1.7) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} uv - lv = \\ - \frac{m}{\rho_0} \left[ \frac{\partial p}{\partial \lambda} - g \frac{\partial H}{\partial \lambda} \sigma \rho \right] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{1}{H} D_{1u}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\frac{dv}{dt} - mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} u^2 + lu = -\frac{n}{\rho_0} \left[ \frac{\partial p}{\partial\phi} - g \frac{\partial H}{\partial\phi} \sigma \rho \right] + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial\sigma} \nu_v \frac{\partial v}{\partial\sigma} + \frac{1}{H} D_{1v}, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial p}{\partial\sigma} = gH\rho_w, \quad (1.40)$$

$$mn \left[ \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{Hu}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{Hv}{m} \right) \right] + \frac{\partial w_1}{\partial\sigma} = 0, \quad (1.41)$$

$$H \frac{dT}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial\sigma} \nu_T \frac{\partial T}{\partial\sigma} + D_{1T}, \quad (1.42)$$

$$H \frac{dS}{dt} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial\sigma} \nu_S \frac{\partial S}{\partial\sigma} + D_{1S}, \quad (1.43)$$

$$\rho_w = \rho_w(T, S, p) \quad \text{в } \Omega_1(\lambda, \phi, \sigma). \quad (1.44)$$

Здесь

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial\lambda} + nv \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{H} w_1 \frac{\partial}{\partial\sigma},$$

$$w_1 = w + m\sigma \left[ \frac{\partial H}{\partial\lambda} u + \frac{n}{m} \frac{\partial H}{\partial\phi} v \right]. \quad (1.45)$$

Соответствующим образом переписутся также слагаемые, параметризующие горизонтальный турбулентный обмен и граничные условия [2, 150].

## 2. Параметризация процессов турбулентного обмена в моделях общей циркуляции океана

В уравнениях Рейнольдса (1.1)–(1.7) вид слагаемых, описывающих процессы турбулентного обмена, выбран простейшим образом. Предположено, что макромасштабный турбулентный обмен моментом, теплом и солью подобен процессу молекулярного обмена с большими коэффициентами  $\mu_u, \mu_v, \mu_T, \mu_S, \nu_u, \nu_v, \nu_T, \nu_S$ .

Процессы пульсационных масштабов, малых по отношению к описываемым в модели явлениям, называют "подсеточными". Это название связано с малыми размерами параметризуемых процессов по сравнению с шагом пространственной сетки при численном решении задачи.

Изучение природных процессов, морских и океанских движений показывает, что во многих случаях используемая простейшая аналогия с хаотическим молекулярным движением не оправдывается. Процессы малых, не описываемых уравнениями общей циркуляции масштабов, имеют сложную природу. Их специфика должна учитываться в математических моделях. В морях и океанах вместе с неупорядоченными хаотическими пульсациями

имеются динамически активные высокоэнергетические волновые процессы, микромасштабные и мезомасштабные структуры, обладающие определенной регулярностью и имеющие свои особенности. Их динамика, взаимодействие друг с другом и с крупномасштабной циркуляцией имеет сложный характер, что следует отразить в соответствующих параметризациях.

Процессы турбулентности в океане принято разделять на вертикальный и горизонтальный обмен. Это связано с выделением вертикального направления: (а) — по масштабу явлений ( $H \ll L$ ) и (б) — по наличию ярко выраженной средней стратификации по плотности ( $\hat{\rho} = \hat{\rho}(z)$ ).

Исследования различных аспектов турбулентности представляют собой чрезвычайно обширный раздел физической и геофизических наук (см., например, [52] и [69]). Здесь мы кратко остановимся лишь на современных формулировках параметризаций ветрового перемешивания и плотностной конвекции, используемых в моделях общей циркуляции океана. Основная задача этих параметризаций состоит в разрешении верхнего перемешанного слоя океана (ВПСО), который не воспроизводится явно моделями циркуляции, но представляет собой важный элемент в цепи передачи атмосферного воздействия на океан.

Основной гипотезой турбулентности в моделях циркуляции остается традиционная К-гипотеза, когда процессы перемешивания рассчитываются через средние градиенты крупномасштабных характеристик. Так, для зонального компонента скорости течения эффект вертикального перемешивания подсеточного масштаба представляется в дивергентной форме К-параметризованных турбулентных потоков:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_u \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

где  $\nu_u$  — кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена количеством движения, или турбулентный коэффициент вязкости. Соответственно для переносов температуры и солёности вводятся турбулентные коэффициенты диффузии  $\nu_T$  и  $\nu_S$ . Теперь задачу упрощенно можно сформулировать как определение элементов матриц коэффициентов турбулентного обмена, исключая пока процессы глубокой конвекции.

Коэффициент  $\nu_u$  вычисляется согласно классическому соотношению Колмогорова [32]:

$$\nu_u = c_s^u \sqrt{e} L, \quad \nu_{T,S} = c_s^p \sqrt{e} L, \quad (2.1)$$

где  $c_s^u$  и  $c_s^p$  — безразмерные функции устойчивости (учет "прямого" влияния стратификации динамических и термохалинных характеристик);  $e$  — кинетическая энергия турбулентности (КЭТ),  $L$  — некий геометрический масштаб, характеризующий турбулентность (макромасштаб турбулентности). В [81] дана сводка различных параметризаций функций устойчивости

разного уровня учета физических эффектов. В частности, при их воспроизведении учитывается влияние внутренних волн, возникновение или обрушение которых влияет на КЭТ. КЭТ является основной физической характеристикой, используемой для описания турбулентных процессов подсеточного масштаба. Она определяется следующим образом:

$$e = 0.5 \cdot \overline{(u' \cdot u' + v' \cdot v' + w' \cdot w')},$$

где  $u', v'$  и  $w'$  — турбулентные возмущения зонального, меридионального и вертикального компонентов скорости среднего (крупномасштабного) течения. Вектор  $(u', v', w')$  будем называть "турбулентной скоростью". Черта сверху означает осреднение по ансамблю реализаций турбулентного процесса, что в случае стационарности идентично осреднению по времени.

## 2.1. Модели развитой турбулентности

В связи с малостью вертикального масштаба по отношению к горизонтальному, хорошим приближением для описания турбулентного перемешивания служит одномерное эволюционное уравнение для КЭТ, которое можно представить в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_e \frac{\partial e}{\partial z} \right) = P + B - \varepsilon, \quad (2.2)$$

где  $\nu_e = \nu_u / \sigma_e$  — коэффициент диффузии КЭТ, связанный с коэффициентом турбулентной вязкости переходной функцией  $\sigma_e$ , которая мало отличается от единицы [81]. Функции  $P$  и  $B$  представляют собой скорости генерации КЭТ в результате сдвига скорости среднего течения и эффектов плавучести (в случае неустойчивой стратификации  $B > 0$  представляет собой источник КЭТ, а при устойчивой  $B < 0$  — сток КЭТ). Эти величины есть характеристики среднего состояния и "поступают" из модели общей циркуляции:

$$P = \nu_u G_u^2, \quad B = -\nu_T N^2, \quad (2.3)$$

где

$$G_u^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2, \quad N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z},$$

здесь  $G_u$  — частота сдвига течения,  $N$  — частота Вайсяля-Брента, случай  $\frac{\partial \rho}{\partial z} > 0$  соответствует неустойчивой стратификации. Ось  $0z$  направлена вверх от дна океана.

Функция  $\varepsilon$  в (2.2) — скорость диссипации КЭТ из-за вязкости среды во внутреннюю тепловую энергию воды (далее будем называть  $\varepsilon$  просто диссипацией). Согласно соображениям размерности ([52]), диссипация связана с масштабом турбулентности  $L$  соотношением:

$$\varepsilon = (c_s^0)^3 \frac{e^{3/2}}{L}, \quad (2.4)$$

где  $c_s^0 = 0.5562$  — значение функции устойчивости при нейтральной стратификации, а  $L$  — макромасштаб турбулентности, характеризующий средний размер вихрей, формирующих ВПСО. По сути  $L$  должен воспроизводить размер перемешанного слоя. Теперь для замыкания (2.1)–(2.4) требуется определить либо  $\varepsilon$ , либо  $L$ . Имеются два типа дифференциальных моделей с процедурами замыкания, основанными на эволюционных балансовых соотношениях для  $L$  или для  $\varepsilon$ .

В модели Меллора и Ямада [126] используется эволюционное уравнение для  $(eL)^1$ , а группа так называемых  $(k-\varepsilon)$ -моделей для описания турбулентных процессов подсеточного масштаба использует уравнение для скорости диссипации КЭТ  $\varepsilon$ .

Анализ результатов ряда численных экспериментов не показал заметных различий результатов расчетов по  $(k-\varepsilon)$ - и  $(eL)$ -моделям. Заметим, что при выводе балансового уравнения для  $\varepsilon$  используется меньше дополнительных допущений, чем при выводе уравнения для  $(eL)$ . Кроме того, величина  $\varepsilon$  измеряется приборами, что дает преимущество дальнейшего уточнения параметров в уравнении для диссипации.

Учитывая данные обстоятельства, рассмотрим модель, основанную на балансовом уравнении для диссипации. Учет эволюции  $\varepsilon$  принципиален, поскольку основная доля КЭТ именно диссипирует, и определить характеристики турбулентности в равновесном состоянии без учета  $\varepsilon$  невозможно. Уравнение для диссипации имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{\varepsilon}{e} (c_{\varepsilon 1} P + c_{\varepsilon 3} B - c_{\varepsilon 2} \varepsilon), \quad (2.5)$$

где  $\nu_\varepsilon = \nu_u / \sigma_\varepsilon$  — коэффициент диффузии скорости диссипации,  $\sigma_\varepsilon$  — безразмерная переходная функция, хорошим первым приближением которой является значение  $\sigma_\varepsilon = 1.08$  [81]. В первом приближении полуэмпирические константы  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$  и  $c_{\varepsilon 3}$  определяются следующим образом:  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$  и  $c_{\varepsilon 3} = -0.4$  при устойчивой либо  $c_{\varepsilon 3} = 1.0$  при неустойчивой стратификации, причем величина  $c_{\varepsilon 3}$  в общем виде зависит от вида и диапазона изменений функции  $c_s^\rho$  из (2.1).

<sup>1</sup>По сути в [125] создана иерархия турбулентных моделей для моментов турбулентных характеристик разного уровня. Цитируемая здесь модель обычно маркируется как замыкание "уровня 2.5".

Из (2.1) и (2.4) следует уравнение для коэффициента турбулентной вязкости:

$$\nu_u = c_k \frac{e^2}{\varepsilon}, \quad (2.6)$$

где  $c_k = (c_s^0)^3 c_s^u$ . Система замыкается одним из полуэмпирических методов расчета функции устойчивости ([81]):

$$c_s^u = c_s^u(N, G_u, e, \varepsilon). \quad (2.7)$$

Чтобы получить коэффициенты турбулентной диффузии, требуется также рассчитать турбулентное число Прандтля, на чем, однако, здесь не будем останавливаться подробно.

Сформулируем для данной задачи граничные условия. На поверхности океана поток КЭТ состоит из потока энергии, связанного с обрушением ветровых волн  $M_w$ , плюс поток из-за сдвига течения в тонком приповерхностном слое  $\delta$ :

$$\nu_e \frac{\partial e}{\partial z} = M_w + \int_0^\delta \left( \bar{\tau}_w^\rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \right) dz, \quad \text{при } z = \zeta,$$

где  $\bar{\tau}_w^\rightarrow$  — напряжение трения в воде. В [46] показано, что оба эти компонента пропорциональны величине куба скорости трения в воде у поверхности океана  $v_*$ :

$$v_* = \left( \frac{\sqrt{\tau_{ax}^2 + \tau_{ay}^2}}{\rho_w} \right)^{1/2},$$

где  $\tau_{ax}$  и  $\tau_{ay}$  — зональный и меридиональный компоненты вектора ветрового напряжения  $\bar{\tau}_a^\rightarrow$ ,  $\rho_w$  — плотность воды у поверхности океана. Таким образом имеем

$$\nu_e \frac{\partial e}{\partial z} = C_g v_*^3, \quad \text{при } z = \zeta, \quad (2.8)$$

где  $C_g \approx 10$  — полуэмпирический параметр (см. его оценки, например, в [11]). На дне океана, в пристеночном слое почти нейтральной стратификации, будем полагать отсутствие потока (источника) КЭТ, а значит, и наличие придонного слоя с постоянным значением КЭТ:

$$e = \left( \frac{v_{b*}}{c_s^0} \right)^2, \quad \text{при } z = -H, \quad (2.9)$$

где  $v_{b*} = (\nu_u \cdot G_u)^{1/2}$  — скорость трения на дне.

Уравнение для диссипации, в отличие от уравнения для КЭТ, содержит нелинейность, и, как показывают эксперименты [81], из-за больших градиентов у поверхности и дна океана при решении (2.5) с граничными условиями Дирихле для  $\varepsilon$  возникает проблема повышенной чувствительности решения к шагу сетки. Эту трудность можно преодолеть, заменив граничные условия Дирихле на условия Неймана и сформулировав их следующим образом [81]. В (2.4) подставить выражение для масштаба турбулентности у стенки:  $L = \kappa(\tilde{z} + z_{o,b})$ , где  $\kappa = 0.4$  — постоянная Кармана,  $\tilde{z}$  — расстояние от поверхности или дна, соответственно,  $z_{o,b}$  — параметры шероховатости на поверхности и дне океана (заданные функции от характерных средних значений шероховатости соответствующей поверхности, молекулярной вязкости и скорости трения). Продифференцировав затем полученные выражения по  $\tilde{z}$ , имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -(c_s^0)^3 \frac{e^{3/2}}{\kappa(\tilde{z} + z_{o,b})^2}, \quad z = \zeta, (-H). \quad (2.10)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы (2.2), (2.3), (2.5)–(2.10).

## 2.2. Параметризация глубокой конвекции

Глубокая конвекция открытого океана происходит на относительно ограниченной акватории океана и обладает ярко выраженным свойством перемежаемости во времени и пространстве. Однако роль ее в формировании циркуляции Мирового океана велика [120]. Так, например, глубокая конвекция является центральным звеном в формировании ячейки меридиональной термохалинной циркуляции в Северной Атлантике, интенсивность которой во многом определяет крупномасштабные особенности как общей циркуляции Атлантики, так и всего глубоководного обмена в Мировом океане.

Можно выделить три подхода к параметризации и воспроизведению глубокой плотностной конвекции. Первый традиционный и наиболее распространенный подход представляет собой гидростатическое приспособление в моделях с гидростатическим уравнением, когда при обнаружении гидростатической неустойчивости соответствующие участки профилей температуры и солености мгновенно "перемешиваются" до устранения неустойчивости при сохранении запасов тепла и соли.

Второй подход основывается на том, что в моделях турбулентности существует описание эффектов плавучести (см. выше компонент  $B$  в уравнениях для КЭТ и диссипации), и коэффициенты турбулентного обмена растут при достижении гидростатической неустойчивости. Но, как показали многочисленные расчеты, они все же оказываются недостаточными. Это

закономерно, поскольку конвективные процессы открытого океана в стадии своего достаточно интенсивного развития происходят по физическим законам, отличным от законов генерации мелкомасштабной турбулентности или когерентных мезомасштабных структур типа вихрей Ленгмюра. В этом случае модели либо все же дополняются гидростатическим приспособлением, либо (как отмечено ранее в 2.1) при неустойчивой стратификации плотности коэффициенты турбулентного обмена экспоненциально устремляются к большим асимптотическим величинам, задающимся эмпирически [121, 143].

В первом приближении различие физики явлений, происходящих в перемешанном и конвективном слоях можно определить так. По мере распространения фронта турбулентности от источников в перемешанном слое жидкие частицы смешиваются, теряя свои индивидуальные особенности. В то время как жидкие частицы проходят конвективный слой насквозь почти без смещения с окружающей средой, вызывая вовлечение с направленной вверх компонентой скорости окружающих вод.

Как показывают наблюдения в океане, глубокая конвекция происходит путем конвективных "плюмажей" и "труб", представляющих группы плюмажей. Оценки горизонтальных масштабов плюмажей составляют 1–2 км, а труб — 10–20 км [123]. Эти явления могут быть непосредственно воспроизведены негидростатическими моделями высокого разрешения [3].

Непосредственное воспроизведение такого рода явлений в моделях общей циркуляции пока затруднительно. При этом отметим, что временные масштабы плюмажей и труб таковы, что на них влияет вращение Земли; а сами эти конвективные элементы могут побуждать бароклинную неустойчивость. В связи с этим третий подход по воспроизведению перемешивания состоит в дополнении модели турбулентности той или иной схемой расчета интегральных подсеточных эффектов плюмажей и труб.

Типичные вертикальные масштабы верхнего перемешанного слоя океана составляют десятки метров (до 200–300 м), а масштабы конвективного слоя достигают 1000–2000 м. Таким образом между зоной перемешивания и конвекции, распространяющейся с поверхности океана, и придонным пограничным слоем в океане имеет место зона толщиной порядка 2–3 км, где развивается перемешивание небольшой интенсивности (так называемая перемежающаяся турбулентность), механизмы генерации и развития которого существенно отличаются от рассмотренных выше. При этом коэффициенты обмена порой существенно превышают молекулярные значения.

### **2.3. Параметризации перемежающейся турбулентности**

Расчеты по модели развитой турбулентности позволяют выделить область, где собственно развитая турбулентность мала или отсутству-



ет ( $e < e_{\min}$ ). Здесь применяется параметризация перемежающейся турбулентности. Обмены в этой зоне обусловлены в основном тремя процессами: сдвигом течения различной природы, обрушением внутренних волн и двойной диффузией. Существует достаточное количество оценок коэффициентов турбулентности сдвиговой природы на основе данных специальных наблюдений; коэффициенты, связанные с обрушением внутренних волн, изучены слабее и, как правило, задаются некими фоновыми константами [115].

С физической точки зрения двойная диффузия в океане есть результат превышения скорости молекулярной диффузии тепла над скоростью диффузии соли. Явление это имеет место при *устойчивой* вертикальной стратификации потенциальной плотности воды. Двойная диффузия происходит в двух случаях. Первый случай состоит в том, что вертикальный градиент солености способствует ослаблению стратификации плотности, то есть соленость убывает с глубиной. Перемешивание при этом называют феноменом "соленостных пальцев". Это явление чаще наблюдается в районе тропиков и субтропиков, где на поверхности океана испарение превышает осадки и величина солености уменьшается с глубиной. Второй случай имеет место при наличии температурной инверсии, когда вертикальная стратификация стабилизируется соленостью. Такое перемешивание называют феноменом "диффузионной конвекции". Наиболее мощные и долго живущие температурные инверсии существуют в арктике и субарктике и являются результатами развития конвекции.

Для параметризации кинематических коэффициентов турбулентного обмена солью  $\nu_S$ , теплом  $\nu_T$  и импульсом  $\nu_u$  используются полуэмпирические формулы, предложенные в 1980-е годы Шмиттом (для соленостных пальцев) и Федоровым (для диффузионной конвекции). Для соленостных пальцев [115]

$$\nu_S = \nu_b \left[ 1 - \left( \frac{1 + R_\rho}{1 + R_c} \right)^2 \right]^{e_1}, \quad \nu_u = Sc \cdot \nu_S, \\ \nu_T = \frac{Sc}{Pr} \nu_S, \quad R_c \leq R_\rho < -1, \quad (2.11)$$

где эмпирический коэффициент  $\nu_b = 10 \text{ см}^2/\text{с}$ ;  $R_\rho = \frac{\alpha_T T_z}{\alpha_T S_z}$  — плотностное соотношение для двойной диффузии (здесь полагаем вертикальную ось, направленную вниз;  $T_z$  и  $S_z$  — вертикальные градиенты;  $\alpha_T$  и  $\alpha_T$  — коэффициенты термического расширения и соленостного сжатия морской воды);  $R_c = -1.9$  — критическое значение плотностного соотношения для двойной диффузии;  $e_1 = 3$  — эмпирический параметр (степень функции);  $Pr$  и  $Sc$  — турбулентные числа Прандтля и Шмидта (для соли), причем  $Sc = 1$ , а  $\frac{Sc}{Pr} = 0.7$  и  $Pr \approx 1.43$ .

Для случая диффузионной конвекции [115]

$$\begin{aligned} \nu_T &= \nu c_1 \exp\{c_2 \exp[c_3 f_1(R_\rho)]\}, \\ \nu_S &= \begin{cases} f_2(R_\rho)\nu_T, & -1 < R_\rho \leq -0.5 \\ f_3(R_\rho)\nu_T, & -0.5 < R_\rho < 0.0 \end{cases}, \\ \nu_u &= Sc \cdot \nu_S, \quad -1 < R_\rho < 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  — кинематический коэффициент молекулярной теплопроводности;  $(c_1, c_2, c_3) = (0.909, 4.6, 0.54)$  — эмпирические параметры; функции  $f_i$  имеют вид

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1/R_\rho \\ c_4 + c_5 R_\rho \\ c_6 R_\rho \end{pmatrix},$$

где  $(c_4, c_5, c_6) = (-0.85, -1.85, -0.15)$  — эмпирические параметры. Число Шмидта  $Sc = 1$ .

Согласно параметризациям (2.11) и (2.12) в [53] рассмотрены особенности развития перемешивания в разных районах Мирового океана. Показаны высокая перемежаемость во времени и пространстве двойной диффузии, относительные вклады в развитие двойной диффузии соленостных пальцев и диффузионной конвекции. Выделены два характерных пространственных масштаба ячеек, отличающихся повышенной двойной диффузией: масштаб — около 1500 км по горизонтали и 1000 м по вертикали и второй — 250 км и 50–200 м, соответственно. Выделен ряд областей в Мировом океане, где существует повышенный фон турбулентного перемешивания (концентрации отмеченных ячеек), связанный с двойной диффузией. Здесь коэффициенты обмена теплом достигают за пределами зоны развитой турбулентности 4–6  $\text{см}^2/\text{с}$ , а для соли и импульса — до 8–10  $\text{см}^2/\text{с}$ . Игнорирование этих эффектов в модели общей циркуляции и традиционное задание постоянных коэффициентов обмена ведет к неоправданной пространственной фильтрации термохалинных и динамических полей океана.

### 3. Решение уравнений динамики морей и океанов по времени

За последние годы вычислительные методы динамики океана обогатились несколькими новыми подходами и алгоритмами. Среди них прежде всего следует отметить следующие:

- новые экономичные методы интегрирования систем уравнений по времени: прежде всего здесь следует отметить метод расщепления и полулагранжевый метод,

- новые методы аппроксимации дифференциальных задач по пространственным переменным: использование вариационно-разностных схем (в том числе методов конечных элементов) и схем повышенного порядка точности,
- новые вариационные методы анализа чувствительности решения, ретроспективного анализа, усвоения данных наблюдений.

Важное продвижение в теоретическом развитии и обосновании этих методов, в их приложении к задачам динамики морских и атмосферных процессов сделано в работах [33], [39]–[45].

### 3.1. Метод расщепления как методологическая основа построения численной модели морской циркуляции

Метод расщепления для решения широкого круга задач математической физики был разработан советскими математиками Н.Н. Яненко, Е.Г. Дьяконовым, А.А. Самарским, Г.И. Марчуком ([40], [42]) и др.

Суть метода состоит в следующем. Предположим, что имеется следующая нестационарная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A\varphi = f, & t \in (0, T], \\ \varphi = g, & t = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $A$  — неотрицательный оператор, который может быть представлен в виде суперпозиции более простых операторов  $A_i$

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_N, \quad A_i \geq 0, \quad \forall i. \quad (3.2)$$

Для решения (3.1) применим следующий метод ([40]). Сведем решение исходной задачи со сложным оператором  $A$  к решению серии задач с более простыми операторами  $A_i$ . Например, если  $A = A_1 + A_2$ , то для того чтобы решить задачу (3.1), можно использовать следующую систему двухциклического расщепления ([40]):

$$\begin{aligned} (E + \frac{\tau}{2}A_1)\varphi^{j-1/2} &= (E - \frac{\tau}{2}A_1)\varphi^{j-1}, \\ (E + \frac{\tau}{2}A_2)\varphi^j &= (E - \frac{\tau}{2}A_2)\varphi^{j-1/2}, \\ \bar{\varphi} &= \varphi^j + 2\tau f^j, \\ (E + \frac{\tau}{2}A_2)\varphi^{j+1/2} &= (E - \frac{\tau}{2}A_2)\bar{\varphi}, \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \\ (E + \frac{\tau}{2}A_1)\varphi^{j+1} &= (E - \frac{\tau}{2}A_1)\varphi^{j+1/2}, \quad \varphi^0 = g, \quad \tau = T/J. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Схема (3.3) абсолютно устойчива и аппроксимирует (3.1) со 2-м порядком точности по времени при условии  $\frac{\tau}{2}\|A_i\| < 1$ .

Для решения (3.1) можно также использовать простую неявную схему расщепления:

$$\begin{aligned}(E + \tau A_1)\varphi^{j+1/2} &= \varphi^j, \\ (E + \tau A_2)\bar{\varphi}^{j+1} &= \varphi^{j+1/2}, \\ \varphi^{j+1} &= \bar{\varphi}^{j+1} + \tau f^j.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Схема (3.4) абсолютно устойчива и аппроксимирует (3.1) с первым порядком точности по времени. Она более экономична, чем (3.3), но менее точна по времени.

Отметим следующие характерные особенности метода расщепления.

1. Процесс решения исходной задачи сводится к решению серии отдельных задач более простой структуры. Реализации метода расщепления присущ модульный принцип: отдельная задача — отдельный модуль. Каждый модуль может иметь свой "сопряженный аналог".

2. Схемы расщепления, основанные на неявной аппроксимации, например, такой как (3.4), безусловно устойчивы. Это дает возможность проводить интегрирование прямой и сопряженной задачи на больших интервалах по времени.

3. Каждый модуль может иметь аппроксимация разного типа и точности: например, можно комбинировать схемы конечных разностей и конечных элементов; аппроксимировать отдельные задачи с повышенным порядком точности и т.д.

Отметим, что метод расщепления определен для решения систем уравнений с положительными операторами. Данное свойство должно быть априори установлено для сформулированной задачи. Часто это выражается в нахождении некоторого интегрального инварианта или закона сохранения.

Важнейшим моментом формулировки алгоритма расщепления является разбиение исходной задачи на сумму простых подзадач с положительными операторами. В некоторых случаях выбор такого разбиения является нетривиальным и не единственным.

С методологической точки зрения метод расщепления можно рассматривать более широко, формулируя на его основе численную модель сложного физического процесса. Можно обогатить исходную модель за счет включения дополнительных этапов расщепления в цепочки (3.3), (3.4). Можно изменить исходную модель. Например, после расщепления задачи на ряд подзадач можно изменить (упростить или регуляризировать) задачу на отдельном этапе.

Для создания экономичной, гибкой численной модели динамики океана, описывающей разномасштабные физические процессы, целесообразно иметь в наличии несколько вариантов метода расщеплений.

К ним можно отнести метод слабой аппроксимации, позволяющий расщепить задачу на дифференциальном уровне, метод декомпозиции области, разделяющий решение задач в различных подобластях, метод покомпонентного расщепления, позволяющий эффективно реализовать уравнения по времени на сеточном уровне, метод расщепления по физическим процессам.

### 3.2. Метод слабой аппроксимации

Метод слабой аппроксимации является методом расщепления в дифференциальной форме (Яненко, 1967). Если в некотором банаховом пространстве рассматривается абстрактная задача Коши в области  $Q = \Omega \times [0, T]$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + L\varphi = f, \quad \varphi|_{t=0} = g, \quad (3.5)$$

где  $L(t) = \sum_{\alpha=1}^K L_{\alpha}(t)$  — линейный оператор,  $\|L_{\alpha}L_{\beta}\| \leq M = \text{const} < \infty$ ,  $f = \sum_{\alpha=1}^K f_{\alpha}$ , то, вводя на интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  вспомогательные функции  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\alpha = \overline{1, K}$ , задачу сводим к последовательности задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial t} + L_{\alpha}\varphi_{\alpha} &= f_{\alpha}, \\ \varphi_{\alpha}|_{t_n} &= \varphi_{\alpha-1}|_{t_{n+1}}, \quad \alpha = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

решение которых приближается в некотором смысле к решению исходной задачи. Пример использования метода слабой аппроксимации представлен при описании метода решения уравнения вихря.

### 3.3. Метод декомпозиции

Метод декомпозиции области, возникший вначале при конструировании итерационных алгоритмов, для эволюционных задач является вариантом общего метода расщепления ([40]) с операторами, аддитивными по подобластям. Для задач океана со сложными областями интегрирования этот метод является весьма перспективным, особенно учитывая возможности многопроцессорных систем. Итак, пусть имеется эволюционная задача (3.5) и область  $\Omega$  составлена из непересекающихся подобластей  $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^K \Omega_{\alpha}$ . Определим тогда некоторым образом операторы  $L_{\alpha \geq 0}$  такие, что  $L_{\alpha} \equiv L$  в  $\Omega_{\alpha}$  и введем согласованную пространственную дискретизацию операторов  $L_{\alpha}$  в подобластях (например, на основе МКЭ (Лаевский, 1992)). Тогда, вводя на интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  вспомогательные сеточные

функции  $\Phi^{n+\alpha/K}$ ,  $\alpha = \overline{1, K}$  и используя на каждом подшаге схему Кранка-Николсон, приближенное решение задачи (3.5) можно получить как результат решения на интервале  $[t_n, t_{n+1}]$  последовательности задач

$$\frac{\Phi^{n+\alpha/K} - \Phi^{n+(\alpha-1)/K}}{\Delta t} + L_\alpha^N \frac{\Phi^{n+\alpha/K} + \Phi^{n+(\alpha-1)/K}}{2} = F_\alpha^N, \\ \alpha = \overline{1, K}. \quad (3.7)$$

Метод декомпозиции может быть успешно применен, например, при моделировании циркуляции Мирового океана на основе разбиения области на отдельные океаны с различными, вообще говоря, типами сеток.

### 3.4. Метод покомпонентного расщепления

Метод покомпонентного расщепления ([40]) состоит в разложении сеточного оператора на более простые при обращении операторы, позволяющие быстро реализовывать каждый временной шаг. Пусть после пространственной дискретизации задачи (3.5) сеточный оператор  $L^N = \sum_{\alpha=1}^K L_\alpha^N \geq 0$ , где операторы  $L_\alpha^N$  являются уже не операторами в подобластях, как в методе декомпозиции, а одномерными сеточными операторами, действующими, например, по координатным направлениям. Тогда схема покомпонентного расщепления, применяемая к дискретному аналогу уравнения (3.5) с оператором указанного типа, формально будет иметь вид уравнений (3.7). При этом смысл каждого этапа расщепления будет совершенно иным. На каждом этапе будет уже решаться одномерное сеточное уравнение.

### 3.5. Метод расщепления по физическим процессам

С точки зрения вычислительной технологии метод расщепления по физическим процессам дает естественную возможность построения иерархии численных моделей динамики океана различного уровня сложности с позиций нисходящего проектирования и предоставляет хорошие перспективы развития программного продукта.

Рассмотрим его на примере решения исходной задачи динамики океана, записанной в  $\sigma$ -системе координат (1.38)–(1.44) с учетом приближения твердой крышки. В системе уравнений (1.38)–(1.44) можно выделить несколько подсистем, энергетически согласованных с точки зрения закона сохранения (1.36). Каждая подсистема имеет ясный физический смысл, описывая простой физический процесс, и может рассматриваться как отдельный этап расщепления полной задачи.

**Перенос-диффузия количества движения.** В качестве первой подсистемы выделяются уравнения переноса-диффузии количества движения с учетом метрических слагаемых. Имеем

$$\frac{du}{dt} + mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} uv = D_{1u}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dv}{dt} - mn \frac{\partial(m^{-1})}{\partial\phi} u^2 = D_{1v}. \quad (3.9)$$

Легко видеть, что оператор переноса количества движения кососимметрический. Для записи нелинейных слагаемых удобна полудивергентная форма, позволяющая провести дальнейшее расщепление ([120]). Оператор трехмерной задачи может быть представлен в виде суммы 4-х операторов: переноса-диффузии по каждой координате  $\lambda$ ,  $\phi$ ,  $\sigma$  и "сферического вращения" с сохранением свойства кососимметричности слагаемых, описывающих перенос количества движения.

**Баротропная циркуляция.** Характерной особенностью задачи морской гидродинамики является наличие двух кинематических граничных условий (на поверхности и на дне) для вертикальной скорости. Это приводит к некоторым трудностям при сведении задачи к эволюционному виду и построению ее метода решения. Преодолеть их помогает представление горизонтальных компонентов скорости в виде суммы осредненных по вертикали и отклонения от них — другими словами, выделение плоского (баротропного) движения ([44]). Используя этот прием, полагаем

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad (3.10)$$

$$\bar{u} = \int_0^1 u d\sigma, \quad \bar{v} = \int_0^1 v d\sigma. \quad (3.11)$$

Теперь в качестве второй подсистемы выделяем уравнения, описывающие процесс баротропной циркуляции или адаптации полей течений и давления на поверхности с учетом простой линейной параметризации трения о дно с коэффициентом  $R$ . Имеем

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} - l\bar{v} = -\frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial\lambda} - R\bar{u}, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + l\bar{u} = -\frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial\phi} - R\bar{v}, \quad (3.13)$$

$$g\rho_0 \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{H\bar{u}}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left( \frac{H\bar{v}}{m} \right) = 0, \quad (3.14)$$

где  $p_0$  — давление на уровне  $\sigma = 0$ .

**Бароклинная циркуляция.** Третья подсистема описывает бароклинное взаимодействие полей масс и течений. Она включает ту часть пространственного оператора, которая не входит в предыдущие две системы. Данный этап является ключевым в задаче ОЦО. Он описывается достаточно сложной системой дифференциальных уравнений и может быть в свою очередь расщеплен на ряд более простых задач ([120]). Среди них: бароклинная адаптация полей течений и плотности, перенос-диффузия температуры и солёности по горизонтальным координатам  $\lambda$ ,  $\phi$ , вертикальная диффузия температуры и солёности, конвективное перемешивание.

#### 4. Аппроксимация уравнений по пространству

Аппроксимация задач динамики океана по пространственным переменным в большинстве численных моделей производится методом конечных разностей (МКР). Преимущество МКР состоит в простоте построения и реализации дискретных моделей. Основными недостатками являются: полигональная аппроксимация океанских бассейнов и трудности выполнения интегральных инвариантов в некоторых случаях.

В последние десятилетия альтернативным методом аппроксимации уравнений динамики океана становится метод конечных элементов (МКЭ). Интерес к методу определяется рядом положительных свойств, которыми обладает МКЭ по сравнению с другими методами.

Прежде всего, МКЭ формулируется единым образом как для регулярных, так и для нерегулярных сеток, и многие известные схемы обобщаются на случай сгущающихся сеток, позволяющих увеличить разрешение там, где это необходимо. Кроме того, МКЭ, относясь к проекционным методам, основывается на слабых интегральных формулировках, и для схем МКЭ проще, чем для МКР, выполнить основные интегральные законы, присущие исходной задаче, и реализовать естественные в вариационном смысле граничные условия.

Главными недостатками МКЭ, по-видимому, следует считать алгоритмическую сложность вычислений и большую склонность к потере локальных свойств решения аппроксимируемой дифференциальной задачи.

Использование МКЭ требует разработки специальных алгоритмов для эффективного решения сеточных уравнений по времени, включающих неявные, полунявные экономичные схемы, а также разработки программ, разрешающих сеточные уравнения на каждом шаге по времени.

Ниже на простых задачах обсуждаются вопросы, связанные с дискретными аппроксимациями уравнений динамики морей и океанов. Задачи можно рассматривать либо как упрощенные модели, либо как отдельные этапы расщепления по физическим процессам.



#### 4.1. Уравнения адаптации. Балансная конечноразностная аппроксимация и искажение локальных свойств решения

При аппроксимации уравнений движения по пространственным переменным с помощью как МКР, так и МКЭ, возникает ряд вопросов, тесно связанных с рассмотренной выше спецификой частных решений и внешних условий. Выделим и рассмотрим следующие типичные проблемы на примере уравнений адаптации.

Малость пространственных масштабов океанской изменчивости и ее большие характерные времена приводят к необходимости построения численных моделей на основе недиссипативных (или малодиссипативных) пространственных аппроксимаций. Как правило, для этого используются симметричные балансные (удовлетворяющие разностным аналогам законов сохранения) схемы 2-го порядка точности. Они строятся на основе аппроксимации исходных уравнений (1.1)–(1.7) или (1.38)–(1.44) — в этом случае сохранить энергетический баланс достаточно просто, что дает возможность интегрировать модель на длительный срок.

Однако иногда тот факт, что мы аппроксимируем исходную систему, стремясь сохранить интегральный баланс, может приводить к искажению локальных свойств решения. В частности, это может выражаться в потере свойства монотонности решения или генерации в модели фиктивных пограничных слоев. Поскольку в океанских моделях сеточное разрешение часто неудовлетворительно, амплитуда сопутствующих шумов может быть велика.

Поясним данный факт на примере воспроизведения моделью инерционных колебаний, имеющих важное значение в океанской динамике высоких широт. Предположим, что рассматриваются двумерные уравнения адаптации гидрологических полей. Вертикальная координата отбрасывается, предполагая, что произведено разложение по собственным функциям вертикального оператора ([24]), и рассматриваются уравнения для  $k$ -й вертикальной моды в предположении  $l = \text{const}$  и периодичности решения по широте (индекс  $k$ , определяющий номер бароклинной моды, опущен).

В этом случае, в декартовых координатах имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - lv &= -imp, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + lu &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \left( imu + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \quad 0 < y < L, \\ v &= 0, \quad \text{при } y = 0, y = L, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$p = \frac{1}{\rho_0} p_k, \quad c = \frac{H}{\sqrt{\lambda_k}},$$

$m$  — волновое число по  $x$ .

Аппроксимируем (4.1) на сетке  $C$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{du_j}{dt} - \frac{l}{2}(v_{j+1/2} + v_{j-1/2}) + imp_j &= 0, & j = \overline{1, J}, \\ \frac{dv_{j+1/2}}{dt} + \frac{l}{2}(u_{j+1} + u_j) + \frac{p_{j+1} - p_j}{h} &= 0, & j = \overline{1, J-1}, \\ \frac{dp_j}{dt} + c^2 \left( imu_j + \frac{v_{j+1/2} - v_{j-1/2}}{h} \right) &= 0, & j = \overline{1, J}, \\ v_{1/2} &= 0, \quad v_{J+1/2} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $h$  — шаг регулярной сетки по  $y$ ;  $j$  — номер точки, изменяющийся от 1 до  $J$ ;  $j = \frac{1}{2}$ ,  $j = J + \frac{1}{2}$  — граничные точки.

Если привести (4.2) к одному уравнению для  $v_{j+\frac{1}{2}}$ , то получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dt^2} + c^2 m^2 + l^2 \right) v_{j+\frac{1}{2}} - \left( c^2 - \frac{l^2 h^2}{4} \right) \frac{v_{j+\frac{3}{2}} - 2v_{j+\frac{1}{2}} + v_{j-\frac{1}{2}}}{h^2} &= 0, \\ v_{\frac{1}{2}} &= 0, \quad v_{J+\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Анализ уравнения (4.3) показывает, что сеточное уравнение дает неверную асимптотику по сравнению со своим непрерывным аналогом при  $c \rightarrow 0$ :

1) вместо инерционных колебаний с частотой  $l$  в данном случае возникает целый спектр с частотами  $\sqrt{l^2(1 - n^2 h^2/4)}$ , где  $n$  — волновое число по  $y$ ;

2) при наличии в правой части (4.3) линейного источника  $f(y) = a + by$ , стационарное решение (4.3) будет иметь вид

$$v = \frac{f}{l^2} + C_1 \cos(2y/h) + iC_2 \sin(2y/h),$$

т.е., в отличие от непрерывного случая, на него будет наложено коротковолновое возмущение произвольной амплитуды.

## 4.2. Анализ дисперсионных свойств численных решений

Рассмотрим задачу о численном воспроизведении процесса распространения инерционно-гравитационных волн в океане. Модельные уравнения

запишем в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - lv &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + lu &= -\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Конечноэлементные аппроксимации (4.4) на сетках  $B$ ,  $C$  будут иметь вид (Кузин,1985; Кузин, Моисеев,1987):

сетка  $B$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) - lv_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2h} (p_{i,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right) + lu_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2h} (p_{i,j} + p_{i-1,j} - p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (p_{i,j}) &= -\frac{c^2}{h} \left( u_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + u_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + v_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \right);\end{aligned}\quad (4.5)$$

сетка  $C$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left( u_{i-\frac{1}{2},j} \right) - l \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{2} &= -\frac{1}{h} (p_{i,j} - p_{i-1,j}), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( v_{i,j+\frac{1}{2}} \right) + l \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j+1}}{2} &= -\frac{1}{h} (p_{i,j+1} - p_{i,j}), \\ \frac{\partial}{\partial t} (p_{i,j}) &= -\frac{c^2}{h} \left[ \left( u_{i+\frac{1}{2},j} - u_{i-\frac{1}{2},j} \right) + v_{i,j+\frac{1}{2}} - v_{i,j-\frac{1}{2}} \right].\end{aligned}\quad (4.6)$$

Вводя гармоническое представление для решения уравнений на сетках  $B$ ,  $C$  и определяя  $(\omega/l)^2$ , выпишем формулы для производных  $\partial(\omega/l)^2/\partial k$ ,  $\partial(\omega/l)^2/\partial m$ , которые характеризуют значения групповой скорости, являющейся основной характеристикой переноса волновой энергии. В результате получим:

для точного решения

$$\begin{aligned}\gamma \frac{\partial \omega}{\partial k} &= 2\lambda^2 k, \\ \gamma \frac{\partial \omega}{\partial m} &= 2\lambda^2 m;\end{aligned}\quad (4.7)$$

для сетки  $B$

$$\begin{aligned}\gamma \frac{\partial \omega}{\partial k} &= \frac{h \lambda^2}{2 h^2} \sin kh \cos mh, \\ \gamma \frac{\partial \omega}{\partial m} &= \frac{h \lambda^2}{2 h^2} \sin mh \cos kh;\end{aligned}\quad (4.8)$$

для сетки  $C$

$$\begin{aligned}\gamma \frac{\partial \omega}{\partial k} &= \frac{h}{2} \left[ \left( 4 \frac{\lambda^2}{h^2} - \cos mh \right) \sin kh - \sin mh \cos kh \right], \\ \gamma \frac{\partial \omega}{\partial m} &= \frac{h}{2} \left[ \left( 4 \frac{\lambda^2}{h^2} - \cos kh \right) \sin mh - \sin kh \cos mh \right],\end{aligned}\quad (4.9)$$

где  $\lambda = c/l$ .

Из (4.8) следует, что область верного знака групповой скорости на сетке  $B$  имеет правильное описание направления потока энергии только для достаточно длинных волн.

Анализ (4.9) показывает, что на сетке  $C$  при  $\lambda/h \leq 1/2$  уравнения (4.6) перестают правильно описывать направление потока энергии для самых длинных волн.

Окончательный вывод состоит в том, что для вихреразрешающих моделей с шагами по пространству, меньшими удвоенного радиуса деформации Россби, схема  $C$  является наилучшей. Для моделей с грубым разрешением более предпочтительны дисперсионные свойства схемы  $B$ .

### 4.3. Стационарная ветровая циркуляция в океане с многосвязной границей

Задача об определении стационарной двумерной циркуляции, возникающей под действием ветра в областях со сложной топологией, является к настоящему времени классической. Задачи метода полных потоков, введенного еще Штокманом [55], позволили понять многие важные черты океанических циркуляций. Однако и сейчас задача о нахождении баротропной составляющей движения, выделенной из общей системы интегрированием по вертикали — составная часть многих моделей крупномасштабной циркуляции. Решение этой проблемы в области с неоднозначной границей является к тому же показательной математической задачей [44], [37].

Рассмотрим уравнения движения в стационарном приближении с учетом влияния ветра. В уравнениях отбрасываются члены, описывающие турбулентную вязкость, нелинейность и зависимость течений от плотности морской воды. Трение о дно учитывается по линейному закону. Тогда уравнения движения относительно осредненных по вертикали компонентов скорости и уравнение неразрывности в декартовых координатах  $(x, y)$  следуют из (3.10–3.11) и записываются в виде

$$\begin{aligned}-Ru - lv &= g\zeta_x - F_1, \\ -Rv + lu &= g\zeta_y - F_2, \\ (uH)_x + (vH)_y &= 0.\end{aligned}\quad (4.10)$$

Здесь  $U = (u, v)$  — вектор горизонтальных компонент скорости,  $R$  — коэффициент трения о дно,  $\zeta = -1/(g\rho_0) \cdot p_0$  — превышение уровня,  $F_1, F_2$  — компоненты напряжения трения ветра. Уравнения решаются в области, ограниченной контурами  $\Gamma_k, k = \overline{1, K}$ . Для системы уравнений (4.10) достаточным является задание на границе нормальной компоненты скорости. Если бассейн замкнут, то задаются условия "непротекания":

$$U \cdot N = 0 \text{ на } \Gamma_k, \quad k = \overline{0, K}. \quad (4.11)$$

Движения, определяемые системой уравнений (4.10), являются бездивергентными. Это свойство выполняется с большой точностью для задач циркуляции даже в нестационарном случае. Поэтому уравнения (4.10) удобно приводить к уравнению вихря. Применяя к первым уравнениям (4.10) операцию  $\text{rot}(\cdot) = (-\partial/\partial y(\cdot), \partial/\partial x(\cdot))$  и вводя функцию тока соотношениями  $U = \frac{1}{H} \text{curl } \psi$ , где оператор  $\text{curl } \psi = (\psi_y, -\psi_x)$  является сопряженным по Лагранжу к оператору  $\text{rot}$ , приходим к уравнению

$$-\nabla \cdot \left( \frac{R}{H} \nabla \psi \right) + \text{rot} \left( \frac{l}{H} \nabla \psi \right) = \text{rot} F. \quad (4.12)$$

Граничные условия на контурах  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_K$  на основе (4.11) можно принять следующими:

$$\psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_k} = G_k, \quad k = \overline{0, K}, \quad (4.13)$$

причем константы должны быть найдены в процессе решения. Эти константы имеют смысл расходов воды между контурами  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_k$ , соответственно. Для их определения необходимо получить некоторые дополнительные соотношения. Возможен способ получения явного вида дополнительных соотношений, основанный на слабой формулировке задачи (4.12), (4.13), откуда сразу будет следовать естественность этих соотношений в вариационном смысле [44].

Итак, определим класс  $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$  как подпространство из  $W_2^1(\Omega)$  функций, равных нулю почти всюду на  $\Gamma_0$  и принимающих произвольные постоянные значения почти всюду на  $\sigma_k, k = \overline{1, K}$ . Тогда обобщенным решением задачи (4.12), (4.13) назовем такую функцию  $\psi \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ , что интегральное соотношение

$$I(\psi, v) = -(F, \text{curl } v) \quad (4.14)$$

выполняется для всех  $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ . В (4.14)  $I(\psi, v)$  — билинейная форма, соответствующая оператору уравнения (4.12):

$$I(\psi, v) = \left( \frac{R}{H} \nabla \psi, \nabla v \right) + \left( \frac{l}{H} \nabla \psi, \text{curl } v \right),$$

где скалярное произведение определяется как

$$(P, Q) = \int_{\Omega} (P^x Q^x + P^y Q^y) d\Omega.$$

Получим конкретный вид соотношения для определения  $G_k$ , ( $k = \overline{1, K}$ ). Предполагая, что  $\psi \in C^2(\Omega)$ , проведем в (4.14) интегрирование по частям, освобождая от произвольных функцию  $v$ . С учетом того, что функция  $v$  по определению произвольна и постоянна на контурах  $\Gamma_k$ , ( $k = \overline{1, K}$ ), и произвольна по значению, из получаемых соотношений следует, что на этом решении внутри области выполняется уравнение (4.12), а на границах возникают дополнительные нелокальные граничные условия вида

$$\oint_{\Gamma_k} \left( \frac{R}{H} \psi_N - F \cdot S \right) d\Gamma = 0, \quad k = \overline{1, K}. \quad (4.15)$$

Здесь  $N$ ,  $S$  — единичные векторы внешней нормали и касательной к соответствующему граничному контуру. Эти условия являются искомыми соотношениями для определения  $G_k$ . Они естественны в вариационном смысле, так как их выполнение следует из выполнения интегрального соотношения (4.14). Можно показать, что решение в слабой постановке при достаточной гладкости является классическим. С помощью техники обобщенных решений, можно также показать, что решение задачи (4.14) единственно, и доказать существование в пространстве  $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ .

Проведем дискретизацию задачи, пользуясь методом Галеркина. Построим пространство  $S^N \subset \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ , используя кусочно-линейные функции на некоторой триангуляции области. Для этого, прежде всего, триангулируем область  $\Omega$  и образуем область  $\Omega^h = \max_m \bigcup T^{(m)} \subset \Omega$  как максимальное объединение треугольников  $T^{(m)}$ , принадлежащих  $\Omega$ . Предположим также, что границы области совпадают со сторонами треугольников.

Определим далее непрерывные функции  $\omega_i(x, y)$ , соответствующие вершинам треугольникам  $T^{(m)} - z^i = (x_i, y_i)$  и упорядоченные по индексу  $i$ . Функции  $\omega_i(x, y)$  кусочно-линейны на данной триангуляции, равны единице в точке  $i$  и нулю во всех остальных точках. В дополнение к функциям  $\omega_i$  введем координатные функции  $\omega_{\Gamma_k}$ ,  $k = \overline{1, K}$ , кусочно-линейные на треугольниках и принимающие единичное значение в узлах соответствующего контура  $\Gamma_k^h$ . Тогда подпространство  $S^N$  выбирается как линейная оболочка, натянутая на функции  $\{\omega_i, (i = \overline{1, N}), \omega_{\Gamma_k}, k = \overline{1, K}\}$ . Соотношение для приближенного решения запишется в виде

$$\psi^N = \sum_{i=1}^N \psi_i \omega_i + \sum_{k=1}^K G_k \omega_k. \quad (4.16)$$

Весовые коэффициенты  $\Psi_i, G_k$  находятся из интегрального соотношения, соответствующего (4.14):

$$I(\psi^N, \omega_i) = -(F, \text{curl } \omega_i), \quad i = \overline{1, N+K}. \quad (4.17)$$

Здесь в качестве  $\omega_i$  последовательно выбираются все функции  $\omega_i, i = \overline{1, N}, \omega_{\Gamma_k}, k = \overline{1, K}$ .

Сходимость приближенного решения  $\psi^N$  к обобщенному  $\psi \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$  имеет порядок  $h_0$

$$\|\psi - \psi^N\|_{L_2(\Omega)} \leq ch_0 \|\psi\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}, \quad (4.18)$$

где  $h_0$  — максимальная сторона треугольника. Система алгебраических уравнений (4.17) может быть решена одним из итерационных или прямых методов [40].

Мы представили алгоритм расчета баротропной циркуляции океана на основе функции тока. Возможно приведение системы уравнений (4.10) к уравнению для поверхностного давления или для уровенной поверхности  $\zeta$ . Опишем кратко этот вариант. Выразим скорости  $u, v$  через уровенную поверхность из первых двух уравнений (4.10). Подставляя эти выражения в уравнение неразрывности, приходим к уравнению относительно  $\zeta$

$$-\nabla \left( \frac{RH}{R^2 + l^2} \nabla \zeta \right) - \text{rot} \left( \left( \frac{lH}{R^2 + l^2} \right) \nabla \zeta \right) = G. \quad (4.19)$$

Граничные условия для (4.19) строятся проектированием выражений для  $u, v$  на нормаль к границе. Это приводит к граничным условиям, которые являются естественными в вариационном смысле для оператора задачи (4.19). Тогда интегральные соотношения для нахождения приближенного решения (4.19) примут вид

$$I(\psi^N, \omega_i) = -(F, \text{curl } \omega_i), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.20)$$

Здесь  $\omega_i$  — кусочно-линейные функции на триангуляции области, равные единице в узлах сеточной области, включая граничные точки, так как уровенная поверхность вычисляется и на границе.

Следует отметить, что многосвязность области в этом случае не вносит дополнительных осложнений, как в случае функции тока, однако уровенная поверхность находится с точностью до константы, поэтому для решения системы алгебраических уравнений (4.20) необходимо использовать итерационные методы, работающие в подпространствах, ортогональных к константе [40].

#### 4.4. Комбинация метода конечных элементов и метода расщепления для двумерного уравнения адвекции-диффузии

Рассмотрим уравнение, описывающее двумерный процесс адвекции-диффузии некоторой субстанции (температура, соленость, примесь) в океане

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} = f(x_1, x_2, t) \quad (4.21)$$

в двумерной области  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega$ . Граничные и начальные условия выберем однородными:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, & \text{на } \partial\Omega, \\ \varphi &= 0, & \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Предположим, что коэффициенты  $k_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$  удовлетворяют условию равномерной эллиптичности в  $\Omega$ , а  $f(x_1, x_2, t)$  — достаточно гладкая функция.

Для формулировки задачи (4.21), (4.22) в обобщенной форме умножим скалярно в  $L_2(\Omega)$  уравнение (4.21) на произвольную функцию  $v \in W_2^1(\Omega)$  и выполним интегрирование по частям, учитывая краевое условие из (4.22). В результате придем к равенству

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t}, v \right) (t) + I(\varphi, v)(t) = (f, v)(t), \quad (4.23)$$

где

$$I(\varphi, v) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left( k_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta}, \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \right), \quad (\varphi, v) = \int_{\Omega} \varphi v \, dx_1 \, dx_2.$$

Обобщенным решением задачи (4.21), (4.22) назовем функцию  $\varphi \in W_2^1(\Omega \times [0, T])$ ,  $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ , удовлетворяющую равенству (4.23) и условию  $(\varphi, \omega)(0) = 0$  при произвольных  $v, \omega \in W_2^1(\Omega)$ .

На основе введенной обобщенной постановки построим аппроксимацию задачи (4.21), (4.22). Для этого введем в  $\Omega$  равномерные сетки по каждой из переменных  $x_1, x_2$  с шагами  $h_1, h_2$ , соответственно. Каждую ячейку полученной прямоугольной сетки триангулируем диагоналями положительного или отрицательного направления в зависимости от знака интеграла

$$\delta_{mn} = \frac{1}{2} \int_{x_{1m}}^{x_{1m}+h_1} \int_{x_{2n}}^{x_{2n}+h_2} (k_{12} + k_{21}) dx_1 dx_2.$$

Область  $\Omega^h$  обозначим наибольшее объединение треугольников, принадлежащих  $\Omega$ . Подобласти  $\Omega^h$  с положительной и отрицательной триангуляцией ячеек обозначим  $\Omega_1^h$  и  $\Omega_2^h$ , соответственно. Каждому внутреннему



узлу  $(x_{1m}, x_{2n})$ , т. е.  $(x_{1m}, x_{2n}) \in \Omega^h \setminus \partial\Omega^h$ , поставим в соответствие кусочно-линейную функцию  $\omega_{mn}(x_1, x_2)$ , равную единице в узле  $(x_{1m}, x_{2n})$  и нулю во всех остальных узлах и в  $\Omega \setminus \Omega_h$ . Приближенное решение задачи (4.21), (4.22) будем искать в виде

$$\varphi^h = \sum \varphi_{mn}(t)\omega_{mn}(x_1, x_2),$$

где суммирование осуществляется по индексам, соответствующим узлам  $(x_{1m}, x_{2n}) \in \Omega^h \setminus \partial\Omega^h$ . Уравнения для определения  $\{\varphi_{mn}(t)\}$  получим путем замены  $\varphi$  на  $\varphi^h$  в (4.24) и принимая  $v = \omega_{mn}$  ( $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ ). Начальные условия для  $\{\varphi_{mn}(t)\}$  получим из равенств  $(\varphi^h, \omega_{mn}) = 0$  при  $t = 0$ . Если теперь воспользоваться приближенным вычислением члена с производной  $\partial/\partial t$  (метод диагонализации), а именно, принимая

$$\left( \frac{\partial\varphi^h}{\partial t}, \omega_{mn} \right) \cong \frac{\partial\varphi^h}{\partial t}(x_{1m}, x_{2n}, t)(1, \omega_{mn}),$$

то систему уравнений для определения  $\{\varphi_{mn}(t)\}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial t}(t)(1, \omega_{mn}) + I(\varphi^h, \omega_{mn})(t) &= (f, \omega_{mn})(t), \\ (\varphi^h, \omega_{mn})(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В операторной форме задача (4.24) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta \frac{d\varphi}{dt} + \Lambda\varphi &= \tilde{f}\Omega_t = (0, T), \\ \varphi(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

где  $\varphi = \{\varphi_{mn}(t)\}$ ,  $\theta = \text{diag}(\theta_{mnmn})$ ,  $\theta_{mnmn} = (1, \omega_{mn})$ . Сеточная функция  $\tilde{f} = \{f_{mn}(t)\}$  имеет элементы  $f_{mn}(t) = (f, \omega_{mn})(t)$ . Матрицы  $\theta$ ,  $\Lambda$  здесь являются положительно определенными.

В (Марчук, Кузин, 1982) показано, что матрица  $\lambda$  может быть представлена в виде суммы трехточечных операторов:

$$\Lambda = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{12} + \Lambda_{21},$$

где оператор  $\Lambda_{11}$  действует по линиям сетки, параллельным оси  $x_1$ ,  $\Lambda_{22}$  — по линиям, параллельным оси  $x_2$ ,  $\Lambda_{12}$  — по диагоналям положительного направления в подобласти  $\Omega_1^h$ ,  $\Lambda_{21}$  — на отрицательных диагоналях в подобласти  $\Omega_2^h$ . Доказано, что операторы положительно полуопределены ( $\Lambda_{\alpha\beta} \geq 0$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ ) при выполнении условий

$$k_{11} \geq \frac{h_1}{2h_2} |k_{12} + k_{21}|, \quad k_{22} \geq \frac{h_2}{2h_1} |k_{12} + k_{21}|. \quad (4.26)$$

На основании этого для решения уравнения (4.25) может быть использован один из методов расщепления, в частности двуциклический метод с использованием схемы Кранка–Николсон на каждом элементарном шаге.

На неравномерной триангулированной сетке, топологически эквивалентной прямоугольной, применение кусочно-линейных восполнений к уравнению (4.21) при условии  $k_{12} + k_{21} = 0$  также приводит к сеточному оператору, расщепляющемуся на четыре одномерных. При этом условия положительной полуопределенности одномерных операторов сводятся к некоторым геометрическим условиям на параметры сетки.

Метод был использован в моделях динамики океана при расчете функции тока и при решении трехмерного уравнения притока тепла в океане, сведенного специальным образом с помощью расщепления по сечениям к серии уравнений вида (4.21) (см. п. 5.5, а также (Кузин, 1985)).

#### 4.5. Расщепление трехмерных уравнений переноса-диффузии в океане

Традиционный подход при аппроксимации уравнений в трехмерном пространстве требует применения координатных функций, являющихся кусочно-полиномиальными на трехмерных симплексах. В этом случае трудности при вычислении сеточных уравнений катастрофически возрастают. Можно выбирать координатные функции, являющиеся тензорным произведением одномерных координатных функций [40]. Вычисления коэффициентов сеточного оператора при этом существенно упрощаются, однако теряется возможность аппроксимировать область интегрирования набором треугольников. В настоящем пункте будет рассмотрена некоторая гибридная схема, основанная на специальном представлении пространственного оператора задачи и расщеплении трехмерной задачи на последовательность квазидвумерных, аппроксимация которых производится более простым образом, аналогичным двумерным параболическим уравнениям.

Будем считать, что уравнение решается в декартовой системе координат.

Уравнение переноса-диффузии субстанции в океане будем рассматривать в области  $Q = \Omega \times [0, T]$ , где  $\Omega = \Omega_0 \times [H(x, y)]$  — трехмерный цилиндр с верхним основанием и изменяющейся глубиной.

Область интегрирования удобно преобразовывать заменой переменных в цилиндр с единичной высотой  $(x', y', z') = (x, y, \frac{z}{H})$ . В результате приходим к уравнению

$$H\varphi_t + HU\nabla\varphi + \tilde{w}\varphi_z = \left(\frac{v}{H}\varphi_z\right)_z + \mu H\tilde{\Delta}\varphi, \quad (4.27)$$

где  $\tilde{w} = w - zU\nabla H$ ,

$$H\tilde{\Delta}\varphi = (H\varphi_x)_x - (zH_x\varphi_z)_x - (zH_x\varphi_x)_z + \\ + \left(\frac{z^2}{H}H_x^2\varphi_z\right)_z + (H\varphi_y)_y - (zH_y\varphi_z)_y - (zH_y\varphi_y)_z - \left(\frac{z^2}{H}H_x^2\varphi_z\right)_z. \quad (4.28)$$

В записи уравнения (4.27) опущены штрихи при новых переменных.  $U = (u, v)$  — вектор горизонтальных компонентов скорости. Граничные имеют вид

$$z = 0; \quad (S_0): \quad \varphi_z = f, \quad (4.29)$$

$$z = 1; \quad (S_H): \quad \varphi_z = 0, \quad (4.30)$$

$$\text{на } \Gamma': \quad \varphi_{N'} = 0. \quad (4.31)$$

Здесь  $N'$  — нормаль к поверхности  $\Gamma'$ , порождаемая преобразованным оператором Лапласа (4.28)  $\varphi_{N'} = H\varphi_N - z\varphi_z H_N$ ,  $N$  — нормаль к контуру.

Дальнейшие преобразования связаны с адвективными членами. Процессы, происходящие в океане, характеризуются квазигоризонтальностью, т.е. горизонтальные масштабы движения в среднем значительно превосходят вертикальные. Это обуславливает доминирующую роль горизонтальных движений. Однако вертикальные процессы, несмотря на их относительную малость, должны учитываться для правильного описания вертикального распределения характеристик в среде. Выделение баротропной составляющей ([44], [45]) в этом случае позволяет разделить движения разных масштабов и установить их взаимосвязь. Это дает возможность расщепить процесс на движение вдоль координатных плоскостей, которые оказываются замкнутыми и изолированными от остальных. Для компонент скорости введем представление

$$U = \bar{U} + \tilde{U}, \quad \bar{U} = \int_0^1 U dz.$$

Компоненты  $\bar{U}$   $\tilde{U}$  удовлетворяют двум уравнениям неразрывности

$$\operatorname{div} \bar{U}H = 0, \quad (4.32)$$

$$\operatorname{div} \tilde{U}H + w_z = 0. \quad (4.33)$$

Уравнение (4.32) позволяет ввести интегральную функцию тока

$$\bar{U} = \frac{1}{H} \operatorname{curl} \psi, \\ \Delta\psi = \operatorname{rot} \bar{U}, \quad \psi|_{\Gamma_0} = 0. \quad (4.34)$$

Уравнение (4.33) может быть использовано для нахождения  $w$  путем интегрирования по вертикали от  $z$  до 1:

$$w = \operatorname{div} H \int_z^1 \tilde{U} dz. \quad (4.35)$$

Вводя обозначение  $\hat{U} = \int_z^1 \tilde{U} dz$  и учитывая очевидное соотношение  $\hat{U}_z = -\tilde{U}$ , оператор переноса переписывается в виде

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= HU \cdot \nabla \varphi + \hat{w} \varphi_z = H(\bar{U} + \tilde{U}) \cdot \nabla \varphi + \operatorname{div} (H\hat{U}) \varphi_z = \\ &= -(\psi \varphi_x)_y + (\psi \varphi_y)_x + (H\hat{u} \varphi_z)_x - (H\hat{u} \varphi_x)_z + (H\hat{u} \varphi_z)_x - (H\hat{u} \varphi_x)_z. \end{aligned}$$

С использованием полученных выражений уравнение (4.27) может быть переписано в виде

$$H \varphi_t + \sum_{e,p=1}^3 (a_{e,p} \varphi_{x_p})_{x_e} = 0. \quad (4.36)$$

В (4.36) использованы обозначения  $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ ,

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \mu H, & a_{1,2} &= \psi, & a_{2,1} &= -\psi, & a_{2,2} &= \mu H, \\ a_{1,3} &= \mu z H_x - \hat{u} H, & a_{3,1} &= \mu z H_x - \hat{u} H, \\ a_{2,3} &= \mu z H_y - \hat{v} H, & a_{3,2} &= \mu z H_y + \hat{v} H, \\ a_{3,3} &= \frac{v}{H} + \frac{z^2 \mu}{H} (H_x^2 + H_y^2). \end{aligned}$$

Как видно из соотношений (4.36), уравнение удалось привести к такой форме, в которой пространственные операторы действуют вдоль координатных плоскостей. При этом граничные условия на боковой границе остаются естественными в вариационном смысле для преобразованного пространственного оператора задачи.

Для расщепления уравнения (4.36) по времени рассмотрим интервалы  $[t_n, t_{n+1}]$ , составляющие отрезок интегрирования  $[0, T]$ . Введем далее дополнительные функции  $\varphi^{n+\frac{\alpha}{6}}$ ,  $\alpha = \bar{1}, \bar{6}$ , представляющие собой решения каждого из последующих этапов двуциклической схемы слабой аппроксимации. Схема запишется в виде

$$\begin{aligned} H \varphi_t^{n+\frac{\alpha}{6}} + \frac{1}{2} \Lambda_\alpha \varphi^{n+\frac{\alpha}{6}} &= 0, \\ \varphi^{n+\frac{\alpha}{6}}(t_n) &= \varphi^{n+\frac{\alpha-1}{6}}(t_{n-1}). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Граничные условия для задач (4.37) образуются расщеплением граничных условий общей задачи таким образом, чтобы они были естественными

для каждой из задач набора (4.37). Это возможно, так как исходные граничные условия порождаются оператором задачи.

Таким образом, трехмерная задача свелась к набору последовательно решаемых квазидвумерных параболических уравнений в  $\Omega$ . Важным является то, что пространственный оператор каждой из задач сохраняет свойство положительной полуопределенности и решение расщепленной задачи удовлетворяет закону изменения массы, присущему исходной задаче. Каждое из этих уравнений может быть решено рассмотренным выше методом.

## 5. Прямые и сопряженные модели

### 5.1. Анализ данных наблюдений и вычислительного эксперимента

Анализ данных наблюдений является необходимым звеном в процессе понимания физических механизмов и построения их адекватных параметризаций. Малый объем данных наблюдений в глубоком море, высокая трудность и цена их получения вынуждают относиться к ним очень бережно. В этой связи начинают интенсивно развиваться методы математического моделирования, связанные с использованием в моделях данных наблюдений. Использование данных наблюдений дополняет и развивает изучение и моделирование морской циркуляции. При этом возникает необходимость формулировать и решать некоторые новые задачи.

- Задача *инициализации* гидрологических полей — построение начального условия для системы (1.1)–(1.7). Для решения уравнений динамики моря, в частности, если речь идет о краткосрочном прогнозе течений, наряду с информацией об атмосферном воздействии на поверхности требуется знание полей течений, температуры и солености во всей толще моря. Таких данных наблюдений нет и это положение следует каким-то образом обойти. Одним из возможных здесь может быть подход, основанный на методах теории оптимального управления. Его суть состоит в том, что задача формулируется с неточным заданием начального условия, но с учетом имеющихся данных наблюдений за некоторый предшествующий период времени. Система "не знает" своего начального состояния, но знает, что в предыдущий интервал времени ее траектория находилась в некоторой известной окрестности. Задача с начальным условием переформулируется. Предполагается, что начальное условие неизвестно, но принадлежит некоторому допустимому множеству. Ставится задача выбора такого начального условия, при котором траектория системы (удовлетворяющая уравнениям (1.1)–(1.7)) наименее отклонялась бы от из-

вестного по данным наблюдений состояния. Мерой отклонения при этом может быть функционал среднеквадратической ошибки, определяемый на том пространственно-временном интервале, где имеются данные наблюдений.

- Задача *усвоения* данных наблюдений, связанная с воспроизведением или мониторингом (слежение за состоянием) некоторых морских структур. Это может быть мониторинг уровня поверхности моря с использованием спутниковой информации. Или — реконструкция трехмерного поля течений по доступной информации о полях температуры и солености. В такого рода задачах используются два основных подхода. Один из них основан на динамико-стохастических моделях, второй — на методах теории оптимального управления. По методике использования второй подход близок к задаче инициализации.
- Задача об исследовании *чувствительности* решения по отношению к вариациям внешнего воздействия и изменению внутренних параметров модели. Наиболее эффективным инструментом изучения чувствительности решения является метод сопряженных уравнений, предложенный Г.И.Марчуком для анализа сложных систем [43].

## 5.2. Задача усвоения данных наблюдений

Одна из типичных задач усвоения данных наблюдений состоит в следующем. Предположим, что имеется уравнение, записанное в операторной форме:

$$A\psi = f, \tag{5.1}$$

где  $A$  — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , с областью определения  $D(A)$ ;  $\psi, f \in H$ . Предположим для простоты, что  $A$  — матрица, либо оператор, соответствующий некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Предположим, что имеется некоторая неопределенность в описании правой части уравнения (5.1). Например, некоторые компоненты вектора  $f$  либо неизвестны, либо заданы с некоторой погрешностью. Это так называемая задача с неполной информацией, типичная для практических задач динамики морей и океанов. Такая задача возникает, например, в связи с тем, что отсутствует или неполна информация о состоянии океана в начальный момент времени. В этом случае (5.1) — система ОДУ и ее правая часть включает внешние силы и начальное условие.

