



БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ

А. Е. ВЕРЕШКИН
В. Я. КАТКОВНИК

**ЛИНЕЙНЫЕ
ЦИФРОВЫЕ
ФИЛЬТРЫ
И МЕТОДЫ
ИХ РЕАЛИЗАЦИИ**

СОВЕТСКОЕ РАДИО

БИБЛИОТЕКА
ТЕХНИЧЕСКОЙ
КИБЕРНЕТИКИ

А. Е. ВЕРЕШКИН,
В. Я. КАТКОВНИК

ЛИНЕЙНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ И МЕТОДЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

(АНАЛИЗ ОШИБОК
КВАНТОВАНИЯ
ПО УРОВНЮ)



МОСКВА «СОВЕТСКОЕ РАДИО» 1973

Верешкин А. Е., Катковник В. Я. *Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. (Анализ ошибок квантования по уровню)*. М. «Сов. радио», 1973, 152 с.

Рассматриваются методы анализа результирующих ошибок квантования, возникающих в цифровом фильтре вследствие квантования сигналов по уровню и округления результатов вычислений. Показывается, каким образом выбор алгоритма реализации цифрового фильтра с заданными динамическими характеристиками влияет на величину результирующих ошибок. Дается подробный анализ известных схем программирования дискретных систем и предлагается ряд новых схем. Приводятся рекомендации по выбору рациональной структуры цифрового фильтра, обеспечивающей наименьшую величину результирующей ошибки квантования. Излагается задача синтеза дискретных полосовых фильтров. Приводятся примеры расчета результирующих ошибок при различных структурах реализации цифровых фильтров.

Книга представляет интерес для широкого круга специалистов, работающих над проблемами использования цифровых устройств в системах управления.

Рис. 52, табл. 4, библи. 59 назв.

Редакция кибернетической литературы

Члены редакционного совета:

Трапезников В. А. (председатель), Челюстин А. Б. (зам. председателя), Бусленко Н. П., Виленкин С. Я., Воронов А. А., Гаазе-Рапопорт М. Г., Дудников Е. Г., Ицкович Э. Л., Копелович А. П., Круг Г. К., Мамиконов О. Г., Осколкин И. О., Пархоменко П. П., Пинскер М. С., Плискин Л. Г., Поспелов Г. С., Райбман Н. С., Самойленко С. И., Таль А. А., Флейшман Б. С., Хургин Я. И., Цыпкин Я. З., Якобсон Б. М.

В $\frac{3314-080}{046(01)-73}$ 75-73

© Издательство «Советское радио», 1973.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Инженерная практика располагает обширным арсеналом средств синтеза динамических характеристик линейных и нелинейных систем автоматического управления. При этом требуемое качество систем обеспечивается введением в цепи прямых и обратных связей корректирующих фильтров. Использование в системах управления цифровых устройств существенно расширяет возможности подобных корректирующих элементов.

При реализации цифровых фильтров с заданными динамическими характеристиками возникают две основные задачи:

— нахождение алгоритмов реализации цифровых фильтров, оптимальных с точки зрения минимума числа требуемых арифметических операций и элементов памяти;

— разработка методов уменьшения результирующих ошибок на выходе цифрового фильтра, обусловленных округлением результатов умножения до фиксированных уровней, определяемых длиной принятой разрядной сетки.

Кроме того, весьма актуальной является задача разработки цифрового фильтра наименьшего веса и габаритов. Последние существенно зависят от длины принятой разрядной сетки, т. е. от числа уровней квантования преобразуемых сигналов. Уменьшение числа разрядов влечет за собой снижение веса и габаритов цифрового устройства, однако приводит также и к увеличению результирующей ошибки, обусловленной квантованием. Эта ошибка при заданных динамических характеристиках корректирующего фильтра существенно зависит от алгоритма реализации его передаточной функции. Так, среднеквадратичное значение результирующей ошибки квантования может иметь самые различные значения в зависимости от выбранного алгоритма реализации цифрового корректирующего устройства.

В отечественной литературе вопросам реализации цифровых фильтров с учетом величины результирующих

ошибка квантования до последнего времени не уделялось должного внимания. Из иностранных авторов следует отметить Дж. Ноулса и Р. Эдвардса, которые рассматривали эту задачу применительно к трем известным методам программирования дискретной передаточной функции цифрового фильтра [47]. Полученные ими результаты приводятся также в книгах Куо и Кайзера [48], Гоулда и Рейдера [41]. Однако эти результаты нельзя использовать для решения задачи выбора наиболее рациональной структуры реализации цифрового фильтра.

В целом за рубежом опубликовано достаточно большое число статей, посвященных различным аспектам анализа и синтеза цифровых фильтров. Авторы не ставили задачу обобщить все эти работы. Их цель — разработать инженерные методы оценки результирующих ошибок квантования по уровню, а также изложить способы выбора наиболее рациональных структур реализации линейных цифровых фильтров, используя для этого некоторые аспекты теории графов. Кроме того, поскольку основными элементами многих технических систем являются полосовые фильтры, авторы посчитали необходимым подробно рассмотреть в книге задачу синтеза динамических характеристик полосовых цифровых фильтров и способы их реализации.

Постановка задачи определения наиболее рациональной структуры фильтра, обеспечивающей наименьшую возможную результирующую ошибку (обусловленную округлением до заданных уровней всех результатов вычислений), была впервые сформулирована профессором Миланского политехнического института Е. Бьонди.

Книга состоит из четырех глав и приложений. Первая глава содержит основные положения спектральной теории дискретных процессов. Обсуждаются различные методы построения дискретных моделей непрерывных звеньев. Вводится понятие ошибки квантования по уровню и приводятся различные способы оценки величины результирующей ошибки квантования на выходе фильтра. Во второй главе рассматриваются методы реализации цифровых фильтров. Излагаются элементы теории графов, дающей удобный аппарат для определения результирующих ошибок квантования по уровню. Предлагаются новые эффективные структурные схемы для реализации передаточных функций с комплексными полюсами. Третья, основная глава содержит детальный

анализ результирующих ошибок квантования, обусловленных операциями округления результатов вычисления, при различных структурах реализации цифрового фильтра. Приводятся оценки как для максимально возможной результирующей ошибки, так и для ее среднеквадратичного значения. Обсуждается проблема оптимизации структуры фильтра.

Последняя, четвертая глава посвящена задаче синтеза дискретных полосовых фильтров. Подробно рассматривается разработанная методика синтеза динамических характеристик полосовых дискретных фильтров. Для выбранных структур реализации фильтров дается оценка результирующих ошибок округления.

Изложение теоретических результатов сопровождается примерами, ознакомление с которыми весьма полезно для понимания сути излагаемых методов.

Книга предназначена для широкого круга инженеров и научных работников, сталкивающихся в процессе своей работы с проблемами синтеза цифровых управляющих устройств. Книга рассчитана на читателя, знакомого с общей теорией дискретных систем и элементами корреляционной теории случайных процессов.

§ 1.1, 1.2 и гл. 4 написаны В. Я. Катковником, § 1.3—1.5, гл. 2, 3 и приложения — А. Е. Верешкиным.

Авторы выражают благодарность рецензентам А. М. Трахтману, Н. М. Щелкановцеву, А. Ф. Терпугову, сделавшим ряд ценных замечаний, учтенных при подготовке рукописи к печати.

1. Динамические характеристики цифровых фильтров

1.1. КВАНТОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

Частотные методы являются в настоящее время основным аппаратом исследования линейных систем. Их широкое распространение объясняется, с одной стороны, физической наглядностью частотных характеристик систем и процессов, а с другой — удобством и сравнительной простотой соответствующего формального аппарата. В терминах частотных характеристик удается получить решение множества различных по своему содержанию задач.

Рассмотрим ряд вопросов преобразования стационарных случайных процессов линейными дискретными системами. Это позволит напомнить читателю основные положения спектрального анализа дискретных систем с постоянными параметрами и, не углубляясь в детали, ввести понятия и определения, которые будут использоваться далее.

Пусть $x[k]$ — дискретная периодическая выборка из процесса $x(t)$, т. е. $x[k] = x(kT)$, $k = 0, 1, \dots$, где T — период дискретности, или период квантования по времени. В анализе и синтезе дискретных динамических систем, оперирующих с величинами $x[k]$, существенный интерес представляет вопрос о спектральных характеристиках подобных периодических выборок и о связи их свойств со спектральными характеристиками исходного непрерывного процесса $x(t)$.

Для стационарного случайного процесса $x(t)$ с корреляционной функцией $R_x(\tau)$ соответствующие характеристики периодической выборки легко находятся в силу основного определения

$$R_x[l] = M\{x[k]x[k+l]\} = M\{x(kT)x(kT+lT)\} = R_x(lT), \quad (1.1)$$

где $M\{\cdot\}$ — символ усреднения по множеству реализаций. Таким образом, корреляционная функция выборки $x[k]$ есть корреляционная функция $R_x(\tau)$ исходного непрерывного процесса $x(t)$ при дискретных значениях аргумента $\tau = lT$.

Спектральные свойства дискретных последовательностей принято описывать в терминах дискретного пре-

образования Фурье:

$$\Phi_x(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{j\omega T k}.$$

Определенная таким образом функция $\Phi_x(e^{j\omega T})$ носит название спектральной плотности дискретного случайного процесса и по своему физическому смыслу представляет собой спектральную плотность мощности. Отметим некоторые основные свойства этой функции [26, 33]:

1) спектральная плотность неотрицательна, т. е. $\Phi_x(e^{j\omega T}) \geq 0$;

2) $\Phi_x(e^{j\omega T})$ — четная функция частоты ω , т. е. $\Phi_x(e^{j\omega T}) = \Phi_x(e^{-j\omega T})$;

3) $\Phi_x(e^{j\omega T})$ — периодическая функция частоты, с периодом $\Delta\omega = 2\pi/T$; в качестве основного периода частот ω обычно принимают интервал $(-\pi/T, \pi/T]$.

Переход от аргумента ω к комплексной переменной z ($z = e^{j\omega T}$) позволяет устранить эффект периодичности и воспользоваться для описания статистических свойств дискретного процесса хорошо разработанным аппаратом Z -преобразования. При этом взаимно-однозначное соответствие между спектральной плотностью и корреляционной функцией устанавливается формулами двустороннего Z -преобразования (Z_{II}):

$$\begin{aligned} \Phi_x(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] z^{-k} = Z_{II} \{R_x(kT)\}, \\ R_x[k] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_x(z) z^k \frac{dz}{z} = Z_{II}^{-1} \{\Phi_x(z)\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Последний интеграл вычисляется по контуру, представляющему собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости z .

Дисперсия процесса $x[k]$ определяется через его спектральную плотность следующим образом:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_x(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_x(e^{j\omega T}) d\omega. \quad (1.3)$$

Таким образом, σ_x^2 представляет собой суммарную мощность процесса $x[k]$ на основном интервале частот ω

от $-\pi/T$ до π/T . Вычисление интегралов (1.2)—(1.3) производится либо по теореме о вычетах, либо с использованием таблиц Z -преобразования [7, 26, 33].

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — два стационарных и стационарно связанных процесса. Взаимная корреляционная функция соответствующих дискретных последовательностей $x[k]$ и $y[k]$, очевидно, есть просто $R_{xy}(kT)$, т. е. взаимная корреляционная функция исходных непрерывных процессов при дискретном значении аргумента. Соответствующая спектральная характеристика—взаимная спектральная плотность $\Phi_{xy}(e^{j\omega T}) = \Phi_{xy}(z)$ —определяется формулами [33]:

$$\Phi_{xy}(z) = Z_{II} \{R_{xy}(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xy}[k] z^{-k}, \quad (1.4)$$

$$R_{xy}[k] = Z_{II}^{-1} \{\Phi_{xy}(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_{xy}(z) z^k \frac{dz}{z}.$$

Из свойств функции взаимной спектральной плотности отметим лишь следующее:

$$\Phi_{xy}(z) = \Phi_{yx}(z^{-1}). \quad (1.5)$$

Определение спектральной плотности (1.2) фактически связывает функцию $\Phi_x(z)$ и корреляционную функцию исходного непрерывного процесса $x(t)$. Однако существенный интерес представляет установление непосредственной связи между спектральными характеристиками процессов $x(t)$ и $x[k]$. Если спектральная плотность $\Phi_x(j\omega)$ непрерывного процесса есть рациональная функция от ω , стремящаяся к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ как $1/\omega^2$ или быстрее, то справедливо соотношение [33, 34]*

$$\Phi_x(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Phi_x\left(j\omega + j\frac{2\pi}{T}k\right). \quad (1.6)$$

Спектральная плотность дискретного процесса есть сумма значений спектральной плотности исходного процесса, взятых при значениях аргумента, смещенных на величину, кратную периоду (по частоте ω) $2\pi/T$.

* Если $\Phi_x(j\omega)$ не стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$, а скорость $1/\omega^2$ есть наименьшая возможная скорость убывания рациональной функции $\Phi_x(j\omega)$, то ряд (1.6) расходится и соответствующей функции $\Phi_x(z)$ не существует.

Можно показать, что имеет место предельный переход $T\Phi_x(e^{j\omega T}) \rightarrow \Phi_x(j\omega)$ при $T \rightarrow 0$. При сравнительно большой величине периода квантования спектральная плотность на основном интервале $(-\pi/T, \pi/T)$ существенно искажена по сравнению с исходной функцией $\Phi_x(j\omega)$.

В случае малой величины периода квантования на основном интервале спектральная плотность $\Phi_x(e^{j\omega T})$ практически точно совпадает с исходной функцией $\Phi_x(j\omega)$.

Для вычисления спектральной плотности $\Phi_x(z)$ по заданным характеристикам непрерывного процесса можно воспользоваться определением (1.2). Тогда для $\Phi_x(z)$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi_x(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} R_x[k] z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} R_x[k] z^k - R_x[0] = \\ &= R_x(z) + R_x(z^{-1}) - R_x[0], \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $R_x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_x[k] z^{-k} = Z\{R_x(kT)\}$ — обычное одно-стороннее Z -преобразование от корреляционной функции $R_x(\tau)$.

В случае, когда спектральные характеристики непрерывного процесса заданы графически, для приближенного построения спектра дискретного процесса чрезвычайно удобно соотношение (1.6), позволяющее наглядно оценить спектр квантованного по времени процесса.

Ш. Чанг показал [34], что спектральная плотность $\Phi_x(z)$ дискретного процесса может быть определена по соответствующей функции $\Phi_x(j\omega)$ с помощью обычного одностороннего Z -преобразования:

$$\Phi_x(z) = Z\{\Phi_x(p)\}. \quad (1.8)$$

Для вычисления по формуле (1.8) функция $\Phi_x(p)$ раскладывается на простейшие дроби, для каждой из которых по таблицам Z -преобразования определяются соответствующие Z -изображения. При суммировании полученных выражений определяется $\Phi_x(z)$. Следует отметить, что для получения аналитического выражения $\Phi_x(z)$ процедура (1.8) обычно более удобна, чем (1.7).

Дискретный процесс, спектральная плотность которого постоянна, носит название *дискретного белого шума*

(или просто *белого шума*). Ему соответствует корреляционная функция

$$R_x[k] = \sigma^2 \delta_{k,0}, \quad (1.9)$$

где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера; $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k=l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$

Это означает, что любые два последовательных значения процесса некоррелированы, а его дисперсия равна σ^2 . Понятно, что периодическая выборка из любого непрерывного случайного процесса с конечным временем корреляции при достаточно большом периоде дискретности T всегда обладает свойствами дискретного белого шума.

Перейдем к рассмотрению дискретных фильтров и их частотных характеристик. *Дискретным фильтром* принято называть динамическую систему, процессы на входе и выходе которой представляют собой дискретные последовательности. Линейный стационарный дискретный фильтр в общем случае описывается линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{i=0}^n b_i y[k-i] = \sum_{j=0}^m a_j x[k-j], \quad b_0 = 1. \quad (1.10)$$

Более компактную запись можно получить, вводя полиномиальные операторы сдвигов. Пусть ξ — оператор сдвига, такой, что $\xi x[k] = x[k+1]$, $\xi^{-1} x[k] = x[k-1]$, тогда разностное уравнение (1.10) можно записать в виде

$$B(\xi) y[k] = A(\xi) x[k],$$

где $B(\xi)$ и $A(\xi)$ — полиномиальные операторы сдвига,

$$\begin{aligned} B(\xi) &= 1 + b_1 \xi^{-1} + \dots + b_n \xi^{-n}, \\ A(\xi) &= a_0 + a_1 \xi^{-1} + \dots + a_m \xi^{-m}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Для анализа процессов в дискретных системах широко используется аппарат теории Z -преобразования. По определению, для изображений дискретных последовательностей имеем

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k}, \quad (1.12)$$

$$y[k] = Z^{-1} \{y(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} y(z) z^{k-1} dz. \quad (1.13)$$

Последняя формула определяет обратное Z -преобразование, где контур интегрирования Γ представляет собой

такую окружность конечного радиуса, внутри которой расположены все полюсы функции $y(z)$,

Передаточная функция линейного дискретного фильтра имеет вид

$$D(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \left(\sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \right) / \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} \right). \quad (1.14)$$

Тогда реакция фильтра $y[k]$ на произвольное возмущение $x[k]$ записывается как

$$y[k] = Z^{-1} \{ D(z) x(z) \} + \sum_{j=1}^n c_j \mu_j^k \quad (1.15)$$

или при переходе к эквивалентной временной записи в форме свертки

$$y[k] = \sum_{l=0}^k d[k-l] x[l] + \sum_{j=1}^n c_j \mu_j^k, \quad (1.16)$$

где $d[k] = Z^{-1} \{ D(z) \}$ — весовая функция дискретного фильтра; μ_j — корни характеристического уравнения

$$B(\mu) = 0; \quad (1.17)$$

c_j — постоянные, определяемые начальными условиями.

При записи разностного уравнения в форме (1.10) и поступлении внешнего возмущения начиная с момента времени $k=0$ начальные условия обычно задаются значениями выходной координаты $y[k]$ в n предшествующих моментах времени (n — порядок дискретного фильтра) $y[-1], \dots, y[-n]$. При этом постоянные c_j находятся как решение системы уравнений.

$$\sum_{j=1}^n c_j \mu_j^s = y[s]; \quad s = -1, \dots, -n. \quad (1.18)$$

Если начальные условия нулевые, то все $c_j = 0$ и реакция фильтра на $x[k]$ определяется первым слагаемым в (1.15) и (1.16).

Для простоты мы ограничились приведением выражения для $y[k]$, соответствующего лишь случаю простых (не кратных) корней характеристического уравнения (1.17).

Первое слагаемое (1.16) определяет вынужденную составляющую реакции фильтра, а второе — свободную составляющую. Вынужденная составляющая, очевидно,

равна нулю, если $x[k]=0$, а свободная составляющая, как уже отмечалось, равна нулю, если равны нулю все начальные условия. Дискретный фильтр называется *устойчивым*, если его реакция при произвольных начальных условиях с течением времени ($k \rightarrow \infty$) стремится к своей вынужденной составляющей. Для устойчивости фильтра в общем случае необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (1.17) по модулю были меньше единицы.

Пусть $x[k]$ — периодический процесс, т. е. $x[k] = Ae^{j\omega T k}$, тогда установившаяся реакция ($k \rightarrow \infty$) устойчивого фильтра записывается в виде

$$y[k] = A \sum_{l=0}^k d[k-l] e^{j\omega T l} = D(e^{j\omega T}) x[k],$$

где $D(e^{j\omega T}) = D(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \sum_{l=0}^{\infty} d[l] e^{-j\omega T l}$ — комплексный коэффициент передачи фильтра или его комплексная частотная характеристика.

Для входного процесса $x[k] = A \cos \omega T k$ аналогично можно получить

$$y[k] = A |D(e^{j\omega T})| \cos(\omega T k + \varphi(\omega)),$$

где $|D(e^{j\omega T})|$ — амплитудно-частотная характеристика дискретного фильтра, определяющая изменения амплитуд отдельных гармоник в результате прохождения сигнала через фильтр; $\varphi(\omega) = \arg D(e^{j\omega T})$ — фазо-частотная характеристика фильтра, определяющая фазовый сдвиг на частоте ω при прохождении гармонического сигнала через дискретный фильтр. Частотные характеристики фильтра сравнительно просто определяются по известной передаточной функции $D(z)$, если положить $z = e^{j\omega T}$.

В случае неустойчивого дискретного фильтра понятие установившейся реакции не имеет смысла, поскольку при $k \rightarrow \infty$ $|y[k]| \rightarrow \infty$, однако частотные характеристики фильтра остаются содержательной характеристикой фильтра, определяющей амплитудные и фазовые искажения гармонического процесса.

Приведем некоторые положения теории линейного преобразования дискретных случайных последовательностей. Пусть $x[k]$ — стационарный случайный процесс,

тогда $y[k]$ в установившемся режиме будет стационарным лишь в случае устойчивого дискретного фильтра. Если же фильтр неустойчив, т. е. хотя бы один из корней характеристического уравнения по модулю больше или равен единице, то процесс $y[k]$ в общем случае широкополосного возмущения $x[k]$ будет нестационарным, с дисперсией, растущей при $k \rightarrow \infty$ до бесконечности.

Для устойчивого фильтра с передаточной функцией $D(z)$ справедливы следующие формулы преобразования спектральной плотности:

$$\begin{aligned}\Phi_{xy}(z) &= \Phi_x(z)D(z), \\ \Phi_{yx}(z) &= \Phi_{xy}(z^{-1}) = D(z^{-1})\Phi_x(z), \\ \Phi_y(z) &= D(z^{-1})\Phi_x(z)D(z).\end{aligned}\quad (1.19)$$

При этом дисперсия процесса $y[k]$ вычисляется в силу соотношений

$$\begin{aligned}\sigma_y^2 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_y(z) \frac{dz}{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} D(z)D(z^{-1})\Phi_x(z) \frac{dz}{z}\end{aligned}\quad (1.20)$$

или, переходя к интегрированию по ω ,

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |D(e^{j\omega T})|^2 \Phi_x(e^{j\omega T}) d\omega.\quad (1.21)$$

Дисперсия процессов на выходе линейного дискретного фильтра определяется лишь амплитудно-частотной характеристикой фильтра и не зависит от его фазовой характеристики.

1.2. ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЗВЕНЬЕВ. ПРЕДЫМПУЛЬСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Остановимся на одном из весьма распространенных способов выбора динамических характеристик дискретных фильтров, предназначенных для обработки непрерывных данных. Во многих случаях с формальной точки зрения наиболее простой и в то же время физически весьма наглядной является следующая процедура. Первоначально ставится и решается задача синтеза рассматриваемой системы как непрерывной, после чего для тех звеньев, которые должны быть реализованы на цифровых

элементах, строятся дискретные модели и тем самым определяются искомые динамические характеристики этих моделей. Весьма важным с принципиальной и практической точек зрения является вопрос о том, как строить эти дискретные модели, чтобы полученная таким образом система с цифровыми элементами по своим общим характеристикам была близка к исходной

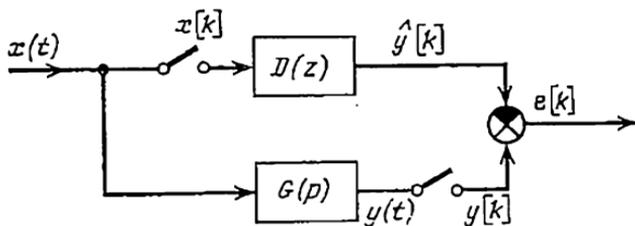


Рис. 1.1. Оценка погрешности дискретной модели непрерывной системы.

непрерывной, т. е. чтобы были малы ошибки $e[k]$ (рис. 1.1).

Подробное рассмотрение этой задачи выходит за рамки настоящей книги. В то же время невозможно, говоря о цифровых фильтрах, не остановиться хотя бы коротко на некоторых из возникающих вопросов, часто недостаточно четко выделяемых в литературе по дискретным системам.

Основными методами построения аппроксимирующих дискретных моделей являются следующие.

Метод инвариантных весовых функций

Пусть $G(p)$ — передаточная функция непрерывного звена, тогда (при нулевых начальных условиях) связь сигналов на входе и выходе определяется интегралом свертки

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) x(\tau) d\tau,$$

где $g(t)$ — весовая функция звена; $g(t) = L^{-1}\{G(p)\}$. Переходя от интегрирования к суммированию, запишем приближенное выражение для значения выходной координаты в дискретные моменты времени:

$$y(kT) \approx T \sum_{l=0}^k g(kT - lT) x(lT), \quad (1.22)$$

Ошибка преобразования сигнала при этом тем меньше, чем меньше период дискретности T . Будем рассматривать правую часть выражения (1.22) как выходную координату $\hat{y}[k]$ некоторой дискретной системы

$$\hat{y}[k] = T \sum_{l=0}^k g[k-l] x[l],$$

передаточная функция $D(z)$ которой, очевидно, равна

$$D(z) = TG(z), \quad (1.23)$$

где $G(z) = Z\{G(p)\}$.

В силу соответствия, имеющего место между значениями $y[k]$ и $\hat{y}[k]$, естественно в качестве дискретной модели непрерывного звена с передаточной функцией $G(p)$ принять звено с передаточной функцией (1.23). Весовая функция $\hat{a}[k]$ такой дискретной модели пропорциональна (с коэффициентом T) весовой функции $g[k]$ аппроксимируемого непрерывного звена. Последнее обстоятельство определяет название метода — *метод инвариантных весовых функций*.

Существенно, что имеет место следующий предельный переход:

$$\lim_{T \rightarrow 0} D(z) = G(p), \quad (1.24)$$

т. е. в пределе (при $T \rightarrow 0$) принятая модель обеспечивает сколь угодно высокую точность аппроксимации динамических характеристик непрерывного звена.

Справедливость равенства (1.24) непосредственно следует из соотношения, связывающего передаточные функции $G(p)$ и $G(z)$ [7, 33]:

$$G(e^{pT}) = \frac{1}{2} g(+0) + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G\left(p + \frac{2\pi}{T} kj\right), \quad (1.25)$$

где $g(+0)$ — значение весовой функции $g(t)$ в момент времени $t=+0$.

Из определения и общих свойств Z -преобразования следует, что устойчивому непрерывному звену в силу (1.23) соответствует также устойчивая дискретная модель, для полюсов которой имеем $z_l = e^{p_l T}$, где p_l — полюс передаточной функции $G(p)$.

Модель с формоимпульсным элементом

Непрерывное звено с передаточной функцией $G(p)$ заменяется в этом случае дискретным с идеальным периодическим ключом на входе (рис. 1.2), где $W(p)$ — пере-

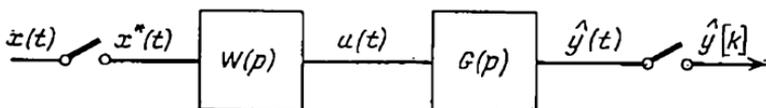


Рис. 1.2. Дискретная модель с формоимпульсным элементом.

даточная функция формоимпульсного элемента. Как принято в теории дискретных систем, сигнал при прохождении через идеальный ключ модулируется δ -функцией $\delta(t - kT)$, т. е.

$$x^*(t) = \sum_k x[k] \delta(t - kT),$$

тогда для процесса $u(t)$ справедливо выражение

$$u(t) = \sum_k w(t - kT) x[k], \quad (1.26)$$

где

$$w(t) = z^{-1}\{W(p)\}.$$

Практически формоимпульсное устройство тем или иным образом реализует только операцию (1.26), устанавливающую соответствие между величинами $x[k]$ и $u(t)$, цепь же с идеальным ключом и последовательностью δ -функций является полезной математической моделью, приводящей к удобной расчетной схеме рассматриваемой системы.

По определению, непрерывное звено называется *формоимпульсным*, если его весовая функция $w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(p)\}$ равна нулю вне основного интервала $[0, T)$.

* Свойства δ -функции:

$$1. \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

2. Для функции $x(t)$, непрерывной в точке t ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t).$$

Простейшим формоимпульсным элементом является фиксатор с передаточной и весовой функциями

$$W_0(p) = (1 - e^{-pT})/p,$$

$$w_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T; \\ 0, & t < 0, t \geq T. \end{cases}$$

В случае формоимпульсного элемента — фиксатора сигнал $u(t)$ на входе звена $G(p)$ есть ступенчатая аппроксимация исходного входного процесса $x(t)$. Дискретная модель звена $G(p)$ записывается при этом в виде

$$D(z) = Z\{W_0(p)G(p)\} = (1 - z^{-1})Z\{G(p)/p\}. \quad (1.27)$$

Нетрудно убедиться, что при $T \rightarrow 0$ имеет место предельный переход $D(z) \rightarrow G(p)$. Действительно, при $T \rightarrow 0$ $(1 - z^{-1}) \rightarrow pT$, тогда $TZ\{G(p)/p\}$ в соответствии с соотношением (1.25) стремится к $(1/p)G(p)$, откуда и следует доказываемое асимптотическое соответствие $D(z) \rightarrow G(p)$. Так же как и в случае метода инвариантных весовых функций, полюсами дискретной модели являются величины $z_l = e^{p_l T}$, где p_l — полюсы передаточной функции $G(p)$. Таким образом, устойчивому непрерывному звену соответствует устойчивая дискретная модель.

Методы численного интегрирования дифференциального уравнения

Пусть передаточная функция $G(p)$ имеет вид $G(p) = P(p)/Q(p)$, где $P(p)$ и $Q(p)$ — полиномы; тогда связь входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ процессов описывается дифференциальным уравнением, в операторной форме имеющим вид

$$Q(p)y(t) = P(p)x(t), \quad p \equiv \frac{d}{dt}.$$

Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений [1, 6] позволяют установить приближенное соответствие между $x[k]$ и $y[k]$ и тем самым решить задачу построения дискретной модели непрерывного звена. Хорошо разработанные приемы численного интегрирования открывают широкие возможности конструирования эффективных дискретных моделей, использующих различные методы коррекции точности. Во многих случаях с помощью методов численного интегрирования можно строить более точные аппроксимирующие модели,

чем с помощью методов 1 и 2, принятых в теории автоматического управления.

Рассмотрим в качестве примера непрерывное звено, описываемое дифференциальным уравнением первого порядка $y + ay = x$, и получим для него передаточные функции дискретных моделей, соответствующих нескольким из наиболее распространенных методов интегрирования.

В простейшей схеме — схеме Эйлера — полагается $y \approx (y[k] - y[k-1])/T$. Тогда дискретную модель, очевидно, можно записать в виде разностного уравнения $y[k] - (1 - aT)y[k-1] = Tx[k-1]$.

Соответствующая передаточная функция $D(z)$ имеет вид

$$D(z) = \frac{Tz^{-1}}{1 - (1 - aT)z^{-1}}. \quad (1.28)$$

Более точным является усовершенствованный метод Эйлера [6, стр. 147], при котором вычисления проводятся по формуле

$$\begin{aligned} y[k+2] - \left(1 - aT + \frac{a^2T^2}{2}\right) y[k] &= \\ &= Tx[k+1] - \frac{aT^2}{2} x[k]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Соответствующая передаточная функция имеет вид

$$D(z) = \frac{T \left(1 - \frac{aT}{2} z^{-1}\right) z^{-1}}{1 - bz^{-2}}, \quad (1.30)$$

где $b = 1 - aT + a^2T^2/2$.

Наконец, остановимся на методе Рунге — Кутты, обладающем высокими точностными характеристиками и хорошо зарекомендовавшем себя в практике вычислений [6, стр. 151]. Применительно к рассматриваемому уравнению первого порядка вычисления ведутся в соответствии с разностным уравнением

$$y[k+1] - by[k] = a_0x[k+2] + a_1x[k+1] + a_2x[k], \quad (1.31)$$

где $b = 1 - aT + \frac{a^2T^2}{2} - \frac{a^3T^3}{6} + \frac{a^4T^4}{24}$;

$$a_0 = \frac{T}{6}; \quad a_1 = T \left(\frac{2}{3} - \frac{aT}{3} + \frac{a^2T^2}{12} \right);$$

$$a_2 = \frac{T}{6} \left(1 - aT - \frac{a^2T^2}{2} + \frac{a^3T^3}{4} \right),$$

которому соответствует передаточная функция вида

$$D(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{z^{-1}(1 - bz^{-1})}. \quad (1.32)$$

Оптимальные дискретные модели

Точно определив условия работы модели и критерий точности, можно сформулировать задачу построения оптимальной дискретной модели непрерывного звена. Рассмотрим один из возможных вариантов постановки задачи оптимизации дискретной модели.

Пусть $x(t)$ — стационарный случайный сигнал со спектральной плотностью $\Phi_x(j\omega)$. Будем характеризовать точность модели дисперсией ошибки $e[k] = \hat{y}[k] - \hat{y}[k]$, измеряемой лишь в дискретные моменты времени (рис. 1.1). Для установившегося режима и устойчивых фильтров дисперсия ошибки постоянна и не зависит от времени:

$$\sigma_e^2 = M\{e^2[k]\}. \quad (1.33)$$

Условие минимума критерия качества (1.33) является необходимым для решения задачи построения оптимальной дискретной модели. Существенно, что подобное решение является оптимальным лишь по отношению ко входному сигналу определенного типа, характеристики которого задаются спектральной плотностью $\Phi_x(j\omega)$. Факт зависимости оптимального решения от свойств входного сигнала физически понятен, поскольку само представление о точности модели неразрывно связано с какими-то предположениями о характеристиках входного процесса, и поэтому носит существенно относительный характер.

Сформулированная таким образом задача есть классическая задача Винера — задача синтеза оптимального дискретного фильтра, формальный аппарат решения которой разработан достаточно хорошо [59, 9, 32, 34].

В заключение параграфа остановимся еще на одной проблеме, тесно связанной с затронутым кругом вопросов. Во многих случаях входной сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь полезного сигнала $s(t)$ и шума (ошибок) $n(t)$, т. е.

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (1.34)$$

при этом обычно шум $n(t)$ существенно более широкополосен, чем полезный сигнал.

При выборе периода дискретности, как правило, основное внимание обращается на свойства только полезного сигнала, и именно по отношению к полезному сигналу используются условия Котельникова, связывающие частоту квантования и предельную частоту квантуемого сигнала. Такой подход представляется на первый взгляд вполне естественным, когда уровень помехи мал по сравнению с уровнем полезного сигнала. Однако при этом часто забывают, что соотношение между уров-

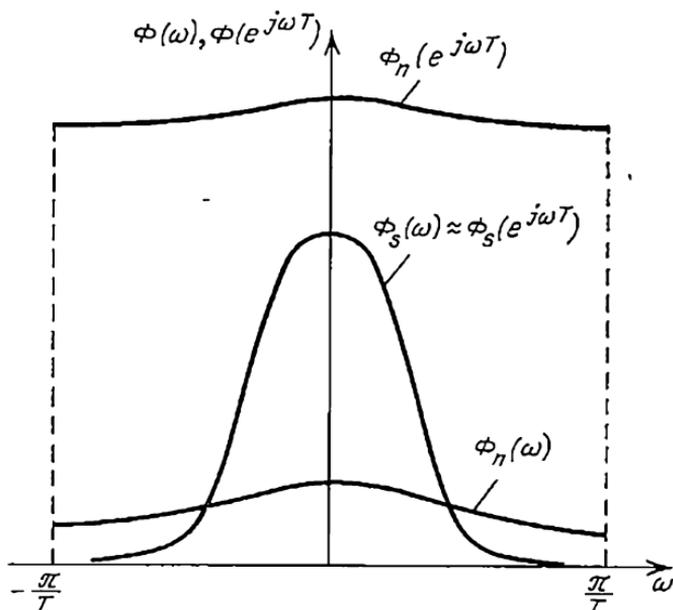


Рис. 1.3. Спектральные плотности полезного сигнала и широкополосной помехи после квантования сигналов по времени.

нями сигнала и шума в результате квантования процессов может существенно измениться. Если ширина спектра шума $n(t)$ достаточно велика, то его мощность на основном интервале частот $(-\pi/T, \pi/T)$ в результате квантования резко возрастает.

На рис. 1.3 наглядно проиллюстрирована подобная ситуация: если спектральная характеристика полезной составляющей процесса на основном интервале практически не изменилась, $\Phi_s(e^{j\omega T}) \approx \Phi_s(j\omega)$, то уровень шума стационарного случайного процесса $n(t)$ резко вырос, т. е. $\Phi_n(e^{j\omega T}) \gg \Phi_n(j\omega)$.

Как правило, в таких случаях при попытке снизить эффект повышения уровня помехи путем уменьшения величины T повышаются требования к быстродействию цифрового устройства, что существенно затрудняет его практическую реализацию. Более простой и эффективный выход из положения состоит в использовании так называемого *предымпulseного фильтра*, осуществляющего предварительную фильтрацию квантуемого сигнала. Схема, содержащая предымпульсный фильтр с переда-

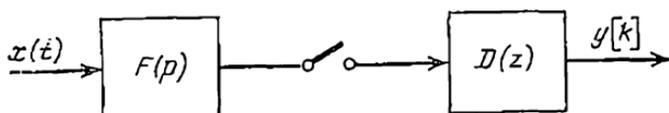


Рис. 1.4. Дискретная система с предымпульсным фильтром.

точной функцией $F(p)$, приведена на рис. 1.4. Такой фильтр обычно представляет собой фильтр нижних частот, не пропускающий частоты выше π/T .

Во многих случаях представляется возможным реализовать предварительную фильтрацию без применения специальных устройств, а просто путем рационального выбора характеристик аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Поскольку полоса пропускания преобразователя расширяется с повышением его быстродействия, сказанное означает, что использование быстродействующих преобразователей в условиях действия высокочастотных помех может привести к ухудшению характеристик точности системы и в то же время использование преобразователей с низким (но достаточным по полезному сигналу $s(t)$) быстродействием позволяет эффективно отфильтровать высокочастотную помеху и уменьшить ошибки преобразования сигналов.

Большой интерес с практической и чисто теоретической точек зрения представляет задача выбора оптимальных характеристик предымпульсного фильтра. При этом оказывается, что ответ в задаче такого рода существенно зависит от способа дальнейшего использования выходной дискретной последовательности $y[k]$. Так, если рассматривается задача преобразования непрерывного сигнала с помощью дискретных элементов, то обязательной является операция декодирования информации, т. е. последовательность $y[k]$ поступает на цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП).

На рис. 1.5 приведен один из вариантов разомкнутой цепи такого рода, где звено $W(p)$ включает как характеристики ЦАП, так и характеристики последовательных непрерывных звеньев. Такие схемы используются при решении различных задач теории дискретных систем автоматического управления.

Оптимальные в том или ином смысле характеристики передымпulseного фильтра $F(p)$ существенно зависят от свойств элементов $D(z)$ и $W(p)$.

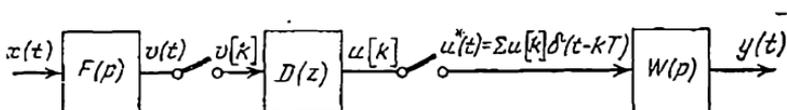


Рис. 1.5. Прохождение непрерывного сигнала через дискретную систему.

Задачи синтеза динамических характеристик цепи (приведенной на рис. 1.5), оптимальной в смысле минимума дисперсии ошибки, рассматривались многими авторами. В направлении частичного синтеза, т. е. выбора оптимальных характеристик какого-то одного звена цепи при фиксированных остальных, сделано достаточно много [10, 17, 33, 34]. В то же время задача полного синтеза — одновременной оптимизации всех элементов рассматриваемой цепи — рассматривалась подробно, по-видимому, лишь Ш. Чапманом [34], и с ней связано еще достаточно много нерешенных проблем.

1.3. КВАНТОВАНИЕ ПО УРОВНЮ. ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Характерная особенность цифрового управляющего устройства и цифрового фильтра, в частности, состоит в том, что преобразуемый им сигнал выражается в числовом коде, например, двоичном. Максимальное число разрядов кода всегда ограничено, поэтому сигнал представляется с помощью дискретных уровней с некоторым шагом дискретизации δ . Представление сигнала с помощью дискретных уровней называется *квантованием сигнала по уровню*. Шаг дискретизации сигнала по уровню принято называть *шагом квантования*, а дискретные уровни — *уровнями квантования*.

Связь между непрерывными и дискретными (цифровыми) звеньями в системе автоматического управления производится с помощью АЦП и ЦАП (рис. 1.6) Анало-

ГО-цифровой преобразователь осуществляет процесс квантования по времени и по амплитуде, а также цифровое кодирование сигнала. Преобразование дискретного сигнала в непрерывный совершает формирующее звено, частным случаем которого является фиксатор.

Часто квантование по уровню рассматривают как процесс преобразования сигнала нелинейным звеном со

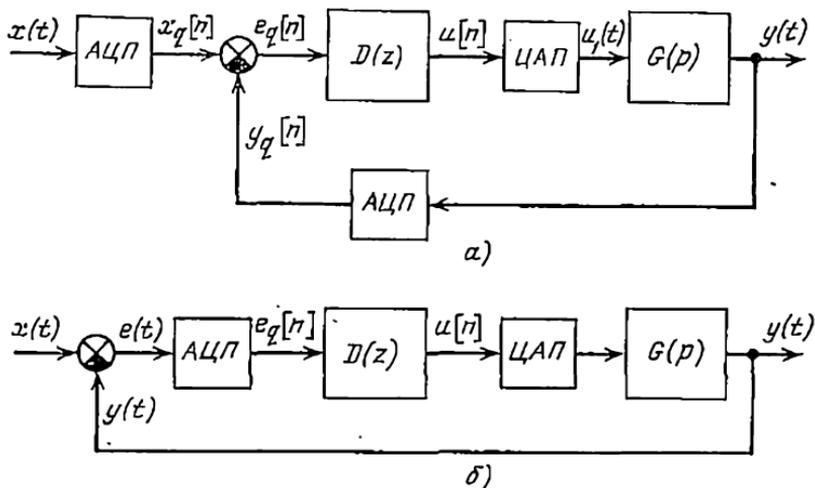


Рис. 1.6. Структурная схема системы автоматического управления с цифровым фильтром:

а — с двумя АЦП; б — с одним АЦП.

ступенчатой характеристикой, изображенной на рис. 1.7. При анализе влияния квантования на точность работы системы управления в этом случае применимы методы теории нелинейных импульсных систем. Так, например, в работе [45] ошибки квантования по уровню в динамическом режиме исследуются с помощью прямого метода Ляпунова. Более удобно рассматривать квантование как процесс наложения на дискретизированный по времени сигнал $x[n]$ добавочного сигнала $q[n]$, равного разности между истинными и квантованными значениями x и ограниченного по модулю половиной шага квантования $\delta/2$. Тогда сигнал на выходе преобразователя будет равен

$$x_q[n] = x[n] + q[n]. \quad (1.35)$$

АЦП изображается на структурной схеме в виде

последовательного соединения импульсного элемента и сумматора с введенной помехой $q[n]$ (рис. 1.8). Помеха $q[n]$ является ошибкой квантования. Она вызывает дополнительные погрешности в работе замкнутого контура системы управления. Этими ошибками можно пренебрегать лишь в том случае, когда шаг квантования δ пренебрежимо мал по сравнению с уровнем полезного сигнала, а непрерывное звено системы достаточно инерционно. В общем же случае ошибки квантования, возник-

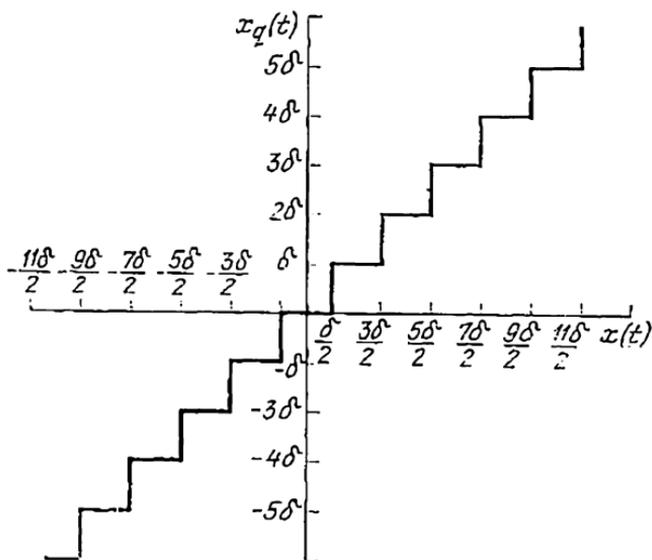


Рис. 1.7. Характеристика квантующего устройства.

кающие при переводе значений непрерывной величины в цифровую форму, проходя через дискретную и непрерывную части системы управления, могут накапливаться до значительной величины.

Характер шумов квантования сигнала по уровню существенно зависит от способа представления двоичных чисел в цифровом устройстве: с фиксированной либо с плавающей запятой.

Двоичное число с фиксированной запятой можно записать в следующем виде: $a_M \dots a_2 a_1, b_1 b_2 \dots b_N$, где a_i — значащие цифры (0 или 1) целой части числа, M — длина разрядной сетки целой части, b_i — значащие цифры дробной части числа, N — длина разрядной сетки дробной части числа.

Очевидно, что при кодировании дискретных значений непрерывной величины x двоичными числами с фиксированной запятой шаг квантования ее δ равен младшему разряду 2^{-N} дробной части и остается постоянным независимо от величины x . В случае кодирования значений переменной x двоичными числами с плавающей запятой шаг квантования δ не остается постоянным, а изменяется в зависимости от величины x .

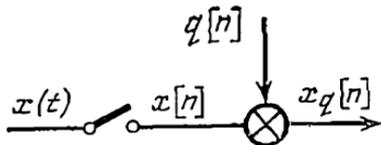


Рис. 1.8. Эквивалентная схема АЦП.

Число с плавающей запятой записывается в форме $\mu 2^v$, где μ — мантисса, заключенная между 0,5 и 1, а v — целое число, называемое порядком. Покажем, что если длины разрядных сеток дробной части числа с фиксированной запятой и мантиссы числа с плавающей запятой равны, то шаг квантования сигнала x при кодировании его числом с плавающей запятой δ_n может быть как больше, так и меньше шага квантования δ_Φ при кодировании числом с фиксированной запятой, в зависимости от уровня сигнала x . Пусть значение сигнала x лежит в диапазоне

$$2^{k-1} < x < 2^k, \quad (1.36)$$

где k может быть как положительным, так и отрицательным, т. е. $k = -M, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M$.

При $k=0$ значение сигнала x в двоичном коде с фиксированной запятой записывается следующим образом:

$$x_\Phi = 0, b_1 b_2 \dots b_N, \quad (1.37)$$

шаг квантования равен младшему разряду дробной части числа, т. е.

$$\delta_\Phi = 2^{-N}. \quad (1.38)$$

Двоичный код с плавающей запятой при $k=0$ совпадает с двоичным числом (1.37). Следовательно, шаг квантования величины x при кодировании двоичным числом с плавающей запятой будет равен шагу (1.38), т. е. $\delta_n = \delta_\Phi$.

Пусть при $k > 0$ соответствующее двоичное число с фиксированной запятой имеет вид

$$x_\Phi = a_n a_{n-1} \dots a_1, b_1 b_2 \dots b_N, \quad (1.39)$$

а шаг квантования по уровню величины x по-прежнему равен

$$\delta_{\Phi} = 2^{-N}. \quad (1.40)$$

При представлении числа (1.39) в форме с плавающей запятой

$$x_{\Pi} = 2^k \cdot 0, \quad a_k a_{k-1} \dots a_1 b_1 b_2 \dots b_{N-k}. \quad (1.41)$$

Количество значащих цифр в (1.41) уменьшилось по сравнению с (1.39) на k из-за ограниченности разрядной сетки мантиссы. Очевидно, что шаг квантования значения сигнала x , представленного в форме (1.41), будет при этом равен

$$\delta_{\Pi} = 2^{-(N-k)} = 2^{-N+k}, \quad (1.42)$$

т. е. он превышает шаг квантования (1.40) в 2^k раз.

Аналогично, при $k < 0$ будем иметь

$$x_{\Phi} = 0, 0 \dots 0 b_{-k+1} b_{-k+2} \dots b_N \quad (1.43)$$

и

$$\delta_{\Phi} = 2^{-N}, \quad (1.44)$$

а также

$$x_{\Pi} = 2^k \cdot 0, \quad b_{-k+1} b_{-k+2} \dots b_N b_{N+1} \dots b_{N-k}. \quad (1.45)$$

Отсюда следует, что шаг квантования значений сигнала x (1.36) при отрицательных k в случае кодирования их числами с плавающей запятой, так же как и при положительных k , определяется формулой (1.42). Таким образом, ошибка квантования сигнала по уровню при кодировании его двоичными числами с плавающей запятой является мультипликативной по отношению к квантуемому сигналу. В дальнейшем подлежат рассмотрению только ошибки квантования сигнала по уровню с постоянным шагом квантования δ . Такое сужение задачи объясняется тем, что в подавляющем большинстве случаев простые специализированные цифровые устройства, к которым, в частности, относятся и цифровые фильтры, строятся на основе представления двоичных чисел с фиксированной запятой. Дополнительные ошибки преобразования сигнала цифровым фильтром возникают в результате округлений, имеющих место при выполнении вычислительных операций над двоичными числами.

Выходной сигнал линейного цифрового фильтра с передаточной функцией

$$D(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} \quad (1.46)$$

реализуется как решение разностного уравнения

$$u[k] = \sum_{i=0}^{m-1} a_i e[k-i] - \sum_{i=1}^n b_i u[k-i]. \quad (1.47)$$

Рекуррентное соотношение (1.47) определяет совокупность арифметических операций умножения и суммирования чисел, а также запоминания значений входной и выходной величин на интервалы времени, кратные периоду дискретности сигнала T .

Точное значение произведения двух двоичных чисел, представленных в форме с фиксированной запятой, содержит $2N$ разрядов после запятой. Но поскольку длина разрядной сетки ограничена, над произведением совершается операция округления. N младших разрядов отбрасываются и к оставшемуся числу добавляется единица младшего разряда, если старший разряд отбрасываемой части равен единице, и ноль, если этот старший разряд нулевой. При этом необходимо отметить, что если хотя бы одно из двух перемножаемых чисел оказывается целым, то точное значение их произведения будет иметь N разрядов после запятой и, следовательно, в результате округления оно не изменяется. Очевидно, операция округления есть операция квантования по уровню произведения двух чисел. Если шаг квантования по уровню равен δ , то ошибки, возникающие при округлении, лежат в интервале $[-\delta/2, \delta/2]$.

Разность между истинным и округленным значениями произведения есть ошибка округления, которую будем обозначать буквой r (первая буква английского слова *round-off*, означающего «округление»). Многократное суммирование ошибок округления может привести к весьма значительным результирующим ошибкам на выходе цифрового фильтра. Будем называть последние *результирующими ошибками округления*.

Заметим, что поскольку операция округления сводит-

ся, по существу, к квантованию результатов вычислений, то ошибки округления целесообразно также называть *ошибками квантования при округлении*. Тогда все ошибки, вызванные спецификой работы цифровых фильтров, удобно методологически рассматривать как ошибки квантования, подразделяемые на две группы: ошибки квантования при кодировании непрерывных сигналов и ошибки квантования при округлении результатов.

В отечественной литературе методам оценки ошибок, обусловленных округлением промежуточных значений преобразуемой величины в цифровом фильтре, уделялось мало внимания. В работах же иностранных авторов [40, 47, 23], посвященных этим вопросам, не приводятся методы решения задачи выбора наиболее рациональной структуры реализации цифрового фильтра, обеспечивающей наименьшую результирующую ошибку округления. В связи с этими обстоятельствами в последующих разделах книги основное внимание уделяется изложению методов расчета результирующих ошибок округления на выходе цифрового фильтра при различных структурах его реализации.

Следует также отметить необходимость квантования коэффициентов разностного уравнения в результате представления их двоичными числами. Квантование коэффициентов изменяет их, они принимают несколько иные значения, в результате чего получается новый, отличный от исходного фильтр.

Таким образом, при расчете цифрового фильтра необходимо учитывать три фактора, ухудшающих его характеристики по сравнению с соответствующим аналоговым фильтром:

— квантование входного сигнала, эквивалентное воздействию на вход фильтра шумоподобной помехи;

— квантование произведений чисел, обусловленное операцией округления, которое вызывает на выходе фильтра дополнительную результирующую ошибку;

— квантование коэффициентов разностного уравнения, приводящее к отклонению параметров фильтра.

Очевидно, что влияние ошибок квантования можно учитывать в структурной схеме системы управления как некоторые внешние помехи. Так, на рис. 1.9, а $q_1[k]$ — ошибка квантования по уровню входного сигнала $x[k]$; $q_2[k]$ — ошибка квантования по уровню выходного сигнала $y[k]$; $r_1[k]$ — ошибка округления результата перемен-

жения преобразуемой величины на i -й коэффициент. Схему, представленную на рис. 1.9,а, можно привести к более удобному для расчета виду, показанному на

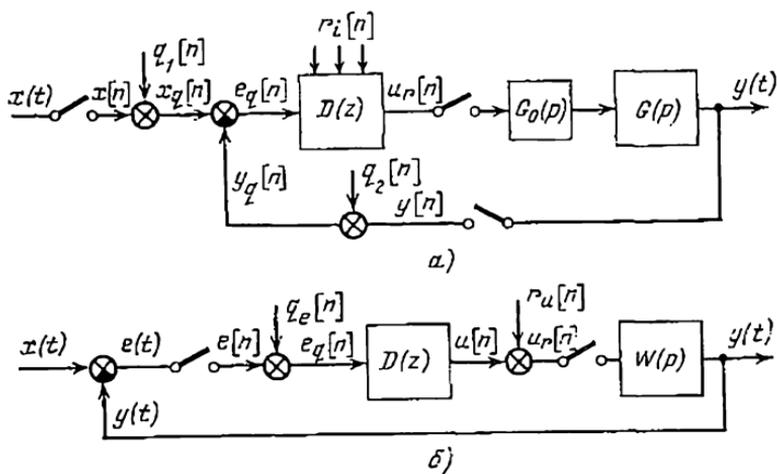


Рис. 1.9. Учет влияния ошибок квантования в структурной схеме системы управления с цифровым фильтром.

рис. 1.9,б. Суммарная ошибка квантования на входе цифрового фильтра равна

$$q_e[k] = q_1[k] + q_2[k]. \quad (1.48)$$

Результирующая ошибка округления $r_u[k]$ приведена к выходу цифрового фильтра (способ этого приведения будет подробно рассмотрен в гл. 3).

1.4. ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛА ПО УРОВНЮ

Для оценки влияния квантования по уровню на качество работы цифровой системы управления необходимо знать характеристики помехи $q[k]$, равной ошибке квантования, приведенной ко входу цифрового фильтра. В последние годы было предложено несколько методов оценки ошибок квантования. Часть из них основывается на детерминистическом подходе к проблеме, с помощью которого можно вычислить предельные максимальные значения ошибки на выходе замкнутой системы управления.

Если известна дискретная весовая функция $\kappa[l]$ замкнутого контура системы управления, то оценку сверху ошибки, вызванной квантованием, удобно проводить на выходе системы по методу, предложенному Я. З. Цыпкиным [32]. Выходной сигнал импульсной системы связан с входным сигналом следующим уравнением:

$$y[k] = \sum_{l=0}^k \kappa[l] x[k-l]. \quad (1.49)$$

Если подать на вход системы (рис. 1.9,б) сумму полезного сигнала и помехи

$$x_q[k] = x[k] + q_e[k],$$

то уравнение (1.49) примет вид

$$y_q[k] = \sum_{l=0}^k \kappa[l] \{x[k-l] + q_e[k-l]\}.$$

Ошибка, вызванная квантованием по уровню и равная разности между $y[k]$ и $y_q[k]$, определяется соотношением

$$q_y[k] = \sum_{l=0}^k \kappa[l] q_e[k-l]. \quad (1.50)$$

Величина $q_e[k]$ не превосходит по абсолютной величине шага квантования δ , если $q_e = q_1 + q_2$ (рис. 1.9), и половины шага квантования $\delta/2$ в случае, когда квантованию подвергается только сигнал рассогласования $e(t) = y(t) - x(t)$ и $q_e = q$. Поэтому максимальное значение ошибки q_y примет при $|q_e[k]| = \delta$ (либо $\delta/2$) и самом неблагоприятном сочетании знаков $q_e[k]$, т. е.

$$|q_y|_{\max} = \delta \sum_{l=0}^k |\kappa[l]| \quad (1.51)$$

либо

$$|q_y|_{\max} = \frac{\delta}{2} \sum_{l=0}^k |\kappa[l]|. \quad (1.51a)$$

Понятно, что суммирование в выражениях (1.51), (1.51a) целесообразно прекращать при таких k , для которых значение $\kappa[k]$ становится достаточно малым.

К недостаткам этого метода нужно прежде всего отнести завышенную оценку сверху ошибки системы и кроме того, в чисто формальном плане, то, что его применение связано с существенными вычислительными трудностями.

В работах [39, 53] предложен другой метод оценки ошибки квантования, а именно по дискретной передаточной функции замкнутого контура системы управления (рис. 1.9):

$$K(z) = \frac{D(z)W(z)}{1 + D(z)W(z)}, \quad (1.52)$$

где $W(z) = Z\{W(p)\}$.

Суть этого метода состоит в том, что максимальная ошибка на выходе системы определяется как ее реакция в установившемся режиме на единичный скачок $1[k]$, умноженный на максимальное значение ошибки квантования:

$$q_d[k] = \delta 1[k], \quad (1.53)$$

если квантуются $x(t)$ и $y(t)$, и

$$q_d[k] = (\delta/2) 1[k], \quad (1.53a)$$

если квантованию подвергается только сигнал рассогласования $e(t)$. Другими словами, предполагается, что все значения ошибки квантования равны δ (либо $\delta/2$).

Учитывая, что Z -преобразование единичной функции $1[k]$ равно

$$Z\{1[k]\} = (1 - z^{-1})^{-1},$$

и принимая во внимание (1.52), легко получить Z -преобразование ошибки q_y на выходе системы:

$$q_y(z) = \frac{D(z)W(z)}{[1 + D(z)W(z)](1 - z^{-1})} \delta. \quad (1.54)$$

Абсолютное значение установившейся ошибки на выходе системы $q_y[k]$ при $k \rightarrow \infty$ определяется с помощью теоремы о конечном значении [7]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |q_y[k]| = \lim_{z \rightarrow 1} |(1 - z^{-1}) q_y(z)|, \quad (1.55)$$

откуда следует, что

$$|q_y(\infty)| = \frac{|D(1)W(1)|}{|1 + D(1)W(1)|} \delta = |K(1)| \delta. \quad (1.56)$$

Заметим, что абсолютное значение реакции системы в установившемся режиме на скачкообразный входной сигнал (1.53) может быть вычислено также с помощью формулы (1.50):

$$|q_v(\infty)| = \delta \left| \sum_{l=0}^{\infty} \kappa[l] \right|. \quad (1.57)$$

Очевидно, что значения максимальной ошибки, вычисленные по формулам (1.56) и (1.57), будут совершенно одинаковыми. Сравнение формул (1.51) и (1.57) показывает, что в тех случаях, когда весовая функция системы не меняет своего знака, оба метода дают одинаковые результаты. При наличии колебательности в системе значения максимальной ошибки на выходе системы, вычисленные по второму методу, будут заниженными по сравнению с теми же величинами, определяемыми по первому методу. Тем не менее благодаря простоте второй метод широко используется на практике.

Для иллюстрации изложенных методов рассмотрим пример.

Пример 1.1. Пусть непрерывная часть системы управления, изображенной на рис. 1.9, определяется передаточными функциями объекта управления

$$G(p) = 30/p(0,1p+1) \quad (1.58)$$

и идеального фиксирующего звена нулевого порядка

$$G_0(p) = (1 - e^{-pT})/p. \quad (1.59)$$

Соответствующая дискретная передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W(z) = Z(G_0(p)G(p)) = \frac{1,104(z+0,718)}{(z-1)(z-0,368)}. \quad (1.60)$$

Цифровой корректирующий фильтр, обеспечивающий в системе перегулирование $t=1,45$, имеет передаточную функцию*)

$$D(z) = (z-0,5)(z-0,333)/z(z+0,5). \quad (1.61)$$

Дискретная передаточная функция замкнутого контура в соответствии с (1.52) равна

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{1,104(z+0,718)(z-0,5)(z-0,333)}{z(z-1)(z-0,368)(z+0,5) + 1,104(z+0,718) \times} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\times(z-0,5)(z-0,333)}{\times(z-0,5)(z-0,333)} = \\ &= \frac{1,104z^3 - 0,127z^2 - 0,476z + 0,136}{z^4 + 0,236z^3 - 0,443z^2 - 0,292z + 0,136}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

* Исходные данные для примера взяты из книги Ю. Ту [26, стр. 492].

Весовую функцию системы найдем по методу разложения $K(z)$ в степенной ряд. В результате получим

$$\begin{aligned} \kappa[l] = & 1,104\delta_{l,1} - 0,388\delta_{l,2} + 0,106\delta_{l,3} + 0,231\delta_{l,4} - 0,278\delta_{l,5} + 0,256\delta_{l,6} - \\ & - 0,124\delta_{l,7} + 0,172\delta_{l,8} - 0,106\delta_{l,9} + 0,038\delta_{l,10} - 0,035\delta_{l,11} - 0,012\delta_{l,12} + \\ & + 0,017\delta_{l,13} - 0,09\delta_{l,14} + 0,005\delta_{l,15} - 0,003\delta_{l,16} + 0,002\delta_{l,17} - \dots \end{aligned} \quad (1.63)$$

где $\delta_{l,i}$ — символ Кронекера, равный единице в точке $l=i$ и нулю при $l \neq i$.

Максимальное значение вызванной квантованием ошибки, рассчитанное по формуле (1.51) с учетом (1.63), равно $|q_{\mu}|_{\max} = 2,936\delta$. Применяя формулу (1.56), с учетом (1.62) находим

$$|q_{\mu}(\infty)| = \left| \frac{1,104 - 0,127 - 0,476 + 0,136}{1 + 0,236 - 0,443 - 0,292 + 0,136} \right| \delta = 1,9 \cdot \delta.$$

1.5. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ

Второй подход к оценке ошибки, вызванной квантованием сигнала по уровню, основывается на представлении этой ошибки как случайного шумоподобного процесса (шума квантования). Исследованию вероятностной при-

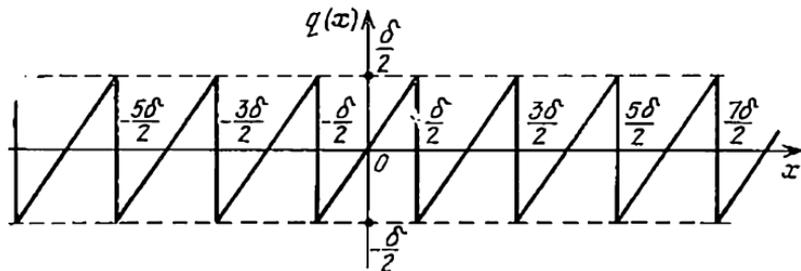


Рис. 1.10. Пилообразная характеристика генератора шума квантования.

роды ошибок квантования на выходе АЦП посвящен ряд работ [37, 58, 40, 23]. В отечественной литературе достаточно полное рассмотрение этого вопроса проведено А. А. Косякиным [13, 14] и Б. Р. Левиным [18].

Ошибка квантования рассматривается как результат преобразования исходного сигнала $x(t)$ нелинейным элементом с пилообразной характеристикой $q(x)$, изображенной на рис. 1.10, которая равна разности функции $\psi_1 = x_q(x)$, представленной на рис. 1.7, и линейной функ-

ции $\psi_2 = x$. Корреляционная функция шума квантования $q(t)$ определяется соотношением

$$R_q(t_1, t_2) = \overline{q(x_1, t_1) q(x_2, t_2)} = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} q(x_1, t_1) q(x_2, t_2) \omega_{2X}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \quad (1.64)$$

где ω_{2X} — двумерная плотность вероятности квантуемого сигнала.

Если разложить периодическую функцию $q(x)$ в ряд Фурье

$$q(x) = \frac{\delta}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \sin \frac{2\pi i x}{\delta}$$

и подставить полученное выражение в формулу (1.64), то приходим к соотношению

$$R_q(t_1, t_2) = \frac{\delta^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j}}{ij} \iint_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{2\pi i x_1}{\delta} \sin \frac{2\pi j x_2}{\delta} \times \\ \times \omega_{2X}(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2.$$

Двойной интеграл в последнем соотношении выражается через двумерную характеристическую функцию $F_{2X}(u, v)$ квантуемого сигнала [18]. Тогда выражение корреляционной функции шумов квантования при произвольном распределении вероятностей квантуемого сигнала будет иметь вид

$$R_q(t_1, t_2) = \frac{\delta^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j+1}}{ij} \times \\ \times F_{2X}\left(\frac{2\pi i}{\delta}, \frac{2\pi j}{\delta}, t_1, t_2\right). \quad (1.65)$$

Если сигнал $x(t)$ представляет собой нормальный случайный процесс с дисперсией σ^2 и корреляционной функцией $R_x(\tau)$, то для корреляционной функции шумов квантования можно получить следующее приближенное выражение [18]:

$$R_q(\tau) \approx \frac{\delta^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \exp\left\{-\frac{4i^2\pi^2[\sigma^2 - R_x(\tau)]}{\delta^2}\right\}. \quad (1.66)$$

Дисперсия ошибки квантования равна

$$\overline{q^2} = R_q(0) = \frac{\delta^2}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\delta^2}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\delta^2}{12}. \quad (1.67)$$

Из формул (1.66) и (1.67) легко получить зависимость коэффициента корреляции ошибки квантования $\rho_q(\tau)$ от коэффициента корреляции квантуемого сигнала $\rho_x(\tau)$:

$$\rho_q(\tau) = \frac{R_q(\tau)}{R_q(0)} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \exp \left\{ -\frac{4i^2\pi^2 [1 - \rho_x(\tau)] \sigma^2}{\delta^2} \right\}. \quad (1.68)$$

На рис. 1.11 приведены графики зависимости ρ_q от ρ_x при различных значениях отношений $\sigma/\delta = \beta$. Нетрудно видеть, что при $\sigma/\delta \geq 0,5$ время корреляции шума

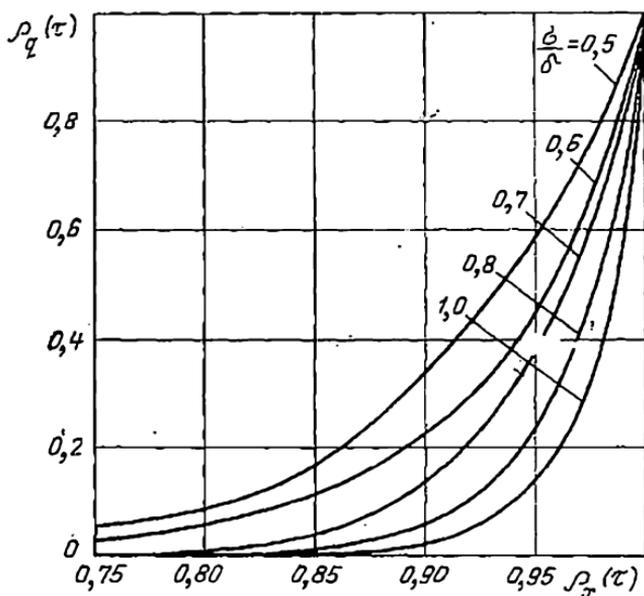


Рис. 1.11. Зависимость коэффициента корреляции шума квантования от коэффициента корреляции квантуемого сигнала.

квантования существенно меньше времени корреляции квантуемого сигнала. При $\delta \ll \sigma$ корреляция между значениями ошибки квантования практически отсутствует. Следовательно, спектральная плотность мощности шума

квантования при этом будет равномерной в диапазоне частот, значительно превышающем ширину спектра квантуемого сигнала.

Взаимная корреляционная функция ошибки квантования и квантуемого сигнала выражается формулой [14, 18]

$$R_{qx}(\tau) = 2R_x(\tau) \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp\left\{-\frac{2\pi^2 i^2}{\delta^2} \tau^2\right\}, \quad (1.69)$$

т. е. взаимная корреляционная функция пропорциональна корреляционной функции квантуемого сигнала. При $\sigma/\delta \geq 0,5$ с достаточно высокой точностью можно положить

$$R_{qx}(\tau) = 2R_x(\tau) \exp\left\{-\frac{2\pi^2 \sigma^2}{\delta^2} \tau^2\right\}. \quad (1.70)$$

Очевидно, что при $\delta < \sigma$ абсолютная величина взаимной корреляционной функции $R_{qx}(\tau)$ составляет 10^{-8} от значений корреляционной функции квантуемого сигнала. Понятно, что такой корреляцией между квантуемым сигналом и шумом квантования практически можно пренебречь.

В цифровом фильтре шум квантования по уровню, в свою очередь, подвергается квантованию по времени. Если время корреляции шума квантования τ_q меньше периода дискретности по времени T , то соседние значения дискретизированного по времени шума квантования будут некоррелированы, т. е.

$$R_q(kT) = \begin{cases} R_q(0) = \delta^2/12 & \text{при } k=0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases} \quad (1.71)$$

В подавляющем большинстве практических случаев условие $\tau_q < T$ выполняется. В дальнейшем, учитывая приведенные результаты и принимая во внимание установившуюся практику исследования эффектов квантования по уровню, будем считать шум квантования дискретным белым шумом, не коррелированным с квантуемым процессом. Приведенные вероятностные характеристики шумов квантования получены в предположении о нормальном распределении квантуемого сигнала $x(t)$.

Вывод о том, что шум квантования можно рассматривать как белый шум, не коррелированный с кванту-

емым сигналом, справедлив при определенных условиях для любого закона распределения исходного сигнала. Можно также показать, что шумы квантования распределены равномерно в диапазоне от $-\delta/2$ до $\delta/2$.

Доказательство этих результатов приведено в приложении 1.

2. Методы реализации цифровых фильтров

2.1. СПОСОБЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Под *программированием дискретной передаточной функции* $D(z)$ будем понимать построение алгоритма реализации фильтра, передаточная функция которого есть $D(z)$, или, другими словами, определение последовательности необходимых арифметических операций в цифровом устройстве. Известны три различных способа программирования дискретной передаточной функции: непосредственное (прямое) программирование, параллельное программирование и последовательное (каскадное) программирование [26]. В основе каждого из этих способов лежит определенная форма записи передаточной функции $D(z)$.

Непосредственное (прямое) программирование

Передаточная функция цифрового фильтра может быть представлена в следующей так называемой нормальной форме:

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} = \frac{u(z)}{e(z)}, \quad (2.1)$$

которой соответствует разностное уравнение, связывающее дискретные значения входного и выходного сигналов:

$$u[k] = \sum_{i=0}^m a_i e[k-i] - \sum_{i=1}^n b_i u[k-i]. \quad (2.2)$$

Разностное уравнение (2.2) по существу является формулой для вычисления значений выходной величины u

в дискретные моменты времени kT . В программу вычисления $u[k]$ входят арифметические операции сложения, вычитания, умножения и запоминания результатов вычислений и входной величины на интервалы времени, кратные периоду дискретизации T . Дискретное значение $u[k]$, вычисленное в данный момент времени kT , становится в конце следующего периода дискретизации величиной $u[k-1]$, а через такт — величиной $u[k-2]$ и т. д.

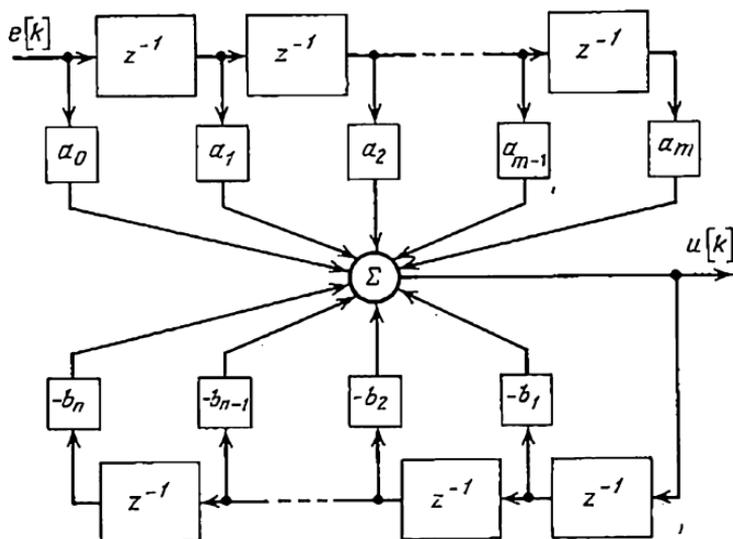


Рис. 2.1. Структурная схема решения разностного уравнения (2.2):

Процесс решения разностного уравнения (2.2) можно представить графически, например в виде структурной схемы, изображенной на рис. 2,1, в которой звено z^{-1} осуществляет операцию задержки или запоминания дискретного значения сигнала на период T .

Цифровой фильтр с передаточной функцией (2.1) физически реализуется, так как в соответствующем разностном уравнении (2.2) текущее значение выходной величины u зависит только от настоящего и прошлых значений входного сигнала e , а также от прошлых значений выходного сигнала u . Признаком физической нереализуемости цифрового фильтра является отсутствие в знаменателе передаточной функции, записанной в виде (2.1), свободного члена. Других ограничений на передаточную функцию не накладывается.

Действительно, пусть передаточная функция цифрового фильтра не удовлетворяет указанному требованию и имеет вид

$$D(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{z^{-s} \sum_{i=0}^n b_i z^{-i}}, \quad s > 0. \quad (2.3)$$

Тогда соответствующее разностное уравнение записывается в форме

$$\sum_{i=0}^n b_i u[k-i] = \sum_{i=0}^m a_i e[k+s-i].$$

Разрешая его относительно $u[k]$, получаем

$$u[k] = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{b_0} e[k+s-i] - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{b_0} u[k-i]. \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.4) видно, что для вычисления текущего дискретного значения выходного сигнала необходимо знать как прошлые, так и будущие дискретные значения входного сигнала e , что невозможно. Следовательно, цифровой фильтр с передаточной функцией (2.3) физически не реализуется.

Если дискретная передаточная функция представлена в виде отношения полиномов с положительными степенями z , то соответствующий цифровой фильтр физически реализуется, когда степень полинома в числителе не превышает степени полинома в знаменателе. Это становится очевидным после умножения числителя и знаменателя физически реализуемой передаточной функции (2.1) на z^m , если $m > n$, или на z^n , если $m < n$. В первом случае имеем

$$D(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_n z^{m-n}},$$

а во втором —

$$D(z) = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_m z^{n-m}}{z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}.$$

Для физически нереализуемой передаточной функции (2.3), в свою очередь, получаем

$$D(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 z^{m-s} + b_1 z^{m-s-1} + \dots + b_n z^{m-s-n}},$$

если $m > s + n$, либо

$$D(z) = \frac{a_0 z^{s+n} + a_1 z^{s+n-1} + \dots + a_n z^{s+n-m}}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n},$$

если $m < s + n$.

Нетрудно видеть, что степень числителя в физически нереализуемой передаточной функции превышает степень знаменателя. Кроме того, необходимо заметить следующее. Если время, требуемое для вычисления одного значения выходного сигнала $u[k]$ по заданным $e[k]$, $e[k-1]$ и т. д., $u[k-1]$, $u[k-2]$ и т. д., соизмеримо с периодом дискретности сигнала T , то, очевидно, дискретные значения $u[k]$ будут появляться на выходе цифрового фильтра с запаздыванием.

При запаздывании на один такт передаточная функция записывается в виде

$$D(z) = \left(\sum_{i=1}^m a_i z^{-i} \right) / \left(\sum_{i=0}^n b_i z^{-i} \right) (b_0 = 1),$$

а соответствующее разностное уравнение — как

$$u[k] = \sum_{i=1}^m a_i e[k-i] - \sum_{i=1}^n b_i u[k-i].$$

В задачах синтеза цифровых фильтров вышесказанное следует учитывать.

В заключение отметим, что требование физической реализуемости является существенным для цифровых устройств, используемых в цепях обработки текущей информации, когда будущие значения входного сигнала неизвестны. В системах, работающих по заданной программе или предназначенных для обработки накопленных данных, могут применяться программы, не удовлетворяющие условию физической реализуемости и использующие для выработки значения выходного сигнала последующие (во времени) значения входного сигнала.

Параллельное программирование

Второй способ реализации цифрового фильтра основан на представлении его дискретной передаточной функции в виде параллельного соединения элементарных звеньев. Если все полюсы дискретной передаточной

функции (2.1) действительные и простые, то ее можно записать в виде

$$D(z) = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{f_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} = a_0 + \sum_{i=1}^n D_i(z), \quad (2.5)$$

где p_i — i -е полюсы передаточной функции $D(z)$; a_0 , f_i —действительные коэффициенты.

Тогда Z -преобразование выходного сигнала

$$u(z) = a_0 e(z) + \sum_{i=1}^n D_i(z) e(z) = \sum_{i=0}^n u_i(z). \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.5), (2.6) следует, что передаточную функцию $D(z)$ можно реализовать с помощью $(n+1)$ простых программ, действующих параллельно (рис. 2.2,а), т. е.

$$u[k] = \sum_{i=0}^n u_i[k], \quad u_0[k] = a_0 e[k],$$

$$u_i[k] = f_i e[k-1] + p_i u_i[k-1], \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.7)$$

Структурная схема программы для вычисления $u_i[k]$ представлена на рис. 2.2,б.

Если передаточная функция $D(z)$ содержит кратные полюсы, то в разложении (2.5) появляются слагаемые вида

$$f_i z^{-1} / (1 - p_i z^{-1})^l. \quad (2.8)$$

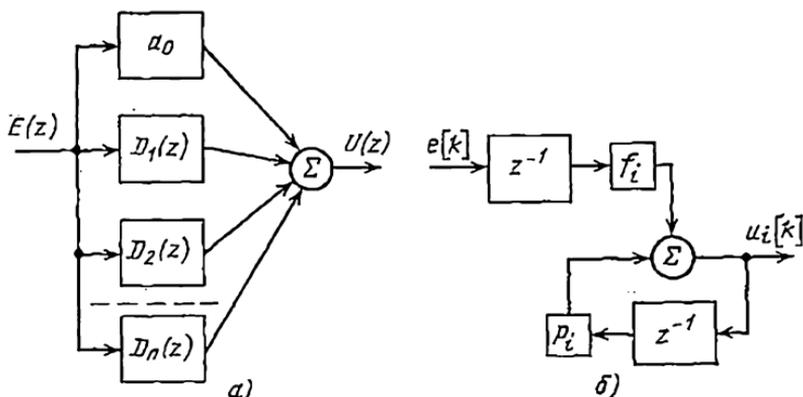


Рис. 2.2. Структурные схемы для параллельного программирования передаточной функции цифрового фильтра.