Итак, предположим, что у нас нет полной информации о векторе правой части  $f$ . Однако в дополнение мы располагаем данными измерений некоторых компонент вектор-решения  $\psi$ . Пусть  $\hat{\psi}$  означает некоторым образом

восстановленную информацию о решении по данным измерений (например, его интерполяцию).

Сформулируем теперь задачу следующим образом. Найти такое решение уравнения (5.1), которое минимизирует функционал  $J(\psi)$ :

$$J(\psi) = (B(\psi - \hat{\psi}), (\psi - \hat{\psi})), \quad (5.2)$$

где  $B$  — некоторый линейный положительно-определенный оператор, действующий в пространстве  $H$  со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ . Отметим, что при постановке задачи мы воспользовались произволом в определении правой части  $f$ , выбрав ее таким образом, чтобы достигался минимум функционала (5.2).

Сформулированная задача является задачей условного экстремума функционала  $J(\psi)$ , в которой в качестве связей выступает уравнение (5.1). Существует несколько методов решения поставленной задачи. Например, данная задача нахождения условного минимума может быть сведена к задаче на абсолютный минимум расширенного функционала, или лагранжиана  $L(\psi, \lambda_0, \lambda)$ :

$$L(\psi, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 (B(\psi - \hat{\psi}), (\psi - \hat{\psi})) + (A\psi - f, \lambda), \quad (5.3)$$

с помощью метода множителей Лагранжа.

Иногда постановку и решение задачи усвоения данных можно провести иным способом. Предположим, что в уравнении (5.1)  $A$  — матрица, а  $\psi$  и  $f$  — векторы. Пусть не имеется полной информации о правой части  $f$ , но мы знаем значения функционала  $Jp_k(\psi)$ :

$$Jp_k(\psi) = (\psi, p_k), \quad k = 1, \dots, K, \quad (5.4)$$

где  $p_k(\psi)$  — весовой вектор, определяющий подобласти, в которых произведены измерения. Задача состоит в реконструкции правой части  $f$  и решения  $\psi$ .

Для решения поставленной задачи рассмотрим  $K$  уравнений, сопряженных к (5.1):

$$A^* \psi_k^* = p_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (5.5)$$

где  $A^*$  — матрица, сопряженная к  $A$ . Из (5.1), (5.5) следует

$$(f, \psi_k^*) = (p_k, \psi), \quad k = 1, \dots, K. \quad (5.6)$$

Правая часть (5.6) известна (см. (5.4)), а  $\psi_k^*$  может быть найдена из (5.5).

Система (5.6) для неизвестного вектора  $f$  может быть переписана в матричной форме

$$Lf = F, \quad F \equiv (p_k, \psi), \quad k = 1, \dots, K, \quad (5.7)$$

где  $L$  — прямоугольная матрица размером  $N * K$ ,  $N$  — размерность вектора  $f$ , а  $K$  — размерность вектора  $F$ . На практике, как правило,  $N > K$ . Решение (5.7) понимается как псевдорешение  $f_1$ , удовлетворяющее уравнению

$$L^*Lf_1 = L^*F. \quad (5.8)$$

### 5.3. Задача инициализации

Важной задачей динамики морей и океанов является построение начальных условий — гидрологических полей, отнесенных к определенному моменту времени. Она может быть сформулирована в рамках задачи вариационного усвоения данных наблюдений следующим образом.

Пусть имеется уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi = f, \quad 0 < t \leq t_1, \quad (5.9)$$

где  $A$  — некоторый оператор, например, матрица;  $f$  — известная правая часть. Предположим, что начальное условие  $\psi^0$  для (5.9) неизвестно или известно с некоторой ошибкой: например, лежит в окрестности  $\hat{\psi}^0$ . Необходимо решить уравнение (5.9) при отсутствии или неполной информации о начальном условии  $\psi^0$ .

Отсутствие информации о начальном условии можно восполнить за счет некоторых дополнительных данных о решении. Это можно сделать, в частности, если имеется априорная информация о поведении решения на промежутке времени  $0 < t \leq t_1$ . Пусть известно среднее значение решения  $\psi$  на этом интервале:

$$\hat{\psi} = \int_0^{t_1} \psi dt. \quad (5.10)$$

Тогда задача инициализации может быть сформулирована следующим образом: минимизировать функционал  $J$

$$J \equiv \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (\psi - \hat{\psi})^2 dt + \epsilon (\psi^0 - \hat{\psi}^0)^2 \rightarrow \min \quad (5.11)$$

при условии что  $\psi$  удовлетворяет уравнению (5.9).



Физический смысл решения задачи (5.9)–(5.11) состоит в следующем. Из семейства всех допустимых решений (5.9), соответствующих произвольным начальным данным, лежащим в окрестности  $\widehat{\psi}^0$ , выбрать то решение, которое наименьшим образом отклоняется от известного среднего значения  $\widehat{\psi}$ . Если информация о начальном условии полностью отсутствует, то в (5.11) следует положить  $\epsilon = 0$ .

Задача вида (5.9)–(5.11) может решаться одним из известных методов теории сопряженных уравнений или оптимального управления.

Пусть, например, (5.9) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ ,  $A$  — невырожденная матрица,  $\epsilon = 0$ . Тогда решение задачи инициализации (5.9)–(5.11) может быть сведено к следующей краевой задаче принципа максимума Понтрягина

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A\psi = f, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial t} - A^*\psi^* + (\psi - \widehat{\psi}) = 0, \quad (5.13)$$

$$\psi^*(0) = \psi^*(t_1) = 0. \quad (5.14)$$

Здесь  $A^*$  — сопряженная матрица,  $\psi^*$  — решение сопряженного уравнения (5.13). Исключая из (5.12)–(5.13) функцию  $\psi$ , можно получить

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - A^*\right) \psi^* = \left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right) \widehat{\psi} - f, \quad (5.15)$$

$$\psi^*(0) = \psi^*(t_1) = 0. \quad (5.16)$$

Задача (5.15)–(5.16) иллюстрирует физический смысл задачи инициализации как краевой задачи по времени и пространству. Часто поэтому такого рода задачу называют задачей четырехмерного анализа данных.

#### 5.4. Оценка чувствительности решения на основе метода сопряженных уравнений

Пусть наряду с решением задачи моделирования гидрологических полей рассматривается задача оценки загрязнения некоторой подобласти моря или океана пассивной примесью. Применяя метод сопряженных уравнений [43], эта задача может быть сведена к вычислению функции чувствительности для трехмерного уравнения переноса-диффузии пассивной примеси. Предположим, что задача расчета трехмерного поля морских течений решена. Предположим также, что пассивный загрязнитель, источник которого находится на поверхности морского бассейна, распространяется в бездивергентном поле течений.

В этом случае процесс загрязнения морского бассейна  $D$  может быть описан уравнением переноса-диффузии для пассивной примеси  $\varphi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} H \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ Hmu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hmu\varphi) + Hnv \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (Hnv\varphi) + \right. \\ \left. + w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1\varphi) \right] = F_1^\varphi, \\ \frac{\nu}{H} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = Q \quad \text{при } \sigma = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} = 0 \quad \text{при } \sigma = 1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \varphi = \varphi^0 \quad \text{при } t = 0, \end{array} \right. \quad (5.17)$$

где  $n_1$  и  $n$  — векторы конормали и нормали, соответственно.

Пусть требуется изучить чувствительность следующего функционала:

$$\mathbf{J} = \int_0^{\hat{t}} \int_{D_\eta} \varphi \cdot \eta \cdot dDdt, \quad (5.18)$$

где  $\eta$  — весовая функция, выделяющая пространственно-временную подобласть, в которой изучается изменение функционала  $\mathbf{J}$ .

Оценку функционала  $\mathbf{J}$  удобно провести с помощью метода сопряженных уравнений [43]. В этом случае имеем

$$\mathbf{J} = \int_0^{\hat{t}} \int_{D_0} \varphi^* \cdot Q \cdot dD_0dt + \int_{D_1} H \cdot \varphi^0 \cdot \varphi^{*0} \cdot dD, \quad (5.19)$$

где  $D_0$  — проекция  $D_1$  на поверхность  $\sigma = 0$ , а  $\varphi^*$  — решение соответствующей сопряженной задачи (с правой частью, равной  $\eta$  и нулевыми граничными условиями):

$$\left\{ \begin{array}{l} -H \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[ Hmu \frac{\partial \varphi^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} (Hmu\varphi^*) + Hnv \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (Hnv\varphi^*) + w_1 \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_1\varphi^*) \right] = \eta \\ \frac{\nu}{H} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0, \quad \sigma = 1, \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ \varphi^* = 0 \quad \text{при } t = \hat{t}. \end{array} \right. \quad (5.20)$$

Если предположить, что в начальный момент времени загрязнение отсутствует, т.е.  $\varphi^0 = 0$ , получим

$$\delta J = \int_0^{\hat{t}} \int_{D_0} \varphi^* \cdot \delta Q \cdot dD_0 dt. \quad (5.21)$$

Предполагая, что

$$Q = Q_0, \quad \text{при } t \in (0, t_1], \quad (5.22)$$

$$Q = 0, \quad \text{при } t \in (t_1, \hat{t}], \quad (5.23)$$

имеем

$$\delta J = \int_{D_0} \delta Q_0 \left( \int_0^{t_1} \varphi^* dt \right) dD. \quad (5.24)$$

Используя (5.24), можно ввести *функцию чувствительности*

$$\Phi(\lambda, \theta, z_1) = \int_0^{t_1} \varphi^*(\lambda, \theta, z_1) dt, \quad (5.25)$$

которая характеризует вклад каждой точки в общее загрязнение рассматриваемой подобласти. При этом *функция чувствительности* зависит только от характеристик "охраняемой акватории" (функции  $\eta$ ) и морской динамики и не зависит от расположения источника загрязнения.

## 6. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра

Для моделирования климатических изменений необходимой задачей является создание численной модели крупномасштабной динамики глобального океана, которая может служить океаническим блоком совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана. В ИВМ РАН разработан комплекс моделей общей циркуляции атмосферы и океана, на базе которых проводятся исследования различных аспектов проблемы глобальных изменений климата [1, 20]. Основу этого комплекса составляют модели общей циркуляции атмосферы и океана [18]. Важным условием сопряжения атмосферного и океанического блоков в совместной модели (без искусственной коррекции потоков на границе атмосфера-океан) служит требование

адекватного описания ими в отдельности среднеклиматических режимов крупномасштабной циркуляции как атмосферы, так и океана. В этом разделе представлено краткое описание глобальной модели океана грубого пространственного разрешения, используемой в совместной модели климата. Грубость пространственного разрешения обусловлена тем, что модель необходимо интегрировать на большие сроки. Развитие вычислительной техники позволит создавать в ближайшее время глобальные климатические модели с более высоким пространственным разрешением. В этом разделе также изложены некоторые результаты моделирования циркуляции глобального океана, важные с точки зрения совместной модели атмосферы и океана, с оценкой чувствительности термохалинной циркуляции океана к изменениям ветра на поверхности океана.

### 6.1. Описание модели и ее особенностей

В настоящее время создан ряд численных моделей Мирового океана [93], на основе которых проводятся исследования глобальной термохалинной циркуляции. По своей физической структуре различные модели крупномасштабной циркуляции Мирового океана близки друг к другу. Они используют систему уравнений ОЦО вида (1.1)–(1.7), но отличаются друг от друга некоторыми особенностями. Это — выбор вертикальной координаты ( $z$ -модели,  $\sigma$ -модели,  $\rho$ -модели) [93]; параметризация подсеточных процессов (вид операторов горизонтального и вертикального турбулентного обмена); численная техника решения модельных уравнений (аппроксимация по пространству и метод решения по времени).

Наша модель относится к классу  $\sigma$ -моделей, описываемых (1.38)–(1.44). Уравнения аппроксимируются на одной из сдвинутых сеток: В или С, их решение основано на неявной схеме расщепления по физическим процессам и геометрическим координатам, описанным в разделе 4. В модели используется представление горизонтальных компонентов скорости в виде суммы осредненных по вертикали и отклонений от них (3.10)–(3.11) и введение плоской функции тока. Прогностическими переменными модели служат горизонтальные компоненты вектора скорости (отклонения от их средних по вертикали), функция тока, потенциальная температура и соленость.

В настоящее время решение задач климатической изменчивости проводится при невысоком пространственном разрешении: около 1–3 градусов по горизонтали и 10–40 уровнями по вертикали. Это связано с тем, что для установления квазиравновесной циркуляции необходимо проводить расчеты на весьма большой срок — сотни и тысячи лет. Эти же модели реализуются и при более высоком разрешении, если длительного интегрирования по времени не требуется.

В описываемом далее эксперименте по расчету динамики Мирового океана уравнения (1.38)–(1.39) аппроксимируются на сетке "С" с пространственным разрешением  $2.5^\circ \times 2^\circ$  (по долготе и широте) и 33 неравными уровнями по вертикали.

Модельная многосвязная область охватывает весь Мировой океан от берегов Антарктиды до  $89^\circ\text{N}$ , включая в себя отдельные материки и острова: Австралию, Антарктиду, Исландию, Кубу, Мадагаскар, Новую Зеландию, Шпицберген и Японию. На твердых границах Евразии, Африки, Северной и Южной Америки, объединенных в один континент, задается нулевое значение функции тока. На контурах выделенных материков и островов значения функции тока рассчитываются по методике, изложенной в п. 5.3, (см. также [44]).

При длительном интегрировании модели необходимо учитывать сток основных рек, влияющих на распределение солености. В данной версии модели такой учет введен простым образом: в районах впадения основных рек модельные значения солености на каждом шаге интегрирования задаются по данным наблюдения Левитуса [117] по всей глубине.

Топография дна Мирового океана взята из массива данных ETOPO5. Модельная глубина на нашей сетке была ограничена минимальной величиной в 150 м и сглажена с помощью нелинейной фильтрации.

В численных экспериментах коэффициенты горизонтальной диффузии для температуры  $T$  и солености  $S$  брались одинаковыми. В меридиональном направлении коэффициент диффузии для температуры и солености задается как функция широты и глубины. На экваторе он достигает максимального значения, равного  $0.8 \times 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , уменьшается до половины этой величины на расстоянии  $20^\circ$  и далее, по направлению к высоким широтам, остается практически неизменным.

Аналогично задаются коэффициенты горизонтальной вязкости, эффективные значения которых — на порядок больше, чем для температуры и солености.

Коэффициенты вертикальной вязкости и диффузии выбирались как функции числа Ричардсона  $Ri$ . Коэффициент вязкости увеличивался от  $5 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  до  $95 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , а диффузии — с фонового значения  $0.1 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  до  $50 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  с уменьшением  $Ri$  от больших величин до нуля. Чтобы избежать возможных ситуаций "выклинивания" вертикальных профилей температуры и солености в приповерхностном слое океана, в верхнем 15-метровом слое к коэффициенту диффузии добавлялась величина  $1 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ . В случае неустойчивой стратификации, когда  $Ri < 0$ , коэффициент вертикальной диффузии увеличивался до значения  $5 \times 10^{-2} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ , а коэффициент вязкости брался равным  $95 \times 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$  (как для случая максимальной сдвиговой неустойчивости).

## 6.2. Условия на поверхности океана и описание экспериментов

Атмосферное воздействие на океан рассчитывалось по данным реанализа NCEP [109]. Использовались среднемесячные климатические значения метеополей, рассчитанных за период с января 1982 г. по декабрь 1994 г. На поверхности океана для температуры и солёности задавались краевые условия второго рода в виде потоков тепла  $\frac{\nu_T}{H} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = Q$  и пресной воды  $\frac{\nu_S}{H} \frac{\partial S}{\partial \sigma} = F$  следующего вида:

$$\begin{aligned} Q &= Q_{\text{sen}} + Q_{\text{lat}} + Q_{\text{lw}} + 0.6Q_{\text{sw}} + \Gamma_Q(T_L - T_1), \\ F &= P - E - \Gamma_F(S_L - S_1). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь  $Q_{\text{sen}}$  и  $Q_{\text{lat}}$  — потоки явного и скрытого тепла;  $Q_{\text{lw}}$  и  $Q_{\text{sw}}$  — суммарные потоки длинноволновой и коротковолновой радиации;  $(P - E)$  — осадки минус испарение. Коэффициент 0.6 при  $Q_{\text{sw}}$  объясняется тем, что именно эта часть потока коротковолновой радиации добавляется к полному потоку тепла на поверхности океана. Остальная часть имеет проникающую природу с экспоненциальным затуханием по глубине с параметром 20 м и описывается в модели особо.

Последние члены в (6.1) представляют собой отрицательную обратную связь, возвращающую модельные температуру и солёность поверхности океана (ТПО и СПО) к наблюдаемым значениям климатического годового хода этих характеристик. Здесь  $T_L$  и  $S_L$  — ТПО и СПО, восстановленные по среднемесячным данным Левитуса [117], а  $T_1$  и  $S_1$  — температура и солёность, взятые с первого модельного уровня. Выбранные значения коэффициентов  $\Gamma_Q$  и  $\Gamma_F$  можно интерпретировать как релаксацию модельных температуры и солёности, осреднённых по 50-метровому верхнему слою, к наблюдаемым значениям с 12-суточным временным масштабом.

В представленных расчетах климатическое распределение льда задается следующим образом. Если лед, согласно данным NCEP, занимает менее половины площади температурной ячейки, то его наличие не учитывается и граничное условие для температуры и солёности на поверхности океана задается согласно (6.1). Если лед занимает более половины площади ячейки, то ставится граничное условие первого рода, т.е. на поверхности океана задаются значения солёности согласно данным Левитуса, а для температуры задаются значения точки замерзания при данной солёности.

Проведено два эксперимента, длительностью 200 лет каждый, в которых в качестве начальных условий для  $T$  и  $S$  выбирались данные Левитуса, а скорости полагались равными нулю. Различие между экспериментами заключалось в том, что в первом — среднемесячные климатические поля напряжения трения ветра брались из того же массива реанализа NCEP,

что и потоки в (6.1), а во втором — из данных реанализа Европейского центра среднесрочного прогноза погоды (ECMWF). Поскольку все потоки атмосферного воздействия в 1-м эксперименте согласованы, то будем называть этот эксперимент основным. В нижеследующем разделе рассмотрим некоторые характеристики его решения. Затем будут рассмотрены отличия между этими экспериментами, которые будем называть откликом на изменение напряжения трения ветра на поверхности океана.

### 6.3. Основные характеристики среднегодового состояния модели океана с атмосферным воздействием из данных NCEP

**Горизонтальная циркуляция.** За неимением места мы не будем подробно останавливаться на структуре полей течений. Отметим только, что модель, с учетом пространственного разрешения, удовлетворительно описывает горизонтальную циркуляцию во всей толще океана. Рассчитанная среднегодовая функция тока близка к полученным в других подобных численных экспериментах [91] и [114]. Расход Антарктического циркумполярного течения (АЦТ) в проливе Дрейка составляет 110 Св, что вполне согласуется с данными наблюдений. Расходы в главных среднеширотных круговоротах Северного полушария — в Гольфстриме и Куроисио составляют 25 Св и 30 Св, соответственно.

В модельном решении хорошо проявляются субполярные круговороты в Атлантическом и Тихом океанах. Наличие этого круговорота может быть связано с особенностями атмосферного воздействия в этом районе, примыкающем к зоне шторм-треков с севера, а также сложной топографией дна и характером береговой черты, обусловленным близостью Гренландии и Исландии.

В поверхностном слое выделяются западные пограничные течения в Северном полушарии — Гольфстрим и Куроисио. В центре экваториального Тихого океана наблюдается интенсивное западное течение со скоростью  $50 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ , соответствующее Южному пассатному течению. На глубинах более 60 м направление течения меняет знак, достигая величины  $15 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$  на глубине 150 м. В экваториальной Атлантике скорость течений на поверхности достигает  $35 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ , а противотечение имеет наибольшую величину  $22 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$  на глубине 100 м.

Хорошо просматриваются интенсивные течения вдоль Южной и Центральной Америки и в Мексиканском заливе. Максимальная величина скорости в Гвианском течении равна  $33 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ . В результатах расчета отчетливо выражена рециркуляция Гольфстрима — противотечение, примыкающее к основному потоку, а также интенсивное Северо-Атлантическое течение.

На глубине порядка 2.5 км хорошо видны течения у западного берега Атлантического океана, возвращающие водные массы, сформированные в зоне глубокой конвекции. Их величины составляют  $4\text{--}5 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ . В Антарктическом циркумполярном течении скорости на этой глубине достигают величин  $3\text{--}4 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ .

Несмотря на невысокое пространственное разрешение модели, основная вертикальная структура динамики Экваториальных течений воспроизводится достаточно хорошо. Воспроизводится структура восточного подповерхностного Экваториального противотечения Тихого океана, хотя его величина приблизительно в два раза меньше наблюдаемого. Заметим, что адекватное воспроизведение структуры экваториальных течений в Тихом океане позволяет довольно успешно воспроизводить явления Эль-Ниньо в совместной модели.

**Меридиональный перенос тепла.** Одной из важных характеристик циркуляции Мирового океана служит меридиональный перенос тепла (МПТ), оказывающий большое влияние на состояние общей климатической системы Земли. Рассчитанный по нашей модели глобальный среднегодовой МПТ (рис. 1, сплошная кривая) имеет максимум 1.25 ПВт на  $18^\circ$  ю.ш. и минимум  $-0.8$  ПВт на  $15^\circ$  ю.ш. В Северном полушарии, выше 40-й параллели, перенос тепла к полюсу осуществляется в основном за счет переноса тепла в Атлантическом океане, который связан с западным пограничным течением вдоль всего Американского континента.

Величина теплопереноса в Атлантике (рис. 1, длинный пунктир) возрастает с 0.3 до 0.8 ПВт на  $19^\circ$  с.ш. и далее убывает вместе с поворотом на восток и уменьшением интенсивности Гольфстрима и Северо-Атлантического течения.

Особенностью рассчитанного МПТ в Атлантике является его относительно постоянное от 0.3 ПВт у южной оконечности Африки до 0.4 ПВт на  $11^\circ$  ю.ш. и дальнейший заметный рост на 0.3 ПВт в районе экватора. Перенос тепла на север в области южнее экватора до  $35^\circ$  ю.ш. вызван тем, что в Атлантике южная приэкваториальная ячейка, отвечающая за перенос тепла в южном направлении, несколько подавлена. Она имеет максимальный расход всего 5 Св (северная — более 10 Св), что может быть вызвано направленным на север экмановским переносом в Южной Атлантике. К тому же на глубине около 1 км располагается вытянутая вдоль всей Атлантики ячейка циркуляции с направлением по часовой стрелке и величиной расхода, достигающей 15 Св, которая также ответственна за перенос тепла на север.

В Южном полушарии перенос тепла определяется главным образом процессами в Тихом и Индийском океанах. Совместный перенос тепла в этих океанах на юг (рис. 1, короткий пунктир) достигает максимума 1.2 ПВт на  $15^\circ$  ю.ш.



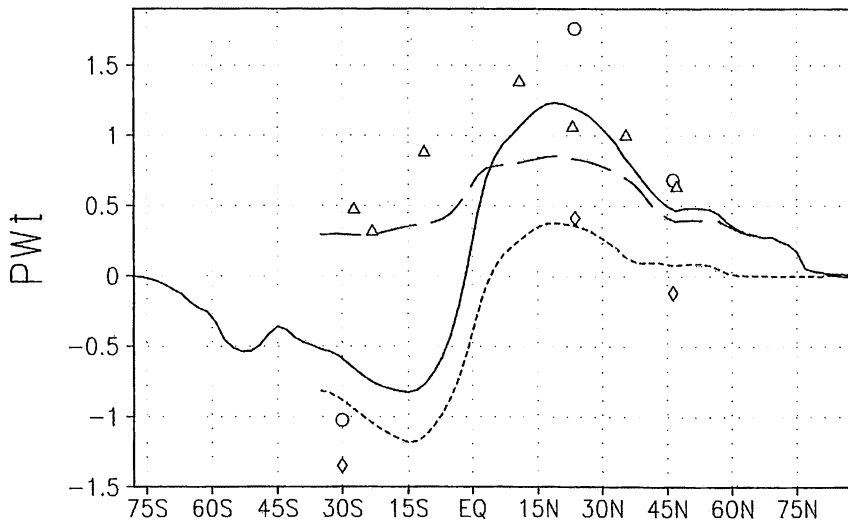


Рис. 1. Среднегодовые меридиональные переносы тепла по результатам 1-го эксперимента в ПВт: Мировой океан (сплошная линия), Атлантический океан (длинный пунктир), суммарный перенос в Тихом и Индийском океанах (короткий пунктир). Приведены значения оценок меридионального переноса тепла из [118] для глобального океана (кружки), Атлантики (треугольники), Индийского и Тихого океанов (ромбики). Положительные значения МПТ соответствуют переносу тепла на север, а отрицательные — на юг

Для сравнения с данными наблюдений ([94]) на рис. 1 приведены значения оценок (с границами ошибок) меридионального переноса тепла для глобального океана (кружки), Атлантики (треугольники), Индийского и Тихого океанов (ромбики). Можно отметить некоторое занижение абсолютных величин модельного МПТ. Предположительно причинами такого занижения может служить ограниченность расчетов климатической циркуляции океана при предписанном атмосферном воздействии, а также грубость пространственного разрешения модели.

**Термохалинная структура.** Численные эксперименты показывают, что если в качестве начального условия для температуры и солёности выбраны данные Левитуса, то основные переходные процессы в динамике океана заканчиваются приблизительно к 50-му году модельного времени и циркуляция переходит в квазистационарный режим. Однако в средних по объёму температуре и солёности остаются слабые тренды. Наличие этих трендов показывает, что модель океана не выходит на полностью равновесный режим за время интегрирования в 200 лет.

Температурные отклонения расчетных данных от наблюдений имеют в основном положительные значения. Среднегодовое среднезональное рас-

пределение отклонений модельной температуры от данных Левитуса по широте и глубине имеет выраженный подковообразный вид с максимумами порядка  $+2^{\circ}\text{C}$ , расположенными на глубине  $\sim 700$  м в Южном полушарии и на глубине  $\sim 400$  м — в Северном. Оба максимума находятся приблизительно на 40-х параллелях Северного и Южного полушарий. Еще одна область отклонений с величиной порядка  $+1.5^{\circ}\text{C}$  находится в глубинных слоях Северного Ледовитого океана.

Среднегодовое среднезональное распределение солёности (см. [17]) также показывает рост солёности в целом по океану, и особенно в Северном Ледовитом океане, где отклонения от данных Левитуса достигают  $0.5^{\circ}/\text{‰}$ . Пространственное распределение ошибки для солёности показывает, что в Северном Ледовитом океане она существенно превышает ошибку в средних и низких широтах. Поскольку для ошибки по температуре это не так, то можно сделать заключение, что при данной постановке эксперимента процессы ледообразования в высоких широтах более существенны для формирования поля солёности, нежели поля температуры.

#### **6.4. Чувствительность характеристик модельной циркуляции океана к изменениям напряжения трения ветра**

Как ранее отмечалось, было проведено два эксперимента, отличающихся ветровым атмосферным воздействием — среднемесячными климатическими полями ветра. В первом эксперименте они брались из того же массива реанализа NCEP, что и потоки в (6.1), а во втором эксперименте — из данных реанализа ECMWF. В целом данные реанализов NCEP и ECMWF довольно похожи, однако имеют место и области существенных различий, главные из которых находятся в приэкваториальной области Тихого океана и в Южном океане. Первая из этих областей указывает на существенно большую интенсивность пассатов Тихого океана в данных ECMWF по сравнению с NCEP. Здесь увеличение напряжения трения ветра достигает величин более  $0.03 \text{ н}\cdot\text{м}^{-2}$ . В области Южного океана наблюдается уменьшение величин южного направления меридиональной компоненты ветрового напряжения трения. В секторе Тихого океана меридиональная компонента даже меняет знак на противоположный.

Заметные отличия осредненных по вертикали циркуляций, вызванные отмеченными только что отличиями в напряжении трения ветра, расположены в юго-восточной части круговорота, вызванного течением Куроисио, и в области АЦТ. Первая особенность связана с усилением пассатов Тихого океана, способствующим увеличению интенсивности пассатных течений, что, в свою очередь, приводит к усилению антициклонической циркуляции

в районе Куроисио, вторая — с уменьшением расхода АЦТ, которое соответствует ослаблению южно-направленной составляющей напряжения трения ветра в Южном океане. Однако на этом фоне имеются несколько пятен локального усиления струй АЦТ. Поскольку величины изменений в картине среднегодовой функции тока только в отдельных районах несколько превышают 5 Св, то можно констатировать, что баротропная циркуляция при данном изменении трения ветра меняется слабо.

Основные изменения в структуре течений в верхнем слое океана при изменении ветра произошли в зоне пассатных течений. Усиление пассатов привело к завышению скоростей пассатных течений в Тихом океане по отношению к результатам 1-го эксперимента на  $5-10 \text{ см}\cdot\text{с}^{-1}$ . Область направленных на восток течений существенно увеличилась.

На разности меридиональных функций тока из двух экспериментов, показанной на рис. 2а с помощью изолиний, видно, что за счет усиления пассатных течений формируются дополнительные приэкваториальные ячейки циркуляции с расходами, достигающими величин порядка 10 Св. Отмеченные выше изменения в климатической циркуляции, образовавшиеся вследствие изменения напряжения трения ветра, отразились и в изменении меридиональной термохалинной структуры (рис. 2а). В поле температуры наблюдаются приэкваториальные ячейки с положительными отклонениями, природу которых в низких и средних широтах можно объяснить следующим образом. Усиление пассатов индуцирует почти симметричные относительно экватора меридиональные ячейки циркуляции с максимумами на глубинах порядка 100 м, на расстоянии около  $3^\circ$  от экватора. Циркуляция образовавшихся ячеек "закачивает" поверхностные теплые воды вглубь, образуя максимумы температурных аномалий на глубинах порядка 150 м (рис. 2а).

Изменения в меридиональной циркуляции и термохалинной структуре нашли свое отражение в изменении меридиональных переносов тепла и пресной воды. Отмеченное усиление приэкваториальных подповерхностных ячеек в Тихом океане, в комбинации с изменениями в термохалинной структуре, индуцировали дополнительный вынос тепла и пресной воды из экваториального района. Это отражается в зигзагообразных изменениях переносов тепла, показанных в приэкваториальной области Тихого океана (см. разность меридиональных переносов тепла на рис.2б). Размахи этих зигзагообразных изменений превышают 0.3 ПВт для переноса тепла и 0.35 Св для переноса пресной воды [17].

В глобальном переносе тепла заметно повсеместное увеличение в среднем на 0.15 ПВт переноса на юг, которое объясняется усилением в толще океана направленной против часовой стрелки меридиональной циркуляции. Главный вклад в этот процесс вносит Тихий океан.

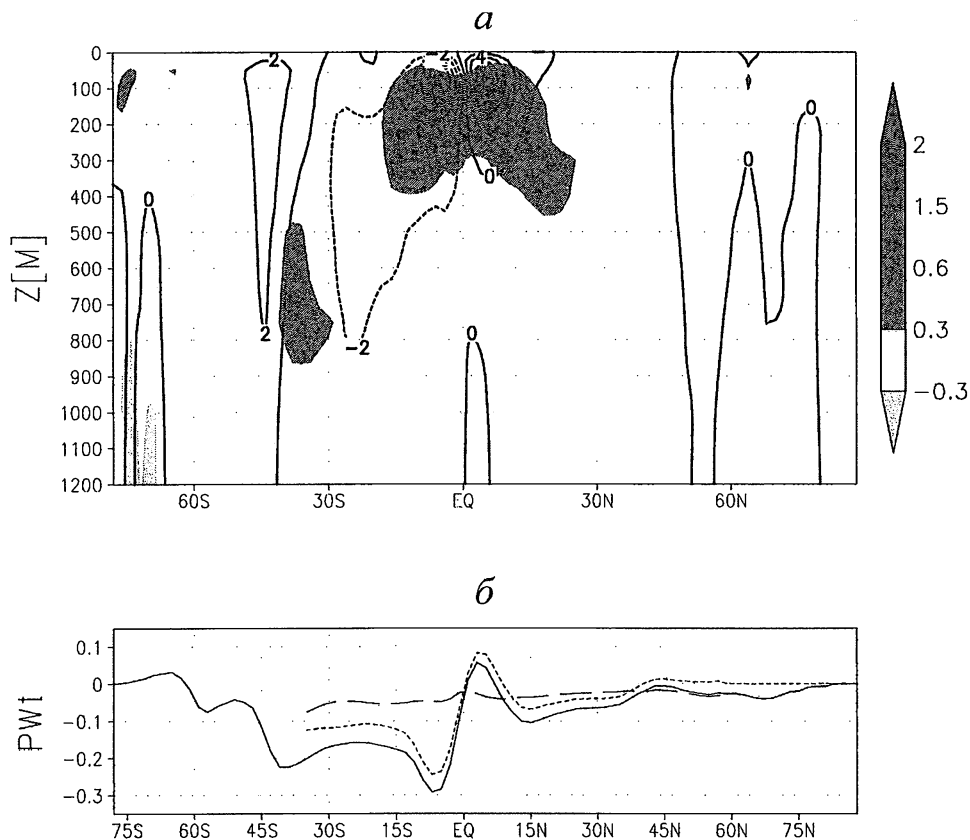


Рис. 2. а — Разность среднегодовых среднезональных распределений потенциальной температуры по результатам 2-го и 1-го экспериментов (области отрицательных и положительных величин по модулю более  $0.3^{\circ}\text{C}$  показаны с помощью различных оттенков серого цвета со шкалой градаций, расположенной справа от рисунка). Изолиниями с шагом  $5 \text{ Sv}$  показана разность меридиональных функций тока по результатам 2-го и 1-го экспериментов; б — Среднегодовые разности меридиональных переносов тепла по результатам 2-го и 1-го экспериментов для Мирового (сплошная линия), Атлантического (длинный пунктир) и суммарно Тихого и Индийского океанов (короткий пунктир). Положительные значения МПТ соответствуют переносу тепла на север, а отрицательные — на юг

## 6.5. Выводы

Проведенные расчеты показывают, что модельные распределения океанической циркуляции и термохалинных полей соответствуют данным наблюдений и хорошо согласуются с расчетами по другим моделям.

Расчеты показывают, что структура модельного климата океана чувствительна к вариациям напряжения трения ветра. Его замена на данные

ECMWF приводит к заметным изменениям в циркуляции и термохалинных полях и, как следствие, к изменениям меридиональных переносов тепла и пресной воды.

Напряжение трения ветра по данным реанализа NCEP приводит к меньшим отклонениям модельного климата от наблюдаемого, чем по данным ECMWF. Отчасти это может быть следствием согласованности данных напряжения трения ветра с потоками тепла и пресной воды на поверхности океана, взятыми из одного и того же массива данных NCEP.

Проведенные эксперименты позволяют сделать общий вывод о том, что при моделировании долгопериодной вынужденной циркуляции океана с заданным атмосферным воздействием возникает проблема корректного задания этого воздействия. Данные по ветровому и термохалинному воздействию должны быть согласованными и между собой и с расчетной ТПО. Атмосферное воздействие должно быть таковым, чтобы климатические модельные ТПО и СПО не сильно отклонялись от наблюдаемых величин. В этом случае в граничных условиях на поверхности океана для температуры и солености можно было бы использовать малые значения релаксационных коэффициентов.

## 7. Моделирование динамики Гольфстрима с высоким пространственным разрешением

Одним из наиболее интересных и изученных океанических объектов является Гольфстрим — течение Северной Атлантики. Ввиду важного практического значения, в частности влияния на климат, этому району уделяется особое внимание. Благодаря наличию в нем относительно большого числа данных наблюдений, он служит своеобразным полигоном для моделирования и изучения физических процессов Мирового океана. Именно на нем были апробированы численные модели с высоким пространственным разрешением —  $0.3^\circ$  и выше. В ряду многочисленных исследований с таким шагом наиболее интересной является работа по эксперименту ДИНАМО [86], на одном из аспектов которой мы здесь остановимся. Вопрос связан с изучением процесса адаптации гидрологических полей (течений, температуры, солености и плотности) — выхода решения на некоторый установившийся или динамически согласованный режим. В эксперименте ДИНАМО это период, равный 12–16 годам времени интегрирования численной модели. Стремление к "установлению" (в океане не бывает установившегося состояния) — не самоцель. Степень же взаимной адаптации океанических полей и реалистичность результатов зависит от выбора расчетного интервала и своевременной остановки процесса интегрирования.

При оценке адекватности модели одним из наиболее важных вопросов является прогнозирование зоны отрыва Гольфстрима от западного берега. Отрыв Гольфстрима наблюдается у мыса Гаттерас и должен воспроизводиться численной моделью. Эксперимент ДИНАМО показал, что в начальной стадии расчетов по трем различным моделям отрыв Гольфстрима был в нужном месте, однако затем траектории модельных течений заметно отклонились от реальной.

### 7.1. Западная интенсификация течений и отрыв Гольфстрима от берега

Поставим вопрос о том, почему происходит отрыв и почему именно в этом месте? Для правильного ответа необходимо знать, как вообще формируется Гольфстрим. Он представляет собой интенсивное течение, вначале следующее вдоль западного берега Северной Америки, а у мыса Гаттерас выходящее в открытый океан. Господствующее мнение среди океанологов однозначно — за западную интенсификацию отвечает  $\beta$ -эффект. Допустим, что это так, но что определяет точку отрыва течения от берега? Ведь  $\beta$ -эффект существует на всех широтах, в том числе и на широте мыса Гаттерас. Тогда почему  $\beta$ -эффект не препятствует отрыву? Для ответа на эти вопросы вспомним два центра действия атмосферы над Северной Атлантикой: субтропический антициклон и субполярный циклон. В "свободном" океане существуют те же центры действия, только они асимметричны — сдвинуты к западу. Является ли  $\beta$ -эффект единственным фактором, создающим эту асимметрию? Наш ответ на этот вопрос — отрицательный. Покажем это путем качественного анализа двух уравнений [58], [57], [60].

Упрощенный вариант первого уравнения в безразмерной форме имеет вид

$$\left(\frac{\beta H}{l} - \bar{u}\right) \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} = a_1 Q' + \varepsilon_1 \operatorname{rot} \vec{\tau} - \underbrace{\frac{\beta}{l \rho_0} \int_0^H (H - z) \frac{\partial \rho}{\partial x} dz}_{BARBE}, \quad (7.1)$$

где:  $a_1, \varepsilon_1$  — безразмерные параметры,  $Q'$  — безразмерная функция притока тепла,  $\zeta_1$  — уровень океана, порожденный аномалией плотности,  $\bar{u} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x}$  — адвекция аномалии плотности зональной скоростью пассатного течения в "свободном" океане,  $BARBE$  означает бароклинный  $\beta$ -эффект. Смысл остальных обозначений очевиден.

Проанализируем выражение в скобках левой части уравнения (7.1). В южных широтах  $\bar{u} < 0$ , т.е. течение, порожденное пассатным ветром, одного знака с  $\beta$ -эффектом. Оба эти фактора вместе "переносят" массу бароклиновой жидкости к западу, но на их пути встречаются препятствия в

виде Больших Антильских островов и самого материка Северной Америки. Наличие меридионально направленных материков в океане (в отличие от атмосферы) трансформирует субтропический антициклон, создает асимметрию. Вообще говоря, течения в свободном океане направлены в южных широтах не на запад, а на северо-запад. Отчасти именно они и формируют Антильское течение и Гольфстрим. В средних широтах (30–40° с. ш.) в океане существует такой же западно-восточный перенос, как и в атмосфере, т.е. адвекция бароклинной жидкости направлена противоположно  $\beta$ -эффекту, превосходит его, что заставляет Гольфстрим оторваться от западного берега.

Обратимся к уравнению для уровня:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\alpha} \Delta\zeta - \left( \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{H\beta}{l} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \\ & = \frac{1}{\rho_0 g} \operatorname{rot}_z \vec{\tau} - \underbrace{\int_0^H J(H, \rho) dz}_{\text{JEBAR}} - \underbrace{\frac{\beta}{\rho_0 l} \int_0^H (H - z) \frac{\partial \rho}{\partial x} dz}_{\text{BARBE}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В данном случае нас интересует только левая часть уравнения (7.2), точнее, множители перед  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ .

Как известно, Атлантический океан сужается и мелеет в направлении от средних широт к северу. Следовательно,  $\frac{\partial H}{\partial y} > 0$  и рельеф дна содействует западной интенсификации не в меньшей степени, чем  $\beta$ -эффект, так как  $\frac{\partial H}{\partial y}$  — величина того же порядка, что и  $\frac{H\beta}{l}$ . По этой причине можно говорить о "захвате" течений у континентального склона даже после того, когда Гольфстрим покидает мыс Гаттерас, так как  $\frac{\partial H}{\partial x} < 0$ . Благодаря важной роли перепада рельефа дна на континентальном склоне, можно также говорить о прибрежной интенсификации, а не только о западной. В этом легко убедиться, если начертить карту изолиний функции  $\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$  или просто карту рельефа дна и сравнить ее с интенсивными прибрежными течениями. Особенно ярко это видно на примере известной С-образной циркуляции у восточного побережья Северной Америки. Итак, сам по себе мыс Гаттерас ни при чем. Формирование, движение к северу и отрыв Гольфстрима, так же как и последующее движение Северо-Атлантического течения в северо-восточном направлении, контролируются крупномасштабными внепогранслойными процессами и бароклинностью морской воды, направляются планетарным континентальным склоном. Если, например,

градиенты  $T$  и  $S$  подавлены, то величина  $\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$  сыгрывает решающую роль и отрыв Гольфстрима произойдет значительно севернее мыса Гаттерас. Это характерно для тех случаев, когда вследствие недостатков моделей (большой шаг по горизонтали, завышенные значения коэффициентов турбулентности и т.д.) и/или неадекватно длительного интервала интегрирования по времени происходит дальнейшее сглаживание и без того гладких исходных полей  $T$  и  $S$ . Именно так произошло и в эксперименте ДИНАМО. На начальном этапе расчетов, составляющем около 6 месяцев, отрыв Гольфстрима наблюдался недалеко от мыса Гаттерас. Однако через 4 года отрыв происходит уже значительно севернее, а стержень интенсивных поверхностных течений оказывается привязанным к высоким градиентам рельефа дна. Следовательно, за 4 года модель успела исказить исходные поля  $T$  и  $S$  и генерировать свой вариант полей, которые нереалистичны из-за того, что шаг в  $0.3^\circ$  груб для моделирования как общей структуры Гольфстрима (скорости течения, расхода воды и т.д.), так и точки его отрыва, если интегрирование проводится на неадекватно большое модельное время.

## 7.2. Модели Северной Атлантики с высоким пространственным разрешением

В последние годы появился ряд интересных работ по моделированию динамики Гольфстрима с высоким разрешением. Именно маленький шаг по горизонтали является отличительной чертой серии работ, на которых мы остановимся ниже.

Первым свидетельством необходимости перехода к высокому разрешению послужила работа Блека и др. [76], в которой показано, что последовательное уменьшение шага по горизонтали  $0.9^\circ \rightarrow 0.225^\circ \rightarrow 0.08^\circ$  (при прочих равных параметрах модели) приводит к постепенному сужению потока, образованию меандров и вихрей и отрыву Гольфстрима точно у мыса Гаттерас. Авторы провели интегрирование только на короткое модельное время и для небольшого района северо-западной части Атлантики, но четко продемонстрировали достижение желаемых качеств.

На более длительное модельное время интегрирования (6 лет) провели расчеты Пейва и др. [131]. Карта уровенной поверхности, полученная этими авторами, показывает сформированную интенсивную струю и правильное место отрыва Гольфстрима, а кривая кинетической энергии (КЭ) свидетельствует о том, что процесс обладает колебаниями с месячным периодом. Следует отметить, однако, что при используемых авторами невысоких значениях коэффициентов турбулентности его многолетний тренд — расходящийся, так что дальнейшее продолжение расчетов нецелесообразно.



Наиболее интересным исследованием в данном направлении является, на наш взгляд, [147]. В граничных условиях на поверхности океана авторы используют поле ветра по ежесуточной фактической информации ECMWF, для расчета температуры задается сезонный ход климатического потока тепла (также по данным ECMWF), соленость формируется путем адаптации к ее поверхностным климатическим значениям. Эксперимент проводится на 16 лет модельного времени, причем для первых 5 лет расчеты проводятся дважды, с включением на первом этапе процедуры инициализации — приспособления верхнего слоя океана к заданным на поверхности граничным значениям температуры и солености.

В расчетах получен весьма реалистичный Гольфстрим, включая повышение его расхода от 90 Свдрупов (Св) у мыса Гаттерас до 150 Св на  $55^\circ$  з.д. Адекватно воспроизведены структура вертикальных полей течений, место отрыва Гольфстрима, формирование меандров и вихрей, высокий уровень вихревой кинетической энергии (КЭ) в исследуемой акватории и т.д.

Численный эксперимент проведен по модели POP (параллельная океанская программа), являющейся развитием известной модели Брайна, основанной на системе примитивных уравнений в  $Z$ -системе координат типа (1.1)–(1.7). Он имеет некоторые преимущества по сравнению с другим подобным экспериментом с высоким разрешением, выполненным по  $\rho$ -модели Университета Майами MICOM [82]. В отличие от POP, MICOM использует систему уравнений, записанных в изопикнических координатах. Сравнивая результаты двух экспериментов, можно отметить, в частности, что в эксперименте MICOM максимальная скорость Гольфстрима равна 150 см/с, а в эксперименте POP — 190 см/с. В обоих случаях расчеты выполнены практически для одинаковых районов Северной Атлантики. Шаги по горизонтали:  $1/10^\circ$  (POP) и  $1/12^\circ$  (MICOM), а также время интегрирования моделей: 16 (POP) и 20 лет (MICOM) — близки. (На рис. 3 представлена уровенная поверхность, полученная по обоим моделям.) Некоторые особенности экспериментов состоят в следующем. В эксперименте MICOM в качестве источника, описывающего внешнее воздействие, взята климатическая информация COADS. В POP-модели процессы горизонтального турбулентного обмена параметризованы с использованием бигармонических операторов, а в MICOM — в виде комбинации гармонического и бигармонического операторов. Оба эксперимента показывают правильную точку отрыва Гольфстрима, но имеется существенная разница в его траектории, интенсивности и изменчивости. В POP — Гольфстрим после отрыва от берега движется более зонально, отклоняясь лишь на  $1\text{--}1.5^\circ$  к югу от правильного направления. В MICOM — в начальной стадии, траектория Гольфстрима реалистична, но затем он отклоняется к северу на  $1\text{--}2^\circ$ , амплитуда сезонного колебания стержня в MICOM неестественно велика.

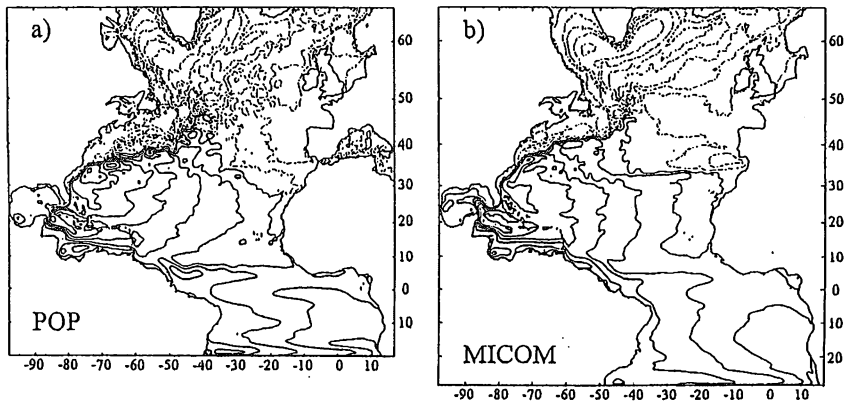


Рис. 3. Уровневая поверхность, полученная по моделям POP и MICOM

Большой интерес представляет чувствительность обеих моделей к значениям коэффициентов турбулентности. Попытка уменьшить коэффициенты диффузии и вязкости перед бигармоническими операторами втрое приводит к тому, что отрыв Гольфстрима в обеих моделях происходит южнее мыса Гаттерас. Увеличение коэффициентов исправляет ситуацию в эксперименте POP. В эксперименте MICOM — тоже, но здесь это порождает устойчивый вихрь севернее мыса Гаттерас. Завышение коэффициента перед бигармоническим оператором вязкости подавляет интенсивность вихрей, а увеличение коэффициента перед гармоническим оператором ухудшает схему крупномасштабной циркуляции. В этой связи в эксперименте MICOM пришлось подбирать некоторую оптимальную комбинацию коэффициентов.

Отметим еще раз аспект, связанный с точкой отрыва Гольфстрима у мыса Гаттерас. Точка отрыва, так же как и собственно Гольфстрим, не могли бы оказаться реалистичными при столь длительном интегрировании, если бы в моделях использовалось более грубое пространственное разрешение. Если бы в процессе вычислений поля  $T$  и  $S$  оставались в достаточной степени высокоградиентными, реалистичными, то и без сложных современных моделей получились бы и Гольфстрим, и правильное место его отрыва от берега, которое можно было бы описать простой формулой

$$\zeta = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^H \rho dz. \quad (7.3)$$

Значит, дело в том, каковы исходные климатические поля  $T$  и  $S$  и правильно ли они трансформируются численной моделью в процессе вычислений.

При грубом разрешении погрешность аппроксимации велика, вычислительная вязкость — большая и длительное интегрирование приводит к

размыванию градиентов температуры и солёности, даже если они были реалистичными в исходных данных. В [147] отмечается, что в процессе счета модельная плотность не очень далеко отклонилась от начального климатологического поля. Именно малость отклонения плотности от климатических данных дала возможность сформировать интенсивный Гольфстрим, географически правильную точку его отрыва и другие реалистичные расчетные характеристики. Адекватная динамика течений была получена благодаря сочетанию процессов нелинейной термогидродинамической интерполяции и экстраполяции термохалинных полей, их адаптации с полем течений в условиях высокого пространственного разрешения и не слишком длительного интервала интегрирования по времени. Авторы отмечают, что для достижения большей реалистичности результатов необходимо повышение в 50–100 раз мощности компьютеров.

Несколько слов о проблеме устойчивости и сходимости решения. В [147] неоднократно подчеркивается невозможность продемонстрировать сходимость решения без перехода к еще более высокому разрешению.

Анализ расчетов показывает, что результаты принципиально зависят от выбранных коэффициентов турбулентности. При больших коэффициентах и длительном интегрировании модель приводит к установлению нереалистичного, сильно сглаженного решения. При малых коэффициентах турбулентности — решение неустойчиво. Вот почему необходимо иметь критерий своевременной остановки расчетов.

Стремление к более точному моделированию Гольфстрима приводит к высоким требованиям как к вычислительной технике, так и к методам вычислительной математики. В нашей стране к решению таких сложных задач оказалась готова только школа Г.И. Марчука. О некоторых численных методах названной школы и полученных результатах, достигнутых ею по моделированию динамики морей и океанов, изложено в данной работе.

В заключение этого раздела кратко упомянем лишь о результатах моделирования Гольфстрима с высоким разрешением.

Общая постановка задачи, граничные условия и численная техника, основанная на методе расщепления, изложены ранее. Расчеты проведены по  $\sigma$ -модели ОЦО, основанной на уравнениях (1.38)–(1.44), как и при расчете динамики Мирового океана.

Район исследований — акватория Атлантического океана от  $5^\circ$  ю.ш. до  $50^\circ$  с.ш. Шаг сетки по горизонтали —  $1/12^\circ$ , число  $\sigma$ -горизонтов по вертикали — 20. Полученные результаты очень близки к характеристикам работы [147]: модель правильно воспроизводит место отрыва Гольфстрима, высокие скорости течений, меандры и вихри в Северо-Атлантическом течении и т.д. В качестве иллюстрации приводится карта поверхностных течений (рис. 4). Как и во всех подобных экспериментах с высоким разрешением, и в данном случае имеется проблема, связанная с адекватностью

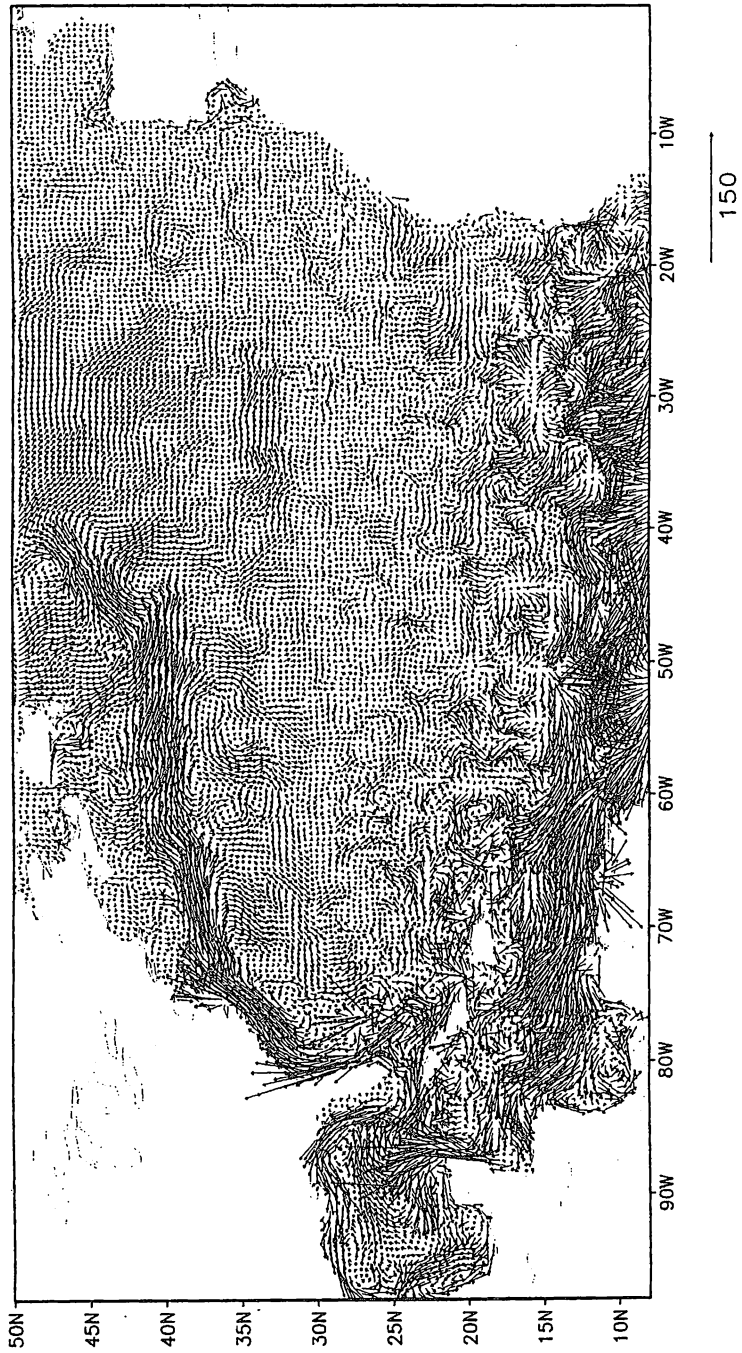


Рис. 4. Карта поверхностных течений (акватория Атлантического океана от 5° ю.ш. до 50° с.ш.)

воспроизводимых характеристик реального явления. В настоящее время вычислительная техника, численные методы и физические параметризации процессов турбулентности не позволяют реалистично моделировать динамику глубинных и придонных слоев океана. Время установления решения во всей толще глубокого океана велико; это требует длительного интегрирования, при котором результаты расчетов "удаляются" от известных данных наблюдений.

## 8. Моделирование полярного океана

В общей задаче моделирования полярного океана можно выделить три направления:

- моделирование полярного океана как компонента климатической системы Земли;
- прогноз "погоды" океана и отдельных морей, прежде всего — прогноз состояния морского льда для нужд мореплавания;
- моделирование отдельных физических явлений, происходящих в воде и морском льду, с высоким пространственно-временным разрешением, включая оценки экстремальных ситуаций.

### 8.1. Роль полярных областей в климате Земли

Особый интерес к изучению полярных областей Земли (прежде всего — Арктики) связан с их предполагаемой высокой чувствительностью к глобальным изменениям климата. Так, например, оценки отклика климата Земли на увеличение доли углекислого газа в атмосфере (сценарий "удвоения CO<sub>2</sub>") [106] показывают, что наибольшее потепление ожидается именно в северной полярной области Земли. В связи с этим было высказано предположение о возможном таянии ледников Гренландии и Антарктиды, что приведет к катастрофическому повышению уровня Мирового океана. Даже в том случае, если повышение температуры приведет "всего лишь" к таянию только морского льда в Арктике, это может привести к изменению параметров термохалинного переноса в Атлантическом океане и изменению климата в Северном полушарии [79].

### 8.2. Некоторые особенности состояния Северного Ледовитого океана

Северный Ледовитый океан (СЛО) имеет существенные отличия от других районов Мирового океана, в том числе и покрытых льдом районов Южного океана. Это связано со следующими особенностями гидрологии СЛО.

- Северный Ледовитый океан представляет собой небольшую область, соединяющуюся с Тихим и Атлантическим океанами относительно узкими проливами. Теплые и соленые воды Тихого и Атлантического океанов проникают в центральную часть СЛО в слое 300–1000 м в виде узких струй, поведение которых в значительной степени определяется особенностями рельефа дна.
- В СЛО втекают многие крупные реки Евразии и Северной Америки. При этом формируется уникальное распределение солёности по глубине — с ярко выраженным галоклином глубиной порядка 10–30 м. Это приводит к высокой устойчивости поверхностных вод — частота Вайсяля-Брента  $N$  в СЛО достигает 0.03 рад/с, что может быть сравнимо только с экваториальным океаном, в котором  $N \sim 0.015$  рад/с. Такая сильная стратификация вод СЛО приводит к изолированию верхнего слоя океана от теплых атлантических вод, формируя в первом приближении двухслойную структуру, что способствует увеличению массы морского льда. Кроме того, что речной сток формирует сильные изменения солёности по вертикали, формируются интенсивные горизонтальные фронты, прежде всего на мелководном Сибирском шельфе, около устьев Лены, Енисея и Оби.
- В формировании горизонтальных фронтов в поле солёности на мелководном шельфе значительную роль играют приливы.
- СЛО является резервуаром пресной воды, которая, при определенных изменениях ветрового режима, может вытекать в Северную Атлантику [137], формируя так называемые Великие Солёностные Аномалии [73].

Особенность полярного океана, отличающая его от всех других районов Мирового океана, состоит в наличии ледового покрова. Толщина и тепло-содержание морского льда пренебрежимо малы по сравнению с глубиной и тепло-содержанием океана, однако лед оказывает существенное влияние на потоки массы, тепла и импульса из атмосферы в океан. Поскольку в условиях СЛО лед образуется в одних районах океана, а тает в других, необходимо учитывать дрейф льда.

Основная трудность изучения СЛО состоит в невозможности прямого измерения многих параметров состояния льда и морской воды на регулярной основе. Так, например, большую проблему представляет измерение средней толщины льда. Недостаточно информации по гидрологии глубинных вод многих районов Центральной Арктики — измерения проводились на грубой сетке и с очень большими интервалами по времени. Относительно хорошо изучен верхний слой океана, сплоченность льда и особенности термодинамики морского льда. Поэтому при исследовании полярных областей Мирового океана особое значение приобретают спутниковые наблюдательные системы, работающие вместе с системами усвоения данных.

### 8.3. Особенности современных численных моделей циркуляции СЛО

Сложность задачи воспроизведения наблюдаемых крупномасштабных особенностей состояния воды и морского льда СЛО побудила организовать соответствующий международный проект по сравнению численных моделей — АОМІР (Arctic Ocean Model Intercomparison Project). Этот проект объединяет все основные совместные модели "океан–морской лед" и многие глобальные климатические модели, разработанные в США, Германии, Канаде, Бельгии и России. Основываясь на результатах проекта, изложим некоторые положения, касающиеся особенностей современных численных моделей СЛО.

Модели крупномасштабной гидротермодинамики полярного океана основаны на примитивных уравнениях (1.1)–(1.7). Отличия формулировки различных моделей океана заключаются в основном в следующем:

- в постановке граничного условия на верхней поверхности океана — это либо условие "твердой крышки", либо линеаризованное кинематическое условие, допускающее описание приливных колебаний, имеющих важное значение на мелководном шельфе. Выбор граничного условия на поверхности океана определяет формулировку граничных условий для потоков солености на границе модельной области (осадки–испарение, речной сток, перенос через проливы, соединяющие СЛО с другими районами Мирового океана, термическая эволюция морского льда);
- в выборе численных схем (вертикальной координаты, метода пространственной дискретизации и методов интегрирования по времени);
- в параметризации процессов горизонтальной турбулентной диссипации импульса (гармоническое или бигармоническое горизонтальное трение), в выборе параметризаций вертикальной турбулентной вязкости и диффузии.

### 8.4. Описание термодинамики морского льда

Описание термодинамики морского льда и снега основывается на локально-одномерных моделях различной степени сложности, с различным представлением распределения льда по градиентам его толщины, различным числом уровней в толще льда, различными схемами параметризации альbedo и проникающей в лед радиации. Например, для льда, не покрытого снегом, решается задача вида

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( k_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} [I_0 \exp(-\lambda_i z)], \quad z \in [0, h_1], \quad (8.1)$$

где  $\rho_i$  — плотность морского льда, которая предполагается постоянной,  $c_i(T_i, S_i)$  — теплоемкость льда как функция его температуры и солености  $T_i$  и  $S_i$ ,  $k_i(T_i, S_i)$  — теплопроводность льда,  $I_0$  — поток проникающей солнечной радиации с вертикальным масштабом затухания  $\lambda_i$ ,  $z$  — вертикальная координата, направленная вниз от поверхности снега/льда, на которой  $z = 0$ . Задача для снежного покрова решается аналогично в предположении, что солнечная радиация в лед не проникает.

На поверхности снега или льда задаются потоки тепла, на границе снега и льда ставится условие непрерывности температуры и потоков тепла, на нижней границе льда задается температура, равная температуре замерзания морской воды при данной солености. Температура поверхности снега или льда не может превышать точку плавления. В противном случае избыток тепла идет на таяние снега или льда, что формирует положительный поток пресной воды в океан. На нижней границе льда может происходить как таяние, так и намерзание льда, приводящее к формированию соответствующего потока пресной воды или соли. При фазовых переходах меняется масса льда и снега.

В настоящее время основная часть климатических моделей использует простые модели морского льда [132], но некоторые группы перешли на более сложную модель Национального Центра Атмосферных исследований США [78]. Это — многослойная модель, учитывающая распределение солености по толщине льда и зависимость термодинамических параметров льда от его температуры и солености. Все современные модели учитывают снежный покров на льду. Численные особенности моделей определяются в основном количеством уровней во льду для описания профиля температуры и способами учета солености льда. Можно сказать, что с вычислительной точки зрения задача термодинамики морского льда решена и не представляет существенных сложностей. Основные вопросы, возникающие в этой задаче — это вопросы выбора параметризаций физических процессов.

## 8.5. Описание динамики морского льда

При постановке задачи предполагается, что ледовый покров представляет собой двумерную среду и может быть описан в каждой точке ансамблем льдов различной толщины (или функцией распределения льда по толщине), при этом каждую градацию по толщине льда  $h_k$  можно описать ее массой  $m_k$  и сплоченностью (или концентрацией)  $A_k$ . Соответственно можно ввести массу снега, лежащего на льду данной градации  $k$ . Задача динамики морского льда сводится к решению уравнений вида

$$m \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + ml\vec{u} \times \vec{u}_i = -mg\vec{\nabla}\zeta + \vec{\tau}_a + \vec{\tau}_w + \vec{F}. \quad (8.2)$$



Здесь  $m$  — суммарная масса льда и снега на нем,  $\vec{\tau}_a$  — касательное напряжение трения ветра,  $l$  — параметр Кориолиса,  $\vec{k}$  — единичный вектор, направленный по вертикали вверх,  $\vec{\nabla}\zeta$  — градиент уровня океана,  $\vec{F}$  — сила, вызванная реологией морского льда (т.е. напряжениями, возникающими в ледовом покрове вследствие его движения и различной толщины и сплоченности льда). Предполагается, что скорость дрейфа морского льда одинакова для всех градаций по толщине.

Сила представляет собой градиент от тензора напряжений  $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \sigma$ , или в покомпонентном виде, в сферических координатах  $(\lambda, \theta)$  на поверхности сферической Земли радиуса  $R$ :

$$\begin{pmatrix} F_\lambda \\ F_\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{R \sin \theta} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma_{11} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{12} \sin \theta) + \sigma_{12} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \sigma_{12} + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{22} \sin \theta) - \sigma_{11} \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Все модели используют сложные нелинейные параметризации для описания реологии морского льда в блоке динамики льда. Это может быть так называемая эллиптическая вязко-пластичная реология Хиблера [97], где компоненты тензора напряжений вычисляются из алгебраических соотношений

$$\sigma_{11} = (\zeta - \eta) D_I + \frac{2\eta}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} + \nu_i \cos \theta \right) - \frac{P}{2}, \quad (8.4)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\eta}{R} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} u_i \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \nu_i}{\partial \lambda} \right), \quad (8.5)$$

$$\sigma_{22} = (\zeta - \eta) D_I + \frac{2\eta}{R} \frac{\partial \nu_i}{\partial \theta} - \frac{P}{2}. \quad (8.6)$$

Коэффициенты объемной  $\zeta$  и сдвиговой  $\eta$  вязкости в случае эллиптической реологии Хиблера вычисляются по формулам:

$$\zeta = \frac{P}{2\Delta(\dot{\epsilon})}, \quad \eta = \frac{\zeta}{e^2}, \quad (8.7)$$

где

$$\Delta^2(\dot{\epsilon}) = (\dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2)(1 + e^{-2}) + 4\dot{\epsilon}_{12}^2 e^{-2} + 2\dot{\epsilon}_{11}^2 \dot{\epsilon}_{22}^2 (1 - e^{-2}), \quad (8.8)$$

$e$  — эксцентриситет эллиптической реологии, а  $\epsilon_{ij}$  — компоненты тензора скоростей деформации

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \lambda} + \nu_i \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right), \\ \dot{\epsilon}_{12} &= \frac{1}{2R} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \nu_i \frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \nu_i}{\partial \lambda} \right), \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{1}{2R} \frac{\partial \nu_i}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Предельный случай вязко-пластичной реологии — "кавитирующая жидкость" [88], [89] — получается при формальном предельном переходе  $e \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 0$ .

Для регуляризации эллиптической реологии в пределе малых скоростей деформации, когда оператор  $\vec{F}$  может быть недиссипативным, М.Хардером [95] предложена модификация вида (так называемый метод проекции):

$$\zeta = \frac{P}{2(\Delta(\dot{\epsilon}) + \Delta_{\min})}, \quad \tilde{P} = \frac{P\Delta}{\Delta + \Delta_{\min}}.$$

Параметр  $\Delta_{\min}$  выбирается эмпирическим путем, в оригинальной работе предложены значения

$$\Delta_{\min} = 2 \div 5 \cdot 10^{-9} \text{ сек}^{-1}.$$

Регуляризованный вариант этой реологии — упруго-вязко-пластичная реология [102], [101]. Основная идея состоит в формальном введении упругих волн, затухающих за время с масштабом  $T_d$  и формулировке эволюционной задачи для компонент тензора напряжений. Для этого удобно ввести вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} \sigma_D &= \sigma_{11} + \sigma_{22}, & \sigma_T &= \sigma_{11} - \sigma_{22}, \\ \varepsilon_D &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, & \varepsilon_T &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Тогда можно записать три эволюционных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_D}{\partial t} + \frac{\sigma_D}{2T_d} + \frac{P}{2T_d} &= \frac{P}{2T_d\Delta} \varepsilon_D, \\ \frac{\partial \sigma_T}{\partial t} + \frac{\sigma_T}{2e^2 T_d} &= \frac{P}{2T_d\Delta} \varepsilon_T, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} + \frac{\sigma_{12}}{2e^2 T_d} &= \frac{P}{2T_d\Delta} \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Таким образом, модель динамики льда в случае упруго-вязко-пластичной реологии представляет собой систему уравнений (8.1)–(8.3), (8.10)–(8.11) и соответствующих граничных условий. Обычно считается, что на береговом контуре можно поставить условие прилипания, а в проливах — вычислять скорости дрейфа в предположении свободного дрейфа.

С точки зрения вычислительной эффективности (особенно при использовании многопроцессорных вычислительных систем) упруго-вязко-пластичная реология представляется в настоящее время более предпочтительной. Это связано с тем, что обычная вязко-пластичная реология требует решения задачи с шагом по времени порядка 1 сек, а неявные схемы по времени в силу нелинейности задачи требуют линеаризации, корректность

которой в данном случае неочевидна. Упруго-вязко-пластичная реология позволяет решать задачу с шагом порядка 1 мин по явной схеме по времени.