Полюсу p_i кратности m_i соответствуют m_i параллельных звеньев указанного вида при $l = m_i, m_i - 1, \dots, 2, 1$.

Реализация передаточной функции (2.8) может быть осуществлена путем последовательного соединения l звеньев, передаточная функция первого из которых равна $f_i z^{-l} / (1 - p_i z^{-1})$, а $(l-1)$ последующих передаточных функций имеют вид $z^{-1} / (1 - p_i z^{-1})$. Первое звено программируется разностным уравнением (2.7) а все последующие — тем же уравнением, но при $f_i = 1$.

Последовательное (каскадное) программирование

При последовательном программировании передаточная функция $D(z)$, содержащая m действительных нулей $z_i (i=1, 2, \dots, m)$ и $n \geq m$ действительных полюсов $p_i (i=1, 2, \dots, n)$, записывается в виде произведения элементарных сомножителей

$$L(z) = \frac{K(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)}, \quad (2.9)$$

т. е.

$$D(z) = D_1(z)D_2(z)\dots D_m(z)D_{m+1}(z)\dots D_n(z), \quad (2.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1(z) &= \frac{u_1(z)}{e(z)} = \frac{z-z_1}{z-p_1}; \quad D_2(z) = \frac{u_2(z)}{u_1(z)} = \frac{z-z_2}{z-p_2}; \dots; \\ D_m(z) &= \frac{u_m(z)}{u_{m-1}(z)} = \frac{z-z_m}{z-p_m}; \quad D_{m+1}(z) = \\ &= \frac{u_{m+1}(z)}{u_m(z)} = \frac{1}{z-p_m}; \dots; \\ D_n(z) &= \frac{u(z)}{u_{n-1}(z)} = \frac{K}{z-p_n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Следовательно, цифровое звено с передаточной функцией $D(z)$ может быть реализовано с помощью n элементарных звеньев, соединенных последовательно (рис. 2.3,а).

Элементарной передаточной функции вида

$$D_i(z) = \frac{z-z_i}{z-p_i} = \frac{1-z_i z^{-1}}{1-p_i z^{-1}} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (2.12)$$

соответствует разностное уравнение

$$u_i[k] = u_{i-1}[k] - z_i u_{i-1}[k-1] + p_i u_{i-1}[k-1], \quad (2.13)$$

процедура решения которого схематически изображена на рис. 2.3,б.

Элементарной передаточной функции вида

$$D_i(z) = \frac{1}{z - p_i} = \frac{z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, n - 1) \quad (2.14)$$

соответствует разностное уравнение

$$u_i[k] = u_{i-1}[k-1] + p_i u_i[k-1], \quad (2.15)$$

структурная схема решения которого приведена на рис. 2.3, в. Наконец,

$$u[k] = K u_{n-1}[k-1] + p_i u[k-1]. \quad (2.16)$$

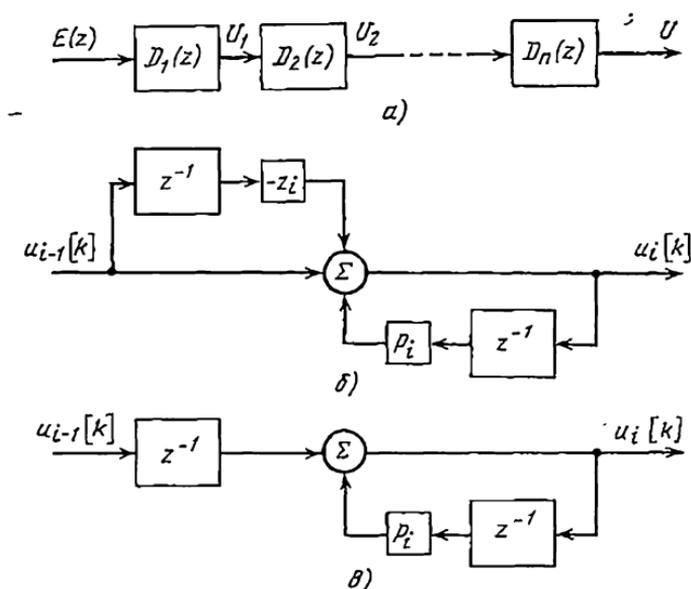


Рис. 2.3. Структурные схемы для каскадного программирования передаточной функции цифрового фильтра.

2.2. МЕТОД ГРАФОВ В ЗАДАЧЕ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

При построении структурных схем реализации дискретной передаточной функции весьма удобным оказывается использование метода графов, основные положения теории которых были разработаны Мэзоном [49]. Вопросы применения теории графов к различным задачам автоматического управления изложены в литературе [22]. Остановимся на некоторых положениях этой теории, используемых далее.

Граф прохождения сигналов представляет собой графическое изображение передачи сигнала через цепь, которой точно соответствует система уравнений, описывающая эту передачу. Он представляет собой сеть узлов и направленных ветвей. Каждому узлу, изображаемому точкой, ставится в соответствие переменная (координата) динамической системы. Каждой ветви, изображаемой на графе линией со стрелкой, ставится в соответствие оператор преобразования сигнала звеном. Если ветвь изображает безынерционное звено, то оператором будет постоянный коэффициент передачи. Оператором нелинейного звена является функция преобразования переменной. Ветви динамического линейного звена ставится в соответствие передаточная функция звена.

Каждая ветвь имеет узел «начало» и узел «конец». Стрелка указывает направление передачи сигнала вдоль ветви. Узел «начало» изображает входную переменную, а узел «конец» — выходную переменную звена. Если из узла выходит несколько ветвей, то входные величины всех этих ветвей одинаковы. Если же к одному узлу подходит несколько ветвей, то соответствующая узлу переменная равна алгебраической сумме переменных на выходах этих ветвей. В том случае, когда к узлу подходит и одновременно из него выходит несколько ветвей, величина переменной в этом узле равна алгебраической сумме величин на выходах всех подходящих ветвей.

Любую структурную схему можно представить в виде графа прохождения сигналов; между графом и структурной схемой имеется взаимно-однозначное соответствие.

На рис. 2.4 представлены графы прохождения сигналов в структурных схемах, изображенных на рис. 2,2,б, 2.3,б и в соответственно. Элементы задержки на один такт изображены двойными стрелками. В графы введены единичные ветви, что придает графу прохождения сигналов большую физичность, а также позволяет выделить входную и выходную величины. Структурной схеме решения разностного уравнения (2.2) (рис. 2.1) соответствует граф, изображенный на рис. 2.5.

В дальнейшем решение задачи программирования дискретной передаточной функции будем давать в виде графа, который можно называть *графом реализации* (либо *структурой реализации*) цифрового фильтра.

Очевидно, что правила преобразования графов линейных систем совпадают с правилами преобразования ли-

можно упрощать граф, а иногда и заменять его одной ветвью, заключенной между двумя выбранными узлами, т. е. находить передаточную функцию между этими узлами. Правда, такое предельное упрощение с помощью элементарных структурных преобразований возможно только в простых случаях.

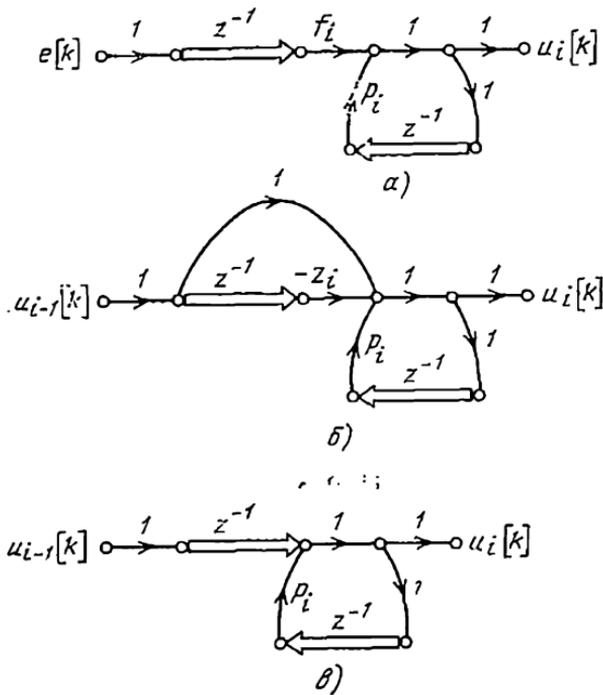


Рис. 2.4. Графы прохождения сигналов в структурных схемах.

В самом общем случае передаточную функцию линейного графа между двумя произвольными узлами легко определить с помощью так называемой формулы Мэсона [49]. Приведем ее без доказательства, но прежде введем два понятия.

Непрерывная последовательность ветвей одного направления между двумя заданными узлами, в которой каждый узел встречается только один раз, называется *разомкнутым (прямым) путем* между этими узлами. Двум узлам могут соответствовать несколько разомкнутых путей. Передаточная функция разомкнутого пути

равна произведению передаточных функций ветвей, входящих в разомкнутый путь.

Замкнутым путем (контуром) называется замкнутая цепь, при однократном обходе которой в одном направлении каждый узел встречается только по одному разу. Очевидно, что двум узлам также могут соответствовать

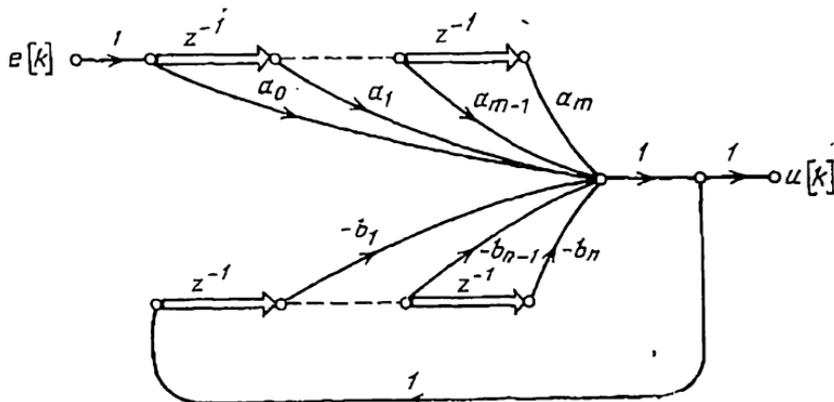


Рис. 2.5. Граф структурной схемы, изображенной на рис. 2.1.

несколько контуров. Произведение передаточных функций всех ветвей, входящих в замкнутый путь, составляет передаточную функцию замкнутого пути. Контур называется *несоприкасающимся*, если он не содержит общих узлов и ветвей.

Передаточная функция между узлами A и B определяется по формуле Мэсона

$$W_{AB} = \sum_{j=1}^n (W_j \Delta_j / \Delta), \quad (2.17)$$

где W_j — передаточная функция j -го разомкнутого пути между узлами A и B , равная произведению передаточных функций ветвей, входящих в данный разомкнутый путь; n — число различных разомкнутых путей между узлами A и B ; Δ — определитель графа; Δ_j — определитель части графа, в которой отсутствуют ветви и узлы, входящие в j -й разомкнутый путь (j -й минор определителя графа).

Определитель графа Δ вычисляется так:

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{m_1} L_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{m_2} L_i^{(2)} - \sum_{i=1}^{m_3} L_i^{(3)} + \dots, \quad (2.18)$$

где $L_i^{(1)}$ — передаточная функция i -го контура; m_1 — общее число контуров графа; $L_i^{(2)}$ — произведение передаточных функций i -й пары непересекающихся контуров; m_2 — общее число пар непересекающихся контуров в различных комбинациях; $L_i^{(3)}$ — произведение передаточных функций i -й тройки непересекающихся контуров; m_3 — общее число троек непересекающихся контуров и т. д.

j -й минор определителя графа Δ_j вычисляется также по формуле (2.18), но без учета j -го разомкнутого пути графа.

Поясним способ применения формулы Мэсона на примере.

Пример 2.1. Найдем передаточную функцию автоматической системы, структурная схема которой изображена на рис. 2.6,а. Граф, соответствующий этой структурной схеме (рис. 2.6,б), имеет четыре разомкнутых пути между узлами x и y и пять контуров (разомкнутые пути выделены жирными линиями, контуры обозначены пунктиром).

Передаточные функции разомкнутых путей от входа x к выходу y равны

$$W_1 = G_1 G_2 G_3; \quad W_2 = G_5; \quad W_3 = G_6; \quad W_4 = G_1 G_2 G_4 G_6.$$

Передаточные функции контуров:

$$W_{01} = -G_1 G_2 G_3; \quad W_{02} = -G_2; \quad W_{03} = -G_1 G_7; \quad W_{04} = -G_4; \\ W_{05} = -G_1 G_2 G_3 G_7; \quad W_{06} = -G_5 G_7; \quad W_{07} = -G_1 G_2 G_4 G_6 G_7; \quad W_{08} = -G_6 G_7.$$

Определитель графа в соответствии с формулой (2.18) будет равен

$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04} + W_{05} + W_{06} + W_{07} + W_{08}) + \\ + (W_{01}W_{04} + W_{01}W_{06} + W_{01}W_{08} + W_{02}W_{03} + W_{02}W_{04} + W_{02}W_{06} + \\ + W_{02}W_{08} + W_{03}W_{04} + W_{04}W_{05} + W_{04}W_{06} + W_{04}W_{08}) - \\ - (W_{01}W_{04}W_{06} + W_{01}W_{04}W_{08} + W_{02}W_{03}W_{04} + W_{02}W_{04}W_{06} + \\ + W_{02}W_{04}W_{08}) = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_2 + G_4 + G_1 G_2 G_3 G_7 + G_5 G_7 + \\ + G_1 G_2 G_4 G_6 G_7 + G_6 G_7 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_2 G_3 G_5 G_7 + \\ + G_1 G_2 G_3 G_6 G_7 + G_1 G_2 G_7 + G_2 G_4 + G_2 G_5 G_7 + G_2 G_6 G_7 + G_1 G_4 G_7 + \\ + G_1 G_2 G_3 G_4 G_7 + G_4 G_5 G_7 + G_4 G_6 G_7 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_7 + \\ + G_1 G_2 G_3 G_4 G_6 G_7 + G_1 G_2 G_4 G_7 + G_2 G_4 G_5 G_7 + G_2 G_4 G_6 G_7.$$

Исключив из графа разомкнутый путь с передаточной функцией $W_1 = G_1 G_2 G_3$, найдем первый минор определителя графа: $\Delta_1 = 1 - W_{04} = 1 + G_4$.

Второй минор определится в результате исключения из графа разомкнутого пути с передаточной функцией $W_2 = G_5$:

$$\Delta_2 = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{04}) + (W_{01}W_{02} + W_{02}W_{04}) = 1 + G_1 G_2 G_3 + G_2 + \\ + G_4 + G_1 G_2 G_3 G_4 + G_2 G_4 = (1 + G_4) (1 + G_2 + G_1 G_2 G_3).$$

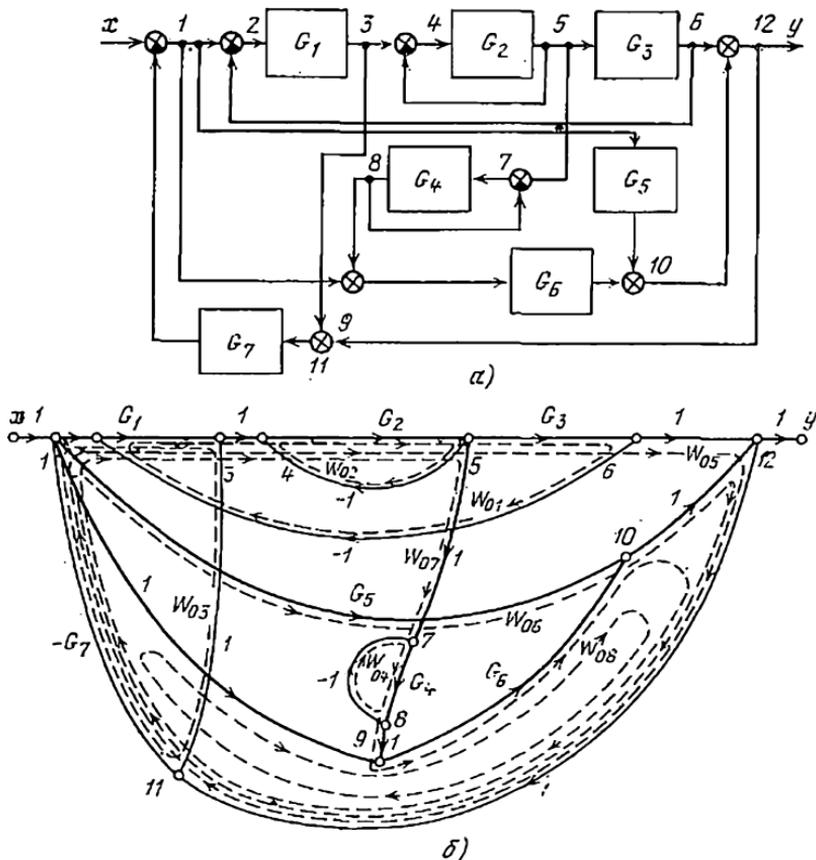


Рис. 2.6. Структурная схема (а) и соответствующий ей граф (б).

Исключив $W_3 = G_0$, легко видеть, что $\Delta_3 = \Delta_2$. Наконец, при нахождении четвертого минора замечаем отсутствие контуров, не соприкасающихся с разомкнутым путем, передаточная функция которого $W_4 = G_1 G_2 G_4 G_6$. Поэтому, как следует из формулы (2.18), $\Delta_4 = 1$.

Подставляя полученные выражения в формулу (2.17), получаем искомую передаточную функцию

$$W = \frac{G_1 G_2 G_3 (1 + G_4) + (G_5 + G_6) (1 + G_4) (1 + G_2 + G_1 G_2 G_3) + G_1 G_2 G_4 G_5}{\Delta}$$

Пример 2.2. Найдем передаточную функцию графа, представленного на рис. 2.5, между его выходом и входом.

Легко видеть, что передаточная функция j -го разомкнутого пути между узлами e и u

$$W_j(z) = a_{j-1} z^{-j+1} \quad (j=1, 2, \dots, m, m+1).$$

Передаточная функция j -го замкнутого пути (контура)

$$W_{0j}(z) = -b_j z^{-j} \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

Несоприкасающихся контуров граф не имеет, поэтому его определитель равен

$$\Delta = 1 - \sum_{j=1}^n W_{0j}(z) = 1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}$$

Поскольку все разомкнутые пути графа имеют общими с его контурами два узла и единичную ветвь, то все миноры графа будут равны единице, т. е. $\Delta_j = 1$ ($j=1, 2, \dots, m, m+1$).

Теперь в силу формулы (2.17) легко получить следующее выражение для передаточной функции графа, представленного на рис. 2.5:

$$D(z) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{a_{j-1} z^{-j+1}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j z^{-j}}{1 + \sum_{j=1}^n b_j z^{-j}},$$

которое полностью совпадает с (2.1).

Использование графов в задаче реализации цифровых фильтров оказывается очень полезным. Во-первых, граф дает наглядное графическое представление алгоритма реализации дискретной передаточной функции. Во-вторых, граф реализации фильтра можно быстро составить по виду его передаточной функции, в чем нетрудно убедиться, сопоставляя граф на рис. 2.5 с уравнениями (2.1 и (2.2). В-третьих, с помощью графов возможно провести сравнительный анализ различных способов реализации цифрового фильтра с заданной передаточной функцией.

2.3. СТРУКТУРЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Каждому способу программирования дискретной передаточной функции (непосредственному, параллельному или каскадному) соответствует несколько структур реализации фильтра. Рассмотрим структуры каждого из этих способов.

Структуры непосредственного программирования

Возможность построения различных структур реализации цифрового фильтра с передаточной функцией (2.1)

следует из разностного уравнения (2.2). Граф одной из подобных структур представлен на рис. 2.5. В соответствии с этой структурой при вычислении $u[k]$ по формуле (2.2) операции запоминания на такт, два и т. д. предшествуют операциям умножения переменных на соответст-

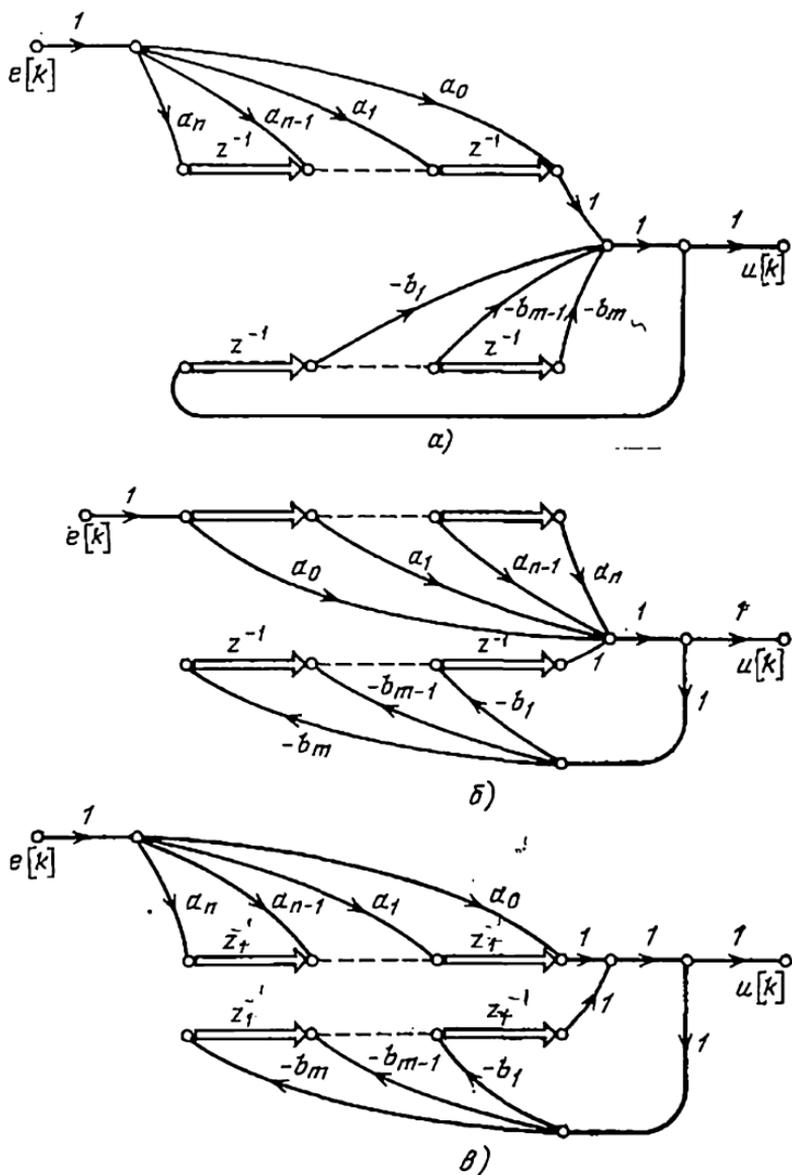


Рис. 2.7. Прямые структуры реализации цифрового фильтра.

вующие коэффициенты. Если под знаком первой суммы поменять местами операции запоминания и умножения, то получим структуру реализации, изображенную на рис. 2.7,а. При перестановке этих операций под знаком второй суммы можно получить структуру, представленную на рис. 2.7,б. Наконец, в третьей структуре (рис. 2.7,в) операции умножения предшествуют операциям запоминания. Будем называть все эти структуры *прямыми*.

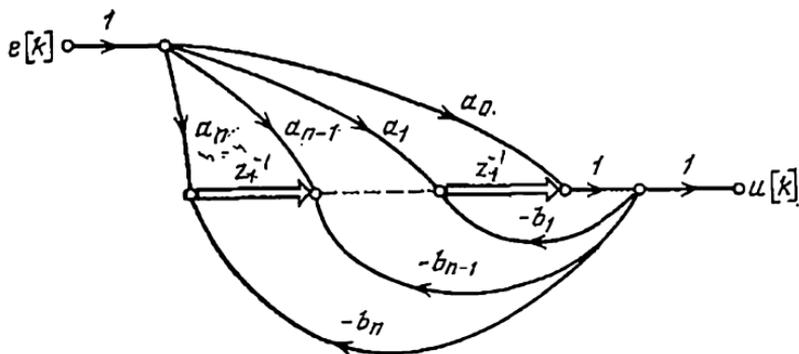


Рис. 2.8. Структура с многомерным входом.

Сравнение структур реализации цифрового фильтра логично производить по числу необходимых арифметических операций и элементов памяти. С этой точки зрения все структуры, приведенные на рис. 2.7, и структура, представленная на рис. 2.5, равноценны. К недостатку этих структур относится сравнительно большое число необходимых элементов памяти.

Нетрудно заметить, что в структуре, изображенной на рис. 2.7,в, можно объединить первые элементы памяти. Тогда при $m=n$ структура примет вид, изображенный на рис. 2.8. Очевидно, что эта структура также дает решение разностного уравнения (2.2). Назовем ее *структурой непосредственного программирования с многомерным входом*.

В структуре с многомерным входом, приведенной на рис. 2.8, принято $m=n$. Случаи $m>n$ и $m<n$ легко получить, полагая равными нулю соответствующие коэффициенты со старшими индексами. В дальнейшем будем считать $m=n$.

Представим передаточную функцию

$$D(z) = \frac{u(z)}{e(z)} = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} \quad (2.1a)$$

в виде произведения двух передаточных функций:

$$D_1(z) = \frac{v(z)}{e(z)} = \left[1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} \right]^{-1}$$

и

$$D_2(z) = \frac{u(z)}{v(z)} = \sum_{i=0}^n a_i z^{-i}$$

Новая промежуточная переменная v будет при этом определяться следующим разностным уравнением:

$$v[k] = e[k] - \sum_{i=1}^n b_i v[k-i], \quad (2.19)$$

а выходная величина

$$u[k] = \sum_{i=0}^n a_i v[k-i]. \quad (2.20)$$

Уравнению (2.19) соответствует граф, приведенный на рис. 2.9,а. От этого графа легко перейти к графу реализации дискретной передаточной функции (2.1a), если принять во внимание соотношение (2.20). Соединяя в одну точку ветви с коэффициентами передачи a_i , исходящие из узлов графа (рис. 2.9,а) с координатами $v[k-i]$, получаем узел с координатой $u[k]$. Граф, изображенный на рис. 2.9,б, назовем *структурой непосредственного программирования с многомерным выходом*.

Структура с многомерным выходом также дает наглядное представление решения разностного уравнения (2.2). Действительно, подставляя в формулу (2.20) уравнение (2.19), получим

$$\begin{aligned} u[k] &= \sum_{j=0}^n a_j \left\{ e[k-j] - \sum_{i=0}^n b_i v[k-j-i] \right\} = \\ &= \sum_{j=0}^n a_j e[k-j] - \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=0}^n a_j v[k-i-j]. \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^n a_j v[k-i-j] = u[k-i].$$

Следовательно, заменяя в первой сумме j на i , получаем уравнение

$$u[k] = \sum_{i=0}^n a_i e[k-i] - \sum_{i=1}^n b_i u[k-i],$$

которое совпадает с уравнением (2.2) при $m=n$.

Структуры с многомерным входом и с многомерным выходом имеют очевидное преимущество перед прямыми структурами, поскольку при этом требуется вдвое меньше элементов памяти. По числу необходимых вычислительных операций эти две структуры являются оптимальными.

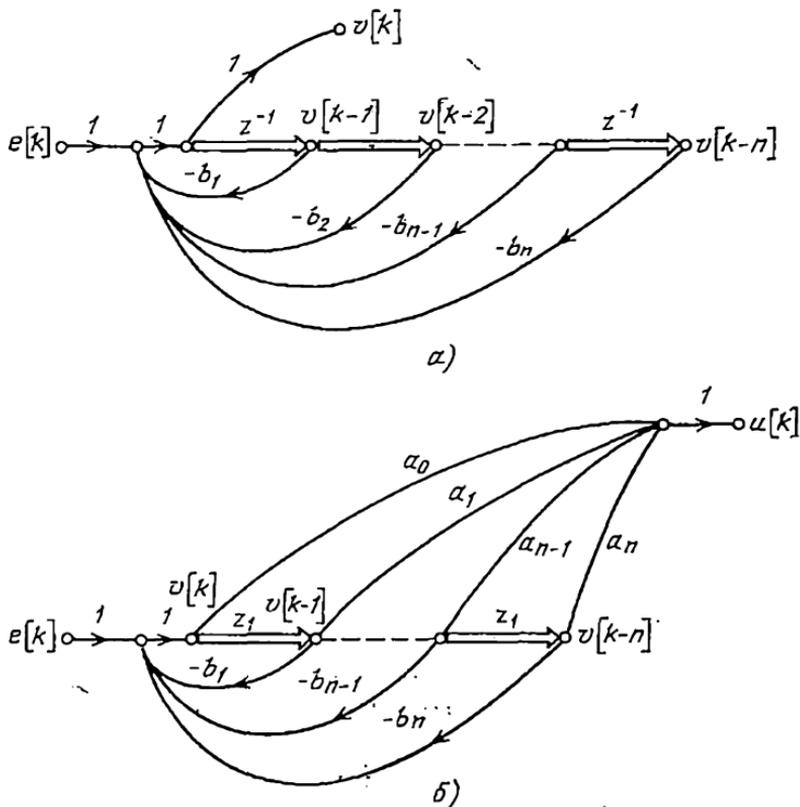


Рис. 2.9. Построение структуры с многомерным выходом.

Как следует из уравнений (2.2) и (2.19), (2.20), структурам непосредственного программирования с многомерным входом и многомерным выходом соответствуют различные последовательности арифметических операций в цифровом фильтре. Проиллюстрируем это на примере реализации фильтра второго порядка.

Пример 2.3. Пусть передаточная функция фильтра

$$D(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}},$$

а соответствующее ей разностное уравнение

$$u[k] = a_1 e[k-1] + a_2 e[k-2] - b_1 u[k-1] - b_2 u[k-2]. \quad (2.21)$$

Структуры непосредственного программирования такой передаточной функции изображены на рис. 2.10.

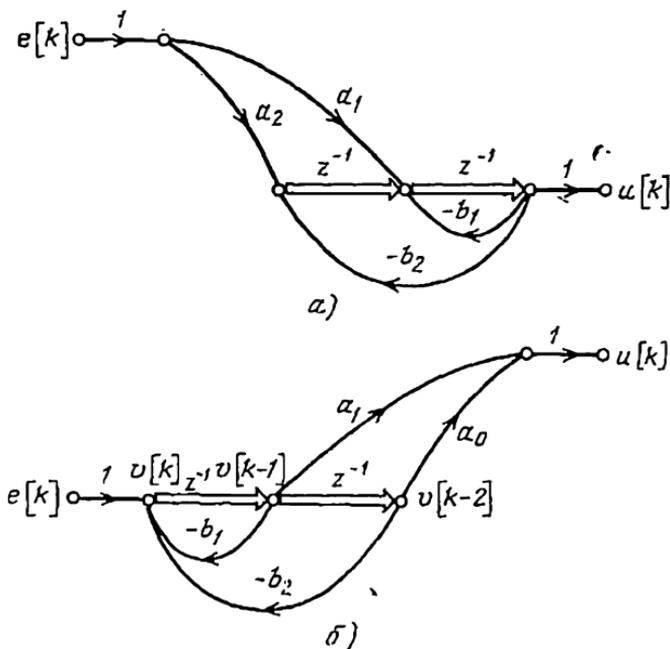


Рис. 2.10. Структура непосредственного программирования фильтра второго порядка:

а — с многомерным входом; б — с многомерным выходом.

Структуре с многомерным входом (рис. 2.10,а) соответствует следующая последовательность арифметических операций в цифровом фильтре. Для вычисления выходной величины u на k -м и $(k+1)$ -м шагах необходимо иметь в ячейках памяти три числа,

равные результатам вычислений:

$$a_1 e [k-1] - b_1 u [k-1], \quad a_2 e [k-1] - b_2 u [k-1], \quad a_2 e [k-2] - b_2 u [k-2].$$

После нахождения по формуле (2.21) $u[k]$ вычисляются разности

$$a_1 e [k] - b_1 u [k], \quad a_2 e [k] - b_2 u [k]$$

и заносятся в ячейки памяти вместо значений

$$a_1 e [k-1] - b_1 u [k-1], \quad a_2 e [k-2] - b_2 u [k-2].$$

Тогда $u[k+1] = (a_1 [k] - b_1 u [k]) + (a_2 e [k-1] - b_2 u [k-1])$. Цикл указанных вычислений повторяется на каждом следующем шаге. Заметим, что для хранения разности $a_1 e [k-1] - b_1 u [k-1]$ можно использовать сумматор, если операцию ее вычисления сделать последней в цикле определения $u[k]$.

Алгоритм вычислений, соответствующий структуре с многомерным выходом (рис. 2.10, б), отличается от рассмотренного. Для вычисления величины u на k -м и $(k+1)$ -м шагах необходимо иметь в ячейках памяти значения $v[k-1]$ и $v[k-2]$. Тогда $u[k] = a_1 v [k-1] + a_2 v [k-2]$.

Промежуточная величина v на k -м шаге вычисляется по формуле

$$v [k] = e [k] - b_1 v [k-1] - b_2 v [k-2]$$

и заносится в ячейку памяти вместо $v[k-2]$. При этом выходная величина на $(k+1)$ -м шаге будет равна

$$u [k+1] = a_1 v [k] + a_2 v [k-1].$$

Этот цикл вычислений повторяется на каждом следующем шаге.

Структуры параллельного программирования

Как было показано в § 2.1, при параллельном программировании дискретной передаточной функции структура ее реализации представляет собой сеть параллельных элементарных структур, каждая из которых отображает решение уравнения (2.7) относительно $u_i [k]$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$). Выбор вариантов структур параллельного программирования определяется способами построения элементарных структур или, другими словами, способами реализации передаточных функций

$$D_i(z) = f_i z^{-1} / (1 - p_i z^{-1}). \quad (2.22)$$

Один из таких способов иллюстрирует граф, представленный на рис. 2.4, а. Очевидно, что соотношение между входной и выходной величинами не изменится, если поменять местами две последовательно соединенные ветви графа. Используя это свойство, легко перейти от графа, приведенного на рис. 2.4, а, к графу реализации $D_i(z)$, показанному на рис. 2.11, а. Объединяя теперь

два элемента задержки в один, получаем структуру реализации элементарной передаточной функции, которую можно называть структурой с многомерным входом (рис. 2.11, б). Очевидно, что передаточная функция (2.22) реализуется также с помощью структуры с многомерным выходом (рис. 2.11, в).

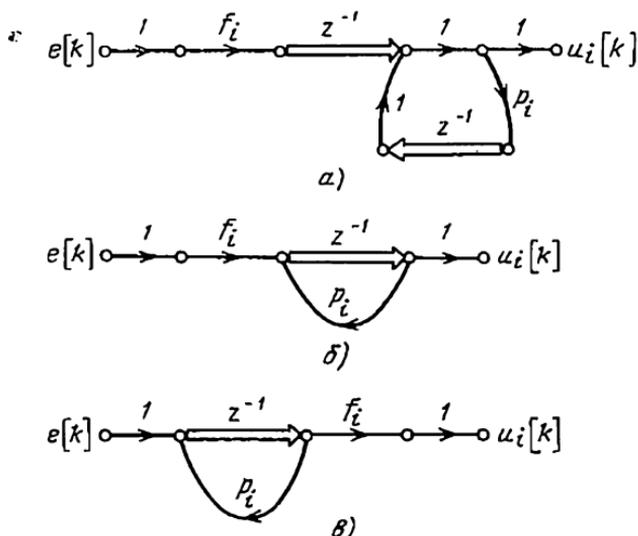


Рис. 2.11. Структуры реализации элементарного звена при параллельном программировании.

Условимся структуру реализации элементарного звена D_i с многомерным входом в дальнейшем называть *структурой П1*, а структуру с многомерным выходом — *структурой П2*. Эти структуры являются основными при параллельном программировании дискретной передаточной функции.

Структуры каскадного программирования

Разновидности структур каскадного программирования также определяются вариантами графов реализации элементарных передаточных функций

$$D_i(z) = \frac{u_i(z)}{u_{i-1}(z)} = \frac{1 - z_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$D_i(z) = \frac{u_i(z)}{u_{i-1}(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} \quad (i = m + 1, m + 2, \dots, n - 1)$$

$$D_n(z) = Kz^{-1}/(1-p_iz^{-1}). \quad (2.23)$$

Передаточные функции (2.14) и (2.23) реализуются с помощью структур П1 и П2 (рис. 2.11, б, в), если в них положить $f=1$ или K соответственно.

Элементарной передаточной функции (2.12) будут соответствовать две структуры реализации с наименьшим числом операций, представленные на рис. 2.12.

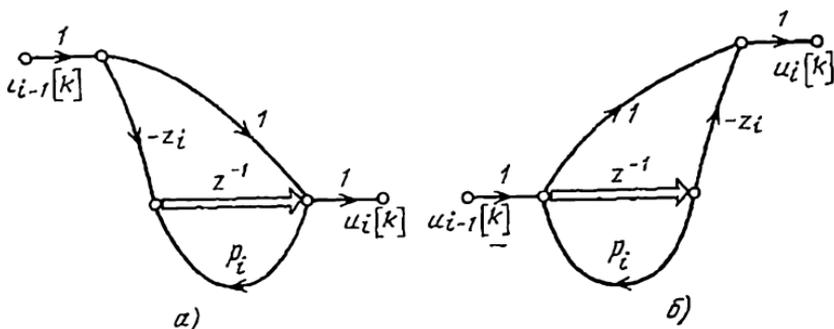


Рис. 2.12. Структуры реализации элементарного звена при каскадном программировании.

Они являются структурами непосредственного программирования передаточной функции первого порядка: с многомерным входом и многомерным выходом соответственно. Назовем эти структуры соответственно *структурой K1* (рис. 2.12, а) и *структурой K2* (рис. 2.12, б).

2.4. СТРУКТУРЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОЛЮСАМИ

В предыдущих параграфах рассматривался случай параллельного программирования, когда все полюсы дискретной передаточной функции действительные и простые. В общем же случае могут иметь место и комплексно-сопряженные полюсы.

Если передаточная функция $D(z)$ содержит n_1 простых действительных полюсов и n_2 пар комплексно-

сопряженных полюсов, то она может быть представлена в следующем виде:

$$D(z) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \frac{f_i}{z - p_i} + \sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{M_i}{z - p_i} + \frac{\bar{M}_i}{z - \bar{p}_i} \right), \quad (2.24)$$

где p_i — действительные полюсы; p_i, \bar{p}_i — комплексно-сопряженные полюсы; M_i, \bar{M}_i — комплексно-сопряженные числа.

Каждая из функций

$$G_i(z) = M_i / (z - p_i) + \bar{M}_i / (z - \bar{p}_i) \quad (2.25)$$

является действительной функцией переменной z , поскольку слагаемые в (2.25) — комплексно-сопряженные величины. Приводя к общему знаменателю и преобразуя, можно представить (2.25) в виде

$$G_i(z) = \frac{u_i(z)}{\sigma(z)} = \frac{a_1 z + a_2}{z^2 + b_1 z + b_2} = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}, \quad (2.26)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — действительные числа.

Элементарная передаточная функция (2.26) может быть реализована с помощью непосредственного программирования, если использовать одну из структур — с многомерным входом или многомерным выходом (рис. 2.10). При таком способе реализации передаточной функции в цифровом устройстве совершаются арифметические операции только над действительными числами.

Введем структуры реализации передаточной функции $G(z)$ (для простоты рассмотрения индекс « i » в дальнейшем опустим), в которой фигурируют действительные и мнимые части комплексных чисел.

Пусть $u_1(z)$ и $\bar{u}_1(z)$ являются сопряженными комплексными переменными, определяемыми из соотношений

$$u_1(z) = [M / (z - p)] e(z), \quad (2.27)$$

$$\bar{u}_1(z) = [\bar{M} / (z - \bar{p})] e(z). \quad (2.28)$$

Тогда $u(z) = G(z)e(z)$ вычисляется как сумма:

$$u(z) = u_1(z) + \bar{u}_1(z) = 2\operatorname{Re}u_1(z). \quad (2.29)$$

Соотношениям (2.27) — (2.29) соответствует система разностных уравнений:

$$u_1[k] = Me[k-1] + \rho u_1[k-1], \quad (2.30)$$

$$\bar{u}_1[k] = \bar{M}e[k-1] + \bar{\rho}\bar{u}_1[k-1], \quad (2.31)$$

$$u[k] = u_1[k] + \bar{u}_1[k], \quad (2.32)$$

структура решения которой изображена на рис. 2.13,а.

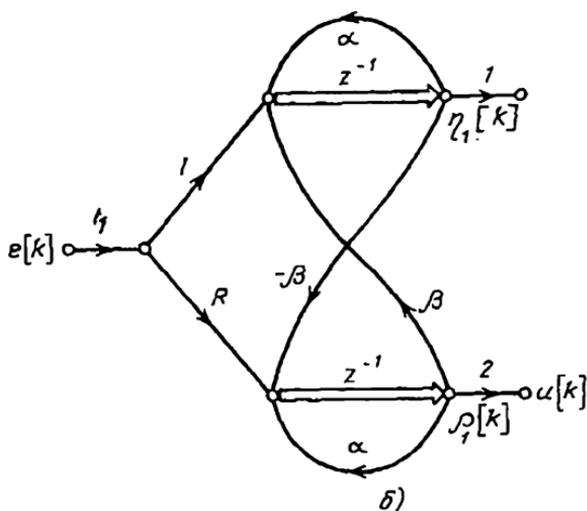
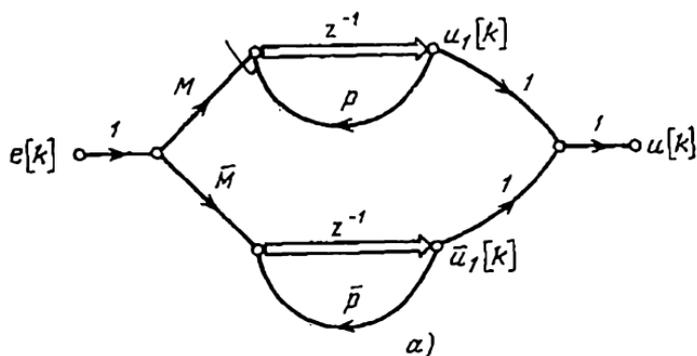


Рис. 2.13. Структуры реализации цифрового фильтра второго порядка с комплексными полюсами:

а — комплексная структура с многомерным входом; б — структура XI с вещественными параметрами.

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} M &= \operatorname{Re} M + j \operatorname{Im} M = R + jI, \\ p &= \operatorname{Re} p + j \operatorname{Im} p = \alpha + j\beta, \\ u_1[k] &= \operatorname{Re} u_1[k] + j \operatorname{Im} u_1[k] = \rho_1[k] + j\eta_1[k]. \end{aligned} \right\} (2.33)$$

Подставив соотношения (2.33) в уравнение (2.30), получим

$$\begin{aligned} u_1[k] &= (\operatorname{Re}[k-1] + \alpha\rho_1[k-1] - \beta\eta_1[k-1]) + \\ &+ j(Ie[k-1] + \alpha\eta_1[k-1] + \beta\rho_1[k-1]). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Учитывая сопряженность комплексных переменных $u_1[k]$ и $\bar{u}_1[k]$, найдем

$$u[k] = 2\operatorname{Re} u_1[k] = 2\rho_1[k]. \quad (2.35)$$

Графическая интерпретация уравнений (2.34) и (2.35) (рис. 2.13,б) дает структуру реализации передаточной функции $G(z)$, называемую в дальнейшем *структурой XI*.

Если системе уравнений (2.30) — (2.32) поставить в соответствие комплексную структуру с многомерным выходом (рис. 2.14,а), то развернутое уравнение для $u[k]$ примет несколько иной по сравнению с (2.34) вид.

Введем промежуточные комплексные переменные $u_0[k]$ и $\bar{u}_0[k]$ в узлах графа (рис. 2.14,а) на выходах элементов памяти. Обозначая $u_0[k] = \rho_0[k] + j\eta_0[k]$ и учитывая соотношения (2.33), находим из графа

$$\begin{aligned} u_0[k] &= (e[k-1] + \alpha\rho_0[k-1] - \beta\eta_0[k-1]) + \\ &+ j(\alpha\eta_0[k-1] + \beta\rho_0[k-1]), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} u_1[k] &= (\rho_0[k] + j\eta_0[k])(R + jI) = \\ &= (R\rho_0[k] - I\eta_0[k]) + j(R\eta_0[k] + I\rho_0[k]). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Учитывая равенство (2.35), из уравнения (2.37) находим

$$u[k] = 2(R\rho_0[k] - I\eta_0[k]). \quad (2.38)$$

Граф системы уравнений (2.36) и (2.38) является второй структурой реализации передаточной функции $G(z)$, которую будем называть *структурой XII* (рис. 2.14,б).

Алгоритм вычислений в соответствии со структурой XI должен предусматривать запоминание значений ρ_1 и η_1 на один такт, что следует из уравнения (2.34). Как видно из уравнения (2.36), для вычисления в соответ-

ствии со структурой $X2$ требуется запоминать на такт значения переменных ρ_0 и η_0 .

Соотношения между R , I , α , β , с одной стороны, и коэффициентами передаточной функции (2.26), с дру-

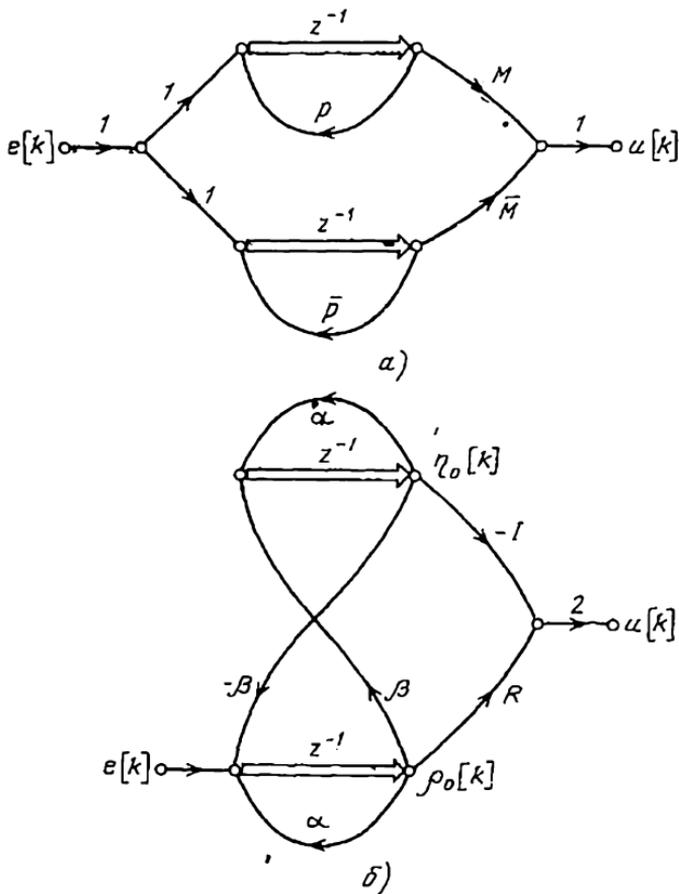


Рис. 2.14. Структуры реализации цифрового фильтра второго порядка с комплексными полюсами:

a — комплексная структура с многомерным выходом; b — структура $X2$ с вещественными параметрами.

гой, устанавливаются элементарным образом. Поступим, например, так. Найдем с помощью формулы Мэзона (2.17), (2.18) передаточную функцию структуры $X1$ (рис. 2.13,б):

$$W_{e,u}(z) = \frac{W_1(z) \Delta_1(z) + W_2(z) \Delta_2(z)}{\Delta(z)}, \quad (2.39)$$

где

$$W_1(z) = -2\beta/z^{-2}; \quad W_2(z) = 2Rz^{-1}. \quad (2.40)$$

Передаточные функции замкнутых контуров имеют вид

$$W_{01}(z) = \alpha z^{-1}, \quad W_{02}(z) = \alpha z^{-1}, \quad W_{03}(z) = -\beta^2 z^{-2}.$$

В соответствии с формулой (2.18)

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 2\alpha z^{-1} + \beta^2 z^{-2} + \alpha^2 z^{-2}, \\ \Delta_1 &= 1, \quad \Delta_2 = 1 - \alpha z^{-1}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Если подставить (2.40), (2.41) в (2.39) и преобразовать, то получим

$$W_{e,u}(z) = \frac{2Rz - 2(\alpha R + \beta I)}{z^2 - 2\alpha z + (\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (2.42)$$

Сравнивая передаточную функцию (2.42) с передаточной функцией (2.26), находим

$$\begin{aligned} a_1 &= 2R, & a_2 &= -2(\alpha R + \beta I), \\ b_1 &= -2\alpha, & b_2 &= \alpha^2 + \beta^2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

а также

$$\begin{aligned} R &= \frac{a_1}{2}, & I &= -\frac{a_2 + \alpha a_1}{2\beta}, \\ \alpha &= -\frac{b_1}{2}, & \beta &= \frac{\sqrt{4b_2 - b_1^2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

3. Результирующие ошибки округления на выходе цифрового фильтра при различных структурах его реализации

3.1. УЧЕТ ОШИБОК ОКРУГЛЕНИЯ В ГРАФХ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА. РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЕ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ

Как отмечалось ранее, при вычислении в уравнении (2.2) произведений $a_i e[k-i]$ и $b_i u[k-i]$ возникают ошибки округления $\alpha_i[k-i]$ и $\beta_i[k-i]$, которые могут быть равны нулю при целочисленных значениях коэффициентов a_i , b_i . Практический интерес представляет оценка величины результирующей ошибки квантования на выходе фильтра, которая, очевидно, зависит от его динамических характеристик и типа структуры реализации.

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры с многомерным входом

Операция умножения переменной на коэффициент a_i изображается ветвью графа с коэффициентом передачи a_i . Поэтому при умножении на a_i ошибку округления целесообразно учитывать путем введения в конце ветви

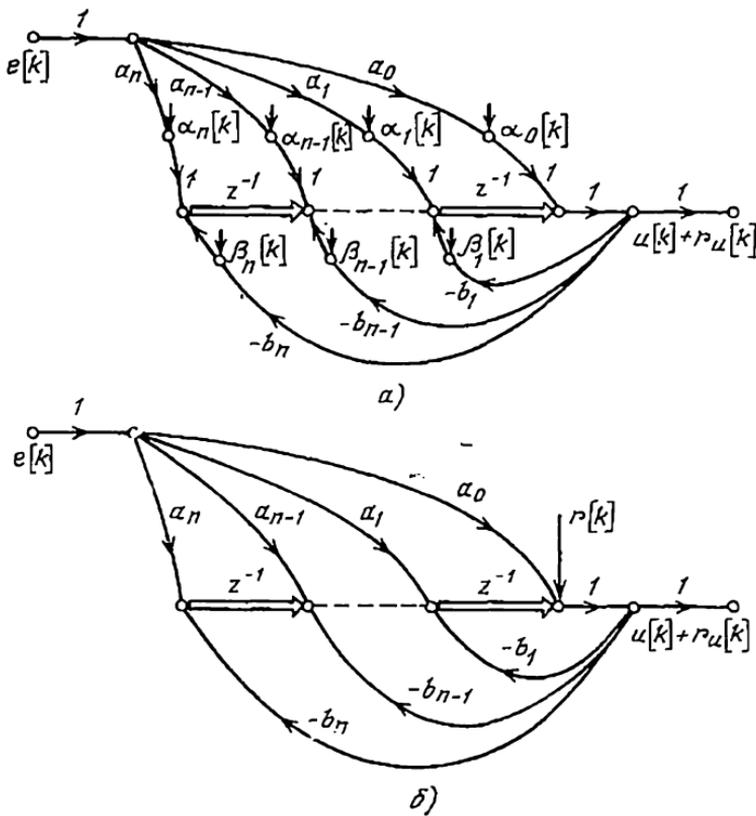


Рис. 3.1. Приведение шумов квантования в структуре с многомерным входом.

воздействия, равного ошибке округления α_i . Аналогично можно поступить и с ошибкой β_i . На рис. 3.1,а представлена структура с многомерным входом, в ветви которой введены воздействия $\alpha_i[k]$ и $\beta_i[k]$.

Поскольку воздействия α_i и β_i проходят через линии задержки без изменения вероятностных характеристик,

ошибки округления в ветвях структуры с многомерным входом можно привести к одному воздействию $r[k]$, приложенному в узле на выходе последовательности элементов памяти (рис. 3.1,б). Это результирующее воздействие будет равно

$$r[k] = \sum_{i=0}^m \alpha_i [k-i] + \sum_{i=1}^n \beta_i [k-i] = \sum_{j=1}^{m+n+1} r_j[k], \quad (3.1)$$

где $r_j[k]$ — ошибка округления в произвольной j -й ветви графа.

Z -преобразование результирующей ошибки $r_u[k]$ округления на выходе структуры фильтра с многомерным входом связано с Z -преобразованием воздействия $r[k]$ соотношением $r_u(z) = K_{ru}(z) r(z)$, где $K_{ru}(z)$ — передаточная функция между узлом r и выходом u .

Определяя $K_{ru}(z)$ с помощью формулы Мэсона (2.17), (2.18), получаем

$$r_u(z) = \left[1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} \right]^{-1} r(z) = \frac{1}{B(z)} r(z). \quad (3.2)$$

Из формулы (3.2) следует, что при заданном шаге квантования δ величина результирующей ошибки квантования на выходе структуры цифрового фильтра с многомерным входом зависит только от величины коэффициентов b_i в знаменателе передаточной функции фильтра $D(z) = A(z)/B(z)$ и не зависит от коэффициентов a_i ее числителя.

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры с многомерным выходом

Аналогично предыдущему случаю, в ветви структуры с многомерным выходом (рис. 2.9,б) можно ввести воздействия, равные ошибкам округления, возникающим при умножении на соответствующие коэффициенты. Ошибки r_i , вводимые в ветви a_i , можно заменить одним воздействием

$$r_\alpha[k] = \sum_{i=0}^{|r_m} r_i[k] \quad (3.3)$$

на выходе структуры, а ошибки в ветвях b_i — воздействием

$$r_\beta[k] = \sum_{i=1}^n r_i[k], \quad (3.4)$$

приложенным ко входу структуры (рис. 3.2).

При этом результирующая ошибка квантования на выходе фильтра $r_u[k]$ будет равна сумме воздействия $r_\alpha[k]$ и реакции фильтра на входное воздействие $r_\beta[k]$:

$$r_u(z) = r_\alpha(z) + D(z)r_\beta(z), \quad (3.5)$$

где $r_\alpha(z)$, $r_\beta(z)$ — Z-преобразования соответствующих сигналов.

Подставляя в (3.5) выражение передаточной функции фильтра (2.1), окончательно получаем

$$r_u(z) = r_\alpha^-(z) + \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}} r_\beta(z). \quad (3.6)$$

Таким образом, результирующая ошибка квантования на выходе структуры с многомерным выходом зависит от величин всех коэффициентов передаточной функции фильтра. Заметим, что при пользовании формулами

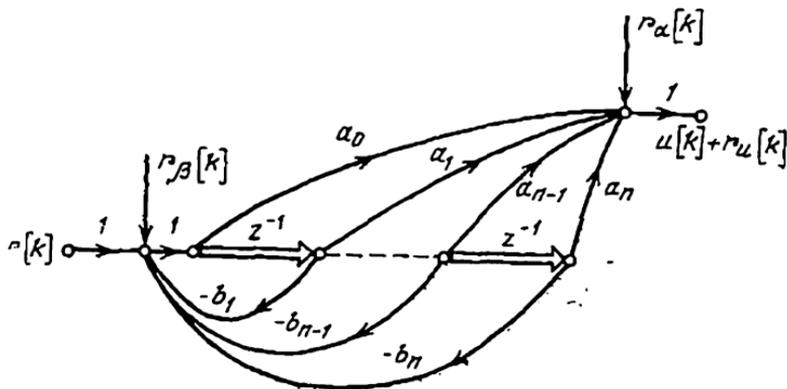


Рис. 3.2. Приведение шумов квантования в структуре с многомерным выходом.

(3.1), (3.3) и (3.4) необходимо принимать равными нулю воздействия r_i в тех ветвях графа фильтра, коэффициенты передачи которых есть целые числа.

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры параллельного программирования.

При параллельном программировании дискретной передаточной функции $D(z)$ результирующая ошибка квантования равна сумме результирующих ошибок в параллельных звеньях $D_i(z)$ (рис. 2.2,а), что следует из уравнения (2.5). Величина результирующей ошибки i -го параллельного звена зависит от структуры его реализации (рис. 2.11,б, в).

В случае использования структуры $П1$ (рис. 2.11,б) ошибки округления $r_{1i}[k]$ и $r_{2i}[k]$, возникающие в ветвях f_i и p_i соответственно, могут быть приведены к одному воздействию

$$r_i[k] = r_{1i}[k] + r_{2i}[k]$$

на выходе линии задержки.

Замечая, что структура $П1$ является частным случаем структуры с многомерным входом, и учитывая соотношение (2.5), по аналогии с формулой (3.2) получаем следующее выражение для Z -преобразования результирующей ошибки квантования на выходе структуры $П1$:

$$r_{ui}(z) = [1 - p_i z^{-1}]^{-1} [r_{1i}(z) + r_{2i}(z)]. \quad (3.7)$$

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры параллельного программирования

$$r_u = r_{u0} + \sum_{i=1}^n r_{ui}. \quad (3.8)$$

где r_{u0} — ошибка округления в звене a_0 (рис. 2.2).

Структура $П2$ (рис. 2.11,в) является частным случаем структуры с многомерным выходом. Поэтому на основании соотношений (3.5), (3.6) легко получить формулу для результирующей ошибки квантования на выходе структуры $П2$:

$$r_{ui}(z) = r_{1i}(z) + \frac{f_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} r_{2i}(z)$$

или, учитывая, что линия задержки не влияет на результирующую ошибку округления,

$$r_{u_i}(z) = r_{1i}(z) + \frac{f_i}{1 - p_i z^{-1}} r_{2i}(z). \quad (3.9)$$

Сравнение формул (3.7) и (3.9) показывает, что величины результирующих ошибок квантования на выходах структур П1 и П2 в общем случае не одинаковы.

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры каскадного программирования

Каждое из звеньев структуры каскадного программирования с передаточными функциями (2.11) является источником ошибок квантования. Если обозначить через $\varepsilon_i[k]$ результирующую ошибку квантования, обусловлен-

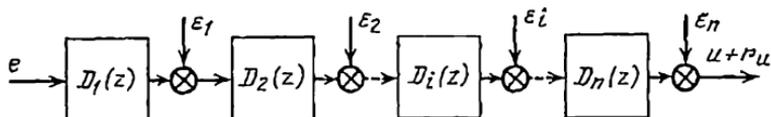


Рис. 3.3. К расчету результирующей ошибки квантования на выходе структуры каскадного программирования.

ную только i -м звеном и приведенную к его выходу, то результирующая ошибка квантования на выходе цифрового фильтра $r_u[k]$ может быть определена с помощью блок-схемы, представленной на рис. 3.3.

Величина результирующей ошибки i -го звена зависит от структуры его реализации. Звенья $D_i(z)$, описываемые уравнением (2.11) при $i=1, 2, \dots, m$, реализуются двумя структурами: К1 или К2 (рис. 2.12). При $i=m+1, \dots, n$ используется одна из структур П1 или П2 (рис. 2.11, б, в). Структура К1 является структурой с многомерным входом. Поэтому ее результирующая ошибка может быть определена по формуле (3.2). При этом необходимо учесть отсутствие ошибки в единичной ветви графа от узла u_{i-1} к узлу u_i . Таким образом, результирующая ошибка округления ε_i на выходе структуры К1

$$\varepsilon_i(z) = \frac{1}{1 - p_i z^{-1}} [r_{1i}(z) + r_{2i}(z)], \quad (3.10)$$

где r_{1i} , r_{2i} — ошибки округления в ветвях $(-z_i)$ и p_i .

Результирующая ошибка округления в структуре K^2 , как структуре с многомерным выходом, определяется по формуле (3.5), если в ней заменить

$$D(z) \text{ на } D_i(z), r_a(z) \text{ на } r_{1i}(z) \text{ и } r_\beta(z) \text{ на } r_{2i}(z).$$

Получаем

$$\varepsilon_i(z) = r_{1i}(z) + \frac{1 - z_i z^{-1}}{1 - p_i z^{-1}} r_{2i}(z). \quad (3.11)$$

Результирующие ошибки квантования в элементарных звеньях с передаточными функциями (2.11) при $i = m+1, m+2, \dots, n-1$ определяются формулами (3.7) и (3.9), если в них положить $f_i = 1$ (при этом $r_{ii}[k] = 0$), а в звене $D_n(z)$ — по тем же формулам при $f_i = K$.

Результирующая ошибка квантования на выходе цифрового фильтра $r_u[k]$ при каскадном способе его программирования равна сумме составляющих ошибок $r_{ui}[k]$ ($1, 2, \dots, n$), каждая из которых представляет собой реакцию последовательности звеньев $D_{i+1}(z), D_{i+2}(z), \dots, D_n(z)$ на воздействие $\varepsilon_i[k]$ (рис. 3.3). Следовательно, Z-преобразование составляющей ошибки

$$r_{ui}(z) = D_{i+1}(z) D_{i+2}(z) \dots D_n(z) \varepsilon_i(z) = \varepsilon_i(z) \prod_{h=i+1}^n D_h(z), \quad (3.12)$$

а суммарная результирующая ошибка

$$r_u(z) = \sum_{i=1}^n r_{ui}(z) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(z) \prod_{h=i+1}^n D_h(z). \quad [(3.13)]$$

Таким образом, величина результирующей ошибки квантования при каскадном способе программирования цифрового фильтра зависит не только от возможного числа структур реализации элементарных звеньев $D_i(z)$, но также и от того, в какой последовательности они соединены.

Результирующие ошибки квантования в структурах X1 и X2

Для уменьшения величины результирующей ошибки квантования на выходе структур X1 (рис. 2.13,б) и X2 (рис. 2.14,б) целесообразно операции умножения на два в выражениях (2.35), (2.38) из последних сделать пер-

выми. Очевидно, что алгоритм преобразования входного сигнала $e[k]$ при этом не изменяется, а ошибка квантования уменьшается в два раза.

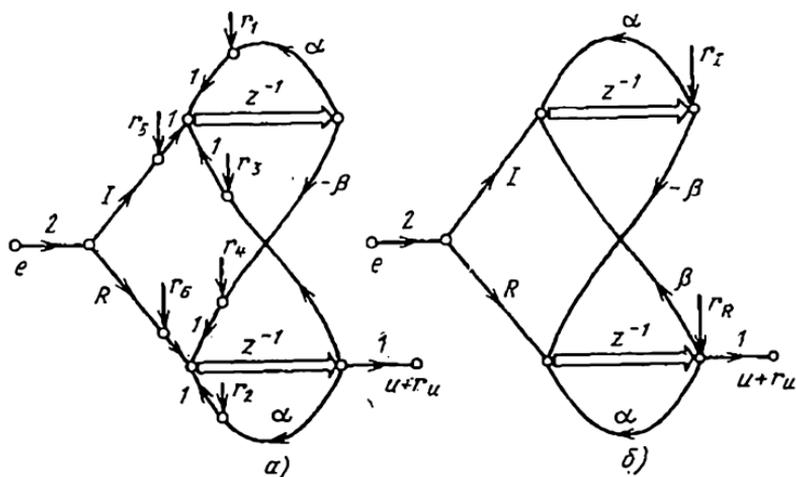


Рис. 3.4. Приведение шумов квантования в структуре XI.

Введенные в ветви структуры XI ошибки округления r_j (рис. 3.4,а) можно заменить двумя эквивалентными возмущениями:

$$r_I[k] = r_1[k] + r_3[k] + r_5[k], \quad (3.14)$$

$$r_R[k] = r_2[k] + r_4[k] + r_6[k],$$

приложенными на выходах нижней и верхней линий задержки (рис. 3.4,б). Тогда для результирующей ошибки квантования $r_u[k]$ на выходе структуры XI получаем

$$r_u(z) = W_{R1}(z)r_R(z) + W_{I1}(z)r_I(z), \quad (3.15)$$

где $W_{R1}(z)$, $W_{I1}(z)$ — передаточные функции между выходом структуры и точками приложения возмущений r_R и r_I соответственно (рис. 3.4,б).

Передаточные функции $W_R(z)$ и $W_I(z)$ легко определяются при помощи формулы Мэсона (2.17). Так,

$$W_{R1}(z) = W_1(z)\Delta_1(z)/\Delta(z), \quad (3.16)$$

где

$$W_1(z) = 1; \Delta_1(z) = 1 - \alpha z^{-1}; \quad (3.17)$$

$$\Delta(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \beta^2 z^{-2} + \alpha^2 z^{-2}.$$

Подставляя (3.17) в формулу (3.16), найдем

$$W_{R1}(z) = \frac{1 - \alpha z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2) z^{-2}}. \quad (3.18)$$

Аналогичным образом определяется и другая передаточная функция

$$W_{I1}(z) = \frac{-\beta z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2) z^{-2}}. \quad (3.19)$$

Структура X2 с введенными ошибками округления $r_j[k]$ изображена на рис. 3.5,а. Действие этих ошибок

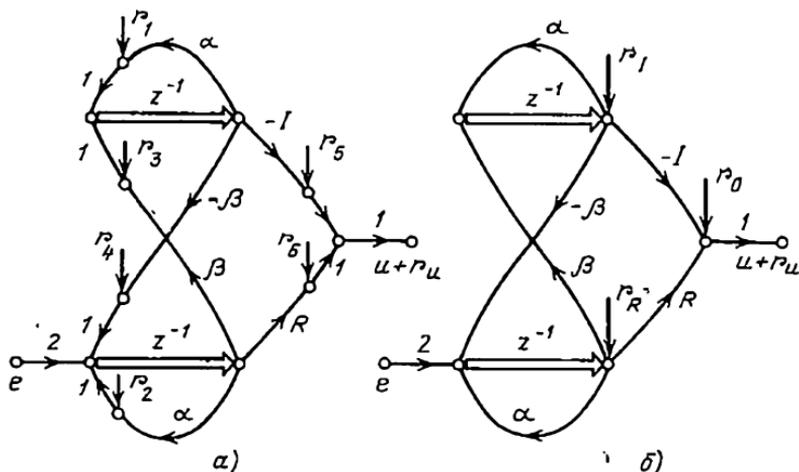


Рис. 3.5. Приведение шумов квантования в структуре X2.

эквивалентно эффекту, вызванному воздействием на структуру следующих помех:

$$\begin{aligned} r_I[k] &= r_1[k] + r_3[k], \\ r_R[k] &= r_2[k] + r_4[k], \\ r_o[k] &= r_5[k] + r_0[k]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

приложенных соответственно на выходе верхней линии задержки, на выходе нижней линии задержки и на выходе структуры X2 (рис. 3.5,б).

Результирующая ошибка квантования определяется формулой

$$\begin{aligned} r_u(z) &= W_{R2}(z)r_R(z) + \\ &+ W_{I2}(z)r_I(z) + r_o(z). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Передаточная функция $W_{R2}(z)$ между выходом структуры и точкой приложения возмущения $r_R(z)$ в соответствии с формулой Мэзона имеет вид

$$W_{R2}(z) = [W_1(z) \Delta_1(z) + W_2(z) \Delta_2(z)] / \Delta(z), \quad (3.22)$$

где

$$W_1(z) = R; \quad \Delta_1(z) = 1 - \alpha z^{-1};$$

$$W_2(z) = -\beta I z^{-1}; \quad \Delta_2(z) = 1; \quad (3.23)$$

$$\Delta(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \beta^2 z^{-2} + \alpha^2 z^{-2}.$$

После подстановки (3.23) в (3.22) получаем

$$W_{R2}(z) = \frac{R - (\alpha R + \beta I) z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2) z^{-2}}. \quad (3.24)$$

Передаточная функция $W_{I2}(z)$ между выходом структуры $X2$ и точкой приложения возмущения $r_I[k]$ вычисляется также по формуле (3.22), в которой числитель определяется следующими соотношениями:

$$W_1(z) = -I, \quad \Delta_1(z) = 1 - \alpha z^{-1},$$

$$W_2(z) = -\beta R z^{-1}, \quad \Delta_2(z) = 1.$$

В результате подстановки этих соотношений и $\Delta(z)$ из (3.23) в формулу (3.22) находим

$$W_{I2}(z) = \frac{-I + (\alpha I - \beta R) z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + (\alpha^2 + \beta^2) z^{-2}}. \quad (3.25)$$

3.2. ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОЙ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ НА ВЫХОДЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Полученные в предыдущем параграфе выражения для определения результирующей ошибки квантования на выходе цифрового фильтра с заданной структурой реализации могут быть использованы для расчета ее оценки. Проведем оценку максимальной величины результирующей ошибки квантования двумя способами, рассмотренными в § 1.4.

Первый способ расчета

Применяя к соотношению (3.2) обратное Z -преобразование, получаем формулу для текущих дискретных значений ошибки квантования на выходе структуры с многомерным входом

$$r_u[k] = \sum_{l=0}^k d_b[l] r[k-l],$$

где весовая функция

$$d_b[l] = Z^{-1} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} \right\}^{-1}$$

Максимальное значение возмущения $r[k]$ на основании формулы (3.1) равно $(m+n+1)\delta/2$. Максимальное значение ошибки r_u на выходе структуры с многомерным входом будет иметь место при $r = (m+n+1)\delta/2$ и при самом наилучшем сочетании знаков:

$$|r_u|_{\max} = (m+n+1) \frac{\delta}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |d_b[l]|. \quad (3.26)$$

Суммирование в этом выражении, как и в формуле (1.81), следует оборвать на тех l , для которых значение $d_b[l]$ становится достаточно малым.

Если известна весовая функция цифрового фильтра $d[k] = Z^{-1}\{D(z)\}$, то для определения ошибки квантования на выходе структуры с многомерным входом на основании соотношения (3.6) можно написать следующую формулу:

$$r_u[k] = r_a[k] + \sum_{l=0}^k d[l] r_p[k-l].$$

Максимальное значение ошибки на выходе структуры при этом будет равно

$$|r_u|_{\max} = (m+1) \frac{\delta}{2} + n \frac{\delta}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |d[l]|. \quad (3.27)$$

Аналогичным образом поступим при выводе формулы для вычисления максимальной ошибки квантования на выходе структуры параллельного программирования.

Весовую функцию $d_{\Pi_i}[l]$ элементарного параллельного звена $D_i(z) = [1 - p_i z^{-1}]^{-1}$ можно получить, например, методом разложения последней в степенной ряд

$$\frac{1}{1 - p_i z^{-1}} = 1 + p_i z^{-1} + p_i^2 z^{-2} + p_i^3 z^{-3} + \dots$$

Тогда весовая функция $d_{\Pi_i}[l] = p_i^l$, откуда

$$\sum_{m=0}^{\infty} |d_{\Pi_i}[m]| = 1 + |p_i| + |p_i|^2 + \dots = \frac{1}{1 - |p_i|}. \quad (3.28)$$

Принимая во внимание формулу (3.7) и соотношение (3.28), а также учитывая, что $(r_{i1}[k])_{\max} = (r_{2i}[k])_{\max} = \delta/2$, получаем следующее выражение для наибольшего возможного значения результирующей ошибки округления на выходе структуры П1:

$$|r_{u1}|_{\max} = \delta / (1 - |p_i|). \quad (3.29)$$

Максимальная результирующая ошибка на выходе всей структуры параллельного программирования, каждое из параллельных звеньев которой реализовано с помощью структуры П1, на основании формулы (3.28) вычисляется следующим образом:

$$|r_{u1}|_{\max} = \frac{\delta}{2} + \delta \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - |p_i|}. \quad (3.30)$$

Подобным способом легко вывести формулу для максимальной ошибки на выходе фильтра при использовании структуры П2. Учитывая соотношение (3.9), получаем

$$|r_{u2}|_{\max} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \frac{|f_i|}{1 - |p_i|}. \quad (3.31)$$

Если все звенья представляют собой структуры П2, то максимальная ошибка на выходе структуры параллельного программирования

$$|r_{u2}|_{\max} = \frac{n+1}{2} \delta + \frac{\delta}{2} \sum_{i=1}^n \frac{|f_i|}{1 - |p_i|}. \quad (3.32)$$

Структуры П1 и П2 можно сравнить между собой с точки зрения максимального значения результирующей ошибки квантования. Сравнение формул (3.29) и (3.31)

показывает, что эта величина будет большей в структуре П1, чем в структуре П2, если

$$\frac{\delta}{1-|p_i|} > \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{|f_i|}{1-|p_i|} \right),$$

т. е. если

$$|f_i| - |p_i| < 1. \quad (3.33)$$

Задаваемая неравенством (3.33) область параметров f_i и p_i представлена на рис. 3.6. При значениях f_i и p_i , лежащих внутри заштрихованной области, более предпочтительным оказывается использование структуры П2. Заметим, что значение полюсов устойчивого звена по абсолютной величине всегда меньше единицы.

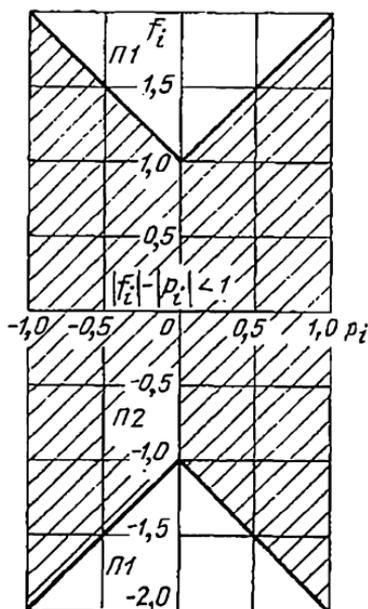


Рис. 3.6. Сравнение структур П1 и П2 по величине максимальной ошибки квантования.

Для определения максимальной ошибки квантования на выходе структуры К2 необходимо знать весовую функцию элементарного последовательного звена $D_i(z) = (1 - z_i z^{-1}) / (1 - p_i z^{-1})$, которая равна

$$d_{Kl}[l] = \begin{cases} 1 & \text{при } l = 0, \\ (p_i - z_i) p_i^{l-1} & \text{при } l \geq 1. \end{cases}$$

Поскольку, как следует из соотношения (3.11), мгновенное значение ошибки на выходе структуры К2 опре-

Оценим величину максимальной результирующей ошибки квантования в структурах К1 и К2. Выражение (3.10) для Z-преобразования результирующей ошибки квантования на выходе структуры К1 совпадает с аналогичным выражением (3.7), справедливым для структуры П1. Поэтому максимальная величина результирующей ошибки квантования на выходе структуры К1 может быть рассчитана по формуле (3.29), т. е.

$$|\varepsilon_i|_{\max} = \delta / (1 - |p_i|). \quad (3.34)$$

Для определения максимальной ошибки квантования на выходе структуры К2 необходимо

деляется соотношением

$$\varepsilon_i[k] = r_{1i}[k] + \sum_{l=0}^k d_{Ki}[l] r_{2i}[k-l],$$

то ее максимальное значение определяется формулой

$$|\varepsilon_i|_{\max} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \sum_{l=0}^{\infty} |d_{Ki}[l]|.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |d_{Ki}[l]| &= 1 + |\rho_i - z_i| (1 + |\rho_i| + |\rho_i|^2 + \dots) = \\ &= 1 + \frac{|\rho_i - z_i|}{1 - |\rho_i|}, \end{aligned} \quad (3.35a)$$

формула для расчета максимальной величины результирующей ошибки квантования на выходе структуры $K2$ примет вид

$$|\varepsilon_i|_{\max} = \frac{\delta}{2} \left(2 + \frac{|\rho_i - z_i|}{1 - |\rho_i|} \right). \quad (3.36)$$

Величина максимальной ошибки округления на выходе структуры $K1$ будет превышать аналогичную величину ошибки на выходе структуры $K2$, если

$$\frac{\delta}{1 - |\rho_i|} > \frac{\delta}{2} \left(2 + \frac{|\rho_i - z_i|}{1 - |\rho_i|} \right).$$

После элементарного преобразования этого неравенства получим следующее условие:

$$|\rho_i - z_i| < 2|\rho_i|, \quad (3.37)$$

которое изображено графически на рис. 3.7.

Таким образом, если значения соответствующей пары корня z_i и полюса ρ_i передаточной функции цифрового фильтра лежат внутри заштрихованной области, то при каскадном программировании фильтра звено с передаточной функцией $(1 - z_i z^{-1}) / (1 - \rho_i z^{-1})$ целесообразно реализовать с помощью структуры $K2$, так как в этом случае результирующая ошибка квантования на выходе звена будет наименьшей. При z_i и ρ_i , лежащих вне этой области, желательно использовать структуру $K1$.

Максимальную результирующую ошибку квантования на выходе всей структуры каскадного программирования можно определить по схеме, изображенной на рис. 3.3. Максимальная ошибка равна сумме реакций r_{ui}

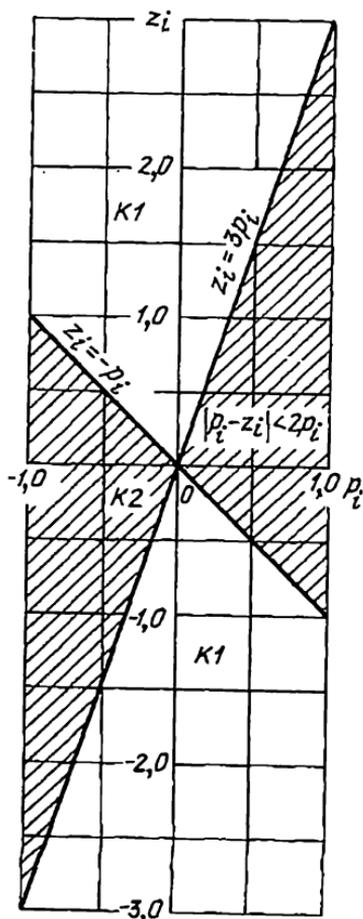


Рис. 3.7. Сравнение структур $K1$ и $K2$ по величине максимальной ошибки квантования.