Изменения массы льда и снега и сплоченности льда в процессе дрейфа вычисляются отдельно для каждой градации по толщине льда  $k$ :

$$\frac{\partial m_{i,k}}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}_i m_{i,k}) = T_{h,k} + Q_{h,k} + \gamma_{si} m_{s,k},$$

$$\frac{\partial m_{s,k}}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}_i m_{s,k}) = T_{s,k} + Q_{s,k} - \gamma_{si} m_{s,k},$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + \text{div}(\vec{u}_i A_k) = T_{A,k} + Q_{A,k}.$$

$Q_{h,k}$ ,  $Q_{A,k}$  — слагаемые, описывающие переход массы и сплоченности льда из градации в градацию в процессе торошения. Уравнения для массы снега и льда представляют собой следствие закона сохранения массы с учетом фазовых переходов при термодинамических процессах. Уравнение для сплоченности льда не следует из общих физических принципов типа законов сохранения массы, импульса, энергии и должно рассматриваться как эмпирическое соотношение.

В том случае, если лед деформируется, его суммарная сплоченность не может быть равна единице. В результате торошения льда при его движении постоянно образуется открытая вода. Будем считать, следуя работам [96], [95]; что скорость образования открытой воды равна

$$T_{A,0} = -0.5 \cdot (\Delta(\dot{\epsilon}) - |\vec{\Delta} \cdot \vec{u}_i|) \exp(-c^* \cdot (1 - \bar{A})).$$

## 8.6. Основные нерешенные вопросы

К недостаткам всех численных моделей СЛО можно отнести их неспособность воспроизвести баланс пресной воды и солей (см., например, [100], [74]). Это связано с тем, что модели обычно формулируются в терминах солёности. При использовании предположения о постоянстве объема воды граничные условия ставятся на плоскости  $z = 0$ , а не на поверхности уровня океана. Достигнуть выполнения закона сохранения массы соли в объеме можно только в случае  $S = \text{const}$  на невозмущенной поверхности океана, при  $z = 0$ . Добиться выполнения закона сохранения массы соли можно при формулировке "виртуального" потока солёности в случае условия "твердой крышки". Однако такое граничное условие не позволяет описывать приливы, которые, как сейчас представляется, играют важную роль в формировании температурных и солёностных фронтов на мелководном шельфе. Кроме того, в современных крупномасштабных моделях обычно не учитывается изменение объема жидкой воды вследствие таяния и намерзания льда. По-видимому,

для более точного описания баланса пресной воды в Арктике потребуются разработать новые модели со свободной поверхностью, обеспечивающие выполнение законов сохранения массы соли и массы пресной воды (в твердой и жидкой фазах).

Второй основной проблемой является неспособность моделей воспроизвести узкие струйные течения, контролируемые особенностями рельефа, и ответственные за перенос теплых атлантических вод через пролив Фрама и Баренцево море в центральную часть СЛО. Характерное значение бароклинного радиуса деформации Россби в СЛО около 5 км, ширина вдольбереговых струй — порядка 30 км. Это — малые величины по сравнению с размером СЛО и большинство современных климатических численных моделей не описывают течения таких масштабов.

### 8.7. Результаты моделирования наблюдаемого состояния СЛО

В качестве примера моделирования крупномасштабного состояния Северного Ледовитого океана можно привести данные, полученные по модели ИВМ РАН [71].

Модель использована для воспроизведения состояния Северного Ледовитого океана к северу от  $65^\circ$  с.ш. за период 1948–2002 гг. Уравнения модели записаны в повернутой системе координат с полюсом, расположенным в точке ( $0^\circ$  с.ш.,  $180^\circ$  в.д.). Пространственное разрешение модели составляло  $1^\circ$  в новой системе координат, т.е. примерно 111 км по горизонтали, по вертикали бралось 16 уровней со сгущением к поверхности океана, где разрешение составляло 10 м. Модельная область включает в себя 5 островов (рис. 5).

В модели задаются открытые границы в Норвежском море, в Датском проливе, в Беринговом проливе и в двух проливах Канадского архипелага — МакКлури и Нарском. Рельеф дна модели позволяет описать лишь наиболее крупные особенности области СЛО — хребты Ломоносова и Менделеева, котловину Нансена и Канадский бассейн.

Для описания динамики морского льда используется упруго-вязкопластичная реология [102], [101]. При расчете термодинамики льда учитывается 8 градаций льда по толщине, на каждой градации учитывается снежный покров. При расчете сплоченности льда учитываются процессы торошения и бокового таяния. Модель альbedo учитывает четыре состояния поверхности: сухой снег, талый снег, сухой лед и талый лед. Учитывается частичная прозрачность снега при малой его толщине, связанная с тем, что снег не лежит сплошным покровом, а представлен так называемыми "косами". Также учитываются процессы превращения снега в лед вслед-

ствие его смерзания и при затоплении льда водой. При этом учитывается соответствующий поток солености в силу того, что лед имеет ненулевую соленость.

Пространственная дискретизация модели сделана на основе МКЭ. Для решения задачи адвекции характеристик льда и снега, температуры и солености океана используются специальные схемы с искусственной вязкостью вдоль потока, для переноса льда и снега используются схемы переноса с дополнительным сглаживанием на фронте "ударной волны". Построенные схемы переноса обеспечивают монотонность адвекции, что принципиально важно для льда и снега и существенно для описания температуры и солености в окрестности фронтов (прежде всего — связанных с речным стоком и кромкой льда) при заданном реалистичном высококачественном атмосферном воздействии. Модель интегрируется по времени с шагом 1 час.

**Основные параметры атмосферного воздействия.** Атмосферное воздействие состояло из суточных данных реанализа NCEP/NCAR по температуре и давлению воздуха, а также среднемесячных данных по облачности. Среднемесячные строились по данным гидрометеорологических станций. Скорость приводного ветра рассчитывалась по атмосферному давлению, поскольку данные реанализа скорости ветра в полярной области содержат большие ошибки. Потоки явного и скрытого тепла, приходящая коротковолновая и длинноволновая радиация, уходящая длинноволновая радиация рассчитывались по балкформулам в соответствии с рекомендациями программы сравнения моделей СЛО АОМIP (<http://fish.cims.nyu.edu/holland/project.omip/purpose.html>).

В качестве начальных условий и для задания граничных условий в проливах и в устьях рек использовались среднемесячные климатические данные.

Задавались 8 рек: Обь, Енисей, Лена, Мак-Кензи, Колыма, Мезень, Северная Двина и Печора с ненулевым постоянным потоком в мае-октябре (модель в общем случае допускает задание реалистичных суточных расходов рек).

На открытых границах модельной области задавались постоянные (за исключением Датского пролива) нормальные к границе скорости течений. В Норвежском море суммарный перенос равен 7.1 Св с притоком в Норвежском течении и выносом вод вдоль побережья Исландии. В верхних 100 м модуль скорости течений считался в 2 раза большим, чем на более глубоких горизонтах. В Беринговом проливе поток 0.8 Св распределялся равномерно по глубине и линейно возрастал от нуля на побережье Чукотки до максимального значения у берегов Аляски. В проливах Канадского Архипелага задавались постоянные скорости, соответствующие 0.8 Св в МакКлури и 0.7 Св в Нарском проливе. В Датском проливе по-

ток при нулевом стоке рек составлял 6.4 Св. При ненулевом стоке рек и осадках считалось, что вся избыточная масса мгновенно вытекает через Датский пролив, так что средний по области уровень океана в каждый момент времени равен нулю. Поскольку в полярной области разница осадки-испарение мала, соответствующим изменением объема жидкости пренебрегалось.

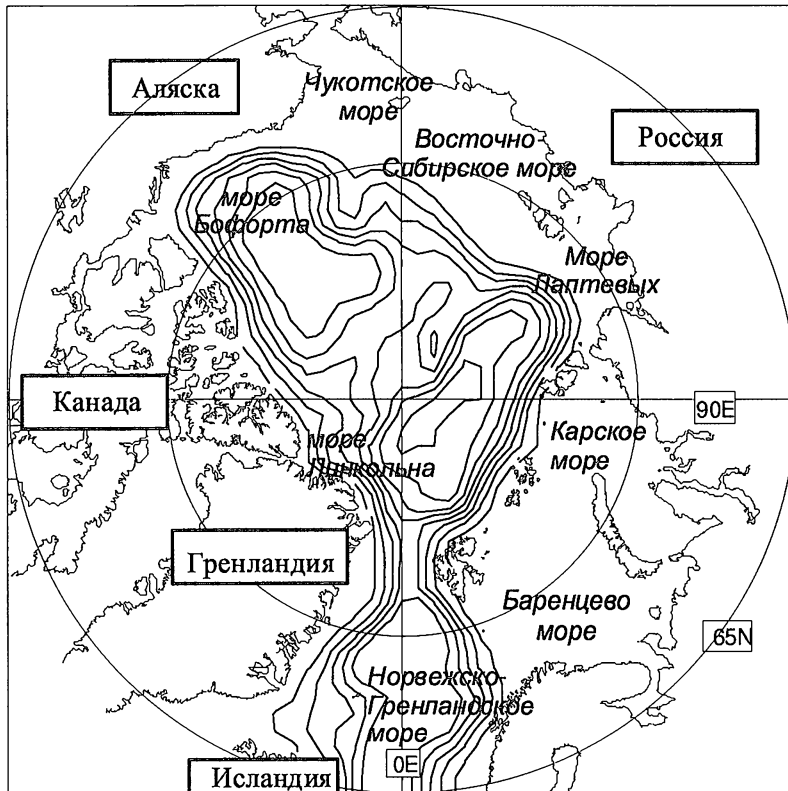


Рис. 5. Модельная область. Изолинии рельефа дна проведены с шагом 500м до глубины 4км

Первые 15 лет расчета при вычислении солёности на поверхности океана вводился так называемый "климатический источник" с масштабом времени 180 суток. Солёность вне самого верхнего слоя и температура не корректировались. После 15 лет разгона модели коррекция солёности на поверхности снималась. При анализе результатов обратим внимание на две проблемы: воспроизведение эволюции площади и толщины морского льда и воспроизведение распространения атлантических вод и баланса пресной воды.

## 8.8. Выводы по результатам моделирования

**Воспроизведение характеристик морского льда.** На рис. 6 показаны графики изменения площади льда (с учетом полыней) и площади распространения льда за период 1980–2002 гг., которые сравниваются с данными наблюдений из архива Национального центра данных по снегу и льду США (данные можно найти на интернет-странице <http://nsidc.org/data/seaice/data.html>). Видно, что модель удовлетворительно воспроизводит зимнее распространение льда и несколько занижает область распространения льда летом. Средняя ошибка составляет примерно  $7.5 \times 10^5$  кв. км. (относительная ошибка 9 %), что соответствует ошибке в определении положения кромки льда 100 км, т.е. порядка одного шага сетки. Очевидно, что этот недостаток может быть исправлен выбором более высокого пространственного разрешения, а также использованием более реалистичных схем определения глубины верхнего перемешанного слоя и настройкой параметризации альбеда снега и льда. Определенная устойчивость характеристик ледового покрова к параметрам модели достигается также при переходе к многослойной модели термодинамики льда с учетом его теплоемкости [75]. При воспроизведении площади льда с учетом открытой воды наблюдается систематическая ошибка порядка 15 % в сторону увеличения, т.е. площадь полыней и разводьев занижается. Настройка модели на воспроизведение площади ледового покрова может быть сделана за счет выбора параметризации процесса бокового таяния.

Рассчитанные поля средней толщины льда показаны на рис. 7–8. Видно, что основные изменения средней толщины льда происходят летом в районе Восточно-Сибирского моря и моря Лаптевых. Это изменение связано с изменением толщины многолетнего льда, что также отмечается при анализе различных данных наблюдений. Предполагается, что изменение толщины многолетнего льда может служить индикатором изменений климата в полярных районах Земли. В то же время толщина льда и механизмы его долгопериодной изменчивости к настоящему времени исследованы слабо (см. обзор [116]). В частности, такое изменение толщины льда может быть связано с изменением поля ветра над поверхностью океана.

**Воспроизведение температуры и солености.** Основной проблемой воспроизведения распределения температуры в Северном Ледовитом океане является задача моделирования распространения относительно теплых атлантических вод, проникающих в Центральную Арктику на глубинах 300–1500 м. Как показывает опыт расчетов по разным моделям в рамках программы АОМIP, в моделях невысокого пространственного разрешения необходимым условием воспроизведения узких топографических струй является использование схем, хорошо аппроксимирующих баланс потенци-

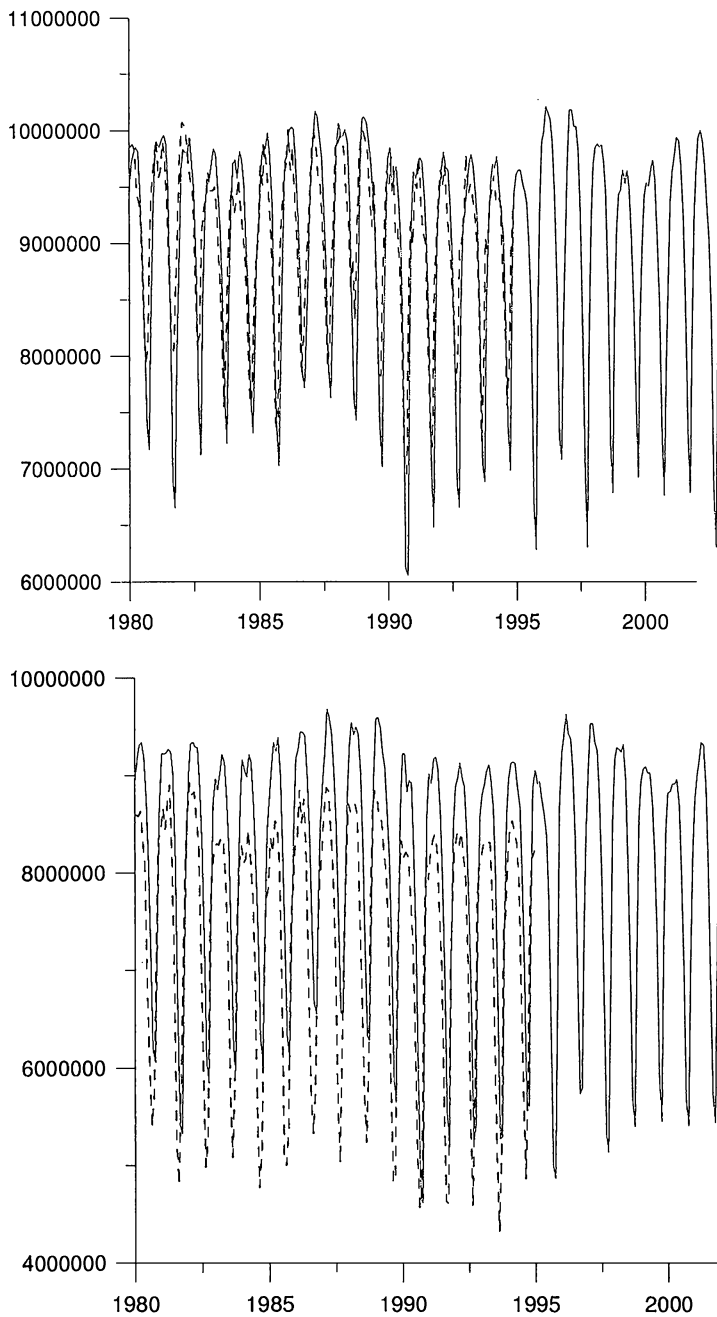


Рис. 6. Площадь распространения льда — сверху, и площадь льда с учетом открытой воды (полюньи, кв. км) — внизу. Пунктиром показаны данные наблюдений из архива NSIDC



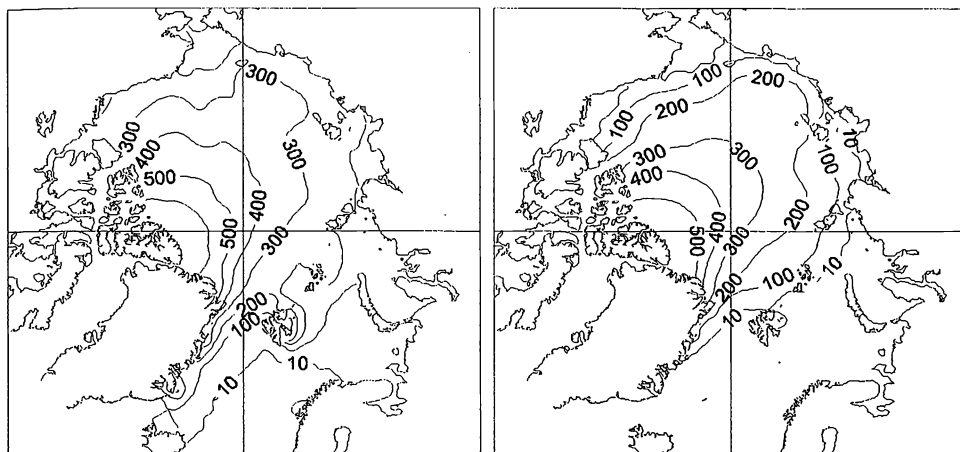


Рис. 7. Толщина льда слева — в апреле, справа — в сентябре 1979 г. (см)

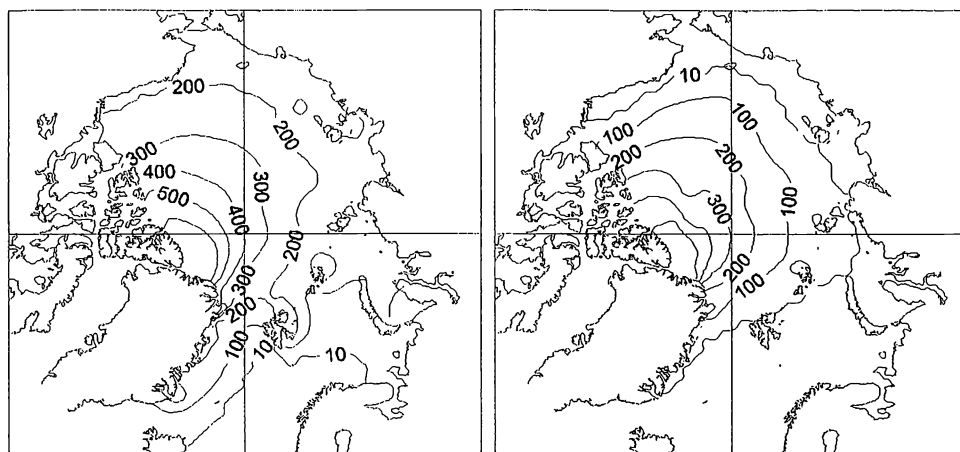


Рис. 8. Толщина льда слева — в апреле, справа — в сентябре 2002 г. (см)

ального вихря, и применение специальных параметризаций типа "эффекта Нептуна" [99], [110], [136]. На рис. 9 показана эволюция поля температуры в слое атлантических вод на горизонте 500 м. Видно, что модель, даже в случае низкого пространственного разрешения, удовлетворительно воспроизводит перенос атлантических вод.

Воспроизведение поля солености представляет определенные сложности в силу того, что сток рек и таяние льда приводят к формированию выраженных фронтальных зон. Кроме того, в силу особенностей постановки задачи (снос граничных условий с подвижной поверхности океана на плоскость  $z = 0$ ), несбалансированности потоков пресной воды и солей,

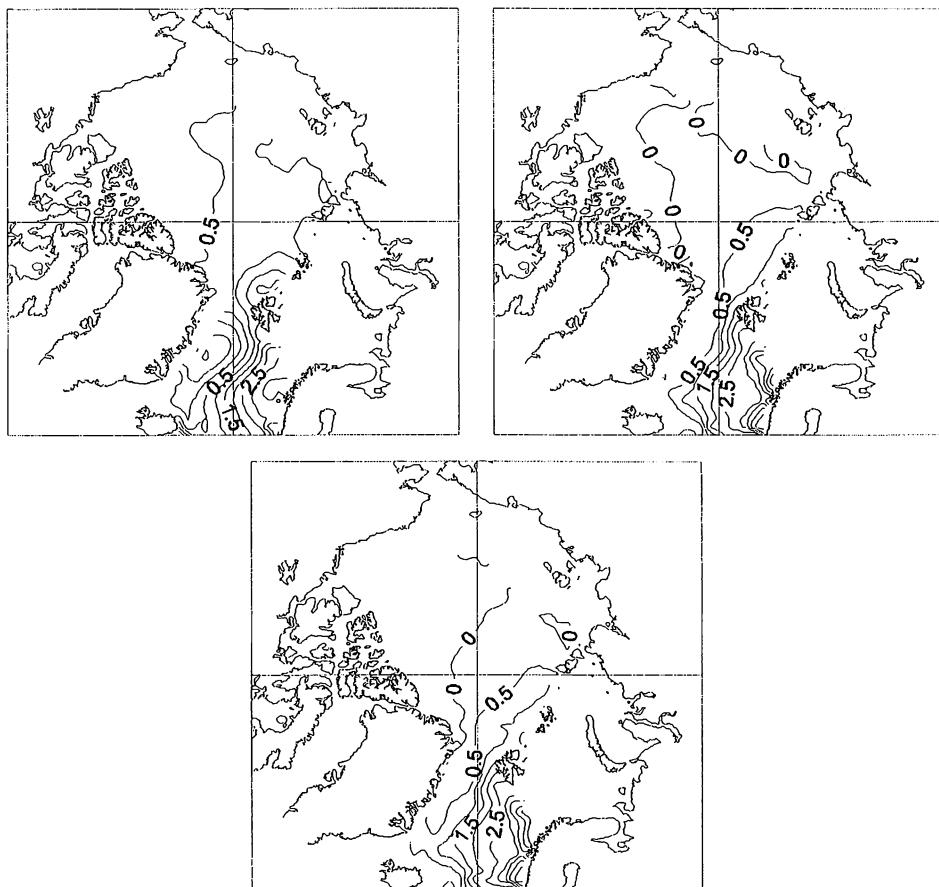


Рис. 9. Температура на глубине 500м. Последовательно показаны апрельские температуры 1948, 1979 и 2002 гг.

связанных с речным стоком, осадками–испарением и переносом через проливы, соединяющие СЛО с Тихим и Атлантическим океанами, модель не имеет закона сохранения содержания пресной воды, определяемого относительно солёности 34,8 %. Поэтому при отказе от ”климатического” источника в уравнении эволюции солёности модель выходит на новый режим (рис. 10), характеризуемый более пресными водами морей восточного сектора рассматриваемой области (рис. 11). Отметим способность численной схемы, используемой в модели, воспроизводить интенсивные фронты (более интенсивные, чем в исходном поле).

Очевидно, что для описания баланса пресной воды на масштабах времени порядка 100 лет необходима разработка новой модели, имеющей законы сохранения массы соли и объема пресной воды (в частности — в условиях фазовых переходов ”вода–лед”).

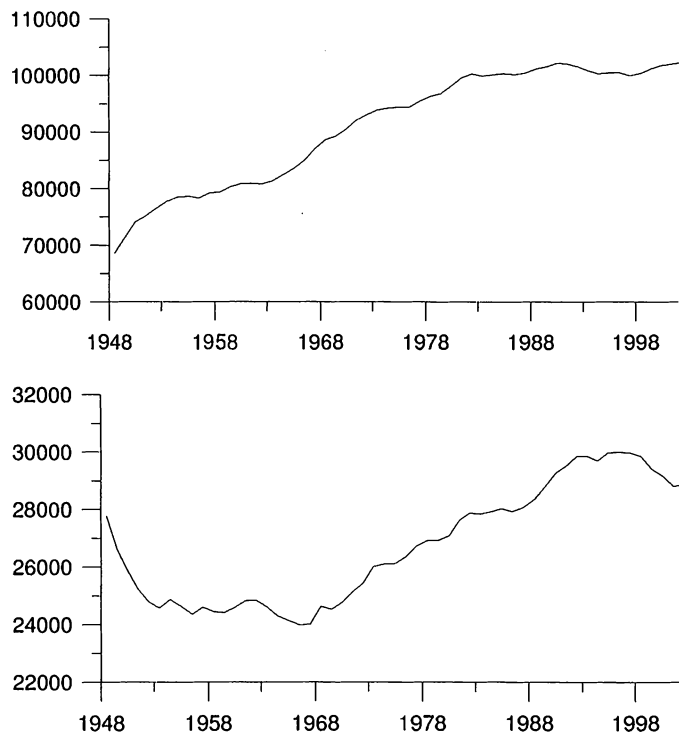


Рис. 10. Среднегодовое содержание пресной воды (относительно солёности 34.8 ‰) в куб. км. Верхний график — вся область к северу от 65° с.ш., нижний график — море Бофорта. Первые 15 лет на поверхности океана задавался «климатический» источник с масштабом времени 180 суток

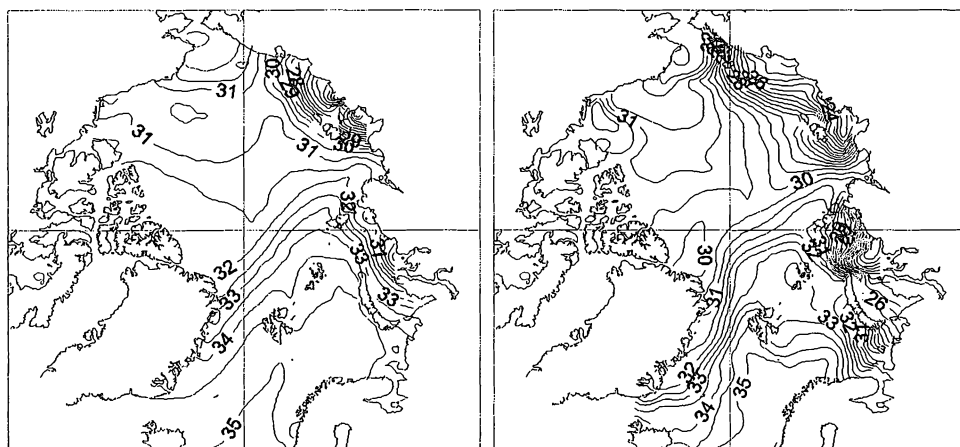


Рис. 11. Поверхностная солёность — зимняя солёность в соответствии с данными наблюдений РНС 2.1 и рассчитанная солёность в апреле 2002 г.

## 9. Модель сезонной изменчивости циркуляции и уровня вод Каспийского моря

Задача моделирования циркуляции вод и изменчивости массы воды, а следовательно, и среднего уровня поверхности воды во внутренних замкнутых бассейнах, примером которого является Каспийское море, до настоящего времени не решалась. Как показывает анализ данных наблюдений Каспийского моря, внутригодовая изменчивость уровня моря, с амплитудой до 50 см, влияет на динамику течений моря, особенно в мелководном Северном Каспии. Межгодовая изменчивость уровня моря может приводить к изменениям в режиме вентиляции глубинных вод моря [66]. С другой стороны, циркуляция моря (и атмосферы) определяет одну из основных составляющих водного баланса моря, а именно, испарение, и тем самым влияет на уровень моря. Поэтому представляется важным создание комплексной модели гидродинамики внутреннего моря, описывающей изменчивость как трехмерной циркуляции вод, так и уровня моря, и изучение на ее основе процессов, определяющих внутри- и межгодовую изменчивость циркуляции и уровня вод Каспийского моря.

Задача воспроизведения внутри- и межгодовой изменчивости циркуляции вод синоптического масштаба и уровня вод Каспийского моря выдвигает ряд требований к формулировке модели гидродинамики внутреннего моря (МГВМ) [26], [105]. Основными требованиями к МГВМ являются воспроизведение в модели следующих процессов и явлений: гидродинамических процессов от бассейновых до синоптических пространственно-временных масштабов; процессов, вызываемых обменом водами через боковые границы (сток рек, обмен через проливы); изменчивости массы воды в море и, как следствие, изменчивости верхней границы моря; изменчивости топографии поверхности моря, возникающей из-за реакции моря на быстрые изменения внешнего воздействия; взаимодействия атмосферы и моря; формирования льда и его влияния на процессы тепло- и влагообмена между атмосферой и морем. В настоящем разделе рассматриваются некоторые результаты моделирования сезонной изменчивости циркуляции и уровня вод Каспийского моря с применением МГВМ.

### 9.1. Уравнения модели гидродинамики внутреннего моря

Циркуляция вод моря в бассейне произвольной геометрии описывается трехмерными уравнениями термогидродинамики. В МГВМ явным образом описываются потоки воды и ее свойств (соленость, теплосодержание) через открытые боковые границы (сток рек и обмен через проливы) и по-

верхность раздела воздух–вода (испарение, осадки). Поверхность раздела воздух–вода изменчива, что позволяет воспроизводить пространственную изменчивость топографии поверхности моря и изменчивость среднего уровня моря. Взаимодействие атмосферы и моря описывается через потоки импульса, тепла и влаги. При возникновении условий, благоприятных для формирования льда, в МГВМ включается модель термодинамики льда, описывающая процессы нарастания и таяния льда, потоки свойств на границах атмосфера–лед и лед–вода.

**Модель динамики течений.** Состояние термогидродинамики моря описывается трехмерными функциями температуры, солёности, компонент скорости течений, а также двумерной функцией высоты поверхности уровня моря. Модель динамики течений моря включает в себя трехмерные полные уравнения геофизической гидродинамики (1.1)–(1.7). Для параметризации вертикального перемешивания в случае устойчивой стратификации мы использовали модель, предложенную в работе [128]. Конвективное перемешивание, возникающее в случае неустойчивой стратификации, параметризуется осреднением температуры и солёности неустойчивых слоев с сохранением общего количества тепла и соли. Динамика верхней границы моря с учетом потока массы (осадков, испарения, таяния льда) описывается уравнением свободной поверхности моря (1.16) в квазилинеаризованном виде:

$$w + \zeta_t = \rho_f^{-1} W.$$

На поверхности моря  $z = -\zeta(\lambda, \phi, t)$  ставятся условия (1.18)–(1.21). На дне моря  $z = H(\lambda, \phi)$  ставится условие обтекания рельефа, трения о дно и тепло-, солеизоляции. В модели различаются два типа боковых границ — твердые и жидкие. На твердых боковых границах ставятся условия непротекания и свободного скольжения, а также нулевые потоки тепла и соли. На входных жидких боковых границах задаются скорости течений, температура и солёность. На выходных жидких боковых границах задаются скорости течений и нулевые потоки тепла и соли. Начальные условия к системе уравнений следующие:

$$(u, \nu, T, S, \zeta)|_{t=0} = (u^0, \nu^0, T^0, S^0, \zeta^0).$$

**Модель взаимодействия пограничных слоев атмосферы и моря.** Потоки тепла и воды через границу раздела атмосфера–море рассчитываются с применением известных параметров атмосферы и модели взаимодействия пограничных слоев атмосферы и моря. Поток тепла  $Q_h^{aw}(\lambda, \varphi, t)$  в граничном условии (1.20) представляется следующим образом:

$$Q_h^{aw} = -Q_B - H - L_V E,$$

где  $Q_B$  — направленный вверх поток длинноволновой тепловой радиации с поверхности моря;  $H$  — поток явного тепла;  $L_V$  — скрытая теплота испарения;  $L_B E$  — поток скрытого тепла. Поток коротковолновой солнечной радиации учитывается в виде источника непосредственно в уравнении переноса тепла (1.5). Для расчета потоков явного и скрытого тепла, а также потока импульса применяется модель приводного слоя атмосферы, основанная на теории подобия Мони́на–Обухова [49]; [50].

**Модель термодинамики льда.** Во внутренних морях средних широт, например, в Каспийском море, в отличие от Северного ледовитого океана, лед является сезонным, образуется в конце осени и окончательно тает весной, при этом толщина льда составляет около 1 м. Поэтому для применения в рамках МГВМ была выбрана достаточно простая модель термодинамики льда, которая, тем не менее, успешно описывает основные особенности эволюции льда [144].

## 9.2. Моделирование внутригодовой изменчивости циркуляции и уровня вод Каспийского моря

Начальными условиями модели являются состояние покоя и климатические распределения температуры и солености. Из-за недостатка информации о  $T, S$  подо льдом в зимние месяцы, модель стартует с трехмерных климатических полей, соответствующих ноябрю. Климатические адаптированные поля получаются в результате адаптации среднемноголетних полей температуры и солености с модельной топографией и рассчитанными течениями моря [28].

**Граничные условия.** Для задания граничных условий на верхней границе моря и в модели взаимодействия атмосферы и моря использовались среднемесячные данные реанализа ECMWF для 12-летнего периода 1982–1993. Они включают данные по потоку приходящей солнечной и эмитируемой с поверхности моря тепловой радиации, среднюю скорость и вектор средней скорости ветра на высоте 10 м над уровнем моря, температуру воздуха и точку росы на высоте 2 м над уровнем моря. Модель сезонной изменчивости интегрируется в режиме ежегодно повторяющихся условий на границах. Поскольку в 1982–1993 годах уровень моря, из-за дисбаланса внешних условий, претерпевал значительные изменения, выбран год с минимальным годовым изменением уровня за этот период. Анализ уровня моря, измеренного на уровнях постах в Махачкале, Форт-Шевченко, Красноводске и Баку, показывает, что наименьшее изменение среднего уровня с начала января по конец декабря было в 1982 году. Поэтому в модели внешние условия задаются соответствующими 1982 году.

### 9.3. Сезонная изменчивость циркуляции и уровня вод моря

Результаты, полученные по модели, проиллюстрируем на двух ключевых характеристиках: сезонной изменчивости течений верхнего слоя моря и изменчивости уровня вод моря.

**Трехмерные течения.** Схемы поверхностных течений моря, которые создавались примерно до 50-х годов (см. обзор в работе [26]), не дают представления о пространственно-временной изменчивости поверхностных течений, и тем более о трехмерной циркуляции вод моря. Эти схемы представляют собой синтез доступных в то время немногочисленных данных измерений, полученных с помощью свободно плавающих поплавков и бутылочной почты. Для построения схем течений использовалась также информация о распределении температуры и солёности морской воды. Но главным образом авторы основывались на решениях сильно упрощенных гидродинамических уравнений (динамический метод) и аналогиях с течениями в других морях. Согласно этим схемам среднегодовая циркуляция вод в Среднем и Южном Каспии циклоническая.

Анализ модельных исследований показывает, что поверхностные течения Каспийского моря характеризуются значительно более сложной пространственной структурой и подвержены значительной сезонной изменчивости. Сезонный ход осредненных помесечно поверхностных течений можно разделить на три периода: зимний (декабрь–январь), весенне–летний (февраль–июль) и осенний (август–ноябрь). В зимний период Средний и Южный Каспий полностью охвачены циклоническими суббассейновыми круговоротами, генерируемыми конвергенцией ветров в центрах подбассейнов и бароклинными факторами. В этот период циркуляция подповерхностных вод, на глубинах 25–100 м, хорошо коррелирует со структурой поверхностных течений. Характер общей циркуляции сильно меняется в феврале, когда направление ветра в Среднем и Южном Каспии меняется на южное. В поверхностном слое глубоководных районов начинает доминировать Экмановский перенос поверхностных вод на юг и юго-запад, вдоль западного и восточного берегов этот перенос обрамляется направленным на юг береговым течением. Особый интерес представляют направленные на юг береговые течения вдоль западного и восточного берегов в период с февраля по июль, когда ветровой юго-восточный дрейф поверхностных вод, с одной стороны, сносит воды в открытое море от восточного берега и, с другой — нагоняет воды открытого моря к западному берегу, приводя соответственно к апвеллингу и даунвеллингу вдоль этих берегов. Обе системы течений расположены на шельфе и его склоне в виде прибрежных течений, теоретически изученных в работе [85]. Западное прибрежное течение и апвеллинг вдоль восточного берега являются хорошо документированными

ми фактами [66], [112]. Начиная с августа, картина циркуляции постепенно меняется к декабрьскому типу. Изменения циркуляции коррелируют с изменениями направления ветра. Интересной особенностью циркуляции вод является распределение температуры поверхности моря (ТПМ) в зимний период. В период с декабря по март ТПМ в Среднем Каспии характеризуется в среднем уменьшением с юга на север, сопровождающимся сильно вытянутыми в меридиональном направлении языками теплых вод вдоль восточного берега и холодных вод вдоль западного. В декабре и январе вдольбереговые аномалии ТПМ очевидно являются результатом циклонической циркуляции поверхностных вод СрК, как это показано на рис. 12а. Однако смена направления поверхностных течений у восточного берега с северного на южное в феврале и марте (рис. 12b) не приводит к исчезновению языка теплой воды вдоль восточного берега. В этот период перенос теплых вод из ЮК в СрК осуществляется северным подповерхностным течением (рис. 12с). Нагревание поверхностных вод вдоль восточного берега происходит в результате действия двух параллельных процессов: апвеллинга подповерхностной более теплой воды и вертикального перемешивания теплых подповерхностных вод с более холодными поверхностными водами.

Западно-восточное повышение ТПМ в Среднем Каспии является характерной устойчивой чертой климата Каспийского моря [34]. Язык теплой воды, простирающийся из Южного в Средний Каспий вдоль восточного берега, является одним из аргументов, поддерживающих представление о существовании северного течения в этом районе. Если поверхностные течения в декабре и январе поддерживают классическую схему циклонических поверхностных течений (см. обзор в работе [66]), то существование южного восточного берегового течения и ветровой дрейф поверхностных вод в открытом море полностью противоречат данной схеме. Вышеприведенный анализ показывает, что перенос теплых вод вдоль восточного берега на север может быть осуществлен в результате работы более сложного процесса, а именно: перенос на север теплых вод в подповерхностном слое и последующий апвеллинг и/или перемешивание поверхностных и подповерхностных вод. Существование северного противотечения под поверхностным, южным течением анализируется в работе [112] и подтверждается анализом данных измерений для северной части Среднего Каспия в работе [5].

**Изменчивость среднего уровня моря.** На рис. 13 для ряда уровней станций Каспийского моря показаны графики зависимости аномалии уровня моря от времени по данным наблюдений за 1982 год и полученные в модели. Общими чертами сезонной изменчивости уровня моря для всех четырех точек является минимум уровня в сентябре–октябре, подъем уровня в период с поздней осени до начала лета и падение в период с середины лета до осени. Изменчивость уровня Каспийского моря является интегральной характеристикой термогидродинамических процессов моря. Хорошая кор-



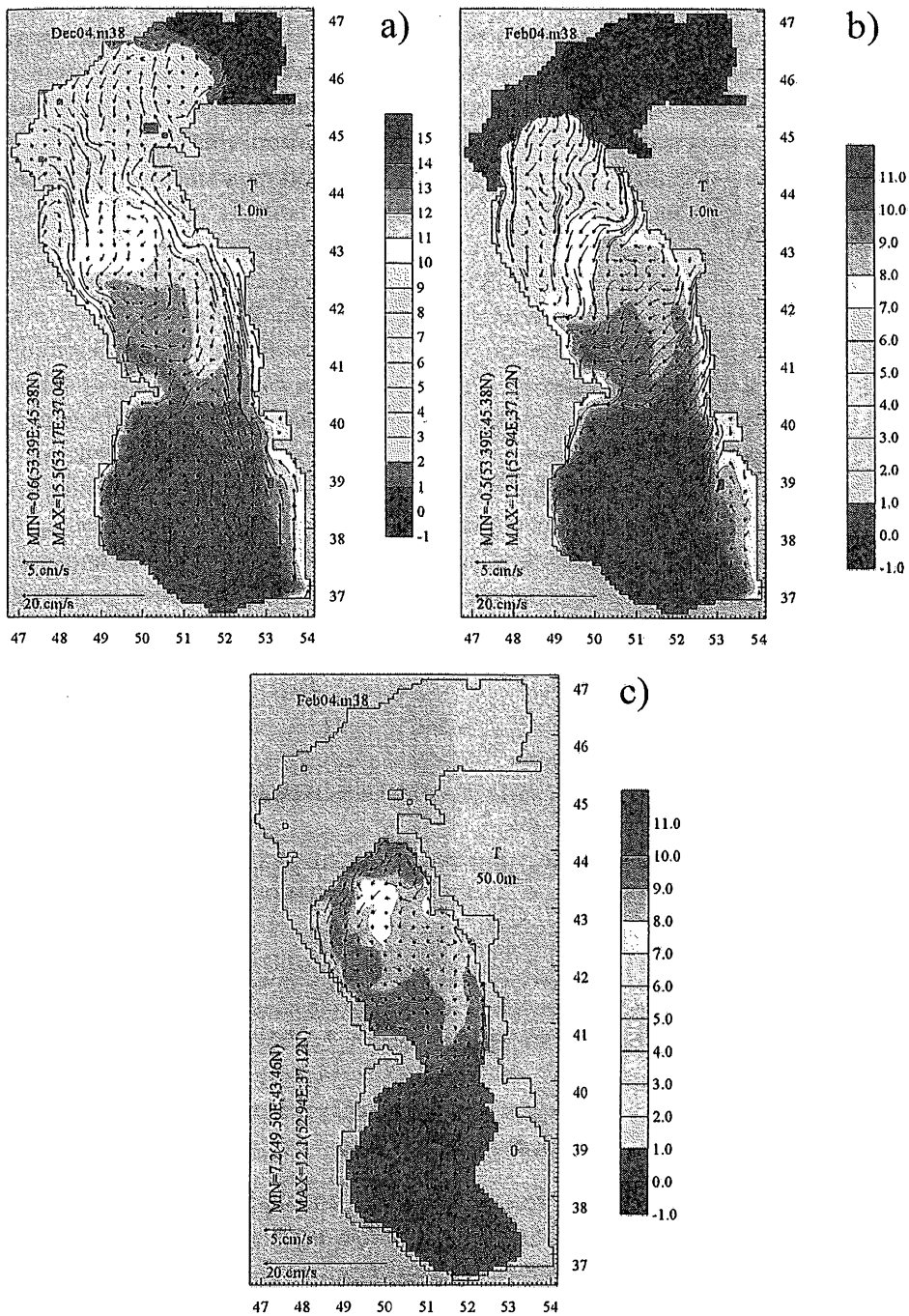


Рис. 12. Температура и течения на поверхности моря: а) — в декабре, б) — в феврале, в) — температура и течения на горизонте 50 метров в феврале

реляция амплитуды и фазы изменчивости уровня между наблюдениями и модельными результатами показывает, что модель в состоянии воспроизвести ключевые термогидродинамические процессы Каспийского моря. Среднеквадратичная разница между наблюдаемым и модельным изменением уровня меняется от 1.4 см на Бакинской станции и 3.0 на Красноводской, составляя соответственно 6 % и 13 % амплитуды годовой изменчивости уровня в указанных пунктах.

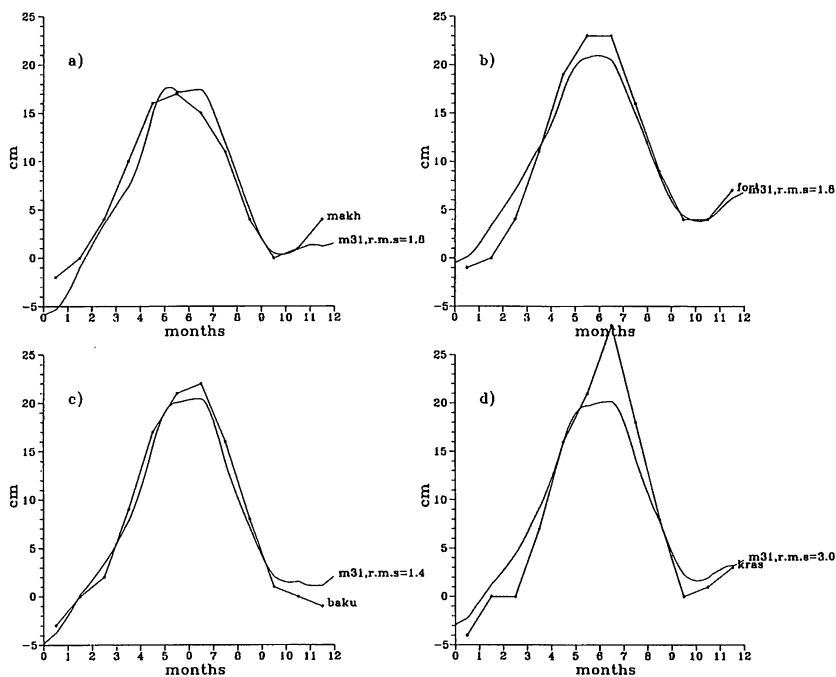


Рис. 13. Аномалия уровня моря (см) на уровенных постах Каспийского моря в: а) Махачкале; б) Форт-Шевченко; в) Баку и д) Красноводске. Ломаные кривые представляют данные наблюдений в 1982 году, гладкие кривые — модельное решение

#### 9.4. Выводы

Целый ряд факторов, а именно, сложная топография дна моря, включающая большие мелководные области, широкий шельф и крутые склоны шельфа, обособленные, но взаимодействующие подбассейны, большие притоки пресной речной воды, чувствительность к изменениям атмосферной циркуляции, формирование льда и изменчивость уровня вод моря в результате климатических изменений и антропогенного влияния делают задачу моделирования гидродинамики Каспийского моря исключительно интересной и сложной.

Совместный анализ модельных результатов, данных наблюдений и климатических данных, проведенный в настоящей работе, позволил лучше понять фундаментальные процессы сезонной изменчивости циркуляции и уровня вод моря, такие как летний апвеллинг вдоль восточного берега, западно-восточную асимметрию в поле поверхностной температуры, меняющуюся от летнего к зимнему сезону, и западно-восточную асимметрию в поле солёности. Одним из важных аргументов в пользу существования поверхностной циклонической системы течений было распространение теплых вод на север вдоль восточного берега моря. Результаты работы показывают, что устойчивый поток на север вдоль восточного берега существует в подповерхностном слое, в то время как поверхностные течения чаще направлены на юг. Анализ наблюдений, сделанных в 60-х годах [112] и в более позднее время [5], подтверждает полученную в модели структуру течений на восточном шельфе моря. Важной частью данного исследования является моделирование изменчивости топографии уровня моря — характеристики, которую можно сравнить с данными натуральных наблюдений. Уровень моря является переменной, характеризующей корректность описания комплекса термогидродинамических процессов моря и взаимодействия с атмосферой. Анализ потоков на границе атмосфера–море показывает, что модельные результаты близки к оценкам климатических потоков тепла и испарения.

## **10. Моделирование динамики Белого моря**

Белое море можно отнести к наиболее изученным морям России. При этом остается нерешенным ряд важных вопросов и прежде всего — отсутствие общепринятой схемы осредненной крупномасштабной циркуляции вод. Для решения многих теоретических и практических задач необходимо построение общей качественной схемы доминирующих динамических процессов. Этому вопросу и посвящен данный раздел.

### **10.1. Общая характеристика гидрологических процессов Белого моря**

Белое море расположено в высоких широтах, примыкая открытой границей к северному полярному кругу. Бассейн и три залива Белого моря: Двинский, Онежский и Кандалакшский соединены с Воронкой моря неглубоким (глубина составляет порядка 30–40 м) и узким проливом, называемым Горлом Белого моря. Через Горло Белое море соединяется с Баренцевым морем.

Данные измерений показывают, что в Белом море энергетически доминируют приливные движения, специфика которых в значительной степени

определяется особенностями орографии морского бассейна. Приливные течения в Белом море вызываются приходящей из Горла приливной волной, имеющей на входе в Горло амплитуду до 6 м и скорости течения до 2–2.5 метров в секунду. Основную компоненту прилива составляет полусуточная волна  $M_2$ . Амплитуда суточной волны  $K_1$  составляет 8–10 см. За счет нелинейных взаимодействий возникают четвертьсуточные гармоники с амплитудами колебаний до 10 см для мелководных областей.

Приведем оценки некоторых параметров Белого моря, важных для дальнейшего анализа. Характерный горизонтальный масштаб моря составляет около 500 км; характерная глубина бассейна — 60 м; среднее значение параметра Кориолиса —  $1.3 \cdot 10^{-4}$ ; характерная скорость частиц жидкости — 50 см/сек; характерное значение частоты Вьяйсяля-Брента —  $10^{-2}$  сек $^{-1}$  для нижней границы поверхностных распресненных вод и  $10^{-3}$  — для слоя основного термоклина. Характерные колебания уровня для Бассейна (центральной глубоководной части Белого моря) и заливов 0.5–1 м, для Горла — порядка 1 м на входе в Бассейн и 6 м при входе в Горло со стороны Мезенского залива.

С позиций геофизической гидродинамики можно выделить ряд особенностей Белого моря. Во-первых, это высокая плотность доступной потенциальной энергии и потенциальной энергии вод Белого моря. Плотность доступной потенциальной энергии на единицу объема в Белом море на порядок превышает аналогичные оценки для океана. Еще больше, чем в океане, примерно на два порядка, — плотность потенциальной энергии на единицу объема. Это связано с малой ( $\sim 67$  м) средней глубиной Белого моря, существенными приливными отклонениями уровня (плотность доступной потенциальной энергии пропорциональна им) и сильной стратификацией вод Бассейна и Кандалакшского залива. Так, частота Вьяйсяля-Брента в этих районах, в слое скачка плотности, может достигать значений  $10^{-2}$  сек $^{-1}$  при обычных оценках для океана  $10^{-4}$  сек $^{-1}$ . Периодические приливные движения регулярно генерируют близкие по пространственно-временной структуре поля вертикальных токов, которые, в свою очередь, преобразуют потенциальную энергию стратифицированных вод в доступную потенциальную энергию. Доступная потенциальная энергия может уже непосредственно переходить в кинетическую энергию движения вод Белого моря. В этой связи в Белом море имеет место быстрое преобразование потенциальной энергии в доступную потенциальную энергию и затем в кинетическую энергию движения вод.

Гидрологический режим Белого моря отличает большой объем речного стока, составляющий порядка 4 ‰ в год от объема моря. Сток поддерживает плотностную стратификацию вод и влияет на продукцию потенциальной энергии. Сильная стратификация вод Белого моря поддерживается, с одной стороны, большим объемом речного стока, с другой стороны, — регу-

лярным поступлением высокосоленых, а зимой еще и холодных, вод Баренцева моря. Посредством приливных течений через Горло они проникают в глубинные и придонные слои Белого моря.

## 10.2. Прилив в Горле и Бассейне Белого моря

Приливная волна из океана поступает в Бассейн через Горло. Фазовая скорость распространения приливной волны ( $c_f \sim \sqrt{gH}$ ) в Горле составляет около 20 м/сек. Это соответствует, на данной широте, внешнему радиусу деформации Россби  $R_0$  около 200 км:

$$R_0 = \frac{c_f}{l}.$$

Поскольку ширина Горла значительно меньше — она меняется от 40 до 50 км, это приводит к уменьшению влияния силы Кориолиса на динамику проходящей через Горло приливной волны. В этом смысле Горло Белого моря — мелкий и узкий пролив, выступающий в роли своеобразного гидродинамического фильтра. Приливная волна, приходящая из Баренцева моря, в Горле имеет характеристики обычной гравитационной волны, что сказывается на водообмене Бассейна и заливов Белого моря. При выходе из Горла в Бассейн моря при несущественном увеличении глубины горизонтальный масштаб процессов возрастает до 200 км и более — величины равной, радиусу деформации Россби. В балансе сил начинает активно участвовать инерционная компонента, волновой пакет диспергирует, происходит уменьшение групповой скорости распространения приливной волны. Следствием этого становится образование устойчивого гидрологического фронта на выходе из Горла в Бассейн моря. По данным наблюдений фронт отчетливо выражен как граница стратифицированных вод Бассейна и перемешанных по вертикали вод Горла.

Выход приливной волны из Горла в Бассейн стимулирует развитие процесса геострофического приспособления, выражающегося в излучении волн Пуанкаре (инерционно-гравитационных волн) и выделении медленной геострофической компоненты, удовлетворяющей уравнению сохранения квазигеострофического потенциального вихря.

Восстановление геострофического равновесия происходит в основном за инерционный период, равный на широте Белого моря примерно 12 часам. Близкий период имеет и доминирующая компонента прилива — волна  $M_2$ . В результате, раз за разом, происходит нарушение геострофического равновесия вновь приходящей приливной волной и, с неизбежностью, возникают процессы, восстанавливающие геострофический баланс. Последовательность этих двух процессов и составляет основу динамических процессов в Белом море. К указанным двум процессам — быстрым волнам Пуанкаре

и медленным квазигеострофическим движениям, выделяемым из приходящей приливной волны, добавляются также волны Кельвина и шельфовые волны, возникающие в окрестности береговой границы.

### 10.3. Переходные процессы

Приливная волна, входящая из Горла в Бассейн Белого моря, имеет геострофически неравновесную структуру и на выходе из Горла возникают переходные процессы, связанные с установлением равновесного состояния. Анализ процесса установления геострофически равновесного состояния показывает следующее.

Для коротких волн, с длиной много меньше внешнего радиуса Россби, энергия распределена примерно поровну между кинетической и потенциальной. Для длинных волн — практически вся энергия переходит в кинетическую форму. Для смешанной в общем случае волны Пуанкаре энергия сосредотачивается ближе к инерционной частоте и, следовательно, представлена в основном в форме кинетической энергии. Это, в частности, означает, что волны Пуанкаре можно обнаружить по измерениям скоростей течения.

Волна Пуанкаре имеет нулевую потенциальную завихренность и, следовательно, не меняет исходную потенциальную завихренность начального геострофически несбалансированного состояния, участвуя лишь в отводе избыточной энергии, не соответствующей равновесному геострофическому состоянию.

Оценка показывает, что в результате излучения волн из начального возмущения выносятся две трети потенциальной энергии. Таким образом, волны Пуанкаре, не меняя начальной потенциальной завихренности входящей из Горла приливной волны, уносят энергию от геострофически несбалансированного возмущения уровня. В результате формируется геострофически сбалансированное движение, которое затем медленно эволюционирует в соответствии с уравнением сохранения потенциальной завихренности.

### 10.4. Остаточная циркуляция

Принципиальный интерес для исследователей представляет медленная геострофическая мода, остающаяся после излучения волн Пуанкаре — остаточная приливная циркуляция. Ее структура описывается уравнениями мелкой воды. В простейшем случае — это линейная система уравнений гиперболического типа. Функции, сохраняющие значения вдоль характеристик (инварианты Римана), имеют вид

$$\varphi = u + 2\sqrt{gH}, \quad \varphi = u - 2\sqrt{gH}.$$

Движение вод и распространение возмущений уровня контролируются рельефом дна — движение стремится происходить вдоль изобат. Это важно для анализа осредненных схем циркуляции вод Белого моря. Например, в Бассейне Белого моря, расположенном над котловиной в рельефе дна, следует ожидать единой устойчивой системы циркуляции вод. Стремление к движению вдоль изобат следует также из уравнения сохранения потенциального вихря (для крупномасштабных движений с учетом  $\beta$ -эффекта вдоль поверхностей  $l/H = \text{const}$ ). Поэтому рельеф дна следует отнести к числу определяющих факторов, ответственных за формирование установившихся схем циркуляции вод морских бассейнов. Численные эксперименты показывают, что осредненная за десять суток (двадцать приливных циклов) циркуляция вод в Белом море представляет собой достаточно упорядоченную картину (рис. 14). Всю глубоководную часть моря занимает циклонический круговорот, который отчетливо прослеживается от поверхности до дна (рис. 15).

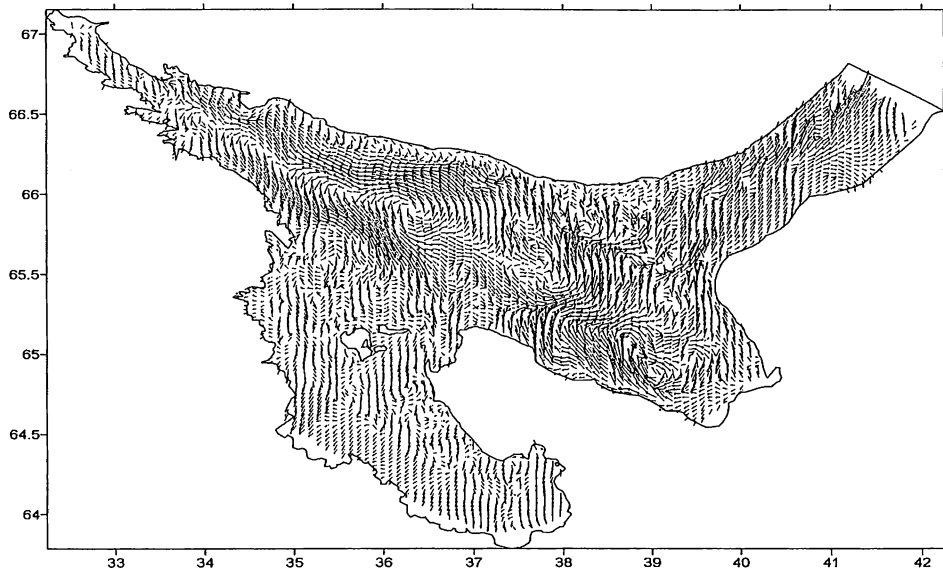


Рис. 14. Осредненное за десять суток поле скоростей на поверхности в августе

### 10.5. Краевые волны

Остаточная осредненная морская циркуляция является геострофически сбалансированным движением, удовлетворяющим краевым условиям непротекания на твердой границе. Это возможно лишь при экспоненциальном уменьшении уровня до нуля по нормали к границе и возникновении в ее окрестности волн определенной структуры. В зависимости от условий

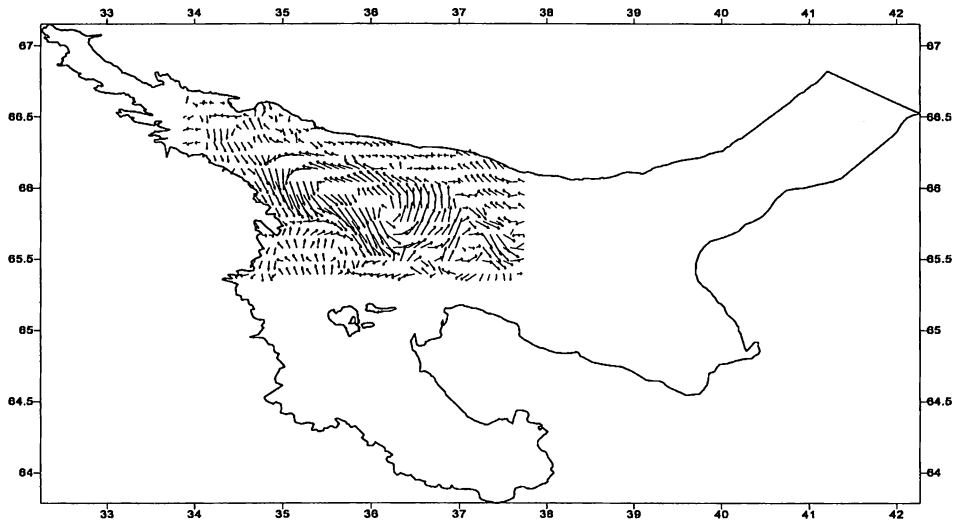


Рис. 15. Осредненное за десять суток поле скоростей на горизонте 110 м в августе

они называются волнами Кельвина, краевыми захваченными волнами или шельфовыми волнами. Как правило, волнами Кельвина называют движения при ровном дне и отвесных боковых стенках, а шельфовыми — при специальном задании профилей дна, описываемых известными функциями. В северном полушарии краевые захваченные волны распространяются вдоль границ против часовой стрелки. Они ярко проявляются во многих морских бассейнах. В Белом море волны, похожие на волны Кельвина, развиваются в Онежском и Двинском заливах, а шельфовые волны — у Терского берега и в Кандалакшском заливе.

### 10.6. Остаточная циркуляция и термохалинная структура вод

Наиболее вероятно, что пространственная структура термохалинных полей Белого моря формируется и поддерживается, главным образом, остаточной циркуляцией. Термохалинные поля играют роль динамической памяти. Это дает основание полагать, что определение остаточной циркуляции на основе баротропных вариантов моделей проблематично.

Основные крупномасштабные черты термохалинной структуры вод Белого моря формируются под действием остаточной приливной и ветровой циркуляции при определенных расходах рек, несущих тепло и пресную воду, а также за счет процессов взаимодействия с атмосферой. Утверждение о формировании основных особенностей термохалинной структуры остаточной циркуляцией подтверждается численными расчетами.



Расчеты показывают, что в Белом море, по-видимому, отсутствуют струйные устойчивые течения в принятом смысле, но существует устойчивый осредненный эффект волновой приливной динамики. Структура термохалинных полей формируется остаточной и ветровой циркуляцией при конкретных граничных условиях, важнейшими из которых для Белого моря являются расходы тепла и солей, связанные со стоком рек, и расходы тепла и солей в Горле, регулируемые приливной волной и процессами вытока. Важными факторами также являются процессы обмена с атмосферой. Отметим, что в расчетах были получены и некоторые другие процессы, например, связанные с образованием фронтальных рингов на гидрологическом фронте у Горла. Стоит заметить, что ринги, в отличие от вихрей синоптического масштаба, переносят массу и свойства захваченной ими воды на фронте. Поэтому их роль в трансфронтальных процессах тепло- и массопереноса может быть весьма существенной.

### **10.7. Роль ветровой циркуляции вод**

Изложенная выше хотя и сложная, но понятная картина динамических процессов может нарушаться ветровым воздействием. Расчеты показывают, что ветер может быть сильным фактором изменчивости гидрологической структуры вод для условий Белого моря. Даже относительно слабое ветровое воздействие взаимодействует с приливными процессами, меняя при этом схему осредненной циркуляции.

Рассмотрим поле температуры на поверхности моря через двое суток действия аномального ветра, скорость которого 7 м/сек. Климатические скорости ветра в расчетах не превышали величины двух метров в секунду. Надо заметить, что ветер со скоростью 7 м/сек отнюдь не штормовой. Однако изменения в термической структуре произошли весьма существенные. За двое суток полностью исчез термический фронт у Горла, появились резкие фронты вдоль Летнего и Карельского берегов. Температура поверхности понизилась на 2–3 градуса. Это говорит о существенном вкладе, который может делать ветровая циркуляция в результирующее поле течений.

### **10.8. Взаимодействие динамических процессов в Белом море**

Нелинейные взаимодействия различных процессов в Белом море составляют, возможно, наиболее интересную, но и наименее изученную часть динамических процессов в Белом море. В качестве примера нелинейного взаимодействия процессов в Белом море рассмотрим случай сильного взаимодействия турбулентности с внутренними гравитационными вол-

нами. Этот процесс экспериментально изучен О. Филипсом в 1976 г. Суть его состоит в том, что в сосуде, где в слое скачка плотности возбуждены, колебания внутренних гравитационных волн начинают продуцировать турбулентность с поверхности. Пока фронт турбулентности не достигает слоя, где развиты внутренние волны, все остается относительно спокойным. Картина резко меняется, когда фронт турбулентности достигает слоя внутренних волн — волны гасятся и исчезают, а фронт турбулентности и перемешанный слой заглубляются. При этом энергия внутренних волн захватывается турбулизированным слоем, причем распределение захваченной энергии происходит по всему турбулизированному слою.

При усилении ветра очевидно возрастает поток турбулентной энергии на поверхности моря, что увеличивает коэффициент обмена по вертикали и ведет к увеличению толщины перемешанного слоя. Если перемешанный слой достигает уровня развития внутренних волн, то происходит захват волновой энергии турбулизированным слоем и гашение внутренних волн, при этом увеличивается толщина перемешанного слоя. Численный эксперимент демонстрирует такую возможность. Сравнение двух расчетов динамики перемешанного слоя под воздействием северо-восточного ветра при наличии приливных движений и без них показывает, что величины перемешанного слоя существенно отличаются. При наличии прилива толщина перемешанного слоя заметно больше. Наиболее заметное увеличение толщины перемешанного слоя отмечается у Карельского берега и к северу от Соловецких островов. В этом месте прилив генерирует внутренние волны приливного периода, происходит захват волновой энергии турбулизированным слоем, гашение внутренних волн и увеличение толщины перемешанного слоя. Данный механизм интересен тем, что он позволяет эффективно в короткое время отбирать потенциальную энергию стратифицированного движения и за счет пространственной неоднородности поля внутренних волн и турбулентности переводить ее в форму доступной потенциальной энергии.

Представленные в данной работе исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства промышленности, науки и технологий (подпрограмма "Исследование природы Мирового океана" федеральной целевой программы "Мировой океан", контракты №№ 43.634.11.0001-4, 43.634.11.0008-4, 43.634.11.0004/8), Президиума РАН (программа "Фундаментальные проблемы океанологии: физика, геология, биология, экология", контракты №№ 10002-251/П-14/197-020/200404-034, 10002-251/П-14/197-020/200404-056), Российского гранта "Научная школа" НШ-1024.2003.5, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 02-05-64909, 02-05-64924, 02-05-64926, 02-05-64357, 02-05-64446, 03-05-64354).

## Литература

- [1] *Алексеев В.А., Володин Е.М., Галин В.Я., Дымников В.П., Лыкосов В.Н.* Моделирование современного климата с помощью атмосферной модели ИВМ РАН. Описание модели А5421 версии 1997 года и результатов экспериментов по программе AMIP II. Препринт № 2086-В98. М.: ИВМ РАН, 1998.
- [2] *Алексеев В.В., Залесный В.Б.* Численная модель крупномасштабной динамики океана // Вычислительные процессы и системы. / Под ред. Г.И. Марчука. Вып. 10. М.: Наука, 1993. С. 232–252.
- [3] *Алексеев Г.В., Йоханнессен О.М., Ковалевский Д.В.* О развитии конвективных движений под воздействием локальных возмущений плотности на поверхности моря // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 3. С. 368–377.
- [4] *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1978.
- [5] *Бондаренко А.Л.* Течения Каспийского моря и формирование поля солёности вод Северного Каспия. М.: Наука, 1993.
- [6] *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [7] *Буш Н.Е.* Потоки в приземном слое над морем. Л.: Гидрометеиздат, 1979. С. 91–113.
- [8] *Володин Е.М.* Численная модель совместной циркуляции глобальной атмосферы и тропиков Тихого океана // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38, № 1. С. 5–19.
- [9] *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
- [10] *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Основные океанологические задачи теории мелкой воды. Л.: Гидрометеиздат, 1968.
- [11] *Гарнич Н.Г., Китайгородский С.А.* К теории заглубления верхнего квазиоднородного слоя в океане в результате процессов чисто ветрового перемешивания // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 10. С. 1062–1073.
- [12] *Гилл А.Е.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
- [13] *Горелков В.М., Некрасов А.В.* Моделирование полусуточного прилива в мелководном бассейне с учетом береговой осушки // Труды ЛГМИ. 1982. Вып. 74. С. 140–146.
- [14] *Демин Ю.Л., Ибраев Р.А.* Модель динамики океана // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане. / Под ред. А. С. Саркисяна и Ю. Л. Демина. М.: ИВМ РАН, 1992. С. 42–95.
- [15] *Демин Ю.Л., Ибраев Р.А., Саркисян А.С.* Калибрация моделей циркуляции и воспроизведение климата Мирового океана // Изв. АН СССР. Физика атм. и океана. 1991. Т. 27, № 10. С. 1054–1067.
- [16] *Дианов М.Б., Котов С.В., Некрасов А.В., Бояринов П.М., Петров М.П.* Результаты гидродинамического моделирования полусуточных приливов в Белом море. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1990.

- [17] Дианский Н. А., Багно А. В., Залесный В. Б. Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 537–556.
- [18] Дианский Н.А., Володин Е.М. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. С. 824–840.
- [19] Дымников В.П., Алексеев В.А., Володин Е.М., Галин В.Я., Дианский Н.А., Лыкосов В.Н., Эзау И.Н. Численное моделирование совместной циркуляции атмосферы и верхнего слоя океана // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 3. С. 324–346.
- [20] Дымников В.П., Володин Е.М., Галин В.Я., Глазунов А.В., Дианский Н.А., Лыкосов В.Н., Мошонкин С.Н., Чавро А.И. Разработка перспективной модели климата (экспертной системы) на основе новых вычислительных методов и параллельных вычислительных систем. Деп. в ВИНТИ № 02.2.00 101826. 2000.
- [21] Дьяконов Е.Г. О построении разностных схем с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач // УМН. 1962. Т. 17, № 4. С. 188–189.
- [22] Ефимов В.В., Куликов Е.А., Рабинович А.Б., Файн И.В. Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеиздат, 1985.
- [23] Залесный В.Б., Конторовский С.Э. Численная модель ветровых, термохалинных и приливных течений Охотского моря // Океанология. 2002. Т. 42, № 5. С. 659–667.
- [24] Залесный В.Б., Кузин В.И. Численные аспекты моделирования общей циркуляции океана // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 3. С. 404–418.
- [25] Залесный В.Б., Тамсалу Р., Куллас Т. Негидростатическая модель морской циркуляции // Океанология. 2004. Т. 44, № 4.
- [26] Ибраев Р.А. Исследование чувствительности решения модели динамики течений Черного моря к условию свободной поверхности моря // Океанология. 2001. Т. 41, № 5. С. 645–652.
- [27] Ибраев Р.А. Математическое моделирование термогидродинамики Каспийского моря. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. М.: ИВМ РАН, 2002.
- [28] Ибраев Р.А., Саркисян А.С., Трухчев Д.И. Сезонная изменчивость циркуляции вод Каспийского моря, реконструированная по среднесезонным гидрологическим данным // Изв. АН. Физика атмосферы и океана. 2001. Т. 37, № 1. С. 103–111.
- [29] Иванов Ю.А. Крупномасштабная и синоптическая изменчивость полей в океане. М.: Наука, 1981.
- [30] Каган Б.А. О законе сопротивления для осциллирующего, вращающегося турбулентного потока над шероховатой поверхностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39, № 6. С. 834–838.
- [31] Каменкович В.М. Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973.
- [32] Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв.АН СССР. Сер.Физич. 1942. Т. 6. С. 56–58.
- [33] Кордадзе А.А. Математические вопросы решения задач динамики океана. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982.