$W_{R1}(z)$, $W_{I1}(z)$ и $W_{R2}(z)$; $W_{I2}(z)$. Так, например, для максимальной ошибки на выходе структуры $X1$

$$|r_u|_{\max} = \frac{3\delta}{2} \left(\sum_{l=0}^{\infty} |w_{R1}[l]| + \sum_{l=0}^{\infty} |w_{I1}[l]| \right),$$

последовательности звеньев $D_{i+1}, D_{i+2}, \dots, D_n$ на максимальные воздействия ϵ_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) при наихудших сочетаниях знака ϵ_i . Для определения реакций r_{ui} необходимо знать весовые функции последовательно-

$$d_{K1, n}[l] = Z^{-4} \{ D_{i+1}, \\ D_{i+2}, \dots, D_n \}.$$

Максимальное значение реакции

$$|r_{ui}|_{\max} = |\epsilon_i|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K1, n}[l]. \quad (3.38)$$

Максимальное значение результирующей ошибки округления на выходе фильтра

$$|r_u|_{\max} = \sum_{i=1}^n |r_{ui}|_{\max}. \quad (3.39)$$

Оценку сверху результирующей ошибки квантования на выходе структур $X1$ и $X2$ легко получить с помощью формул (3.15), (3.21), если известны дискретные весовые функции, соответствующие передаточным функциям

а на выходе структуры X_2

$$|r_u|_{\max} = \delta \left(\sum_{l=0}^{\infty} |\omega_{R_2}[l]| + \sum_{l=0}^{\infty} |\omega_{I_2}[l]| + 1 \right).$$

Пример 3.1. Проиллюстрируем методику расчета максимального значения результирующей ошибки квантования на конкретном примере реализации фильтра второго порядка, передаточная функция которого

$$D(z) = \frac{0,636 - 0,098z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{1 + 0,566z^{-1} + 0,0258z^{-2}}. \quad (3.40)$$

Рассмотрим ошибки в различных структурах реализации фильтра.

Структура с многомерным входом. Воспользуемся формулой (3.26). Для этого вычислим весовую функцию

$$\begin{aligned} d_b[l] &= Z^{-1} \left\{ \frac{1}{B(z)} \right\} = \\ &= Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + 0,566z^{-1} + 0,0258z^{-2}} \right\}. \end{aligned}$$

Поделив 1 на $B(z)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{B(z)} &= 1 - 0,566z^{-1} + 0,346z^{-2} - 0,181z^{-3} + 0,094z^{-4} - \\ &- 0,0486z^{-5} + 0,0252z^{-6} - 0,013z^{-7} + 0,0067z^{-8} - \\ &- 0,0034z^{-9} + 0,0017z^{-10} - \dots \end{aligned}$$

Коэффициенты этого степенного ряда равны соответствующим значениям весовой функции. Поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} |d_b[l]| = 1 + 0,566 + 0,346 + \dots \approx 2,287.$$

Учитывая, что в передаточной функции (3.40) $m=n=2$, получаем

$$|r_u|_{\max} = 5\delta 2,287/2 = 5,73\delta. \quad (3.41)$$

Структура с многомерным выходом. Поделив числитель на знаменатель, представим передаточную функцию (3.40) в виде степенного ряда:

$$\begin{aligned} D(z) &= 0,636 - 0,459z^{-1} + 0,246z^{-2} - 0,128z^{-3} + 0,066z^{-4} - 0,034z^{-5} + \\ &+ 0,0176z^{-6} - 0,0091z^{-7} + 0,0047z^{-8} - 0,0024z^{-9} + \\ &+ 0,00125z^{-10} - 0,006z^{-11} + \dots, \end{aligned}$$

коэффициенты которого определяют соответствующие значения весовой функции фильтра. Тогда

$$\sum_{l=0}^{\infty} |d[l]| = 0,636 + 0,459 + 0,246 + \dots \approx 1,605.$$

Максимальное значение ошибки округления на выходе структуры с многомерным выходом определяется по формуле (3.27):

$$|r_{\text{и}}|_{\text{макс}} = 3\delta/2 + 2\delta \cdot 1,605/2 = 3,105\delta. \quad (3.42)$$

Структура параллельного программирования. Эта структура реализует передаточную функцию (3.40), которую можно записать в виде

$$D(z) = D_0 + \frac{f_1}{z + p_1} + \frac{f_2}{z + p_2}, \quad (3.42a)$$

где $D_0 = 0,636$; $f_1 = 0,0043$; $p_1 = -0,05$; $f_2 = -0,364$; $p_2 = -0,516$.

Проверим выполнение неравенства (3.33) для каждого элементарного звена. Для первого звена имеем

$$|f_1| - |p_1| = 0,0043 - 0,05 = 0,0457 < 1.$$

При реализации первого звена использование структуры П2 по сравнению с использованием структуры П1 обеспечивает меньшую ошибку округления, максимальная величина которой на основании формулы (3.31) равна

$$|r_{\text{и1}}|_{\text{макс}} + \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{0,0043}{1 - 0,05} \right) \approx 0,502\delta. \quad (3.43)$$

В то же время при реализации первого звена с помощью структуры П1 в соответствии с формулой (3.29)

$$|r_{\text{и1}}|_{\text{макс}} = \delta / (1 - 0,05) = 1,05\delta.$$

Аналогично для второго звена в случае реализации его с помощью структуры П2 имеем

$$|r_{\text{и2}}|_{\text{макс}} = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{0,364}{1 - 0,516} \right) = 0,875\delta, \quad (3.44)$$

а при использовании структуры П1

$$|r_{\text{и2}}|_{\text{макс}} = \delta / (1 - 0,516) = 2,06\delta.$$

Использование структуры П2 желательно при реализации второго звена. При этом результирующая ошибка на выходе структуры параллельного программирования равна сумме ошибок, вычисляемых по формулам (3.43) и (3.44), а также ошибке $0,5\delta$ в звене D_0 , т. е.

$$|r_{\text{и}}|_{\text{макс}} = 0,5\delta + 0,502\delta + 0,875\delta = 1,877\delta. \quad (3.45)$$

Структура каскадного программирования. Для реализации этой структуры необходимо представить передаточную функцию (3.40) в виде

$$D(z) = K_0 D_1(z) D_2(z) = K_0 \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} \frac{1 - z_2 z^{-1}}{1 - p_2 z^{-1}}, \quad (3.46)$$

где $K_0 = 0,636$; $z_1 = 0,0185$; $p_1 = -0,05$; $z_2 = 0,135$; $p_2 = 0,516$.

Проверим выполнение неравенства (3.37) для элементарных звеньев $D_1(z)$ и $D_2(z)$:

$$|p_1 - z_1| = 0,0685 < 0,1 = 2|p_1|,$$

$$|p_2 - z_2| = 0,651 < 1,032 = 2|p_2|.$$

Выполнение неравенства (3.37) указывает на необходимость реализации обоих звеньев с помощью структуры K_2 . Максимальные значения результирующих ошибок округления на выходах структур K_2 первого и второго звеньев рассчитываются по формуле (3.36), они равны соответственно

$$|\epsilon_1|_{\max} = \frac{\delta}{2} \left(2 + \frac{0,0685}{1-0,05} \right) = 1,04\delta, \quad (3.47)$$

$$|\epsilon_2|_{\max} = \frac{r\delta}{2} \left(2 + \frac{0,651}{1-0,516} \right) = 1,675\delta.$$

Если же эти звенья реализовать с помощью структуры K_1 , то аналогичные ошибки $|\epsilon_1|_{\max} = 1,05\delta$, $|\epsilon_2|_{\max} = 2,06\delta$.

Результирующая ошибка квантования на выходе структуры каскадного программирования вычисляется по формулам (3.38) и (3.39). При этом необходимо учесть все шесть возможных вариантов последовательного соединения звеньев, показанных на рис. 3.8.

1. Для первого варианта соединения звеньев (рис. 3.8,а) получаем

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_0|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K_{1,2}} [l] + |\epsilon_1|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K_2} [l] + |\epsilon_2|_{\max}, \quad (3.48)$$

где

$$d_{K_{1,2}} [l] = Z^{-1} \{ D_1(z) D_2(z) \} = \frac{d[l]}{K_0},$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{K_{1,2}} [l] = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} d[l]}{K_0} = \frac{1,605}{0,636} = 2,52, \quad (3.49)$$

$$d_{K_2} [l] = Z^{-1} \{ D_2(z) \}.$$

С помощью формулы (3.35а) находим

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{K_2} [l] = 1 + \frac{0,651}{1-0,516} = 2,35. \quad (3.50)$$

Подставляя (3.47), (3.49) и (3.50) в соотношение (3.48) и учитывая, что $|\epsilon_0|_{\max} = \delta/2$, получаем следующую величину максимальной ошибки:

$$|r_u|_{\max} = 0,5\delta \cdot 2,52 + 1,04\delta \cdot 2,35 + 1,675\delta = 5,379\delta. \quad (3.51)$$

2. Второму варианту цепочки звеньев (рис. 3.8,б) соответствует формула

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_0|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K_{1,2}} [l] + |\epsilon_2|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K_1} [l] + |\epsilon_1|_{\max}, \quad (3.52)$$

где $d_{K_1} [l] = Z^{-1} \{ D_1(z) \}$.

Формула (3.35а) дает

$$\sum_{l=0}^{\infty} d_{Kl} [l] = 1 + \frac{0,0685}{1 - 0,05} = 1,072.$$

Подставив в (3.52) этот результат, а также (3.47) и (3.49), найдем

$$|r_{\text{н}}|_{\text{макс}} = 0,5\delta 2,52 + 1,675\delta 1,072 + 1,04\delta = 4,095\delta. \quad (3.53)$$

Аналогичным образом рассчитываются максимальные значения результирующих ошибок квантования на выходе остальных структур каскадного программирования. Приведем лишь расчетные формулы для каждого варианта и подсчитанную величину результирующей ошибки:

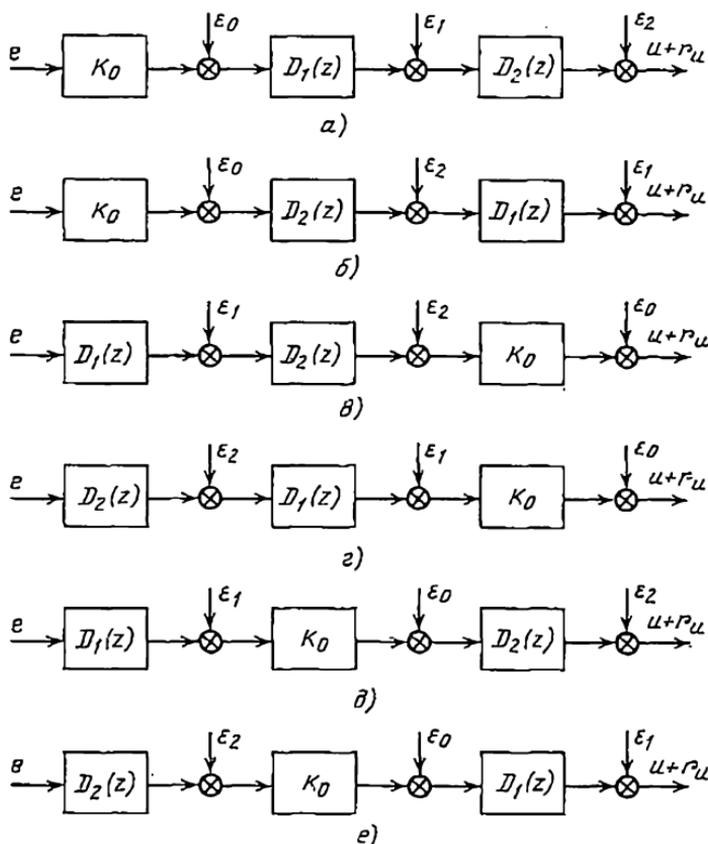


Рис. 3.8. Варианты структурных схем при расчете результирующей ошибки квантования на выходе структуры каскадного программирования.

3. Рис. 3.8, в:

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_1|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} K_0 d_{K2} [l] + |\epsilon_2|_{\max} K_0 + |\epsilon_0|_{\max} = 3,121\delta. \quad (3.54)$$

4. Рис. 3.8, г:

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_2|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} K_0 d_{K1} [l] + |\epsilon_1|_{\max} K_0 + |\epsilon_0|_{\max} = 2,304\delta. \quad (3.55)$$

5. Рис. 3.8, д:

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_1|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} K_0 d_{K2} [l] + |\epsilon_0|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K2} [l] + |\epsilon_2|_{\max} = 4,404\delta. \quad (3.56)$$

6. Рис. 3.8, е:

$$|r_u|_{\max} = |\epsilon_2|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} K_0 d_{K1} [l] + |\epsilon_0|_{\max} \sum_{l=0}^{\infty} d_{K1} [l] + |\epsilon_1|_{\max} = 2,718\delta. \quad (3.57)$$

Сравнивая величины результирующих ошибок квантования, вычисленные по формулам (3.51), (3.53), (3.54)—(3.57), заключаем, что при каскадном программировании передаточной функции (3.40) наилучшим вариантом последовательного взаимного расположения элементарных звеньев является схема, представленная на рис. 3.8.г.

Наконец, проведенный расчет показывает, что для структуры параллельного программирования, в которой элементарные звенья реализованы с помощью структур П2, величина максимальной ошибки округления на выходе цифрового фильтра с передаточной функцией (3.40) наименьшая, а именно: $|r_u|_{\max} = 1,875\delta$.

Второй способ расчета

Предположим, что ошибки округления, возникающие при умножении переменных на коэффициенты передаточной функции фильтра, принимают максимальные, одинаковые значения $\delta/2$. При этом результирующая ошибка на выходе фильтра с заданной структурой может быть оценена его реакцией в установившемся режиме на ступенчатые воздействия:

$$r_i[k] = \delta 1[k]/2, \quad (3.58)$$

$$l[k] = \begin{cases} 0 & \text{при } k < 0; \\ 1 & \text{при } k \geq 0; \end{cases}$$

приложенные к выходам ветвей графа фильтра (рис. 3.1,а). Очевидно, это эта реакция будет характеризовать максимальную величину результирующей ошибки квантования.

Для оценки максимальной ошибки $r_{u \text{ макс}}$ на выходе структуры с многомерным входом воспользуемся выражением (3.2). Z-преобразование результирующего воздействия (3.1) при учете (3.58) равно

$$r(z) = (m + n + 1) \frac{\delta}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Применяя теорему о конечном значении [20] к уравнению (3.2) и используя последнее соотношение, получаем

$$r_{u \text{ макс}} = \lim_{z \rightarrow 0} [(1 - z^{-1}) r_u(z)] = \frac{m + n + 1}{\left| 1 + \sum_{i=1}^m b_i \right|} \frac{\delta}{2}. \quad (3.59)$$

Аналогичным путем, используя уравнение (3.6), находим формулу для оценки максимальной ошибки квантования на выходе структуры с многомерным входом:

$$r_{u \text{ макс}} = \left(m + 1 + n \left| \sum_{i=0}^m a_i \right| \left| 1 + \sum_{i=1}^n b_i \right| \right) \frac{\delta}{2}. \quad (3.60)$$

Формулы (3.59) и (3.60) позволяют сравнить между собой структуры с многомерным входом и многомерным выходом по величине максимального значения результирующей ошибки квантования.

Обозначим

$$D(z) = \left(\sum_{i=0}^m a_i z^{-i} \right) \left/ \left(1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i} \right) \right. = A(z)/B(z).$$

Тогда условие превышения максимальной ошибки квантования на выходе структуры с многомерным входом над суммарной максимальной ошибкой на выходе

структуры с многомерным выходом состоит в выполнении неравенства

$$\frac{m+n+1}{|B(1)|} > m+1 + \frac{n|A(1)|}{|B(1)|},$$

которое удобно привести к следующему виду:

$$|B(1)| < -\frac{n}{m+1} |A(1)| + \frac{m+n+1}{m+1}. \quad (3.61)$$

Геометрическая интерпретация неравенства (3.61) дана на рис. 3.9. Если значения $A(1)$ и $B(1)$ лежат внутри заштрихованной области, то более предпочтительной для реализации цифрового фильтра оказывается структура с многомерным выходом (рис. 2.12).

Второй способ расчета максимальных значений результирующей ошибки квантования значительно проще первого, поскольку нет необходимости определять весовые функции фильтра и отдельных его звеньев. Однако этот метод, вообще говоря, дает заниженные значения максимальной ошибки по сравнению со значениями, полученными по первому методу

3.3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ ОШИБКИ ОКРУГЛЕНИЯ

В большинстве практически интересных случаев ошибки округления, подобно ошибкам квантования в АЦП, имеют случайный характер. Поэтому результи-

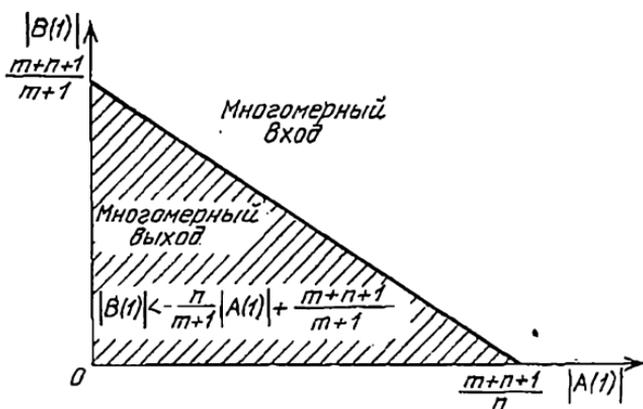


Рис. 3.9. Сравнение структур с многомерным входом и многомерным выходом по величине максимальной результирующей ошибки квантования.

рующую ошибку на выходе цифрового фильтра, обусловленную округлением, целесообразно оценивать с помощью ее среднеквадратичного значения.

Вероятностные характеристики шума, возникающего при округлении результатов умножения переменной величины на коэффициент, обычно считаются аналогичными вероятностным характеристикам шума квантования в АЦП. В § 1.6 было показано, что время корреляции шума квантования пренебрежимо мало по сравнению со временем корреляции квантуемого сигнала, если отношение эффективного значения сигнала σ к шагу квантования δ превышает 0,5, т. е. когда сигнал квантуется более чем тремя уровнями. Поэтому на практике в подавляющем большинстве случаев, учитывая процесс квантования во времени, можно считать (с большой степенью точности) шум квантования, возникающий при округлении, дискретным белым шумом.

Распределение шума округления принято считать, как и распределение шума квантования в АЦП, равномерным на интервале $\{-\delta/2, \delta/2\}$ с корреляционной функцией (1.66) и дисперсией $\overline{r_i^2[k]} = \delta^2/12$. Из формулы (1.69) для взаимной корреляционной функции шума квантования и квантуемого сигнала следует, что практически корреляция между ними отсутствует. Аналогично, некоррелированными можно считать шум округления в i -й ветви и переменную в узле на входе i -й ветви.

Учитывая вышесказанное, необходимо отметить следующее обстоятельство. В одной из последних работ [40] обращено внимание на то, что величины ошибки округления нельзя представлять непрерывными величинами; они являются дискретными в силу дискретности произведения двух чисел, содержащих, например, n и m двоичных единиц соответственно. Следовательно, нельзя, строго говоря, считать ошибку округления равномерно распределенной в диапазоне $\{-\delta/2, \delta/2\}$. Правильнее полагать, что все возможные дискретные значения ошибки округления имеют одинаковую вероятность. Используя последнее положение, несложно получить следующую формулу для дисперсии ошибки округления [40]:

$$\overline{r_i^2} = \frac{\delta}{6} \left[\frac{\delta}{2} + 2^{-(m+n)} \right] \quad (3.62)$$

при $\delta = 2^{-l}$, где l — число разрядов в округленном произведении после запятой (рассматривается случай с фик-

сированной запятой); m, n — количество разрядов перемножаемых чисел после запятой.

При $m=n=l$ имеем

$$\overline{r_i^2} = (\delta/6)(\delta/2 + 2^{-2m}), \quad (3.62a)$$

где $\delta = 2^{-m}$.

Если в (3.62), (3.62a) устремить m к бесконечности, то получим выражение для дисперсии ошибки округления $\overline{r_i^2} = \delta^2/12$, выведенное ранее для случая равномерного распределения плотности вероятности ошибки. При $m=5$ $2^{-2m} \approx 0,06\delta/2$, а при $m=8$ $2^{-2m} < 0,01\delta/2$, т. е. поправка 2^{-2m} обычно мала по сравнению с $\delta/2$.

В дальнейшем выводятся формулы для расчета дисперсий результирующих ошибок округления на выходе различных структур цифрового фильтра, в которые множителем входит дисперсия ошибки округления от одной операции умножения, принимаемая равной $\delta^2/12$. Эти формулы, очевидно, можно использовать и тогда, когда число разрядов в цифровом фильтре относительно мало, например $m=3,4$. В последнем случае в соответствующих формулах вместо множителя $\delta^2/12$ следует подставить выражение (3.62) или (3.62a).

Структура с многомерным входом

Результирующее случайное воздействие $r[k]$, приложенное к выходу последовательности элементов памяти в структуре с многомерным входом (рис. 3.1) и равное в соответствии с формулой (3.1) сумме $(m+n+1)$ дискретных белых шумов $r_i[k]$, является также дискретным белым шумом с дисперсией

$$\overline{r^2} = \sum_{i=0}^{m+n+1} \overline{r_i^2} = (m+n+1) \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.63)$$

Если учесть, что спектральная плотность дискретного белого шума $\Phi_r(z)$, как известно, равна его дисперсии, то, воспользовавшись выражением (3.2), можно написать следующую формулу для дискретной спектральной плотности результирующей ошибки на выходе фильтра:

$$\Phi_{r_u}(z) = \frac{1}{B(z)B(z^{-1})} \Phi_r(z) = \frac{m+n+1}{B(z)B(z^{-1})} \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.64)$$

Дисперсия результирующей ошибки определяется при этом по формуле (1.20):

$$\overline{r_u^2} = C_1 (m + n + 1) \frac{\delta^2}{12}, \quad (3.65)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{zB(z)B(z^{-1})}. \quad (3.66)$$

Значение интеграла по контуру $|z|=1$ вида

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} Y(z)Y(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (3.67)$$

при сравнительно невысоких порядках устойчивой передаточной функции может быть определено непосредственно через коэффициенты полиномов числителя и знаменателя [33]:

$$Y(z) = \frac{a_l z^{-l} + a_{l-1} z^{-(l-1)} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_l z^{-l} + b_{l-1} z^{-(l-1)} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}.$$

Применение подобного метода делает ненужной сложную процедуру вычисления интеграла (3.67) по методу вычетов, при котором обязательным является этап определения полюсов подынтегрального выражения.

В приложении 2 приведены формулы для вычисления интеграла I при $l=1$, $l=2$, $l=3$ в развернутой форме, заимствованные из [33]. С помощью простых алгебраических операций можно быстро определить, используя формулу (3.65), среднеквадратичное значение ошибки округления на выходе структуры с многомерным входом.

Структура с многомерным выходом

Для определения дисперсии воспользуемся формулой (3.6) и соотношениями (3.3), (3.4).

Результирующие воздействия r_α и r_β (рис. 3.2) взаимно независимы. Поэтому дисперсия результирующей ошибки квантования равна сумме дисперсий воздействия r_α и реакции фильтра на воздействие r_β ; последнюю обозначим через ϵ .

В соответствии с (3.3) дисперсия воздействия r_α равна

$$\overline{r_\alpha^2} = \sum_{i=0}^m \overline{r_i^2} = (m + 1) \frac{\delta^2}{12}.$$

Дисперсия воздействия r_β равна

$$\overline{r_\beta^2} = \sum_{i=1}^n \overline{r_i^2} = n \frac{\delta^2}{12}.$$

Тогда спектральная плотность реакции ϵ фильтра на случайное воздействие r_β есть

$$\Phi_\epsilon(z) = D(z) D(z^{-1}) n \delta^2 / 12,$$

а дисперсия определяется интегралом

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{n \delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} D(z) D(z^{-1}) \frac{dz}{z}.$$

Среднеквадратичное значение результирующей ошибки округления в структуре с многомерным выходом, таким образом, будет определяться следующей формулой:

$$\overline{r_u^2} = \overline{r_\alpha^2} + C_2 \overline{r_\beta^2} = (m + 1 + n C_2) \delta^2 / 12, \quad (3.68)$$

где

$$C_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{A(z) A(z^{-1}) dz}{B(z) B(z^{-1}) z}. \quad (3.69)$$

Формулы (3.65) и (3.68) позволяют сравнивать структуры с многомерным входом и многомерным выходом по величине среднеквадратичного значения результирующей ошибки округления. Если

$$(m + n + 1) C_1 < C_2 n + m + 1, \quad (3.70)$$

то структура с многомерным входом может рассматриваться как более предпочтительная по сравнению со структурой с многомерным выходом. При обратном знаке неравенства (3.70) лучшей будет вторая структура.

Пример 3.2. Найдем величины дисперсий результирующих ошибок квантования на выходе цифрового фильтра с передаточной функцией (3.40) для двух структур его реализации: с многомерным входом и многомерным выходом.

Для определения дисперсии результирующей ошибки на выходе структуры с многомерным входом воспользуемся формулами (3.65), (3.66). Получим

$$\overline{r_u^2}[k] = \frac{5}{12} \delta^2 \frac{1}{2\pi j} \times \\ \times \oint_{|z|=1} \frac{dz}{(z - p_1)(z - p_2)(z^{-1} - p_1)(z^{-1} - p_2)z}$$

Знание полюсов p_1, p_2 передаточной функции позволяет применить для вычисления интеграла метод вычетов; при этом интеграл равен сумме вычетов подынтегрального выражения в точках $z=p_1, z=p_2$.

В результате найдем

$$\begin{aligned} \overline{r_u^2} [k] &= \frac{5\delta^2}{12} \sum_{\substack{z=p_1 \\ z=p_2}} \operatorname{Res} \frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)(1-p_1z)(1-p_2z)} = \\ &= \frac{5\delta^2}{12} \left[\frac{p_1}{(p_1-p_2)(1-p_1^2)(1-p_1p_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_2}{(p_2-p_1)(1-p_1p_2)(1-p_2^2)} \right]. \end{aligned}$$

После подстановки численных значений $p_1=-0,05; p_2=-0,516$ получаем

$$\overline{r_u^2} = 7,2\delta^2/12. \quad (3.71)$$

Дисперсия результирующей ошибки округления в структуре с многомерным выходом, реализующей передаточную функцию (3.40), определяется по формулам (3.68) и (3.69), если в них подставить передаточную функцию в виде (3.46):

$$\begin{aligned} \overline{r_u^2} &= 3(\delta^2/12) + 2(\delta^2/12)(1/2\pi j) \times \\ &\times \oint_{|z|=1} \frac{K_0(z-z_1)(z-z_2)(z^{-1}-z_1)(z^{-1}-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)(z^{-1}-p_1)(z^{-1}-p_2)z} dz. \end{aligned}$$

Применяя метод вычетов, получаем

$$\begin{aligned} \overline{r_u^2} &= \frac{\delta^2}{4} + \frac{K_0^2\delta^2}{6} \sum_{\substack{z=p_1, \\ z=p_2, \\ z=0}} \operatorname{Res} \frac{(z-z_1)(z-z_2)(1-z_1z)(1-z_2z)}{(z-p_1)(z-p_2)(1-p_1z)(1-p_2z)z} = \\ &= \frac{\delta^2}{4} + \frac{K_0\delta^2}{6} \left[\frac{(p_1-z_1)(p_1-z_2)(1-z_1p_1)(1-z_2p_1)}{(p_1-p_2)(1-p_1^2)(1-p_1p_2)p_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p_2-z_1)(p_2-z_2)(1-z_1p_2)(1-z_2p_2)}{(p_2-p_1)(1-p_1p_2)(1-p_2^2)p_2} + \frac{z_1z_2}{p_1p_2} \right]. \quad (3.72) \end{aligned}$$

Если подставить в это выражение численные значения: $K_0=0,636; z_1=0,0185; z_2=0,135; p_1=0,05; p_2=-0,516$, то получим

$$\overline{r_u^2} = 3\delta^2/12 + 1,38\delta^2/12 = 4,38\delta^2/12. \quad (3.73)$$

Сравнение (3.71) и (3.73) показывает, что при реализации передаточной функции (3.40) фильтра использование структуры с многомерным выходом оказывается более целесообразно, чем использование структуры с многомерным входом.

Структура параллельного программирования

Выведем сначала формулы для определения средне-квадратичного значения результирующих ошибок округления на выходе элементарного параллельного звена для двух структур его реализации — $П1$ и $П2$.

На основании соотношения (3.7) легко получить следующую формулу для корреляционной функции ошибки r_{ui} на выходе структуры $П1$:

$$R_{r_{ui}}[k] = \frac{\delta^2}{6} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z}{z - p_i} \frac{z^{-1}}{z^{-1} - p_i} z^{k-1} dz.$$

Интеграл по замкнутому контуру равен вычету подынтегральной функции в полюсе $z = p_i$, умноженному на $2\pi j$. Получаем

$$R_{r_{ui}}[k] = \frac{\delta^2}{6} \frac{z^{k-1}}{z^{-1} - p_i} \Big|_{z=p_i} = \frac{\delta^2}{6} \frac{p_i^k}{1 - p_i^2}. \quad (3.74)$$

В устойчивом цифровом фильтре $|p_i| < 1$. Поэтому корреляционная функция результирующей ошибки квантования с ростом k представляет собой затухающую функцию, монотонную при $p_i > 0$ и колебательную при $p_i < 0$. Полагая в (3.74) $k=0$, получаем формулу для определения дисперсии результирующей ошибки округления на выходе структуры $П1$:

$$\overline{r_{ui}^2} = \frac{2}{1 - p_i^2} \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.75)$$

Корреляционная функция результирующей ошибки округления на выходе структуры $П2$ легко определяется из соотношения (3.9). Учитывая, что корреляционная функция суммы независимых случайных процессов $r_{1i}[k]$ и реакции на $r_{2i}[k]$ равна сумме корреляционных функций этих процессов и определяя корреляционную функцию реакции структуры $П2$ на воздействие $r_{2i}[k]$ подобно тому, как было сделано для структуры $П1$, найдем

$$R_{r_{ui}}[k] = \frac{\delta^2}{12} \delta_{k,0} + \frac{\delta^2}{12} \frac{f_i^2 p_i^k}{1 - p_i^2}, \quad (3.76)$$

где $\delta_{k,0}$ — дельта-функция Кронекера.

Среднеквадратичное значение результирующей ошибки округления на выходе структуры П2 равно значению (3.76) при $k=0$, т. е.

$$\overline{r_{ii}^2} = (1 + f_i^2 / (1 - p_i^2)) \delta^2 / 12. \quad (3.77)$$

Из выражений (3.75) и (3.77) следует, что если для i -го элементарного параллельного звена выполняется неравенство

$$2 / (1 - p_i^2) < 1 + f_i^2 / (1 - p_i^2),$$

которое приводится к простому виду

$$f_i^2 - p_i^2 > 1, \quad (3.78)$$

то это звено следует реализовать с помощью структуры П1, поскольку она обеспечивает в данном случае меньшую величину среднеквадратичного значения результирующей ошибки. При обратном знаке неравенства более предпочтительной оказывается структура П2.

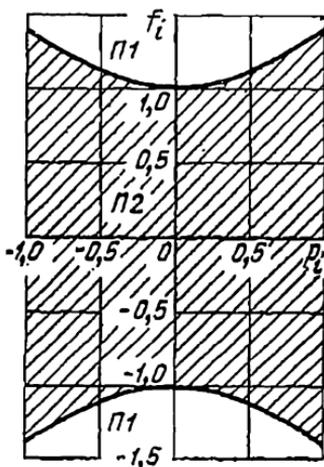


Рис. 3.10. Сравнение структур П1 и П2 по величине среднеквадратичной ошибки квантования.

Геометрическая интерпретация условия (3.78) для устойчивой передаточной функции элементарного звена $D_i(z)$ представлена на рис. 3.10. Вне заштрихованной области удовлетворяется неравенство (3.78). Граница области описывается уравнением гиперболы: $f_i^2 - p_i^2 = 1$.

Таким образом, при значениях f_i и p_i , лежащих внутри заштрихованной области, лучшей оказывается структура П2, а вне этой области — структура П1.

Сопоставляя рис. 3.10 с рис. 3.6, можно заметить, что результаты сравнения структур П1 и П2 как по максимальному значению результирующей ошибки округления, так и по ее среднеквадратичному значению оказываются достаточно близкими.

Среднеквадратичное значение результирующей ошибки на выходе параллельной структуры реализации фильтра

$$\overline{r_u^2} = \frac{\delta^2}{12} + \sum_{i=1}^n \overline{r_{ui}^2} \quad (3.79)$$

Пример 3.3. Найдем дисперсию результирующей ошибки квантования на выходе структуры параллельного программирования передаточной функции (3.40) фильтра, которую можно представить в виде (3.42а).

С целью выбора структур реализации элементарных параллельных звеньев проверим выполнение неравенства (3.78). Для первого звена ($f_1=0,0043$; $p_1=-0,05$) имеем $f_1^2-p_1^2=0,000018-0,0025<1$. Второму звену ($f_2=-0,364$; $p_2=-0,516$) соответствует неравенство $f_2^2-p_2^2=0,132-0,264<1$. Следовательно, как первое, так и второе звено следует реализовать с помощью структуры П2.

Воспользовавшись формулой (3.77), получим

$$\overline{r_{u1}^2} = \left(1 - \frac{0,000018}{1 - (0,05)^2}\right) \frac{\delta^2}{12} = 1,007 \frac{\delta^2}{12},$$

$$\overline{r_{u2}^2} = \left(1 + \frac{0,132}{1 - (0,516)^2}\right) \frac{\delta^2}{12} = 1,179 \frac{\delta^2}{12}.$$

Дисперсия результирующей ошибки квантования на выходе структуры параллельного программирования

$$\overline{r_u^2} = (1 + 1,007 + 1,179) \delta^2/12 = 3,186\delta^2/12. \quad (3.80)$$

Сравнивая этот результат с дисперсиями ошибок квантования на выходе того же фильтра, но реализованного с помощью структур непосредственного программирования к многомерным входом (3.71) и многомерным выходом (3.73), видим, что структура параллельного программирования в данном случае обеспечивает наименьшую величину дисперсии результирующей ошибки квантования.

Структура каскадного программирования

Сравним сначала дисперсии результирующих ошибок округления ϵ_i , возникающих в i -м элементарном последовательном звене, реализуемом с помощью структур К1 (рис. 2.12,а) и К2 (рис. 2.12,б).

Идентичность выражений для Z-преобразования результирующих ошибок округления в структурах П1 (3.7) и К1 (3.10) указывает на равенство корреляционных функций и дисперсий этих ошибок. Поэтому корреляционная функция ошибки на выходе структуры К1

$$R_{\epsilon_i}[k] = (\delta^2/12) [2\rho_i^k / (1 - \rho_i^2)], \quad (3.81)$$

а дисперсия ошибки

$$\varepsilon_i^2 = [2/(1 - \rho_i^2)](\delta^2/i^2). \quad (3.82)$$

Из (3.11) следует формула для вычисления корреляционной функции ошибки на выходе структуры $K2$:

$$R_{\varepsilon_i}[k] = \frac{\delta^2}{12} \delta_{k,0} + \sum \operatorname{Res} \left[\frac{z - z_i}{z - \rho_i} \frac{z^{-1} - z_i}{z^{-1} - \rho_i} z^{k-1} \right] \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.83)$$

При $k=0$ определяются вычеты в полюсе $z = \rho_i$ и точке $z=0$. При $k=1, 2, 3, \dots$ и т. д. второй член выражения (3.83) равен вычету только в полюсе $z = \rho_i$. В результате находим

$$R_{\varepsilon_i}[k] = \begin{cases} \left(\frac{1 - 2z_i \rho_i + z_i^2}{1 - \rho_i^2} + 1 \right) \frac{\delta^2}{12} & \text{при } k=0, \\ \left[\frac{(\rho_i - z_i)(1 - \rho_i z_i)}{1 - \rho_i^2} \rho_i^{k-1} \right] \frac{\delta^2}{12} & \text{при } k=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.84)$$

Дисперсия результирующей ошибки квантования в структуре $K2$

$$\overline{\varepsilon_i^2} = \left(1 + \frac{1 - 2z_i \rho_i + z_i^2}{1 - \rho_i^2} \right) \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.85)$$

Сравнивая формулы (3.82) и (3.85), нетрудно видеть, что дисперсия результирующей ошибки квантования на выходе структуры $K1$ будет больше, чем на выходе структуры $K2$, если

$$z_i^2 - 2z_i \rho_i - \rho_i^2 < 0$$

или

$$(z_i - \rho_i)^2 < 2\rho_i^2.$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$|z_i - \rho_i| < \sqrt{2} |\rho_i|. \quad (3.86)$$

Геометрическая интерпретация последнего условия приведена на рис. 3.11. Если нуль и полюс элементарного звена лежат внутри заштрихованной области, то передаточная функция должна реализовываться с помощью структуры $K2$.

Среднеквадратичное значение результирующей ошибки квантования, приведенной к выходу цифрового филь-

тра, представляющего собой цепочку элементарных звеньев $D_i(z)$ (рис. 3.3), находится следующим образом. Сначала определяются спектральные плотности составляющих ошибок r_{ui} , представляющих собой реакции последовательностей звеньев $D_{i+1}(z)$, $D_{i+2}(z)$, ..., $D_n(z)$ на воздействия ε_i . Учитывая соотношение (3.12), найдем

$$\begin{aligned} \Phi_{r_{ui}}(z) &= \Phi_{\varepsilon_i}(z) \times \\ &\times \prod_{h=i+1}^n D_h(z) D_h(z^{-1}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

где $\Phi_{r_{ui}}$ — дискретная спектральная плотность ошибки r_{ui} .

Дисперсия составляющей ошибки

$$\overline{r_{ui}^2} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_{r_{ui}}(z) \frac{dz}{z}. \quad (3.88)$$

Поскольку составляющие ошибки r_{ui} ($i=0, 1, 2, \dots, n$) между собой не коррелированы, так как не коррелированы между собой вызывающие их воздействия ε_i , то дисперсия результирующей ошибки квантования на выходе фильтра

$$\overline{r_u^2} = \sum_{i=0}^n \overline{r_{ui}^2}. \quad (3.89)$$

Спектральная плотность воздействия ε_i равна

$$\Phi_{\varepsilon_i}(z) = R_{\varepsilon_i}(z) + R_{\varepsilon_i}(z^{-1}) - R_{\varepsilon_i}(0), \quad (3.90)$$

где

$$R_{\varepsilon_i}(z) = Z \{R_{\varepsilon_i}[k]\}, \quad R_{\varepsilon_i}(0) = \overline{\varepsilon_i^2}.$$

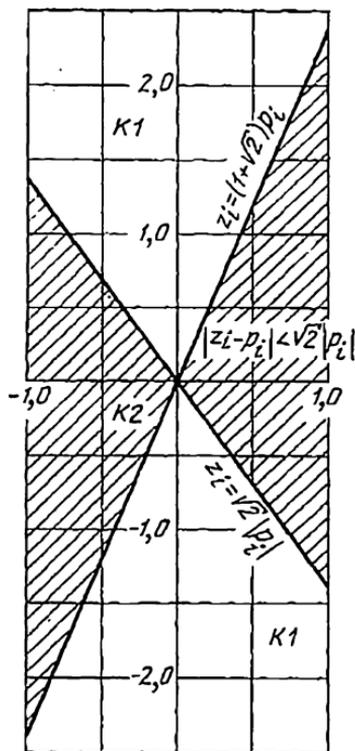


Рис. 3.11. Сравнение структур $K1$ и $K2$ по величине среднеквадратичной ошибки квантования.

Одностороннее Z -преобразование корреляционной функции (3.81) воздействия ε_i на выходе структуры $K1$

$$R_{\varepsilon_i}(z) = \frac{\delta^2}{6(1-p_i^2)} \sum_{k=0}^{\infty} p_i^k z^{-k}.$$

При любом $|z| > 1$ этот ряд представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{p_i}{z}\right)^k = \frac{1}{1-p_i z^{-1}}. \quad (3.91)$$

Поэтому

$$R_{\varepsilon_i}(z) = \frac{\delta^2}{6(1-p_i^2)} \frac{z}{z-p_i}.$$

Таким образом, подставляя полученное выражение в (3.90) и учитывая (3.82), получаем спектральную плотность воздействия ε_i на выходе структуры $K1$

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_i}(z) &= \frac{\delta^2}{6(1-p_i^2)} \left[\frac{z}{z-p_i} + \frac{1}{1-p_i z} - 1 \right] = \\ &= \frac{\delta^2}{6} \frac{z}{(z-p_i)(1-p_i z)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Z -преобразование корреляционной функции (3.84) ошибки на выходе структуры $K2$

$$\begin{aligned} R_{\varepsilon_i}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} R_{\varepsilon_i}[k] z^{-k} = \\ &= \overline{\varepsilon_i^2} + \frac{(p_i - z_i)(1 - p_i z_i)}{1 - p_i^2} \frac{\delta^2}{12} \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p_i}{z}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Приняв во внимание равенство (3.91), получим

$$R_{\varepsilon_i}(z) = \overline{\varepsilon_i^2} + \frac{(p_i - z_i)(1 - p_i z_i) \delta^2}{(1 - p_i^2) 12} \frac{1}{z - p_i}. \quad (3.93)$$

Спектральную плотность ошибки ε_i на выходе структуры $K2$ легко определить, если подставить (3.93) в соотношение (3.90):

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_i}(z) &= \overline{\varepsilon_i^2} + \frac{\delta^2 (p_i - z_i)(1 - p_i z_i)}{12(1 - p_i^2)} \left[\frac{1}{z - p_i} + \frac{z}{1 - p_i z} \right] = \\ &= \overline{\varepsilon_i^2} + \frac{\delta^2 (p_i - z_i)(1 - p_i z_i)}{12(1 - p_i^2)} \frac{1 - 2p_i z + z^2}{(z - p_i)(1 - p_i z)}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Пример 3.4. Вычислим дисперсию результирующей ошибки округления на выходе фильтра второго порядка с передаточной функцией (3.40), реализуемой с помощью структуры последовательного программирования. На рис. 3.8 представлены шесть вариантов последовательного соединения элементарных звеньев структуры, определяемые формой представления передаточной функции (3.46). Проверим неравенство (3.86). Для звена $D_1(z)$ ($p_1 = -0,05$; $z_1 = 0,0185$) получим

$$|z_1 - p_1| = |0,0185 + 0,05| = 0,0685 < 0,0708 = \sqrt{2} |p_1|,$$

а для звена $D_2(z)$ ($z_2 = 0,135$; $p_2 = -0,516$)

$$|z_2 - p_2| = |0,135 + 0,516| = 0,651 < 0,731 = \sqrt{2} |p_2|.$$

Следовательно, наилучшей структурой реализации обоих элементарных звеньев будет структура К2.

Согласно формуле (3.85)

$$\overline{\epsilon_1^2} = \left(1 + \frac{1 + 2 \cdot 0,0185 \cdot 0,05 + (0,0185)^2}{1 - (-0,05)^2} \right) \frac{\delta^2}{12} = 2,005 \frac{\delta^2}{12}, \quad (3.95)$$

$$\overline{\epsilon_2^2} = \left(1 + \frac{1 + 2 \cdot 0,135 \cdot 0,516 + (0,135)^2}{1 - (-0,516)^2} \right) \frac{\delta^2}{12} = 2,475 \frac{\delta^2}{12}. \quad (3.96)$$

Спектральные плотности воздействий ϵ_1 и ϵ_2 на основании (3.94) будут соответственно равны

$$\Phi_{\epsilon_1}(z) = 2,005 \frac{\delta^2}{12} - 0,069 \frac{\delta^2}{12} \frac{1 + 0,1z + z^2}{(z + 0,05)(1 + 0,05z)},$$

$$\Phi_{\epsilon_2}(z) = 2,475 \frac{\delta^2}{12} - 0,95 \frac{\delta^2}{12} \frac{1 + 1,032z + z^2}{(z + 0,516)(1 + 0,516z)}.$$

Спектральные плотности составляющих ошибок $r_{\mu 0}$, $r_{\mu 1}$, $r_{\mu 2}$ на выходе фильтра, обусловленных воздействиями ϵ_0 , ϵ_1 , ϵ_2 (рис. 3.8) соответственно, находятся по формуле (3.87). Так, например, для первого варианта последовательного соединения звеньев (рис. 3.8,а)

$$\Phi_{r_{\mu 0}}(z) = \frac{\delta^2}{12} \frac{(z - z_1)(z - z_2)(1 - z_1 z)(1 - z_2 z)}{(z - p_1)(z - p_2)(1 - p_1 z)(1 - p_2 z)}, \quad (3.97)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{r_{\mu 1}}(z) &= 2,005 \frac{\delta^2}{12} \frac{(z - z_2)(1 - z_2 z)}{(z - p_2)(1 - p_2 z)} - \\ &- 0,069 \frac{\delta^2}{12} \frac{1 + 0,1z + z^2}{(z + 0,05)(1 + 0,05z)} \frac{(z - z_2)(1 - z_2 z)}{(z - p_2)(1 - p_2 z)}; \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\Phi_{r_{\mu 2}}(z) = 2,475 \frac{\delta^2}{12} - 0,95 \frac{\delta^2}{12} \frac{1 + 1,032z + z^2}{(z + 0,516)(1 + 0,516z)}. \quad (3.99)$$

Подставив выражения (3.97)–(3.99) в формулу (3.88), найдем дисперсии составляющих ошибок на выходе фильтра:

$$\overline{r_{\mu 0}^2} = \frac{\delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{(z - z_1)(z - z_2)(1 - z_1 z)(1 - z_2 z)}{(z - p_1)(z - p_2)(1 - p_1 z)(1 - p_2 z)} \frac{dz}{z}.$$

Это выражение равно второму слагаемому в выражении (3.72), деленному на $2K_0^2$. Поэтому

$$\overline{r_{u0}^2} = \frac{1,38}{2(0,636)^2} \frac{\delta^2}{12} = 1,72 \frac{\delta^2}{12}; \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned} \overline{r_{u1}^2} &= 2,005 \frac{\delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{(z-z_2)(1-z_2z)}{(z-p_2)(1-p_2z)} \frac{dz}{z} - 0,069 \frac{\delta^2}{12} \frac{1}{2\pi j} \times \\ &\times \oint \frac{(1+0,1z+z^2)(z-z_2)(1-z_2z)}{(z-p_1)(1-p_1z)(z-p_2)(1-p_2z)} \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Вычисляя интегралы по контуру с помощью метода вычетов в полюсах p_1, p_2 и в точке $z=0$, получим

$$\begin{aligned} \overline{r_{u1}^2} &= 2,005 \frac{\delta^2}{12} \left[\frac{(p_2-z_2)(1-z_2p_2)}{(1-p_2^2)p_2} + \frac{z_2}{p_2} \right] - \\ &- 0,069 \frac{\delta^2}{12} \left[\frac{(1+0,1p_1+p_1^2)(p_1-z_2)(1-z_2p_1)}{(1-p_1^2)(p_1-p_2)(1-p_1p_2)p_1} + \right. \\ &\left. + \frac{(1+0,1p_2+p_2^2)(p_2-z_2)(1-z_2p_2)}{(p_2-p_1)(1-p_1p_2)(1-p_2^2)p_2} - \frac{z_2}{p_1p_2} \right]. \end{aligned}$$

Подставив значения полюсов и нулей и произведя арифметические вычисления, найдем

$$\overline{r_{u1}^2} = 4,370\delta^2/12. \quad (3.101)$$

Как видно из рис. 3.8, а, $\overline{r_{u2}^2} = \overline{s_2^2}$. Тогда, используя результат (3.96), получим

$$\overline{r_{u2}^2} = 2,475\delta^2/12. \quad (3.102)$$

Суммируя составляющие ошибки квантования (3.100)—(3.102), будем иметь на выходе первого варианта структуры последовательного программирования следующую величину суммарной дисперсии ошибки:

$$\begin{aligned} \overline{r_u^2} &= \overline{r_{u0}^2} + \overline{r_{u1}^2} + \overline{r_{u2}^2} = \\ &= (1,72 + 4,37 + 2,475) \delta^2/12 = 8,565\delta^2/12. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Аналогичным образом подсчитываются дисперсии результирующих ошибок округления на выходах остальных последовательных цепочек элементарных звеньев, изображенных на рис. 3.8,б—е. Результаты расчета приведены в табл. 3.1.

Из табл. 3.1 видно, что вариант г обеспечивает наименьшее значение дисперсии результирующей ошибки квантования $r_{u2}^2 = 2,864 \delta^2/12$ по сравнению с остальными вариантами структуры каскадного программирования. Кроме того, сопоставляя это значе-

Ошибки	Варианты					
	а	б	в	г	д	е
$\overline{r_{u0}^2}$	$1,72 \frac{\delta^2}{12}$	$1,72 \frac{\delta^2}{12}$	$1,0 \frac{\delta^2}{12}$	$1,0 \frac{\delta^2}{12}$	$1,568 \frac{\delta^2}{12}$	$2,475 \frac{\delta^2}{12}$
$\overline{r_{u1}^2}$	$4,37 \frac{\delta^2}{12}$	$2,005 \frac{\delta^2}{12}$	$1,765 \frac{\delta^2}{12}$	$0,814 \frac{\delta^2}{12}$	$1,765 \frac{\delta^2}{12}$	$2,005 \frac{\delta^2}{12}$
$\overline{r_{u2}^2}$	$2,475 \frac{\delta^2}{12}$	$2,589 \frac{\delta^2}{12}$	$1,0 \frac{\delta^2}{12}$	$1,05 \frac{\delta^2}{12}$	$2,475 \frac{\delta^2}{12}$	$1,05 \frac{\delta^2}{12}$
$\overline{r_u^2}$	$8,565 \frac{\delta^2}{12}$	$6,314 \frac{\delta^2}{12}$	$3,765 \frac{\delta^2}{12}$	$2,864 \frac{\delta^2}{12}$	$5,808 \frac{\delta^2}{12}$	$5,53 \frac{\delta^2}{12}$

ние со значениями ошибок, полученных в примерах 3.2 и 3.3, видим, что оно является наименьшим также и по сравнению с дисперсиями на выходе структур непосредственного и параллельного программирования.

Структуры X1 и X2

Формулы для вычисления дисперсии результирующей ошибки округления на выходе структуры X1 легко получить с помощью соотношений (3.14), (3.15), (3.18) и (3.19).

Спектральная плотность результирующей ошибки

$$\Phi_{r_u} [k] = W_{R1}(z) W_{R1}(z^{-1}) 3\delta^2/12 + W_{I1}(z) W_{I1}(z^{-1}) 3\delta^2/12.$$

Корреляционная функция

$$R_{r_u} [k] = \frac{\delta^2}{4} \frac{1}{2\pi j} \oint [W_{R1}(z) W_{R1}(z^{-1}) + W_{I1}(z) W_{I1}(z^{-1})] z^{k-1} dz.$$

При этом дисперсия результирующей ошибки округления на выходе структуры X1 определяется формулой

$$(\overline{r_u^2})_{X1} = \frac{\delta^2}{4} (C_R + C_I), \quad (3.104)$$

где

$$C_R = \frac{1}{2\pi j} \oint W_{R1}(z) W_{R1}(z^{-1}) \frac{dz}{z}; \quad (3.105)$$

$$C_I = \frac{1}{2\pi j} \oint W_{I1}(z) W_{I1}(z^{-1}) \frac{dz}{z}.$$

Подставляя в (3.105) передаточные функции (3.18), (3.19) и вычисляя интегралы, получаем

$$C_R = \frac{(1 + \gamma^2) + \alpha^2 (\gamma^2 - 3)}{(1 - \gamma^2)[(1 + \gamma^2) - 4\alpha^2]},$$

$$C_I = \frac{(1 + \gamma^2) \beta^2}{(1 - \gamma^2)[(1 + \gamma^2) - 4\alpha^2]},$$
(3.106)

где

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Используя формулы (3.104) и (3.106), после элементарного преобразования находим

$$\overline{(r_u^2)}_{X_I} = \frac{\delta^2}{4} \frac{1}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}. \quad (3.107)$$

Аналогично, из соотношений (3.20) и (3.21) следует выражение спектральной плотности результирующей ошибки квантования на выходе структуры X2:

$$\Phi_{r_u}(z) = [1 + W_{R2}(z) W_{R2}(z^{-1}) + W_{I2}(z) W_{I2}(z^{-1})] \frac{\delta^2}{6}.$$

Отсюда корреляционная функция ошибки

$$R_{r_u}[k] = \frac{\delta^2}{6} \frac{1}{2\pi j} \oint [1 + W_{R2}(z) W_{R2}(z^{-1}) + W_{I2}(z) W_{I2}(z^{-1})] z^{k-1} dz.$$

Дисперсия ошибки

$$\overline{(r_u^2)}_{X2} = R_{r_u}[0] = \frac{\delta^2}{6} (1 + C_R + C_I), \quad (3.108)$$

где

$$C_R = \frac{1}{2\pi j} \oint W_{R2}(z) W_{R2}(z^{-1}) \frac{dz}{z};$$
(3.109)

$$C_I = \frac{1}{2\pi j} \oint W_{I2}(z) W_{I2}(z^{-1}) \frac{dz}{z}.$$

В результате подстановки в (3.109) передаточных функций (3.24), (3.25) и вычисления интегралов получим

$$C_R = \frac{(1 + \gamma^2)(R^2 + \delta_1^2) - 4\alpha R \delta_1}{(1 - \gamma^2)[(1 + \gamma^2)^2 - 4\alpha^2]}, \quad (3.110)$$

$$C_I = \frac{(1 + \gamma^2)(I^2 + \delta_2^2) - 4\alpha I \delta_2}{(1 - \gamma^2)[(1 + \gamma^2)^2 - 4\alpha^2]},$$

где $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$; $\delta_1 = \alpha R + \beta I$; $\delta_2 = \alpha I - \beta R$.

Подставим выражение (3.110) в формулу (3.108). После преобразования получим следующую формулу для определения дисперсии результирующей ошибки квантования на выходе структуры X2:

$$\overline{(r_u^2)}_{X2} = \frac{\delta^2}{6} \left[1 + \frac{R^2 + I^2}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} \right]. \quad (3.111)$$

Сравнивая формулы (3.107) и (3.111), замечаем, что структура X1 более рациональна, чем структура X2, когда

$$R^2 + I^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) > 0,5. \quad (3.112)$$

Пример 3.5. Рассмотрим передаточную функцию

$$D(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 1,5z^{-1} + 0,65z^{-2}}, \quad (3.113)$$

которой соответствуют, как нетрудно убедиться, следующие значения параметров: $\alpha = -0,75$; $\beta = 0,296$; $R = 0,75$; $I = 1,04$.

Дисперсия результирующей ошибки округления на выходе структуры X1, реализующей передаточную функцию (3.113), определяется по формуле (3.107):

$$\overline{(r_u^2)}_{X1} = \frac{\delta^2}{4} \frac{1}{1 - [(0,75)^2 + (0,296)^2]} = 8,57 \frac{\delta^2}{12}.$$

Формула (3.111) позволяет вычислить дисперсию ошибки на выходе структуры X2:

$$\overline{(r_u^2)}_{X2} = \frac{\delta^2}{6} \left[1 + \frac{(0,75)^2 + (1,04)^2}{1 - [(0,75)^2 + (0,296)^2]} \right] = 11,4 \frac{\delta^2}{12}.$$

Если передаточную функцию (3.113) реализовать с помощью структуры непосредственного программирования с многомерным входом (мн. вх.), то среднеквадратичное значение результирующей ошибки квантования можно определить по формулам (3.65) и (3.66). Интеграл (3.66) можно выразить через коэффициенты передаточной функции второго порядка (см. приложение 2 при $l=2$). Тогда получим следующую формулу для расчета дисперсии ошибки квантования на выходе структуры X1, реализующей цифровой фильтр с передаточной функцией (3.113):

$$\overline{(r_u^2)}_{\text{мн. вх.}} = \frac{\delta^2}{3} \frac{1 + b_2}{(1 - b_2) [(1 + b_2)^2 - b_1^2]}. \quad (3.114)$$

Подставив численные значения коэффициентов, найдем

$$\overline{(r_u^2)}_{\text{мн. вх.}} = \frac{\delta^2}{3} \frac{1 + 0,65}{(1 - 0,65) [(0,65 + 1)^2 - (1,5)^2]} = 40 \frac{\delta^2}{12}.$$

Аналогично, на основании формул (3.68) и (3.69) нетрудно получить следующее выражение для дисперсии ошибки квантова-

ния на выходе структуры с многомерным выходом (мн. вых.) для фильтра второго порядка:

$$\left(\overline{r_u^2}\right)_{\text{мн. вых}} = \frac{\delta^2}{6} \left\{ 1 + \frac{(1 + b_2)(a_1^2 + a_2^2) - 2b_1a_1a_2}{(1 - b_2)[(1 + b_2)^2 - b_1^2]} \right\}. \quad (3.115)$$

Подставим в эту формулу значения коэффициентов передаточной функции (3.113). Получим

$$\begin{aligned} \left(\overline{r_u^2}\right)_{\text{мн. вых}} &= \frac{\delta^2}{6} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{(1 + 0,65)[(1,5)^2 + (0,5)^2] - 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{(1 - 0,65)[(1 + 0,65)^2 - (1,5)^2]} \right\} = \\ &= \frac{\delta^2}{6} (1 + 11,46) = 24,92 \frac{\delta^2}{12}. \end{aligned}$$

Таким образом, структура $X1$ (рис. 2.13,б) обеспечивает наименьшее значение дисперсии ошибки квантования, приведенной к выходу цифрового фильтра, по сравнению со структурой $X2$ (рис. 2.14,б), а также структурами с многомерным входом (рис. 2.10,а) и многомерным выходом (рис. 2.10,б).

3.4. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ РЕАЛИЗАЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Под *оптимальной структурой* реализации цифрового фильтра с заданной передаточной функцией $D(z)$ будем понимать такую структуру, у которой результирующая ошибка квантования, приведенная к выходу фильтра, имеет наименьшую величину по сравнению с результирующими ошибками квантования во всех других возможных структурах. Величину ошибки можно оценивать, как было показано в предыдущих параграфах, ее наибольшим возможным значением, а также среднеквадратичным значением; последняя в большинстве случаев более предпочтительна, в частности, тогда, когда преобразуемый цифровым фильтром сигнал носит случайный характер. Очевидно, что оптимальная структура должна также содержать минимальное число операций умножения и запоминания на такт.

На сегодняшний день не представляется возможным предложить аналитический метод нахождения оптимальной структуры цифрового фильтра. Однако эту задачу можно решить методом сравнения различных вариантов структур по величине дисперсии результирующей ошибки квантования.

Как видно из материала гл. 2, количество таких вариантов структур реализации цифрового фильтра с заданной передаточной функцией $D(z)$, у которых число операций умножения и запоминания на такт примерно одинаково и минимально, существенно ограничено. Причем дополнительные ограничения на количество вариантов накладывает характер полюсов и нулей передаточной функции.

Если все нули и полюса вещественны и простые, то остаются только четыре структуры, которые необходимо сравнить между собой по величине результирующей ошибки квантования: структуры непосредственного программирования с многомерным входом (рис. 2.8) и многомерным выходом (рис. 2.9,б), структура параллельного программирования (рис. 2.2,а, 2.11) и структура каскадного программирования (рис. 2.3,а, 2.12). При построении структуры параллельного программирования необходимо воспользоваться условием (3.78) и его графическим представлением на рис. 3.10 и с их помощью выбрать наилучшую из двух возможных структур построения каждого элементарного параллельного звена, $П1$ либо $П2$. Одна часть звеньев при этом может быть реализована с помощью структуры $П1$, а другая — с помощью структуры $П2$. Аналогичным образом, но только на основании соотношения (3.86) и рис. 3.11 выбираются структуры $К1$ либо $К2$ для каждого элементарного последовательного звена при каскадном программировании.

Рассчитав по формулам (3.65), (3.66), (3.68), (3.69), (3.75), (3.77), (3.79), а также (3.81), (3.84), (3.87) — (3.94) среднеквадратичные значения результирующих ошибок квантования на выходах указанных выше четырех структур и сравнив эти значения, целесообразно принять за оптимальную ту структуру, у которой среднеквадратичное значение ошибки квантования наименьшее.

Необходимо заметить, что выбранная таким образом структура может оказаться оптимальной в указанном выше смысле только при определенных параметрах передаточной функции. При других значениях параметров наименьшую ошибку квантования может иметь другая структура.

В том случае, когда некоторые полюсы и нули передаточной функции оказываются комплексными, методи-

ка выбора оптимальной структуры в общем аналогична рассмотренному случаю. Однако число вариантов реализации элементарных звеньев в структурах параллельного и каскадного программирования увеличивается. При параллельном программировании звенья с вещественными полюсами реализуются структурами $П1$ либо $П2$. Каждой паре комплексно-сопряженных полюсов соответствует звено второго порядка, которое может быть реализовано с помощью одной из четырех структур: структуры с многомерным входом, структуры с многомерным выходом либо структур $X1$ и $X2$.

После сравнения дисперсий результирующих ошибок квантования в этих структурах (см. пример 3.5) для каждого элементарного звена второго порядка выбирается структура с наименьшей величиной ошибки на ее выходе. В варианте структуры каскадного программирования элементарные последовательные звенья с вещественными полюсами и нулями реализуются структурами $K1$ или $K2$, а звенья вида

$$D_i(z) = \frac{a_{i0} + a_{i1}z^{-1} + a_{i2}z^{-2}}{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}},$$

у которых комплексными являются либо нули или полюсы, либо одновременно и полюсы и нули, могут быть реализованы с помощью одной из двух структур второго порядка: структуры с многомерным входом или структуры с многомерным выходом. После того как структуры реализации элементарных звеньев при параллельном и каскадном программировании выбраны, так же как и ранее, вычисляются среднеквадратичные значения результирующих ошибок квантования на выходах структур реализации передаточной функции $D(z)$ и сравниваются между собой. Структура с наименьшей результирующей ошибкой принимается за оптимальную.

3.5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТИРУЮЩИХ ОШИБОК КВАНТОВАНИЯ

В данном параграфе приведены некоторые результаты экспериментальной проверки теоретических положений, лежащих в основе описанных выше методов оценки результирующих ошибок квантования. Эксперимент состоял в моделировании на ЭВМ «Минск-22» процесса квантования по уровню сигналов при прохождении их через цифровые фильтры первого и второго порядка, реализуемые с помощью различных структур.

На вход моделируемого фильтра заданной структуры подавалась дискретная выборка из сигнала

$$e(t) = A \sum_{i=1}^4 B_i \sin n_i \omega t, \quad (3.116)$$

где A , B_i , n_i , ω — константы.

В соответствии с заданным алгоритмом реализации фильтра вычислялись дискретные значения выходного сигнала $u(kT)$ с точностью до ошибки, определяемой конечной длиной разрядной сетки ЭВМ «Минск-22» (семь десятичных знаков мантиссы). Параллельно по тому же алгоритму определялись значения выходного сигнала $u^*(kT)$ при заданном шаге δ квантования всех промежуточных результатов вычислений внутри структуры фильтра*).

Мгновенные значения результирующей ошибки квантования на каждом шаге kT определялись как разности величин $u(kT)$ и $u^*(kT)$:

$$r[k] = u[k] - u^*[k]. \quad (3.117)$$

Поскольку среднее значение ошибки равно нулю, ее дисперсия находилась по формуле

$$\overline{r^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r^2[k], \quad (3.118)$$

где N — общее число выборок сигнала, используемых в эксперименте.

Моделирование цифрового фильтра первого порядка

Цифровой фильтр первого порядка с дискретной передаточной функцией

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1}}$$

и соответствующим ей разностным уравнением

$$u[k] = a_0 e[k] + b_1 u[k-1] \quad (3.119)$$

реализуется с помощью структуры с многомерным входом либо структуры с многомерным выходом.

Рассмотрим алгоритм моделирования структуры с многомерным входом и вычисления результирующей ошибки квантования на k -м шаге.

Пусть в памяти ЭВМ хранятся значения $b_1 u[k-1]$, $(b_1 u^*[k-1])^*$ а также сумма квадратов значений результирующей ошибки на $(k-1)$

шагах:
$$\sum_{i=1}^{k-1} r^2(i).$$

* Значком * здесь и в дальнейшем будем обозначать операцию квантования с заданным шагом δ . Тогда C^* — квантованное значение величины C .

Тогда последовательно можно вычислить

$$a_0 e^* [k], (a_0 e^* [k])^*,$$

$$u [k] = a_0 e^* [k] + b_1 u [k-1],$$

$$u^* [k] = (a_0 e^* [k])^* + (b_1 u^* [k-1])^*$$

в соответствии с уравнением (3.119).

Ошибка $r [k] = u [k] - u^* [k]$; $r \Sigma_k = \Sigma_{k-1} + r^2 [k]$.

Для подготовки вычислений на $(k+1)$ -м шаге определяются величины $b_1 u [k]$ и $(b_1 u^* [k])^*$, после чего цикл вычислений повторяется. На N -м шаге вычисляется дисперсия результирующей ошибки квантования по формуле (3.118).

Таблица 3.2

Сравнение экспериментальных и расчетных данных

δ	a_1	b_1	Структура с многомерным входом		Структура с многомерным выходом	
			$(\overline{r^2})_{\text{мод}} / \frac{\delta^2}{12}$	$(\overline{r^2})_{\text{расч}} / \frac{\delta^2}{12}$	$(\overline{r^2})_{\text{мод}} / \frac{\delta^2}{12}$	$(\overline{r^2})_{\text{расч}} / \frac{\delta^2}{12}$
0,01	0,75	5,53	4,34	4,56	75,4	70,5
0,01	0,57	5,53	3,04	2,96	46,5	45,4
0,01	0,35	5,53	2,35	2,28	37,0	35,3
0,01	0,25	5,53	2,34	2,14	35,5	33,2
0,01	0,10	5,53	1,92	2,02	31,5	31,7
0,01	0,57	7,53	3,28	2,96	86,0	84,5
0,01	0,57	2,53	3,10	2,96	10,5	9,7
0,01	0,57	1,15	2,84	2,96	3,04	2,23
0,01	0,57	0,55	2,65	2,96	1,04	0,73
0,1	0,57	1,15	2,77	2,96	2,71	2,23
0,1	0,57	2,53	2,85	2,96	9,13	9,7
0,1	0,75	5,53	4,71	4,56	62,2	70,5
0,1	0,57	5,53	2,84	2,96	41,2	45,5
0,1	0,35	5,53	2,35	2,28	36,6	35,3
0,1	0,25	5,53	2,27	2,14	34,0	33,2
0,1	0,10	5,53	1,92	2,02	31,9	31,7

В табл. 3.2 приведены значения дисперсий результирующих ошибок квантования на выходе структуры с многомерным входом, найденные посредством моделирования, а также расчетным способом по формуле

$$\overline{r^2} = [\beta / (1 - b_1^2)] \delta^2 / 12. \quad (3.120)$$

Моделирование проводилось при входном сигнале (3.116) с параметрами: $A=1,0$; $B_1=1,0$; $B_2=0,5$; $B_3=0,7$; $B_4=0,3$; $\omega=5 \text{ с}^{-1}$; $n_1=1,0$; $n_2=3,0$; $n_3=7,0$; $n_4=9,0$. Период дискретности сигнала $T=0,126 \text{ с}$. Общее число выборок сигнала, использованных в формуле (3.118), $N=300$.

При моделировании структуры с многомерным выходом применяется следующий алгоритм. После вычислений на $(k-1)$ -м шаге в памяти ЭВМ хранятся значения $b_1 v [k-1]$ и $(b_1 v^* [k-1])^*$, которые используются в следующих вычислениях на k -м шаге:

$$v [k] = e^* [k] + b_1 v [k-1],$$

$$v^* [k] = e^* [k] + (b_1 v^* [k-1])^*,$$

$$u [k] = a_0 v [k], \quad u^* [k] = (a_0 v^* [k])^*, \quad r [k] = u [k] - u^* [k];$$

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} + r^2 [k].$$

На k -м шаге в память ЭВМ заносятся вычисленные величины $b_1 v [k]$ и $(b_1 v^* [k])^*$. На $(k+1)$ -м шаге цикл повторяется.

Результаты расчета дисперсии ошибки с помощью модели и по формуле

$$\bar{r}^2 = (a_0^2 + 2 - 2b_1) / (1 - b_1^2) \quad (3.121)$$

также приводятся в табл. 3.2.

Из таблицы видно, что значения дисперсий результирующих ошибок квантования на выходе фильтра первого порядка, полученные с помощью моделирования $(\bar{r}^2)_{\text{мод}}$, а также расчетным способом по формулам (3.120) и (3.121), достаточно хорошо совпадают. Это позволяет сделать вывод о том, что гипотеза, положенная в основу рассмотренных в предыдущих параграфах методов расчета результирующих ошибок округления и позволяющая рассматривать ошибку округления как дискретный белый шум с равномерным распределением в диапазоне $\{-\delta/2, \delta/2\}$, вполне справедлива.

Моделирование цифрового фильтра второго порядка

Аналогичным образом проводилось моделирование цифрового фильтра второго порядка с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad (3.122)$$

для четырех вариантов структур его реализации: с многомерным входом, многомерным выходом (рис. 2.10), структуры $X1$ (рис. 3.4) и $X2$ (рис. 3.5).

Так же как и в предыдущем случае, на вход подавался сигнал (3.116), а дисперсии результирующих ошибок квантования вычислялись в соответствии с соотношениями (3.117) и (3.118). Найденные таким образом дисперсии ошибок на выходах каждой из указанных структур совпадали с точностью до 15% с соответствующими значениями ошибок, рассчитанных по формулам, выведенным в § 3.3. Это еще раз подтверждает правильность приведенной выше методики теоретической оценки результирующих ошибок квантования, вызванных округлением. Ниже приводятся алгоритмы моделирования четырех структур реализации цифрового фильтра второго порядка.

Структура с многомерным входом (рис. 2.10,а). Для нахождения решения разностного уравнения

$$u[k] = a_1 e^* [k-1] + a_2 e^* [k-2] - b_{1u} [k-1] - b_{2u} [k-2] \quad (3.123)$$

на k -м и $(k+1)$ -м шагах необходимо иметь в памяти ЭВМ следующие вычисленные ранее значения:

$$\begin{aligned} & a_1 e^* [k-1], (a_1 e^* [k-1])^*, a_2 e^* [k-1], (a_2 e^* [k-1])^*, \\ & a_2 e^* [k-2], (a_2 e^* [k-2])^*, b_{1u} [k-1], (b_{1u} [k-1])^*, \\ & b_{2u} [k-1], (b_{2u} [k-1])^*, b_{2u} [k-2], (b_{2u} [k-2])^*. \end{aligned}$$

Значение выходного сигнала на k -м шаге с нулевой результирующей ошибкой квантования определяется по формуле (3.123). Соответственно с учетом квантования

$$u^* [k] = (a_1 e^* [k-1])^* + (a_2 e^* [k-2])^* - (b_{1u} [k-1])^* - (b_{2u} [k-2])^*.$$

Затем по формуле (3.117) вычисляется мгновенное значение результирующей ошибки квантования, после чего в память ЭВМ записываются вычисленные величины:

$$\begin{aligned} & a_1 e^* [k], (a_1 e^* [k])^* \text{ вместо } a_1 e^* [k-1], (a_1 e^* [k-1])^*; \\ & a_2 e^* [k], (a_2 e^* [k])^* \text{ вместо } a_2 e^* [k-2], (a_2 e^* [k-2])^*; \\ & b_{1u} [k], (b_{1u} [k])^* \text{ вместо } b_{1u} [k-1], (b_{1u} [k-1])^*; \\ & b_{2u} [k], (b_{2u} [k])^* \text{ вместо } b_{2u} [k-2], (b_{2u} [k-2])^*, \end{aligned}$$

необходимые для определения $u[k+1]$ и $u^*[k+1]$. Дисперсия ошибки найдется по формуле (3.118).

Структура с многомерным выходом (рис. 2.10,б). Перед вычислениями на k -м шаге память ЭВМ должна содержать значения:

$$\begin{aligned} & a_{1v} [k-1], (a_{1v} [k-1])^*; b_{1v} [k-1], (b_{1v} [k-1])^*, \\ & a_{2v} [k-1], (a_{2v} [k-1])^*, b_{2v} [k-1], (b_{2v} [k-1])^*, \\ & a_{2v} [k-2], (a_{2v} [k-2])^*, b_{2v} [k-2], (b_{2v} [k-2])^*, \end{aligned}$$

с помощью которых затем определяются величины

$$\begin{aligned} v [k] &= e^* [k] - b_{1v} [k-1] - b_{2v} [k-2], \\ v^* [k] &= e^* [k] - (b_{1v} [k-1])^* - (b_{2v} [k-2])^*, \\ u [k] &= a_{1v} [k-1] + a_{2v} [k-2], \\ u^* [k] &= (a_{1v} [k-1])^* + (a_{2v} [k-2])^*. \end{aligned}$$

Далее вычисляются и записываются в память ЭВМ следующие значения:

$$\begin{aligned} & a_{1v} [k], (a_{1v} [k])^* \text{ вместо } a_{1v} [k-1], (a_{1v} [k-1])^*; \\ & b_{1v} [k], (b_{1v} [k])^* \text{ вместо } b_{1v} [k-1], (b_{1v} [k-1])^*; \\ & a_{2v} [k], (a_{2v} [k])^* \text{ вместо } a_{2v} [k-2], (a_{2v} [k-2])^*; \\ & b_{2v} [k], (b_{2v} [k])^* \text{ вместо } b_{2v} [k-2], (b_{2v} [k-2])^*, \end{aligned}$$

используемые при вычислениях на следующих двух шагах.

Структура X1 (рис. 3.4). Предварительно по формулам (2.44) должны быть определены параметры передаточной функции (3.122), представленной в виде

$$G(z) = \frac{R + jI}{z - (\alpha + j\beta)} + \frac{R - jI}{z - (\alpha - j\beta)}. \quad (3.124)$$

Для вычисления значений выходного сигнала на k -м шаге необходимо, чтобы в памяти ЭВМ содержались следующие величины:

$$\begin{aligned} & 2Re^* [k-1], (2Re^* [k-1])^*, 2Ie^* [k-1], (2Ie^* [k-1])^*, \\ & \alpha\rho_1 [k-1], (\alpha\rho_1^* [k-1])^*, \alpha\eta_1 [k-1], (\alpha\eta_1^* [k-1])^*, \\ & \beta\rho_1 [k-1], (\beta\rho_1^* [k-1])^*, \beta\eta_1 [k-1], (\beta\eta_1^* [k-1])^*. \end{aligned}$$

Зная эти величины, можно вычислить

$$\begin{aligned} \rho_1 [k] &= 2Re^* [k-1] + \alpha\rho_1 [k-1] - \beta\eta_1 [k-1], \\ \rho_1^* [k] &= (2Re^* [k-1])^* + (\alpha\rho_1^* [k-1])^* - (\beta\eta_1^* [k-1])^*, \\ u [k] &= \rho_1 [k], \quad u^* [k] = \rho_1^* [k]. \end{aligned}$$

При подготовке вычислений для $(k+1)$ -го шага находятся:

$$\begin{aligned} \eta_1 [k] &= 2Ie^* [k-1] + \alpha\eta_1 [k-1] + \beta\rho_1 [k-1], \\ \eta_1^* [k] &= (2Ie^* [k-1])^* + (\alpha\eta_1^* [k-1])^* + (\beta\rho_1^* [k-1])^*, \\ & 2Re^* [k], (2Re^* [k])^*, 2Ie^* [k], (2Ie^* [k])^*, \\ & \alpha\rho_1 [k], (\alpha\rho_1^* [k])^*, \alpha\eta_1 [k], (\alpha\eta_1^* [k])^*, \\ & \beta\rho_1 [k], (\beta\rho_1^* [k])^*, \beta\eta_1 [k], (\beta\eta_1^* [k])^*. \end{aligned}$$

Далее вычисляется, как и ранее, результирующая ошибка $r [k]$.

Структура X2 (рис. 3.5). После $(k-1)$ -го шага вычислений в памяти ЭВМ хранятся следующие величины:

$$\begin{aligned} & 2e^* [k-1], \alpha\rho_0 [k-1], (\alpha\rho_0^* [k-1])^*, \alpha\eta_0 [k-1], (\alpha\eta_0^* [k-1])^*, \\ & \beta\rho_0 [k-1], (\beta\rho_0^* [k-1])^*, \beta\eta_0 [k-1], (\beta\eta_0^* [k-1])^*, \end{aligned}$$

с помощью которых определяется выходной сигнал на k -м шаге по следующему алгоритму:

$$\begin{aligned} \rho_0 [k] &= 2e^* [k-1] + \alpha\rho_0 [k-1] - \beta\eta_0 [k-1], \\ \rho_0^* [k] &= 2e^* [k-1] + (\alpha\rho_0^* [k-1])^* - (\beta\eta_0^* [k-1])^*, \\ \eta_0 [k] &= \alpha\eta_0 [k-1] + \beta\rho_0 [k-1], \\ \eta_0^* [k] &= (\alpha\eta_0^* [k-1])^* + (\beta\rho_0^* [k-1])^*, \\ u [k] &= R\rho_0 [k] - I\eta_0 [k], \\ u^* [k] &= (R\rho_0^* [k])^* - (I\eta_0^* [k])^*. \end{aligned}$$

После этого в память ЭВМ заносятся новые значения:

$$2e^* [k], \alpha_{p0} [k], (\alpha_{p0}^* [k])^*, \alpha_{\eta 0} [k], (\alpha_{\eta 0}^* [k])^*, \\ \beta_{p0} [k], (\beta_{p0}^* [k])^*, \beta_{\eta 0} [k], (\beta_{\eta 0}^* [k])^*,$$

используемые при вычислениях $u [k+1]$.

Рассмотренные алгоритмы можно использовать для экспериментальной проверки приведенных в данной главе выводов относительно характера ошибок округления, возникающих в цифровых фильтрах.

4. Цифровые полосовые фильтры

4.1. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ В РАЗЛИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ТЕХНИКИ

Во многих случаях при анализе частотных свойств процессов используется метод предварительного разбиения всего рабочего диапазона частот на ряд поддиапазонов. Это разбиение осуществляется путем пропускания сигнала через систему параллельно соединенных полосовых фильтров («гребенку» фильтров), амплитудно-частотные характеристики которых имеют форму, близкую к прямоугольной. Аналогичный подход нашел применение при формировании заданного спектра случайных возмущений. В этом случае широкополосный случайный процесс подается на вход «гребенки» полосовых фильтров с регулируемыми коэффициентами усиления. В зависимости от значений коэффициентов усиления реализуется тот или иной спектр возмущения.