- [34] *Косарев А.Н.* Гидрология Каспийского и Аральского морей. М.: Изд-во МГУ, 1975.
- [35] *Кравец А.Г.* Численное моделирование приливных движений в Мезенском заливе // Деп. в ИЦ ВНИИГМИ МЦД. 1982. ГМ 139.
- [36] *Кравец А.Г.* Модель крупномасштабной баротропной циркуляции в мелководном окраинном море // Метеорология и гидрология. 1987. № 11. С. 84–91.
- [37] *Кузин В.И.* Метод конечных элементов в моделировании океанических процессов. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
- [38] *Лунева М.В.* Исследование динамики вод Белого моря на основе численного моделирования. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: ИО РАН, 1998.
- [39] *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [40] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980.
- [41] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
- [42] *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988.
- [43] *Марчук Г.И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
- [44] *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.А.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализаций. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
- [45] *Марчук Г.И., Саркисян А.С.* Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988.
- [46] *Миропольский Ю.З.* Нестационарная модель слоя конвективно-ветрового перемешивания в океане // Известия АН СССР. Серия Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 6, № 12. С. 1284–1294.
- [47] Моделирование и прогноз верхних слоев океана. / Под ред. Э.Б. Крауса, пер. с англ. Б.А. Кагана. Л.: Гидрометеиздат, 1979.
- [48] *Монин А.С.* О доступной потенциальной энергии океана // ДАН СССР. 1975, № 3. С. 221.
- [49] *Монин А.С., Обухов А.М.* Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы // ДАН СССР. 1953. Т. 93, № 2. С. 223–226.
- [50] *Монин А.С., Обухов А.М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы // Труды Геофиз. ин-та АН СССР. 1954. № 24 (151). С. 163–187.
- [51] *Монин А.С., Обухов А.М.* Основные типы движений бароклинной атмосферы в поле силы Кориолиса // Докл. АН СССР. 1958. Т. 22, № 1. С. 281–306.
- [52] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Том 1. СПб.: Гидрометеиздат, 1992.
- [53] *Мошонкин С.Н.* Оценки коэффициентов турбулентности для модели циркуляции океана // Труды международной конференции "Вычислительная математика и математическое моделирование". М.: ИВМ РАН, 2000. Т. 2. С. 133–148.
- [54] *Обухов А.М.* Структура температурного поля в турбулентном потоке // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13, № 1. С. 58–69.
- [55] Океанология. Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана. М.: Наука, 1978.

- [56] Самарский А.А. О сходимости метода дробных шагов для уравнений теплопроводности // ЖВМ и МФ. 1962. Т. 2, № 6. С. 1117–1121.
- [57] Саркисян А.С. О механизме общей циркуляции Мирового океана // Изв. АН СССР. Физика атм. и океана. 1974. Т. 10, № 12. С. 1293–1308.
- [58] Саркисян А.С. Численный анализ и прогноз морских течений. Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
- [59] Саркисян А.С. Моделирование динамики океана. СПб.: Гидрометеоиздат, 1991.
- [60] Саркисян А.С. Основные достижения и проблемы моделирования долгопериодных изменений климата Мирового океана // Изв. РАН. Физика атм. и океана. 2002. Т. 38, № 6. С. 750–769.
- [61] Сбигнева Л.А., Макаева О.С., Пясковский Р.В. О приливных движениях в узком мелководном заливе // Тезисы докладов I съезда советских океанологов. М.: ГОИН, 1977.
- [62] Сбигнева Л.А., Привалова И.В. Численные расчеты приливов // Труды ГОИН. 1970. Вып. 103. С. 24–28.
- [63] Семенов Е.В. Численное моделирование динамики Белого моря и проблема мониторинга // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 2004. Том 40, № 1. С. 128–141.
- [64] Семенов Е.В., Лулева М.В. Численная модель приливной и термохалинной циркуляции вод Белого моря // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1996. Том 32, № 5. С. 704–713.
- [65] Семенов Е.В., Лулева М.В. О совместном эффекте прилива, стратификации и вертикального турбулентного перемешивания на формирование гидродинамических полей в Белом море // Известия АН. Физика атмосферы и океана. 1999. Том 35, № 5. С. 660–678.
- [66] Терзиев Ф.С., Косарев А.Н., Керимов А.А. (ред.) Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Том 6: Каспийское море. Вып.1: Гидрометеорологические условия. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.
- [67] Тимонов В.В. Схема общей циркуляции вод Белого моря и происхождение его глубинных вод // Труды ГОИН. 1947. Вып. 1 (13). С. 118–131.
- [68] Физика океана. Т.1: Гидрофизика океана / Под ред. А.С. Моница. М.: Наука, 1978.
- [69] Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980.
- [70] Цветинский А.С. Исследование приливных движений в мелководных бассейнах на примере Онежского залива Белого моря. Дисс. на соиск. уч. степени канд. геогр. наук. М.: ГОИН, 1985.
- [71] Яковлев Н.Г. Совместная модель общей циркуляции океана и эволюции морского льда в Северном Ледовитом океане // Изв. АН., сер. ФАО. 2003. Т. 39, № 3. С. 394–409.
- [72] Яценко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [73] Belkin, I.M., S. Levitus, J. Antonov, S. Malmberg. Great Salinity Anomalies in the North Atlantic // Progress in Oceanography. 1998. V. 41. P. 1–68.
- [74] Beron-Vera F.J., Ochoa J., Ripa P. A note on boundary conditions for salt and freshwater balances // Ocean Modelling. 1999. V. 1. P. 111–118.
- [75] Bitz, C.M., Limpscomb W. H. An energy-conserving thermodynamic model of sea ice // J. Geophys. Res. 1999. V. 104. P. 15.669–15.677.

- [76] *Bleck R., Dean S., O'keefe M., Sawday A.* A comparison of data-parallel and message-passing versions of the Miami Isopycnic Coordinate Ocean Model (MICOM) // *Parallel Computing*. 1995. № 21. P. 1695–1720.
- [77] *Blumberg A.F., Mellor G.L.* A Description of a Three-Dimensional Coastal Ocean Circulation Model // *Three-Dimensional Coastal Models* / Ed. N. S. Heaps. N.Y.: Amer. Geophys. Union, 1987. P. 10.
- [78] *Briegleb, B.P., C.M. Bitz, T.C. Hunke, W.H. Limpscomb, J.L. Schramm.* Description of the Community Climate System Model Version 2: Sea Ice Model. Boulder: National Center for Atmospheric Research, 2002.
- [79] *Bryan F.* High-latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations // *Nature*. 1986. V. 323. P. 301–304.
- [80] *Bryden D., San S., Bleck R.* A new approximation of the equation of state for seawater, suitable for numerical ocean models // *J. Geoph. Res.* 1999. V. 104, № C1. P. 1537–1540.
- [81] *Burchard H.K., Bolding K., Villarreal M.R.* GOTM, A General Ocean Turbulence Model. Theory, Implementation and Test Case. EUR 18745. Ispra: Space Application Institute; Marine Environmental Unit; Joint Research Centre European Commission, 1999.
- [82] *Chassignet E.P., Garaggo Z.D.* Viscosity Parametrization and the Gulf Stream Separation // *From Stirring to Mixing in a Stratified Ocean. Proceedings "Aha Hulico", a Hawaiian Winter Workshop, Univ. of Hawaii. 2001 January 15–19.* / Eds. P. Muller and D. Henderson. Manoa: Univ. of Hawaii, 2001. P. 37–41.
- [83] *Climatological Atlas of the World Oceans* // Washington DC: NOAA Prof. Pap. 13. US Gov. Print. Off., 1982.
- [84] *Cox M.D.* A Primitive Equation, 3-dimensional Model of the Ocean. GFDL Ocean Group Technical Report № 1. New Jersey: Princeton, 1984.
- [85] *Csanady G.T.* Circulation in the Coastal Ocean. Dordrecht: D. Reidel Publ. Com., 1982.
- [86] *DYNAMO Group.* Dynamics of North Atlantic models: simulation and assimilation with high-resolution models // *Ber. Inst. f. Meereskunde Kiel*. 1997. V. 294. P. 333.
- [87] *Ezer T., Mellor G. L., and Greatbatch R. J.* . On the interpendantal variability of the North Atlantic Ocean: Model simulated changes in transport, meridional heat flux and coastal sea level between 1955–59 and 1970–74 // *J. Geophysical Research*. 1995. V. 100, № C6. P. 10559–10556.
- [88] *Flato G.M., Hibler W.D.* An initial numerical investigation of the extent of sea ice ridging // *Ann. Glaciol.* 1991. V. 15. P. 31–36.
- [89] *Flato G.M., Hibler W.D.* Modeling pack ice as a cavitating fluid // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22. P. 626–651.
- [90] *Friedrichs K.O.* On the derivation of the shallow water theory // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1948. V. 7.
- [91] *Gent P.R., Bryan F.O., Danabasoglu G., Doney S.C., Holland W. R., Large W. G., McWilliams C.* The NCAR climate system model global ocean component // *J. Climate*. 1998. V.11, № 6. P. 1287–1306.
- [92] *Gill A.E.* Atmosphere–Ocean Dynamics. New York: Academic Press, 1974.
- [93] *Griffies S.M., Böning C., Bryan F.O., Chassignet E.P., Gerdes R., Hasumi H., Hirst A., Treguier A.-M., Webb D.* Developments in ocean climate modelling // *Ocean Modelling*. 2000. V. 2. P. 123–192.

- [94] *Hall M.M., Bryden H.L.* Direct estimates and mechanisms of ocean heat transport // *Deep-sea res.* 1982. V. 29. P. 339–359.
- [95] *Harder M.* Dynamics, Roughness and Age of Arctic Sea Ice — Numerical Investigations with a Large-scale Model // *Reports on Polar Research.* № 203. Bremerhaven: Alfred-Wegener-Institut fuer Polar-und Meeresforschung, 1996.
- [96] *Harder M.P., Lemke.* Modelling the Extent of sea ice ridging in the Weddell Sea // *The polar oceans and their role in shaping the Global environment.* Geophys. Monograph. 1994. V. 85.
- [97] *Hibler W.D. III.* A dynamic-thermodynamic sea ice model // *J. Phys. Oceanogr.* 1979. V.9, № 4. P. 815–846.
- [98] *Hibler W.D. III.* Modeling a variable thickness sea ice cover // *Mon. Wea. Rev.* 1980. V. 108. P. 1943–1973.
- [99] *Holloway G.* Representing topographic stress for large-scale ocean models // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22. P. 1033–1046.
- [100] *Huang R.X.* Real freshwater as a natural boundary condition for the salinity balance and thermohaline circulation forced by evaporation and precipitation // *J. Phys. Oceanogr.* 1993. V. 23. P. 2428–2446.
- [101] *Hunke E.C.* Viscous-plastic sea ice dynamics in the EVP model: Linearization issues // *J. Comput. Phys.* 2001. V. 170. P. 18–38.
- [102] *Hunke E.C., Dukowicz J.K.* An elastic-viscous-plastic model for sea ice dynamics // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. P. 1849–1867.
- [103] *Hurlburt H. E., Hogan P. J.* Impact of  $1/8^\circ$  to  $1/64^\circ$  resolution on Gulf Stream model-data comparisons in basin-scale subtropical Atlantic Ocean models // *Dyn. Atmos. Oceans.* 2000. № 32. P. 283–330.
- [104] *Hyman, J.M.* Accurate monotonicity preserving cubic interpolation // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1983. V. 4, № 4. P. 645–654.
- [105] *Ibrayev R.A.* 2001. Model of enclosed and semi-enclosed sea hydrodynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 2001. V. 16, № 4. P. 291–304.
- [106] IPCC 2001. *Climate Change: The Scientific Basis.* Contribution of Working Group 1 to the Third Assessment Report of the IPCC. Cambridge: University Press, 2001. P. 994.
- [107] *Jerlov N.* *Optical Oceanography.* Berlin: Elsevier, 1968.
- [108] *Ji M., Leetmaa A., Derber J.* An ocean analysis system for seasonal to interannual climate studies // *Month. Wea. Rev.* 1995. V. 123. P. 460–481.
- [109] *Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R., Collins W., Deaven D., Gandin L., Iredell M., Saha S., White G., Woollen J., Zhu Y., Leetmaa A., Reynolds B., Chelliah M., Ebisuzaki W., Higgins W., Janowiak J., Mo K.C., Ropelewski C., Wang J., Jenne R., Joseph D.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bulletin of the American Meteorological Society.* 1996. V. 77. P. 437–471.
- [110] *Kazantsev E., Sommeria J., Verron J.* Subgrid-Scale Eddy Parametrization by Statistical Mechanics in a Barotropic Ocean Model // *J. Phys. Oceanogr.* 1998. V. 28. P. 1017–1042.
- [111] *Klinger B., Marshall J., Send U.* Representation of convective plumes by vertical adjustment // *J. Geophys. Res.* 1996. V. 101, № C8. P. 18175–18182.
- [112] *Kosarev, A.N., Yablonskaya E.A.* *The Caspian Sea.* The Hague: SPB Academic Publishing, 1994.



- [113] *Kraus E.B., Turner J.S.* A one-dimensional model of the seasonal thermocline.- II. The general theory and its consequences // *Tellus*. 1967. V. 19, № 1. P. 98–105.
- [114] *Large W. G., Danabasoglu G., Doney S. C., McWilliams J. C.* Sensitivity to surface forcing and boundary layer mixing in a global ocean model: Annual-mean climatology // *J. Phys. Oceanogr.* 1997. V. 27. P. 2418–2447.
- [115] *Large W.G., McWilliams J.S., Doney S.C.* Oceanic vertical mixing: A review and a model with a nonlocal boundary layer parameterization // *Reviews of Geophysics*. 1994. V. 32. P. 363–403.
- [116] *Laxon S., Wadhams P., Dick C., Steffen K.* Recent Variations in Arctic Sea-Ice Thickness. Report to the AOSB by ACSYS/CliC Observation Products Panel. IACPO Informal Report № 7, 2002. Tromso, Norway.
- [117] *Levitus S.* World Ocean Atlas. CD-ROM Data Set. U.S.Department of Commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Environmental Satellite Data and Information Service, National Oceanographic Data Center, Ocean Climate Laboratory, 1994.
- [118] *Macdonald A. M., Wunsch C.* An estimate of global ocean circulation and heat fluxes // *Nature*. 1996. V. 382. P. 436–439.
- [119] *Marchuk G.I., Kuzin V.I.* On the combination of the finite element and splitting-up methods in the solution of the parabolic equations // *J. Comp. Phys.* 1982. V.52, № 2. P. 237–272.
- [120] *Marchuk G.I., Schroeter J., Zalesny V.B.* Numerical study of the global ocean equilibrium circulation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. 2003. V. 18, № 4. P. 307–335.
- [121] *Marotzke J.* Influence of convective adjustment on the stability of the thermohaline circulation // *J. Phys. Oceanogr.* 1991. V. 21. P. 903–907.
- [122] *Marshall J., Jones H., Hill C.* Efficient ocean modeling using non-hydrostatic algorithms // *J. of Marine Systems*. 1998. V. 18. P. 115–134.
- [123] *Marshall J., Schott F.* Open-ocean convection: Observations. Theory and Models // *Reviews of Geophysics*. 1999. V. 37, № 1. P. 1–64.
- [124] *Martin P.J* Simulation of the mixed layer at OWS November and Papa with several models // *J. Geophys. Res.* 1985. V. 90. P. 903–916.
- [125] *Mellor G.L., Yamada T.* A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers // *J. Atmos. Sci.* 1974. V. 31. P. 1791–1806.
- [126] *Mellor G.L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys.* 1982. V. 20. P. 851–875.
- [127] *Mesinger F., Arakawa A.* Numerical methods used in atmospheric models // V. I. JOC. GARP Publication Series, № 17. C.P. № 5. CH-1211. Geneva: World Meteorological Organization, 1976. P. 64.
- [128] *Munk W.H., Anderson E.R.* Note on the theory of the thermocline // *J. Mar. Res.* 1948. V. 7. P. 276–295.
- [129] *Pacanovsky R.C., Griffies S.M.* The MOM 3 Manual. Princeton: NOAA, 1999. P. 680.
- [130] *Pacanovsky R.C., Philander G.* Parametrization of vertical mixing in numerical models of the tropical ocean // *J. Phys. Oceanogr.* 1981. V. 11. P. 1442–1451.
- [131] *Paiva A. M., Hargrove J. T., Chassignet E. P., Bleck R.* Turbulent behavior of a fine mesh (1/12 degree) numerical simulation of the North Atlantic // *J. Mar. Sys.* 1999. № 21. P. 307–320.

- [132] *Parkinson C.L., Washington W.M.* A large-scale numerical model of sea ice // *J. Geophys. Res.* 1979. V. 84. P. 311–337.
- [133] *Paulson E.A., Simpson J.J.* Irradiance measurements in the upper ocean // *J. Phys. Oceanogr.* 1977. V. 7. P. 952–956.
- [134] *Phillips O.M.* Energy loss mechanisms from low mode waves // Report on the Soviet–American Conference on Internal Waves. Novosibirsk: Comp. Center, 1976.
- [135] *Phillips O.M.* Spectral and statistical properties of the equilibrium range in wind-generated gravity waves // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 156. P. 505–531.
- [136] *Polyakov I.* An eddy parameterization based on maximum entropy production with application to modeling of the arctic ocean circulation // *J. Phys. Oceanogr.* 2001. V. 31. P. 2255–2270.
- [137] *Proshutinsky A.Y., Bourke R.H., McLoughlin F.* The role of the Beaufort Gyre in the Arctic climate variability: seasonal to decadal climate scales // *Geophys. Res. Lett.* 2002. V. 29, № 23. P. 2100.
- [138] *Proshutinsky A.Y., Johnson M.A.* Two circulation regimes of the wind driven Arctic Ocean // *J. Geophys. Res.* 1997. V. 102, № C6. P. 12493–12514.
- [139] *Reznik G.M., Grimshaw R.* Nonlinear geostrophic adjustment in the presence of a boundary // *J. Fluid. Mech.* 2002. V. 471. P. 257–283.
- [140] *Rossby C.G.* On mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems // *J. Mar. Res. I.* 1937. № 1. P. 15–28.
- [141] *Rossby C.G.* On mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems // *J. Mar. Res. II.* 1938. № 2. P. 239–263.
- [142] *Roulett G., Madec G.* Salt conservation, free surface, and varying levels: a new formulation for ocean general circulation models // *J. Geophys. Res.* 2000. V. 105, № C10. P. 23927–23942.
- [143] *Schmidt G.A., Mysak L.A.* The stability of a zonally averaged thermohaline circulation model // *Tellus.* 1996. V. 48 A. P. 158–178.
- [144] *Schrum C., Backhaus J.* Sensitivity of atmosphere–ocean heat exchange and heat content in North Sea and Baltic Sea. A comparative Assessment // *Tellus.* 1999. V. 51A. P. 526–549.
- [145] *Semtner A.J.* An Oceanic General Circulation Model with Bottom Topography // Numerical Simulation of Weather and Climate. Technical Report № 9. UCLA Department of Meteorology. 1974.
- [146] *da Silva A.M., Young C.C., Levitus S.* Atlas of Surface Marine Data // Washington D.C. NOAA Atlas NESDIS 6. 1994.
- [147] *Smith R. D., Maltrud M. E., Bryan F. O., Hecht M. W.* Numerical simulations of the North Atlantic Ocean at  $0.1^\circ$  // *J. Phys. Oceanogr.* 2000. № 30. P. 1532–1561.
- [148] *Timmermann R., Beckmann A.* Parameterization of vertical mixing in the Weddell sea // *Ocean Modelling.* 2004. V. 6. P. 83–100.
- [149] *Weisse R., Mikolajewicz U., Maier-Reimer E.* Decadal variability of the North Atlantic in an ocean general circulation model // *J. Geoph. Res.* 1994. V. 99. № C6. P. 12,411–12,421.
- [150] *Zalesny V.B.* Numerical simulation and analysis of the sensitivity of large-scale ocean dynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1996. V. 11, № 6. P. 421–443.
- [151] *Zalesny V.B.* Variability and equilibrium states of the World Ocean circulation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1997. V. 12, № 6. P. 547–567.

# Математическое моделирование в проблеме окружающей среды

*А.Е. Алоян, В.В. Пененко, В.В. Козодеров*

## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	280
<b>1. Постановка задачи динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосферных дисперсных системах</b> . .	282
1.1. Основные уравнения региональной модели динамики атмосферы . . . . .	282
1.2. Математические модели переноса многокомпонентных газовых примесей с учетом процессов фотохимической трансформации и кинетических процессов нуклеации, конденсации и коагуляции . . . . .	286
1.3. Модель фотохимической трансформации . . . . .	289
1.4. Гомогенная бинарная нуклеация . . . . .	290
1.5. Численная модель кинетического уравнения конденсации . .	292
1.6. Численная модель коагуляции аэрозолей . . . . .	294
1.7. Миграция примесей в почве . . . . .	295
1.8. Влажное осаждение . . . . .	296
1.9. Оптимизационные задачи по регулированию мощности источников . . . . .	297
1.10. Результаты численных экспериментов . . . . .	301
<b>2. Системная организация моделирования для задач охраны окружающей среды</b> . . . . .	308
2.1. Принципы построения численных моделей переноса и трансформации газовых примесей и аэрозолей в атмосфере . . . .	308
2.2. Постановка задачи . . . . .	310
2.3. Вариационная формулировка моделей процессов . . . . .	313
2.4. Вариационные принципы в задачах охраны окружающей среды . . . . .	315
2.5. Применение методов прямого и обратного моделирования .	320
2.6. Примеры решения природоохранных задач. Прямые и обратные задачи для Восточно-Сибирского региона . . . . .	330

<b>3. Определение биомассы растительного покрова по наблюдениям из космоса</b> . . . . .	335
3.1. Подходы к оценке состояния биосферы . . . . .	335
3.2. Биогеохимические циклы и глобальные изменения . . . . .	336
3.3. Моделирование взаимосвязей данных дистанционного зондирования и параметров состояния биосферы . . . . .	338
3.4. Практическая реализация разработанных методов . . . . .	342
3.5. Технологические аспекты реализации новых подходов к оценке состояния биосферы из космоса . . . . .	344
<b>Заключение</b> . . . . .	346
<b>Литература</b> . . . . .	347

## Введение

Оценки качества природной среды и прогнозирование ее будущего состояния в условиях взаимодействия естественных и антропогенных факторов являются основными целями и задачами в области охраны окружающей среды. Интерес к этим задачам активно стимулируется тем, что результаты их решения имеют непосредственный практический выход в сферу социальных и экономических отношений современного общества. Одна из научных школ, участвующая в развитии математического моделирования в области охраны окружающей среды, была основана академиком Г.И. Марчуком в Вычислительном Центре СО РАН в 70-х годах прошлого столетия. За прошедшие годы участниками этой школы создана оригинальная методология математического моделирования, разработаны многофункциональные комплексы моделей и алгоритмов и на их основе решено много практических и исследовательских задач. Описанию некоторых фрагментов технологии, моделей и методов и посвящен настоящий раздел.

Одной из центральных проблем современной физики атмосферы является математическое моделирование изменчивости газового и аэрозольного состава атмосферы, а также оценка влияния атмосферных примесей на окружающую среду. Атмосфера представляет собой сложную динамическую систему, в которой протекают различные динамические и физико-химические процессы. Эти процессы обусловлены как атмосферной циркуляцией, так и трансформацией газовых и аэрозольных примесей. Основные механизмы — это химические и фотохимические реакции, протекающие в газовой и жидкой фазах, а также кинетические процессы нуклеации, конденсации и коагуляции, ответственные за формирования и эволюции аэрозолей. Все эти процессы взаимосвязаны между собой, и поэтому их целесообразно рассматривать в рамках единой модели. В зависимости

от пространственно-временного масштаба рассматриваемых процессов используются модели различной степени детализации. В данной работе будут рассмотрены различные математические модели и алгоритмы их численной реализации для моделирования процессов, протекающих в атмосферных дисперсных системах в региональном и глобальном масштабах.

Так как эти процессы протекают в турбулентной атмосфере, а земная поверхность орографически и термически неоднородна, то задачу переноса и трансформации газовых примесей и аэрозолей необходимо решать с использованием гидротермодинамических моделей. Это позволяет более точно воспроизвести пространственно-временную изменчивость полей метеоэлементов, турбулентных характеристик течений и процессов энерго-массообмена.

Пространственные масштабы атмосферных движений меняются в пределах семи-восьми порядков — от мелких вихрей сантиметровых размеров до движений крупных воздушных масс с континентальными размерами. Пространственная изменчивость газовых примесей и аэрозолей также характеризуется широким разнообразием масштабов.

Отметим, что масштабы многих явлений перекрываются. Время жизни атмосферных веществ меняется в диапазоне от секунд (для наиболее реакционноспособных свободных радикалов) до несколько лет (для стабильных молекул). Например, время жизни гидроксил-радикала составляет менее 0.01 с. За это время пространственный масштаб переноса примерно равен 1 см. У метана время жизни около 10 лет, и поэтому он может мигрировать в более-менее распределенном виде по всему земному шару.

Размеры аэрозольных частиц (по диаметру) меняются в диапазоне от нескольких нанометров до нескольких микрон. Это различие в размерах составляет величину более 3 порядков, что соответствует диапазону изменения масс частиц более 9 порядков. Таким образом, даже аппроксимация разностной задачи с 6-м порядком точности может привести к большим погрешностям закона сохранения массы в системе целом. Поэтому исходные кинетические уравнения конденсации и коагуляции целесообразно представлять для массовых концентраций. Химический состав частиц существенно изменяется в зависимости от размера, что имеет принципиальное значение для физики аэрозолей и химии атмосферы.

Из вышесказанного следует, что при решении конкретной физической задачи в зависимости от пространственно-временных масштабов рассматриваемых процессов необходимо выбрать как соответствующие гидротермодинамические модели, так и модели трансформации газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. В большинстве трехмерных моделей динамики аэрозолей предполагается, что существует мгновенное равновесие в системе газ-аэрозоль. Однако, как показано в [83, 73], при определенных условиях равновесие устанавливается довольно медленно по отношению к временно-

му масштабу протекания других процессов. Поэтому необходимо построить соответствующие численные модели с использованием неравновесной функции распределения. Математические модели такого типа построены в [56, 54, 73, 58, 64]. При этом одним из важных требований к моделям является соблюдение законов сохранения массы или числа частиц.

Общую структуру комплекса математических моделей составляют следующие базовые элементы:

- модели гидротермодинамики атмосферных процессов;
- модели переноса многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей в рамках эйлеровой и лагранжевой формулировок;
- модели фотохимической трансформации малых газовых примесей;
- модели аэрозольной динамики с учетом кинетических процессов нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции;
- модели наблюдений.

Для расширения возможностей моделирования к базовым элементам, описывающим физические процессы, добавляются дополнительные конструкции в виде функционалов, описывающих обобщенные характеристики процессов, данных и моделей. С помощью этих функционалов порождаются различные сопряженные задачи, методы обратного моделирования, теории чувствительности, оптимизации и т.д.

## **1. Постановка задачи динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосферных дисперсных системах**

Базовым элементом для моделирования пространственно-временной изменчивости трансформирующихся газовых примесей и аэрозолей является модель гидротермодинамики для воспроизведения атмосферной циркуляции, развивающейся над орографически и термически неоднородной подстилающей поверхностью. Для моделирования динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей исходными являются уравнения переноса многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей с учетом процессов фотохимической трансформации и кинетических процессов нуклеации, конденсации и коагуляции.

### **1.1. Основные уравнения региональной модели динамики атмосферы**

Рассмотрим задачу изменчивости газовой и аэрозольной динамики в региональном масштабе. Более детально эти задачи рассмотрены в работах [24, 23, 10, 56, 54, 55, 33, 50, 51, 52, 49].

Исходной является система уравнений гидротермодинамики для описания региональных атмосферных процессов. Для учета орографии в численных моделях перейдем от декартовой системы координат  $(x, y, z)$  к обобщенной системе координат  $(\bar{x}, \bar{y}, \sigma)$ , связанной с рельефом местности:

$$x = \bar{x}, \quad y = \bar{y}, \quad \sigma = \frac{z - \tilde{\zeta}(x, y)}{H - \tilde{\zeta}(x, y)} \hat{H},$$

где  $H$  и  $\hat{H}$  — высота верхней границы соответственно в  $z$ - и  $\sigma$ -системе координат, а  $\tilde{\zeta}(x, y)$  — функция, описывающая рельеф.

В новой системе координат уравнения гидротермодинамики примут следующий вид [23, 33, 55, 52]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{u} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + a_1 \frac{\partial p}{\partial \sigma} + l \hat{v} + F_u, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{v} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + a_2 \frac{\partial p}{\partial \sigma} - l \hat{u} + F_v, \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{w} &= -a_3 \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \lambda \vartheta (1 + 0.61q) + F_w, \\ \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{\vartheta} + \frac{S}{a_3} (\hat{w} + \tilde{\zeta}_x \hat{u} + \tilde{\zeta}_y \hat{v}) &= \frac{L_w \Phi \bar{\rho}}{C_p} + F_\vartheta, \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{u} \hat{q} &= -a_3 \hat{w} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \Phi \bar{\rho} + F_q, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \sigma} &= 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi} &= \rho \varphi, \quad \varphi = (u, v, w, \vartheta, q), \\ \tilde{\zeta}_x &= \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial x}, \quad \tilde{\zeta}_y = \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial y}, \\ a_i &= \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

$F_u, F_v, F_w$  — турбулентные потоки для компонентов скорости, имеющие вид

$$\begin{aligned} F_u &= \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{11} + a_2 \tau_{12}) + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\hat{u}}{\bar{\rho}} \right), \\ F_v &= \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{21} + a_2 \tau_{22}) + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\hat{v}}{\bar{\rho}} \right), \\ F_w &= \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} (a_1 \tau_{31} + a_2 \tau_{32}) + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_u \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\hat{w}}{\bar{\rho}} \right), \end{aligned}$$

$F_q, F_\vartheta$  — турбулентные потоки тепла и влаги

$$F_\vartheta = \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma}(a_1 h_1 + a_2 h_2) + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_\vartheta \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\hat{\vartheta}}{\bar{\rho}} \right),$$

$$F_q = \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma}(a_1 Q_1 + a_2 Q_2) + a_3^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \rho \nu_q \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\hat{q}}{\bar{\rho}} \right),$$

$$a_1 = \tilde{\zeta}_x \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\zeta}(x, y)}, \quad a_2 = \tilde{\zeta}_y \frac{\sigma - \hat{H}}{H - \tilde{\zeta}(x, y)}, \quad a_3 = \frac{\hat{H}}{H - \tilde{\zeta}(x, y)}.$$

В системе уравнений использованы общепринятые обозначения:  $t$  — время;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости ветра в координатной системе  $x, y, \sigma$ ;  $\vec{u} = (u, v, w)$ ;  $\vartheta$  — потенциальная температура;  $\rho$  — плотность;  $l$  — параметр Кориолиса;  $q$  — удельная влажность;  $L_w$  — скрытая теплота конденсации;  $\Phi$  — скорость образования жидкой фазы;  $S$  — параметр стратификации;  $\lambda = g/T$  — параметр плавучести;  $\bar{\rho}(z)$  — фоновая плотность воздуха;  $\tau_{ij}, h_i, Q_i$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2$ ) — тензор вязких напряжений Рейнольдса и турбулентные потоки тепла и влаги, соответственно;  $\nu_u, \nu_\vartheta, \nu_q$  — коэффициенты вертикального турбулентного обмена для моментов количества движения, тепла и влаги, соответственно.

Для описания структуры приземного слоя используем теорию подобия Мони́на–Обухова и эмпирические функции Бузингера [59, 33]. Окончательно модель приземного слоя запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha z \frac{\partial |\vec{u}|}{\partial z} &= u_* \varphi_u(\zeta), & \alpha \frac{\partial \vartheta}{\partial z} &= \vartheta_* \varphi_\vartheta(\zeta), & \alpha \frac{\partial q}{\partial z} &= q_* \varphi_q(\zeta), \\ \alpha |\vec{u}| &= u_* f_u(\zeta, \zeta_u), & \vartheta - \vartheta_0 &= \vartheta_* f_\vartheta(\zeta, \zeta_\vartheta), & q - q_0 &= q_* f_q(\zeta, \zeta_q), \\ & \zeta = \frac{z}{L}, & \zeta_h &= \frac{h_*}{L}, \\ \nu_i &= \frac{u_* \alpha z}{u_i(\zeta)}, & (\nu_i)_h &= \frac{u_* \alpha h_*}{\psi_i(\zeta_h)}, & a_i &= \frac{\psi_i(\zeta)}{f_i(\zeta_h, \zeta_i)}, & L &= -\frac{u_*^2}{\alpha^2 \lambda \varphi_*}, \\ f_u(\zeta, \zeta_0) &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_u(\zeta)}{\zeta} d\zeta, & f_\vartheta(\zeta, \zeta_0) &= \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\varphi_\vartheta(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $|\vec{u}| = (u^2 + v^2)^{1/2}$  — модуль вектора скорости;  $u_*$  — скорость трения;  $\vartheta_*, q_*$  — масштабы потенциальной температуры и удельной влажности;  $h_*$  — высота приземного слоя;  $L$  — масштаб длины Мони́на–Обухова;  $\zeta_u, \zeta_\vartheta$  — параметры шероховатости для ветра и температуры;  $\zeta = z/L$  — безразмерная высота, представляющая собой параметр гидростатической устойчивости;  $\varphi_i^*, f_i^*$  — непрерывные универсальные функции. При этом учитывается поправка к потенциальной температуре за счет влаги. Индекс  $i$  имеет значения, соответствующие функциям скорости, влажности и



температуры. Температура и влажность на поверхности земли определяются из уравнения теплового баланса, тепло- и влагообмена в почве [23].

Задачу (1.1)–(1.2) будем решать в области

$$D_t = D \times [0, \bar{t}], \quad D = \{(x, y, \sigma) : x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], \sigma \in [\zeta, \hat{H}]\}$$

при следующих начальных и краевых условиях:

$$\begin{aligned} u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0, \quad \vartheta = \vartheta^0, \quad q = q^0, \quad \text{при } t = 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = \pm X, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \hat{q}}{\partial y} = 0, \quad \text{при } y = \pm Y. \end{aligned}$$

На верхней границе атмосферы

$$u = u^0, \quad v = v^0, \quad w = w^0, \quad \vartheta = \vartheta^0, \quad q = q^0, \quad \text{при } \sigma = \hat{H}.$$

Индексами нуль отмечаются фоновые значения величин. Граничные условия на верхней границе приземного слоя ( $h_*$ ) задаются в следующем виде:

$$\begin{aligned} 1) \quad a_3 h_* \frac{\partial \hat{u}}{\partial \sigma} = a_u \hat{u}, \quad a_3 h_* \frac{\partial \hat{v}}{\partial \sigma} = a_u \hat{v}, \quad a_3 h_* \frac{\partial \hat{\vartheta}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{\vartheta} - \hat{\vartheta}_0), \\ a_3 h_* \frac{\partial \hat{q}}{\partial \sigma} = a_\vartheta (\hat{q} - \hat{q}_0), \quad \text{при } \sigma = h_*; \\ 2) \quad \frac{\hat{w}}{h_*} = - \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right), \quad \text{при } \sigma = \frac{(h_* - \hat{\zeta}(x, y)) \hat{H}}{\hat{H} - \hat{\zeta}(x, y)}; \\ 3) \quad \hat{w} = 0, \quad \text{при } \sigma = \hat{\zeta}(x, y). \end{aligned}$$

Система уравнений с начальными и граничными условиями при суточном ходе описывает изменение температуры и влажности, которые инициируют создание атмосферных возмущений в динамике.

Коэффициенты вертикального турбулентного обмена определяются с помощью уравнения баланса энергии турбулентности  $b$  (Колмогорова–Обухова) и скорости диссипации  $\epsilon$  [3, 55, 54, 51]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial t} + \vec{u} \text{ grad } (b) = a_3^2 \nu_u \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\lambda \alpha_T}{a_3} \frac{\partial \vartheta}{\partial \sigma} - \frac{\lambda \alpha_q}{a_3} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right] + \\ + a_3^2 \alpha_b \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu_u \frac{\partial b}{\partial \sigma} - c \frac{b^2}{\nu_u}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{u} \text{ grad } (\epsilon) = a_3^2 \alpha_1 \frac{\epsilon}{b} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\lambda \alpha_{\theta \epsilon}}{a_3} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} - \frac{\lambda \alpha_{q \epsilon}}{a_3} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right] + \\ + a_3^2 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \sigma} \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} - \alpha_3 \frac{\epsilon^2}{b}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\alpha_T = \nu_{\vartheta} / \nu_u = \varphi_u(\zeta) / \varphi_{\vartheta}(\zeta)$ ;  $a_b, c, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , и  $\alpha_{\theta_\epsilon}$  — безразмерные универсальные константы. Начальные и граничные условия зададим в следующем виде:

$$\begin{aligned} b &= 0, & \epsilon &= 0, & \text{при } t &= 0, \\ b &= 0, & \epsilon &= 0, & \text{при } z &= \hat{H}, \\ b &= b_u^2(\zeta_h, \zeta_0), & \epsilon &= \epsilon_h(\zeta_h, \zeta_0), & \text{при } z &= h_* . \end{aligned}$$

Вид функций  $b_u^2$  и  $\epsilon_h$  приведен в работах [3, 33]. Численные алгоритмы детально изложены в [1].

Слагаемые в квадратных скобках в (1.3) описывают сдвиговую генерацию и генерацию за счет сил плавучести. Второе слагаемое описывает диффузию, а третье — скорость диссипации в тепло. В уравнении (1.4) третье слагаемое в правой части описывает диссипацию  $\epsilon$ . После нахождения  $b$  и  $\epsilon$  определяется коэффициент вертикального турбулентного обмена из соотношения

$$\nu_u = \alpha_\epsilon \frac{b^2}{\epsilon}. \quad (1.5)$$

Для решения уравнений (1.3)–(1.4) в начальный момент задается  $\nu(z)$  в виде функции, убывающей по высоте по квадратичному закону. Задача (1.3)–(1.5) решается методом расщепления. На первом этапе решается задача адвективного переноса энергии турбулентности и диссипации по монотонной схеме, а на втором этапе — задача их локального изменения. Для решения задачи на втором этапе используются соответствующие энергетические уравнения турбулентности относительно квадратов искомых величин, которые решаются итерационным методом.

## 1.2. Математические модели переноса многокомпонентных газовых примесей с учетом процессов фотохимической трансформации и кинетических процессов нуклеации, конденсации и коагуляции

Рассмотрим задачи экологии, характерной особенностью которых является необходимость описания механизмов фотохимической трансформации, процессов образования аэрозолей за счет коагуляции и конденсации, переноса различных консервативных субстанций и др., имея в виду, что уравнения гидротермодинамики уже решены.

Для моделирования процессов образования аэрозолей исключительное значение имеют получающиеся после фотохимической трансформации вещества. Пересыщение паров этих веществ приводит к образованию первичных кластеров, которые являются основой для образования аэрозолей.

Затем они могут взаимодействовать с ядрами конденсации фоновой атмосферы и объединяться с каплями воды определенных размеров с последующей коагуляцией этих частиц.

Важно отметить, что эти кластеры по-разному взаимодействуют с различными каплями и поэтому нужно определить функцию распределения капель по размерам. Наиболее активно эти процессы протекают во влажной атмосфере и в облаках. Аэрозольные частицы "больших" размеров выпадают на поверхность Земли. Естественно, что процесс сопровождается частичным или полным испарением. Поэтому очень важно знать баланс между субстанцией и испарением капельных комплексов, не нарушая законов сохранения.

В атмосферу выбрасывается большое количество химических веществ, находящихся в газовом и аэрозольном состоянии. В атмосфере эти вещества претерпевают ряд физико-химических изменений за счет механизмов фотохимической трансформации, нуклеации, конденсации/испарения и коагуляции. Все эти механизмы взаимосвязаны между собой, а каждый из них является частью общей, комплексной, экологической задачи.

Дисперсность и численная концентрация являются основными показателями, определяющими основные специфические свойства процессов конденсации и коагуляции. Размер капель и численная концентрация в атмосферных дисперсных системах варьируется от нескольких молекул до крупных капель радиусом, измеряемым миллиметрами, а численная концентрация — до  $10^{12}$  капель в  $1 \text{ см}^3$  газа.

Как известно, увеличение размеров аэрозольных частиц происходит в процессах коагуляции и превращений газ-частица, а изменение спектра размеров частиц происходит под влиянием этих двух механизмов. Скорость превращений газ-частица может определяться скоростью диффузии молекул пара к поверхности частицы и скоростью реакции, в которой участвует молекула адсорбированного пара и вещество поверхности частицы. При этом очень важно выявить механизмы превращений газ-частица, которые приводят к образованию веществ, способных к конденсации, таких, как серная кислота, сульфат аммония, нитрат аммония и других, а также смоделировать эволюцию аэрозолей начиная с молекулярного уровня до формирования аэрозолей размером  $4\text{--}10 \text{ мкм}$ .

Основные уравнения для скорости изменения концентрации многокомпонентных газовых примесей и аэрозолей запишем в следующем виде [50, 51]:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial C_i}{\partial x_j} = F_i^{gas} - P_i^{nucl} - P_i^{cond} + P_i^{phot} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial C_i}{\partial x_j}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + (u_j - \delta_{j3} w_g) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} = F_k^{aer} + P_k^{nucl} + P_k^{cond} + P_k^{phot} + \frac{\partial}{\partial x_j} K_{jj} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}. \quad (1.7)$$

Здесь  $j = \overline{1, 3}$ ,  $(u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w)$ ,  $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ ;  $C_i, i = 1, \dots, N_g$ ,  $\varphi_k = 1, \dots, N_a$  — концентрация газовых примесей и аэрозолей;  $N_g$  и  $N_a$  — числа газовых компонент и аэрозольных фракций, соответственно;  $(u, v, w)$  — компоненты вектора скорости ветра в направлении  $x, y, z$ , соответственно;  $w_g$  — скорость гравитационного оседания;  $F^{gas}$  и  $F^{aer}$  — источники газовых примесей и аэрозолей;  $P^{nucl}$ ,  $P^{cond}$ ,  $P^{coag}$  и  $P^{phot}$  — нелинейные операторы нуклеации, конденсации, коагуляции и фотохимической трансформации, соответственно.

Уравнения (1.6)–(1.7) рассматриваются в области

$$D_t = D \times [(0, T)], \quad D = \{(x, y, z); x \in [-X, X], y \in [-Y, Y], z \in [z_0, H]\},$$

где  $H$  — верхняя граница области интегрирования. Начальные условия задаются в виде

$$C_i(x, y, z) = C_i^0(x, y, z); \quad \varphi_i(x, y, z) = \varphi_i^0(x, y, z), \quad \text{при } t = 0. \quad (1.8)$$

На боковых границах области задаются следующие краевые условия:

$$\varphi_i|_{\Omega} = \varphi_i^b, \quad \text{если } u_n < 0, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0, \quad \text{если } u_n \geq 0, \quad (1.10)$$

где  $\Omega$  — боковая поверхность,  $n$  — внешняя нормаль к  $\Omega$ ,  $u_n$  — нормальная компонента вектора скорости.

На верхней границе воздушной массы  $z = H$  предполагается, что возмущения, обусловленные неоднородностями поверхности, затухают. На нижней границе взаимодействие воздушных масс с поверхностью Земли описывается с помощью параметризационной модели на основе теории подобия Монина-Обухова с эмпирическими функциями для описания вертикальных профилей метеозлементов. Для задания краевого условия на высоте  $z = h$  используется уравнение для описания сопротивления примесям поверхностью земли как совокупность следующих трех членов: аэродинамическое сопротивление  $r_a$ , квазиламинарное сопротивление пограничного слоя  $r_b$ , обусловленное процессами молекулярной диффузии вблизи поверхности земли, и поверхностное сопротивление  $r_c$ , связанное с процессами на поверхности осаждения. Итак, потоки примесей в приземном слое атмосферы представим в виде

$$\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi - \varphi_{\text{surf}}}{r_a + r_b + r_c}, \quad r_b = \frac{2}{\kappa u_*} \left( \frac{S_c}{Pr} \right)^{2/3}. \quad (1.11)$$

Здесь  $S_c = 1.5 \times 10^{-5}$  — число Шмидта,  $Pr = 0.71$  — число Прандтля,  $u_*$  — динамическая скорость. Основное внимание будет уделено формированию сернистых аэрозольных частиц в атмосфере.

### 1.3. Модель фотохимической трансформации

Выбрасываемые в атмосферу газовые примеси в атмосфере вступают в различные фотохимические реакции, трансформируются и приводят к образованию вторичных загрязнителей, не присутствовавших в первоначальных выбросах. Общее количество химических веществ и реакций очень велико, что, несомненно, усложняет решение задачи в целом. В свободной атмосфере реакций, включающих органические вещества с большим молекулярным весом, меньше, чем в нижней тропосфере. Часть этих веществ разрушается, не достигая свободной атмосферы. Среди биогенных веществ важными являются изопрен и терпены.

При численном моделировании фотохимического загрязнения атмосферы в региональном масштабе возникает необходимость сокращения количества веществ и реакций в модели и, соответственно, упрощения численного решения задачи. В настоящее время широко применяются различные способы группировки химических веществ для соответствующего включения в численную модель трансформаций. Нами использована усовершенствованная, по сравнению с [55, 2], модель, где химическая схема дополнена новым блоком в соответствии с химическим механизмом CBM-IV [65], учитывающим ряд сгруппированных органических веществ. Суть этого механизма состоит в том, что органические вещества группируются на основе химических связей с одинаковой реакционной способностью. Таким образом, в модель дополнительно включены 34 реакции для следующих 12 веществ: ISOP, ALD2, C2O3, PAN, TOL, TO2, PAR, OLE, ROR, XO2, XO2N, ETH. В результате получается комбинированная модель, которая включает в явном виде элементы, содержащие вещества N, S, C, и сгруппированные органические вещества. Этот подход более экономичен с вычислительной точки зрения и допускает более детальное описание промежуточных веществ в общей последовательности химических превращений с незначительным увеличением вычислительных затрат.

Известно, что летучие органические вещества различаются своей озonoобразующей способностью. Озонообразующий потенциал вещества зависит от той комплексной смеси, частью которой он является.

Итак, предположим, что в атмосферу выбрасываются следующие газовые вещества: NO, NO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, CO, CH<sub>4</sub>, H<sub>2</sub>CO, ISOP, ALD2, OLE, PAR, TOL. Реакции, инициируемые солнечным светом, приводят к возникновению ряда новых химически активных атомов, свободных радикалов и других веществ, которые вместе с веществами первоначальных выбросов составляют следующую систему O(<sup>1</sup>D), O(<sup>3</sup>P), O<sub>3</sub>, OH, HO<sub>2</sub>, H, NO<sub>3</sub>, NO, NO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>CO, HCO, H<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, CO, CH<sub>4</sub>, HNO<sub>2</sub>, HNO<sub>3</sub>, SO<sub>3</sub>, SO<sub>3</sub><sup>\*</sup>, N<sub>2</sub>O<sub>5</sub>, CH<sub>3</sub>, CH<sub>3</sub>O<sub>2</sub>, CH<sub>3</sub>O, CH<sub>3</sub>OH, CO<sub>2</sub>, CH<sub>3</sub>O<sub>2</sub>NO<sub>2</sub>, HCOOH, HOCH<sub>2</sub>O, HOCH<sub>2</sub>O<sub>2</sub>, CH<sub>3</sub>OOH, HO<sub>2</sub>NO<sub>2</sub>, CH<sub>3</sub>ONO<sub>2</sub>, ISOP, XO<sub>2</sub>, ALD2, C2O3, PAN, TOL, TO2,

PAR, OLE, ROR, XO<sub>2</sub>N, EТН [16, 17, 18, 19]. Всего в фотохимической модели учитывается 204 химических реакций между 44 газовыми компонентами. Система фотохимических уравнений имеет вид

$$\frac{d\rho\varphi_i}{dt} = \frac{\partial\rho\varphi_i}{\partial t} + \operatorname{div} u\hat{\rho}\varphi_i = P^i - L^i \quad (1.12)$$

с начальными условиями

$$\varphi_i(t = 0) = \varphi_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.13)$$

где  $\varphi_i$  — концентрация  $i$ -го вещества, а  $P_i$  и  $L_i\varphi_i$  есть скорости фотохимического образования и гибели, соответственно.

Для системы (1.12)–(1.13) характерен большой разброс точек спектра матрицы Якоби, и можно говорить об их жесткости. Теоретическому и численному исследованию жестких систем ОДУ уделяется большое внимание ([63, 84, 43, 72, 7, 74, 9, 46, 18, 81, 82, 67]). Однако не менее важным является и требование, чтобы модель включала и соответствующий реальным атмосферным условиям химический механизм протекающих процессов.

#### 1.4. Гомогенная бинарная нуклеация

В атмосферных дисперсных системах особо важное место занимают сульфатные аэрозоли. Сульфатные частицы в атмосфере могут оказать косвенное и прямое влияние на климатическую систему. Эти частицы формируются в разных частях атмосферы: в свободной тропосфере, в морском пограничном слое, в арктических областях и др. Численные эксперименты показывают, что новые сульфатные частицы могут нуклироваться и в стратосфере, а также в городском загрязненном воздухе [60, 83, 71, 50]. В большинстве из этих областей частицы образуются через процессы гомогенной нуклеации, например, нуклеация воды и серной кислоты и др.

Образование новых ядер из паров происходит в основном с помощью бинарной гомогенной нуклеации капель серной кислоты и воды. Скорость нуклеации  $J$  зависит от трех переменных: массовой концентрации кислоты в паровой фазе ( $c$ ), относительной влажности воздуха ( $Rh$ ) и температуры ( $T$ ). Частицы нуклеационной моды первоначально имеют субмикронный размер и могут расти как за счет конденсации низколетучих паров, так и за счет внутримодовой коагуляции. Пусть в атмосфере в пересыщенном паре при температуре  $T$  и давлении  $P_v$  имеется бинарный кластер состоящих из  $n_w$  молекулы вещества  $w$  и  $n_a$  молекул для  $a$ , с мольными фракциями  $x_{iv}$ ,  $i = w, a$ . Будем считать, что частицы имеют сферическую форму и находятся в жидкой фазе. Тогда свободную энергию для образо-

вания жидкого зародыша в бинарной смеси можно представить в следующем виде:

$$W = \Delta G = n_w \Delta \mu_w + n_a \Delta \mu_a + A \sigma,$$

где  $\Delta G$  — изменения свободной энергии Гиббса,  $A$  — площадь поверхности,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $\Delta \mu_i = \mu_{il}(T, P_v, x_{il}) - \mu_{iv}(T, P_v, x_{iv})$ , где  $\mu_{il}$  и  $\mu_{iv}$  — химические потенциалы в жидкой и паровой фазе, соответственно. При этом важно, что для пересыщенного пара функция  $\Delta G$  имеет максимум в точке с критическим радиусом  $r^*$ . Пар пересыщен по отношению ко всем каплям, у которых  $r > r^*$ . Состав критического кластера находится из решения следующего уравнения [22, 23]:

$$\nu_w(x^*) \ln \frac{\rho_a^{\text{free}}}{\rho_{a,s}^{\text{free}}(x^*)} = \nu_a(x^*) \ln \frac{\rho_w^{\text{free}}}{\rho_{w,s}^{\text{free}}(x^*)},$$

где  $\nu_a$  и  $\nu_w$  — парциальные молярные объемы кислоты и воды, соответственно,  $\rho_i^{\text{free}}$  — численная концентрация свободных молекул компоненты  $i$  в нуклеирующем паре,  $\rho_{i,s}^{\text{free}}$  — численная концентрация молекул компоненты  $i$  в насыщенном паре над раствором с серной кислотой с мольной фракцией серной кислоты  $x$ . Звездочка означает критический кластер. Серная кислота стремится образовывать в паровой фазе гидраты. Эти маленькие кластеры имеют отрицательную энергию образования, стабилизируют пар и замедляют нуклеацию.

Численная концентрация  $i$ -гидрата ( $\rho(1, i)$ ) вычисляется из следующего уравнения

$$\rho(1, i) = k_1 k_2 \cdot k_i \left( \frac{\rho_w^{\text{free}}}{\rho_0} \right)^i \rho_w^{\text{free}},$$

где  $\rho_0$ ,  $k_i$  — константы равновесия для последовательных добавлений молекул воды к молекулам кислоты. Эти значения зависят от температуры. Соотношение общей концентрации кислоты к концентрации свободных молекул кислоты в газовой фазе имеет вид

$$\frac{\rho_w^{\text{total}}}{\rho_w^{\text{free}}} = 1 + k_1 \frac{\rho_w^{\text{free}}}{\rho_0} + k_1 k_2 \cdots k_i \frac{\rho_w^{\text{free}}}{\rho_0} i + k_1 k_2 \cdots k_N,$$

где  $N$  — число молекул воды в большом гидрате,  $\rho_w^{\text{total}}$  — общая численная концентрация молекул серной кислоты в паровой фазе, включая те, которые связаны в гидратах.

Радиус критического кластера определяется из условия Кельвина

$$r^* = \frac{2\sigma(x^*)\nu_i(x^*)}{kT \ln \left( \rho_i^{\text{free}} / \rho_{i,1}^{\text{free}}(x^*) \right)},$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение раствора.

Работа образования кластера имеет вид

$$w^* = \frac{4}{3} \pi r^{*2} \sigma(x^*).$$

И, наконец, общее выражение для скорости нуклеации имеет следующий вид

$$J = Z\rho(1,2)\exp\left(-\frac{w^* - w(1,2)}{kT}\right),$$

где  $\rho(1,2)$ ,  $w(1,2)$  — численная концентрация и энергия образования дегидрата серной кислоты, соответственно, а  $Z$  — кинетический коэффициент. Произведение двух последних членов представляет собой равновесную концентрацию критического ядра. Здесь дегидрат используется как первоначальный размер (т.е. точка отсчета для распределений).

### 1.5. Численная модель кинетического уравнения конденсации

Флуктуационное зародышеобразование и дальнейший конденсационный рост частиц в пересыщенном паре является одним из наиболее важных процессов, приводящих к зарождению и развитию дисперсной фазы. При наличии инородных частиц в основном происходит поглощение пара частицами примеси — при этом достаточно лишь создать состояние пересыщения. Процесс конденсации носит динамический характер и изменение размеров капель должно описываться скоростями  $v_g = \partial g / \partial t$ , которые определяют баланс между увеличением и уменьшением числа молекул в капле  $g$ .

Тогда кинетическое уравнение для пространственно-однородного слоя примет вид [8, 56]

$$\frac{\partial \varphi(g,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial g} [V_g(g,t)\varphi g, t] = J(g,t), \quad (1.14)$$

где  $\varphi(g,t)$  — концентрация капель с массой  $g$  в момент времени  $t$  (спектр частиц),  $v_g$  — скорость конденсационного роста (испарения) капель с массой  $g$ , а  $J(g,t)$  — интенсивность источника флуктуационного зародышеобразования. Для вычисления  $V(g,t)$  используется следующая интерполяционная формула для произвольного режима столкновений:

$$V_g = \frac{\alpha \pi d^2 n v_T g^{2/3}}{4(1 + 3dg^{1/3}/8l_1)} \left( 1 - \exp \left\{ \frac{\lambda \theta}{kT} \left[ \frac{g_*^{1/3}}{g^{1/3}} - 1 \right] \right\} \right). \quad (1.15)$$

При больших  $g$ , а именно  $g \geq (1/d)^{1/3}$ , формула (1.15) дает скорость роста в диффузионном режиме, а при малых  $g_* \geq g \leq (1/d)^3$  — в свободномолекулярном.



Как и в [8, 56], численное решение уравнения (1.14) осуществляется на основе метода частиц. Для этого на каждом временном интервале  $[t^n, t^{n+1}]$  спектр  $\varphi(g, t)$  представим в виде

$$\varphi(g, t) = \sum_{i=1}^K N_{si}(t) \delta [g - g_{si}(t)] + N_{s,K+1}(t) \delta [g - g_{s,K+1}(t)], \quad (1.16)$$

при  $N_{s,K+1}(t = t^n) = 0$ . Исходя из этого представления  $\varphi(g, t)$  и используя уравнение (1.14), можно получить следующую систему уравнений для вычисления  $N_{si}, g_{si}$ :

$$\frac{dN_{si}}{dt} = 0, \quad 1 \leq K, \quad (1.17)$$

$$\frac{dg_{si}}{dt} = V_g(g_{si}), \quad 1 \leq K + 1, \quad (1.18)$$

$$N_{s,K+1}(t^{n+1}) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} J dt. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.18) описывает изменение размеров  $g_{si}$  модельных частиц за счет конденсации (или испарения), и его можно решать с помощью схемы Рунге–Кутты четвертого порядка, при этом  $N_{s,K+1}$  вычисляется из (1.19). При превышении некоторого наперед заданного числа  $k_g$ , из двух модельных частиц с номерами  $(2i, 2i - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k/2$ , образуется одна, с весом  $N_i = N_{2i-1} + N_{2i}$ .

Координаты соответствующей частицы вычисляются по формуле

$$g_i = \frac{g_i N_{2i-1} + g_{2i} N_{2i}}{N_{2i-1} + N_{2i}}.$$

Очевидно, что эта процедура сохраняет число частиц в системе, а также не изменяет массовую концентрацию конденсата. При расчетах кинетики конденсации на атмосферных частицах примеси часто используется аппроксимация в виде степенных спектров. При задании распределения по размеру модельных частиц нужно прежде всего определить способ разбиения интервала  $[r_{\min}, r_{\max}]$  на элементарные отрезки. После того как построены интервалы  $[g_i, g_{i+1}]$ , необходимо выбрать внутри каждого из них значение начальной координаты  $g_{0i}$ . Очевидно, что при этом должны вычисляться условия, гарантирующие совпадение суммарной счетной и массовой концентрации примеси с величинами, вычисляемыми по набору модельных частиц.

## 1.6. Численная модель коагуляции аэрозолей

Наиболее просто кинетическое уравнение формулируется для случая, когда коагулирующий объем изолирован от побочных процессов, а частицы равномерно распределены по объему. Будем считать, что система достаточно разрежена и слияние происходит только за счет парных столкновений, определяемых частотой слияния  $K(g, g_1)$  частиц с массами  $g$  и  $g_1$  в единице объема. Уравнение процесса коагуляции будет в этом случае иметь вид

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^g \tilde{K}(g - g_1, g_1) \varphi_{g-g_1} \varphi_{g_1} dg_1 - \varphi_g \int_0^\infty \tilde{K}(g, g_1) \varphi_{g_1} dg_1 + I(\varphi_g, t), \quad (1.20)$$

где  $g_1$  — текущая переменная (масса), по которой производится интегрирование,  $\varphi_g$  — концентрация частиц с массой, заключенной в интервале от  $g$  до  $g + dg$ ;  $\tilde{K}(x, y)$  — частота столкновения частиц с массами  $x$  и  $y$ ;  $I(\varphi_g, t)$  — интенсивность образования новых частиц с массой  $g$ . Этот член добавляется в правую часть (1.20). Первый член в правой части (1.20) описывает приход частиц в размер  $g$  за счет коагуляции меньших частиц, второй — уход частиц из размера  $g$  за счет коагуляции со всеми остальными частицами.

Предполагается, что сталкиваются частицы шарообразной формы и длина свободного пробега в газе-носителе намного больше их размера. В этом случае  $K(x, y)$  можно представить в следующем виде [79]:

$$\tilde{K}(x, y) = A(x^{1/3} + y^{1/3})(D_x + D_y)\beta_{xy}, \quad (1.21)$$

где  $D_x$  — коэффициент диффузии частицы массы  $x$ :

$$D_x = \frac{k_B T}{6\pi\eta R_x} \left[ 1 + Kn_x \left( A + Q \exp\left(-\frac{b_3}{Kn_x}\right) \right) \right], \quad (1.22)$$

$k_B$  — постоянная Больцмана;  $b_3$ ,  $A$ ,  $Q$  — эмпирические постоянные;  $A = 1.25$ ,  $Q = 0.4$ ,  $b_3 = 1.1$ . Фактор коррекции  $\beta_{xy}$  определяется из [79]:

$$\beta_{xy} = \left( \frac{R_x + R_y}{R_x + R_y + d_{xy}} + \frac{4(D_x + D_y)}{(V_x^2 + V_y^2)^{1/2}(R_x + R_y)} \right)^{-1}, \quad (1.23)$$

где

$$Kn_x = \frac{l_x}{R_x}, \quad d_{xy} = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}, \quad l_x = \frac{8D_x}{\pi V_x}, \quad V_x = \left( \frac{8kT}{\pi x} \right)^{1/2}, \quad x = \frac{4}{3}\pi R_x^3 \rho,$$

$$d_x = \frac{1}{6R_x l_x} ((2R_x + l_x)^3 - (4R_x^2 + l_x^2)^{3/2}) - 2R_x.$$

Здесь  $D_x$  — коэффициент диффузии частицы  $i$  с радиусом  $R_x$ ;  $T$  — температура;  $l_x$  — средняя длина пробега;  $V_x$  — средняя скорость частицы;  $x$  — масса частицы;  $\rho$  — плотность частицы;  $\eta$  — вязкость газа.

Введем по переменной  $g$  сетку узлов  $g_i$  с числом частиц в интервале  $(g_i, g_{i+1})$ :

$$N_i = \int_{g_i}^{g_{i+1}} \varphi(g, t) dg, \quad (i = \overline{1, J-1}).$$

При выводе уравнений для величин  $N_i$  умножим уравнение (1.20) на  $g$  и проинтегрируем по интервалу  $(g_i, g_{i+1})$ . Такой подход позволяет получить систему уравнений, обеспечивающую автоматический баланс массовой концентрации  $M$  при различных аппроксимациях решения. Используя при вычислении интегралов квадратурные формулы, можно для величин  $N_i$  получить систему ОДУ вида

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^i \sum_{k \leq i} a_{jk}^i N_j N_k - N_i \sum_{j=1}^{J-1} N_j b_{ij}, \quad (1.24)$$

где коэффициенты  $a_{jk}^i, b_{ij}$  выражаются через интегралы, зависящие от оператора, описывающего частоту столкновений частиц (ядра коагуляции). Для численного решения уравнения (1.24) (как и уравнения (1.18)) используется численная схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Использование схемы высокого порядка точности для этих уравнений обусловлено тем, что счетная концентрация частиц с малыми и большими радиусами отличается на 4–5 порядков. Поэтому небольшие погрешности в счетных концентрациях частиц с большими радиусами могут привести к заметному нарушению закона сохранения массы в системе в целом.

Далее, задача адвективного переноса решается с помощью конечно-разностной аппроксимации, имеющей второй порядок точности по пространству и времени и обладающей свойствами монотонности и консервативности [80, 33].

Уравнение турбулентной диффузии решается по методу покомпонентного расщепления. Уравнение фотохимической трансформации решается методом ОДУ [63, 23].

## 1.7. Миграция примесей в почве

Предполагая стационарность и однородность по глубине характеристик почв, газовый поток примесей можно представить в виде [68]:

$$I_g = -\xi_g(a) D_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial z}, \quad (1.25)$$

где  $a = \Phi - \Theta$ ;  $D_g$  — коэффициент двойной диффузии на глубине  $z$ ;  $\xi_g(a) = a^{1/3}/\Phi^2$ .

Подобным образом в водной фазе поток имеет вид

$$I_{Ld} = -\xi_L(\theta)D_L \frac{\partial \varphi_L}{\partial z}. \quad (1.26)$$

Используя (1.25)–(1.26) и эффективный коэффициент диффузии, поток примесей будет представлен таким образом:

$$I_g + I_{Ld} = - \left( \frac{\xi_g D_g}{R_g} + \frac{\xi_L D_L}{R_L} \right) \frac{\partial \varphi_T}{\partial z} = -D_E \frac{\partial \varphi_T}{\partial z}, \quad (1.27)$$

где  $D_E$  — эффективный коэффициент диффузии для системы газ–вода.

Конвективный поток, как и в [68], имеет вид

$$I_w \varphi_L = V_E \varphi_T, \quad (1.28)$$

где  $V_E = I_w/R_L$  — скорость растворения.

Теперь полный поток ( $I_T$ ) в почве будет:

$$I_T = V_E \varphi_T - D_E \frac{\partial \varphi_T}{\partial z}. \quad (1.29)$$

Используя (1.25)–(1.29), уравнение для миграции примесей в почве примет вид

$$\frac{\partial \varphi_T}{\partial t} = - \frac{\partial I_T}{\partial z} + S_s(z), \quad (1.30)$$

где  $S_s(z)$  описывает источники и стоки на уровне  $z$ .

Аналогично определяется и миграция примеси в квазиоднородном слое океана (водного бассейна).

## 1.8. Влажное осаждение

Удаление паров (например, серной кислоты) из атмосферы осадками характеризуется отношением вымывания  $W_{sc}$ . Молекулы газа, войдя в каплю, растворяются так быстро, что этот процесс можно считать мгновенным, учитывая пространственно-временные масштабы изучаемой задачи (если примеси имеют высокую гигроскопичность). Поскольку константа Генри  $K_H$  обратно пропорциональна отношению вымывания ( $K_H = 1/W_{sc}$ ), то равновесное разделение газовой ( $\varphi_{a,g}$ ) и жидкофазной ( $\varphi_{a,w}$ ) составляющих концентрации паров серной кислоты имеет вид

$$\varphi_{a,g} = K_H \varphi_{a,w}. \quad (1.31)$$

Изменения во времени концентрации паров серной кислоты представим в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi_{a,g}}{\partial t} = \frac{R_i W_{sc} (\varphi_{a,g} - \varphi_u)}{\Delta z_a}, \quad (1.32)$$

где  $R_i$  — интенсивность дождя;  $\varphi_u$  — концентрация на уровне, расположенном непосредственно над отсчитываемым слоем, принимается константой за один шаг по времени. При этих предположениях уравнение (1.32) решается аналитически:

$$\varphi_{a,g} = \varphi_u (1 - e^{-\alpha t}) + \varphi_{a,g}^0 e^{-\alpha t}, \quad (1.33)$$

где  $\alpha = RW_{sc}/\Delta z_a$ ,  $\varphi_{a,g}^0$  — концентрация при  $t = t_0$ . Поэтому поток влажного осаждения имеет вид

$$F_i = R_i \varphi_{a,w}. \quad (1.34)$$

### 1.9. Оптимизационные задачи по регулированию мощности источников

Поскольку многие газовые примеси и аэрозоли так или иначе приводят к загрязнению окружающей среды, возникает проблема уменьшения их негативного воздействия. Здесь приводятся некоторые задачи оптимизации по регулированию мощности источников с целью уменьшения ущерба, наносимого окружающей среде.

Для решения такого класса задач используется совместная модель гидротермодинамики мезомасштабных атмосферных процессов, переноса и диффузии газовых примесей и модели оптимизации по регулированию мощности источников с использованием аппарата линейного и нелинейного программирования.

Задача оптимизации может быть сформулирована по-разному. Чаще всего она состоит в минимизации функционала от поля концентрации с учетом внешних ограничений. Такими ограничениями могут быть, например, ограничения на предельно допустимые нормы загрязнения, технологические ограничения, не позволяющие предприятиям неограниченно снижать мощность выбросов, ограничения, налагаемые экономическими факторами, такими, как тот факт, что затраты на внедрения технологии, обеспечивающей снижение выброса, не должны превышать суммы дисконтированной прибыли данного предприятия.

В данной работе делается попытка решить такие задачи с помощью математического аппарата линейного программирования. Регулирующий орган управляет вредными выбросами  $N$  предприятий, минимизируя ущерб в неких охраняемых областях, ограничивая ущерб в остальной области

неким допустимым максимумом и позволяя этому ущербу быть выше допустимого минимума.

Ущерб в области считается зависимым от суммарного количества вредных примесей, выпавших в данной области за данный промежуток времени. Если ущерб считается линейно зависящим от такой суммарной концентрации, то задача линейного программирования приводит к решению, при котором в оптимуме одно из предприятий обязательно должно было быть закрыто.

В большинстве случаев зависимость ущерба от суммарной концентрации имеет более сложный вид, и его вторая производная больше нуля. Этот вопрос широко обсужден в [5].

Покажем на простом примере, почему может оказаться, что ущерб нелинейно зависит от концентрации загрязняющих веществ. Пусть над некоторым лесом площадью  $S$  одновременно выпало  $Q$  вредных веществ. При этом пусть из-за этих "осадков" вымирает  $\alpha Q$  леса. Ущербом естественно будет называть затраты на восстановление утраченного леса. Допустим, что эти затраты пропорциональны времени, необходимому на восстановление леса. Найдем это время, в предположении, что лес растет в геометрической прогрессии с фактором  $\delta = 1 + \beta$ , из условий:

$$S = S(1 - \alpha Q)(1 + \beta)^t, \quad t = \frac{\ln \frac{1}{1 - \alpha Q}}{\ln(1 + \beta)}. \quad (1.35)$$

Так, например, если в результате загрязнения было поражено 20 % леса ( $\alpha Q = 0.2$ ), а лес растет со скоростью  $\delta = 1.1$ , то из (1.35) следует, что время, требуемое для восстановления, будет 2.34 года; если поражено 50 % леса, то время для его восстановления составит уже 7.27 лет.

Следует заметить, что характер поражения растительности также имеет зависимость более сложную, чем  $\alpha Q$ , а именно, выпуклую вниз, следовательно, необходимо ожидать еще более выпуклую вниз зависимость ущерба от концентрации загрязняющих веществ. Статистические данные также подтверждают подобный вид функции ущерба [5].

### 1.9.1. Задача линейного программирования

Рассмотрим оптимизационную задачу управления мощностью выбросов загрязняющих примесей по заданным критериям и ограничениям экологического и экономического характера. Для конкретности в качестве критерия оптимальности выберем условие минимизации величины ущерба, наносимого загрязнениями территории региона (на примере озера Байкал и окружающего его региона). Пусть в области  $D_t$  находятся  $n$  источников примесей с концентрациями  $\varphi_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) и с мощностью выбросов  $Q_i$ , ( $i = \overline{1, n}$ ). В этой же области имеется зона экологического контроля,

которую обозначали через  $G$  и условно назовем "экологически значимой зоной". Рассмотрим следующие функционалы:

$$\alpha_i^c = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_G p_i \varphi_i(\mathbf{x}, t) dG, \quad \alpha_i = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_D p_i \varphi_i(\mathbf{x}, t) dD, \quad (1.36)$$

характеризующие суммарную концентрацию примесей в зоне  $G$  и во всей области  $D$ , где  $\varphi_i$  — концентрация примесей, полученная из решения задачи с источником единичной мощности, расположенным в точке  $\mathbf{x}_i$ ,  $p_i$  — весовая функция. Составляющие ущерба, наносимого источником с номером  $i$  в экологически значимой зоне и во всей области, представим в виде

$$\alpha_i^c = \alpha_i^c f_1(\varphi), \quad \alpha_i = \alpha_i f_2(\varphi), \quad (1.37)$$

где  $f_1(\varphi)$  и  $f_2(\varphi)$  являются заданными функциями от суммарной концентрации. Следовательно, общий ущерб можно представить в виде [23]:

$$Y^c = \sum_{i=1}^n \alpha_i^c Q_i (1 - e_i) - \text{в экологически значимой зоне } G, \quad (1.38)$$

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i (1 - e_i) - \text{во всей области } D, \quad (1.39)$$

где  $e_i (i = 1, n)$  — коэффициенты относительного снижения мощности источников.

Задача оптимизации заключается в нахождении вектора  $\mathbf{e} = e_i$ , доставляющего минимум функционалу

$$Y^c = \sum_{i=1}^n \alpha_i^c Q_i (1 - e_i) \rightarrow \min_{e_i} \quad (1.40)$$

при ограничениях

$$0 \leq e_i \leq 1, \quad (1.41)$$

$$k_1 Y_0 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i Q_i (1 - e_i) \leq k_2 Y_0, \quad (1.42)$$

где  $k_1, k_2$  — коэффициенты, характеризующие необходимое сокращение ущерба. После нахождения коэффициентов  $e_i$ , допустимые мощности источников  $\underline{Q}_i$  вычисляются по формуле  $\underline{Q}_i = Q_i (1 - e_i)$ . Основными критериями для управления являются условия минимизации ущерба в зоне  $G$  и ограничения ущерба в области  $D$ , т.е. по всей территории региона. Начальные мощности источников нормированы на мощность источника с номером 1.

Заметим, что в задачах, связанных с оценками экологической безопасности, допустимые антропогенные нагрузки необходимо рассчитывать при ограничениях на концентрации загрязняющих примесей, обеспечивающих соответствующее качество природной среды в каждой точке области  $D_t$ . В этом случае система ограничений (1.41) и (1.42) дополняется совокупностью ограничений локального и интегрального характера, задаваемых непосредственно для концентраций загрязняющих веществ от всех источников, включая продукты трансформации. Следует отметить, что при решении задач управления не учитывалась степень токсичности примесей. Расчеты по этой модели проводились для Байкальского региона [23, 34, 25].

### 1.9.2. Задача нелинейного программирования

Рассмотрим случай когда зависимость ущерба от суммарной концентрации является квадратичной. В этом случае задача оптимизации приводит к решению, при котором в оптимуме выпуск предприятий остается ненулевым. Во многих случаях зависимость ущерба от суммарной концентрации вредных веществ является функцией, выпуклой вниз.

Как известно, реальный ущерб редко имеет линейную зависимость от суммарной концентрации вредных веществ, выпавших за длительный период времени. Как правило, эта зависимость имеет более сложный вид, где вторая производная по суммарной концентрации больше нуля.

Ущерб, наносимый загрязнением воздушного бассейна, в основном возникает за счет воздействия вредных веществ на сельское и лесное хозяйства, повышения износа основных фондов и ухудшения здоровья населения.

Для удобства дальнейшего изложения будем считать функцию ущерба квадратично зависящей от суммарной концентрации, выпавшей за период времени. Действительно, любую функцию, выпуклую вниз, можно аппроксимировать квадратичной функцией с положительным коэффициентом при квадратичном члене. Итак, функция ущерба в охраняемой зоне  $D$  будет иметь вид [4, 53, 25]:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i Q_i)^2,$$

а ущерб в остальной области  $G$  будет равен

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i Q_i)^2.$$

Заметим, что из-за весовой функции  $p(x, y)$ , содержащейся в коэффициентах  $\beta_i$ , коэффициенты  $\beta_i^2$  при  $Q_i^2$  в функции ущерба области  $G$  в десятки и сотни раз превосходят коэффициенты  $\alpha_i^2$ .



Поэтому аппроксимируем квадратичную функцию ущерба в области  $G$  линейной функцией методом наименьших квадратов. Таким образом, вместо набора коэффициентов  $\beta_i$ , получим набор соответствующих им коэффициентов  $\bar{\beta}_i$ . Задачу минимизации ущерба (1.36)–(1.42) теперь можно переписать в виде [4]:

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i Q_i)^2 \rightarrow \min_{Q_i} \quad (1.43)$$

при условиях:

$$0 < Q_i < \bar{Q}_i, \quad (1.44)$$

$$kY_0 \leq \sum_{i=1}^n \bar{\beta}_i Q_i \leq Y_0. \quad (1.45)$$

Задачи такого вида называют задачами квадратичного программирования, и для их решения существует множество методов и программ [17]. Здесь используется программа для решения задач квадратичного программирования, основанная на методе Вульфа. Суть этого метода заключается в том, что для исходной задачи нелинейного программирования вида

$$Q(x) = p^T x + x^T C x \rightarrow \min \quad (1.46)$$

при условии, что

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

строится задача линейного программирования, решение которой совпадает с решением задачи (1.40). Для этого вводится новый вектор переменных  $\mathbf{u}$  размерности  $k$ , где  $k$  — количество ограничений матрицы  $A$ . Получаемая задача линейного программирования выглядит следующим образом:

$$I_n x + I_k u \rightarrow \min, \quad (1.47)$$

при условии, что

$$2Cx + A^T u > p, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

где  $I_n$  и  $I_k$  — квадратные единичные матрицы порядка  $n$  и  $k$ , соответственно. Полученная задача линейного программирования решается обычным симплекс-методом. С использованием этой модели проводились численные эксперименты для г. Москвы и окружающего его региона [4].

## 1.10. Результаты численных экспериментов

Приведем несколько результатов численных экспериментов по моделям, разрабатываемым в ИВМ РАН. Были проведены численные эксперименты по моделированию эпизода фотохимического загрязнения атмосферы в регионе Хьюстон–Гальвестон (ХГ) с использованием базы данных

ТехАQS-2000 за период с 25 августа по 1 сентября 2000 г. В численных экспериментах использованы данные выбросов из точечных и площадных источников для следующих веществ: NO, NO<sub>2</sub>, OLE, PAR, TOL, XYL, FORM, ALD2, ETH, МЕОН, ЕТОН, ISOP, SO<sub>2</sub> и CO. Значения эмиссий из точечных источников были заданы на сетке для двух областей: для области X = 1620 км, Y = 1656 км с шагами 36 км по обоим направлениям и для региона ХГ (X = 332 км, Y = 260 км) с шагами 4 км, а по вертикали — до 2 км.

Значения концентраций рассматриваемых веществ на боковых границах малой области для каждого шага по времени определялись с помощью линейной интерполяции из решения, полученного для большой области. Для рассматриваемого региона накоплены данные натуральных измерений среднечасовых концентраций озона в 34 точках. На рис. 1 приведены среднечасовые значения концентраций озона по результатам модельных расчетов в сопоставлении с данными наблюдений в двух различных точках в течение семи дней. Рисунок показывает достаточно хорошее соответствие между расчетными и экспериментальными данными. Примерно такое же согласие между измеренными данными и численными результатами и в других точках.

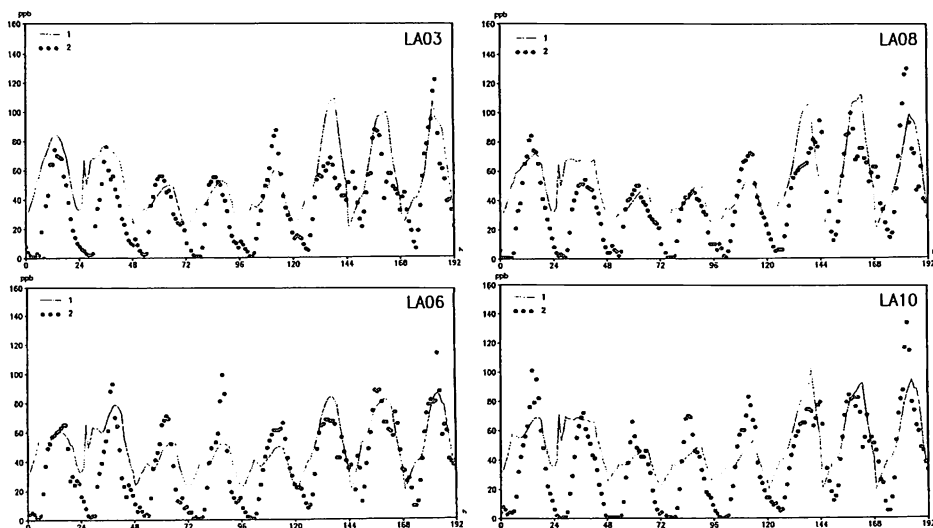


Рис. 1. Сопоставление среднечасовых концентраций озона по результатам модельных расчетов (сплошные линии) с данными наблюдений (точки) в 4 различных точках в течение 8 дней

Были проведены также комплексные численные эксперименты по моделированию пространственно-временной изменчивости газового и аэрозольного состава атмосферы в Байкальском регионе с учетом следующих про-

цессов: динамики атмосферы, переноса и трансформации газовых примесей и аэрозолей, нуклеации, конденсации-испарения и коагуляции. Сначала из гидродинамической модели получают характеристики атмосферной циркуляции и далее решается задача переноса примесей с учетом фотохимической трансформации и кинетических процессов аэрозолеобразования.

Приведем результаты численных экспериментов, проведенных для следующих входных параметров: область моделирования по горизонтали размером 600x600 км, с шагом 10 км, высота области по вертикали — 2050 м от поверхности земли, количество вертикальных узлов — 20 ( $\Delta z = 50$  м, если  $z \leq 100$  м;  $z \leq 75$  м, если  $100 \leq z \leq 250$  м;  $\Delta z = 100$  м, если  $250 \leq z \leq 1450$  м;  $\Delta z = 150$  м, если  $1450 \leq z \leq 2050$  м);  $\Delta t = 600$  сек. Начальное время моделирования соответствовало 6 ч местного времени. В экспериментах задавалось следующее направление фонового потока:  $U_b = 4$  м/с,  $V_b = 0$  на верхней границе атмосферы при  $z = 2050$  м.

На приводимых ниже рисунках представлена схематическая карта Байкальского региона, где кружочками отмечены источники выбросов от крупных объектов промышленности: Иркутск (НИТЭЦ, РК Новоленино), Ангарск (ТЭЦ-1, ТЭЦ-9, ТЭЦ-10), Шелехово (ТЭЦ-5), Усолье (ТЭЦ-11), Байкальск. По заданным значениям мощностей источников по выбросам  $SO_2$ ,  $NO_x$  и  $CO$  проводились численные эксперименты по воспроизведению пространственно-временной изменчивости газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. Расчеты проводились одновременно в рамках единой модели по следующей последовательности. По модели гидротермодинамики моделировался характер атмосферной циркуляции в рассматриваемом регионе и вычислялись поле течения и турбулентные характеристики. На фоне полученной атмосферной циркуляции решалась задача переноса газовых примесей с учетом фотохимической трансформации, в результате чего образуются пары серной кислоты  $H_2SO_4$ . Далее рассматривались процессы образования нуклеационной моды по механизму бинарной гомогенной нуклеации в системе  $[H_2O - H_2SO_4]$ . И, наконец, была смоделирована динамика аэрозольных частиц с учетом кинетических процессов конденсации/испарения и коагуляции. Модель позволяет рассматривать распространение паров серной кислоты с учетом конденсации/испарения как на естественных аэрозольных спектрах (например, Юнге), так и при конденсации на частицах, возникших в процессе бинарной гомогенной нуклеации. Далее спектр этих частиц деформируется из-за процесса коагуляции. При этом рассматривается 30 интервалов для спектра размеров аэрозольных частиц в диапазоне 0.1–5.0 мкм.

На рис. 2–4, темными кружочками показаны локальные источники загрязнения ( $SO_2$ ,  $NO_x$  и  $CO$ ). На рис. 2 представлено поле концентрации  $H_2SO_4$  для момента времени  $t = 14$  ч. На рис. 3 приведено поле скорости нуклеации. Формирование частиц новой фазы может происходить

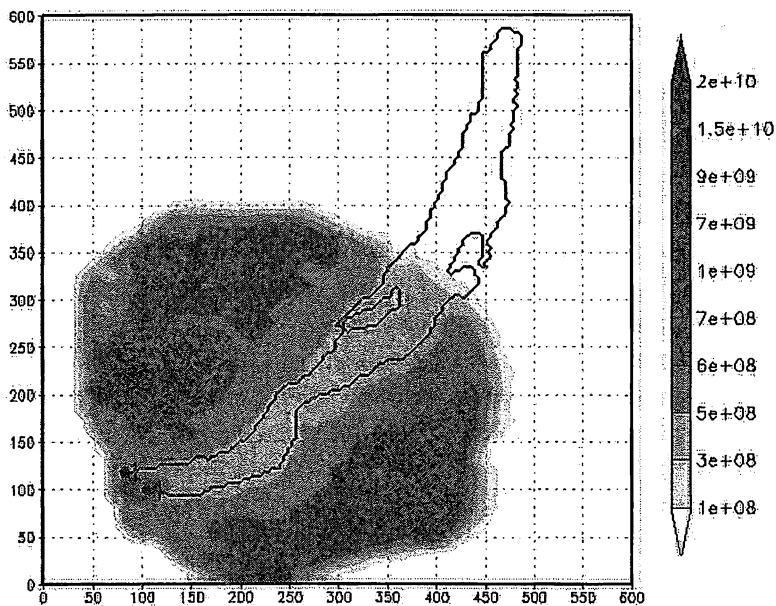


Рис. 2. Поле концентрации  $H_2SO_4$  для момента времени  $t = 14$  ч. в плоскости  $(x, y)$  на высоте  $z = 300$  м

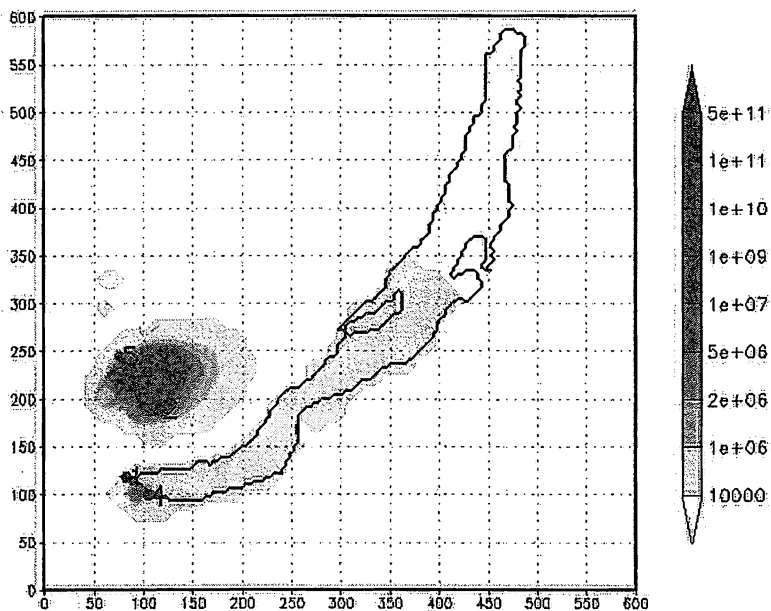


Рис. 3. Поле скорости бинарной нуклеации для момента времени  $t = 14$  ч. в плоскости  $(x, y)$  на высоте  $z = 300$  м

лишь тогда, когда концентрация паров серной кислоты превышает пороговое значение. Как показывают расчеты, концентрация паров серной кислоты в Байкальском регионе превышает пороговое значение, что способствует образованию мельчайших аэрозольных частиц.

На рис. 4 представлено изменение спектра частиц с учетом коагуляции и конденсации для частиц с радиусом  $0.1 \mu m$  (рис. 4а) и  $0.915 \mu m$  (рис. 4б) для периода моделирования 24 ч. и высоты 300 м. Расчеты про-

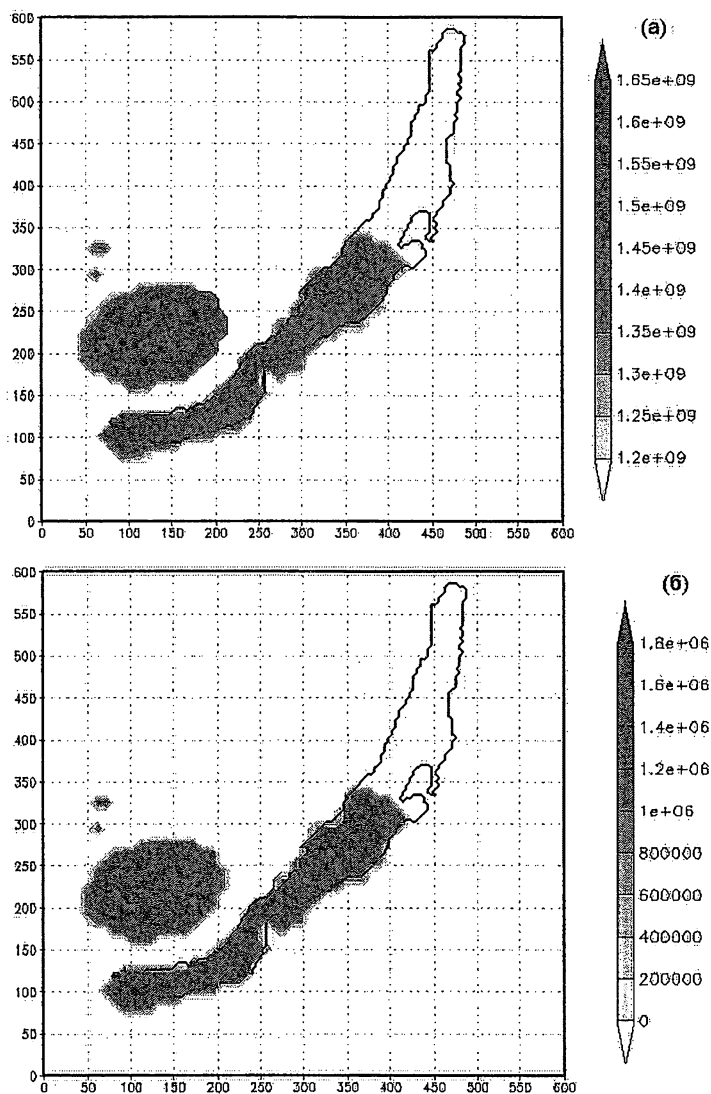


Рис. 4. Спектр аэрозольных частиц с учетом коагуляции и конденсации а — для частиц с радиусами  $0.1 \mu m$ , б — для частиц с радиусами  $0.915 \mu m$  для периода моделирования 24 ч. и высоты 300 м

водились для 30 спектральных интервалов. Результаты расчетов показывают существенную пространственно-временную неоднородность счетной концентрации частиц различных размеров, обусловленная как атмосферной циркуляцией, так и кинетическими процессами аэрозолеобразования.

Получены также концентрации различных газовых примесей с учетом их фотохимической трансформации (все поля здесь и ниже приведены для высоты 225 м). На рис. 5 представлено поле концентрации  $O_3$  для момента времени  $t = 14$  ч.

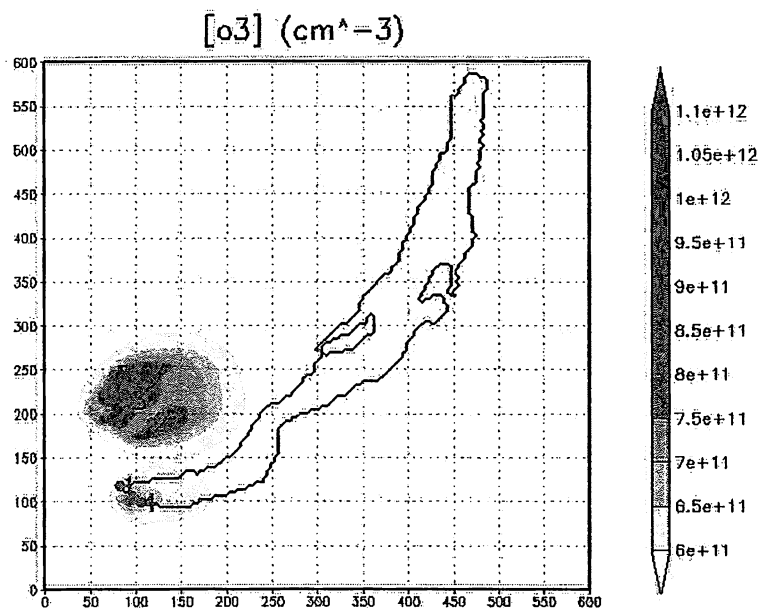


Рис. 5. Поле концентрации озона для момента времени  $t = 14$  ч. в плоскости  $(x, y)$  на высоте  $z = 300$  м

На базе региональной модели аэрозольной динамики построена также глобальная модель формирования сульфатного аэрозоля в Северном полушарии, записанная в сферической системе координат. При этом использовалась расчетная сетка с узлами  $144 \times 72 \times 15$  (высота верхней границы области составляет 9.2 км). Численные эксперименты проводились на основе метеорологической информации, восстановленной в Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды. Источником газовых примесей являются глобальные значения эмиссий  $SO_2$ ,  $NO_x$  и  $CH_4$  от источников, заданных на поверхности земли [57, 78]. В качестве иллюстрации на рис. 6 приводится поле численной концентрации частиц с радиусом  $r = 0.11 \mu m$  после 30 дней моделирования. Как видно из рис. 6, поле концентрации аэрозоля обладает существенной пространственно-временной изменчивостью, обусловленной изменчивостью поля влажности, концентрации паров серной кислоты

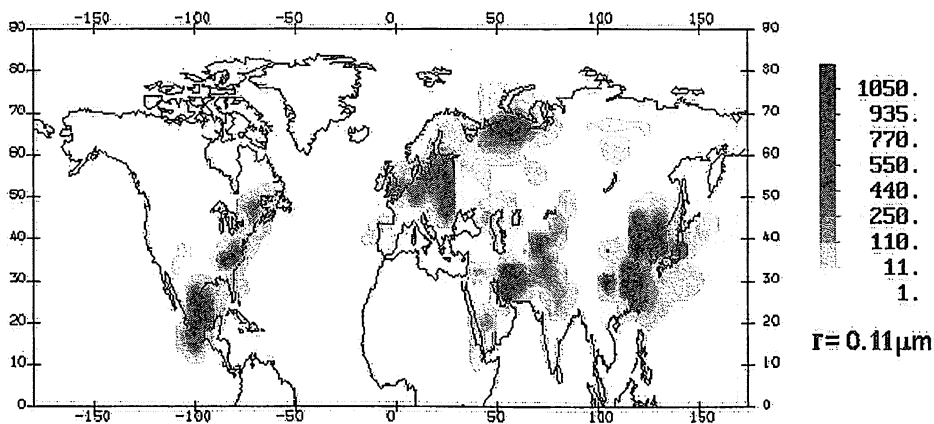


Рис. 6. Поле численной концентрации сульфатных частиц с радиусом  $r = 0.11 \mu\text{m}$  после 30 дней численного расчета с использованием глобальной модели динамики аэрозолей в северном полушарии

и температуры. Таким образом, данная модель может быть использована для изучения глобальной динамики сульфатного аэрозоля и образования конденсационных следов в атмосфере.

Теперь приведем некоторые результаты численных расчетов, проведенных по модели оптимизации управления мощности источников, в предположении, что ущерб линейно зависит от концентрации примеси [23]. Основным критерием является условие минимизации ущерба на акватории озера Байкал и ограничения ущерба на всей территории региона. В расчетах, кроме указанных источников, учитываются два новых источника, расположенных в восточной части озера Байкал (Улан-Уде, Гусиноозерск). Расчеты проводились для 4 преобладающих направлений фонового потока (СЗ, ЮВ, СВ, ЮЗ).

Получены значения коэффициентов регулирования источников в результате решения задачи минимизации ущерба на акватории озера Байкал, при условиях снижения ущерба во всем регионе на 10, 50, 80 %, соответственно. Для рассматриваемых ситуаций загрязнения оказались наиболее чувствительными к интенсивности источников 3 и 4. Четвертый источник расположен ближе всех к акватории озера, и требуется убрать его совсем. Третий источник необходимо регулировать при всех ситуациях. Для 50-процентного сокращения ущерба необходимо уменьшить выбросы на 65 %; для 80-процентного сокращения ущерба — отключить. Причина заключается в том, что его мощность существенно больше мощностей остальных источников, и локальная циркуляция атмосферы способствует накоплению примесей над озером. Наименее опасными являются остальные источники: их вклад в загрязнение акватория незначителен.

Аналогичные численные эксперименты проводились для Московской области с использованием численного аппарата нелинейного программирования. Эти результаты детально изложены в работах [4, 25]. В отличие от примера, приведенного для Байкальского региона, где полагалась линейная зависимость ущерба от загрязнения, в этом примере ущерб зависит от центрации нелинейно. В результате показано, что ни один из источников не может быть закрыт полностью. Эти результаты имеют сугубо модельный характер. Однако при наличии оперативных данных на длительный срок, а также точного подсчета зависимости экономического ущерба от суммарного загрязнения, модель может быть применима к реальным условиям.

## 2. Системная организация моделирования для задач охраны окружающей среды

Постановки задач в области охраны окружающей среды весьма многообразны, поскольку сам раздел науки находится на стыке многих дисциплин: физики, химии, экологии, биологии, экономики, математики и др. Здесь мы представим разрабатываемый нами математический аппарат, предназначенный для объединения разнородных знаний в согласованный комплекс.

### 2.1. Принципы построения численных моделей переноса и трансформации газовых примесей и аэрозолей в атмосфере

Как уже отмечалось, для решения природоохранных задач нам нужны следующие основные элементы: модели процессов, модели измерений и функционалы для организации методов моделирования, усвоения данных наблюдений, экологического прогнозирования и проектирования.

Для описания процессов и их математических моделей введем три типа объектов:

- функции состояния  $\vec{\varphi} = \{\varphi_i, i = \overline{1, n}\} \in Q(D_t)$ ,
- параметры моделей  $\vec{Y} = \{Y_i, i = \overline{1, N}\} \in R(D_t)$ ,
- сопряженные функции  $\vec{\varphi}^* = \{\varphi_i^*, i = \overline{1, nc}\} \in Q^*(D_t)$ ,  $nc \geq n$ .

Здесь  $D_t$  — область изменения пространственно-временных координат,  $D_t = D \times [0, \bar{t}]$ ;  $D$  — область изменения пространственных координат  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , а  $[0, \bar{t}]$  — интервал изменения времени  $t$ ;  $Q(D_t)$  — пространство функций состояния, удовлетворяющих краевым условиям на границе  $\Omega_t$  области  $D_t$ . Область  $D$  рассматривается в трех вариантах так, чтобы область изменения горизонтальных координат представляла собой сферу,



полусферу или ограниченные территории на сфере. На ограниченной территории граница области  $D$  имеет представление  $\Omega = \Omega_\delta \cup \Omega_0 \cup \Omega_h$ , где  $\Omega_\delta$  — боковая,  $\Omega_0$  — нижняя и  $\Omega_h$  — верхняя границы области. Аналогично описывается и  $\Omega_t$ . Функциональное пространство  $Q^*(D_t)$  сопряжено по отношению к пространству функций состояния  $Q(D_t)$ ,  $R(D_t)$  — область допустимых значений параметров.

Структуры соответствующих друг другу компонентов вектор-функций  $\vec{\varphi}$  и  $\vec{\varphi}^*$  идентичны, хотя информационное содержание их различно. В наших построениях сопряженные функции можно интерпретировать как обобщенные множители Лагранжа. В зависимости от целей исследований их число может быть больше, чем число функций состояния. Они вводятся для построения вариационного принципа, чтобы при исследовании поведения целевых функционалов в пространствах функций состояния и параметров учесть все модели как ограничения и взаимосвязи между параметрами и функциями состояния. С их участием реализуются прямые и обратные связи от функционалов и данных наблюдений к моделям и их входным параметрам.

В качестве вертикальной координаты  $x_3$  обычно берется высота  $z$  или давление  $p$ . На их основе строятся соответствующие модификации координат, следящие за рельефом поверхности Земли. Мы предпочитаем для описания вертикальной структуры моделей использовать принцип декомпозиции по областям [35]. Область  $D$  условно разбивается на 2 слоя: "свободная" атмосфера  $D_1(p_T \leq p \leq p_B)$  и нижний слой, включающий пограничный и приземный,  $D_2(p_B \leq p \leq p_S(\vec{x}, t))$ , где  $p$  — давление,  $p_S, p_B, p_T$  — давление на поверхности Земли, на границе раздела слоев и на верхней границе атмосферы. Введем гибридную систему координат, позволяющую объединить преимущества реализации моделей в изобарических координатах в свободной атмосфере (в случае постоянных  $p_B, p_T$ ) с удобствами сигма-координат для учета рельефа поверхности Земли ( $x_3 = \sigma$ ):

$$\begin{aligned} \sigma &= (p - p_T)/\pi, & \pi &= (p_B - p_T)/\varepsilon & \text{в } D_1; \\ \sigma &= (p - p_S)/\pi + \varepsilon, & \pi &= (p_S - p_B)/(1 - \varepsilon) & \text{в } D_2. \end{aligned}$$

Параметр  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ) вводится так, чтобы поверхность  $p = p_B$  была выше уровня "модельного" рельефа поверхности Земли. Аналогичные построения осуществляются и в том случае, когда вместо давления используется высота.

Интересующие нас процессы описываются моделями гидротермодинамики в климатической системе, моделями переноса и трансформации влаги, химически и оптически активных загрязняющих примесей в газовом и аэрозольном состояниях. Функции источников в моделях параметрически учитывают действия естественных и антропогенных факторов. Чтобы

рассматривать совместно модели процессов и систему мониторинга с целью организации между ними взаимодействия в режиме прямых и обратных связей, будем предполагать, что все элементы комплекса (модели и наблюдения) могут содержать неопределенности и ошибки. В этом случае естественно ставить вопрос о конструировании алгоритмов для реализации таких связей, исходя из условий минимизации некоторой суммарной меры неопределенностей и ошибок. Таким образом, для решения комплексных задач в области окружающей среды необходимо разработать ряд конструктивных математических моделей, позволяющих решать как прямые, так и обратные задачи.

## 2.2. Постановка задачи

Общую структуру моделей для данного класса задач можно записать в следующей операторной форме:

$$L(\vec{\varphi}) \equiv B \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + G(\vec{\varphi}, \vec{Y}) - \vec{f} - \vec{r} = 0, \quad (2.1)$$

где  $B$  — диагональная матрица,  $G(\vec{\varphi}, \vec{Y})$  — нелинейный матричный дифференциальный оператор, основным элементом в нем — адвективно-диффузионные операторы, действующие на различные компоненты функций состояния;  $\vec{f}$  — функции источников,  $\vec{r}$  — ошибки моделей. Операторы переноса в моделях процессов симметризуются с помощью уравнения неразрывности [28].

В настоящей работе не преследуются цели детального описания всех элементов комплекса и способов построения алгоритмических конструкций. Их различные аспекты можно найти в работах [20, 21, 22, 28, 33]. Рассмотрим только те модели из комплекса моделей климатито-экологической системы, которые непосредственно связаны с процессами распространения тепла, влаги, излучения и переноса и трансформации оптически и химически активных субстанций в атмосфере

$$L(\vec{\varphi}) \equiv \frac{\partial \pi \varphi_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\pi(\varphi_i \vec{u} - \mu_i \operatorname{grad} \varphi_i)) + \pi(H(\vec{\varphi}))_i - \pi(f_i + r_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\vec{\varphi} = \{\varphi_i(\vec{x}, t), \quad i = \overline{1, n}\} \in Q(D_t)$  — вектор-функция состояния, ее компоненты  $\varphi_i$  описывают потенциальную температуру, отношения смеси для характеристик влажности в атмосфере (водяной пар, облачная вода, дождевая вода, снег и ледовые кристаллы), концентрации загрязняющих примесей в газовом и аэрозольном состояниях,  $\vec{f} = \{f_i(\vec{x}, t), \quad i = \overline{1, n}\}$  — функции источников тепла, влаги и примесей,  $r_i$  — функции, описывающие неопределенности и ошибки моделей,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скоро-

сти,  $\mu_i = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}_i$  — коэффициенты турбулентного обмена для субстанции  $\varphi_i$  в направлении координат  $\vec{x} = \{x_i, i = \overline{1, 3}\}$ ,  $H(\vec{\varphi})$  — нелинейный матричный оператор, который описывает локальные процессы трансформации соответствующих субстанций. Функции, описывающие источники примесей, имеют вид  $f_i(\vec{x}, t) = \sum_{k=1}^{k_i} Q_{ik}(1 - e_{ik})\omega_{ik}(\vec{x}, t)$ . Здесь  $e_{ik}$  — параметры регулирования,  $Q_{ik}$  — мощности источников,  $\omega_{ik}$  — конфигурация источников,  $k_i$  — количество источников примесей. Все необходимые элементы гидродинамического фона для моделей (2.2) рассчитываются по соответствующим моделям динамики атмосферы, согласованным с (2.2) в рамках вариационного принципа на уровне интегральных тождеств и их сумматорных аналогов. Функции  $\vec{u}$ ,  $\mu_i$ ,  $f_i$  и входные данные начальных и краевых условий включаются в совокупность компонент вектора параметров  $\vec{Y}$ .

Для учета процессов образования аэрозолей и их трансформации в области  $D_t$  вводится еще одна переменная — размер частиц, и в оператор трансформации добавляются новые члены, имеющие интегро-дифференциальную структуру. В этом случае система уравнений трансформации и взаимодействия многокомпонентных аэрозолей выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i(q)}{\partial t} = & \frac{1}{2} \int_0^q \left[ \sum_{k=1}^M \gamma_{ik} \varphi_k(q_1) \left( \sum_{m=1}^M \alpha_{km} K(q - q_1, q_1) \varphi_m(q - q_1) \right) \right] dq_1 - \\ & - \varphi_i(q) \int_0^q K(q, q_1) \left( \sum_{k=1}^M \beta_{ik} \varphi_k(q_1) \right) dq_1 - \frac{\partial}{\partial q} [r_i \varphi_i(q)] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial q^2} [\nu_i \varphi_i(q)] - R_i \varphi_i(q) + Q_i(q, t), \quad i = \overline{1, M}; \quad 1 \leq M \leq n, \quad (2.3) \end{aligned}$$

где  $\{\varphi_i(q, t), i = \overline{1, M}\}$  — концентрации субстанций, из общего числа примесей, в аэрозольном состоянии в объеме  $[q, q + \delta q]$ , пространственные координаты участвуют параметрически;  $K(q, q_1)$  — "коагуляционное" ядро;  $r_i(q, t)$  — скорость конденсационного роста или испарения;  $\nu_i(q, t)$  — коэффициент "диффузионного" изменения размера частиц;  $R_i(q, t)$  — скорость удаления частиц;  $Q_i(q, t)$  — скорость образования новых частиц за счет влияния естественных и антропогенных факторов или процессов трансформации;  $\gamma_{ik}, \alpha_{km}, \beta_{ik}, \{i, k, m = \overline{1, M}\}$  — параметры "коллективного" взаимодействия частиц. Процессы сухого и влажного осаждения частиц учитываются в модели (2.2) в операторе турбулентности и в операторе переноса заданием дополнительных слагаемых в составе вертикальной компоненты вектора скорости.

Содержательное и конструктивное описание операторов химической трансформации примесей осуществляется различными способами, в том

числе с помощью автоматизированной системы построения кинетических моделей атмосферной химии [77, 2, 33, 42]. Следует заметить, что базовый цикл химической трансформации многокомпонентных примесей для типичных условий атмосферы индустриальных регионов, представленный в [2], и сейчас остается основой для современных модификаций.

Начальные условия при  $t = 0$  и параметры модели можно записать в виде

$$\vec{\varphi}^0 = \vec{\varphi}_a^0 + \vec{\xi}(\vec{x}), \quad \vec{Y} = \vec{Y}_a + \vec{\zeta}(\vec{x}, t), \quad (2.4)$$

где  $\vec{\varphi}_a^0$  и  $\vec{Y}_a$  — заданные априорные оценки начальных полей  $\vec{\varphi}^0$  и вектора параметров  $\vec{Y}$ ;  $\vec{\xi}(\vec{x})$ ,  $\vec{\zeta}(\vec{x}, t)$  — ошибки и неопределенности начальных полей и параметров. Если предположить, что модель и входные данные точны, то члены, содержащие ошибки, можно опустить. Граничные условия для замыкания модели суть следствие физического содержания той проблемы, которая изучается. Например, на ограниченной территории для моделей переноса примесей граничные условия можно сформулировать следующим образом:

$$\varphi_i = \varphi_i^{\leftarrow}, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega_{\delta t}^{\leftarrow}; \quad \mu_n \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega_{\delta t}^{\rightarrow}, \quad (2.5)$$

$$n_0 \mu_n \text{grad } \varphi_i = q_i - w_i \varphi_i, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega_{0t}, \quad (2.6)$$

$$\mu_3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} + \kappa_i (\varphi_i - \varphi_{ih}) = 0, \quad (\vec{x}, t) \in \Omega_{ht}, \quad (2.7)$$

где  $\Omega_{\delta t}^{\leftarrow}$  и  $\Omega_{\delta t}^{\rightarrow}$  — участки боковой границы, где имеются входящие и выходящие потоки воздушных масс и примесей,  $n$  — внешняя нормаль к границе,  $n_0$  — внутренняя нормаль к поверхности  $\Omega_0$ ,  $q_i$ ,  $w_i$  — источники эмиссии и скорости осаждения субстанции с номером  $i$  на поверхность,  $\kappa_i \geq 0$  — параметр, определяющий режим взаимодействия с вышележащими слоями атмосферы,  $\varphi_{ih}$  — заданная равновесная концентрация субстанции на  $\Omega_{ht}$ . Входные параметры задаются как  $\varphi_i^{\leftarrow}$ ,  $q_i$ ,  $w_i$ ,  $\kappa_i$ ,  $\varphi_{ih}$ . В операторной форме граничные условия можно представить как

$$(R_b(\vec{\varphi}))_i - q_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.8)$$

где  $R_b$  — операторы граничных условий, а  $q_i$  — функции источников на границах  $\Omega_t$  области  $D_t$ .

Заметим, что включение в модели факторов неопределенностей имеет свой резон. Дело в том, что общее описание процессов переноса, турбулентного обмена и энергомассообмена к настоящему времени уже устоялось, тогда как для локальных процессов трансформации газовых и аэрозольных субстанций, параметризаций подсеточных процессов, взаимодействия примесей с подстилающей поверхностью и т.д. знания об их природе имеют поисковый, эмпирический характер. Поэтому операторы для описания

этих процессов можно рассматривать как обобщенные параметры моделей, а уменьшение степени неопределенностей можно достичь за счет совместного использования моделей с данными лабораторных и натуральных исследований и измерений.

### 2.3. Вариационная формулировка моделей процессов

Организация моделей, от глобального до мезо-регионального масштабов по горизонтали с декомпозицией по вертикали с различными пространственно-временными разрешениями в подобластях, соответствует целям исследований, ориентированным на оценки экологической перспективы, рисков и уязвимости территорий по отношению к воздействиям естественных и антропогенных факторов. С помощью глобальных моделей производятся оценки масштабов взаимодействий в климатической системе. Затем на базе моделей, адекватных процессам выделенных масштабов, рассматриваются более детальные картины развития ситуаций. В таком комплексе регионы участвуют в моделях в режиме прямых и обратных связей и как источники, и как рецепторы возмущений. Объединение всех моделей в единый комплекс и согласование их по масштабам в целом и по разрешениям дискретных аппроксимаций, а также построение численных схем и алгоритмов реализации осуществляется с помощью вариационных принципов.

Структура областей, выбор системы координат, основные обозначения и их смысл, постановки задач, краевых и начальных условий, описание функций состояния и параметров, структура функционалов, в зависимости от целей исследований, и способы построения интегрального тождества для вариационных формулировок моделей описаны, например, в [28].

Наряду с дифференциальной постановкой задачи будем использовать вариационную формулировку модели (2.1)–(2.8)

$$I(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*) \equiv \int_{D_t} (L(\vec{\varphi}), \vec{\varphi}^* dD dt = 0. \quad (2.9)$$

Интегральное тождество (2.9) строится с учетом краевых и начальных условий так, чтобы при подстановке  $\vec{\varphi}^* = \vec{\varphi}$  функционал (2.9) давал соотношение баланса энергии исследуемой системы. Выполнив все необходимые преобразования в (2.9) для модели (2.2)–(2.8), окончательно получим интегральное тождество в виде

$$I(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}) \equiv \sum_{i=1}^n \left\{ (\Lambda\varphi, \varphi^*)_i + \int_{D_t} ((H(\vec{\varphi}))_i - f_i - r_i)\varphi_i^* \pi dD dt \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 (\Lambda\varphi, \varphi^*)_i \equiv & \left( \int_{D_t} \left\{ 0.5 \left[ (\varphi^* \frac{\partial \pi \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \pi \varphi^*}{\partial t}) + (\varphi^* \operatorname{div} \pi \varphi \vec{u} - \varphi \operatorname{div} \pi \varphi^* \vec{u}) \right] + \right. \\
 & \left. + \pi \mu \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \varphi^* \right\} dDdt + \int_D 0.5 \varphi \varphi^* \pi dD \Big|_0^{\bar{t}} + \\
 & \left. + \int_{\Omega_t} (0.5 \varphi u_n - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial n}) \varphi^* \pi d\Omega dt + \int_{\Omega_t} ((R_b \varphi) - q) \varphi^* \pi d\Omega dt \right)_i, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

$u_n$  — нормальная к границе составляющая вектора скорости. Заметим, что операторы  $R_b$  в граничных условиях (2.4) желательно записать в таком виде, чтобы можно было с их помощью исключить слагаемые с нормальной производной от функции состояния в двух последних интегралах в (2.11).

Формы  $(\Lambda\varphi, \varphi^*)$  представляют операторы переноса и турбулентного обмена. В них операторам переноса соответствуют антисимметричные относительно функций  $\varphi$  и  $\varphi^*$  пары слагаемых, а операторам турбулентности — симметричные слагаемые. Свойства асимметрии и симметрии в принципе должны сохраняться при аппроксимации интегралов и подинтегральных выражений. В этом случае дискретные аналоги операторов сохраняют энергетические свойства их дифференциальных записей. На практике не всегда удается точно обеспечить такую преемственность, поскольку возникает необходимость выполнения свойств монотонности и транспортности численных схем. Кстати отметим, что замену переменных и систем координат проще проводить в рамках интегрального тождества.

Для согласованного расчета динамики атмосферы и переносов примесей в тождество аддитивно включаются слагаемые, соответствующие уравнениям движения [28].

### 2.3.1. Схема построения дискретных аналогов моделей

Вариационная формулировка (2.9) может служить основой для построения дискретных аппроксимаций модели как в составе вариационных принципов, так и автономно. С этой целью в  $D_t$  вводится сеточная область  $D_t^h$  и в ней определяются дискретные аналоги  $Q^h(D_t^h)$ ,  $Q^{*h}(D_t^h)$ ,  $R^h(D_t^h)$  соответствующих функциональных пространств. Затем (2.9) аппроксимируется сумматорным аналогом

$$I^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*) = 0, \quad \vec{\varphi} \in Q^h(D_t^h), \quad \vec{\varphi}^* \in Q^{*h}(D_t^h), \quad \vec{Y} \in R^h(D_t^h). \quad (2.12)$$

Верхний индекс  $h$  обозначает дискретный аналог соответствующего объекта. Дискретизацию функционалов (2.10), (2.11) осуществляем с использованием методов слабой аппроксимации, расщепления и декомпозиции.

Для получения схем расщепления интегралы по времени аппроксимируются квадратурными формулами с дробными шагами с отнесением различных частей общего оператора на отдельные дробные шаги.

Численные схемы для модели (2.1) получаются из условий стационарности функционала  $I^h(\bar{\varphi}, \bar{Y}, \bar{\varphi}^*)$  по отношению к произвольным и независимым вариациям сеточных компонентов  $\bar{\varphi}^* \in Q^{*h}(D_t^h)$  в точках сеточной области  $D_t^h$  для прямой задачи и к вариациям  $\bar{\varphi} \in Q^h(D_t^h)$  — для сопряженных задач [28].

В рамках метода расщепления основной элемент дискретизации моделей процессов по пространственным переменным строится на базе соотношений баланса вида

$$\int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} (\Lambda_x \varphi - f) \varphi^* dx = \int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} \Lambda_x^* \varphi^* \varphi dx - (A_x \varphi, \varphi^*)|_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} - \int_{x_{\alpha-1}}^{x_{\alpha}} f \varphi^* dx = 0, \quad (2.13)$$

где  $\varphi$  — одна из компонент функции состояния,  $x$  — одна из пяти независимых переменных,  $\Lambda_x$  — часть оператора  $L$  модели в терминах метода расщепления, действующая в направлении  $x$ ,  $[x_{\alpha-1}, x_{\alpha}]$  — ячейка сеточной области по  $x$ ,  $\Lambda_x^*$  — оператор, сопряженный по отношению к  $\Lambda_x$ ,  $(A_x \varphi, \varphi^*)$  — соотношение на границах ячеек по  $x$ . Вид оператора  $A_x$  определяется структурой оператора  $\Lambda_x$ . Способ дискретизации зависит от способа задания функций  $\varphi^*$  в (2.13) [28]. В частности, их можно выбирать так, чтобы они были решениями локальных сопряженных задач [29]

$$\{\Lambda_x^* \varphi^* = 0\}_{\alpha}, \quad x_{\alpha-1} \leq x \leq x_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, M_x}. \quad (2.14)$$

В этом случае первое слагаемое в правой части (2.13) исключаются и получаются простые балансные соотношения. Построенные таким образом весовые функции учитывают специфику оператора  $\Lambda_x$ .

Для конвективно-диффузионных операторов такая процедура обеспечивает свойства монотонности и транспортности дискретных аналогов операторов по пространственным переменным с учетом направления потока воздушных масс. Вообще говоря, использование для дискретизации выражений (2.11)–(2.13) совместно двух функций, основной и сопряженной, расширяет возможности построения численных схем с заданными свойствами по сравнению с традиционными методами конечных разностей, элементов и объемов, работающих только с одной функцией состояния.

## 2.4. Вариационные принципы в задачах охраны окружающей среды

Специфика задач рассматриваемого класса проявляется прежде всего в том, что модели должны учитывать широкий спектр процессов различных пространственно-временных масштабов и действующих факторов

естественного и антропогенного происхождения. Кроме того, для целей экологического прогнозирования и проектирования необходимо учитывать различные критерии, ограничения и т.д. Поэтому технология моделирования должна строиться таким образом, чтобы обеспечить сочетание глобального взгляда на проблему в целом с детальным описанием существа изучаемых явлений. Естественно, везде, где это возможно, должны участвовать данные наблюдений и вся доступная априорная информация. Вариационный подход, как математический аппарат, дает возможность организовать такую современную технологию моделирования.

#### 2.4.1. Функционалы — обобщенные характеристики процессов

Для формулировки вариационных принципов введем совокупность функционалов, выражающих обобщенные характеристики процессов и математических моделей.

С точки зрения организации вычислений (при большом количестве внутренних и внешних степеней свободы в моделях) оптимизационные методы управления, проектирования и методы обратного моделирования более приспособлены для работы с глобальными (интегральными) критериями и характеристиками моделей и процессов, чем с распределенными и локальными. Поэтому мы определим совокупность таких характеристик с помощью функционалов общего вида. Для целей мониторинга, прогнозирования, управления и проектирования, а также для конструирования алгоритмов обратного моделирования, введем совокупность функционалов

$$\Phi_k(\vec{\varphi}) = \int_{D_t} F_k(\vec{\varphi}) \chi_k(\vec{x}, t) dD dt, \quad k = \overline{1, K}, \quad K \geq 1, \quad (2.15)$$

где  $F_k(\vec{\varphi})$  — функции заданного вида, определенные и дифференцируемые на множестве значений  $Q(D_t)$  функций состояния модели,  $\chi_k \geq 0$  — весовые функции,  $\chi_k \in Q^*(D_t)$  и  $\chi_k dD dt$  — соответствующие меры Радона и Дирака в  $D_t$  [48]. При подходящем выборе в (2.15) функций  $F_k(\vec{\varphi})$  и  $\chi_k$  с помощью функционалов этого типа можно описать различные обобщенные глобальные, распределенные и локальные характеристики поведения системы, экологические ограничения на качество природной среды, результаты наблюдений различных типов, критерии управления и проектирования, критерии качества моделей и т.д., определенные на множестве функций состояния [30, 41].

#### 2.4.2. Модели наблюдений и функционалы

Наряду с моделями процессов существует еще один существенный элемент исследований окружающей среды — данные наблюдений. Чтобы



включить их в систему моделирования, необходимо сформулировать функциональную зависимость между данными измерений и функциями состояния в режиме прямых и обратных связей. Запишем эти зависимости в форме

$$\vec{\Psi}_m = [\vec{W}(\vec{\varphi})]_m + \vec{\eta}(\vec{x}, t), \quad (2.16)$$

где  $\vec{\Psi}_m$  — набор наблюдаемых величин;  $\vec{W}(\vec{\varphi})$  — совокупности моделей наблюдений;  $\vec{\eta}(\vec{x}, t)$  — ошибки и неопределенности этих моделей и данных. Значения  $\vec{\Psi}_m$  определяются на множестве точек  $D_t^m \in D_t$ . Символ  $[ ]_m$  обозначает операцию переноса информации с  $D_t$  на  $D_t^m$ , например, с помощью операторов проектирования или интерполяции.

Под моделью наблюдений подразумевается математическое описание преобразования, ставящего в соответствие функции состояния образ той величины, которая измеряется наблюдательным прибором. На практике возникает вопрос, как ввести дополнительные связи, чтобы уменьшить число внутренних степеней свободы, определяемых дискретным представлением функций состояния на  $D_t^h$ , и тем самым сделать процесс решения обратных задач с участием моделей наблюдений более корректным [31]. Для этих целей можно использовать в качестве связей математические модели исследуемых процессов и априорные сведения об искомым функциях и оцениваемых параметрах. Естественно, деление на модели процессов и модели наблюдений чисто условное. Так, модели гидротермодинамики и переноса примесей в диагностических и прогностических задачах используются для описания формирования соответствующих процессов в атмосфере. А в обратных задачах и в задачах усвоения данных наблюдений эти же модели помимо своей основной роли участвуют и в качестве пространственно-временных интерполянтов, т.е. становятся элементом модели наблюдений. Данные наблюдений (2.16) для усвоения и идентификации параметров можно включить в систему моделирования с помощью функционала "качества"

$$\Phi_0(\vec{\varphi}) = \left( \left( \vec{\Psi}_m - [\vec{W}(\vec{\varphi})]_m \right)^T \chi_0 S \left( \vec{\Psi}_m - [\vec{W}(\vec{\varphi})]_m \right) \right)_{D_t^m}, \quad (2.17)$$

где индекс  $T$  обозначает транспонирование,  $S$  — весовая матрица для формирования скалярного произведения на множестве данных наблюдений,  $\chi_0$  — весовая функция, определяющая конфигурацию пространственно-временного носителя наблюдений  $D_t^m$  в  $D_t$  и меру для представления (2.17) в виде (2.15). Для обнаружения источников и планирования наблюдений, в дополнение к функционалам (2.17), необходимо рассмотреть последовательность функционалов типа (2.15), каждый из которых описывает индивидуальные наблюдения в составе (2.16).

### 2.4.3. Функционалы ограничений на функции состояния

Функционалы этого типа вводятся для решения задач оптимизации природоохранной деятельности, управления качеством природной среды и экологического проектирования [30]. Запишем их в общем виде, используя определение (2.15)

$$\Phi_{ri}(\vec{\varphi}) = \int_{D_t} F_{ri}(\vec{\varphi}) \chi_{ri}(\vec{x}, t) dDdt \leq 0, \quad i = \overline{1, n\psi}, \quad (2.18)$$

где функции ограничений  $F_{ri}(\vec{\varphi})$  определяются так, чтобы с помощью (2.18) можно было учесть все интегральные, локальные и распределенные ограничения на функции состояния,  $n\psi$  — общее число ограничений. Содержание этих ограничений вытекает из условий устойчивого развития и экологической безопасности промышленных регионов. Строгое равенство в (2.18) имеет место тогда, когда надо учитывать распределенные в  $D_t$  ограничения типа неравенств

$$\psi_i(\vec{\varphi}, \vec{x}, t) \leq 0, \quad i = \overline{1, n\psi} \quad (2.19)$$

в эквивалентной интегральной форме. В этом случае функции  $F_{ri}$  определяем с помощью выражений

$$F_{ri}(\vec{\varphi}, \vec{x}, t) = \begin{cases} |\tilde{\psi}_i + |\tilde{\psi}_i||, \\ (\tilde{\psi}_i + |\tilde{\psi}_i|)^2, \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $\tilde{\psi}_i = \psi_i + \xi_i$ . Здесь  $\xi_i$  — малые положительные параметры. Они вводятся для того, чтобы при численном решении задач ослабить влияние неопределенностей в окрестности границ смены знака функций  $\psi_i$  с учетом их дискретных аппроксимаций на  $D_t^h$  в  $Q^h(D_t^h)$ . При построении алгоритмов теории чувствительности для функционалов (2.18) специальным образом определяются операции обобщенного дифференцирования функций  $F_{ri}$  относительно компонент функций состояния на сетке  $D_t^h$ .

### 2.4.4. Основы формирования вариационных принципов

Для удобства построения алгоритмических конструкций все функционалы формируются по одному принципу, т.е. они записываются в виде интегралов с неотрицательными подынтегральными выражениями, определенными в пространстве функций состояния, и с неотрицательными весовыми функциями из соответствующих сопряженных пространств. В общем случае это векторные весовые функции и меры. Их структура согласована со структурой скалярных произведений в функционалах (2.9)–(2.11).

Использование мер Радона и Дирака при формировании функционалов обусловлено спецификой применения вариационных принципов для организации численного моделирования. Во-первых, точечные и распределенные наблюдения и ограничения учитываются единообразно, что унифицирует алгоритмические конструкции. Во-вторых, упрощается формализм построения сопряженных задач, так как и сопряженные функции в функционалах, учитывающих модели процессов и наблюдений, и весовые функции функционалов (2.15) находятся в одних и тех же сопряженных пространствах.

Ограничения на параметры моделей, не содержащие явно компонент функций состояния, рассматриваются отдельно. Это обусловлено тем, что такие ограничения не участвуют непосредственно в формировании сопряженных задач. Они используются при составлении общего многообразия ограничений на искомые параметры, когда построены соотношения чувствительности для всех функционалов типа (2.18).

С позиций вариационного принципа численные модели являются ограничениями на класс функций и связями между параметрами и функциями состояния. Часть параметров задается по принципу внешнего дополнения и рассматривается как входная информация. Она определяет число внешних степеней свободы. В обратных задачах некоторые параметры являются искомыми и находятся по измеренным данным о функции состояния. Так как они не увеличивают число внутренних степеней свободы в процессе моделирования, их можно рассматривать как внутренние параметры модели. В качестве первого приближения для них задаются их априорные оценки по доступной фактической информации.

Таким образом, определен основной набор понятий и базовых элементов системы моделирования. Теперь можно сформулировать вариационный принцип для связей всех элементов и алгоритмов в единый комплекс. Суть вариационного принципа выразим следующим образом. Необходимо определить основные соотношения чувствительности для выбранной совокупности функционалов к вариациям входных параметров моделей и внешних воздействий так, чтобы они не зависели от вариаций первого порядка функций состояния и сопряженных функций. Функционалы и модели могут быть как линейными, так и нелинейными по отношению к функциям состояния. Однако оценки функционалов при вариациях параметров (включая источники) должны всегда быть стационарными по отношению к вариациям в первой степени функций состояния и сопряженных функций. Условия такой бистационарности функционалов определяют взаимно согласованную структуру численных схем для основных моделей и сопряженных задач, порождаемых вариационным принципом. При этом будет автоматически обеспечиваться оптимальность в указанном смысле оценок вариаций функционалов.

Соотношения чувствительности дают конструктивную основу для формирования прямых и обратных связей между вариациями параметров и функционалов. Возникающие при этом функции чувствительности (ФЧ) синтезируют в себе решения прямых и сопряженных задач. Они замыкают на себя все внутренние степени свободы в моделях процессов и наблюдений. По ним определяется характер связей между вариациями параметров и функционалов. Именно в этом состоит их главная роль в вариационном принципе. Они имеют различное применение в методах прямого и обратного моделирования, в исследовании чувствительности и наблюдаемости и в организации стратегии управления системами.

Все алгоритмические конструкции для реализации вариационных принципов удобно осуществлять на базе совокупности расширенных функционалов, объединяющих функционалы и модели:

$$\tilde{\Phi}_k^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*) \equiv \Phi_k^h(\vec{\varphi}) + I^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*), \quad k = \overline{1, K}, \quad K \geq 1. \quad (2.21)$$

Сформулированный вариационный принцип имеет универсальный характер. Конкретное его наполнение определяется совокупностью функционалов и вариационными формулировками моделей в виде интегрального тождества. На уровне функционалов этих двух типов удобно комплексовать различные знания и модели при создании информационно-моделирующих систем многоцелевого назначения.

## 2.5. Применение методов прямого и обратного моделирования

Традиционный подход к решению задач охраны окружающей среды обычно базируется на методах прямого моделирования. Суть их состоит в создании математических моделей изучаемых процессов и в проведении сценарных расчетов при различных способах задания входных данных и внешних воздействий. Несмотря на широкое распространение этого подхода, он не может обеспечить решение всего комплекса возникающих вопросов на современном уровне. Многие задачи требуют комбинированного использования методов прямого и обратного моделирования [22, 21, 28, 33, 30, 75, 39]. В таком варианте прямое моделирование представляет модели процессов различной степени сложности по функциональному содержанию и детализации, по степени учета различных факторов и пространственно-временному разрешению дискретных аппроксимаций. Методы обратного моделирования реализуют более высокие системные уровни проблемы в целом, в которых модели процессов выступают в качестве связей между функциями состояния, входными параметрами и источниками внешних воздействий. Организация такой технологии моделирования строится на базе вариационных принципов в сочетании с метода-

ми декомпозиции, расщепления и комплексирования [28, 75]. Перечислим некоторые типовые задачи, решаемые с помощью комбинации методов прямого и обратного моделирования: диагностика качества моделей; усвоение данных измерений; комплексирование моделей различных масштабов; восстановление функций состояния; исследование чувствительности моделей к вариациям входных данных; планирование наблюдений и оценки информативности систем мониторинга; оценки наблюдаемости территорий; экологическое проектирование с позиций устойчивого развития; оценка мощности и локализация местоположения источников; управление источниками; районирование территории в соответствии с уровнями антропогенных нагрузок; оценка областей влияния и опасности источников; задачи типа "рецептор–источник–рецептор"; оценки риска и уязвимости по отношению к антропогенным воздействиям.

### 2.5.1. Основной алгоритм обратного моделирования

Для постановки обратных задач и построения алгоритмов для их решения воспользуемся идеями теории оптимизации и техникой вариационного исчисления. В этом случае все аппроксимации получаются с учетом структуры функционала качества и способа нахождения его стационарных значений на множествах значений функций состояния, параметров моделей в дискретной формулировке [28].

Основной функционал для организации системы моделирования формулируется так, чтобы учесть в нем все модели и доступные фактические данные, а также минимизовать влияние неопределенностей, которые в них имеются:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_k^h(\vec{\varphi}) = & \Phi_k^h(\vec{\varphi}) + \left[ \left( \vec{\eta}^T M_1 \vec{\eta} \right)_{D_i^m}^h + \left( \vec{r}^T M_2 \vec{r} \right)_{D_i^h}^h + \right. \\ & + \left. \left( (\vec{\varphi}^0 - \vec{\varphi}_a^0)^T M_3 (\vec{\varphi}^0 - \vec{\varphi}_a^0) \right)_{D^h}^h + \right. \\ & \left. + \left( (\vec{Y} - \vec{Y}_a)^T M_4 (\vec{Y} - \vec{Y}_a) \right)_{R^h(D_i^h)}^h \right] / 2 + I^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}^*). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой целевой функционал типа (2.15), следующие 4 члена суммарно выражают меру неопределенностей модели наблюдений, моделей процессов, начальных данных и параметров, соответственно. Напомним, что вектор  $\vec{Y}$  учитывает все входные параметры моделей и источники внешних воздействий. Последнее слагаемое содержит описание численной модели в вариационной формулировке,  $M_i$ , ( $i = \overline{1,4}$ ) — весовые матрицы.

Дискретизацию функционалов (2.21) и (2.22) осуществляем также, как и (2.9)–(2.11) с использованием методов слабой аппроксимации, расщепления и декомпозиции. Все кубатурные формулы для интегралов строятся

на одних и тех же сетках. Окончательно дискретные аппроксимации моделей и алгоритмы моделирования получаются из условий стационарности функционалов  $\tilde{\Phi}_k^h$ :

- 1) для основных задач и методов прямого моделирования — из условий стационарности к вариациям компонентов сопряженной функции  $\vec{\varphi}^*$ ;
- 2) для сопряженных задач и методов обратного моделирования — из условий стационарности к вариациям компонентов функции состояния  $\vec{\varphi}$ ;
- 3) если в моделях учитываются ошибки, то условия стационарности к вариациям компонентов функций ошибок дают систему уравнений для расчета этих ошибок по фактической информации, заложенной в функционалах в составе (2.22) через соответствующие ФЧ;
- 4) условия стационарности к вариациям параметров моделей, включая источники внешних воздействий, приводят к системам уравнений для нахождения этих параметров по фактической информации. По существу, это алгоритмы реализации обратных связей от функционалов к параметрам моделей.

В результате получается следующая система операторных уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_k^h}{\partial \vec{\varphi}^*} \equiv B \Lambda_t \vec{\varphi} + G^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}) - \vec{f} - \vec{r} = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_k^h}{\partial \vec{\varphi}} \equiv (B \Lambda_t)^T \vec{\varphi}_k^* + A^T(\vec{\varphi}, \vec{Y}) \vec{\varphi}_k^* + \vec{d}_k = 0, \quad (2.24)$$

$$\vec{\varphi}_k^*(\vec{x})|_{t=\bar{t}} = 0, \quad (2.25)$$

$$\vec{d}_k = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\Phi_k^h(\vec{\varphi}) + 0,5(\vec{\eta}^T M_1 \vec{\eta})), \quad (2.26)$$

$$\vec{\varphi}^0 = \vec{\varphi}_a^0 + M_3^{-1} \vec{\varphi}_k^*(0), \quad t = 0, \quad (2.27)$$

$$\vec{r}(\vec{x}, t) = M_2^{-1} \vec{\varphi}_k^*(\vec{x}, t), \quad (2.28)$$

$$\vec{Y} = \vec{Y}_a + M_4^{-1} \vec{\Gamma}_k, \quad (2.29)$$

$$\vec{\Gamma}_k = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} I^h(\vec{\varphi}, \vec{Y}, \vec{\varphi}_k^*), \quad (2.30)$$

$$A(\vec{\varphi}, \vec{Y}) \vec{\varphi}' = \frac{\partial}{\partial \alpha} [G^h(\vec{\varphi} + \alpha \vec{\varphi}', \vec{Y})] \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.31)$$

Здесь  $\Lambda_t$  — дискретная аппроксимация производных по времени,  $A^T(\vec{\varphi}, \vec{Y})$  — пространственный оператор для сопряженной задачи,  $\vec{\Gamma}_k$  — функции чувствительности моделей к вариациям параметров,  $\alpha$  — вещественный параметр. Операции дифференцирования в (2.23), (2.24), (2.26), (2.30) осуществляются для всех сеточных компонент функции состояния,

сопряженной функции и параметров. Конструктивно они реализуются с помощью производных Гато для функционалов (2.21), (2.22), (2.12) относительно всех их функциональных аргументов в дискретном представлении. Выбранный способ дискретизации функционалов приводит к тому, что полученные с помощью вариационного принципа дискретные аналоги основных (2.23) и сопряженных (2.24)–(2.26) задач представляют собой взаимно-согласованные схемы расщепления.

В сопряженных задачах градиенты функционалов (2.26) относительно компонентов функции состояния в узлах сеточной области выступают в качестве функций источников при организации процедур усвоения данных дистанционных и контактных наблюдений и при учете ограничений в оптимизационных задачах управления и проектирования. Так как функции состояния входят практически во все слагаемые в (2.21), (2.22), то сопряженные задачи по структуре и функциональному содержанию замыкают на себя все внутренние связи между различными элементами системы моделирования, учитываемыми в основном функционале. При этих условиях оценки вариаций целевых функционалов получаются оптимальными в том смысле, что они имеют точность второго порядка малости относительно вариаций  $\vec{\varphi}^*$ ,  $\vec{\varphi}^0$ ,  $\vec{r}$ . Система уравнений (2.23)–(2.31) решается относительно  $\vec{r}$ ,  $\vec{\varphi}^0$ ,  $\vec{Y}$  итерационными процедурами, начиная с  $\vec{r}^{(0)} = 0$ ,  $\vec{\varphi}^{0(0)} = \vec{\varphi}_a^0$ ,  $\vec{Y}^{(0)} = \vec{Y}_a$ . Эта система представляет собой центральное ядро вычислительной технологии прямого и обратного моделирования для решения перечисленных выше задач и их модификаций.

## 2.5.2. Методы теории чувствительности

Связи между вариациями  $\delta\Phi_k^h(\vec{\varphi})$  и вариациями параметров моделей описываются соотношениями чувствительности и реализуются посредством ФЧ. Их выражения определяются коэффициентами при вариациях соответствующих параметров в основном соотношении чувствительности для  $\tilde{\Phi}_k^h(\vec{\varphi})$ , записанном с учетом указанных выше трех условий стационарности :

$$\delta\Phi_k^h(\vec{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial\xi} I^h(\vec{\varphi}, \vec{\varphi}_k^*, \vec{\varepsilon}, \vec{Y} + \xi, \delta\vec{Y})|_{\xi=0} \equiv \left( \frac{\partial I^h}{\partial\vec{Y}}, \delta\vec{Y} \right), \quad (2.32)$$

где  $\xi$  — вещественный параметр,  $\delta\vec{Y}$  — вектор вариаций параметров,  $\vec{\varphi}_k^*$  — решение сопряженной задачи (2.24), соответствующей функционалу  $\Phi_k^h$ . Алгоритмы построения основного соотношения и ФЧ в задачах рассматриваемого класса описаны в работах [28, 30, 35, 76].

Обратные задачи и методы обратного моделирования формулируются исходя из условий минимизации функционалов (2.15), (2.17) в пространстве параметров или из оценок их чувствительности к вариациям этих параметров. Они включают алгоритмы решения задач (2.23)–(2.31) и устанавлива-

ют обратную связь между функционалами и параметрами, которая следует из соотношений (2.29) и (2.30):

$$\frac{dY_\alpha}{dt} = -\eta_\alpha \Gamma_{k\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, N_\alpha}, \quad N_\alpha \leq N, \quad (2.33)$$

где  $\eta_\alpha$  — коэффициенты пропорциональности, которые находятся в процессе решения задачи, с учетом желаемого направления изменения функционалов,  $N_\alpha$  — число уточняемых параметров.