Приведем два примера технических систем, основными звеньями которых являются «гребенки» полосовых фильтров.

Необходимым этапом исследования различных сложных конструкций являются виброиспытания. При этом часто реальные условия работы исследуемых систем моделируются широкополосным (до 10 кГц) случайным силовым возмущением, воспроизводимым с помощью специальных мощных электродинамических или иных стендов. Структурная схема подобной системы виброиспытаний приведена на рис. 4.1. На вход звеньев 2, образующих систему полосовых фильтров, с генератора (или генераторов) шума 1 подается случайный процесс с равномерным спектром, модулируемый сигналами блока управления 9. Модуляция осуществляется изменением коэффициентов усиления полосовых фильтров 2. Сигналы с выхода полосовых фильтров поступают на смеситель 3, где они суммируются, и далее на исполнительную часть стенда 4, в которой происходит усиление по мощности и преобразование процессов

в силовое возмущение, непосредственно воздействующее на объект (исследуемую конструкцию). В ответственных случаях одновременно производится контроль характера вибраций объекта. Для этого сигнал с выхода измерителя 5, установленного либо на объекте, либо на столе вибратора, подается на анализатор 6 — гребенку фильтров, имеющих частотные характеристики, идентичные характеристикам фильтров 2.

Для определения мощности вибраций в каждой полосе частот сигналы с выходов фильтров поступают на детекторы 7 и низко-

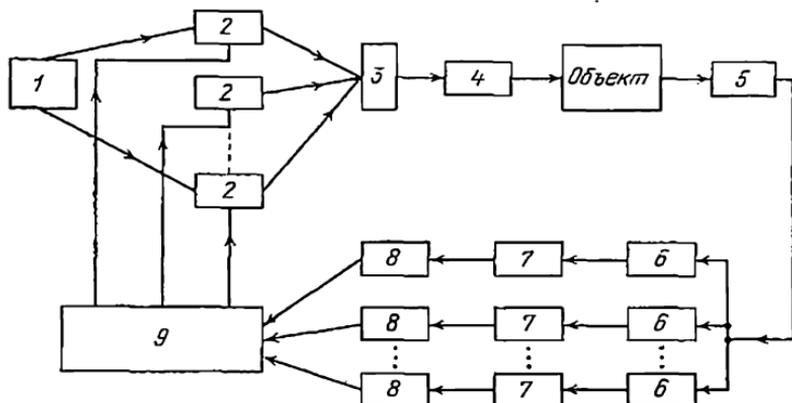


Рис. 4.1. Структурная схема системы виброиспытаний с полосовыми формирующими и анализирующими фильтрами.

частотные сглаживающие фильтры 8. В блоке управления 9 по результатам сравнения спектра вибраций и заданного спектра, определяющего желаемые условия виброиспытаний, вырабатывается коррекция регулируемых коэффициентов усиления фильтров 2. Таким образом, вибростенд, снабженный подобной системой анализа и синтеза спектральных характеристик процессов, представляет сложную замкнутую многомерную систему управления. При необходимости воспроизвести тонкую структуру спектра гребенки фильтров могут содержать десятки фильтров с регулируемыми коэффициентами усиления и фильтров-анализаторов. Описание подобных вибростендов для воспроизведения широкополосного возмущения и различные другие вопросы, касающиеся принципиальных моментов организации виброиспытаний, можно найти в [16]. Там же упоминается система, содержащая до 80 полосовых фильтров в цепях генератора и анализатора. Различные вопросы, связанные с проблемой выбора параметров описанной системы, анализа устойчивости процесса настройки спектра и точности реализации задания, можно найти, например, в работах [12, 16].

Второй пример системы, важнейшим звеном которой являются полосовые фильтры, возьмем из области техники связи. Будем говорить только о передаче речевого сигнала. Эффективная телефонная связь предполагает передачу минимума информации, необходимого для безошибочного распознавания речевого образа. Это позволяет существенно сузить полосу частот передаваемого сигнала. Основная проблема состоит в построении системы, передающей

с максимальной эффективностью лишь такую речевую информацию, которая важна для восприятия. При этом возникают две взаимосвязанные задачи: с одной стороны, необходимо на базе анализа речевого сигнала выделить некоторые его основные характеристики (параметры), которые подлежат передаче, и с другой, используя переданные значения параметров, синтезировать речевой сигнал, который при восприятии на слух не слишком сильно (в определенном смысле) отличался бы от исходного сообщения.

Из систем синтетической телефонии, созданных для решения этих задач, остановимся лишь на одном из вариантов полосного спектрального вокодера, структурная схема которого приведена на рис. 4.2 [24, 28]. Передаваемое сообщение от источника 1 поступает

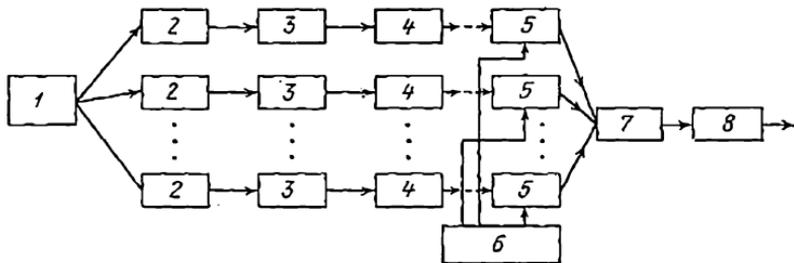


Рис. 4.2. Структурная схема полосного спектрального вокодера.

на гребенку полосовых фильтров анализатора 2, далее на детекторы 3 и фильтры нижних частот 4. После этого низкочастотные сигналы, несущие информацию о распределении мощности исходного сообщения по отдельным полосам частот, передаются по каналу связи и поступают в синтезирующую часть вокодера.

Для синтеза речевого сигнала используется гребенка фильтров 5 с характеристиками, идентичными характеристиками соответствующих фильтров гребенки анализатора. Синтез осуществляется следующим образом. Сигнал, поступающий на фильтры 5 с генератора шума 6, модулируется сигналами, переданными по каналам связи, после чего поступает на смеситель 7 и далее на выходной усилитель 8. Экспериментальные исследования систем подобного типа показывают, что уже при наличии в гребенке 10—15 фильтров удается добиться достаточно разборчивой передачи речи. Вместе с тем, синтезируемая речь отличается «машинным акцентом» и ее «натуральность» заметно хуже, чем в обычных телефонных каналах. Специальные методы позволяют в какой-то степени устранить эффект машиннообразности речи [24, 28].

Можно было бы продолжить перечень систем, важным элементом которых являются полосовые фильтры, рассмотрев, например, различные измерительные устройства, устройства обнаружения, но мы ограничимся приведенными примерами.

Таким образом, полосовой фильтр — фильтр с амплитудно-частотной характеристикой, близкой по форме

к прямоугольной, является часто встречающимся и ответственным элементом многих технических устройств. Вместе с тем, в настоящее время полосовые фильтры, как правило, реализуются на аналоговых элементах. Высокие требования, предъявляемые к качеству фильтров и форме их частотной характеристики, часто приводят к тому, что каждый фильтр гребенки представляет собой сложное и дорогое устройство.

Повышение надежности цифровых устройств делает актуальной проблему построения дискретных полосовых фильтров, важными преимуществами которых являются стабильность характеристик и простота перестройки алгоритмов преобразования данных, позволяющая формировать различные фильтры с желаемыми характеристиками. Основная теоретическая проблема, возникающая при этом,— рациональный выбор параметров цифровых фильтров.

4.2. МЕТОДЫ СИНТЕЗА ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Одна из наиболее привлекательных идей, используемых при выборе параметров полосовых фильтров, связана с выбором некоторой порождающей функции, рассматриваемой как квадрат модуля частотной характеристики фильтра. При этом для определения параметров необходимо перейти от порождающей функции к передаточной функции фильтра [55, 8, 23].

Опишем основные этапы этой процедуры первоначально применительно к непрерывным фильтрам. Пусть $\Phi(\omega) = |H(j\omega)|^2$ — квадрат модуля частотной характеристики звена с рациональной передаточной функцией $H(p)$, тогда $\Phi(\omega)$ есть четная функция от ω :

$$\Phi(\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = c^2 \frac{\prod_l (\mu_l + j\omega)(\mu_l - j\omega)}{\prod_s (\alpha_s + j\omega)(\alpha_s - j\omega)}, \quad (4.1)$$

где μ_l и α_s — нули и полюсы функции $|H(j\omega)|^2$, такие, что $\operatorname{Re}\mu_l \geq 0$, $\operatorname{Re}\alpha_s \geq 0$.

Поскольку коэффициенты передаточной функции $H(p)$ вещественны, ее комплексные нули и полюсы входят в (4.1) четверками, т. е. если μ_l есть корень полинома числителя, то корнями этого полинома будут также $\bar{\mu}_l$, $-\mu_l$, $-\bar{\mu}_l$. Чисто вещественные нули и полюсы вхо-

дят в (4.1) парами: вещественному корню μ_i соответствует корень $-\mu_i$.

При определении передаточной функции $H(p)$ по ее заданной амплитудно-частотной характеристике имеет место определенный произвол, проявляющийся в возможности неоднозначного определения $H(p)$ по (4.1). Однако в рамках этого произвола предпочтение, как правило, отдается устойчивому минимально-фазовому звену, т. е. принимается

$$H(p) = c \left[\prod_i (p + \mu_i) \right] / \left[\prod_s (p + a_s) \right]. \quad (4.2)$$

Представление амплитудно-частотной характеристики в форме (4.1) с последующим определением передаточной функции $H(p)$ в силу соотношения (4.2) есть операция, аналогичная операции факторизации спектральной плотности.

Зададим порождающую функцию, т. е. квадрат модуля частотной характеристики, в виде

$$\Phi_n(\omega) = [1 + f^n(\omega, \omega_0)]^{-1}, \quad (4.3)$$

где $f(\omega, \omega_0)$ — четная функция от ω , такая, что

$$f(\omega, \omega_0) \begin{cases} < 1, & \omega < \omega_0; \\ = 1, & \omega = \omega_0; \\ > 1, & \omega > \omega_0. \end{cases}$$

Тогда очевидно, что при увеличении степени n , $n \rightarrow \infty$, функция $\Phi_n(\omega)$ асимптотически принимает прямоугольную форму. Если $f(\omega, \omega_0)$ — рациональная функция от ω , то, записывая $\Phi_n(\omega)$ в форме (4.1) и выполняя операцию факторизации, можно определить и передаточную функцию фильтра нижних частот, который имеет амплитудно-частотную характеристику, с увеличением n асимптотически приближающуюся к прямоугольной.

Пусть функция $f(\omega, \omega_0)$ удовлетворяет условиям

$$f(\omega, \omega_0) \begin{cases} > 1, & \omega < \omega_0; \\ = 1, & \omega = \omega_0; \\ < 1, & \omega > \omega_0, \end{cases}$$

тогда нетрудно видеть, что аналогичная процедура определяет параметры не фильтра нижних частот, а фильтра верхних частот.

Выбирая подходящим образом порождающую функцию $\Phi_n(\omega)$, можно синтезировать полосовые фильтры и фильтры верхних и нижних частот различных типов. Укажем два наиболее распространенных способа выбора функций $\Phi_n(\omega)$. Так, функция $\Phi_n(\omega)$ вида

$$\Phi_n(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \quad (4.4)$$

является порождающей для фильтров Баттерворта, а функция

$$\Phi_n(\omega) = [1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_0)]^{-1}, \quad (4.5)$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева порядка n , порождающий для так называемых фильтров Чебышева.

Иллюстрируя технику получения выражения (4.1) и последующего перехода к (4.2), запишем в явном виде (через параметр ω_0 и порядок n) выражения для коэффициентов передаточных фильтров нижних частот Баттерворта и Чебышева.

Запишем порождающую функцию для фильтра Баттерворта (4.4) в виде $[1 + (-1)^n (p/\omega_0)^{2n}]^{-1}$, тогда ее полюсы α_s находятся как корни уравнения

$$p^{2n} + (-1)^n \omega_0^{2n} = 0, \quad (4.6)$$

т. е. имеем

$$\alpha_s = \begin{cases} \omega_0 \exp \left\{ j \frac{2s+1}{2n} \pi \right\} & \text{для } n \text{ четного;} \\ \omega_0 \exp \left\{ j \frac{s}{n} \pi \right\} & \text{для } n \text{ нечетного,} \end{cases} \quad (4.7)$$

$s = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

Таким образом, полюсы α_s располагаются на окружности радиуса ω_0 на равных расстояниях друг от друга. Выделяя полюсы, расположенные в левой полуплоскости ($\text{Re} \alpha_s < 0$), для случая четного n получаем

$$H(p) = \omega_0^n \prod_{s=n/2}^{0,5(3n-1)} (p - \alpha_s).$$

Поскольку все полюсы входят в $H(p)$ комплексно-сопряженными парами, последнее выражение может

быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{\omega_0^n}{\prod_{s=n/2}^{n-1} \left(p^2 - 2p\omega_0 \cos \frac{2s+1}{2n} \pi + \omega_0^2 \right)} = \\
 &= \frac{\omega_0^n}{\prod_{s=1}^{n/2} \left(p^2 - 2p\omega_0 \cos \frac{2s+n-1}{2n} \pi + \omega_0^2 \right)}. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом для нечетного n получаем

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{\omega_0^n}{0,5(3n-1) \prod_{s=0,5}^{n+1} (p - \alpha_s)} = \\
 &= \frac{\omega_0^n}{\prod_{s=2,5}^{n-1} \left(p^2 - 2p\omega_0 \cos \frac{s}{n} \pi + \omega_0^2 \right) (p + \omega_0)} = \\
 &= \frac{\omega_0^n}{(p + \omega_0) \prod_{s=1}^{0,5(n-1)} \left(p^2 - 2p\omega_0 \cos \frac{2s+n-1}{2n} \pi + \omega_0^2 \right)}. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Для построения фильтров, соответствующих порождающей функции вида (4.5), необходимо прежде всего записать полином Чебышева порядка n в виде [5]:

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.10)$$

Пусть

$$\varphi = \arccos x, \quad (4.11)$$

тогда полюсы знаменателя (4.5) определяются как корни уравнения

$$1 + \varepsilon^2 \cos^2 n\varphi = 0, \quad (4.12)$$

так что $\cos n\varphi = \pm (1/\varepsilon)j$. Считая φ комплексным ($\varphi = \varphi_1 + j\varphi_2$), находим

$$\begin{aligned}
 \cos n\varphi &= \cos n(\varphi_1 + j\varphi_2) = \cos n\varphi_1 \operatorname{ch} n\varphi_2 - \\
 &\quad - j \sin n\varphi_1 \operatorname{sh} n\varphi_2. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Корни уравнения (4.12) при этом определяются условиями

$$\cos n\varphi_1^s \operatorname{ch} n\varphi_2 = 0, \quad \sin n\varphi_1^s \operatorname{sh} n\varphi_2 = \pm 1/\varepsilon, \quad (4.14)$$

т. е.

$$\varphi_1^s = \frac{2s+1}{2n} \pi, \quad s=0, 1, \dots, 2n-1,$$

$$\operatorname{sh} n\varphi_2 = 1/\varepsilon, \quad \varphi_2 = \ln(1/\varepsilon + \sqrt{1 + 1/\varepsilon^2})^{1/n}.$$

Таким образом, относительно исходной переменной x получаем следующие выражения для $2n$ корней уравнения (4.12):

$$x_s = \cos \varphi_s = \cos \frac{2s+1}{2n} \pi \operatorname{ch} \varphi_2 - j \sin \frac{2s+1}{2n} \pi \operatorname{sh} \varphi_2. \quad (4.15)$$

В то же время для получения представления (4.1) необходимо в (4.5) положить

$$x = \omega/\omega_0 = p/j\omega_0 \quad (4.16)$$

и записать (4.5) в виде

$$\Phi_n = \left[1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left(\frac{p}{j\omega_0} \right) \right]^{-1} = \frac{\omega_0^{2n}}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2n-2}} \left[\prod_{s=0}^{2n-1} (p - \alpha_s) \right]^{-1}, \quad (4.17)$$

где в соответствии с (4.16) полюсы α_s связаны с полюсами (4.15) соотношением

$$\alpha_s = j\omega_0 x_s = \omega_0 \left[\sin \frac{2s+1}{2n} \pi \operatorname{sh} \varphi_2 + j \cos \frac{2s+1}{2n} \pi \operatorname{ch} \varphi_2 \right], \quad s=0, 1, \dots, 2n-1. \quad (4.18)$$

Сомножитель 2^{2n-2} появляется в (4.17) вследствие того, что коэффициент при старшей степени полинома Чебышева порядка n равен 2^{n-1} . Отделяя в (4.17) полюсы, расположенные в левой полуплоскости, получаем следующее выражение для передаточной функции устойчивого фильтра Чебышева:

$$H(p) = \frac{\omega_0^n}{2^{n-1} \prod_{s=0}^{n-1} (p - \alpha_s)}$$

$$= \frac{\omega_0^n}{2^{n-1} \prod_{s=1}^{n/2} \left(p^2 + 2p\omega_0 \sin \frac{2s-1}{2n} \pi \operatorname{sh} \varphi_2 + \mu_s^2 \omega_0^2 \right)}, \quad (4.19)$$

$$\mu_s^2 = \sin^2 \frac{2s-1}{2n} \pi \operatorname{sh}^2 \varphi_2 + \cos^2 \frac{2s-1}{2n} \pi \operatorname{ch}^2 \varphi_2,$$

где $\omega_0^2 \mu_s^2$ — квадрат модуля s -го полюса передаточной функции.

Интересно отметить, что полюсы полученного таким образом фильтра Чебышева лежат на эллипсе

$$\frac{\operatorname{Re}^2 \alpha_s}{\omega_0^2 \operatorname{sh}^2 \varphi_2} + \frac{\operatorname{Im}^2 \alpha_s}{\omega_0^2 \operatorname{ch}^2 \varphi_2} = 1$$

с полюсами $\omega_0 \operatorname{sh} \varphi_2$ и $\omega_0 \operatorname{ch} \varphi_2$. Здесь $\operatorname{Re} \alpha_s$ и $\operatorname{Im} \alpha_s$ — вещественные и мнимые части корней α_s .

Говоря о каком-то сопоставлении частотных характеристик фильтров Чебышева и Баттерворта, необходимо отметить следующее. Если фильтры Баттерворта характеризуются максимально гладкой вершиной, то в пределах полосы пропускания чебышевского фильтра имеют место пульсации амплитудно-частотной характеристики. Размах пульсаций равен $1/\sqrt{1+\varepsilon^2}$. При этом уменьшение допустимого уровня пульсаций (уменьшение ε), вообще говоря, ведет к ухудшению фронта амплитудно-частотной характеристики фильтра. Качественно

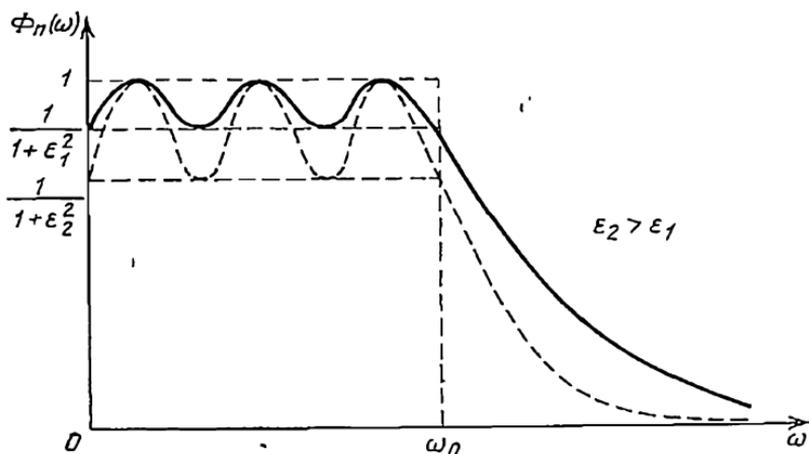


Рис. 4.3. Амплитудно-частотные характеристики фильтров Чебышева.

но это явление поясняется рис. 4.3. Более подробные сведения о различных типах аналоговых фильтров и методах их синтеза, а также подробную библиографию можно найти в работах [55, 8, 23].

Перейдем к задаче синтеза дискретных фильтров. Порождающие функции, используемые в этом случае, должны обладать рядом специфических особенностей [11, 13, 42]. Пусть имеется линейное дискретное звено с передаточной функцией

$$H(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^{-k} \left/ \sum_{k=0}^n b_k z^{-k} \right.,$$

для квадрата модуля его частотной характеристики получаем

$$\begin{aligned} |H(z)|^2 &= H(z)H(z^{-1}) = \\ &= \sum_{k,l=0}^n a_k a_l z^{-k} z^l \left/ \sum_{k,l=0}^n b_k b_l z^{-k} z^l \right. . \end{aligned}$$

При переходе к частоте ω , $z = e^{j\omega T}$, получаем

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \sum_{k=0}^n c_k \cos \omega T k \left/ \sum_{k=0}^n d_k \cos \omega T k \right., \quad (4.20)$$

где постоянные c_k и d_k очевидным образом выражаются через a_k и b_k .

Следовательно, квадрат модуля частотной характеристики дискретной системы является четной неотрицательной функцией ω , которую можно представить в виде рациональной функции косинусов, аргументы которых кратны ωT . Нетрудно убедиться, что справедливо и обратное утверждение, т. е. любую функцию, удовлетворяющую перечисленным условиям, можно рассматривать как квадрат модуля частотной характеристики некоторого дискретного звена.

Таким образом, для того чтобы функция (4.3) была порождающей для дискретного фильтра, достаточно, чтобы она удовлетворяла всем перечисленным выше свойствам квадрата модуля частотной характеристики. При этом, если в непрерывном варианте задачи требовалось, чтобы функция $\Phi_n(\omega)$ была рациональной по аргументу ω , для дискретного варианта необходимо, чтобы функция $\Phi_n(\omega)$ была рациональной по $\cos \omega T k$.

Рассмотрим, как по заданной функции вида (4.20) можно определить передаточную функцию $H(z)$.

Производя подстановку $\cos \omega T k = (z^k + z^{-k})/2$, получаем

$$|H(z)|^2 = \frac{\sum_{k=0}^n c_k \frac{z^k + z^{-k}}{2}}{\sum_{k=0}^n d_k \frac{z^k + z^{-k}}{2}} = \frac{S(z)}{T(z)},$$

где $S(z)$ и $T(z)$ — полиномы по степеням z и z^{-1} .

Вследствие того что полиномы $S(z)$ и $T(z)$ возвратные, $S(z) = S(z^{-1})$, $T(z) = T(z^{-1})$, и имеют вещественные коэффициенты, функция (4.20) может быть представлена в виде

$$|H(z)|^2 = c^2 \frac{\prod_{s=1}^n (1 - \nu_s z^{-1})(1 - \nu_s z)}{\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z^{-1})(1 - \mu_l z)}, \quad (4.21)$$

где ν_s и μ_l — корни уравнений $S(\nu_s) = 0$, $T(\mu_l) = 0$, по модулю меньше единицы.

Теперь уже нетрудно видеть, что передаточная функция устойчивого и минимально-фазового фильтра, амплитудно-частотные характеристики которых показаны на рис. 4.4, записывается в виде

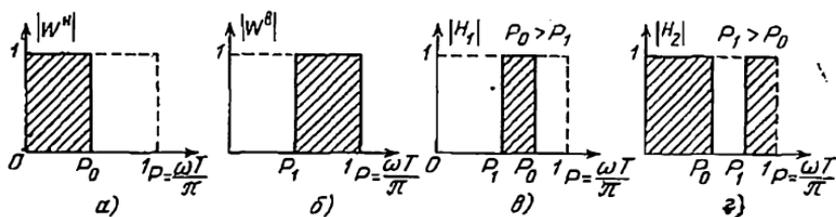


Рис. 4.4. Амплитудно-частотные характеристики основных типов дискретных полосовых фильтров.

литудно-частотная характеристика которого соответствует (4.21), записывается в форме

$$H(z) = c \left[\prod_{s=1}^n (1 - \nu_s z^{-1}) \right] / \left[\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z^{-1}) \right]. \quad (4.22)$$

Рассмотрим два основных типа полосовых фильтров: фильтр нижних частот (рис. 4.4,а) и фильтр верхних частот (рис. 4.4,б). В зависимости от значений параметров

ра относительной частоты $p = \omega T / \pi$ последовательные соединения фильтров $W^b(z)$ и $W^H(z)$ позволяют получить различные полосовые $H_1(z)$ (рис. 4.4, в) и заградительные $H_2(z)$ (рис. 4.4, з) системы.

Примем в качестве порождающих для дискретных фильтров нижних и верхних частот следующие функции: для фильтров нижних частот

$$|W_{\sin}^H|^2 = \left[1 + \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\sin(\omega_0 T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}, \quad (4.23)$$

$$|W_{\text{tg}}^H|^2 = \left[1 + \left(\frac{\text{tg}(\omega T/2)}{\text{tg}(\omega_0 T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}, \quad (4.24)$$

$$|W_{\cos}^H|^2 = \left[1 + \left(\frac{\cos(\omega_0 T/2)}{\cos(\omega T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}; \quad (4.25)$$

для фильтров верхних частот

$$|W_{\sin}^b|^2 = \left[1 + \left(\frac{\sin(\omega_0 T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}, \quad (4.26)$$

$$|W_{\text{tg}}^b|^2 = \left[1 + \left(\frac{\text{tg}(\omega_0 T/2)}{\text{tg}(\omega T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}, \quad (4.27)$$

$$|W_{\cos}^b|^2 = \left[1 + \left(\frac{\cos(\omega T/2)}{\cos(\omega_0 T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1}. \quad (4.28)$$

На рис. 4.5—4.7 приведены графики зависимостей (4.26)—(4.28). Сравнение кривых позволяет сделать вывод, что даже при сравнительно невысоком порядке фильтра ($n=8 \div 10$) форма его амплитудно-частотной характеристики весьма близка к идеальной. Исключения составляют фильтры, построенные на основе функции косинуса. В связи с этим в дальнейшем, при определении параметров фильтров, ограничимся рассмотрением синусных и тангенсных фильтров.

Нетрудно видеть, что фильтры нижних частот являются взаимно-дополнительными по отношению к соответствующим фильтрам верхних частот, так что, например,

$$|W_{\sin}^H|^2 = 1 - |W_{\sin}^b|^2.$$

Вследствие этого рис. 4.5—4.7 дают отчетливое представление о форме амплитудно-частотных характеристик фильтров нижних частот, соответствующих соотношениям

(4.23) — (4.25). Фильтры, получаемые при использовании соотношений (4.23) — (4.28), являются дискретными аналогами фильтров Баттерворта.

Нетрудно построить процедуру, приводящую к дискретному аналогу фильтров Чебышева. Для этого достаточно в качестве порождающей принять функцию (4.5), аргумент которой ω/ω_0 заменяется на одно из отношений

$$\frac{\sin(\omega T/2)}{\sin(\omega_0 T/2)}, \quad \frac{\operatorname{tg}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_0 T/2)}, \quad \frac{\cos(\omega_0 T/2)}{\cos(\omega T/2)}$$

или

$$\frac{\sin(\omega_0 T/2)}{\sin(\omega T/2)}, \quad \frac{\operatorname{tg}(\omega_0 T/2)}{\operatorname{tg}(\omega T/2)}, \quad \frac{\cos(\omega T/2)}{\cos(\omega_0 T/2)}.$$

При этом возникают соответствующие синусный, тангенсный и косинусный чебышевские фильтры нижних и верхних частот.

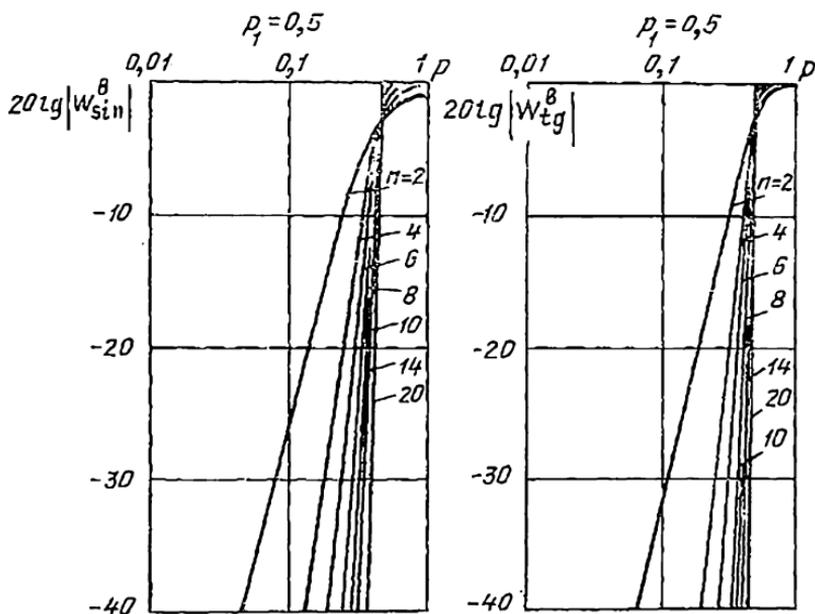


Рис. 4.5. Амплитудно-частотные характеристики синусных фильтров верхних частот.

Рис. 4.6. Амплитудно-частотные характеристики тангенсных фильтров верхних частот.

Помимо описанных схем для синтеза дискретных полосовых фильтров естественно можно воспользоваться методами построения дискретных моделей непрерыв-

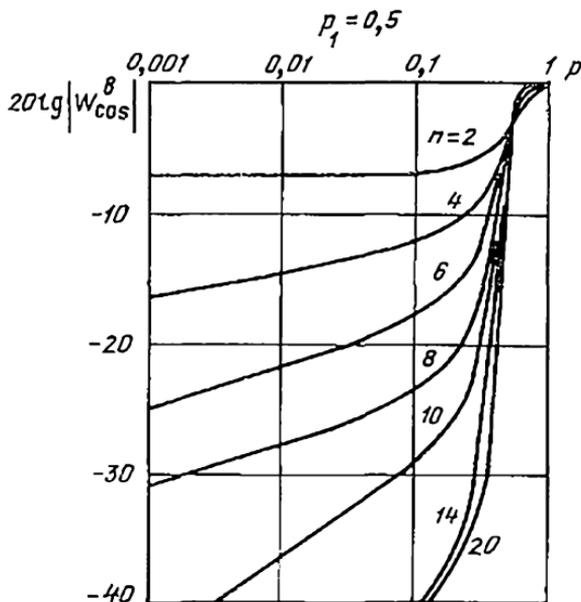


Рис. 4.7. Амплитудно-частотные характеристики косинусных фильтров верхних частот.

ных фильтров. Если параметры непрерывных полосовых фильтров выбраны, то для построения соответствующих дискретных фильтров могут быть применены методы, описанные в § 1.2.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФИЛЬТРОВ

Воспользуемся описанной в § 4.2 процедурой для определения коэффициентов передаточных функций фильтров, соответствующих порождающим функциям (4.23), (4.24) и (4.26), (4.27). Начнем с рассмотрения функции (4.23). Основной является следующая цепочка преобразований:

$$|W_{\text{стн}}^n|^2 = \frac{S^n}{S^n + [0,5(1 - \cos \omega T)]^n} =$$

$$= \frac{(-4S)^n z^n}{(-4S)^n z^n + (z^2 - 2z + 1)^n} = \frac{(-4S)^n z^n}{\prod_{l=1}^n (z - \mu_l)(z - \mu_l^{-1})} =$$

$$= \frac{(4S)^n \prod_{l=1}^n \mu_l}{\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z)(1 - \mu_l z^{-1})} = \frac{k^2}{\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z)(1 - \mu_l z^{-1})},$$

где $S = \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2}$; $k^2 = (4S)^n \prod_{l=1}^n \mu_l$.

Здесь μ_l и μ_l^{-1} — корни возвратного уравнения

$$(-4S)^n + (z + z^{-1} - 2)^n = 0. \quad (4.29)$$

Нетрудно видеть, что корни уравнения (4.29) определяются соотношением

$$z_k = X_k \pm jY_k = 1 - 2S \exp \left\{ j \frac{2k+1}{n} \pi \right\} \times$$

$$\times \left[1 \pm \sqrt{1 - S^{-1} \exp \left\{ -j \frac{2k+1}{n} \pi \right\}} \right],$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

При этом для вещественных и мнимых частей можно записать

$$X_k = 1 - 2S \cos \alpha_k \mp \sqrt{2S} \cos \alpha_k (m_k + S - \cos \alpha_k)^{0,5} \pm$$

$$\pm \sqrt{2S} (m_k - S + \cos \alpha_k)^{0,5}, \quad (4.30)$$

$$Y_k = \mp \sqrt{2S} \sin \alpha_k (m_k + S - \cos \alpha_k)^{0,5} \mp$$

$$\mp \sqrt{2S} (m_k - S + \cos \alpha_k)^{0,5} - 2S \sin \alpha_k.$$

Здесь

$$m_k = (S^2 - 2S \cos \alpha_k + 1)^{0,5}, \quad (4.31)$$

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{2k-1}{n} \pi, & k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} \text{ для четных } n, \\ \frac{2k-1}{n} \pi, & k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ для нечетных } n; \end{cases} \quad (4.32)$$

$\alpha_0 = \pi$.

Отметим, что значению $\alpha_0 = \pi$ при нечетном n соответствует единственный вещественный корень уравнения (4.29), все остальные корни образуют комплексно-сопряженные пары. Нижние знаки в (4.30) соответствуют корням, по модулю меньшим единицы. Это позволяет

записать явные выражения для полюсов μ_k и передаточной функции:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \mu_k &= 1 - 2S \cos \alpha_k + \sqrt{2S} \cos \alpha_k (m_k + S - \\ &- \cos \alpha_k)^{0,5} - \sqrt{2S} (m_k - S + \cos \alpha_k)^{0,5} \sin \alpha_k, \\ |\mu_k|^2 &= 1 - 4S \cos \alpha_k + 4S^2 - 2\sqrt{2S} (2S - \\ &- \cos \alpha_k) (m_k + S - \cos \alpha_k)^{0,5} - \\ &- 2\sqrt{2S} \sin \alpha_k (m_k - S + \cos \alpha_k)^{0,5} - 4Sm_k. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Вследствие того что при четном n все корни образуют только комплексно-сопряженные пары, передаточная функция фильтра может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} W_{\sin}^n(z) &= \frac{k}{\prod_{l=1}^{n/2} (1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2})} \\ k^2 &= (4S)^n \prod_{l=1}^{n/2} |\mu_l|^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \quad W_{\sin}^n(z) &= \prod_{l=1}^{n/2} W_{\sin}^{nl}(z) \\ W_{\sin}^{nl}(z) &= \frac{4S |\mu_l|}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Последняя запись определяет передаточную функцию $W_{\sin}^n(z)$ как произведение передаточных функций элементарных звеньев второго порядка. При этом коэффициент усиления каждого звена, равный числителю (4.35), обеспечивает выравнивание масштабов между отдельными звеньями. Легко проверить, что на нижних частотах при $\omega=0$ или $z=1$, $W_{\sin}^{nl}(1)=1$, $l=1, 2, \dots, n/2$.

Аналогичные формулы с выделением вещественного полюса, соответствующего $\alpha_0=\pi$, могут быть получены и для случая нечетного n :

$$\left. \begin{aligned} W_{\sin}^n(z) &= \prod_{l=0}^{(n-1)/2} W_{\sin}^{nl}(z) \\ W_{\sin}^{n0}(z) &= \frac{2(S\mu_0)^{0,5}}{1 - \mu_0 z^{-1}} \\ W_{\sin}^{nl}(z) &= \frac{4S |\mu_l|}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Проводя преобразования для синусного фильтра верхних частот (порождающая функция (4.26)), нетрудно получить

$$W_{\sin}^n(z) = \frac{k(1-z^{-1})^n}{\prod_{l=1}^n (1-\mu_l z^{-1})}, \quad (4.37)$$

где $k^2 = \prod_{l=1}^n \mu_l$, а μ_l по-прежнему определяются соотношениями (4.33).

Для четных n имеем соотношения, аналогичные (4.34) — (4.35):

$$W_{\sin}^n(z) = \frac{k(1-z^{-1})^n}{\prod_{l=1}^{n/2} (1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2})}. \quad (4.38)$$

Здесь $k = \prod_{l=1}^{n/2} |\mu_l|$.

$$\left. \begin{aligned} W_{\sin}^n(z) &= \prod_{l=1}^{n/2} W_{\sin}^{bl}(z), \\ W_{\sin}^{bl}(z) &= \frac{|\mu_l| (1-z^{-1})^2}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

В случае нечетного n , выделяя полюс, соответствующий α_0 , получаем формулы, являющиеся аналогом (4.36):

$$\left. \begin{aligned} W_{\sin}^n(z) &= \prod_{l=0}^{0,5(n-1)} W_{\sin}^{bl}(z), \quad W_{\sin}^{b0}(z) = \frac{(1-z^{-1})^{\mu_0^{0,5}}}{1 - \mu_0 z^{-1}}, \\ W_{\sin}^{bl}(z) &= \frac{(1-z^{-1})^2 |\mu_l|}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Перейдем к рассмотрению тангенсных фильтров. Для фильтра нижних частот (порождающая функция (4.24)) имеем следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} |W_{\operatorname{tg}}^n|^2 &= \left[1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_0 T/2)} \right)^{2n} \right]^{-1} = \\ &= \frac{(T^*)^n (z^2 + 2z + 1)^n}{(T^*)^n (z^2 + 2z + 1)^n + (2z - z^2 - 1)^n} = \end{aligned}$$

$$= k^2 \frac{(1+z^{-1})^n (1+z)^n}{\prod_{l=1}^n (1-\mu_l z^{-1})(1-\mu_l z)}, \quad (4.41)$$

где $T^* = \operatorname{tg}^2(\omega_0 T/2)$; $k^2 = \left[(T^*)^n \prod_{l=1}^n \mu_l \right] / [1 + (-T^*)^n]$.