В задачах с ограничениями, по соотношениям чувствительности для функционалов ограничений (2.18)–(2.20) и дополнительным условиям непосредственно на значения параметров, формируется многообразие ограничений на искомые вариации параметров. Процедуры экологического проектирования, идентификации параметров и управления источниками строятся по заданным целевым критериям с учетом этого многообразия с помощью операций проектирования градиентов.

### 2.5.3. Об оценках экологических рисков

Методы теории чувствительности можно непосредственно использовать для оценок экологических рисков и уязвимости территорий по отношению к воздействиям антропогенных факторов, учитываемых в моделях процессов, т.е. к изменениям источников тепла, влаги, загрязняющих примесей и к изменениям характеристик поверхности Земли. Прокомментируем с этих позиций смысл соотношения чувствительности (2.32). Его структура полностью определяется структурой дискретных аналогов функционалов из интегрального тождества (2.9)–(2.12) с формальной заменой в них, в силу (2.32), компонент вектора параметров их вариациями и с исключением слагаемых, не содержащих параметров и источников. Самое главное, оно показывает, что все элементы моделей взаимосвязаны, и для оценок функционалов необходимо учитывать возможные возмущения всех входных параметров и внешних источников. Особо следует отметить выражения, содержащие источники тепла, влаги и примесей. Множители, стоящие при вариациях источников, есть соответствующие ФЧ. Они являются мерой непосредственного влияния вариаций источников на значение вариаций функционала (в линейных задачах — влияния самих источников на значение функционала). Но эти слагаемые не исчерпывают полностью влияние источников на функционал. Имеется еще косвенный вклад, который описывается совокупным действием других слагаемых с ФЧ, в расчетные формулы которых входят компоненты функции состояния. Например, это слагаемые, содержащие вариации коэффициентов турбулентности, функции приземного давления, геопотенциала, параметров оператора трансформации примесей и др.



С позиций экологии действие каждого источника, даже в так называемых нормальных режимах, представляет определенную опасность для окружающей среды. Сам факт, что источники находятся в области чувствительности функционалов, уже говорит о наличии риска получения от них загрязнений. О рисках может свидетельствовать также появление токсичных продуктов в результате трансформации первичных выбросов. Поэтому соотношения и ФЧ содержат количественную информацию для измерения степени экологических рисков для зон-рецепторов, описываемых соответствующими функционалами. Некоторые способы оценок такого рода на базе соотношений чувствительности при случайных и детерминированных возмущениях параметров в моделях динамики атмосферы рассмотрены в монографии [28]. ФЧ функционалов (2.15)–(2.18) к вариациям источников определяются в области  $D_t$ . В зависимости от целей исследования и для удобства интерпретации их можно называть функциями влияния или опасности источников, ценности информации, информативности системы мониторинга и т.д. Носители этих функций можно интерпретировать как области наблюдаемости территории с помощью системы мониторинга, расположенной в области-рецепторе. Вариации параметров, начальных и граничных условий и источников могут быть как детерминированными, так и случайными. Для источников появление вариаций можно связать с возможностью возникновения нестандартных ситуаций. А такие ситуации, как правило, имеют случайный характер. Для количественной оценки экологических рисков введем некоторые пороговые значения величин вариаций функционалов (2.15). Обозначим их через  $\Delta_k^s$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Тогда условия, при которых выполняются неравенства

$$|\delta\Phi_k| \leq \Delta_k^s, \quad (2.34)$$

можно условно считать экологически благополучными, а условия, при которых они нарушаются — ситуациями экологического риска.

Из соотношений чувствительности (2.32) следует, что при заданных ФЧ и при наличии количественной информации о вариациях параметров проверка неравенств "экологического благополучия" (2.34) не вызывает принципиальных затруднений. Действительно, в случае детерминированных вариаций источников и параметров оценку магнитуды вариаций функционалов можно вычислить по формулам

$$|\delta\Phi_k| \leq \sum_{i=1}^N |\Gamma_{ki}| |\delta Y_i|. \quad (2.35)$$

Используя эти оценки совместно с неравенствами (2.34) можно непосредственно сделать заключение о том, относится ли данная ситуация к категории благополучия или риска. Если вариации параметров и источников

имеют случайный характер, то оценки, по сравнению с детерминированным вариантом вариаций, несколько усложняются, поскольку приходится работать с многомерными пространствами ФЧ и параметров. Рассмотрим один из подходов к получению требуемых оценок в детерминированно-стохастическом случае на базе методов теории чувствительности [28] и математической теории риска [66].

Обозначим математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора  $\delta Y$  через  $E(\delta Y)$  и  $D(\delta Y)$ , соответственно. Вектор  $\Gamma_k$ , получаемый в процессе реализации алгоритма (2.23)–(2.31), зависит от невозмущенных значений параметров и вектора состояния. Поэтому для конкретных ситуаций его можно считать неслучайным. Учитывая свойства математического ожидания и ковариационных матриц при линейных преобразованиях случайных векторов, получим следующие оценки для математического ожидания  $E(\delta\Phi) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i E(\delta Y_i)$  и дисперсии  $D(\delta\Phi) = (D(\delta Y)\Gamma, \Gamma)$  вариации функционала  $\delta\Phi$ . Заметим, что суммирование здесь ведется только по тем слагаемым, в которых значения ФЧ превышают некоторую пороговую величину. В соответствии с (2.32) вариация функционала  $\delta\Phi$  определяется как линейная комбинация случайных величин. Если  $N$  достаточно велико и среди компонент вектора  $\delta Y$  нет сильно отличающихся от нормального распределения, то на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей [44] можно предположить, что закон распределения величины  $\delta\Phi$  стремится к нормальному. Предположение о нормальности закона распределения существенно упрощает задачу, поскольку для полной характеристики этого распределения достаточно знать его математическое ожидание  $E(\delta\Phi)$  и дисперсию  $D(\delta\Phi)$  или соответствующую ковариационную матрицу. Используя значения  $E(\delta\Phi)$  и  $D(\delta\Phi)$  и предположение о нормальности закона распределения  $\delta\Phi$  как случайной величины, можно получить ряд числовых характеристик оценки функционала  $\Phi(\varphi)$ . Методика построения этих оценок в настоящее время достаточно развита [19]. При изложении будем следовать [28].

Вероятность того, что величина  $\delta\Phi$  попадает в заданную область  $\Delta$  (т.е.  $|\delta\Phi| \leq \Delta$ ), определяется как

$$P(\delta\Phi \in \Delta) = \int_{\Delta} e^{-\frac{(x-E(x))^2}{2D(x)}} / \sqrt{2\pi D(x)} dx, \quad x \equiv \delta\Phi. \quad (2.36)$$

Интегрирование ведется по области  $(-\Delta \leq x \leq \Delta)$ .

Представляют интерес вероятности выполнения неравенств (2.34), выражающих условия попадания изучаемой ситуации в категорию экологически безопасной:

$$R^s = P(|\delta\Phi| \leq \Delta^s). \quad (2.37)$$

С другой стороны, если задать некоторый приемлемый уровень значений вероятности надежности  $R^s$ , то по нему можно определить параметр  $\lambda$  из (2.37) и оценить величину диапазона "безопасности"

$$|\Delta^s - E(\delta\Phi)| = \lambda\sqrt{D(\delta\Phi)}.$$

В задачах экологического проектирования, в дополнение к оценкам ситуации в целом, необходимо рассмотреть и возможные наихудшие случаи для качества атмосферы в зоне-рецепторе. С этой целью производится выявление областей локальных максимумов функций чувствительности и областей расположения источников большой потенциальной мощности (в отношении эмиссии загрязняющих примесей). При совпадении этих областей возможно возникновение ситуаций высокого экологического риска/уязвимости.

Полученные оценки имеют наглядную интерпретацию и формально простую схему алгоритмической реализации. Последнее свойство обусловлено тем фактом, что этот алгоритм имеет более высокий системный уровень, поскольку ФЧ уже рассчитаны с помощью алгоритма (2.23)–(2.31) при невозмущенных входных данных и поэтому по сути своей детерминированны.

Находясь в рамках вариационного подхода и выполняя операции, предусмотренные алгоритмом (2.23)–(2.31), исследователь рассматривает всю климатическую систему, определенную моделями в  $D_t$  и содержащую различные источники естественных и антропогенных воздействий, с точки зрения зоны-рецептора. Это значит, что категории опасности, риска, уязвимости можно дополнить понятием информативности системы мониторинга, расположенной на территории рецептора, и связать эти категории с понятием наблюдаемости систем из теории оптимального управления. Общее условие наблюдаемости для моделей рассматриваемого класса заключается в том, чтобы носители ФЧ, рассчитываемых для выбранного функционала измерений, накрывали области действия оцениваемых параметров или источников. Эти свойства функций наблюдаемости для распределенной системы мониторинга используются для обнаружения местоположения и времени действия источников, недоступных непосредственным измерениям [76].

Имеющийся у нас опыт показывает, что многофакторные оценки информативности с помощью комплекса моделей более содержательны, чем однофакторные по одной модели. Если систему наблюдений выбирать с учетом значимости ФЧ, то получаются приемлемые для практики результаты восстановления параметров и полей при усвоении даже небольшого количества данных, так как в этом случае модели работают как интерполанты с достаточно широкой областью влияния каждого наблюдения.

ФЧ дают новое качество в изучении прямых и обратных связей в моделируемой системе. Их анализ необходимо осуществлять совместно с функциями состояния. Поэтому, чтобы обнаружить в этом многокомпонентном наборе многомерных функций искомые зависимости, требуются специальные методы. С этой целью объединяются алгоритмы теории чувствительности с методами факторного анализа. Окончательно зоны повышенной опасности и уязвимости ищутся среди главных факторов, которые обнаруживаются в поведении объектов трех типов: функций состояния климатической системы, описываемой архивными данными, функций состояния модели изучаемых процессов (2.1) и ФЧ этой модели, связывающих вариации исследуемых функционалов (2.15)–(2.18) с вариациями источников и входных параметров модели.

#### 2.5.4. Детерминированно-стохастические модели для расчета траекторий частиц; прямые и сопряженные задачи

Довольно часто на практике возникает потребность расчета распространения примесей в движущихся объемах воздушных масс. Такие расчеты производятся с помощью моделей в рамках лагранжева подхода. Здесь мы опишем основные элементы алгоритма "несеточного" моделирования траекторий движений частиц примесей в предположении, что поля гидрометеорологических параметров атмосферы заданы на некоторой сетке  $D_t^h$  в  $D_t$  [36]. Особенностью излагаемого подхода в рамках комбинирования прямого и обратного моделирования является введение как прямых, так и сопряженных траекторий. Структуру численных схем организуем, исходя из метода расщепления по физическим процессам применительно к уравнениям системы (2.2). В области  $D_t^h$  на достаточно малых интервалах времени длиной  $\Delta t$  возьмем три этапа расщепления:

- 1) перенос по траекториям воздушных масс;
- 2) турбулентный обмен;
- 3) трансформация примесей.

В отличие от эйлерового подхода, расщепление в лагранжевом подходе реализуется вдоль траекторий движения частиц. Прямые траектории моделируются в направлении возрастания времени, а обратные — в обратном направлении времени.

Что касается учета трансформации примесей в лагранжевом подходе, то здесь возможны два варианта. В первом, когда элемент воздушной массы содержит весь набор реагирующих примесей, реализация осуществляется точно так же, как и в эйлеровом подходе. Если же это не так, то в контрольный объем могут поступить примеси с различными наборами субстанций, что влечет дополнительные проблемы с формированием операторов трансформации переменной структуры.

На первом этапе решение состоит в интегрировании системы уравнений для нахождения координат движущихся частиц

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(\vec{x}, t), \quad i = \overline{1, 3},$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in D, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad (2.38)$$

где  $u_i(\vec{x}, t)$  — скорости переноса в направлении координат  $x_i$ , в  $u_3$  учитывается скорость осаждения частиц.

Для построения схемы моделирования на втором этапе, когда

$$\frac{\partial \pi \varphi_i}{\partial t} - \operatorname{div}(\mu \pi \operatorname{grad} \varphi_i) = 0, \quad (2.39)$$

воспользуемся концепцией локальной (в пространстве параметров) аппроксимации типа "замороженных" коэффициентов [45, 6]. В соответствии с этой концепцией для каждой траектории движения частиц строится семейство локальных по параметрам турбулентности аппроксимаций задачи (2.39) с постоянными коэффициентами во всей области, но параметрически зависящими от координат текущей точки траектории. Другими словами, постоянные коэффициенты локальной задачи равны значениям коэффициентов общей задачи (2.39) в рассматриваемой точке траектории. При таких предположениях каждая локальная задача допускает разделение переменных и, следовательно, функцию Грина для нее можно представить как произведение функции Грина для одномерных уравнений по координатным направлениям. Функция Грина для одномерных уравнений параболического типа идентична плотности вероятности нормальных случайных величин с нулевым средним значением и стандартным отклонением  $\sigma_i = \sqrt{2\Delta t \mu_i}$ , ( $i = \overline{1, 3}$ ). Заметим, что применение в таком комплексе локальных параметрических аппроксимаций согласуется с гипотезой о локальной изотропности и однородности турбулентности негауссовских полей в целом [27].

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно схемы алгоритмов этапов 1 и 2 [36] для прямых траекторий:

$$\frac{\Delta x_\alpha^j}{\Delta t} = u_\alpha^j(\vec{x}, t) + 0.5 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_\alpha^j}{\partial x_k} \Delta x_k^j, \quad \Delta x_\alpha^j = x_\alpha^{j+1/2} - x_\alpha^j, \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad (2.40)$$

$$x_\alpha^{j+1} = x_\alpha^{j+1/2} + \eta_\alpha^{j+1/2}, \quad j = \overline{1, J-1}, \quad (2.41)$$

и для сопряженных траекторий

$$x_\alpha^{*j+1/2} = x_\alpha^{*j+1} + \eta_\alpha^{*j+1}, \quad j = \overline{J-1, 1}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\Delta x_\alpha^{*j}}{\Delta t} = u_\alpha^{*j+1}(\vec{x}, t) + 0.5 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_\alpha^{*j+1}}{\partial x_k} \Delta x_k^{*j}, \quad \Delta x_\alpha^{*j} = x_\alpha^{*j} - x_\alpha^{*j+1/2}. \quad (2.43)$$

Здесь  $\eta_\alpha^{j+1/2}$  и  $\eta_\alpha^{*j+1}$  — нормально распределенные случайные числа с нулевыми средними значениями и стандартными отклонениями  $\sigma_\alpha^{j+1/2}$  и  $\sigma_\alpha^{*j+1}$ , соответственно, индекс  $j$  отмечает шаг по времени,  $J$  — общее число временных шагов в  $[0, \bar{t}]$ . Схемы (2.40), (2.43) аппроксимируют прямые и сопряженные задачи для (2.38) со вторым порядком по времени, а схемы (2.41)–(2.42) со всей внутренней инфраструктурой представляют оригинальную модификацию метода Монте-Карло для прямых и сопряженных задач в лагранжевом варианте многомерных нестационарных моделей турбулентной диффузии (2.39). Вблизи границ формулы (2.40)–(2.43) конструируются с учетом краевых условий.

Прямые траектории рассчитываются исходящими из области распределения частиц примесей в момент времени  $t = 0$  или из координат источников примесей. Сопряженные траектории моделируются исходящими из зоны-рецептора или из мест размещения наблюдений в момент времени  $t = \bar{t}$  в направлении начального момента времени. Так же как и решение сопряженных задач, сопряженные траектории имеют только информационный смысл. Их можно определить как лагранжев аналог сопряженных задач, участвующих в моделях переноса эйлерового типа. Они дают информацию о предыстории примесей, поступающих на охраняемую территорию или в область размещения наблюдательных приборов. Введение случайных характеристик в расчетный алгоритм на этапе учета турбулентности предусматривает использование техники статистического моделирования на ансамблях частиц. Если турбулентный обмен не учитывать, то можно работать с индивидуальными частицами для расчета их прямых и сопряженных траекторий.

Таким образом, перенос субстанций есть комбинация детерминированного транспорта вдоль траекторий воздушных масс и случайного процесса, описывающего турбулентную диффузию.

## 2.6. Примеры решения природоохранных задач. Прямые и обратные задачи для Восточно-Сибирского региона

На базе создаваемой на описанных принципах технологии моделирования в ИВМ и МГ СО РАН создана информационно-моделирующая система и выполнен цикл исследований по решению задач охраны окружающей среды различных пространственно-временных масштабов, от локального до глобального. Для климато-экологических исследований разработан сценарный подход, использующий доступные данные наблюдений. Формирование репрезентативных гидродинамических сценариев осуществляется на базе многомерного многокомпонентного факторного анализа. Для повышения информативности долгопериодных сценариев предложен новый класс моделей с направляющими фазовыми пространствами [40].

В настоящем подразделе приведены результаты трех сценариев моделирования, относящихся к Восточно-Сибирскому региону. Для расчетов использованы базовые модели, описанные в [35]. Гидродинамическая часть всех сценариев формируется с помощью региональной модели динамики атмосферы с использованием данных реанализа [69] и процедур быстрого усвоения данных [47]. Динамика четырехмерных полей метеоэлементов рассчитывается с 1 по 31 августа 2000 г., для первых двух сценариев, и за этот же период 2002 г., для третьего сценария, с дискретностью 30 мин. по времени в области 47.5–60° с.ш. и 95–115° в.д. на широтно-долготной сетке с шагами 15' в каждом направлении. Разрешение по вертикали — 19 уровней в гибридных координатах от поверхности Земли до уровня, соответствующего давлению 10 мбар. Первый сценарий демонстрирует результаты оценки экологического взаимодействия крупных городов Восточно-Сибирского региона как агрегированных источников загрязняющих примесей. На рис. 7 представлен фрагмент сценария, относящегося к моменту 22:00.

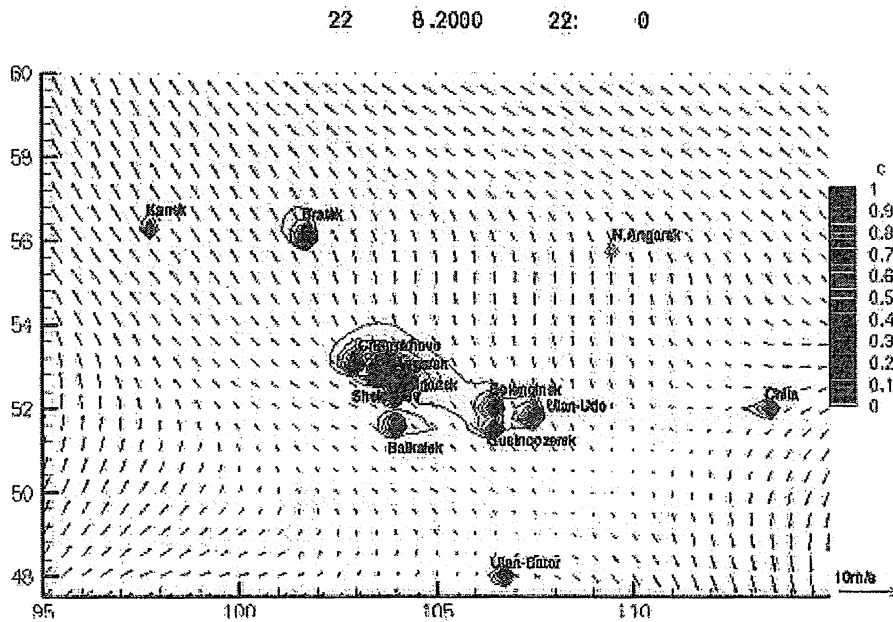


Рис. 7. Поле скорости и концентрация пассивной примеси в приземном слое от городов как агрегированных источников загрязнений в Восточно-Сибирском регионе. Фрагмент сценария, соответствующий 22:00 местного времени 13.08.2000

Показаны поле скоростей и концентрации примесей в относительных единицах в приземном слое. Из анализа сценария в целом можно сделать вывод, что атмосферная циркуляция в регионе имеет высокую

пространственно-временную изменчивость. Озеро Байкал, расположенное между двумя группами индустриальных центров, находится в зоне взаимодействия и получает соответствующую дозу загрязнений. В свою очередь, озеро Байкал является климатообразующим фактором в этом регионе. Под его влиянием формируются своеобразные "байкальские" мезоклиматы. Для оценки характерных масштабов этих мезоклиматов было использовано поле возмущений влажности за счет испарения с поверхности озера. Гидрологический цикл в данном случае учитывает водяной пар, облачную и дождевую воду. На рис. 8 приведен фрагмент второго сценария, показывающий структуру атмосферной циркуляции и вариации водяного пара (отн. единицы) в приземном слое.

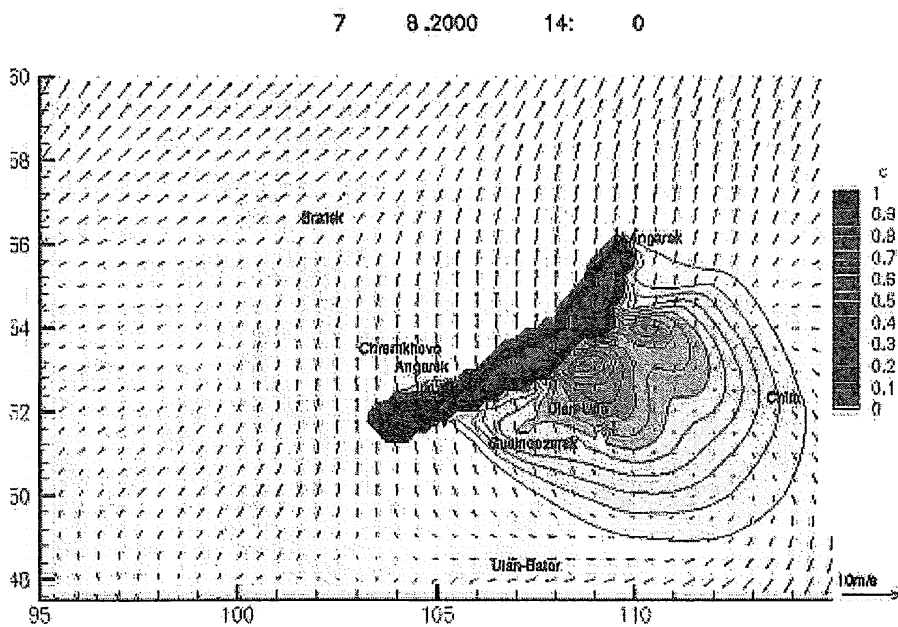


Рис. 8. Поле скорости и вариация поля влажности в приземном слое, обусловленные влиянием озера Байкал. Фрагмент соответствует 14:00 местного времени 7.08.2000

В качестве примера, демонстрирующего оценки экологической уязвимости территорий и рисков получения загрязнения от источников, приведем результаты сценария обратного моделирования. Его цель — понять, до какой степени озеро Байкал и окружающие территории в регионе подвержены воздействию антропогенных источников, и оценить степень экологического риска для озера получить загрязнения от действующих и потенциально возможных источников. С использованием решения сопряженных задач в режиме обратного моделирования рассчитываются ФЧ функционала качества атмосферы. Этот функционал формируется следующим образом.



Область над озером задается как носитель ненулевых значений весовой функции в (2.15). Функция  $F_k$  описывает концентрацию пассивной газовой примеси в регионе. Функционал представляет суммарное количество загрязнений, которое может поступить в атмосферу над озером в течение месяца от действующих и потенциально возможных источников.

На рис. 9 и 10 приводятся поля скоростей на верхней границе приземного слоя (стрелки) и ФЧ к вариациям мощности источников, расположенных на поверхности Земли в регионе и за его пределами (относительные единицы). ФЧ — это четырехмерный агрегат пространственно-временной структуры. На рисунках представлены двумерные фрагменты, относящиеся к

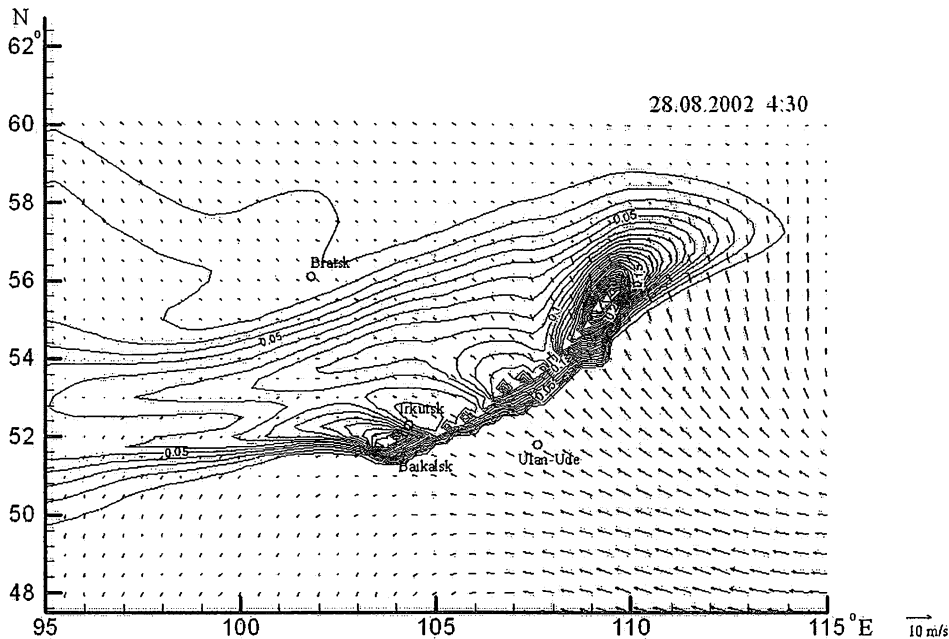


Рис. 9. Функция чувствительности функционала качества атмосферы в приземном слое озера Байкал к вариациям источников загрязнений, расположенных на поверхности Земли в Восточно-Сибирском регионе. Фрагмент соответствует 04:30 м.в. 28.08.2002

двум моментам времени — 28 августа (рис. 7) и 6 августа (рис. 8). Значения функции чувствительности показывают, какая часть суммарной эмиссии от действующих и потенциально возможных источников может поступить в приземный слой атмосферы. Чем больше значение ФЧ, тем больше риск получить загрязнение. Рисунки демонстрируют высокую изменчивость ФЧ по пространству и времени. Так, на рис. 9 видно, что загрязнения могут поступить с северо-западного направления. Интересно, что выделяются центры локальных максимумов в областях, характеризующихся высоким уров-

нем антропогенных нагрузок — Иркутск, Ангарск и др. На рис. 10 зоны риска находятся как на северо-западе, так и на юго-востоке, т. е. не исключено влияние Байкальского целлюлозного комбината, Гусиноозерска и других промышленных объектов этой области. Кроме того, значительная часть области риска попадает на территорию Монголии.

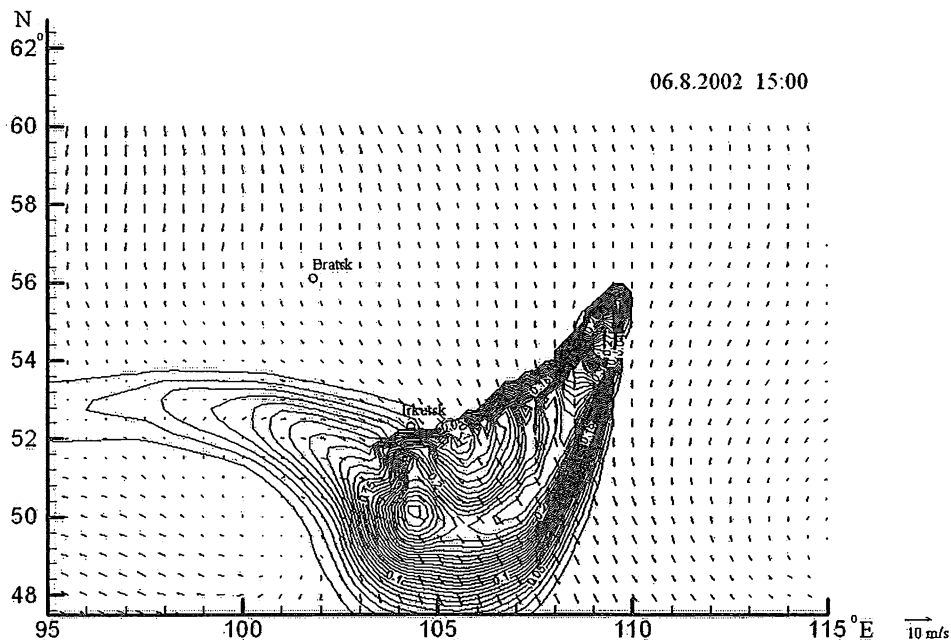


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но для 15:00 6.08.2002

Анализируя байкальские сценарии, можно сделать вывод, что зоной риска для озера является индустриально нагруженные территории Восточно-Сибирского региона. Эти выводы согласуются с выводами сценариев 1 и 2. Информация, которую дает ФЧ, может быть полезна при планировании хозяйственной деятельности и экологическом прогнозировании и проектировании. Отметим еще одно полезное применение ФЧ для организации систем мониторинга за качеством природной среды. Геометрическая конфигурация носителя ФЧ является характеристикой области наблюдаемости территорий региона с помощью систем измерений, размещенных в областях-рецепторах. В этом случае значения ФЧ представляют собой меру информативности наблюдений по отношению к источникам. Это значит, что, по наблюдениям, из области-рецептора можно с помощью решения обратных задач и рассчитанных ФЧ обнаруживать местоположение источников специфических загрязнителей и идентифицировать их параметры.

### 3. Определение биомассы растительного покрова по наблюдениям из космоса

#### 3.1. Подходы к оценке состояния биосферы

Проблемы глобальных изменений обычно связывают с наблюдаемыми изменениями климата, состава атмосферы и землепользования вследствие усиления хозяйственной деятельности и загрязнений окружающей природной среды. Чаще всего обсуждаются возможные катастрофические последствия глобального потепления, которое может привести к таянию ледников и повышению уровня моря с затоплением огромных площадей некоторых стран. Это потепление ассоциируется с наблюдаемым ростом содержания в атмосфере "парниковых газов" (диоксид углерода/углекислый газ, метан и др.), которые, будучи малыми газовыми примесями атмосферы, беспрепятственно пропускают солнечное излучение, но задерживают собственное тепловое излучение земной поверхности, что и служит признаком возможного повышения глобальной температуры. Реальные приоритеты глобальной экологии чаще увязываются с необходимостью сохранения биосферы [26] — той уникальной природной системы, которая сформировалась в результате многих миллионов лет эволюции Земли как планеты и которая включает биоту и окружающую ее природную среду, обеспечивающую существование жизни.

Специфические биосферные процессы характеризуют условия функционирования биоты, ее обмена с внешней средой и реагирования на происходящие изменения при эволюции глобальной системы. Специфика этих процессов состоит в том, что основные химические элементы органических веществ (углерод, азот, кислород, фосфор и сера) накапливаются в тканях живых организмов, что приводит к увеличению высокомолекулярных энергетических состояний соответствующих объектов биосферы, но после прекращения жизнедеятельности при естественном разложении этих тканей уровни энергии биогеохимических циклов понижаются. Такая сезонная и долгопериодная химическая неравновесность — характерная черта живой планеты. Другая ее характерная черта — необратимость процессов в биосфере — определяет особенности исследований наблюдаемых изменений и их возможной предсказуемости.

Исходя из особой актуальности биотических факторов функционирования глобальной системы, на первый план выдвигаются исследования по моделированию геофизических, биогеохимических, климатических и других процессов в экосистемах — живых развивающихся организмах. Наука призвана акцентировать внимание на получении требуемых оценок состояния биосферы, имея в виду обоснование критериев устойчивости биосферы при предельно допустимых антропогенных нагрузках на нее. Одна-

ко здесь много неясностей, специфических допущений и противоречивых фактов.

В связи с особой ролью спутниковых наблюдений для понимания трендов происходящих глобальных изменений возникает необходимость развития моделей оценки параметров, характеризующих состояние биосферы (лесной, пастбищной, сельскохозяйственной и другой растительности). Одним из таких комплексных параметров является объем биомассы растительности (обычно измеряется в тоннах на гектар), который рассматривается как основной показатель функционирования живых растительных сообществ. Различают объем зеленой фитомассы листвы/хвои (выражается в терминах "сырой вес" или "сухой вес" в привязке к лабораторным анализам выбранных образцов фитоэлементов) и общий объем биомассы, под которым понимается объем древесины (стволов, веток и др.) вместе с зеленой фитомассой.

Основу существующих подходов к использованию данных дистанционного зондирования для оценки состояния почвенно-растительного покрова, обычно представляемых в виде многоспектральных спутниковых изображений, составляет эмпирическая концепция "вегетационных индексов" — некоторых комбинаций измерительных каналов сканирующих спутниковых радиометров [11]. Такого рода комбинации измерительных данных позволяют отделить нормальное развитие растительности от ее стрессовых состояний, вызванных дефицитом влаги, загрязнением окружающей среды и другими факторами. Например, высокие значения так называемого "вегетационного индекса нормализованной разности" (отношение разности измерительных данных для каналов ближней инфракрасной и видимой областей спектра к сумме соответствующих значений) характеризуют нормальное функционирование растительности, а его низкие значения дают представление об условиях увядания растительности, ее пожелтения и т.п.

На смену концепции "вегетационных индексов" приходят более современные модели оценки указанных параметров состояния объектов биосферы по многоспектральным спутниковым изображениям. Постановка задачи и конкретные примеры реализации этих моделей приведены в работе [15]. Сначала остановимся на некоторых общих особенностях описания взаимодействий биоты и окружающей среды. Затем рассмотрим проблемы моделирования полей уходящего излучения, регистрируемого спутниковой аппаратурой, и информационные аспекты решения соответствующих задач.

### **3.2. Биогеохимические циклы и глобальные изменения**

Воздействие биоты на окружающую среду сводится к синтезу органических веществ из неорганических, разложению органических веществ на неорганические составляющие и соответственно к изменению соотно-

шения между запасами органических и неорганических веществ в биосфере. Скорость синтеза органических веществ определяет продукцию, а скорость их разложения — деструкцию. Так как органические вещества, входящие в состав живых организмов, имеют относительно постоянное соотношение химических элементов, то продукцию и деструкцию измеряют в единицах массы органического углерода, синтезируемого или разлагаемого в единицу времени. При построении такого рода моделей чаще говорят об определенных резервуарах (углеродных соединений, окислительно-восстановительных реакций и пр.).

Биота способна создавать локальные концентрации биогенов в окружающей ее среде. Возникают потоки синтеза и разложения органических веществ и физические потоки переноса биогенов. В почве соответствующие потоки диффузионного распространения биогенов оказываются значительно меньше биологической продуктивности. Поэтому почва обогащена органическими веществами и необходимыми для растений неорганическими соединениями по сравнению с нижележащими слоями поверхности суши, где живые организмы отсутствуют. Это означает, что локальные концентрации биогенов в почве до некоторой степени регулируются биологически.

Биологическая ассимиляция конкретных химических элементов (углерод, кислород, азот и др.), их биогеохимическая трансформация, физический перенос, а также геологическое и химическое накопление в различных слоях Земли определяют непрекращающиеся глобальные круговороты. Этот термин как бы подразумевает развитие глобальных процессов по спирали вместо повторяющегося развития в виде "циклов", т.е. процессы должны быть существенно нелинейными. Само поддержание таких круговоротов, как и существование жизни, должно описываться, таким образом, с помощью процессов, далеких от термодинамического равновесия. В этом смысле неизбежная "хаотизация" региональных явлений сосуществует с направленной эволюцией глобальных процессов в течение сотен миллионов и миллиардов лет. Такое сосуществование обеспечивается и, в свою очередь, зависит от специфических метаболических реакций, характеризующих селективную направленность процессов поддержания биологического разнообразия планеты. В пределах каждого отдельного биогеохимического цикла развиваются характерные функциональные группы организмов, обеспечивающие ключевые метаболические реакции [16]: одни организмы служат для поддержания окислительно-восстановительных реакций, другие — способствуют высвобождению углерода и других элементов в процессе этих реакций, третьи — производят кислород и уменьшают неорганический углерод и т.д. Именно в смысле поддержания необходимых условий существования жизни на Земле представляют наибольший интерес парниковые газы.

### 3.3. Моделирование взаимосвязей данных дистанционного зондирования и параметров состояния биосферы

Обработка данных космического мониторинга состояния почвенно-растительного покрова и моделирование биосферных процессов являются основным средством развития междисциплинарных исследований биосферы. Спутниковые системы наблюдений Земли дают возможность получения на регулярной основе информации о текущем состоянии биосферы и ее изменениях (например, в течение вегетационного сезона развития растительности). Речь идет об интерпретации спектральных образов наблюдаемых объектов по их космическим изображениям.

Разработка моделей взаимодействия солнечного излучения с природными средами служит основной целью нахождения взаимосвязей данных космического мониторинга, наземных наблюдений, которые служат для валидации (подтверждения) результатов обработки изображений и моделирования процессов в земной геофизической/биогеохимической/климатической системе. Решение так называемых прямых задач переноса излучения в системе "земная поверхность–атмосфера" позволяет находить зависимости интенсивности уходящего излучения, регистрируемого спутниковой аппаратурой, от параметров состояния выбранных природных объектов [61]. Решение этих задач способствует пониманию условий трансформации солнечного излучения в атмосфере при ее различном замутнении [70]. Решение обратных задач сводится к восстановлению характеристик исследуемых объектов по результатам интерпретации их спектральных образов для каждого элемента многоспектрального изображения с учетом атмосферной коррекции спутниковых изображений. При этом используются методы вычислительной математики и математической геофизики при описании процессов формирования спектральных интенсивностей уходящего излучения, регистрируемых спутниковой аппаратурой.

Основу новых подходов к оценке состояния почвенно-растительного покрова по наблюдениям из космоса составляют результаты расчетов функционала поля излучения. Данный функционал математически описывает трансформацию солнечного или собственного теплового излучения в атмосфере и на земной поверхности в терминах регистрируемых величин на верхней границе атмосферы. При заданных условиях освещения Солнцем наблюдаемых природных объектов, их визирования из космоса и состояния атмосферы в момент съемки нахождение расчетных значений функционала означает модельное представление соответствующей схемы измерений. Расчетным значениям интенсивности уходящего излучения ставятся в соответствие получаемые наборы измерительных данных дистанционного зондирования. Отражательная способность конкретного элемента на спутниковом изображении определяется объемом биомассы системы

”растительность–почва” с учетом условий затенения фитоэлементов при формировании спектральных образов наблюдаемых объектов. Доказанное в работах [12, 13, 14] существование устойчивых связей между плотностью зеленой биомассы  $M$  (т/га или  $\text{кг}/\text{м}^2$ ) и такими параметрами лесных экосистем, как ажурность крон деревьев  $A_{\text{кр}}$  (уровень заполнения пространства фитоэлементами в разные фазы развития) и сомкнутость лесного полога  $C_{\text{п}}$  (расстояние между деревьями) в пределах мгновенного поля зрения измерительной аппаратуры дистанционного зондирования  $s_0$ , определяет перспективы развития этих новых подходов. То же самое справедливо и для других типов экосистем (травянистая растительность, сельскохозяйственные посевы и др.).

Дистанционно измеряемый функционал  $L_{jk}$  яркости неоднородного по пространству растительного покрова в пределах области  $s_0$  равен:

$$\begin{aligned}
 & L_{jk}(\lambda, i, n, r, \theta, \varphi, M(C_{\text{п}}, A_{\text{кр}}), h_0) = \\
 & = (\pi^{-2}/2) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \{U_S(\lambda, n, h_0)[(1 - C_{\text{п}} - \delta_1)\rho_1(\lambda, r, \theta, \varphi, \theta', \varphi') + \\
 & + (C_{\text{п}} - C_{\text{п}}A_{\text{кр}} - \delta_2)\rho_2(\lambda, i, \theta, \varphi, \theta', \varphi') + C_{\text{п}}A_{\text{кр}}\rho_3(\lambda, r)] + \\
 & + H_S(\lambda, n, h_0)[\delta_1\rho_1(\lambda, r, \theta, \varphi, \theta', \varphi') + \delta_2\rho_2(\lambda, i, \theta, \varphi, \theta', \varphi')]\} \times \\
 & \quad \times R_{jk}(\lambda, \Omega) \cos \theta' d\lambda d\theta' d\varphi',
 \end{aligned}$$

где  $j$  — номер канала приемной аппаратуры  $k$ -го типа с полем зрения  $s_0$  и функцией чувствительности  $R_{jk}(\lambda, \Omega)$ ;  $\lambda$  — длина волны с нижним ( $\lambda_1$ ) и верхним ( $\lambda_2$ ) пределами;  $\Omega$  — телесный угол зрения аппаратуры;  $n$  — параметр типа атмосферных условий (прозрачности атмосферы);  $i$  — параметр типа (породы) лесной растительности;  $r$  — параметр типа межкрупной травянистой/кустарниковой растительности;  $M$  — плотность зеленой (лиственной/хвойной) биомассы лесных насаждений или других типов растительности;  $h_0$  — высота Солнца;  $(\theta, \varphi)$  — зенитный и азимутальный углы наблюдения, соответственно;  $C_{\text{п}} = s_2/s_0$  — сомкнутость лесного полога;  $A_{\text{кр}} = s_2^*/s_2$  — ажурность (сквозистость) крон;  $\delta_1 = s_1'/s_0$ ,  $\delta_2 = s_2'/s_0$  — доли теней в межкрупных областях и на кронах деревьев, соответственно;  $s_1, s_2$  — межкрупная и крупная площади в поле зрения  $s_0$  ( $s_1 + s_2 = s_0$ ), соответственно;  $s_1', s_2'$  — части межкрупной и крупной площадей, покрытые тенью;  $s_2^*$  — площадь внутри крон, не занятая элементами кроны — межкрупные просветы, внутри которых прямое и рассеянное излучение Солнца испытывает многократное рассеяние;  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — спектральные коэффициенты отражения (в общем случае — индикатрисы рассеяния) межкрупной травянистой/кустарниковой области, крупной

области и многократного рассеяния внутрикороновых просветов;  $(\theta', \varphi')$  — зенитный и азимутальный углы для падающего прямого ( $U_S$ ) и рассеянного (приходящего со всех участков небесной сферы) ( $H_S$ ) солнечного излучения.

В записанном выражении для функционала поля уходящего солнечного излучения первый член в правой части (в фигурных скобках) определяет вклад межкороновой (фоновой) растительности в общую яркость соответствующего элемента  $s_0$ . Второе слагаемое дает вклад в общую яркость листовых/хвойных элементов кроны деревьев; третье слагаемое также связано с элементами кроны деревьев, а именно, определяет вклад кроновых просветов в общую яркость. Два остальных слагаемых (в фигурных скобках) описывают преобразование падающего диффузно рассеянного излучения Солнца в отраженное от затененных межкороновых и кроновых областей рассматриваемой системы.

Прямая задача атмосферной оптики заключается в расчете полей яркости  $L_{jk}$  моделируемых типов растительного покрова ( $i$ ), характеризующихся семействами сомкнутости полога ( $C_{\Pi}$ ) и ажурности межкоронового пространства ( $A_{кр}$ ), в зависимости от высоты Солнца  $h_0$  для заданной функции чувствительности аппаратуры  $k$ -го типа в  $j$ -м измерительном канале ( $R_{jk}$ ). Возможности решения обратной задачи восстановления  $M$  при заданных угловых условиях космической съемки и условиях солнечного освещения исследуемых типов природных объектов определяются математическими процедурами обращения результатов решения прямой задачи с точки зрения "подстройки" реальной изменчивости пространственных и спектральных образов указанных объектов под предлагаемые модельные представления в их функциональном описании.

Существенными в этой связи являются различия в законах формирования этих образов для измерительной спутниковой аппаратуры высокого (элемент разрешения — десятки метров и выше) и низкого (элемент разрешения — сотни метров и ниже) пространственного разрешения. В первом случае яркости соседних элементов спутникового изображения могут испытывать сильную и часто не связанную между собой изменчивость от минимальных (попадание в область затенений) до максимальных (освещенные кроны без теней) значений. Во втором случае яркости соседних элементов имеют меньшую пространственную изменчивость и более значительную взаимосвязанность.

Искажающее влияние атмосферы на величину яркости  $L_{jk}$  на пути от земной поверхности до измерительной аппаратуры учитывается с помощью простой модели

$$L_{jk}^*(\dots) = L_{jk}(\dots)P_j(n, \theta, \varphi) + D_j(n, \theta, \varphi),$$



где многоточием обозначен весь набор записанных выше параметров и величин, от которых зависит функционал;  $L^*$  — измеренная со спутника яркость соответствующего элемента изображения;  $L_{jk}$  — яркость этого элемента на уровне земной поверхности;  $P_j(n, \theta, \varphi)$ ,  $D_j(n, \theta, \varphi)$  — соответственно прозрачность атмосферы (параметр экспоненциального ослабления фотонов солнечного излучения на соответствующей трассе их прохождения от земной поверхности до уровня спутника) и яркость атмосферной дымки (характеристика многократного рассеяния фотонов по всей толщине атмосферы) в  $j$ -м канале аппаратуры  $k$ -го типа. Обратная задача восстановления истинной яркости  $L_{jk}$ , называемая процедурой атмосферной коррекции изображений, решается на основе нахождения атмосферного фильтра с использованием теории переноса излучения с заданными значениями  $P$  и  $D$ .

При дистанционном спутниковом зондировании в микроволновой области спектра сохраняются основные черты обращения рассматриваемых задач при различных плотностях полого леса, но роль ажурности крон выполняют показатели экспоненциального ослабления активного сигнала зондирования или типичные условия формирования радиометрических характеристик полого. Существенное значение в данной области спектра имеет влажность почвы и отдельных структурных характеристик полого (стволы деревьев, ветки, листья и т.д.). В то же время это область всепогодного дистанционного зондирования, когда атмосфера не оказывает заметного влияния на регистрируемые характеристики радиоизлучения.

Разработанные модели формирования полей уходящего солнечного излучения позволяют исследовать влияние различных факторов на результаты расчетов угловых и спектральных распределений интенсивности солнечного излучения на разных уровнях атмосферы. Существенное значение приобретает интерпретация данных полевых подспутниковых экспериментов как начального этапа получения выборочных наземных измерений и сравнения данных мониторинга и предлагаемых модельных расчетов. Данные моделирования дают возможность получения соответствующих оценок в самом общем виде при всех возможных условиях наблюдения и описания исследуемых полей.

Решение обратных задач количественной оценки значений биомассы растительности по многоспектральным изображениям сводится к нахождению так называемого оптимального параметра регуляризации, который определяет условия возможного отклонения решения от некоторых стандартных условий наблюдения. При этом определяются точностные характеристики получаемых оценок и основы практического использования результатов обработки многоспектральных изображений для рассматриваемых здесь целей.

### 3.4. Практическая реализация разработанных методов

Спутниковые системы наблюдений Земли дают возможность проводить регулярный мониторинг почвенно-растительного покрова по всему земному шару с помощью измерительной аппаратуры разного пространственного разрешения. Представленные в цифровом виде данные спутниковых наблюдений в различных областях электромагнитного спектра позволяют оценивать состояние конкретных типов природных образований на основе получаемых многоспектральных изображений. Традиционно математические процедуры обработки таких изображений сводятся к классификации наблюдаемых объектов поверхности суши с использованием принципов распознавания образов и анализа сцен. Сущность соответствующих преобразований, осуществляемых с помощью компьютерных средств, заключается в применении определенных "алфавитов классов", "словарей признаков" и правил принятия решений о принадлежности каждого элемента на обрабатываемом изображении к известному априори описанию его спектрального или структурного образа, регистрируемого спутниковой аппаратурой.

Последовательность действий при реализации предлагаемого нового подхода к оценке биомассы растительности из космоса такова. Сначала используются стандартные процедуры обработки многоспектральных изображений для выделения на них различных классов наблюдаемых объектов. Затем каждому элементу выделенных классов ставится в соответствие значение их параметров состояния (величина объема зеленой фитомассы листвы/хвои или объем древесины, плотность полога и т.п. для лесных и других экосистем). Первый из этих этапов представляет собой реализацию самых различных процедур распознавания образов (от статистических схем с априорной информацией до современных моделей нейронных сетей). На втором этапе используется существующий опыт моделирования полей излучения в системе "земная поверхность-атмосфера" и интерпретации характерных особенностей образов соответствующих объектов, т.е. наличия отдельных мод в отражательной способности этих объектов. Отдельные моды отражения отвечают за возникновение стрессовых ситуаций в развитии растительности (вследствие избытка или недостатка увлажнения территории в момент съемки, загрязнения окружающей среды и т.п.), за функционирование хлорофилловой системы и другие условия жизни растений. В процессе идентификации амплитуд этих характерных мод используются банки спектральных образов различных типов экосистем (лиственные и хвойные породы, кустарниковая и травянистая растительность) при их различном состоянии.

Актуальность именно такого подхода к решению рассматриваемых прикладных задач определяется необходимостью перехода к количественным

оценкам параметров состояния (типа объема биомассы) растительности по многоспектральным спутниковым изображениям вместо существующих в настоящее время качественных оценок. Вместе с тем требуется построение новых моделей функционирования живых систем по их наблюдаемым спектральным образам.

Таким образом, в развитие существующих возможностей обработки многоспектральных спутниковых изображений разного пространственно-го и спектрального разрешения предлагаются дальнейшие преобразования каждого элемента таких изображений с целью получения новой информационной продукции. Общепринятые компьютерные программы обработки изображений позволяют выделять отдельные классы природных объектов на основе использования методов распознавания образов и анализа сцен — области прикладной математики, получившей широкое применение в существующих приложениях данных дистанционного зондирования. Практически все разработки в области информационных и компьютерных технологий для географии, картографии и других аналогичных приложений основаны на этих достаточно стандартных программах. В дополнение к ним предлагается реализация компьютерных процедур представления каждого обрабатываемого элемента в терминах количественных параметров, характеризующих состояние выделенных классов природных объектов. Эти параметры состояния инвариантны относительно условий солнечного освещения выделенных классов природных объектов, их визирования с помощью космических сканирующих систем наблюдения и замутнения атмосферы в момент съемки. Инвариантность этих параметров означает, что они являются собственными характеристиками наблюдаемых объектов, а не их яркостных образов, регистрируемых спутниковой аппаратурой и изменчивых от одной обрабатываемой сцены к другой.

Новые возможности реализации описываемых здесь технологических внедрений неизбежно охватывают области параллельных вычислений при усвоении больших массивов данных, представленных в терминах инвариантных параметров состояния биосферы. Такого рода вычисления оказываются совершенно необходимыми, если подойти к анализу временных рядов получаемой информационной продукции обработки спутниковых изображений.

Реализация процедур параллельных вычислений охватывает усвоение данных на разные даты съемки при использовании наборов инвариантных параметров состояния наблюдаемых объектов вместо их изменчивых спектральных образов. Использование известных представлений о статистических ансамблях позволяет подойти к пониманию предсказуемости наблюдаемых изменений состояния объектов для разновременной конечной информационной продукции.

### 3.5. Технологические аспекты реализации новых подходов к оценке состояния биосферы из космоса

Информационные технологии использования спутниковой информации в нашей стране и за рубежом реализуются в настоящее время в направлении создания программно-аппаратных комплексов обработки мультиспектральных и мультивременных изображений, разработки методов распознавания образов и анализа сцен, построения моделей текущего состояния наблюдаемых природных объектов и их изменений на обрабатываемых изображениях. Основное внимание при развитии соответствующих информационных технологий уделяется отображению данных дистанционного спутникового зондирования в форме достижения самых разнообразных приложений с использованием географических информационных систем (ГИС), интегрирующих базы данных различного назначения (экология, природопользование, водные ресурсы и др.). Методы реализации таких технологий основываются на построении цифровых моделей местности географически привязанной информации, цветковых композиционных карт, синтезирующих измерения в разных спектральных измерительных каналах, стереоизображений и других особенностей адекватного восприятия конечной информационной продукции с использованием компьютерных средств, мультимедийных приложений к ним и т.п. Наибольшее распространение в России получило использование для этих целей достаточно стандартных программных средств типа ArcInfo, ArcView и др.

В последние годы получают также распространение такие средства обработки изображений, как ENVI (Environment for Visualizing Images) Корпорации RSI (Research Systems, Inc.). Характерной особенностью этих средств является возможность достаточно простого доведения новых научных разработок до программ многоуровневой обработки данных в заданной компьютерной среде. Этим данный пакет отличается от других (более жестких) стандартных программных средств, не допускающих возможностей их дополнительного расширения пользователями. Именно в части упрощенной возможности добавления новых версий научных программ к пакетам ENVI такого рода разработки представляют наибольший интерес для системно-ориентированных программистов.

В имеющихся стандартных пакетах ГИС ощущается отсутствие внедрений, касающихся адекватного описания процессов взаимодействия солнечного излучения с природными средами. Использование таких новых программных разработок совершенно необходимо при мультивременной обработке получаемой информационной продукции в процессе перехода от стандартных процедур классификации многоспектраль-

ных изображений к оценке указанных выше количественных параметров, характеризующих состояние выделенных классов природных объектов.

Необходимость расширения существующих программных средств обусловлена сильной изменчивостью спектральных образов природных объектов на их космических изображениях от одной обрабатываемой сцены к другой. Говорят именно об образах этих объектов, поскольку исходные сигналы, несущие информацию о самом объекте, искажаются в атмосфере по мере изменения высоты Солнца в течение суток и т.п. Считается, что существующих фундаментальных исследований по переносу излучения в системе "земная поверхность–атмосфера" достаточно для реализации процедур атмосферной коррекции многоспектральных спутниковых изображений. Для этих целей разрабатываются различные модификации алгоритмов решения прямых и обратных задач переноса излучения (LOWTRAN, MODTRAN и др.). В реальности модели формирования спектральных образов природных объектов при их различном состоянии оказываются значительно более сложными, чем эти упрощенные расчетные схемы.

Следствием предлагаемых новых разработок, в которых достаточное место уделяется физико-математическим аспектам формирования спектральных образов различных типов экосистем, является доказательство принципиальной возможности представления каждого элемента многоспектрального изображения в терминах указанных выше параметров. В дополнение к чисто яркостным преобразованиям обрабатываемых изображений конечная информационная продукция при таком подходе отображается с помощью указанных параметров, инвариантных относительно условий солнечного освещения выделенных объектов, угловых координат их съемки, состояния атмосферы в момент съемки. В полевых обследованиях параметры такого типа определяются эмпирическим путем специалистами-биологами на дискретных тестовых участках земной поверхности либо путем эмпирических зависимостей (например, для лесных экосистем путем определения диаметра выбранного дерева на уровне груди и других характеристик).

В предлагаемых разработках эти параметры восстанавливаются для каждого элемента обрабатываемого изображения на основе решения обратных задач атмосферной оптики и радиофизики. При этом существенное значение приобретают новые подходы к массовой обработке получаемой информационной продукции спутниковых наблюдений за разные даты наблюдений с использованием параллельных вычислительных средств и других современных возможностей реализации моделей предсказуемости глобальных и региональных изменений.

## Заключение

Разработанный комплекс взаимосвязанных математических моделей позволяет исследовать динамику и кинетику малых газовых примесей и аэрозолей с учетом их трансформации. Базовые модели позволяют исследовать эволюцию аэрозолей начиная с молекулярного уровня до образования частиц радиусом 10–15 мкм. Проведенные численные эксперименты и анализ их результатов показывают, что создаваемый комплекс моделей может быть использован для решения задач, связанных с оценкой фотохимического и аэрозольного загрязнения окружающей среды, включая моделирование стратосферных сульфатных облаков и формирования конденсационных следов в глобальном масштабе и др.

Перспективы информационно-динамических исследований биосферы и ее изменений на основе обработки многоспектральных спутниковых изображений состоят в разработке эффективных математических моделей нахождения пространственно-спектрально-угловых распределений уходящего излучения в зависимости от параметров (объем зеленой фитомассы, общей биомассы и др.), характеризующих состояние почвенно-растительного покрова. Анализ временных рядов получаемой информационной продукции способствует изучению реакции биосферы на внутренние возмущения и внешние воздействия. Отображение результатов моделирования в терминах соответствующих параметров биосферы на указанных изображениях открывает новые возможности рассмотрения на этой основе проблем предсказуемости наблюдаемых изменений биосферы.

Таким образом, развиваемая нами методология дает возможность решать широкий спектр задач охраны окружающей среды для целей диагностики, проектирования, мониторинга и прогнозирования на базе совместного использования моделей и данных наблюдений (дистанционных, наземных и др.). Конечно, для решения новых природоохранных задач и доведения получаемых результатов до восприятия в обществе требуются новые эффективные методы и технологии математического моделирования. На повестке дня стоят вопросы выявления предпосылок и уменьшения возможных последствий различных естественных и антропогенных катастроф, управление рисками, улучшение качества жизни людей с учетом требований экологической безопасности и устойчивого развития общества.

Работы поддержаны РФФИ №№ 04-05-64562, 03-05-64484, 03-01-96187(р2003юг), МНТЦ 1908, Минпромнауки РФ (0201.06.269/349), Европейской комиссией (ICA2-СТ-2000-10024), Программами 13 и 14 Президиума РАН и 1.3.2, Отделения математики РАН, Интеграционными проектами СО РАН №130,131,137,138.

## Литература

- [1] *Алоян А.Е., Абраменко В.В.* Численная модель распространения примесей в турбулентном пограничном слое атмосферы при наличии растительного покрова // Методы математического моделирования в гидродинамических задачах окружающей среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. С. 21–35.
- [2] *Алоян А.Е., Бажин Н.М., Пененко В.В., Скубневская Г.И.* Численное моделирование фотохимического окисления метана в атмосфере промышленных районов. Препринт № 772. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1987.
- [3] *Алоян А.Е., Лазриев Г.Л.* О параметризации энергии турбулентности в приземном слое атмосферы // Мат. модели атмосферных движений. Новосибирск: 1980.
- [4] *Алоян А.Е., Переходцев Д.М.* Математическое моделирование распространения примесей в пограничном слое атмосферы и регулирования мощности источников // Проблемы физики ПСА и загрязнения воздуха. СПб.: Гидрометеиздат, 2002. С. 43–57.
- [5] *Балацкий О.Ф.* Экономика чистого воздуха. Киев: Наукова думка, 1979.
- [6] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы М.: Лаборатория базовых знаний, 2000.
- [7] *Глинский Я.Н.* Явные методы решения жестких систем ОДУ // ДАН УССР. Сер. А. ФМТН. 1981, № 2. С. 74–78.
- [8] *Голубев А. И., Пискунов В. Н., Повышев В. М.* Моделирование кинетики процессов объемной конденсации // ВАНТ. Сер. Теор. и прикл. физика. 1991. Вып. 2. С. 3–9.
- [9] *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988.
- [10] *Дымников В.П., Алоян А.Е.* Монотонные схемы решения уравнений переноса в задачах прогноза погоды, экологии и теории климата // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 12. С. 1237–1247.
- [11] *Козодеров В.В.* Проблемы глобальных изменений в контексте наблюдений Земли из космоса и моделирования биогеофизических процессов // Исслед. Земли из космоса. 1994. № 6. С. 51–67.
- [12] *Козодеров В.В., Косолапов В.С.* Новые приложения аэрокосмических измерений к исследованиям земных экосистем // Исслед. Земли из космоса. 1994. № 4. С. 68–80.
- [13] *Козодеров В.В., Косолапов В.С.* Моделирование полей уходящего солнечного излучения от полога лесной растительности // Исслед. Земли из космоса. 1996. № 6. С. 78–87.
- [14] *Козодеров В.В., Косолапов В.С.* Новые подходы к решению обратной задачи восстановления объема зеленой фитомассы лесной растительности по аэрокосмическим данным // Исслед. Земли из космоса. 1999. № 1. С. 28–36.
- [15] *Козодеров В.В., Косолапов В.С., Ушаков С.А. и др.* Космическое земледелие: информационно-математические основы / Под ред. В.А. Садовничего. М.: Изд-во МГУ, 1998.
- [16] *Козодеров В.В., Садовничий В.А., Ушакова Л.А., Ушаков С.А.* Космическое земледелие: диалог природы и общества. Устойчивое развитие. М.: Изд-во МГУ, 2000.

- [17] *Кюнц Г.П., Крелли В.* Нелинейное программирование. М.: Мир, 1965.
- [18] *Лебедев В.И.* Как решать явными методами жесткие системы дифференциальных уравнений // Вычислительные процессы и системы. Вып. 8 / Под ред. Г.И. Марчука. М.: Наука, 1991. С. 237–291.
- [19] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Мир, 1972.
- [20] *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [21] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
- [22] *Марчук Г.И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М.: Наука, 1992.
- [23] *Марчук Г.И., Алоян А.Е.* Математическое моделирование в задачах экологии. Препринт № 234. М.: ОВМ АН СССР, 1989.
- [24] *Марчук Г.И., Алоян А.Е.* Глобальный перенос примеси в атмосфере // Изв. АН. ФАО. 1995. Т. 31, №5. С. 597–606.
- [25] *Марчук Г.И., Алоян А.Е.* Математическое моделирование региональных задач окружающей среды // Экологический вестник центров ЧЭС. 2003. Т. 1. С. 88–100.
- [26] *Марчук Г.И., Кондратьев К.Я.* Приоритеты глобальной экологии. М.: Наука, 1992.
- [27] *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Части 1, 2. М.: Наука, 1965.
- [28] *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
- [29] *Пененко В.В.* Численные схемы для адвективно-диффузионных уравнений с использованием локальных сопряженных задач. Препринт № 984. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993.
- [30] *Пененко В.В.* Численные модели и методы для решения задач экологического прогнозирования и проектирования // Обзорение прикладной и промышленной математики. 1994. Т. 1, № 6. С. 917–941.
- [31] *Пененко В.В.* Вариационные принципы и оптимизация во взаимосвязанных задачах экологии и климата // Вычислительная математика и математическое моделирование. Т. 1. М.: ИВМ РАН, 2000. С. 135–148.
- [32] *Пененко В.В.* Методы обратного моделирования и оценки экологических рисков от антропогенных воздействий // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, № 1. С. 26–38.
- [33] *Пененко В.В., Алоян В.В.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985.
- [34] *Пененко В.В., Алоян А.Е.* Математические модели взаимосвязей между термодинамическими и химическими процессами в атмосфере промышленных регионов // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 31, № 3. С. 372–384.
- [35] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Математические модели для исследования взаимодействий в системе озеро Байкал–атмосфера региона // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 137–147.



- [36] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Моделирование процессов переноса примесей в прямых и обратных задачах климато-экологического мониторинга // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12, № 6. С. 482–487.
- [37] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Подготовка данных для экологических исследований с использованием Reanalysis // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12, № 5. С. 463–465.
- [38] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Некоторые аспекты решения взаимосвязанных задач экологии и климата // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 161–170.
- [39] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Методы и модели для изучения природной среды и оценки экологических рисков // Оптика атмосферы. 2002. Т.15, № 5–6. С. 412–418.
- [40] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Главные факторы климатической системы глобального и регионального масштабов и их применение в экологических исследованиях // Оптика атмосферы и океана. 2003. Т. 16, № 5–6. С. 407–414.
- [41] *Пененко В.В., Цветова Е.А.* Математические модели для изучения рисков загрязнения природной среды // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 136–146.
- [42] *Пененко В.В., Цветова Е.А., Скубневская Г.И., Дульцева Г.Г., Кейко А.В.* Численное моделирование химической кинетики и переноса загрязняющих примесей в атмосфере промышленных регионов // Химия в интересах устойчивого развития. 1997. № 5. С. 535–539.
- [43] *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
- [44] *Рао С.Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
- [45] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1968.
- [46] *Федоренко Р.П.* Жесткие системы ОДУ и их численное интегрирование // Вычислительные процессы и системы. Вып. 8 / Под ред. Г.И. Марчука. М.: Наука, 1991. С. 328–380.
- [47] *Цветова Е.А., Пененко В.В.* Быстрое усвоение данных в атмосферных и океанических исследованиях // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7, специальный выпуск. С. 141–146.
- [48] *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1982.
- [49] *Aloyan A.E.* Mesoscale and Transboundary Transport of Atmospheric Pollutants with Consideration for Kinetic Processes // Proceedings of the First REMAPE Meeting (Copenhagen. Sept. 26–27, 1996). Roskilde: National Environmental Research Institute, 1997. P. 153–176.
- [50] *Aloyan, A.E.* Mathematical modelling of the interaction of gas species and aerosols in atmospheric dispersive systems // Russ. J. Num. Anal. Math. Modelling. 2000. V. 15, №1. P. 211–224.
- [51] *Aloyan A.E.* Numerical modelling of minor gas constituents and aerosols in the atmosphere // Ecological Modelling. 2004.
- [52] *Aloyan A.E., Arutyunyan V.O., Kuznetsov Yu. A., He J.* Modelling the regional transport and transformation of gaseous species in the atmosphere // Izv. RAN. Phys. Atmos. Ocean. 2004. V. 40, №4. P. 523–534.
- [53] *Aloyan A.E., Arutyunyan V.O., Louzan P.O.* Numerical Modelling in the Regional Problems of Environmental Protection // IFAC Workshop on Modelling and Control in Environmental Issues. Yokohama, Japan. August 22–23, 2001. Berlin: Elsevier, 2001. P. 163–167.

- [54] *Aloyan A.E., Arutyunyan V.O., Lushnikov A.A., Zagainov V.A.* Transport of coagulating aerosol in the atmosphere // *J. Aeros. Sci.* 1997. Vol. 28, № 1. P. 67–85.
- [55] *Aloyan A.E., Arutyunyan V.O., Marchuk G.I.* Dynamics of mesoscale boundary atmospheric layer and impurity spreading with the photochemical transformation allowed for // *Russ. J. Num. Anal. Math. Model.* 1995. V. 10, № 2. P. 93–114.
- [56] *Aloyan A.E., Egorov V.D., Marchuk G.I., Piskunov V.N.* Aerosol formation mathematical modelling with consideration for condensation kinetics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1993. V. 7, № 6. P. 457–472.
- [57] *Benkovitz C. M., Scholtz M. T., Pacyna J., Tarrason L., Dignon J., Voldner E. C., Spiro P. A., Logan J. A., Graedel T. E.* Global gridded inventories of anthropogenic emissions of sulfur and nitrogen // *J. Geophys Res.* 1996. V. 101. P. 29239–29253.
- [58] *Binkowski F.S., Shankar U.* The regional particulate matter model. Model description and preliminary results // *J. Geophys. Res.* 1995. V. 100, №26. P. 191–226, 209.
- [59] *Businger J.A., Wyngard I.C., Izumi Y., Bradley E.F.* Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer // *J. Atm. Sci.* 1971. V. 28, № 2. P. 181–189.
- [60] *Clarke A.D.* Atmospheric nuclei in the remote free troposphere // *J. Atmos. Chem.* 1992. V. 14. P. 479–488.
- [61] *Curran P.J., Foody G.M., Kondratyev K.Ya., Kozoderov V.V., Fedchenko P.P.* Remote Sensing of Soils and Vegetation in the USSR. London: Taylor and Francis, 1990.
- [62] *Gal-Chen T., Somerville C.J.* Numerical Solution of the Navier–Stokes equations with topography // *J. Comp. Phys.* 1975. V.17, № 3. P. 276–310.
- [63] *Gear C.W.* Numerical Initial Value Problems in ODE. New-Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [64] *Gelbard, F., Seinfeld J.H.* Simulation of multicomponent aerosol dynamics // *J. Colloid Interface Sci.* 1980. V. 78. P. 541–556.
- [65] *Gery M.W., Whitten G.Z., Killus J.P., Dodge M.C.* A photochemical kinetics mechanism for urban and regional-scale computer modelling // *J. Geophys. Res.* 1989. V. 94, № D10. P. 12925–12956.
- [66] *Grandel J.* Aspects of Risk Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1992.
- [67] *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.
- [68] *Jacobs C.M., Van Pul W.A.J.* Long-Range Atmospheric Transport of Persistent Organic Pollutants // Description of surface–atmosphere exchange modules and implementation in EUROS. RIVM. Report 722401013. 1996.
- [69] *Kalnay E., Kanamits M., Kistler R. et al.* The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 1996. V. 77. P. 437–471.
- [70] *Kondratyev K.Ya., Kozoderov V.V., Smokty O.I.* Remote Sensing of the Earth from Space: Atmospheric Correction. Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- [71] *Kulmala M., Laaksonen A.* Pirjola Parameterization for sulfuric acid/water nucleation rates // *J. Geophys. Res.* 1998. V. 103. P. 8301–8307.
- [72] *Lambert J.D.* Stiffness // Computational Techniques for ODE (eds. Gladwell, Sanyal). London: Academic Press, 1980.

- [73] *Meng Z., Dabub D., Seinfeld J.H.* Size-resolved and chemically resolved model of atmospheric aerosol dynamics // *J. Geoph. Research.* 1998. V. 103. P. 3419–3435.
- [74] *Miranker W.L.* Numerical Methods for Stiff ODE and Singular Perturbation Problems. Boston–London: Reidel, 1981.
- [75] *Penenko V.V.* Methodology of inverse modeling for the problems of climate changes and environmental protection // *Advanced Mathematics: Computations and Applications.* Novosibirsk: NCC Publisher, 1995. P. 358–367.
- [76] *Penenko V., Baklanov A., Tsvetova E.* Methods of sensitivity theory and inverse modeling for estimation of source parameters // *FGCS.* 2002. V. 18. P. 661–671.
- [77] *Seinfeld J.* Atmospheric Chemistry and Air Pollution. New York: A Wiley Interscience Publication, 1986.
- [78] *Steele L.P. et al.* The global distribution of methane in the atmosphere // *J. Atm. Chem.* 1987. № 5. P. 125–171.
- [79] *Suck S.H., Brock J.R.* Evolution of atmospheric aerosol particle size distribution via Brownian coagulation: numerical simulation // *J. Aerosol Sci.* 1979. V.10. P. 581–590.
- [80] *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme: 2. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme // *J. Comp. Phys.* 1974. V.14. P. 360–370.
- [81] *Verwer J.G.* Gauss–Seidel iterations for stiff ODEs from chemical kinetics // *SIAM J. Scientific Comput.* 1994. V. 15. P. 1243–1250.
- [82] *Verwer J.G., Simpson D.* Explicit methods for stiff ODEs from atmospheric chemistry // *Applied Numerical Mathematics.* 1995. № 18. P. 413–430.
- [83] *Wealer A.S., Lurmann J.H., Seinfeld J.H.* Modelling urban and regional aerosols. 1. Model development // *Atmos. Environment.* 1994. V. 28. P. 531–546.
- [84] *Willoughby R.A.* Stiff Differential Systems. New York: Plenum Press, 1974.

# Анализ данных и моделирование инфекционных заболеваний

*А.А. Романюха, С.Г. Руднев, С.М. Зуев*

## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	352
<b>1. Моделирование инфекционных заболеваний</b> . . . . .	353
1.1. Базовая математическая модель инфекционного заболевания	355
1.2. Математическая модель противовирусного иммунного ответа	357
1.3. Математическая модель вирусного гепатита В . . . . .	362
1.4. Математическая модель острой респираторной инфекции, вызванной вирусами гриппа А . . . . .	364
1.5. Математическая модель бактериальной пневмонии . . . . .	366
1.6. Математическое моделирование возрастных изменений попу- ляции периферических Т-лимфоцитов . . . . .	378
<b>2. Параметризация в математических моделях заболеваний</b>	385
2.1. Проблема "персонализации" модели . . . . .	385
2.2. Что такое параметризация . . . . .	386
2.3. Параметризация в моделях заболеваний . . . . .	389
2.4. Сопоставление с данными наблюдений . . . . .	392
2.5. Параметризация в базовой модели инфекционного заболева- ния . . . . .	396
<b>3. Задачи и направления дальнейших исследований</b> . . . . .	397
<b>Литература</b> . . . . .	400

## Введение

Исследования по созданию математических методов анализа клинико-лабораторных данных и математического моделирования инфекционных заболеваний под руководством проф. Г. И. Марчука начались в ВЦ СО АН СССР в 1973 году. К этому времени над аналогичными или смежными задачами работали группы математиков и биофизиков в Москве, Ленинграде, Киеве и некоторых других городах СССР, а также ряд коллективов в США, Великобритании, Италии и Израиле.

Отметим следующие характерные особенности подхода, сложившегося в коллективе под руководством Г. И. Марчука:

- 1) тесные профессиональные контакты с врачами и иммунологами, включая совместные исследования, семинары и публикации;
- 2) сочетание чисто прикладных исследований, отвечающих на конкретные вопросы клинической практики, с развитием новых теоретических моделей иммунного ответа и инфекционных заболеваний, предназначенных для объяснения и усвоения результатов анализа клинических и лабораторных данных;
- 3) стремление применить результаты теоретических исследований математических моделей в клинической практике.

Первый этап работ был посвящен построению и применению методов объективной количественной оценки тяжести заболевания. В ходе исследований было построено несколько индексов, позволяющих оценивать тяжесть различных инфекционных заболеваний. Применение индексов для анализа данных течения болезни дало чувствительный и объективный метод оценки эффективности лечения [23]. Эти исследования позволили количественно описать типичные варианты болезни и на основе имеющихся клинических данных выделить факторы, влияющие на динамику выздоровления. К числу таких факторов относятся анамнез больного и характеристики иммунного ответа.

Важным результатом этих исследований стало формирование представлений об инфекционной болезни как о динамическом процессе взаимодействия патогена, органа-мишени и иммунной системы. Показатели состояния больного — симптомы и результаты лабораторных исследований — как следствия этих взаимодействий лишь косвенно отражают их динамику. Поэтому для изучения основных количественных закономерностей формирования неблагоприятных вариантов течения и исходов заболевания необходимо перейти к описанию болезни в терминах ее базовых физических характеристик, таких как количество или концентрация клеток органа-мишени, иммунной системы и патогенов. Такое описание было реализовано в виде *базовой математической модели инфекционного заболевания*.

## 1. Моделирование инфекционных заболеваний

К настоящему времени в клинической иммунологии получены фундаментальные знания о закономерностях реакций иммунной системы организма при инфекционных заболеваниях [24, 27, 29]. Важным стало открытие универсального характера процессов иммунной защиты — распознавания, обучения и памяти, — не зависящих от конкретных особенностей патологических процессов, инициируемых вирусами или бактериями.

Используемые для описания инфекционных заболеваний математические модели являются, как правило, сложными и нелинейными и имеют большое количество параметров. Для оценки величин параметров можно использовать несколько подходов. Условно их можно разделить на два класса: *детализирующие* и *обобщающие*.

Пример обобщающего подхода предложен в работе [26]. Подход основан на предположении о согласованности изменений скоростей биохимических и физиологических процессов в организме с вариациями индивидуально для каждого организма параметра подобия  $H$ , характеризующего относительную интенсивность микродвижений взаимодействующих частиц в жидких средах исследуемого организма по сравнению с базовым организмом. В этом случае оценка параметров модели для конкретного больного сводится к оценке одного параметра  $H$ , а остальные меняются пропорционально различным степеням  $H$ . Эта гипотеза привлекательна, однако нуждается в экспериментальной проверке и анализе условий применимости. В частности, необходимо знать, каким свойствам должна удовлетворять модель, к которой применяется данный подход, насколько обоснованно предположение об однородности организмов и ряд других вопросов. Подробнее этот подход будет рассмотрен в разделе 3.

Идея детализирующего подхода состоит в том, чтобы использовать как можно больше априорной информации, данных, непосредственно не связанных с конкретным инфекционным заболеванием, но характеризующих аналогичные процессы, наблюдаемые в экспериментах на животных или в опытах *in vitro*. Такой подход был использован при построении оценок параметров моделей вирусного гепатита В и гриппа А. Дополнительная информация используется для построения нулевого приближения значений параметров и границ допустимых значений параметров, а также для построения “идеального образа” изучаемого процесса на основе экспериментальных данных и теоретических представлений. Данные, характеризующие течение вирусных и бактериальных инфекций, как правило, представляют собой результаты разнообразных по целям и методикам измерений отдельных процессов, происходящих в организме при инфекционных заболеваниях, и не могут быть напрямую использованы для идентификации параметров моделей. В этой связи предлагается подход к построению обобщенной количественной картины заболевания, в которой процессы иммунного ответа и развития инфекционного возбудителя тщательно проанализированы и количественно согласованы. Недостатками такого подхода являются очевидная неоднозначность обобщенной картины, ее грубость, что ограничивает область применения данного подхода первой фазой исследования модели.

При исследовании модели бактериальной пневмонии был использован подход, основанный на предположении, что в организме реализуются те

варианты защитных реакций, которые удовлетворяют некоторому критерию оптимальности. В качестве такого критерия рассматривались суммарные затраты энергии на функционирование защитных систем организма и потери энергии, связанные с инфекционными заболеваниями. Этот подход можно считать попыткой синтеза разных приемов идентификации, так как в нем для построения нулевого приближения используется априорная информация, а для уточнения значений параметров — предположение об оптимальности.

### 1.1. Базовая математическая модель инфекционного заболевания

Для исследования основных количественных закономерностей течения инфекционных процессов Г. И. Марчуком в 1975 году была предложена базовая математическая модель инфекционного заболевания [14]. Как уже отмечалось, основной задачей этой модели был переход к описанию болезни как физического процесса взаимодействия клеток и молекул иммунной системы, органа-мишени и патогена.

К моменту появления базовой модели инфекционного заболевания уже было опубликовано несколько математических моделей иммунного ответа [22, 43, 44, 50, 52]. Однако предложенная Г. И. Марчуком модель имеет ряд отличительных особенностей, в совокупности выделяющих ее из ряда остальных моделей и позволяющих до сих пор использовать при теоретических исследованиях иммунной системы. Перечислим эти особенности:

- в качестве базового механизма иммунного ответа использована клонально-селекционная теория Бернета, сохранившая свое значение как элемент фундамента современной иммунологии;
- введена переменная  $m$ , описывающая повреждение органа-мишени, что превращает модель иммунного ответа в модель инфекционного заболевания;
- для описания процессов размножения иммунокомпетентных клеток использованы уравнения с запаздывающим аргументом, что позволяет более точно описать динамику иммунного ответа;
- введена обратная связь, описывающая снижение интенсивности иммунного ответа при увеличении степени поражения органа-мишени (функция  $\xi(m)$ ).

Зависимыми переменными базовой модели являются

- $V(t)$  — количество чужеродных размножающихся антигенов (патогенов) в организме в момент времени  $t$ ;
- $F(t)$  — количество антител. Под антителами понимаются специфические молекулы иммунной природы, нейтрализующие патогены (иммуноглобулины, иммуноглобулиновые рецепторы и т. д.);

- $C(t)$  — количество плазматических клеток. Эта популяция включает как носителей, так и продуцентов антител;
- $m(t)$  — доля пораженной массы органа-мишени. Это обобщенная характеристика того повреждения, которое патоген наносит органу-мишени,  $m(t) = 1 - M(t)/M^*$ , где  $M(t)$  — количество клеток органа-мишени в момент  $t$ , а  $M^*$  — количество клеток в норме. Введение в модель уравнения для величины  $m(t)$  позволяет связать воедино описание иммунной реакции и патологических процессов и рассматривать ее как базовую модель инфекционного заболевания.

Базовая математическая модель инфекционного заболевания построена на основе соотношений баланса для каждой из зависимых переменных. Она имеет вид системы 4-х нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Первое уравнение описывает динамику численности патогенов в организме:

$$\frac{dV}{dt} = \beta V - \gamma FV. \quad (1.1)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает процесс размножения патогенов, второе — сокращение их численности в результате нейтрализации антителами.

Второе уравнение описывает динамику численности плазматических клеток:

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m) F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_c (C - C^*). \quad (1.2)$$

Первое слагаемое в правой части характеризует образование плазматических клеток,  $\tau$  — время, в течение которого происходит формирование клона плазматических клеток. Второе слагаемое описывает процесс поддержания популяции плазматических клеток в нормальных условиях за счет естественной гибели плазматических клеток и притока из костного мозга клеток-предшественников.

Третье уравнение описывает динамику численности антител:

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F. \quad (1.3)$$

Первое слагаемое в правой части описывает продукцию антител плазматическими клетками, второе — расход антител на нейтрализацию патогенов, а третье — уменьшение количества антител в результате естественной гибели.

Четвертое уравнение описывает динамику относительного поражения органа-мишени:

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m. \quad (1.4)$$



Первое слагаемое в правой части характеризует повреждение органа-мишени под действием патогенов, второе — его восстановление за счет регенерации.

Введение функции  $\xi(m)$  в уравнение (1.2) для плазматических клеток позволяет феноменологически описать снижение функции иммунной системы в зависимости от степени повреждения органа-мишени. Простейший вид этой функции  $\xi(m) = 1 - m(t)$ .

Подробное исследование аналитических свойств базовой модели инфекционного заболевания имеется в работе [1]. Модель оказалась полезной для изучения общих закономерностей течения инфекций и интерпретации некоторых результатов наблюдений, в частности, по биостимуляции иммунитета при хронических инфекциях и механизмов развития смешанных инфекций [15]. Примеры результатов зарубежных исследователей по изучению и применению базовой модели можно найти в [47, 76].

Задача количественного моделирования вирусных и бактериальных инфекций определила необходимость построения более подробных математических моделей. Для этого в [18] была предложена математическая модель противовирусного иммунного ответа, а на ее основе — модель противобактериального иммунного ответа.

## 1.2. Математическая модель противовирусного иммунного ответа

При построении математической модели противовирусного иммунного ответа предполагалось, что реакция иммунной системы на размножение вирусов внутри клеток-мишеней является ведущим фактором, влияющим на клиническое течение вирусного заболевания. Иммунная реакция на вирусное вторжение включает в себя реакцию Т- и В-систем иммунитета. Основным механизмом подавления инфекции — уничтожение зараженных вирусом клеток, осуществляемое цитотоксическими Т-лимфоцитами. Попадая из зараженных клеток в кровь, вирусы нейтрализуются антителами, продуцируемыми в результате В-клеточного ответа. В соответствии с этой моделью тяжесть течения болезни зависит от масштаба заражения вирусами органа-мишени и эффективности иммунного ответа.

При описании реакции иммунной системы учитывались два основных механизма управления пролиферацией и дифференцировкой лимфоцитов — *клональная селекция* и *двойное распознавание*. В этой модели, как и в базовой, учтен механизм неспецифической иммуносупрессии, обусловленной поражением органа-мишени и, следовательно, общим снижением функциональных возможностей организма.

При построении уравнений, описывающих развитие противовирусного Т-клеточного иммунного ответа, были сделаны следующие предположения:

- макрофаги ( $M$ ) поглощают вирусы ( $V_f$ ) и после их частичного разрушения (процессинга) выставляют вирусные антигены на своей поверхности в комплексе с молекулами главного комплекса гистосовместимости (ГКГ) класса II;
- количество макрофагов в организме достаточно велико, чтобы презентующие антигены макрофаги ( $M_V$ ) возникали со скоростью, пропорциональной количеству вирусов;
- стимуляция Т-хелперов ( $H_E$ ), участвующих в делении и дифференцировке цитотоксических Т-лимфоцитов ( $E$ ), зависит от численности предсуществующего клона клеток данной специфичности, а также от количества клеток  $M_V$ ;
- $H_E$ , стимулированные  $M_V$ , делятся. При достаточном количестве клеток  $M_V$  возникшие в результате деления Т-хелперы вновь стимулируются;
- под влиянием двух сигналов — от  $M_V$  и  $H_E$  — в результате деления увеличивается численность клона лимфоцитов  $E$ , обладающих цитотоксическим действием в отношении зараженных вирусом клеток ( $C_V$ ). Количество образующихся в результате деления и дифференцировки клеток  $E$ , распознающих вирусные антигены в комплексе с молекулами ГКГ класса I, зависит от численности предсуществующего клона клеток данной специфичности, а также от количества клеток  $M_V$  и  $H_E$ ;
- клетки тропных к вирусу органов и тканей организма имеют на своей поверхности молекулы ГКГ класса I, которые у зараженных вирусом клеток образуют комплекс с вирусным антигеном. В течение некоторого времени зараженные вирусом клетки функционируют нормально, а затем гибнут вследствие разрушения цитотоксическими Т-лимфоцитами или прямого цитотоксического действия вирусов;
- нефункционирующую вследствие разрушения вирусами часть органа-мишени ( $m$ ) образуют поврежденные вирусом клетки, а также клетки, разрушенные цитотоксическими лимфоцитами.

При построении уравнений, описывающих развитие противовирусного В-клеточного (гуморального) иммунного ответа, предполагалось, что

- скорость стимуляции Т-хелперов ( $H_B$ ), участвующих в делении и дифференцировке В-лимфоцитов ( $B$ ), зависит от численности предсуществующего клона данной специфичности, а также от количества клеток  $M_V$ ;

- $H_B$ , стимулированные  $M_V$ , делятся. При достаточном количестве клеток  $M_V$  возникшие в результате деления Т-хелперы вновь стимулируются;
- под влиянием двух сигналов — от  $M_V$  и  $H_B$  — В-лимфоциты дают начало клону плазматических клеток  $P$ , продуцирующих антитела  $F$ . Количество плазматических клеток, образующихся в результате деления и дифференцировки В-лимфоцитов, зависит от предсуществующего клона В-лимфоцитов данной специфичности, а также от количества клеток  $M_V$  и  $H_B$ ;
- антитела  $F$  нейтрализуют внеклеточные вирусные частицы, выходящие из зараженных клеток.

В модели рассматривается лишь популяция свободных, т. е. внеклеточных, вирусов, находящихся в лимфе и плазме крови. Предполагается, что процесс размножения вирусов в клетке можно описать выбором коэффициента размножения вирусов. Уравнения модели строятся на основе соотношений балансов компонентов, участвующих в иммунном ответе на вирусное вторжение.

Уравнение для количества свободных вирусов имеет вид

$$\frac{dV_f}{dt} = \nu C_V + nb_{CE}C_V E - \gamma_{VF}V_f F - \gamma_{VM}V_f - \gamma_{VC}V_f(C^* - C_V - m). \quad (1.5)$$

Первое слагаемое справа описывает увеличение численности популяции свободных вирусов вследствие их репликации в зараженных клетках и секреции в межклеточное пространство, второе — поступление вирусов, высвобождающихся при разрушении зараженных клеток цитотоксическими лимфоцитами. Остальные слагаемые описывают уменьшение количества вирусов за счет нейтрализации их антителами, поглощения макрофагами и расхода на заражение клеток органа-мишени.

Уравнение для количества макрофагов, связанных с вирусами ( $M_V$ ):

$$\frac{dM_V}{dt} = \gamma_{MV}M^*V_f - \alpha_M M_V. \quad (1.6)$$

В правой части уравнения описано увеличение численности популяции стимулированных вирусами макрофагов ( $M^*$  — количество макрофагов в организме, определяемое гомеостазом) и снижение численности в результате естественной гибели.

Уравнение для количества Т-лимфоцитов-помощников  $H_E$ , обеспечивающих пролиферацию цитотоксических Т-лимфоцитов, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dH_E}{dt} = & b_H^E[\xi(m)\rho_H^E M_V(t - \tau_H^E)H_E(t - \tau_H^E) - M_V H_E] - \\ & - b_p^{H_E} M_V H_E E + \alpha_H^E(H_E^* - H_E). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Первое слагаемое справа описывает увеличение численности клеток  $H_E$  за счет деления, происходящего под действием стимуляции макрофагами  $M_V$ , при этом учитывается время задержки появления новых клеток ( $\tau_H^E$ ); второе слагаемое описывает переход стимулированных клеток  $H_E$  в состояние деления. Третье слагаемое описывает уменьшение количества клеток  $H_E$  вследствие кооперации их с цитотоксическими Т-клетками ( $E$ ). Четвертое слагаемое характеризует приток Т-клеток-помощников из тимуса, а пятое — уменьшение их численности в результате естественной гибели клеток.

Уравнение для количества Т-клеток-помощников гуморального иммунного ответа ( $H_B$ ) имеет структуру, аналогичную уравнению для  $H_E$ :

$$\begin{aligned} \frac{dH_B}{dt} = & b_H^B [\xi(m) \rho_H^B M_V (t - \tau_H^B) H_B (t - \tau_H^B) - M_V H_B] - \\ & - b_p^{H_B} M_V H_B B + \alpha_H^B (H_B^* - H_B). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнение для количества цитотоксических Т-лимфоцитов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & b_p^E [\xi(m) \rho_E M_V (t - \tau_E) H_E (t - \tau_E) E (t - \tau_E) - M_V H_E E] - \\ & - b_{EC} C_V E + \alpha_E (E^* - E). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Первое слагаемое справа описывает увеличение численности клеток  $E$  за счет деления в результате стимуляции макрофагами  $M_V$  и Т-клетками-помощниками, при этом учитывается время задержки появления новых клеток ( $\tau_E$ ); второе слагаемое описывает переход стимулированных клеток  $E$  в состояние митоза. Третье слагаемое описывает расход клеток  $E$  на разрушение зараженных вирусами клеток. Четвертое слагаемое характеризует поступление предшественников цитотоксических Т-лимфоцитов из тимуса, пятое — их естественную гибель.

Уравнение для количества В-лимфоцитов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} = & b_p^B [\xi(m) \rho_B M_V (t - \tau_B) H_B (t - \tau_B) B (t - \tau_B) - M_V H_B B] + \\ & + \alpha_B (B^* - B). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Первое слагаемое справа описывает появление В-лимфоцитов в результате деления под действием стимуляции макрофагами  $M_V$  и Т-клетками-помощниками  $H_B$ , при этом учитывается время задержки  $\tau_B$ ; второе слагаемое описывает переход стимулированных В-клеток в состояние деления, третье — приток В-лимфоцитов из костного мозга, четвертое — естественную гибель клеток.

Уравнение для количества плазматических клеток имеет вид

$$\frac{dP}{dt} = b_p^P \xi(m) \rho_P M_V (t - \tau_P) H_B(t - \tau_P) B(t - \tau_P) + \alpha_P (P^* - P). \quad (1.11)$$

Первое слагаемое справа описывает образование плазматических клеток за счет деления и дифференцировки стимулированных В-лимфоцитов в течение времени  $\tau_P$ ; второе слагаемое — поддержание нормального уровня плазматических клеток за счет баланса процессов размножения и дифференцировки В-лимфоцитов и естественной гибели плазматических клеток.

Уравнение для концентрации антител имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \rho_F P - \gamma_{FV} F V_f - \alpha_F F. \quad (1.12)$$

Первое слагаемое справа описывает продукцию антител плазматическими клетками, второе — расход антител на нейтрализацию вирусов, а третье — их естественную гибель.

Динамика количества зараженных вирусом клеток ( $C_V$ ) описывается уравнением

$$\frac{dC_V}{dt} = \sigma V_f (C^* - C_V - m) - b_{CE} C_V E - b_m C_V. \quad (1.13)$$

Первое слагаемое справа описывает заражение нормальных клеток печени вирусами, а второе и третье — разрушение зараженных клеток цитотоксическими Т-лимфоцитами и под действием вирусов, соответственно.

Уравнение для доли разрушенной ткани органа-мишени ( $m$ ) имеет вид

$$\frac{dm}{dt} = b_{CE} C_V E + b_m C_V - \alpha_m m. \quad (1.14)$$

Первые два слагаемых описывают разрушение клеток печени вследствие цитотоксического действия Т-лимфоцитов и вирусов, а последнее — регенерацию органа-мишени.

При значительном повреждении органа-мишени происходит снижение функциональных возможностей организма, в том числе и иммунной системы. Этот процесс учитывается введением функции  $\xi(m) = 1 - m/C^*$ , характеризующей зависимость коэффициента размножения лимфоцитов от величины  $m$ .

Добавляя к приведенной системе уравнений начальные условия общего вида, получаем математическую модель противовирусного иммунного ответа, позволяющую численно исследовать закономерности течения ви-

русных инфекций. Начальные условия задаются в виде

$$\begin{aligned}
 V_f(t_0) &= V_f^0, & M_V(t_0) &= M_V^0, & H_E(t_0) &= H_E^0, \\
 H_B(t_0) &= H_B^0, & E(t_0) &= E^0, & B(t_0) &= B^0, \\
 P(t_0) &= P^0, & F(t_0) &= F_0, & C_V(t_0) &= C_V^0, & m(t_0) &= m_0, \\
 M_V(t)H_E(t) &= \phi_1(t), & & & -\tau_H^{(E)} \leq t < 0, \\
 M_V(t)H_B(t) &= \phi_2(t), & & & -\tau_H^{(B)} \leq t < 0, \\
 M_V(t)H_E(t)E(t) &= \phi_3(t), & & & -\tau_E \leq t < 0, \\
 M_V(t)H_B(t)B(t) &= \phi_4(t), & & & -\tau \leq t < 0, \tau = \max(\tau_B, \tau_P).
 \end{aligned}$$

Построенная модель применяется для количественного моделирования и исследования динамики острого течения вирусного гепатита В и гриппа А.

### 1.3. Математическая модель вирусного гепатита В

Инфекция, вызванная вирусом гепатита В, характеризуется следующими основными особенностями:

- низкий темп размножения вируса делает возможным остановку размножения вируса только за счет иммунного ответа;
- незначительное повреждающее действие вируса на зараженную клетку, как следствие — время жизни зараженной клетки не отличается от времени жизни здоровой клетки;
- болезнь всегда является результатом первичной инфекции, после которой поддерживается устойчивый иммунитет;
- течение и исход болезни в значительной мере определяются амплитудой и согласованностью Т- и В-клеточного иммунного ответов.

На основе современных представлений о механизмах, определяющих течение вирусного гепатита В, можно считать, что модель противовирусного иммунного ответа описывает ведущие процессы этого заболевания. Задача оценки параметров модели (1.5)–(1.14) для вирусного гепатита В решалась следующим образом:

- по экспериментальным и литературным данным строится нулевое приближение  $\alpha_0$ ; параметров модели, при этом используются результаты прямых измерений или предположение, что межклеточные взаимодействия в ходе иммунного ответа следуют законам химической кинетики;
- с использованием клинических и экспериментальных данных, а также современных представлений о механизмах вирусного гепатита В строится *обобщенная картина болезни*, представляющая собой количественное описание ее динамики в терминах переменных модели ( $y_{\text{obs } j}$ );

- на основе нулевого приближения  $\alpha_0$  и данных обобщенной картины проводится уточнение ряда параметров модели;
- результаты идентификации проходят проверку по независимым экспериментальным и клиническим данным.

Данный подход подробно описан в работах [16, 20, 30]. Здесь мы остановимся на описании двух приемов, использованных для преодоления возникших трудностей.

Амплитуда изменений части переменных модели ( $V_f$ ,  $F$ ,  $E$  и  $B$ ) на протяжении болезни составляет  $10^5$ – $10^{12}$  раз. Физический смысл задачи требует, чтобы эти данные были приближены с одинаковой относительной точностью. В противном случае сравнительно низкие значения  $V_f$  в начале и конце болезни завываются на несколько порядков, что недопустимо искажает описание болезни. Поэтому традиционная оценка ошибки вида  $\Phi(\alpha) \sim \sum_{j=1}^M (y(t_j, \alpha) - y_{\text{obs } j})^2$ , где  $y_{\text{obs } j}$  — данные наблюдений и обобщенной картины, а  $y(t_j, \alpha)$  — вектор решения системы уравнений модели в точке  $t_j$ , не позволяла получить приемлемых оценок параметров. В связи с этим был использован следующий функционал невязки:

$$\Phi(\alpha) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{y^{(i)}(t_j, \alpha) - y_{\text{obs } j}^{(i)}}{y_{\text{obs } j}^{(i)}} \right)^2 + \left( \frac{y^{(i)}(t_j, \alpha) - y_{\text{obs } j}^{(i)}}{y^{(i)}(t_j, \alpha)} \right)^2 \right], \quad (1.15)$$

в котором данные наблюдений  $i$ -й переменной модели в момент времени  $t_j$  обозначены как  $y_{\text{obs } j}^{(i)}$ , а соответствующее решение модели — как  $y^{(i)}(t_j, \alpha)$ ;  $M$  — общее количество моментов наблюдений,  $N$  — размерность вектора зависимых переменных модели;  $\alpha$  — вектор идентифицируемых параметров. Для решения задачи поиска минимума функционала  $\Phi(\alpha)$  использовались метод многогранника и квазиньютоновский метод Дэвидона–Флетчера–Пауэлла.

Однако ввиду сложности и нелинейности модели использование функционала (1.15) само по себе еще не гарантирует получения приемлемого приближения решений модели (1.5)–(1.14) к данным обобщенной картины. Численные эксперименты показали, что трудность состоит в выборе идентифицируемых параметров, значения которых меняются в процессе минимизации функционала  $\Phi(\alpha)$ . Если количество одновременно варьируемых параметров превышало 5–7, и если выбор набора параметров был неудачен, то процесс приводил к такому локальному минимуму, в котором решение модели приближало данные неудовлетворительно.

Анализ механизмов развития инфекционного заболевания позволяет представить заболевание как последовательность фаз или стадий, для каждой из которых характерны определенные процессы и зависимости.

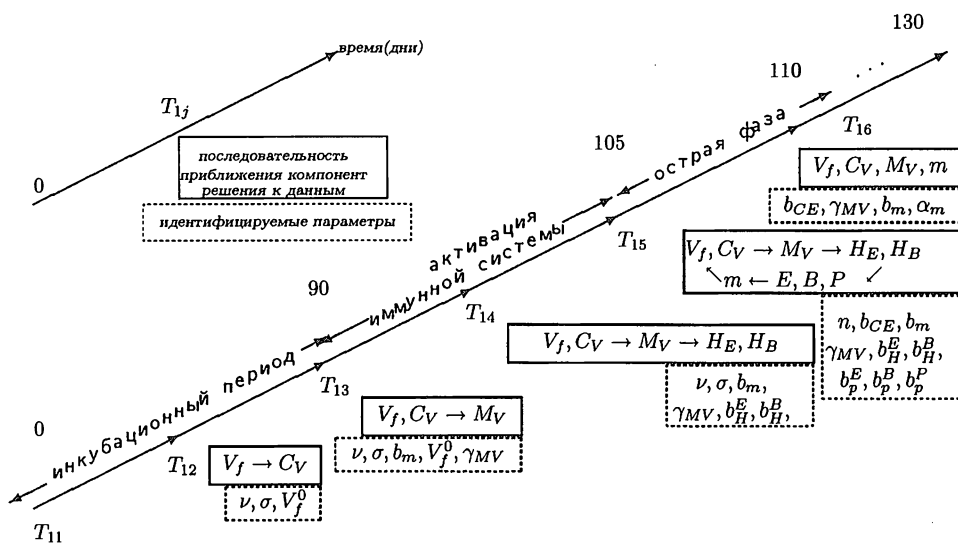


Рис. 1. Схема последовательной идентификации параметров модели по данным обобщенной картины острого течения вирусного гепатита В

Среди моделируемых процессов и переменных можно выделить ведущие, т. е. определяющие все остальные процессы и переменные. Использование этой информации позволяет свести задачу идентификации коэффициентов модели на интервале  $T_{1,M} = [t_1, t_M]$  к последовательности задач приближения решения модели к данным на интервалах  $T_{1,2}, T_{1,3}, \dots, T_{1,M}$  с помощью функционала (1.15). Последовательные фазы развития болезни, ведущие процессы и соответствующие им параметры показаны на рис. 1. Применение данного подхода позволило успешно решить задачу приближения решения модели противовирусного иммунного ответа к данным обобщенной картины вирусного гепатита В.

#### 1.4. Математическая модель острой респираторной инфекции, вызванной вирусами гриппа А

Как уже отмечалось, механизмы иммунного ответа имеют универсальный характер и, следовательно, модель противовирусного иммунного ответа должна описывать любую вирусную инфекцию. Поэтому при переходе к моделированию новой вирусной инфекции должны меняться величины только тех параметров, которые характеризуют свойства вируса, а именно, их инфекционность ( $\gamma_{VC}$ ), скорость размножения ( $\nu$ ) и патогенность ( $b_m$ ). Однако реальная ситуация сложнее; рассмотрим это на примере острой респираторной инфекции вирусами гриппа А.



Свойства вируса гриппа А резко отличаются от свойств вируса гепатита В:

- вирус гриппа А быстро размножается в клетках эпителия дыхательных путей: через сутки из зараженной клетки выходит  $5 \cdot 10^2 - 10^3$  вирусных частиц (при гепатите В — через 2–3 суток и по 5–15 вирусов в сутки);
- клетка эпителия после выхода из нее вирусов гриппа А погибает, а клетка печени (гепатоцит) продолжает продуцировать вирусы гепатита В до тех пор, пока его не распознает и не разрушит цитотоксический Т-лимфоцит.

Для образования в результате иммунного ответа большого количества лимфоцитов и антител требуется как минимум 5-6 дней. За это время вирус гриппа А способен заразить и разрушить все клетки эпителия дыхательных путей, что привело бы к очень тяжелому заболеванию. Однако чаще всего этого не происходит, и большинство людей болеют гриппом в легкой форме. Значительная часть клеток эпителия не заражается вирусами гриппа. Устойчивость клеток эпителия к вирусу вызывается действием интерферона  $\alpha$  (IFN- $\alpha$ ).

Известно что IFN- $\alpha$  могут вырабатывать все клетки организма при попадании в них вируса, однако анализ данных по кинетике его синтеза показывает, что основным источником IFN- $\alpha$  являются макрофаги. Некоторое количество этих клеток присутствует во всех тканях организма, в том числе и в эпителии дыхательных путей. Для описания развития вирусной инфекции с учетом защитного действия IFN- $\alpha$  в модель противовирусного иммунного ответа дополнительно вводятся следующие переменные:

- $M_I(t)$  — концентрация макрофагов, продуцирующих IFN- $\alpha$  (в эпителии верхних отделов дыхательных путей);
- $I(t)$  — концентрация IFN- $\alpha$  (в эпителии верхних отделов дыхательных путей);
- $C_R(t)$  — концентрация клеток эпителия, защищенных от вирусной инфекции (в эпителии верхних отделов дыхательных путей).

Для описания динамики этих переменных используются следующие уравнения:

$$\frac{dM_I}{dt} = \gamma_{MI} V_f (M_I^* - M_I) - \alpha_{MI} M_I, \quad (1.16)$$

$$\frac{dI}{dt} = \rho_I M_I - \alpha_I I - \sigma_I I (C^* - C_V - C_R - m), \quad (1.17)$$

$$\frac{dC_R}{dt} = \sigma_R I (C^* - C_V - C_R - m) - \alpha_R C_R. \quad (1.18)$$

Уравнение (1.16) описывает изменение концентрации макрофагов, продуцирующих IFN- $\alpha$ . Первое слагаемое в правой части описывает продукцию интерферона в неактивированных макрофагах ( $M_I^* - M_I$ ), скорость которой пропорциональна концентрации свободных вирусов  $V_f$ . Второе слагаемое описывает потерю активированными макрофагами способности продуцировать интерферон. Предполагается, что после потери способности продуцировать интерферон макрофаг под воздействием  $V_f$  может быть снова переведен в состояние продукции интерферона. В действительности это предположение верно лишь для первых 6–7 дней после начала инфекции, затем макрофаг на некоторое время переходит в рефрактерное состояние и не вырабатывает интерферон.

Уравнение (1.17) описывает изменение концентрации IFN- $\alpha$ . Слагаемые в правой части описывают продукцию интерферона индуцированными макрофагами, разрушение свободного интерферона в межклеточном пространстве и его связывание с рецепторами интактных клеток эпителия, соответственно.

Уравнение (1.18) описывает изменение концентрации эпителиальных клеток, устойчивых к вирусной инфекции под действием интерферона. Первое слагаемое справа описывает переход интактных эпителиальных клеток в состояние противовирусной устойчивости, второе — потерю этого состояния.

Учет в модели противовирусного иммунного ответа защитного антивирусного действия интерферона требует небольших изменений уравнений для  $V_f$  и  $C_V$ :

$$\frac{dV_f}{dt} = \nu C_V + nb_{CE}C_V E - \gamma_{VF}V_f F - \gamma_{VM}V_f - \gamma_{VC}V_f(C^* - C_V - C_R - m), \quad (1.19)$$

$$\frac{dC_V}{dt} = \sigma V_f(C^* - C_V - C_R - m) - b_{CE}C_V E - b_m C_V. \quad (1.20)$$

Видоизмененная таким образом модель удовлетворительно описывает клинические данные по острой респираторной инфекции вирусами гриппа А [45].

## 1.5. Математическая модель бактериальной пневмонии

Основными процессами, лежащими в основе инфекционной патологии, являются иммунный ответ и воспаление. Несмотря на углубленную разработку различных биологических и медицинских аспектов воспалительной реакции ее сущность и значение для организма до конца не раскрыты [35, 40]. Особенностью существующих математических моделей инфекционных заболеваний, вызванных бактериями, является то, что они по-

дробно описывают механизмы специфического иммунитета [3, 54, 61]. Однако, как показывает анализ механизмов ряда инфекций (например, вызванных условно-патогенной микрофлорой), роль специфических компонент иммунитета в возникновении заболеваний не является столь очевидной и определяющей по сравнению с фазой их завершения [13, 51, 64].

Наряду со специфическим иммунитетом в противобактериальной защите легких участвуют и другие защитные механизмы, связанные прежде всего с функционированием системы фагоцитов, поглощающих патоген на всех стадиях инфекционного процесса [21]. Для ряда инфекций фагоциты являются единственным типом клеток, уничтожающих микроорганизмы. Ранее были построены и исследованы математические модели, описывающие динамику фагоцитарных защитных реакций в организме [55, 56]. Однако в них не учитывалось, что в результате иммунного ответа скорость и эффективность фагоцитоза могут быть существенно повышены.

Одним из заметных проявлений воспалительной реакции при бактериальной инфекции в легких является резкое увеличение объема жидкости в альвеолах (альвеолярный отек). Это создает условия для увеличения скорости доставки защитных клеток и веществ из крови в легкие, но вместе с тем приводит к изменению структуры взаимодействий фагоцитов и бактерий в участке повреждения. Влияние отека на развитие инфекции ранее в математических моделях не исследовалось.

В связи с этим возникла задача построения математической модели противобактериальной иммунной защиты, описывающей механизмы согласования рассматриваемых иммунофизиологических процессов. Эта задача была решена на примере одного из инфекционных патологических процессов — очаговой пневмонии, вызываемой условно-патогенными микроорганизмами. Особенность таких инфекций заключается в том, что в условиях нормального функционирования системы фагоцитов (главным образом, альвеолярных макрофагов) болезнь не возникает даже при постоянном поступлении микроорганизмов из внешней среды. Если же под влиянием некоторых факторов (таких как вирусные инфекции, переохлаждение, курение и т. п.) происходит нарушение функции фагоцитов, то размножение микроорганизмов приводит к повреждению и отеку легких, сопровождаемому усиленным притоком нейтрофилов (фагоцитов, несколько отличающихся от альвеолярных макрофагов) и других компонент плазмы крови. Развитие этих процессов происходит в первые часы и сутки после начала инфекции.

Известно, что противобактериальный иммунный ответ является в основном гуморальным [7], т. е. приводит к выработке антител. Ввиду широкой распространенности условно-патогенных бактерий во внешней среде и частой встречаемости их в составе нормальной микробной флоры человека в крови постоянно поддерживается высокий уровень антител. Например,

количество специфических антител к *S. aureus* обычно составляет не менее 0,02 % от общей концентрации антител [63, 70]. С развитием инфекции часть антигенного материала с током межклеточной жидкости попадает в лимфатические узлы легких (ЛУ), где происходит иммунный ответ, приводящий через 5–7 суток к значительному увеличению продукции антител плазматическими клетками, которые образуются в результате каскадного деления и дифференцировки специфических В лимфоцитов. Антитела поступают из ЛУ через кровоток в участок воспаления, где взаимодействуют с поверхностными антигенами бактерий, что способствует увеличению скорости фагоцитоза [78].

В соответствии с описанной схемой противобактериальной иммунной защиты легких в качестве переменных математической модели пневмонии рассматриваются следующие величины, зависящие от времени:  $K=K(t)$  — концентрация бактерий в объеме жидкости  $V=V(t)$  тех сегментов легких, в которых развивается пневмония;  $M_A=M_A(t)$  — концентрация альвеолярных макрофагов в  $V(t)$ ;  $N_A=N_A(t)$  — концентрация нейтрофилов в  $V(t)$ ;  $M_K=M_K(t)$  — концентрация антиген-презентирующих клеток (макрофагов, дендритических клеток и др.) в лимфатических узлах легких (ЛУ);  $H_B=H_B(t)$  — концентрация специфических Т-клеток-помощников гуморального иммунного ответа в ЛУ;  $B=B(t)$  — концентрация специфических В-лимфоцитов в ЛУ;  $P=P(t)$  — концентрация плазматических клеток в ЛУ;  $F=F(t)$  — концентрация специфических антител в крови;  $m=m(t)$  — концентрация разрушенных клеток в объеме  $V(t)$ .

Математическая модель пневмонии имеет вид системы 10 нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & \beta K - g(t)(l_1 g_1 + l_2 g_2) M_A K - \\ & - (l_1 h_1 + l_2 h_2) N_A K \frac{F}{F^*} - \frac{dV}{dt} \frac{K}{V}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_A}{dt} = & \gamma K + \alpha_M (M_A^* - M_A) - \\ & - c_1 g(t)(l_1 g_1 + l_2 g_2) M_A K - \frac{dV}{dt} \frac{M_A}{V}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_A}{dt} = & \chi K M_A + \alpha_N (N_A^* - N_A) - \\ & - c_2 (l_1 h_1 + l_2 h_2) N_A K \frac{F}{F^*} - \frac{dV}{dt} \frac{N_A}{V}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\frac{dV}{dt} = \delta (V^{\max} - V) K + \alpha_V (V^* - V), \quad (1.24)$$

$$\frac{dM_K}{dt} = (M_K^{\max} - M_K) \gamma_{MK} K - \alpha_{MK} M_K, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_B}{dt} &= b_H \left[ \rho_H M_K(t - \tau_H) H_B(t - \tau_H) - M_K H_B \right] - \\ &\quad - b_P M_K H_B B + \alpha_H (H_B^* - H_B), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= b_P^B \left[ \rho_B M_K(t - \tau_B) H_B(t - \tau_B) B(t - \tau_B) - \right. \\ &\quad \left. - M_K H_B B \right] + \alpha_B (B^* - B), \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= b_P^P \rho_P M_K(t - \tau_P) H_B(t - \tau_P) B(t - \tau_P) + \\ &\quad + \alpha_P (P^* - P), \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho_F P + \alpha_F (F^* - F), \quad (1.29)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma K + \alpha_m (m^* - m) - \frac{dV}{dt} \frac{m}{V}. \quad (1.30)$$

Начальные условия соответствуют возникновению инфекции в момент времени  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} K(0) &= K_0, \quad M_A(0) = M_A^*, \quad N_A(0) = N_A^*, \quad V(0) = V^*, \quad M_K(0) = 0, \\ H_B(0) &= H_B^*, \quad B(0) = B^*, \quad P(0) = P^*, \quad F(0) = F', \quad m(0) = m^*; \\ M_K(t)H_B(t) &= 0 \quad \forall t \in [-\tau_H, 0]; \\ M_K(t)H_B(t)B(t) &= 0 \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max(\tau_B, \tau_P). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Известно, что большинство пневмоний у взрослых людей возникает на фоне респираторных вирусных инфекций. Уменьшение скорости фагоцитоза бактерий альвеолярными макрофагами по сравнению с нормальной, приводящее к развитию пневмонии (например, при вирусной инфекции), описывается в модели функцией  $g(t)$  (в уравнениях (1.21) и (1.22)). На основании количественных данных о зависимости величины кратности снижения скорости фагоцитоза макрофагов при вирусной инфекции от концентрации иммунных комплексов [51] мы предположили, что функция, описывающая временное снижение скорости фагоцитоза, имеет вид  $g(t) = 1 - (1 - a_1^{-1}) \cdot e^{-a_2 t}$ , где  $a_1$  — максимальная кратность снижения скорости фагоцитоза при вирусной инфекции, а параметр  $a_2$  характеризует темп восстановления фагоцитарной способности макрофагов.

Последние слагаемые в правой части уравнений (1.21)–(1.23) и (1.30) описывают на основе закона сохранения массы поправку в изменение концентраций клеток, вносимую изменением объема жидкости в участке повреждения. Соответствующие оценки параметров построены на основе те-

ории химической кинетики по аналогии с оценками параметров диффузионных взаимодействий частиц на поверхности сферы [77, 81] а также объемных взаимодействий клеток в растворителе с низкой молекулярной массой [81].

С использованием клинических, морфологических и экспериментальных данных [5, 12, 17, 75, 77, 81] построена обобщенная картина пневмонии, представляющая собой количественное описание динамики зависимых переменных модели (1.21)–(1.30). Построены начальные оценки параметров модели. Проведено уточнение части параметров по данным обобщенной картины пневмонии. В качестве величины, характеризующей отклонения решений системы уравнений модели от данных обобщенной картины, был использован следующий функционал:

$$F(\alpha) = \sum_{i,j} (\log_{10} x^i(t_j, \alpha) - \log_{10} x_{\text{exp}}^i(t_j))^2, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  — вектор идентифицируемых параметров модели;  $x^i(t_j, \alpha)$  — значение  $i$ -й компоненты решения системы уравнений модели в момент времени  $t_j$ ;  $x_{\text{exp}}^i(t_j)$  — значение соответствующих данных обобщенной картины.

Для решения задачи минимизации функционала  $F$  на множестве допустимых значений параметров  $\alpha$  (рассматриваются ограничения вида  $0 < a_i \leq \alpha^{(i)} \leq b_i < \infty$ ) использованы метод многогранника и квазиньютоновский метод Дэвидона–Флетчера–Пауэлла. При этом решения исходной системы ОДУ получены на основе линейных многошаговых методов, реализованных в комплексе DIFSUBDEL [4].

Отметим следующие важные особенности предложенной математической модели [32]:

- 1) момент начала инфекции определяется не попаданием патогена в организм, а потерей устойчивости состояния здоровья вследствие внешних причин;
- 2) выздоровление является результатом трех согласованных процессов — немедленного воспалительного ответа, более позднего иммунного ответа и восстановления функции неспецифической защиты (фагоцитоза);
- 3) анализ чувствительности решений модели к вариации параметров показал сильную зависимость характеристик болезни от параметров воспалительного ответа и слабую — от параметров иммунного ответа, что соответствует современным представлениям о механизмах патогенеза бактериальных инфекций.

Ограниченность знаний и неполнота данных об относительном и абсолютном вкладах различных механизмов контроля бактериальных инфекций, например, в процессе выздоровления (теоретически можно вы-

здороветь без иммунного ответа), привели к необходимости решения задачи верификации параметров модели с более общих позиций. Для решения этой задачи был предложен подход, основанный на предположении об энергетической эффективности противoinфекционной защиты организма [31].

При построении количественных оценок энергетической цены противoinфекционной защиты важное значение имеет определение энергетической цены болезни.

### 1.5.1. Энергетическая цена пневмонии

Рассмотрим структуру расходов энергии в организме, вызываемых бактериальной пневмонией. Пусть  $E$  — энергетическая цена пневмонии. Эта величина включает энергию, используемую на синтез и жизнедеятельность инфекционных патогенов в легких ( $E_b$ ), расходы энергии на образование и поддержание функции клеток, осуществляющих иммунную защиту легких ( $E_{i.d.}$ ), расходы на регенерацию поврежденных клеток органа-мишени ( $E_r$ ) и уменьшение отека ( $E_{fil}$ ), а также потери энергии в результате общего нарушения баланса энергии и веществ в ходе инфекционного патологического процесса ( $E_{fit}$ ). Имеем:

$$E = E_b + E_{i.d.} + E_r + E_{fil} + E_{fit}. \quad (1.33)$$

Рассмотрим следующие величины, характеризующие удельные (в расчете на одну клетку) расходы энергии на синтез бактерий ( $\alpha_1$ ), альвеолярных макрофагов ( $\alpha_2$ ), нейтрофилов ( $\alpha_3$ ), антигенпрезентирующих макрофагов в ЛУ ( $\alpha_5$ ), Т-лимфоцитов-помощников гуморального иммунного ответа ( $\alpha_6$ ), В-лимфоцитов ( $\alpha_7$ ), плазматических клеток ( $\alpha_8$ ), антител ( $\alpha_9$ ), а также клеток паренхимы легких ( $\alpha_{10}$ ). Пусть  $\beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8$  — соответствующие удельные скорости расхода энергии на поддержание функции клеток.

Известно, что основная часть энергии, потребляемой бактериями в фазе экспоненциального роста, затрачивается на процессы деления. Пусть  $T$  — длительность инфекции. Тогда выражение для величины  $E_b$  записывается в виде

$$E_b = \alpha_1 \int_0^T \beta K(t) V(t) dt. \quad (1.34)$$

Затраты энергии на иммунную защиту легких ( $E_{i.d.}$ ) могут быть классифицированы по трем признакам:

- 1) расходы на синтез ( $E_s$ ) и поддержание ( $E_m$ ) компонент защиты:

$$E_{i.d.} = E_s + E_m; \quad (1.35)$$

- 2) расходы на постоянную, т.е. независимую от инфекции ( $E_c$ ) и индуцируемую защиту, связанную с повышением расходов энергии в ходе инфекции ( $E_i$ ):

$$E_{i.d.} = E_c + E_i; \quad (1.36)$$

- 3) расходы на неспецифическую фагоцитарную, общую для всех типов патогенов ( $E^n$ ), и специфическую защиту, связанную с образованием специфических иммунокомпетентных клеток и антител ( $E^s$ ):

$$E_{i.d.} = E^n + E^s. \quad (1.37)$$

В соответствии с этой классификацией рассмотрим следующие компоненты энергетической цены иммунной защиты легких:  $E_s^n = E_{sc}^n + E_{si}^n$  — расход энергии на образование неспецифических компонент иммунной защиты легких;  $E_s^s = E_{sc}^s + E_{si}^s$  — расходы на образование специфических компонент иммунной защиты легких;  $E_m^n = E_{mc}^n + E_{mi}^n$  — расходы на функционирование неспецифических компонент иммунной защиты легких;  $E_m^s = E_{mc}^s + E_{mi}^s$  — расходы на функционирование специфических компонент иммунной защиты легких;  $E_c^n = E_{cs}^n + E_{cm}^n$  — расходы на постоянную неспецифическую иммунную защиту легких;  $E_c^s = E_{cs}^s + E_{cm}^s$  — расходы на постоянную специфическую иммунную защиту легких;  $E_i^n = E_{is}^n + E_{im}^n$  — расходы на индуцируемую неспецифическую иммунную защиту легких;  $E_i^s = E_{is}^s + E_{im}^s$  — расходы на индуцируемую специфическую иммунную защиту легких. Имеем:

$$E_{i.d.} = E_s^n + E_s^s + E_m^n + E_m^s = E_c^n + E_c^s + E_i^n + E_i^s. \quad (1.38)$$

Выражения для величин, входящих в правую часть (1.38), построены на основе уравнений математической модели пневмонии (1.21)–(1.30). Например, величина  $E_s^n$  может быть вычислена следующим образом:

$$E_s^n = \alpha_2 \int_0^T (\gamma K(t) + \alpha_M M_A^*) V(t) dt + \alpha_3 \int_0^T (\chi K(t) M_A(t) + \alpha_N N_A^*) V(t) dt + \alpha_2 \alpha_M M_A^* (V_{tot}^* - V^*) T + \alpha_3 \alpha_N N_A^* (V_{tot}^* - V^*) T \quad (1.39)$$

и представляет собой сумму расходов энергии на образование фагоцитов, поступающих в поврежденные (1-е и 2-е слагаемые в правой части (1.39)) и нормальные сегменты легких (3-е и 4-е слагаемые).  $V_{tot}^*$  — общий объем жидкости (альвеолярного сурфактанта) в нормальных легких ( $V_{tot}^* \simeq 90$  мл [81]).



Оценки значений величин удельных расходов энергии в ходе болезни, представленные в табл. 1, были получены на основании следующих данных и предположений.

- Энергетические затраты на синтез бактерий составляют около 0,3 Дж на 1 мг сухого веса [9, 57]. Сухой вес бактерии составляет около 20 % от общего веса [73]; содержание белка составляет 50–70 % сухого веса бактерий.
- Доля затрат энергии на синтез белка в клетке примерно равна относительному содержанию белка на единицу сухого веса клетки [9].
- Схожесть относительного содержания основных биохимических составляющих (белки, нуклеиновые кислоты, липиды, полисахариды) сухого веса бактерий и лейкоцитов [9, 36]; сухой вес эукариотической клетки составляет 30 % от общего веса клетки.
- Средний уровень энергозатрат лейкоцитами составляет  $5 \cdot 10^{-3}$  Вт/г [11].
- Покоящиеся и активированные клетки иммунной системы имеют одинаковый удельный расход энергии на метаболизм на единицу веса.
- Величина удельных затрат энергии на уменьшение отека при бактериальной инфекции легких равна величине удельных затрат энергии на фильтрацию жидкости в почках, составляющей около 2,9 Дж/мл [36, 68].
- Энергетические потери вследствие снижения приспособленности в разгар пневмонии средней тяжести составляют 25 % от величины основного обмена [58, 79].

Таблица 1. Оценки значений величин удельных расходов энергии в процессах противoinфекционной защиты легких при пневмонии

Параметр	Размерность	Оценка	Значение	Параметр	Размерность	Оценка	Значение
$\alpha_1$	Дж/кл	$8 \cdot 10^{-12} - 7 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$				
$\alpha_2$	То же	$9 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$\beta_2$	Дж/(сут·кл)	$4 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_3$	То же	$2 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-7}$	$8,1 \cdot 10^{-8}$	$\beta_3$	То же	$10^{-7} - 9 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-7}$
$\alpha_4$	Дж/мл	1–6	2,9				
$\alpha_5$	Дж/кл	$2 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$\beta_5$	То же	$10^{-7} - 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$
$\alpha_6$	То же	$7 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$\beta_6$	То же	$3 \cdot 10^{-8} - 3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
$\alpha_7$	То же	$7 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-8}$	$\beta_7$	То же	$3 \cdot 10^{-8} - 3 \cdot 10^{-7}$	$1,3 \cdot 10^{-7}$
$\alpha_8$	То же	$2 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-7}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$\beta_8$	То же	$10^{-7} - 10^{-6}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$
$\alpha_9$	Дж/мол.	$5 \cdot 10^{-17} - 10^{-16}$	$9 \cdot 10^{-17}$				
$\alpha_{10}$	Дж/кл	$9 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-7}$	$3,6 \cdot 10^{-7}$	$\beta_{10}$	То же	$2 \cdot 10^{-4} - 10^{-3}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$

Интервалы неопределенности значений параметров в табл. 1 связаны с несколькими факторами, в том числе с ошибками определения веса клеток,

расхода АТФ на высвобождение энергии, потребления клетками энергии в норме, а также возможным изменением этих величин в динамике инфекционного процесса, и некоторыми другими. На основании данных [11, 53, 57] считаем, что каждый из упомянутых факторов вносит неопределенность порядка 50 % относительно базовых значений соответствующих величин. В графе "Значение" указаны значения параметров, используемые при проведении расчетов.

Результаты расчетов значений составляющих величины  $E$  на отрезке времени  $[0;100 \text{ сут}]$  представлены на рис. 2. Считаем, что момент времени  $t=0$  совпадает с началом инфекции. По оси абсцисс указаны обозначения компонент суммарной энергетической цены противоинфекционной защиты, десятичные логарифмы значений которых отложены по оси ординат.

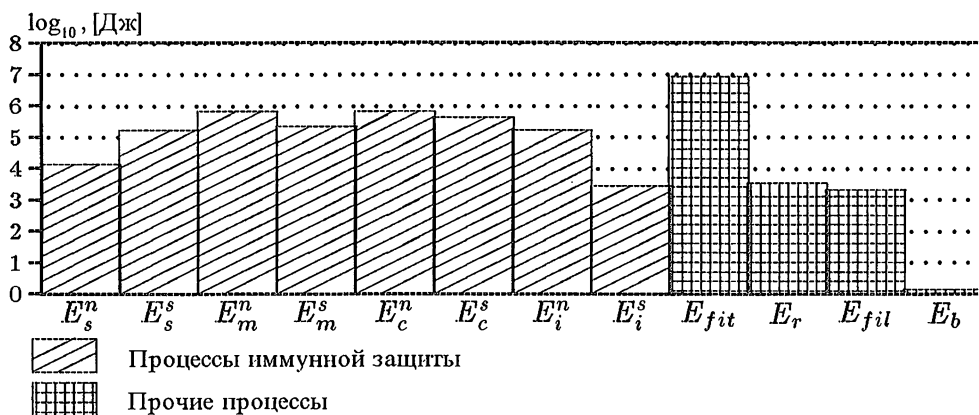


Рис. 2. Энергетическая цена противоинфекционной защиты легких при пневмонии

На основе анализа рис. 2 отметим следующее: 1) основная часть энергетической цены пневмонии средней тяжести (до 90 %) приходится на потери энергии вследствие снижения приспособленности и составляет, согласно полученной оценке, около половины энергии среднесуточного нормального метаболизма; 2) в структуре иммунной и фагоцитарной защиты легких наибольшее количество энергии затрачивается на поддержание жизнедеятельности фагоцитов и составляет примерно 8 % от величины  $E$  (общей энергетической цены пневмонии) на интервале 100 сут; 3) расходы энергии на постоянную (в отсутствие инфекции) фагоцитарную и иммунную защиту легких сравнительно высоки и сопоставимы по величине; 4) среди рассмотренных механизмов защиты легких наименьшие расходы энергии связаны со специфическим противобактериальным иммунным ответом; 5) расходы на регенерацию клеток паренхимы легких и удаление жидкости из альве-

ол невысоки и сопоставимы с расходами на индуцируемую специфическую защиту; 6) низкий уровень энергии, потребляемой в ходе инфекции бактериями.

В табл. 2 представлены значения основных величин, характеризующих энергетику противоинфекционной защиты легких при пневмонии.

Таблица 2. Оценки значений величин удельных расходов энергии в процессах противоинфекционной защиты легких при пневмонии

Величина	Значение, [Дж]	Величина	Значение, [Дж]	Величина	Значение, [Вт]	Величина	Значение, [Вт]
$E_b$	1,2	$E_{fil}$	$2,2 \cdot 10^3$	$\widetilde{W}_b$	$8,3 \cdot 10^{-6}$	$\widetilde{W}_{fil}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
$E_r$	$3,8 \cdot 10^3$	$E_{fit}$	$9,4 \cdot 10^6$	$\widetilde{W}_r$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$\widetilde{W}_{fit}$	65
$E_s^n$	$1,3 \cdot 10^4$	$E_c^n$	$6,2 \cdot 10^5$	$\widetilde{W}_s^n$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$\widetilde{W}_c^n$	$7,2 \cdot 10^{-2}$
$E_s^s$	$1,7 \cdot 10^5$	$E_c^s$	$3,9 \cdot 10^5$	$\widetilde{W}_s^s$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$\widetilde{W}_c^s$	$4,6 \cdot 10^{-2}$
$E_m^n$	$7,9 \cdot 10^5$	$E_i^n$	$1,8 \cdot 10^5$	$\widetilde{W}_m^n$	0,27	$\widetilde{W}_i^n$	0,21
$E_m^s$	$2,3 \cdot 10^5$	$E_i^s$	$3,0 \cdot 10^3$	$\widetilde{W}_m^s$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$\widetilde{W}_i^s$	$6,0 \cdot 10^{-3}$

### 1.5.2. Противоинфекционная защита и оптимальность

Вычислим энергетическую цену  $E^*$  противоинфекционной защиты в целом: как при наличии, так и при отсутствии инфекции. Рассмотрим отрезок времени  $T^*$ , на котором будем оценивать функционирование противоинфекционной защиты. Пусть  $T$  — длительность одной инфекции ( $T \ll T^*$ ). Рассмотрим процесс взаимодействия организма с одним видом микроорганизмов. Предположим, что инфекции повторные, а в момент очередного заражения, происходящего с постоянной частотой  $\nu$ , все величины параметров защитных систем (за исключением параметра  $a_1$ ) соответствуют фиксированной норме. Пусть  $\alpha$  — вектор параметров системы уравнений математической модели защитной воспалительной реакции при пневмонии. Предположим, что  $T^*$  не зависит от  $\nu$ . Тогда величину  $E^*$  можно представить в следующем виде:

$$E^* = E^*(\alpha, \nu) = \nu T^* E(\alpha) + (1 - \nu T) T^* \overline{W}(\alpha), \quad (1.40)$$

где первое слагаемое справа обозначает расходы энергии на взаимодействие с патогеном, а второе слагаемое — расходы энергии на поддержание иммунитета в отсутствие инфекции.  $E(\alpha)$  — энергетическая цена противоинфекционной защиты в случае единичной инфекции (вычисляется по формуле (1.33));  $\nu T^*$  — общее число инфекций за время  $T^*$ . Величина  $\overline{W}(\alpha)$  есть скорость расхода энергии на противоинфекционную защиту в норме

и может быть вычислена по формуле:

$$\overline{W}(\alpha) = (E_c^n + E_c^s)/T. \quad (1.41)$$

Представим  $\alpha$  в следующем виде:  $\alpha=(\alpha', \alpha'')$ , где  $\alpha' \in A'$  — вектор тех параметров системы уравнений модели, которые явным образом входят в компоненты энергетической цены иммунной защиты;  $\alpha''$  — остальные компоненты вектора  $\alpha$ . Пусть  $A' \subset \mathbb{R}_+^{L'}$  — замкнутое ограниченное подмножество неотрицательного ортанта в  $\mathbb{R}^{L'}$ ,  $L'$  — размерность вектора  $\alpha'$ . Рассмотрим следующую задачу: при каждом фиксированном  $\nu$  определить значения  $\alpha'$  такие, что выполняется следующее равенство:

$$\tilde{E}^*(\nu) = \min_{\alpha' \in A'} E^*(\alpha, \nu). \quad (1.42)$$

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, зафиксировав все компоненты вектора  $\alpha'$ , кроме  $M_A^*$  (этот параметр выбран на основе результатов анализа чувствительности). На рис. 3 показана динамика концентрации микроорганизмов в легких, соответствующая оптимальным значениям  $M_A^*$  при различных  $\nu$ . Видно, что при низкой частоте инфекций энергетически выгодным оказывается такое состояние системы противинфекционной защиты, которое приводит к острой форме бактериальной инфекции с выздоровлением; при высоких значениях  $\nu$  оптимальное значение

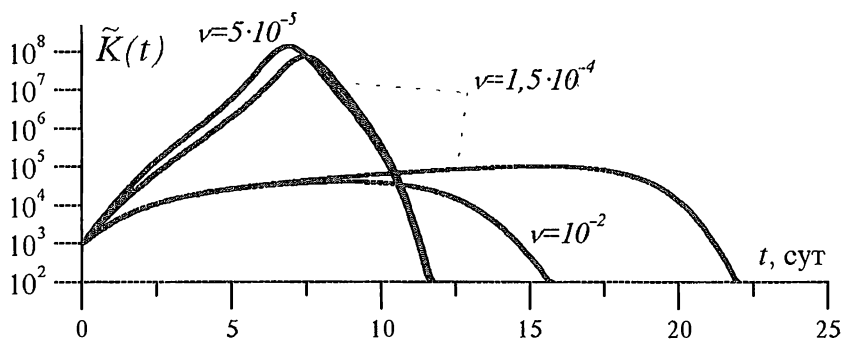


Рис. 3. Вид оптимальных траекторий  $\tilde{K}(t)$  для некоторых  $\nu$

$M_A^*$  соответствует более вялой, субклинической форме инфекции. Частота  $\nu=1,5 \cdot 10^{-4}$  сут $^{-1}$  является порогом, при котором сосуществуют два решения задачи оптимизации, соответствующие острой и субклинической формам болезни. Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы: 1) энергетическая цена заболевания является важной характеристикой набора величин параметров математической модели пневмонии и позволяет обосновать норму строения и функционирования иммунной системы при

заданных условиях внешней среды; 2) в зависимости от вирулентности микроорганизма и частоты инфицирования минимальный расход энергии на противоинфекционную защиту достигается при двух принципиально различных режимах протекания инфекции: острой, клинически выраженной форме болезни, которая характерна для более вирулентных и редких инфекций, и субклинической, более продолжительной и с незначительным повреждением организма форме болезни, характерной для менее вирулентных и частых инфекций.

Показано, что энергетическая цена пневмонии определяется главным образом величиной снижения приспособленности, вызванного общими нарушениями баланса притоков и расходов энергии, и в меньшей степени расходами энергии на иммунную защиту. В отсутствие заболевания энергия расходуется на образование и поддержание функции клеток неспецифической (фагоцитарной) и специфической защиты (лимфоциты и антитела). На основе энергетического критерия эффективности удалось перейти от моделирования динамики болезни к исследованию механизмов долговременной адаптации иммунной системы. С использованием указанного критерия оптимальности сформулирована задача оценки параметров иммунной защиты организма. Предполагается, что искомые значения параметров можно интерпретировать как норму состояния защитных систем при заданной антигенной нагрузке.

Полученные результаты помогают объяснить формирование хронических бактериальных инфекций не только как результат нарушения механизмов защиты, но и как следствие адаптации и оптимизации этих механизмов. Рассмотрим результаты, приведенные на рис. 3. При высокой частоте инфицирования энергетически эффективной становится субклиническая форма инфекции, характеризуемая низкой концентрацией бактерий, которая, однако, длительно сохраняется в организме. Такое состояние можно интерпретировать как формирование хронической, вяло текущей бактериальной инфекции. Следовательно, переход от острой инфекции с выздоровлением к хронической можно рассматривать как закономерный адаптационный сдвиг, закрепленный естественным отбором, в целях экономии энергетических ресурсов. С этой точки зрения лечение хронической бактериальной инфекции должно обязательно включать меры по снижению частоты повторных заболеваний и обострений.

В работах [6, 51] показано, что наиболее частой причиной развития бактериальных инфекций легких являются вирусные инфекции, которые подавляют функцию альвеолярных макрофагов и других фагоцитов и тем самым нарушают устойчивость состояния здоровья (напомним, что в модели пневмонии (1.21)–(1.31) снижение эффективности постоянной неспецифической защиты описывается функцией  $g(t)$ ). Следовательно, во многих случаях первым этапом излечения хронической бактериальной инфекции

является излечение или защита от частых или хронических вирусных инфекций [2].

## **1.6. Математическое моделирование возрастных изменений популяции периферических Т-лимфоцитов**

При исследовании математических моделей инфекционных заболеваний мы предполагали, что параметры моделей остаются постоянными на всем интервале моделирования. Это предположение верно для кратковременных острых инфекций, но не выполняется в случае длительных хронических инфекций. Следовательно, необходимо исследовать закономерности изменений иммунной системы на длительных интервалах времени.

Не менее важна задача описания нарушений функции иммунной системы, перехода ее в такое состояние, при котором она не обеспечивает надежной защиты от патогенов, что приводит к нарастанию частоты и тяжести заболеваний. Такие состояния в клинической иммунологии принято называть иммунодефицитами. Наиболее массовая группа населения с иммунодефицитами — это пожилые люди. Следовательно, актуальной является задача описания динамики системы иммунитета в старших возрастных группах, ее зависимости от заболеваний, образа жизни и наследственности.

### **1.6.1. Общая схема возрастных изменений Т-системы иммунитета**

Снижение эффективности функционирования иммунной системы в старших возрастных группах является хорошо известным фактом. Это утверждение основано на данных о значительном росте, с увеличением возраста, частоты и тяжести инфекционных, онкологических и аутоиммунных заболеваний и обусловленной ими смертности [42, 82]. При этом оказалось, что возрастные изменения в иммунной системе происходят гораздо сложнее, чем это представлялось раньше. Наряду с уменьшением количества и снижением ряда функциональных характеристик Т-лимфоцитов отмечается, что система В-лимфоцитов с возрастом меняется мало, а компоненты неспецифической защиты в пожилом возрасте даже более активны, чем у молодых людей. Таким образом, происходит не просто снижение функции системы противoinфекционной защиты, а ее адаптивная перестройка. В последние годы получены данные, указывающие на возможную роль явлений репликативного истощения и сужения антигенного репертуара пула периферических лимфоцитов в старении иммунной системы [46, 66]. Вместе с тем при обследовании людей, проживших не менее ста лет и сохранивших относительное здоровье, установлено, что ряд иммунологических характеристик у них соответствует возрастной норме 50–60 лет [48]. Это

показывает, что опасное ослабление иммунитета в пожилом возрасте не является неизбежным. Естественно возникает вопрос о том, какие факторы влияют на темп старения иммунитета и возможно ли его замедлить.

В процессе старения изменяются различные характеристики иммунной системы, но наиболее значительные сдвиги происходят в Т-клеточном иммунитете. Одно из таких проявлений — возрастная инволюция тимуса. Уменьшение количества лимфоидной ткани тимуса начинается сразу после наступления половой зрелости и характеризуется быстрым уменьшением количества ткани в 4–5 раз к 35–40 годам с последующим замедлением процесса.

Количественные изменения в периферических органах иммунной системы, происходящие при старении, обсуждаются гораздо реже. Анализ гистологических данных показывает, что с увеличением возраста интактная периферическая лимфоидная ткань (ИПЛТ) замещается соединительной и жировой тканью. Этот процесс начинается после 18–20 лет и продолжается до максимального возраста. Последние данные свидетельствуют о 3–4-кратном сокращении объема ИПЛТ в течение жизни (М. Р. Сапин, неопубликованные данные).

Механизмы регуляции объема периферической лимфоидной ткани не изучены. Вероятно, они связаны с интенсивностью воспалительных процессов, а также с конкуренцией между реакцией соединительной ткани и общей активностью иммунной системы.

Лимфоциты, образовавшиеся в результате деления стволовой клетки и последующей дифференцировки в тимусе, еще не участвовавшие в иммунном ответе, называются наивными. В ходе иммунного ответа на патогенный фактор специфические к этому патогену наивные лимфоциты совершают 15–20 делений, в результате чего количество клеток данной специфичности увеличивается в  $10^5$ – $10^6$  раз. После элиминации патогенного фактора подавляющее большинство этих клеток (90–95 %) погибает в течение нескольких дней в результате апоптоза, а остальные клетки трансформируются в клетки памяти. Концентрация клеток памяти данной специфичности примерно в 100 раз больше концентрации исходных наивных клеток, что обеспечивает более высокую скорость и амплитуду вторичного иммунного ответа.

Нормальное функционирование иммунной системы у человека старше 20 лет характеризуется образованием избыточного количества Т-лимфоцитов памяти, что приводит к конкуренции между ними и к уменьшению среднего времени жизни этих клеток. С увеличением возраста происходит уменьшение притока наивных Т-клеток, что приводит к снижению их концентрации и постепенному освобождению занятой ими ниши. Следовательно, образующиеся в избытке Т-клетки памяти могут конкурировать не только за свою нишу, но и за освободившуюся часть ниши наивных клеток.

Предполагаем, что общее количество лимфоцитов в организме связано с емкостью периферической иммунной системы, и если лимфоцитов образуется больше, чем может находиться в лимфатических узлах, то они подвергаются ускоренной гибели, а если их меньше этого количества, то лимфоциты, и прежде всего клетки памяти, начинают делиться, пока не заполнится свободное пространство. На рис. 4 представлена блок-схема механизмов поддержания гомеостаза Т-системы иммунитета. Процесс деления лимфоци-

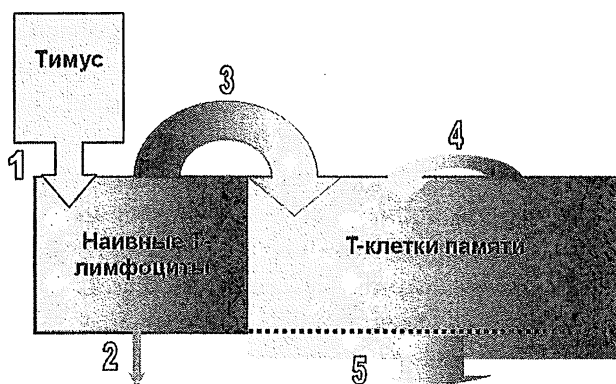


Рис. 4. Блок-схема процессов гомеостатической регуляции Т-системы иммунитета: 1 — пополнение пула наивных Т-лимфоцитов за счет притока из тимуса; 2 — естественная гибель наивных Т-лимфоцитов; 3 — переход наивных Т-лимфоцитов в Т-клетки памяти под действием антигенной стимуляции; 4 — пополнение пула Т-клеток памяти за счет деления клеток памяти под действием антигенной стимуляции; 5 — механизм поддержания гомеостатической концентрации Т-лимфоцитов в ИПЛТ, гибель избыточных Т-клеток памяти. Изменения интенсивности серого цвета иллюстрируют наличие клеток с разной длиной теломеров: светло-серый цвет соответствует клеткам, имеющим длинные теломеры, темно-серый — короткие теломеры

тов сопровождается постепенным сокращением длины концевых участков хромосом, называемых теломерами. После того, как теломеры данной клетки сокращаются до определенной длины (4000–5000 пар оснований), клетка теряет способность делиться [46]. Эта критическая длина имеет название предела Хейфлика. Длина теломеров может служить мерой репликативного потенциала клетки и, следовательно, является важной характеристикой их иммунокомпетентности. Отметим, что с возрастом происходит снижение длины теломеров у кроветворных стволовых клеток, это также влияет на репликативный потенциал ее потомков. Снижение функции тимуса и поступление в организм антигенов, вызывающих иммунный ответ, приводят к увеличению с возрастом доли клеток памяти с низким репликативным потенциалом, вытесняющих наивные клетки с более высоким репликативным потенциалом.



### 1.6.2. Математическая модель старения популяции периферических Т-лимфоцитов

В соответствии с описанной выше схемой возрастных изменений Т-системы иммунитета будем считать, что выполнены следующие гипотезы.

1. Популяция наивных клеток в ИПЛТ (интактной периферической лимфоидной ткани) пополняется за счет притока наивных Т-лимфоцитов из тимуса.

2. Наивные Т-лимфоциты участвуют в иммунном ответе на различные антигены, суммарное воздействие которых на иммунную систему обобщаем понятием *антигенная нагрузка*.

3. В результате первичного иммунного ответа некоторая часть образовавшейся популяции специфических лимфоцитов погибает, а остальная часть переходит в клетки памяти.

4. В иммунном ответе на уже знакомый антиген участвуют специфические Т-клетки памяти, пополняющие в итоге собственную популяцию.

5. Процесс деления клеток сопровождается снижением их репликативного потенциала и репликативного потенциала их потомков.

6. Постоянная концентрация Т-лимфоцитов в ИПЛТ поддерживается за счет регуляции времени жизни клеток памяти.

7. С увеличением возраста происходит снижение объема ИПЛТ, скорости продукции наивных Т-лимфоцитов в тимусе, а также длины теломеров стволовых кроветворных клеток.

Рассмотрим следующие величины:

- $N(t)$  — концентрация наивных Т-лимфоцитов в ИПЛТ в момент времени  $t$ , [кл/мл];
- $P_N(t)$  — средняя длина теломеров в популяции наивных Т-лимфоцитов в момент  $t$ , [п.о./кл];
- $M(t)$  — концентрация Т-клеток памяти в ИПЛТ в момент  $t$ , [кл/мл];
- $P_M(t)$  — средняя длина теломеров в популяции Т-клеток памяти в момент  $t$ , [п.о./кл];
- $N^*(t)$  — скорость притока наивных Т-лимфоцитов в ИПЛТ в момент  $t$ , [кл/сут.];
- $V(t)$  — объем ИПЛТ в момент  $t$ , [мл];
- $P^*(t)$  — длина теломеров во вновь образующихся наивных Т-клетках в момент  $t$ , [п.о./кл].

Математическую модель старения популяции периферических Т-лимфоцитов будем строить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагаем, что в объеме ИПЛТ клетки иммунной системы и антигены распределены равномерно. Взаимодействия между ними рассматриваем на основе закона действующих масс.

Формула для конечного приращения величины  $N(t)$  на отрезке времени  $[t; t + \Delta t]$  с точностью до членов второго порядка малости по  $\Delta t$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t) = & \frac{N^*(t)}{V(t)} \Delta t - \alpha_1 \frac{L}{V(t)} N(t) \Delta t - \\ & - \mu_N N(t) \Delta t - \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{V(t)} N(t + \Delta t). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Первое слагаемое в правой части (1.43) описывает увеличение за время  $\Delta t$  концентрации наивных Т-лимфоцитов в ИПЛТ в результате их притока из тимуса. Второе слагаемое описывает снижение концентрации наивных Т-лимфоцитов в результате их антигенной стимуляции и процессов размножения/гибели с образованием популяции Т-клеток памяти. Предполагаем, что скорость перехода пропорциональна величине  $N(t)$  и удельной антигенной нагрузке  $L/V(t)$ , где  $L$  — общая антигенная нагрузка (считаем, что эта величина постоянна). Коэффициент пропорциональности  $\alpha_1$  характеризует чувствительность наивных Т-лимфоцитов к антигенной стимуляции. Третье слагаемое описывает естественную гибель наивных Т-лимфоцитов. Величина  $\mu_N$  обратна среднему времени жизни этих клеток при отсутствии антигенной стимуляции. Последнее слагаемое описывает изменение величины  $N(t)$  в результате изменения объема  $V(t)$ . Действительно, закон сохранения количества клеток можно записать в виде  $N(t)V(t) = N(t + \Delta t)V(t + \Delta t)$ , откуда после очевидных преобразований следует искомое выражение для  $\Delta N(t)$ . Разделив соотношение (1.43) на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем уравнение динамики концентрации наивных Т-лимфоцитов в ИПЛТ:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^*}{V} - \alpha_1 \frac{L}{V} N - \mu_N N - \frac{dV}{dt} \frac{N}{V}. \quad (1.44)$$

Аналогично строится уравнение для описания динамики возрастных изменений концентрации Т-клеток памяти в ИПЛТ. В окончательном виде оно записывается как

$$\frac{dM}{dt} = \rho_1 \alpha_1 \frac{L}{V} N + \rho_2 \alpha_2 \frac{L}{V} M + \mu_M (C^* - N - M) - \frac{dV}{dt} \frac{M}{V}. \quad (1.45)$$

Первое слагаемое в правой части (1.45) описывает увеличение концентрации Т-клеток памяти в результате деления и дифференцировки наивных Т-лимфоцитов. Коэффициент  $\rho_1$  равен среднему числу Т-клеток памяти, образующихся из одного наивного Т-лимфоцита. Второе слагаемое описывает процесс размножения Т-клеток памяти. Вид его аналогичен первому слагаемому. Коэффициент  $\rho_2$  равен количеству Т-лимфоцитов, образовавшихся из одной клетки памяти. Величина  $\alpha_2$  характеризует чувствительность Т-клеток памяти к антигенной стимуляции. Предполагаем, что ме-

ханизм гомеостатической регуляции иммунной системы включает поддержание постоянной концентрации Т-лимфоцитов в ИПЛТ. Этому предположению соответствует структура третьего слагаемого в правой части (1.45). Здесь  $C^*$  — нижняя граница допустимой концентрации Т-лимфоцитов в ИПЛТ, а  $\mu_M$  — удельная скорость гибели “избыточных” клеток памяти. Последнее слагаемое учитывает изменение концентрации клеток памяти в результате изменения объема ИПЛТ.

Построим уравнения динамики средней длины теломеров наивных Т-лимфоцитов и клеток памяти. Приращение суммарной длины теломеров в популяции наивных Т-лимфоцитов на отрезке  $[t; t + \Delta t]$  имеет вид

$$\begin{aligned} & P_N(t + \Delta t)N(t + \Delta t)V(t + \Delta t) - P_N(t)N(t)V(t) = \\ & = N^*(t)P^*(t)\Delta t - (\alpha_1 LN(t) + \mu_N N(t)V(t))P_N(t)\Delta t, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где первое слагаемое в правой части характеризует увеличение за время  $\Delta t$  суммарной длины теломеров в результате притока Т-лимфоцитов из тимуса, а второе слагаемое — уменьшение суммарной длины теломеров в результате перехода наивных Т-лимфоцитов в клетки памяти и их естественной гибели (см. второе и третье слагаемые в правой части (1.44)). Соотношение (1.46) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{P_N(t + \Delta t) - P_N(t)}{\Delta t} &= \frac{P_N(t)N(t)V(t) - P_N(t)N(t + \Delta t)V(t + \Delta t)}{N(t + \Delta t)V(t + \Delta t)\Delta t} + \\ &+ \frac{N^*(t)P^*(t)\Delta t - (\alpha_1 LN(t) + \mu_N N(t)V(t))P_N(t)\Delta t}{N(t + \Delta t)V(t + \Delta t)\Delta t}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$ , получаем:

$$\frac{dP_N}{dt} = -\frac{P_N}{NV} \frac{d(NV)}{dt} + \frac{N^*P^*}{NV} - \alpha_1 \frac{LP_N}{V} - \mu_N P_N. \quad (1.48)$$

Из (1.44) следует, что

$$\frac{d}{dt}(NV) = \frac{dN}{dt}V + \frac{dV}{dt}N = N^* - \alpha_1 LN - \mu_N NV. \quad (1.49)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dP_N}{dt} &= -\frac{P_N}{NV}(N^* - \alpha_1 LN - \mu_N NV) + \\ &+ \frac{N^*P^*}{NV} - \frac{\alpha_1 LP_N}{V} - \mu_N P_N = (P^* - P_N) \frac{N^*}{NV}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Итак, уравнение для средней длины теломеров у наивных Т-лимфоцитов в ИПЛТ имеет вид

$$\frac{dP_N}{dt} = (P^* - P_N) \frac{N^*}{NV}. \quad (1.51)$$

Приращение суммарной длины теломеров в популяции Т-клеток памяти на отрезке  $[t; t + \Delta t]$  представимо в виде

$$\begin{aligned} P_M(t + \Delta t)M(t + \Delta t)V(t + \Delta t) - P_M(t)M(t)V(t) = \\ = \rho_1\alpha_1LN(t)(P_N(t) - \lambda_N)\Delta t + \rho_2\alpha_2LM(t)(P_M(t) - \lambda_M)\Delta t - \\ - \alpha_2LM(t)\lambda_M\Delta t + \mu_MV(t)(C^* - N(t) - M(t))P_M(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Первое слагаемое в правой части (1.52) описывает увеличение суммарной длины теломеров в популяции Т-клеток памяти в результате деления и дифференцировки наивных Т-лимфоцитов;  $(P_N(t) - \lambda_N)$  — средняя длина теломеров Т-клеток памяти, образующихся в момент  $t$  из наивных Т-клеток ( $\lambda_N$  — среднее количество пар оснований, на которое сокращается длина теломеров наивных Т-лимфоцитов в результате иммунного ответа). Второе слагаемое описывает аналогичный механизм изменения суммарной длины теломеров Т-клеток памяти в результате их собственного деления, где  $(P_M(t) - \lambda_M)$  — средняя длина теломеров у потомков делящихся клеток памяти, образовавшихся в момент  $t$ . Третье слагаемое описывает сокращение средней длины теломеров у делящихся клеток памяти в результате иммунного ответа. Четвертое слагаемое в правой части (1.52) описывает изменения, происходящие вследствие гомеостатической регуляции общей численности Т-клеток памяти в ИПЛТ (см. уравнение (1.45)). Преобразуя соотношение (1.52) и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{dP_M}{dt} = -\frac{P_M}{MV} \frac{d}{dt}(MV) + \rho_1\alpha_1(P_N - \lambda_N) \frac{LN}{MV} + \\ + \rho_2\alpha_2(P_M - \lambda_M) \frac{L}{V} - \alpha_2\lambda_M \frac{L}{V} + \mu_M(C^* - N - M) \frac{P_M}{M}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Из (1.45) следует, что

$$\frac{d}{dt}(MV) = \frac{dM}{dt}V + \frac{dV}{dt}M = \rho_1\alpha_1LN + \rho_2\alpha_2LM + \mu_MV(C^* - N - M). \quad (1.54)$$

Подставляя (1.54) в (1.53) и упростив полученное соотношение, приходим к уравнению динамики средней длины теломеров в популяции Т-клеток памяти:

$$\frac{dP_M}{dt} = \rho_1\alpha_1(P_N - P_M - \lambda_N) \frac{L}{V} \frac{N}{M} - (\rho_2 + 1)\alpha_2\lambda_M \frac{L}{V}. \quad (1.55)$$

Скорость притока из тимуса наивных Т-лимфоцитов ( $N^*$ ), а также функции возрастных изменений длины их теломеров ( $P^*$ ) и объема ИПЛТ ( $V$ ) представим в виде линейных функций от экспонент с отрицательными показателями:

$$N^*(t) = N_0^*e^{-k_T t}, \quad (1.56)$$

$$P^*(t) = (P_0^* - P_{\min})e^{-k_P t} + P_{\min}, \quad (1.57)$$

$$V(t) = (V_0 - V_{\min})e^{-k_V t} + V_{\min}, \quad (1.58)$$

где  $N_0^*$ ,  $P_0^*$  и  $V_0$  — начальные значения в нулевой момент времени, соответствующий возрасту 20 лет,  $P_{\min}$  — минимальная длина теломеров в стволовой клетке, а  $V_{\min}$  — минимальный объем ИПЛТ. Объединяя (1.44), (1.45), (1.51) и (1.55), приходим к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений динамики возрастных изменений популяции периферических Т-лимфоцитов:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{N^*}{V} - \alpha_1 \frac{L}{V} N - \mu_N N - \frac{dV}{dt} \frac{N}{V}, \\ \frac{dM}{dt} &= \rho_1 \alpha_1 \frac{L}{V} N + \rho_2 \alpha_2 \frac{L}{V} M + \mu_M (C^* - N - M) - \frac{dV}{dt} \frac{M}{V}, \\ \frac{dP_N}{dt} &= (P^* - P_N) \frac{N^*}{NV}, \\ \frac{dP_M}{dt} &= \rho_1 \alpha_1 (P_N - P_M - \lambda_N) \frac{L}{V} \frac{N}{M} - (\rho_2 + 1) \alpha_2 \lambda_M \frac{L}{V}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где функции  $N^*$ ,  $P^*$  и  $V$  зависят от времени и задаются выражениями (1.56)-(1.58). К системе уравнений (1.59) присоединим начальные условия:

$$N(t_0) = N_0; \quad M(t_0) = M_0; \quad P_N(t_0) = P_{N0}; \quad P_M(t_0) = P_{M0}. \quad (1.60)$$

Отметим, что уравнения для зависимых переменных  $N$  и  $M$  являются следствием предположений, перечисленных в начале этого раздела, и закона сохранения количества клеток, а уравнения для  $P_N$  и  $P_M$  выводятся из (1.44) и (1.45) на основе соотношений баланса для общей длины теломеров. Результаты численного и аналитического исследования этой модели содержатся в работах [33, 69, 71].

## 2. Параметризация в математических моделях заболеваний

### 2.1. Проблема "персонализации" модели

Среди приложений математических моделей для решения практических задач одно из важнейших мест занимает задача прогноза течения и исхода болезни для конкретного пациента. Основная проблема, с которой связано решение данной задачи — это высокая размерность вектора параметров. Для иллюстрации этого рассмотрим модель заболевания в общем виде:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha, x^\infty), \quad x(0) = x^0, \quad (2.1)$$

где  $x(t) \in R^n$  — вектор фазовых переменных модели — концентраций взаимодействующих частиц (вирусов, бактерий, а также молекул и клеток, осуществляющих защиту организма);  $\alpha \in R^L$  — вектор коэффициентов

модели, учитывающих интенсивности этих взаимодействий, производство и утилизацию взаимодействующих частиц;  $x^\infty \in R^n$  — вектор стационарных или гомеостатических концентраций взаимодействующих частиц;  $t$  — время от момента заражения.

Векторы  $\alpha \in R^L$  и  $x^\infty \in R^n$  составляют вектор неизвестных параметров, их количество равно  $n + L$  (если считать известным вектор начальных значений  $x^0 \in R^n$ ). Чтобы воспроизвести с помощью модели (2.1) течение болезни у конкретного человека, достаточно определить эти параметры по данным наблюдений [10] за динамикой фазовых переменных  $\{x(t), t = t_1, t_2, \dots, t_m\}$  и решить систему уравнений (2.1), используя какой-либо численный метод. Предположим для определенности, что модель (2.1) идентифицируема по данным наблюдений за динамикой одной переменной [80], например, первой  $\{x^1(t), t = t_1, t_2, \dots, t_m\}$ . В этом случае для определения параметров необходимо решить следующие уравнения:

$$x^1(t, \alpha, x^\infty) = x^1(t), \quad t = t_1, t_2, \dots, t_m, \quad (2.2)$$

где  $x^1(t, \alpha, x^\infty)$  — решение системы уравнений (2.1), а именно, его первая компонента. Система уравнений (2.2) состоит из  $m$  уравнений относительно  $n + L$  неизвестных. Поэтому для вычисления неизвестных параметров следует иметь как минимум  $n + L$  уравнений или, что то же самое,  $n + L$  измерений первой переменной, иначе (2.2) будет иметь бесчисленное множество решений.

Количество параметров в моделях заболеваний имеет порядок нескольких десятков. Предположим, что в один день возможно одно измерение первой переменной (например, один биохимический анализ крови). Это означает, что определить параметры модели мы сможем через несколько десятков дней наблюдений за пациентом, когда прогноз течения и исхода болезни вряд ли останется столь же актуальным, как в первые дни болезни.

Кроме указанной трудности, возникающей при решении задачи прогноза, существуют и другие, например, не все переменные модели, измерения которых необходимы для определения параметров, могут быть измерены в клинических условиях. Это значит, что в данном случае о прогнозе с помощью модели (2.1) вообще не может быть речи. Однако к последнему предложению следует добавить слова "при таком подходе". Действительно, при таком подходе решить задачу не удастся, поэтому перейдем к рассмотрению ее решения, основанному на *параметризации* в моделях вида (2.1).

## 2.2. Что такое параметризация

Еще в начале исследований по математическому моделированию в иммунологии и медицине Г. И. Марчук указал на необходимость анализа возможности персонализации модели заболевания, то есть ее применения для

моделирования болезни в организме конкретного пациента. При этом он указал также и направление, в котором следовало искать решение задачи — он предположил, что для этой цели следует рассмотреть процессы взаимодействия частиц, участвующих в иммунном ответе, на клеточном уровне.

В середине 1980-х И. Б. Погожев высказал идею о возможности введения в модель вида (2.1) персонального параметра  $Q$ , значение которого можно было бы определять по доступным для измерений физиологическим характеристикам организма. В 1988 году вышла его книга [25], в которой одна глава посвящена проблеме персонализации модели на основе рассмотрения движений и взаимодействий частиц в жидких средах организма.

Суть идеи заключается в следующем. Предположим, что нам известны параметры  $\underline{\alpha} \in R^L$  и  $\underline{x}^\infty \in R^n$  некоторого организма, который назовем базовым и будем считать, что особенности рассматриваемого организма учитываются его персональным параметром  $Q$ . Другими словами, для данного организма вместо модели (2.1) мы имеем модель

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \underline{\alpha}, \underline{x}^\infty, Q), \quad x(0) = x^0, \quad (2.3)$$

в которой неизвестным параметром является персональный параметр  $Q$ , причем

$$F(x, \underline{\alpha}, \underline{x}^\infty, 1) = f(x, \underline{\alpha}, \underline{x}^\infty),$$

то есть при  $Q = 1$  модель (2.3) описывает течение болезни в базовом организме.

Процедура перехода от модели (2.1) к модели (2.3) представляет собой параметризацию в модели (2.1). Однако четкая формулировка процедуры параметризации была дана лишь в 1995 г. в работе [19], а в 1996 г. вышла статья [60], содержащая доказательства утверждений, приведенных в работе [19].

В этих работах рассматривается система, в которой циркулирует жидкость, содержащая частицы  $n$  различных типов, которые при столкновении могут взаимодействовать. Эти частицы непрерывно производятся  $n$  источниками и доставляются жидкостью в зону взаимодействия — реактор. При транспортировке частиц от источника к реактору взаимодействие между ними практически отсутствует, поскольку практически отсутствуют столкновения между частицами в канале. При поступлении в реактор, который имеет неоднородную структуру, частицы перемешиваются, взаимодействуют, образуя комплексы, которые затем утилизируются. Перемешивание и столкновения частиц происходят благодаря движению жидкости в реакторе и его неоднородной структуре. Поэтому чем больше скорость движения жидкости, тем больший объем реактора будут заполнять движущиеся частицы.

Таким образом, перемещение частицы в реакторе является суперпозицией направленного движения через реактор от входа к выходу с током жидкости и хаотического блуждания вследствие столкновения с неподвижными частями реактора и другими частицами. Для описания такого движения применяются стохастические дифференциальные уравнения [8].

Чтобы построить систему таких уравнений, рассмотрим обобщенные координаты частицы в реакторе  $q(t) \in R^S$ , где  $S$  — число степеней свободы частицы. В этом случае система уравнений будет иметь следующий вид:

$$dq(t) = \Psi(t)dt + BdW(t), \quad q(0) = q_0. \quad (2.4)$$

В этой системе  $\Psi(t)$  — вектор сноса, который описывает первую составляющую движения, а вторая, случайная составляющая, представлена вектором  $BW(t)$ , где  $W(t)$  — винеровский процесс,  $D = BB^T$  — матрица диффузии.

Рассмотрим две такие системы взаимодействующих частиц, одну из которых назовем базовой, а другую — исследуемой, и будем считать, что для них выполняется следующее равенство в смысле стохастической эквивалентности:

$$\Delta q(t) \doteq \sqrt{H} \Delta \underline{q}(t),$$

где величина

$$H = \frac{V^2}{\underline{V}^2} \quad (2.5)$$

представляет собой параметр подобия (персональный параметр),  $V$  — скорость циркуляции жидкости, а подчеркивание указывает на принадлежность переменной к базовой системе. Стохастическая эквивалентность двух случайных величин, стоящих слева и справа в (2.5), означает, что эти величины имеют одни и те же вероятностные характеристики.

Модель (2.4) и предположение (2.5) позволяют доказать, что если в базовой системе изменения концентраций частиц во времени описываются системой уравнений (2.1), то есть

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \underline{\alpha}, \underline{x}^\infty), \quad x(0) = x^0, \quad (2.6)$$

то описание таких изменений в исследуемой системе дает следующая модель:

$$\frac{dx}{dt} = H^{-\frac{3}{2}} f(H^{\frac{3}{2}} x, H\underline{\alpha}, H\underline{x}^\infty), \quad x(0) = x^0, \quad (2.7)$$

которая содержит только базовые параметры и персональный параметр  $H$ .

Таким образом, для предсказания реакции исследуемой системы на возмущение  $x^0$  достаточно знать скорость, с которой в ней циркулирует жидкость, а также параметры базовой системы.



### 2.3. Параметризация в моделях заболеваний

Система взаимодействующих частиц, рассмотренная в предыдущем подразделе, во многом напоминает систему живого организма. В самом деле, взаимодействия частиц при иммунном ответе происходят в межклеточном пространстве, куда частицы доставляются циркулирующей жидкостью — лимфой и кровью. В сосудах, по которым движется жидкость, взаимодействия отсутствуют — в них частицы просто движутся друг за другом. Попадая в зону взаимодействия, они начинают двигаться в межклеточном пространстве (аналогично движению в реакторе), вследствие чего перемешиваются и взаимодействуют. Таким образом, в живом организме транспортную функцию выполняют кровь и лимфа, и под скоростью циркуляции жидкости  $V$  в данном случае следует понимать скорость циркуляции крови.

Поэтому будем считать, что движение частицы в зоне взаимодействия в живом организме описывается системой стохастических уравнений вида (2.4).

Однако, применяя этот результат к живому организму, необходимо учитывать, что в нем существует не один, а много “реакторов” — лимфатических узлов и других зон взаимодействия, распределенных в организме. Поэтому вместо скорости кровотока  $V$  нам следует использовать *удельную скорость кровотока*

$$v = \frac{V}{M}, \quad (2.8)$$

где  $M$  — масса тела, а  $V$  — скорость оборота крови (л/мин).

Кроме того, процессы в каждом живом организме протекают в своем собственном биологическом или метаболическом времени. Это время характеризуется удельной интенсивностью основного обмена [41], которая определяется следующей формулой:

$$v_{O_2} = \frac{V_{O_2}}{M}, \quad (2.9)$$

где  $V_{O_2}$  — скорость поглощения кислорода рассматриваемым организмом. Чем выше удельная скорость метаболизма, тем быстрее течет метаболическое время [41], характеристикой которого является длительность сердечного цикла  $\theta$ :

$$\theta = \frac{1}{\omega} \sim \frac{1}{v_{O_2}},$$

где  $\omega$  — частота сердечных сокращений (удары в минуту).

С учетом этого перейдем к описанию параметризации в моделях заболеваний. Следуя [19, 60], рассмотрим два организма — исследуемый и

базовый, в которых приращения координат частиц описываются соответственно уравнениями

$$\Delta q(t) = \Psi(t)\Delta t + B\Delta W(t), \quad (2.10)$$

$$\Delta \underline{q}(t) = \underline{\Psi}(t)\Delta t + \underline{B}\Delta W(t). \quad (2.11)$$

Будем считать, что для нормированных приращений  $\Delta q(t)/\sqrt{\theta}$  и  $\Delta \underline{q}(t)/\sqrt{\underline{\theta}}$  имеет место равенство

$$\frac{\Delta q(t)}{\sqrt{\theta}} \stackrel{v}{=} \frac{v}{\underline{v}} \frac{\Delta \underline{q}(t)}{\sqrt{\underline{\theta}}}, \quad (2.12)$$

которое отличается от условия (2.5) только наличием нормировки. Равенство (2.12) — это выдвинутая И. Б. Погожевым гипотеза о подобии микродвижений в жидких средах организма. Как любая гипотеза, она должна быть проверена на соответствие данным наблюдений, что и будет сделано в следующем подразделе, здесь же мы приводим результаты, полученные на ее основе. Для этого перепишем (2.12) в следующем виде:

$$\Delta q(t) \doteq \sqrt{H}\Delta \underline{q}(t), \quad (2.13)$$

где

$$H = \frac{v^2\theta}{\underline{v}^2\underline{\theta}} \quad (2.14)$$

и заметим, что  $S$ -мерные случайные величины  $\Delta q(t)$  и  $\sqrt{H}\Delta \underline{q}(t)$  распределены нормально, а нормальное распределение однозначно определяется математическим ожиданием и ковариационной матрицей. Следовательно, для стохастической эквивалентности (2.13)–(2.14) необходимо и достаточно, чтобы эти моменты двух распределений были равны.

Поэтому из равенства математических ожиданий  $E\Delta q(t) = \Psi(t)\Delta t$  и  $E(\sqrt{H}\Delta \underline{q}(t)) = \sqrt{H}\underline{\Psi}(t)\Delta t$  следует, что

$$\Psi(t) = \sqrt{H}\underline{\Psi}(t), \quad (2.15)$$

а равенство ковариационных матриц

$$\text{cov}(\Delta q(t), \Delta q(t)) = D$$

и

$$\text{cov}(\sqrt{H}\Delta \underline{q}(t), \sqrt{H}\Delta \underline{q}(t)) = H \cdot \underline{D}$$

означает, что

$$D = H\underline{D}. \quad (2.16)$$

Здесь мы приводим лишь формулировки утверждений, доказательства которых даны в [60].

**Лемма 1.** *Интенсивности взаимодействий частиц в исследуемом и базовом организмах удовлетворяют равенству*

$$\lambda = H\underline{\lambda}.$$

Пусть  $Q$  — эффективный объем взаимодействий, то есть объем, который образуют частицы в зоне взаимодействия. Как уже отмечалось, этот объем зависит от скорости циркуляции жидкости: чем она выше, тем больше эффективный объем, поскольку с увеличением скорости циркуляции усиливается перемешивание и распространение частиц в зоне взаимодействия. Поэтому справедлива следующая лемма.

**Лемма 2.** *Эффективные объемы взаимодействий  $Q$  и  $\underline{Q}$  в исследуемом и базовом организмах связаны соотношением*

$$Q = H^{\frac{3}{2}}\underline{Q}. \quad (2.17)$$

**Лемма 3.** *Для стационарных (гомеостатических) концентраций частиц в исследуемом и базовом организмах выполняется равенство*

$$x^\infty = \frac{\underline{x}^\infty}{\sqrt{H}}. \quad (2.18)$$

Следствием лемм 1–3 является следующая теорема о параметризации в моделях иммунофизиологических процессов:

**Теорема.** *Предположим, что модель, описывающая реакцию базового организма на возмущение стационарного состояния  $\underline{x}^\infty$ , имеет вид*

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \underline{\alpha}, \underline{x}^\infty), \quad x(0) = x^0, \quad (2.19)$$

*и справедливы утверждения лемм 1–3. Тогда реакция базового организма на это возмущение описывается следующей моделью, содержащей только базовые параметры и персональный параметр исследуемого организма  $H$ :*

$$\frac{dx}{dt} = H^{-\frac{3}{2}}f(H^{\frac{3}{2}}x, H\underline{\alpha}, H\underline{x}^\infty), \quad x(0) = x^0. \quad (2.20)$$

Таким образом, если известны параметры базового организма  $\underline{\alpha} \in R^L$  и  $\underline{x}^\infty \in R^n$ , то для предсказания возможного течения заболевания в исследуемом организме достаточно знать его персональный параметр  $H$ . Его можно вычислить по формуле (2.14) при наличии данных о скорости кровотока в исследуемом организме, а можно воспользоваться соотношением (2.18). Действительно, пусть, например,  $G$  и  $\underline{G}$  — гомеостатические концентрации глюкозы в крови соответственно в исследуемом и базовом организмах. В этом случае из (2.18) получаем, что

$$H = \left(\frac{G}{\underline{G}}\right)^2. \quad (2.21)$$

Если в качестве базового взять организм практически здорового человека в возрасте 20–30 лет, то  $\underline{G} = 4.2$  (ммол/л). Существуют и другие способы вычисления параметра  $H$  по легко доступным для измерения физиологическим характеристикам организма, однако их рассмотрение выходит за рамки данной главы.

#### 2.4. Сопоставление с данными наблюдений

Возможность параметризации (2.20)–(2.21) показана в монографии И.Б. Погожева [25] на модели углеводного обмена с использованием данных наблюдений за изменением концентрации глюкозы в крови у людей разного возраста после приема известного количества глюкозы. Ясно, что реакция на отклонение концентрации глюкозы от нормальных значений у людей разного возраста различна. Эти различия удалось описать изменением лишь одного персонального параметра  $H$  при фиксированных значениях базовых параметров, соответствующих организму "среднего" человека в возрасте от 20 до 30 лет.

Книгу И.Б. Погожева, в которой излагаются эти результаты, а также многие другие интересные приложения параметризации, можно найти в Интернет на сайте [www.inm.ras.ru](http://www.inm.ras.ru), а в этом подразделе мы покажем, что предположения, положенные в основу предыдущих рассуждений, не противоречат данным наблюдений.

Для этого сначала введем понятие базового организма. Таким организмом должен быть некий стандарт или эталон, с которым сравнивается исследуемый организм, а мерой соответствия является параметр  $H$ . Если для исследуемого организма  $H = 1$ , то это означает, что его физиологические параметры соответствуют выбранному стандарту. Поэтому в качестве базового мы будем рассматривать организм практически здорового человека в возрасте 25 лет. В соответствии с [41] получаем, что  $\underline{v} = 0.256 \underline{M}^{-0.25}$  и

$$\underline{\theta} = \frac{\underline{M}^{0.25}}{241}, \quad (2.22)$$

где  $\underline{M}$  — масса базового организма. Зависимость массы тела человека от длины тела имеет вид

$$\underline{M} = \frac{h^2}{427}, \quad (2.23)$$

где  $h$  — длина тела (см). В идеальном организме емкость легких также согласована с длиной тела:

$$\underline{Q} = 0.038h - 2.468 \quad \text{для женщин}, \quad (2.24)$$

и

$$\underline{Q} = 0.058h - 4.788 \quad \text{для мужчин}. \quad (2.25)$$

Возвращаясь к проверке гипотезы, заметим, что параметр  $H$  определяется как отношение (2.14), то есть

$$H = \frac{v^2\theta}{\underline{v^2\theta}},$$

а в результате рассуждений мы пришли к формуле (2.21), которая следует из формулы (2.18). Если сделанные предположения и рассуждения верны, то формулы (2.14) и (2.21) должны давать один и тот же результат.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим две случайные величины:

$$H_V = \frac{v^2\theta}{\underline{v^2\theta}} \quad (2.26)$$

и

$$H_g = \left(\frac{G}{\underline{G}}\right)^2, \quad (2.27)$$

значения которых будем вычислять по данным измерений. Если в результате мы получим высокую линейную корреляцию между этими величинами, то сделанные предположения и соответствующие построения не противоречат данным наблюдений.

Для проверки этой гипотезы использованы данные, полученные на добровольцах группой врачей, которой руководил кандидат медицинских наук В.К. Корнеенков. Чтобы их использовать, заметим, что формулу для  $H_V$  можно переписать в виде

$$H_V = \frac{VV_S}{M^2 \underline{v^2\theta}}, \quad (2.28)$$

где  $V_S = V \cdot \theta$  — это так называемый ударный объем, то есть объем крови, который выбрасывает сердце при одном сокращении. Ударный объем, как и скорость кровотока  $V$ , доступен для измерений; оба эти параметра измеряются эхо-кардиографом.

Используя выражения (2.22) и (2.23) для базовых параметров, из (2.28) получаем, что

$$H_V = 809 \frac{VV_S}{M^2} \sqrt{h}. \quad (2.29)$$

Зависимость между величинами  $H_V$  и  $H_g$  показана на рис. 5. Каждая точка представляет результат усреднения восьми-девяти наблюдений. Видно, что гипотеза о линейной зависимости между двумя интересующими нас величинами не противоречит данным наблюдений. Формула (2.17), связывающая эффективные объемы взаимодействий в исследуемом и базовом организмах, также является следствием гипотезы о подобии (2.12)

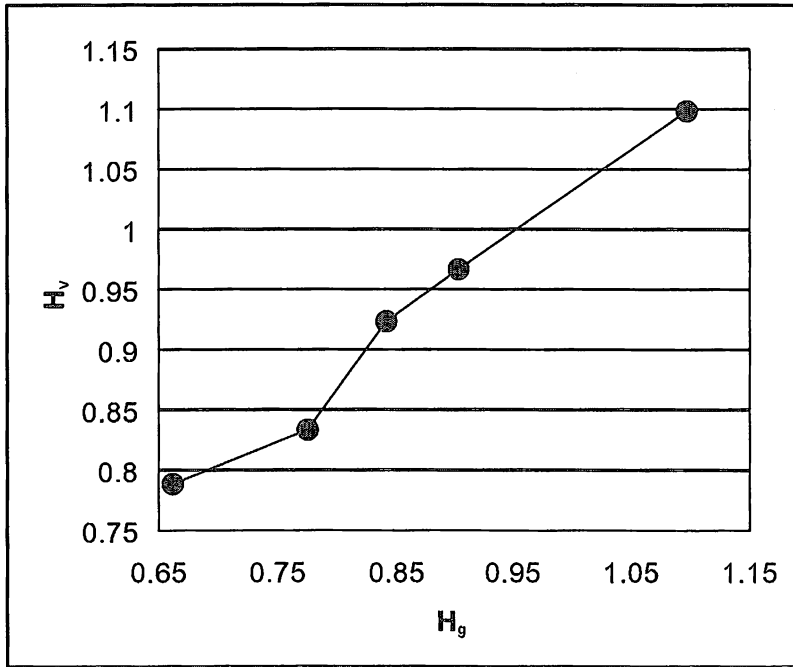


Рис. 5. Корреляция между значениями  $H$ , вычисленными на основе данных по скорости циркуляции крови ( $H_V$ ) и концентрации глюкозы в крови ( $H_g$ )

и поэтому может быть использована для ее проверки. Действительно, из (2.17) следует, что

$$H = \left( \frac{Q}{\bar{Q}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.30)$$

К сожалению, мы не имеем возможности измерить эффективные объемы каким-либо прямым методом, однако можно попытаться это сделать по косвенным измерениям.

Рассмотрим, например, взаимодействие молекул кислорода с эритроцитами. Последние доставляются кровью в легкие, где они “запасаются” кислородом, а затем, двигаясь вместе с кровью, доставляют его клеткам организма. Таким образом, легкие являются зоной взаимодействия этих двух типов частиц. Поэтому можно предположить, что объем легких может служить косвенной характеристикой эффективного объема взаимодействий. Если это действительно так, то формулы (2.15) и (2.30) должны давать один и тот же результат, если в (2.30) понимать под  $Q$  и  $\bar{Q}$  емкости легких исследуемого и базового организмов. Учитывая это, рассмотрим корреля-

цию между величинами

$$H_L = \left(\frac{Q}{\underline{Q}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{и} \quad H_V = 809 \frac{VV_S}{M^2} \sqrt{h}, \quad (2.31)$$

где значение  $\underline{Q}$  задается формулами (2.11) и (2.12).

Эта корреляция показана на рис. 6, из которого видно, что она также является линейной, как и в предыдущем случае. Каждая точка на этом рисунке представляет собой результат усреднения данных 13–14 наблюдений. Данные, представленные на рис. 6, не противоречат гипотезе о ли-

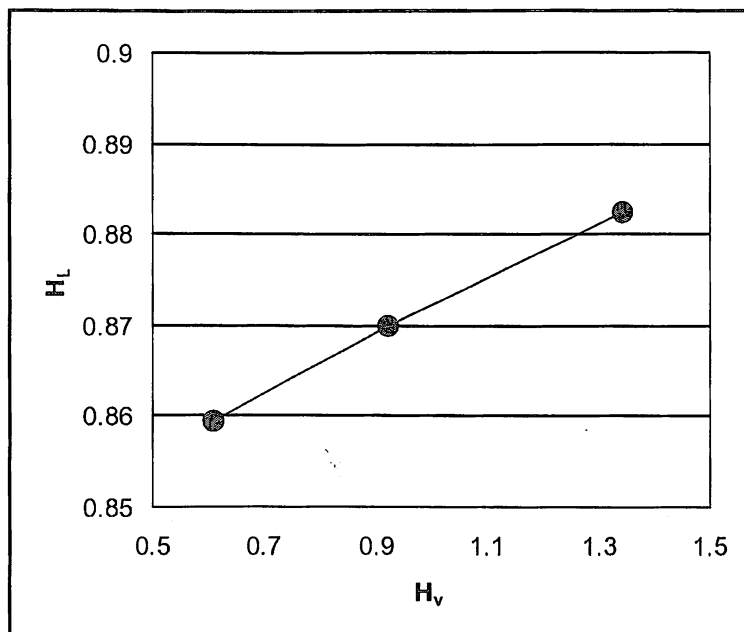


Рис. 6. Корреляция между значениями  $H$ , вычисленными на основе данных по скорости циркуляции крови ( $\dot{H}_V$ ) и емкости легких ( $H_L$ )

нейной связи между случайными величинами 2.31, хотя следует отметить, что величина  $H_L$  изменяется в несколько меньших пределах, нежели  $H_V$ . Это может быть обусловлено самыми разными причинами, в частности, значениями коэффициентов в формулах для  $\underline{Q}$ . Однако для нас главным является наличие линейной связи, а наклон линии регрессии всегда можно скорректировать подбором коэффициентов в формулах (2.11)–(2.12), хотя для этого нужны выборки гораздо большего объема.

Таким образом, можно заключить, что гипотеза о подобии микродвижений в жидких средах организма (2.12) и полученные на ее основе результаты (леммы 1–3) не противоречат данным наблюдений.

## 2.5. Параметризация в базовой модели инфекционного заболевания

Базовая модель инфекционного заболевания была рассмотрена ранее, поэтому сразу приводим результат ее параметризации в соответствии с формулами (2.19) и (2.20):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= H\underline{\beta}V - H^{\frac{5}{2}}\underline{\gamma}FV, \\ \frac{dF}{dt} &= H\underline{\rho}C - H^{\frac{5}{2}}\underline{\eta}\underline{\gamma}FV - H\underline{\mu}_F F, \\ \frac{dC}{dt} &= H^{\frac{5}{2}}\underline{\alpha}\lambda(m) (FV)|_{t-\frac{\tau}{H}} - H\underline{\mu}_C \left( C - \frac{C^\infty}{\sqrt{H}} \right), \\ \frac{dm}{dt} &= H^{\frac{5}{2}}\underline{\sigma}V - H\underline{\mu}_m m, \\ V(0) &= V^0, \quad F(0) = \underline{F}^\infty = \frac{\underline{\rho}C^\infty}{\underline{\mu}_F\sqrt{H}}, \quad C(0) = \frac{C^\infty}{\sqrt{H}}, \quad m(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где параметры  $\{\underline{\gamma}, \underline{\rho}, \underline{\mu}_F, \underline{\mu}_C, \underline{\mu}_m, \underline{\alpha}, C^\infty, \underline{F}^\infty\}$  соответствуют базовому организму, а персональный параметр  $H$  учитывает особенности исследуемого организма и определяется по его физиологическим показателям так, как это было описано в предыдущем подразделе.

Базовые параметры были выбраны таким образом, что при  $H = 1$  решение уравнений модели (2.32) соответствует субклинической форме инфекции. Другими словами, при дозе заражения  $V^0$  заболевание в базовом организме не возникает, и концентрация вируса экспоненциально убывает. При уменьшении  $H$  та же доза заражения приводит к хронической форме болезни. При последующем уменьшении  $H$  имеет место острая форма болезни, а при высокой вирулентности патогена — летальный исход. Результаты моделирования показывают, что с помощью параметра  $H$  можно прогнозировать форму течения болезни в исследуемом организме, если кроме базового набора параметров известны параметры патогена: скорость его размножения  $\beta$  и вирулентность  $\sigma$ . Оценка параметров модели — это вопрос, требующий отдельного изучения. Однако отметим, что независимо от их конкретных значений болезнь возникает в результате снижения параметра  $H$ . На основании этого параметр  $H$  можно рассматривать как общую характеристику степени защищенности организма от заболеваний. Это в свою очередь означает, что данный параметр может быть использован для мониторинга состояния здоровья индивидов.

Действительно, регулярно измеряя концентрацию глюкозы в крови и вычисляя  $H$ , можно своевременно выявить тенденцию к его снижению и выяснить причины таких изменений. В качестве альтернативы можно легко



контролировать величину  $H$ , если регулярно проводить измерения массы тела  $M$ . В самом деле, из формул (2.14), (2.9)–(2.10) следует, что при

$$M = \underline{M} = \frac{h^2}{427}$$

значение параметра  $H$  равно 1. Поэтому простейшим способом предупреждения заболеваний является поддержание массы тела на уровне, который определяется ростом  $h$ .

### 3. Задачи и направления дальнейших исследований

Математическое моделирование иммунной системы, процессов иммунного ответа на различные антигены у человека и животных, нарушений функции иммунитета, изучение общих принципов взаимодействий между микроорганизмами и иммунной системой и многие другие вопросы являются объектом интенсивных научных исследований. Ежегодно публикуются сотни статей, посвященных различным аспектам математического моделирования системы иммунитета. На конференциях по иммунологии и теоретической биологии традиционно организуются секции математического моделирования в иммунологии, где бывают представлены самые разнообразные методы и подходы. В существующем потоке исследований излагаемый нами материал представляет собой отдельное направление. Определенным преимуществом подхода, основу которого заложил Г.И. Марчук, является наличие ясной перспективы дальнейших исследований: каждая решенная задача порождает новый круг вопросов и задач, нередко интересных для представителей смежных областей биологических наук. Поэтому, не претендуя на общность, рассмотрим возможные направления будущих исследований, какими они видятся в рамках представленного подхода.

- Построение и исследование математических моделей заболеваний и процессов иммунной защиты:
  - построение математических моделей хронических вирусных и бактериальных инфекций, формирования хронической инфекции, обострений, выздоровления;
  - моделирование действия бактериальных липополисахаридов как иммуностимуляторов при хронических вирусных и бактериальных инфекциях;
  - построение математических моделей формирования и поддержания популяций наивных лимфоцитов и клеток памяти в зависимости от антигенной нагрузки;

- построение математических моделей взаимодействия в организме нескольких патогенов в зависимости от их антигенной структуры и вирулентности;
  - построение математических моделей взаимодействия клеток в лимфатических узлах, изучение механизмов формирования таких структур, как зародышевый центр, Т-клеточная область, их роль в поддержании клеток памяти;
  - классификация и моделирование механизмов первичных и вторичных иммунодефицитов;
  - моделирование ВИЧ-инфекции;
  - моделирование экспериментальных инфекций;
  - моделирование инфекции микобактериями;
  - моделирование лечения инфекционных заболеваний.
- Обоснование и исследование общих принципов, определяющих строение и функционирование системы противоинойфекционной защиты организма и популяции:
- обоснование применимости принципа минимума диссипации энергии;
  - моделирование процессов коэволюции системы противоинойфекционной защиты и патогенов;
  - моделирование механизмов и исследование роли неоднородности популяции по характеристикам противоинойфекционной защиты;
  - определение и обоснование нормального функционирования противоинойфекционной защиты как оптимального в смысле некоторого функционала;
  - исследование количественных характеристик противоинойфекционной защиты и их связи с интенсивностью метаболизма и размерами организма, особенностями среды обитания, характером антигенной нагрузки на систему дыхания и пищеварения;
  - исследование связи характеристик и стратегий функционирования противоинойфекционной защиты и системы репродукции;
  - моделирование возрастных изменений в функционировании иммунной системы;
  - оценка границы области устойчивости и нормы для системы противоинойфекционной защиты;
  - моделирование процесса поддержания гомеостаза иммунной системы, его адаптации к внешней среде (поддержание количества клеток, перестройка репертуара и, возможно, локализации иммунных процессов в периферических ЛУ);

- изучение факторов, определяющих количество энергии, затрачиваемой организмом на противоинфекционную защиту, а также взаимосвязей этой величины с энергетической ценой инфекционных заболеваний;
  - исследование взаимосвязей между индивидуальным и популяционным иммунитетом, в том числе с точки зрения оптимальности затрат энергии на противоинфекционную защиту;
  - изучение связей между количеством энергии (удельной мощностью), потребляемым особью (популяцией, видом), с количеством энергии, затрачиваемым на противоинфекционную защиту.
- Построение моделей взаимосвязей между иммунной системой и другими защитными и регуляторными системами организма, такими как гормональная и нервная системы, исследование роли циркадных ритмов в работе иммунной системы:
- моделирование влияния гормонов, лихорадки и стресса на функционирование иммунной системы и течение инфекции;
  - количественное исследование и моделирование пределов адаптации иммунной системы;
  - построение математических моделей воспалительной и регенераторной реакций и их взаимосвязи с иммунной реакцией.
- Построение моделей механизмов влияния факторов окружающей среды на функцию систем противоинфекционной защиты. Среди таких факторов отметим разнообразие, количество, вирулентность поступающих в организм патогенов, изменение температуры среды, влажности воздуха, радиации, токсических загрязнений:
- модель размножения вируса гриппа в эпителии верхних дыхательных путей при условии зависимости темпа размножения вируса от температуры тканей;
  - построение иммуноэпидемических моделей, описывающих как процессы иммунной защиты внутри организма, так и процессы, определяющие инфицирование других хозяев и распространение патогена в окружающей среде, на примере малярии, туберкулеза и других инфекций;
  - построение моделей формирования/выявления иммунодефицитов под влиянием факторов окружающей среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых российских ученых и ведущих научных школ (НШ-150.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (04-01-00579).

## Литература

- [1] *Белых Л.Н.* Анализ математических моделей в иммунологии. М.: Наука, 1988, 192 с.
- [2] *Бербенцова Э.П.* Пособие по пульмонологии. Иммунология, клиника, диагностика и лечение воспалительных вирусных, бактериальных заболеваний верхних дыхательных путей, бронхов, легких. М.: Успехи физических наук, 1998, 624 с.
- [3] *Бочаров Г.А.* Математическое моделирование вирусных и бактериальных инфекций: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1995, 32 с.
- [4] *Бочаров Г.А., Романюха А.А.* Численное решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом на основе линейных многошаговых методов. Алгоритм и программа // Препринт № 117. М., ОВМ АН СССР, 1986. 40 с.
- [5] *Вейбель Э.Р.* Морфология легких человека. М.: Медицина, 1970 (пер. с англ.), 176 с.
- [6] *Вишнякова Л.А., Яковлева Н.В.* Роль и взаимодействие вирусов, бактерий и других биологических патогенных агентов в этиологии и патогенезе инфекционных процессов в бронхолегочной системе // Болезни органов дыхания. Т. 1. / Под ред. Н.В. Путова. М.: Медицина, 1989. С. 209–223.
- [7] *Воробьев А.А., Медунницын Н.В.* Клеточная теория иммунитета И. И. Мечникова и концепция антиинфекционной резистентности // Журн. микробиол. эпидемиол. иммунобиол. 1995. № 3. С. 36–42.
- [8] *Гилман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977, 568 с.
- [9] *Гунзалус И., Шустер Ц.* Обменные реакции, являющиеся источником энергии у бактерий // Метаболизм бактерий / Под ред. И. Гунзалуса, Р. Стейниера. М.: ИЛ, 1963 (пер. с англ.). С. 9–62.
- [10] *Зуев С.М.* Статистическое оценивание параметров математических моделей заболеваний. М.: Наука, 1988, 192 с.
- [11] *Иванов К.П.* Основы энергетики организма: Теоретические и практические аспекты. Т. I. Общая энергетика, теплообмен и терморегуляция. Л.: Наука, 1990, 308 с.
- [12] *Копьева Т.Н., Шашев Н.С., Карабиненко А.А., Воронина Л.М.* Цитология бронхоальвеолярных смывов при острой очаговой пневмонии // Советская медицина. 1991. № 2. С. 65–69.
- [13] *Король О.И.* Местный и системный иммунитет, иммунологическая недостаточность при воспалительных заболеваниях легких: Автореф. дисс. ... д-ра мед. наук. Л., 1983, 34 с.
- [14] *Марчук Г.И.* Простейшая математическая модель вирусного заболевания / Препринт. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1975, 22 с.
- [15] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980, 264 с.
- [16] *Марчук Г.И.* Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991 (3-е изд.), 304 с.
- [17] *Марчук Г.И., Бербенцова Э.П.* Острые пневмонии. Иммунология, оценка тяжести, клиника, лечение. М.: Наука, 1989, 304 с.
- [18] *Марчук Г.И., Петров Р.В.* Математическая модель противовирусного иммунного ответа // Препринт № 10. М., ОВМ АН СССР, 1981, 22 с.

- [19] *Марчук Г.И., Погожнев И.Б., Зуев С.М.* Условия подобию процессов в системах взаимодействующих частиц // Докл. РАН. 1995. Т. 345, № 5. С. 605–606.
- [20] *Марчук Г.И., Романюха А.А., Бочаров Г.А.* Математическое моделирование противовирусного иммунного ответа при вирусном гепатите / В сб. “Математические проблемы кибернетики”. М.: Наука, 1989. С. 5–70.
- [21] *Маянский А.Н., Маянский Д.Н.* Очерки о нейтрофиле и макрофаге. Новосибирск: Наука, 1983, 256 с.
- [22] *Молчанов А.М.* Многобарьерный иммунитет // Биофизика. 1971. Т. 16, № 3. С. 482–485.
- [23] *Нисевич Н.И., Марчук Г.И., Зубикова И.И., Погожнев И.Б.* Математическое моделирование вирусного гепатита. М.: Наука, 1981, 352 с.
- [24] *Петров Р.В.* Иммунология. М.: Медицина, 1987, 416 с.
- [25] *Погожнев И.Б.* Применение математических моделей заболеваний в клинической практике. М.: Наука, 1988, 192 с.
- [26] *Погожнев И.Б.* Беседы о подобию процессов в живых организмах. М.: Наука, 1999, 224 с.
- [27] *Пол У.* Иммунология. Т. I–III. / Под ред. У. Пола. М.: Мир, 1987–1989 (пер. с англ.).
- [28] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: РХД, 2001.
- [29] *Ройт А., Бростофф Дж., Мейл Д.* Иммунология. М.: Мир, 2000, 592 с.
- [30] *Романюха А.А.* Математическое моделирование противовирусного иммунного ответа при вирусном гепатите В: Автореф. дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1990, 32 с.
- [31] *Романюха А.А.* Энергетическая цена противoinфекционной защиты организма. Эволюционный подход к анализу данных и моделированию // Тез. докл. Второй Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96). Новосибирск, 1996. С. 44.
- [32] *Романюха А.А., Руднев С.Г.* Вариационный принцип в исследовании противoinфекционного иммунитета на примере пневмонии // Матем. моделирование. 2001. Т. 13, № 8. С. 65–84.
- [33] *Романюха А.А., Яшин А.И.* Математическая модель возрастных изменений в популяции периферических Т-лимфоцитов // Успехи геронтологии. 2001. Вып. 8. С. 58–69.
- [34] *Сапин М.Р., Этинген Л.Е.* Иммунная система человека. М.: Медицина, 1996, 304 с.
- [35] *Серов В.В., Пауков В.С.* Воспаление. Руководство для врачей / Под ред. В. В. Серова, В. С. Паукова. М.: Медицина, 1995, 640 с.
- [36] *Флиндт Р.* Биология в цифрах. М.: Мир, 1992 (пер. с нем.), 304 с.
- [37] *Ханин М.А., Дорфман Н.Л., Бухаров И.Б., Левадный В.Г.* Экстремальные принципы в биологии и физиологии. М.: Наука, 1978, 256 с.
- [38] *Шестопалов А.М., Зубикова И.И., Нисевич Н.И., Романюха А.А.* Количественный метод оценки иммунного ответа с учетом показателей клеточного и гуморального иммунитета / Препринт № 167. М., ОВМ АН СССР, 1987. 25 с.
- [39] *Шмальгаузен И.И.* Контроль и регуляция в эволюции // Бюлл. МОИП (отд. биол.). 1958. Т. 63, Вып. 5. С. 93–121.

- [40] *Чернух А.М.* Воспаление. Очерки патологии и экспериментальной терапии. М.: Медицина, 1979, 448 с.
- [41] *Шмидт-Нильсен К.* Размеры животных: Почему они так важны? М.: Мир, 1987, 259 с.
- [42] *Aspinall R.* Longevity and the immune response // *Biogerontol.* 2000. V. 1. P. 273–278.
- [43] *Bell G.I.* Mathematical model of clonal selection and antibody production // *J. Theor. Biol.* 1970. V. 29, № 2. P. 191–232.
- [44] *Bell G.I.* Predator-prey equations simulating an immune response // *Math. Biosci.* 1973. V. 16. P. 291–314.
- [45] *Bocharov G.A., Romanyukha A.A.* Mathematical model of antiviral immune response. III. Influenza A virus infection // *J. Theor. Biol.* 1994. V. 167. P. 323–360.
- [46] *Effros R.B.* Replicative senescence in the immune system: impact of the Hayflick limit on T-cell function in the elderly // *Amer. J. Hum. Gen.* 1998. V. 62. P. 1003–1007.
- [47] *Forys U.* Hopf bifurcation in Marchuk's model of immune reactions // *Math. Comp. Modelling.* 2001. V. 34. P. 725–735.
- [48] *Franceschi C., Monti D., Sansoni P. et al.* The immunology of exceptional individuals: The lesson of centenarians // *Immunol. Today.* 1995. V. 16. P. 12–16.
- [49] *Freitas A.A., Rocha B.* Population biology of lymphocytes: The flight for survival // *Annu. Rev. Immunol.* 2000. V. 18. P. 83–111.
- [50] *Hege J.S., Cole G.* A mathematical model relating circulating antibody and antibody forming cells // *J. Immunol.* 1966. V. 97. P. 34–40.
- [51] *Jakab G.J.* Mechanisms of bacterial superinfections in viral pneumonias // *Schweiz. Med. Wochenschr.* 1985. V. 115, № 3. P. 75–86.
- [52] *Jilek M.* The number of immunologically activated cells after repeated immunization (A mathematical model) // *Folia Microbiol.* 1971. V. 16, № 1. P. 12–23.
- [53] *Johnson K.E.* Histology and cell biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1991, 409 p.
- [54] *Karpov A.V., Romanyukha A.A.* Mathematical modeling of destructive pneumonia // *Lecture Notes of the ICB Seminars.* Warsaw, 1992, P. 50–68.
- [55] *Lauffenburger D.A.* Mathematical Analysis of the Macrophage Response to Bacterial Challenge in the Lung // *Mononuclear Phagocytes*, 1985. P. 351–356.
- [56] *Lauffenburger D.A., Kennedy C.R.* Analysis of a lumped model for tissue inflammatory response // *Math. Biosci.* 1981. V. 53, № 3–4. P. 189–221.
- [57] *Lehninger A.L.* Bioenergetics: The Molecular Basis of Biological Energy Transformations. Palo Alto: W. A. Benjamin, 1971.
- [58] *Liggett S.B., Renfro A.D.* Energy expenditures of mechanically ventilated nonsurgical patients // *Chest.* 1990. V. 98, № 3. P. 682–686.
- [59] *Marchuk G.I.* Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases. Dordrecht: Kluwer, 1997, 350 p.
- [60] *Marchuk G.I., Pogochev I.B., Zuev S.M.* Similarity conditions of the processes in system of interacting particles // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1996. V. 11, № 1. P. 41–47.

- [61] *Marchuk G.I., Romanyukha A.A., Bocharov G.A.* Mathematical model of antiviral immune response. II. Parameters identification for acute viral hepatitis B // *J. Theor. Biol.* 1991. V. 151, № 1. P. 41–70.
- [62] *McEwen B.S.* Sex, stress and the hippocampus: allostasis, allostatic load and the aging process // *Neurobiol. Ageing.* 2002. V. 23. P. 921–939.
- [63] *Monteil M.A., Kaniuk A.S.C., Hobbs J.R.* Staphylococcal opsonization and anti-*Staphylococcus aureus* IgG subclass antibodies in patients with severe or recurrent *S. aureus* infections // *FEMS Microbiol. Immunol.* 1990. V. 64, № 5–6. P. 259–262.
- [64] *Nickerson C.L., Jakab G.J.* Pulmonary antibacterial defenses during mild and severe influenza virus infection // *Infect. Immun.* 1990. V. 58, № 9. P. 2809–2814.
- [65] *Pimbley G.H.* Periodic solutions of predator–prey equations simulating an immune response, I // *Math. Biosci.* 1974. V. 20. P. 27–51.
- [66] *Posnett D.N., Sinha B., Kabak S. et al.* Populations of T-cells in normal elderly humans the T-cell equivalent to benign monoclonal gammopathy // *J. Exp. Med.* 1994. V. 179. P. 609–618.
- [67] *Rashevsky N.* Mathematical biophysics. Physico-mathematical foundations of biology. 3-rd edn. V. 2. N.Y.: Dover, 1960, 462 p.
- [68] *Rolfe D.F.S., Brown G.C.* Cellular energy utilization and molecular origin of standard metabolic rate in mammals // *Physiol. Rev.* 1997. V. 77, № 3. P. 731–758.
- [69] *Romanyukha A.A., Yashin A.I.* Age related changes in population of peripheral T-cells: Towards a model of immunosenescence // *Mech. Ageing Dev.* 2003. V. 124. P. 433–443.
- [70] *Ruths S., Driedijk P.C., Weening R.S., Out T.A.* ELISA procedures for the measurement of IgG subclass antibodies to bacterial antigens // *J. Immunol. Methods.* 1991. V. 140, № 1. P. 67–78.
- [71] *Sannikova T.E., Rudnev S.G., Romanyukha A.A., Yashin A.I.* Immune system aging may be affected by HIV infection: Mathematical model of immunosenescence // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling.* 2004. V. 19, № 4. P. 315–329.
- [72] *Smith J.J., Kampine J.P.* Circulatory Physiology: the Essentials. Baltimore: Williams and Wilkins, 1990.
- [73] *Spector W.S.* Handbook of Biological Data. Philadelphia–London: Saunders, 1956, 584 p.
- [74] *Sprent J., Surh C.D.* T-cell memory // *Annu. Rev. Immunol.* 2002. V. 20. P. 551–579.
- [75] *Stanley M.W., Henry-Stanley M.J., Iber C.* Bronchoalveolar Lavage. Cytology and Clinical Applications. N.Y.-Tokio: Igaku-Shoin, 1991.
- [76] *Stengel R.F., Ghigliazza R.M., Kulkarni N.V.* Optimal enhancement of immune response // *Bioinformatics.* 2002. V. 18, № 9. P. 1227–1235.
- [77] *Stone K.C., Mercer R.R., Gehr P., Stockstill B., Crapo J.D.* Allometric relationships of cell numbers and size in the mammalian lung // *Amer. J. Resp. Cell Mol. Biol.* 1992. V. 6, № 2. P. 235–243.
- [78] *Verbrugh H.A., Peterson P.K., Nguyen B.-Y.T., Sisson S.P., Kim Y.* Opsonization of encapsulated *Staphylococcus aureus*: the role of specific antibody and complement // *J. Immunol.* 1982. V. 129, № 4. P. 1681–1687.

- [79] *Vermeeren M.A., Schols A.M., Wouters E.F.* Effects of an acute exacerbation on nutritional and metabolic profile of patients with COPD // *Eur. Respir. J.* 1997. V. 10, № 10. P. 2264–2269.
- [80] *Volkov I.K., Zuev S.M.* Conditions for identifiability of autonomous systems of ordinary differential equations // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* 1999. V. 14, № 6. P. 513–525.
- [81] *Weibel E.R.* Morphological basis of alveolar-capillary gas exchange // *Physiol. Rev.* 1973. V. 53, № 2. P. 419–495.
- [82] *Wick G., Jansen-Durr P., Berger P. et al.* Diseases of ageing // *Vaccine.* 2000. V. 18. P. 1567–1583.



## Содержание

<i>В.С. Владимиров, В.И. Лебедев</i> <b>Ядерная энергетика и математика</b> . . . . .	3
<i>В.П. Дымников, В.Н. Лыкосов, Е.М. Володин, В.Я. Галин, А.В. Глазунов, А.С. Грицуун, Н.А. Дианский, М.А. Толстых, А.И. Чавро</i> <b>Моделирование климата и его изменений</b> . . . . .	36
<i>А.С. Саркисян, В.Б. Залесный, Н.А. Дианский, Р.А. Ибраев, В.И. Кузин, С.Н. Мошонкин, Е.В. Семенов, Р. Тамсалу, Н.Г. Яковлев</i> <b>Математические модели циркуляции океанов и морей</b> . .	174
<i>А.Е. Алоян, В.В. Пененко, В.В. Козодеров</i> <b>Математическое моделирование в проблеме окружающей среды</b> . . . . .	277
<i>А.А. Романюха, С.Г. Руднев, С.М. Зуев</i> <b>Анализ данных и моделирование инфекционных заболе- ваний</b> . . . . .	350

Научное издание

**Современные проблемы  
вычислительной математики  
и математического моделирования**

**В двух томах**

**Том 2**

***Математическое моделирование***

*Утверждено к печати  
Ученым советом  
Института вычислительной математики  
Российской академии наук*

Зав. редакцией *Н.А. Степанова*  
Редактор *Л.В. Пеняева*  
Художник *Е.А. Шевейко*  
Художественный редактор *Ю.И. Духовская*

Напечатано с оригинал-макета  
Института вычислительной математики РАН

Подписано к печати 27.01. 2005  
Формат 70 × 100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура Таймс  
Печать офсетная  
Усл.печ.л. 33,2. Усл.кр.-отг. 33,2. Уч.-изд.л. 27,0  
Тираж 570 экз. Тип. зак. 3855

Издательство "Наука"  
117997, Москва, Профсоюзная ул., 90  
E-mail: [secret@naukaran.ru](mailto:secret@naukaran.ru)  
Internet: [www.naukaran.ru](http://www.naukaran.ru)

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ГУП "Типография "Наука"  
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

## АДРЕСА КНИГОТОРГОВЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ ТОРГОВОЙ ФИРМЫ “АКАДЕМКНИГА” РАН

### Магазины “Книга-почтой”

121099 Москва, Шубинский пер., 6; 241-02-52  
E-mail: akadem.kniga@G23.relcom.ru  
197345 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, 76; (код 812) 235-40-64

### Магазины “Академкнига” с указанием “Книга-почтой”

690088 Владивосток, Океанский пр-т, 140 (“Книга-почтой”); (код 4232) 45-27-91  
antoli@mail.ru  
620151 Екатеринбург, ул. Мамина-Сибиряка, 137 (“Книга-почтой”); (код 3433)  
50-10-03 KNIGA@SKY.ru  
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 298 (“Книга-почтой”); (код 3952) 42-96-20 val@igc.irk.ru  
660049 Красноярск, ул. Сурикова, 45; (код 3912) 27-03-90  
AKADEMKNIKA@KRASMAIL.RU  
220012 Минск, проспект Ф. Скорины, 72; (код 10375-17) 232-00-52, 232-46-52  
117312 Москва, ул. Вавилова, 55/7; 124-55-00 akadkniga@voxnet.ru; akadkniga@nm.ru;  
http://akadkniga.nm.ru  
117192 Москва, Мичуринский пр-т, 12; 932-74-79  
127051 Москва, Цветной бульвар, 21, строение 2; 921-55-96  
113105 Москва, Варшавское ш., 9, Книж. ярмарка на Тульской (5 эт.); 737-03-33,  
737-03-77 (доб. 50-10)  
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90; 334-72-98  
630091 Новосибирск, Красный пр-т, 51; (код 3832) 21-15-60 akademkniga@mail.ru  
630090 Новосибирск, Морской пр-т, 22 (“Книга-почтой”);  
(код 3832) 30-09-22 akdmn2@mail.nsk.ru  
142290 Пушкино Московской обл., МКР “В”, 1 (“Книга-почтой”); (код 277) 3-38-80  
191104 Санкт-Петербург, Литейный пр-т, 57; (код 812) 272-36-65 ak@akbook.ru  
199164 Санкт-Петербург, Таможенный пер., 2; (код 812) 328-32-11  
194064 Санкт-Петербург, Тихорецкий пр-т, 4; (код 812) 247-70-39  
199034 Санкт-Петербург, Васильевский остров, 9-я линия, 16; (код 812) 323-34-62  
634050 Томск, Набережная р. Ушайки, 18; (код 3822) 51-60-36  
akademkniga@mail.tomsknet.ru  
450059 Уфа, ул. Р. Зорге, 10 (“Книга-почтой”); (код 3472) 24-47-74  
450025 Уфа, ул. Коммунистическая, 49; (код 3472) 22-91-85

**Коммерческий отдел, г. Москва**

**Телефон 241-03-09**

**E-mail: akadem.kniga@g 23.relcom.ru**

**akadkniga@voxnet.ru**

**Склад, телефон 291-58-87**

**Факс 241-02-77**

---

*По вопросам приобретения книг  
государственные организации  
просим обращаться также  
в Издательство по адресу:  
117997 Москва, ул. Профсоюзная, 90  
тел. факс (095) 334-98-59  
E-mail: initsiat @ naukaran.ru  
Internet: www.naukaran.ru*

---