Полюсы μ_l и μ_l^{-1} определяются как решения возвратного уравнения

$$(T^*)^n (2+z+z^{-1})^n + (2-z-z^{-1})^n = 0. \quad (4.42)$$

Для корней этого уравнения имеем

$$z_k = X_k \pm jY_k = \frac{1 - T^* \exp \left\{ j \frac{2k+1}{n} \pi \right\} \pm \sqrt{-4T^* \exp \left\{ j \frac{2k+1}{n} \pi \right\}}}{1 + T^* \exp \left\{ j \frac{2k+1}{n} \pi \right\}}, \quad (4.43)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$X_k = \frac{(1 - T^*) (1 + T^* \pm 2\sqrt{T^*} \sin(\alpha_k/2))}{1 + 2T^* \cos \alpha_k + (T^*)^2},$$

$$Y_k = \frac{\pm 2\sqrt{T^*} \cos \frac{\alpha_k}{2} \left(1 + T^* \pm 2\sqrt{T^*} \sin \frac{\alpha_k}{2} \right)}{1 + 2T^* \cos \alpha_k + (T^*)^2}, \quad (4.44)$$

$$|z_k|^2 = \frac{\left(1 + T^* \pm 2\sqrt{T^*} \sin \frac{\alpha_k}{2} \right)^2}{1 + 2T^* \cos \alpha_k + (T^*)^2}.$$

Корням, по модулю меньшим единицы, в (4.44) соответствуют нижние знаки, так что для полюсов передаточной функции можно записать

$$\operatorname{Re} \mu_k = \frac{(1 - T^*) \left(1 + T^* - 2\sqrt{T^*} \sin \frac{\alpha_k}{2} \right)}{1 + 2T^* \cos \alpha_k + (T^*)^2}, \quad (4.45)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$|\mu_h|^2 = \frac{\left(1 + T^* - 2\sqrt{T^*} \sin \frac{\alpha_h}{2}\right)^2}{1 + 2T^* \cos \alpha_h + (T^*)^2}.$$

Передаточная функция тангенсного фильтра нижних частот имеет вид

$$W_{\text{tg}}^n(z) = \frac{k(1+z^{-1})^n}{\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z^{-1})}. \quad (4.46)$$

Здесь k определяется в соответствии с формулами (4.41). Для четных n из (4.33) следует

$$W_{\text{tg}}^n(z) = \frac{k(1+z^{-1})^n}{\prod_{l=1}^{n/2} (1 - 2\operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2})}, \quad (4.47)$$

где $k^2 = \left[(T^*)^n \prod_{l=1}^{n/2} |\mu_l|^2 \right] / [1 + (T^*)^n]$,

или

$$\left. \begin{aligned} W_{\text{tg}}^n(z) &= \prod_{l=1}^{n/2} W_{\text{tg}}^{nl}(z), \\ W_{\text{tg}}^{nl}(z) &= \frac{k_l(1+z^{-1})^2}{1 - 2\operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}}, \\ k_l &= \frac{|T^*|}{(1 + (T^*)^n)^{1/n}} |\mu_l|. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Для тангенсного фильтра верхних частот (порождающая функция (4.27)) подобным же образом находим

$$W_{\text{tg}}^n(z) = [k(1-z^{-1})^n] / \left[\prod_{l=1}^n (1 - \mu_l z^{-1}) \right], \quad (4.49)$$

где $k^2 = \prod_{l=1}^n \mu_l / [1 + (-T^*)^n]$, и значения μ_l по-прежнему определяются формулами (4.45).

Для четных n из (4.49) следует

$$W_{tg}^a(z) = \frac{k(1-z^{-1})^n}{\prod_{l=1}^{n/2} (1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2})}, \quad (4.50)$$

$$k^2 = \prod_{l=1}^{n/2} |\mu_l|^2 / (1 + (T^*)^n),$$

или, записывая $W_{tg}^a(z)$ в форме произведения элементарных передаточных функций с нормирующими коэффициентами усиления, получаем

$$W_{tg}^a(z) = \prod_{l=1}^{n/2} W_{tg}^{bl}(z),$$

$$W_{tg}^{bl}(z) = \frac{k_l(1-z^{-1})^2}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}}, \quad (4.51)$$

$$k_l = |\mu_l| / [1 + (T^*)^n]^{1/n}.$$

Для нечетных значений n передаточные функции тангенсных фильтров верхних и нижних частот могут быть записаны в форме, аналогичной (4.36), (4.40). Выведенные формулы (4.33)—(4.36), (4.38)—(4.40), (4.45)—(4.50) определяют коэффициенты передаточных функций полосовых дискретных фильтров в зависимости от заданной частоты среза ω_0 , периода дискретности T и выбранного порядка фильтра n и, таким образом, дают полное решение поставленной задачи синтеза полосовых фильтров.

Приведем результаты расчета нескольких вариантов фильтров нижних частот.

Пусть частота среза $f_0 = 200$ Гц, частота квантования $f_{\text{кв}} = 1/T = 20\,000$ Гц и порядок фильтра $n = 4, 8, 10, 20$. Соответствующие значения параметров тангенсных фильтров, вычисленные по формулам (4.47), сведены в табл. 4.1.

Интересно отметить, что параметры $\operatorname{Re} \mu_l$ и $|\mu_l|^2$ синусных фильтров нижних частот, рассчитанные для тех же значений частоты среза и частоты квантования с точностью до трех значащих цифр, совпадают с приведенными в таблице значениями $\operatorname{Re} \mu_l$ и $|\mu_l|^2$ для тангенсных фильтров. В то же время коэффициенты

усиления k_i отдельных синусных фильтров равны величине 0,004 (соответствующее значение для тангенсных фильтров 0,001).

Подобное совпадение значений параметров фильтров объясняется малой величиной отношения $f_0/f_{нв} = 0,01$, что обеспечивает практическое совпадение значений величин $\sin(\omega T)/\sin \omega_0 T$ и $\text{tg}(\omega T)/\text{tg} \omega_0 T$ на интервале частот, соответствующем полюсе пропускания фильтра.

Т а б л и ц а 4.1

Порядок фильтра, n	Параметры тангенсного фильтра		
	$\text{Re} \mu_i$	$ \mu_i ^2$	k
4	0,975	0,953	0,001
	0,943	0,890	0,001
6	0,982	0,968	0,001
	0,956	0,915	0,001
	0,941	0,886	0,001
8	0,986	0,976	0,001
	0,964	0,933	0,001
	0,949	0,901	0,001
	0,940	0,884	0,001
10	0,988	0,981	0,001
	0,970	0,945	0,001
	0,956	0,915	0,001
	0,945	0,894	0,001
	0,940	0,883	0,001
20	0,993	0,990	0,001
	0,984	0,971	0,001
	0,975	0,953	0,001
	0,966	0,936	0,001
	0,959	0,922	0,001
	0,953	0,909	0,001
	0,947	0,898	0,001
	0,943	0,890	0,001
	0,941	0,885	0,001
	0,939	0,882	0,001

На рис. 4.8—4.10 приведены основные характеристики тангенсных фильтров: амплитудно-частотные (рис. 4.8) и фазовые (рис. 4.9) характеристики, а также переходные процессы $y[k]$ —реакции на единичный входной сигнал (рис. 4.10). Увеличение порядка фильтра n ведет к повышению крутизны фронта амплитудно-частотной характеристики, однако при этом одновременно увеличивается длительность переходного процесса вследствие известной альтернативы между разрешающей способностью фильтра и необходимым временем анализа [29].

Говоря об общих свойствах проектируемых полосовых фильтров, отметим, что важнейшей характеристикой является степень их устойчивости или, иными словами, отличие наибольшего по модулю полюса фильтра от единицы. Важность этой характеристики объясняется тем, что при проектировании фильтров с малой степенью

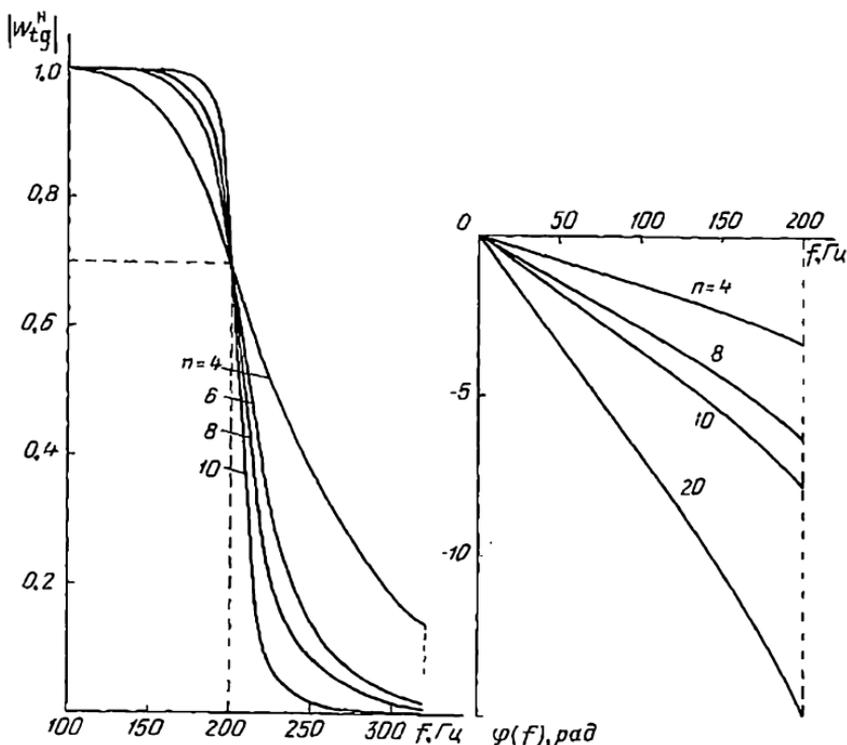


Рис. 4.8. Амплитудно-частотные характеристики тангенсных фильтров нижних частот.

Рис. 4.9. Фазовые характеристики тангенсных фильтров нижних частот.

устойчивости предъявляются особо жесткие требования к точности определения параметров и последующей реализации фильтров. Малейшие отклонения в параметрах знаменателя могут привести к потере устойчивости фильтра. На рис. 4.11—4.12 приведены зависимости модулей полюсов синусных и тангенсных фильтров от ос-

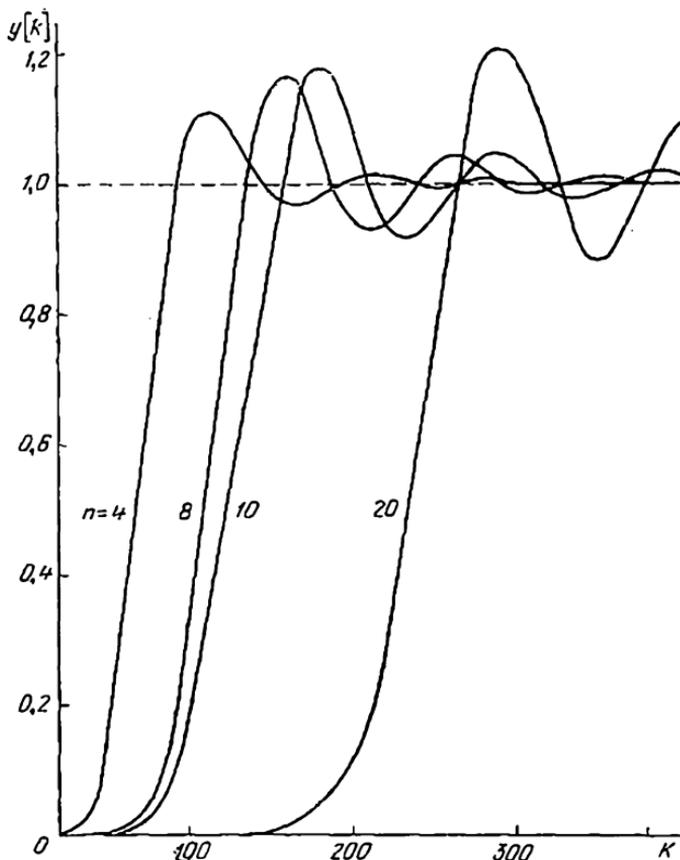


Рис. 4.10. Переходные процессы в тангенсных фильтрах нижних частот.

новых параметров S , T^* и n *). При этом видно, что наибольшие по модулю значения полюсов соответствуют наименьшим величинам угла α_k . При малых значениях S и T^* все корни фильтров по модулю близки к единице.

*) На рис. 4.11 приведены зависимости для случая 1) $n=10$, $\alpha=\pi/10$; 2) $n=8$, $\alpha=\pi/2$; 3) $n=6$, $\alpha=\pi/6$; 4) $n=4$, $\alpha=\pi/4$; 5) $n=8$, $\alpha=3\pi/8$; 6) $n=6$, $\alpha=3\pi/6$; 7) $n=8$, $\alpha=5\pi/8$; 8) $n=4$, $\alpha=3\pi/4$; 9) $n=8$, $\alpha=7\pi/8$; 10) $n=6$, $\alpha=5\pi/6$, а на рис. 4.12 — для случая 1) $n=10$, $\alpha=\pi/10$; 2) $n=8$, $\alpha=\pi/8$; 3) $n=6$, $\alpha=\pi/6$; 4) $n=4$, $\alpha=\pi/4$; 5) $n=10$, $\alpha=3\pi/10$; 6) $n=3$, 9, $\alpha=\pi-3$; 7) $n=8$, $\alpha=3\pi/8$; 8) $n=2$, 6, 10, $\alpha=\pi/2$; 9) $n=8$, $\alpha=5\pi/8$; 10) $n=10$, $\alpha=7\pi/10$; 11) $n=4$, $\alpha=3\pi/4$; 12) $n=6$, $\alpha=5\pi/6$; 13) $n=8$, $\alpha=7\pi/8$; 14) $n=10$, $\alpha=9\pi/10$; 15) $n=1, 3, 5, 7, 9$, $\alpha=\pi$.

При малых T^* для наибольшего по модулю полюса тангенсного фильтра $\mu_{\max} = \max |\mu_n|$ в силу (4.32), (4.45)

$$\mu_{\max} = 1 - 2\sqrt{T^*} \sin(\pi n). \quad (4.52)$$

Приведем пример расчета «гребенки» дискретных полосовых фильтров. Во многих случаях предпочтительно иметь гребенку, составленную не из фильтров с одинаковыми полосами пропускания, а из так называемых октавных фильтров, каждый из которых имеет

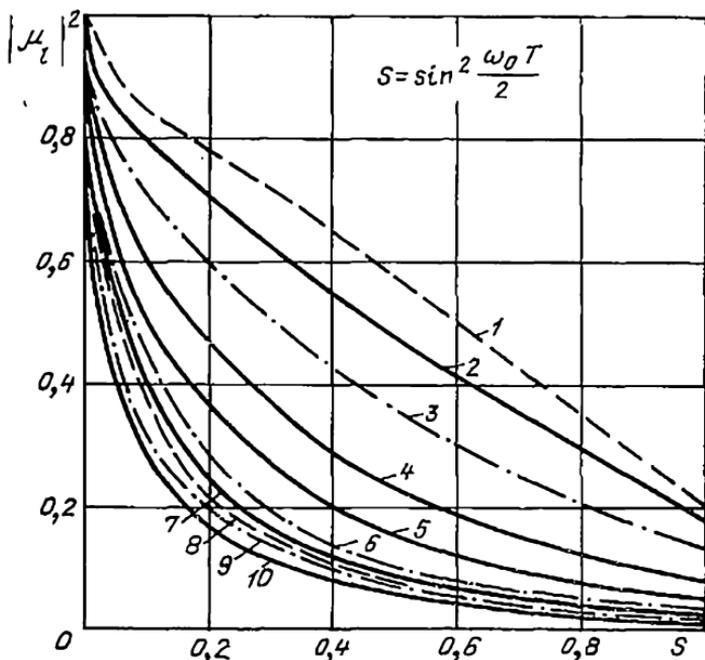


Рис. 4.11. Зависимость модулей синусных фильтров от их основных параметров.

удвоенную полосу пропускания по сравнению с полосой пропускания предшествующего (более низкочастотного) фильтра. Подобные системы октавных фильтров эффективно применяются в тех случаях, когда достаточно судить о высокочастотной части спектра лишь по некоторым усредненным интегральным характеристикам [16, 28]. Типичный вид амплитудно-частотной характеристики гребенки октавных фильтров приведен на рис. 4.13.

Интересной и для рассматриваемой задачи весьма полезной особенностью дискретных фильтров является следующее их свойство. Если при работе с периодом дискретности T некоторый фильтр имеет полосу пропускания $[\omega_1, \omega_2]$, то при периоде дискретности T_1 полоса пропускания фильтра становится равной $\{(T/T_1)\omega_1, (T/T_1)\omega_2\}$, т. е. при увеличении тактовой частоты поступления информации полоса пропускания фильтра пропорционально и увеличивается и

смещается. Отмеченное свойство является прямым следствием того, что частотная характеристика $H(e^{j\omega T})$ дискретного фильтра зависит не от частоты ω , а от произведения частоты ω на период квантования T .

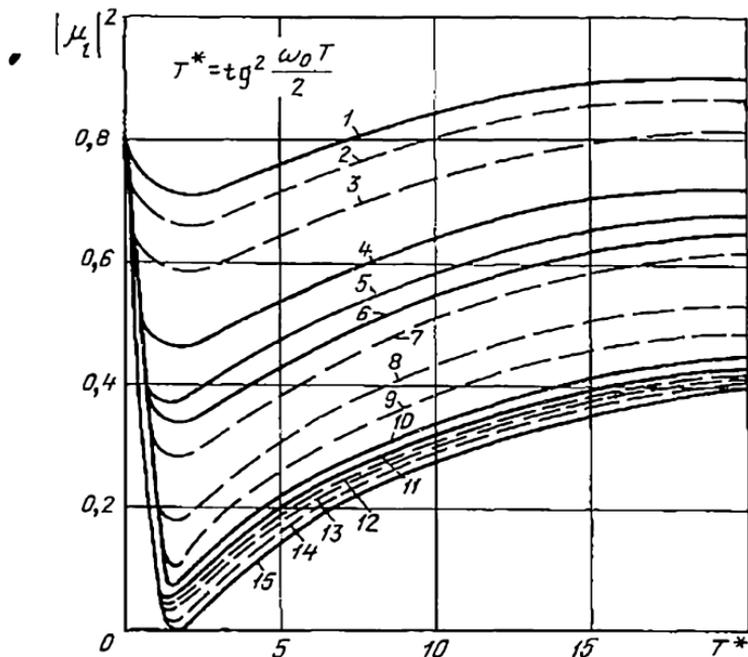


Рис. 4.12. Зависимость модулей тангенсных фильтров от их основных параметров.

Определим параметры тангенсного полосового фильтра с полосой пропускания 40 Гц (40—80 Гц) при частоте квантования 400 Гц. Выберем $n=8$. Производя расчеты по формулам (4.48) и (4.51), окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 H(z) &= W_{tg}^B(z) W_{tg}^H(z) = \\
 &= \frac{0,8912(1-z^{-1})^2}{1-1,452z^{-1}+0,7943z^{-2}} \frac{0,7126(1-z^{-1})^2}{1-1,22z^{-1}+0,5078z^{-2}} \times \\
 &\times \frac{0,5861(1-z^{-1})^2}{1-1,087z^{-1}+0,3435z^{-2}} \frac{0,5184(1-z^{-1})^2}{1-1,0264z^{-1}+0,2687z^{-2}} \times \\
 &\times \frac{0,4375(1+z^{-1})^2}{1-0,5212z^{-1}+0,687z^2} \frac{0,2933(1+z^{-1})^2}{1-0,4044z^{-1}+0,3087z^{-2}} \times \\
 &\times \frac{0,1804(1+z^{-1})^2}{1-0,3452z^{-1}+0,1168z^2} \frac{0,09845(1+z^{-1})^2}{1-0,3196z^{-1}+0,03476z^{-2}}. \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

На рис. 4.14 приведена амплитудно-частотная характеристика фильтра с передаточной функцией (4.53).

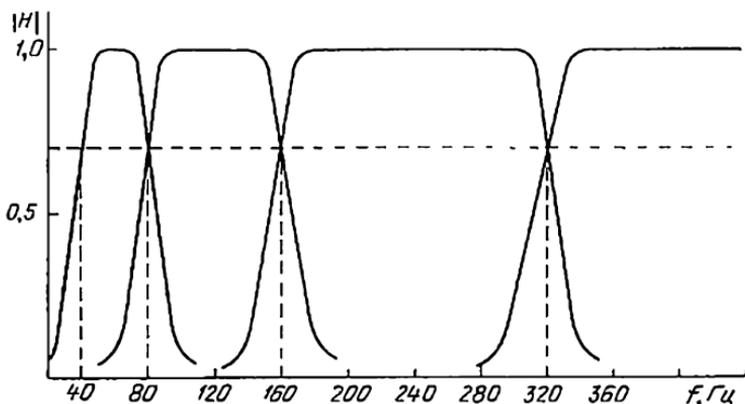


Рис. 4.13. Амплитудно-частотная характеристика гребенки октавных фильтров.

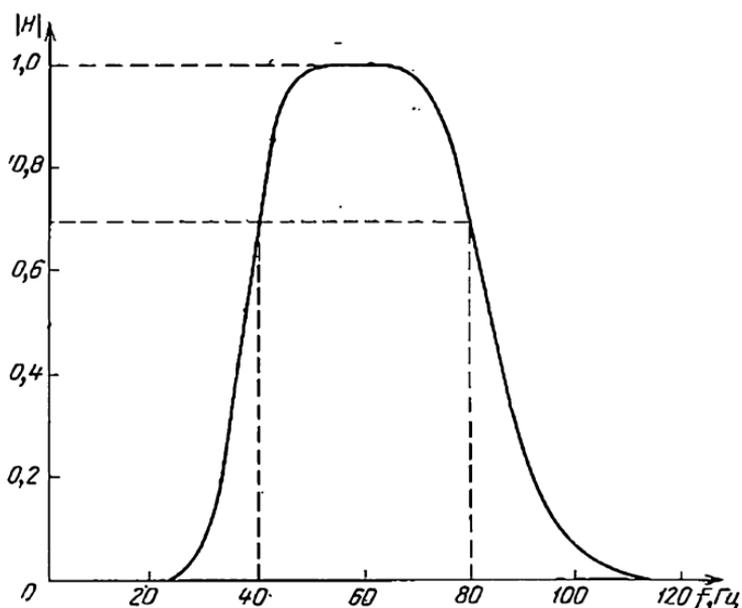


Рис. 4.14. Амплитудно-частотная характеристика фильтра с передаточной функцией (4.53).

Передаточная функция $H(z)$ позволяет записать систему разностных соотношений, связывающих дискретные значения сигналов на входе и выходе. Кратное изменение частоты квантования входного сигнала и частоты вычислений по программе, соответствующей

$H(z)$, позволяет реализовать фильтры с кратными значениями полосы пропускания. Параметры гребенки октавных фильтров, которую можно реализовать при этом, приведены в табл. 4.2.

Таким образом, для реализации гребенки из семи фильтров, перекрывающей интервал частот от 400 до 5 120 Гц, можно воспользоваться дискретными фильтрами, коэффициенты которых одина-

Таблица 4.2

Номер октавы	Частота квантования $f_{кв}$, Гц	Частота среза непрерывного фильтра $f_{ср}$, Гц	Полоса пропускания системы, Гц
I	400	200	40—80
II	800	400	80—160
III	1 600	800	160—320
IV	3 200	1 500	320—640
V	6 400	3 000	640—1 280
VI	12 800	5 000	1 280—2 560
VII	25 600	8 000	2 560—5 120

ковы и определяются формулой (4.53). Все это верно при естественном дополнительном условии, что каждый из этих семи параллельно соединенных фильтров работает со своей частотой квантования, кратной исходной частоте 400 Гц.

Кроме того, в таблице указаны ориентировочные значения частот среза непрерывных фильтров предварительной (предымпulseной) фильтрации. Поскольку дискретный фильтр не может быть фильтром нижних частот в обычном смысле этого понятия, предварительная фильтрация позволяет существенно снизить эффективное значение широкополосного шума на входе (§ 1.2). Более того, в рассматриваемой задаче обработки широкополосного сигнала по отдельным полосам частот высокочастотные компоненты входного сигнала играют роль шума для более низкочастотных. Поэтому дискретные полосовые фильтры могут применяться лишь в сочетании с аналоговыми элементами, фактически производящими грубое выделение интересующих нас диапазонов частот. Введение предварительной фильтрации одновременно позволяет снизить требования к величине частоты квантования для низкочастотных полосовых фильтров. При отсутствии подобных аналоговых фильтров частоты всех фильтров пришлось бы выбирать исходя из условий неискаженной передачи всего широкополосного процесса, т. е. ориентирясь на его наивысшую частоту.

Полоса пропускания непрерывного фильтра должна быть согласована с частотой квантования фильтра и его полосой пропускания. Пример подобного согласования приведен в табл. 4.2 для частот среза $f_{ср}$. К качеству фронтов непрерывного фильтра никаких особых требований не предъявляется. Достаточно лишь, чтобы между частотными характеристиками $W(p)$ непрерывного и соответствующего дискретного $H(z)$ полосового фильтра имело место соответствие типа приведенного на рис. 4.15.

4.4. ВЫБОР СТРУКТУРЫ РЕАЛИЗАЦИИ ПОЛОСОВОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Описанная в § 4.2—4.3 процедура синтеза динамических характеристик полосовых фильтров определяет его передаточную функцию как произведение передаточных функций отдельных элементарных звеньев. В этих условиях естественно (тем более что это существенно упрощает расчеты) принять за основу метод каскадного программирования полосового дискретного фильтра. Однако даже в условиях такого ограничивающего свободу действий допущения количество возможных способов реализации системы оказывается достаточно большим. Среди этих способов можно выбрать такой, при котором среднеквадратичное значение результирующих ошибок квантования будет наименьшим.

В целях конкретизации изложения остановимся на анализе полосового фильтра, построенного с использованием тангенсных фильтров четных порядков нижних и верхних частот. Пусть передаточная функция фильтра $H(z)$ имеет вид

$$H(z) = W_{tg}^H(z) W_{tg}^B(z), \quad (4.54)$$

где, в свою очередь, передаточные функции $W_{tg}^H(z)$ и $W_{tg}^B(z)$ в соответствии с соотношениями (4.47) и (4.50) записываются как произведения передаточных функций элементарных звеньев (4.48) и (4.49).

Поскольку порядки фильтров нижних и верхних частот n_H и n_B могут быть различными, передаточная функция (4.54) записывается в форме

$$H(z) = \prod_{l=1}^{n_H/2} W_{tg}^{Hl}(z) \prod_{k=1}^{n_B/2} W_{tg}^{Bk}(z), \quad (4.55)$$

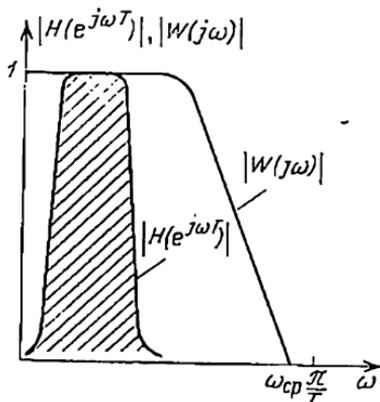


Рис. 4.15. Соотношение между частотными характеристиками передыпульсного $W(p)$ и дискретного $H(z)$ полосового фильтра.

где каждый из $N = (n_n + n_p)/2$ сомножителей есть звено второго порядка с передаточной функцией вида

$$W^l(z) = \frac{k_l (1 \pm z^{-1})^2}{1 - 2\operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}}. \quad (4.56)$$

При выборе структуры реализации передаточной функции $H(z)$, как уже отмечалось в § 3.3, существенное значение представляет как способ реализации отдельного звена (4.56), так и порядок следования этих звеньев в последовательной цепи.

Поскольку общее количество подобных вариантов весьма значительно, даже для фильтров невысоких порядков, на основании изложенного в гл. 3 первоначально решается задача выбора структуры элементарных звеньев и затем сравниваются варианты соединения звеньев, структура реализации каждого из которых уже считается фиксированной.

При синтезе полосовых фильтров количество вариантов, требующих анализа, может быть уменьшено, поскольку главные проблемы связаны с рассмотрением следующих двух задач:

1. Выбор оптимальных малозумящих структур реализации элементарных звеньев.

2. Сравнение двух вариантов соединения звеньев, отличающихся лишь последовательностью соединения элементарных звеньев $W^{n_{tg}}(z)$ и $W^{p_{tg}}(z)$, т. е. вариантов $H(z) = W^{n_{tg}}(z) W^{p_{tg}}(z)$ и $H(z) = W^{p_{tg}}(z) W^{n_{tg}}(z)$.

Возможность уменьшения просматриваемого количества вариантов соединения звеньев связана с тем, что однотипные звенья $W^{n_{tg}}(z)$ ($l=1, 2, \dots, n_p/2$), вообще говоря, сравнительно мало отличаются друг от друга по своим частотным свойствам (то же справедливо и для звеньев $W^{p_{tg}}(z)$), в то же время отличие частотных характеристик фильтров нижних и верхних частот весьма существенно. Этим объясняется и тот факт, что перестановка звеньев $W^{n_{tg}}(z)$ и $W^{p_{tg}}(z)$ может значительно изменить фильтрующие свойства цепи по отношению к ошибкам квантования по уровню (белому шуму) и, следовательно, величину дисперсии результирующей ошибки.

Уровень ошибок квантования существенно зависит от правильного выбора значений коэффициентов усиления k_l отдельных звеньев. Поскольку величины k_l всег-

да меньше единицы (см. соответствующие формулы в § 4.3), тона первый взгляд представляется целесообразным определять общий коэффициент усиления

$$k = \prod_l k_l^n \prod_s k_s^u$$

звена с передаточной функцией $H(z)$ и при его реализации умножать на k ($k \ll 1$) в последнюю очередь.

При этом среднеквадратичное значение результирующей ошибки, вычисляемое в соответствии с рассматриваемой методикой, уменьшилось бы в k раз, т. е. приняло бы значение $k\sigma$. Однако простое обращение к примерам показывает, что подобные рекомендации часто практически неприемлемы. Действительно, величины коэффициентов усиления k^{n_i} , приведенные в табл. 4.1 для фильтра порядка $n=20$, равны $k^{n_i}=10^{-3}$, так что общий коэффициент усиления фильтра с передаточной функцией $H(z)$ равен 10^{-30} .

Для большинства вычислительных машин такое число — машинный нуль, так что умножение на него невозможно (произведение есть нуль). Возникшее таким образом противоречие между рекомендациями, даваемыми в силу предлагаемой методики, и практическими возможностями современных ЭВМ объясняется тем, что статистическая трактовка ошибки квантования справедлива лишь при определенных предположениях о характере изменения сигналов относительно уровней квантования (§ 1.6). Однако эта трактовка не позволяет учесть эффекты, связанные с конечной длиной разрядной сетки. Следует отметить, что эффекты подобного рода вообще не могут быть проанализированы в рамках линейной теории.

Таким образом, при синтезе структуры реализации цифрового фильтра помимо всего прочего необходимо следить, чтобы по крайней мере по статическим коэффициентам передачи выполнялись условия масштабирования переменных. Как уже отмечалось в § 4.3, выбор коэффициентов k_l в соответствии с предлагаемой методикой синтеза фильтров обеспечивает такое масштабирование, и, следовательно, значения коэффициентов k^{n_i} и k^{u_i} можно определить с помощью формул (4.48) и (4.51).

Поскольку полюсы передаточных функций (4.56) комплексные, рассмотрим применение для их реализации структур $X1$ и $X2$. Пусть альтернатива выбора ограниче-

на только этими двумя структурами. Раскладывая передаточную функцию

$$W^l(z) = \frac{k_l (1 \pm z^{-1})^2}{1 - 2 \operatorname{Re} \mu_l z^{-1} + |\mu_l|^2 z^{-2}} \quad (4.57)$$

на элементарные дроби, получаем

$$\left. \begin{aligned} W^l(z) &= k_l + \frac{M_l}{z - \mu_l} + \frac{\bar{M}_l}{z - \bar{\mu}_l}, \quad M_l = \frac{(1 \pm \mu_l)^2}{\mu_l - \bar{\mu}_l} k_l; \\ R_l &= \operatorname{Re} M_l = (\alpha_l \pm 1) k_l, \\ I_l &= \operatorname{Im} M_l = k_l \frac{\beta_l^2 - (1 \pm \alpha_l)^2}{2\beta_l}. \end{aligned} \right\} (4.58)$$

Здесь принято в соответствии с обозначениями (2.33)

$$\alpha_l = \operatorname{Re} \mu_l, \quad \beta_l = \operatorname{Im} \mu_l.$$

Таким образом, звено с передаточной функцией $W^l(z)$ можно представить в виде параллельного соединения двух звеньев, имеющих передаточные функции k_l и $D^l(z)$:

$$W^l(z) = k_l + D^l(z), \quad D^l(z) = \frac{M_l}{z - \mu_l} + \frac{\bar{M}_l}{z - \bar{\mu}_l}. \quad (4.59)$$

Характер результирующих ошибок квантования на выходе звена $D^l(z)$ был подробно проанализирован в § 3.3. Если σ^2 есть дисперсия белого шума — ошибок квантования по уровню ($\sigma^2 = q^2/12$), то спектральная плотность $\Phi'_*(z)$ результирующей ошибки на выходе звена $D^l(z)$ определяется соотношениями (3.14), (3.15), (3.18), (3.19) для структуры $X1$ и (3.20), (3.21), (3.24), (3.25) для структуры $X2$.

Поскольку умножение на коэффициент k_l приводит к появлению дополнительной ошибки с постоянной спектральной плотностью, равной σ^2 , спектральная плотность $\tilde{\Phi}'_*(z)$ суммарной ошибки на выходе звена

$$\tilde{\Phi}'_*(z) = \Phi'_*(z) + \sigma^2. \quad (4.60)$$

Выпишем соотношения, необходимые для расчета спектральных характеристик ошибки на выходе звена (4.57) через его параметры. Для структуры $X1$ имеем (см. указанные выше формулы § 3.3)

$$\Phi'_*(z) = [W_{R1}^l(z) W_{R1}^l(z^{-1}) + W_{I1}^l(z) W_{I1}^l(z^{-1})] 3\sigma^2,$$

$$W_{R1}^l(z) = \frac{1 - \alpha_l z^{-1}}{1 - 2\alpha_l z^{-1} + (\alpha_l^2 + \beta_l^2) z^{-2}}, \quad (4.61)$$

$$W'_{11}(z) = \frac{-\beta_1 z^{-1}}{1 - 2\alpha_1 z^{-1} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) z^{-2}}.$$

Для структуры X2 соответственно получаем

$$\Phi'_0(z) = [W'_{R2}(z) W'_{R2}(z^{-1}) + W'_{I2}(z) W'_{I2}(z^{-1}) + 1] 2\sigma^2,$$

$$W'_{R2}(z) = \frac{R_1 - (\alpha_1 R_1 + \beta_1 I_1) z^{-1}}{1 - 2\alpha_1 z^{-1} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) z^{-2}}, \quad (4.62)$$

$$W'_{I2}(z) = \frac{-I_1 + (\alpha_1 I_1 - \beta_1 R_1) z^{-1}}{1 - 2\alpha_1 z^{-1} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) z^{-2}}.$$

Отметим, что знак «плюс» в соотношениях (4.57) — (4.58) соответствует фильтру нижних частот, а «минус» — фильтру верхних частот. Этот знак влияет лишь на значения величин R_i и I_i . Поскольку последние не входят в соотношения (4.61), получаем интересный вывод: при использовании структуры X1 результирующие ошибки на выходе фильтров верхних и нижних частот одинаковы, при использовании структуры X2 это утверждение, вообще говоря, уже неверно.

Составляющая спектральной плотности результирующей ошибки на выходе фильтра $H(z)$ (4.55), возникающая от ошибок квантования в i -м фильтре, определяется формулой (3.94):

$$\Phi'_r(z) = \tilde{\Phi}'_e(z) \prod_{s=i+1}^N W^s(z) W^s(z^{-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.63)$$

Здесь $\tilde{\Phi}'_e(z)$ — спектральная плотность ошибки на выходе i -го звена (4.60); $W^s(z)$ — звено, стоящее в каскадном соединении N звеньев на s -м месте.

Спектральная плотность $\Phi_r(z)$ суммарной ошибки на выходе звена $H(z)$, очевидно, определяется суммой

$$\Phi_r(z) = \sum_{i=1}^{N-1} \Phi'_r(z) + \tilde{\Phi}'_e(z). \quad (4.64)$$

При выборе вида структуры реализации необходимо для каждого из звеньев $W^i(z)$ проверить выполнение неравенства (3.119). Если неравенство справедливо, то для реализации звена с передаточной функцией $W^i(z)$ необходимо воспользоваться структурой X1, в противном

случае более предпочтительной оказывается структура X2.

Сравнение значений дисперсий σ_r^2 суммарных результирующих ошибок

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \Phi_r(z) \frac{dz}{z},$$

соответствующих различным последовательностям звеньев, позволяет выбрать рациональную структуру соединения элементов.

Приведем результаты численных расчетов, показывающие возможность существенного уменьшения среднеквадратичного значения результирующих ошибок за счет рационального размещения звеньев в последовательной цепи. При этом будем производить сравнение лишь двух вариантов размещения звеньев, отличающихся в соответствии со сказанным ранее лишь порядком соединения низкочастотного и высокочастотного фильтров (4.54). Внутри каждого из блоков расположении звеньев будем считать фиксированным и определяемым (слева направо) последовательностью вычисления параметров звеньев по формулам (4.45), (4.48), (4.51) ($k=0, 1, \dots, n-1$ в (4.45)).

Будем называть *структурой I* последовательность соединения звеньев, соответствующую формуле (4.54), и *структурой II* — последовательность, в которой $H(z) = W_{\text{тг}}^n(z) W_{\text{тн}}^n(z)$, величины дисперсий суммарных результирующих ошибок будем снабжать соответствующими индексами I и II ($\sigma_{I1}^2, \sigma_{II1}^2$).

Пусть частота среза высокочастотного фильтра есть $f_1=40$ Гц, а низкочастотного $f_0=80$ Гц. Частота квантования сигнала по времени равна $1/T=400$ Гц. Тогда проектируемый фильтр есть полосовой фильтр с полосой пропускания от 40 до 80 Гц.

Пусть $n_n=n_b=2$, тогда значения параметров фильтров равны $\alpha_n=0,18$, $\beta_n=0,4$, $k_n=0,2$; $\alpha_b=0,57$, $\beta_b=0,29$, $k_b=0,64$.

Проверка условия (3.119) показывает, что для обоих фильтров предпочтительной является структура X2. Результирующие ошибки на выходе фильтров, вычисляемые по формулам (4.60), (4.62), почти одинаковы: $\sigma_n^2=3,3\sigma^2$, $\sigma_b^2=3,38\sigma^2$. Также мало отличаются дисперсии суммарных результирующих ошибок: $\sigma_{II1}^2=5,06\sigma^2$, $\sigma_{I1}^2=4,6\sigma^2$.

Рассмотрим случай более высокого порядка фильтров, пусть $n_n=n_b=4$. Тогда соответствующие параметры фильтров равны:

- 1) $\alpha_n^1=0,23$, $\beta_n^1=0,65$, $k_n^1=0,4$;
- 2) $\alpha_n^2=0,16$, $\beta_n^2=0,17$, $k_n^2=0,13$;
- 3) $\alpha_b^1=0,66$, $\beta_b^1=0,44$, $k_b^1=0,9$;
- 4) $\alpha_b^2=0,52$, $\beta_b^2=0,17$, $k_b^2=0,48$.

Проверка условия (3.119) показывает, что первый, третий и четвертый фильтры следует реализовать с помощью структуры X2, а второй — с помощью структуры X1. Соответствующие дисперсии результирующих ошибок на выходе отдельных фильтров: $\sigma_1^2=$

$=3,36\sigma^2$, $\sigma_3^2=3,36\sigma^2$, $\sigma_2^2=4,26\sigma^2$, $\sigma_4^2=3,77\sigma^2$. Суммарные результирующие ошибки $\sigma_{II}^2=21,4\sigma^2$, $\sigma_I^2=8,3\sigma^2$.

Таким образом, оказывается, что размещение низкочастотного фильтра после высокочастотного позволяет снизить дисперсию ошибки в 2,5 раза, $\sigma_{II}^2/\sigma_I^2=2,58$, так что выигрыш в случае фильтра более высокого порядка становится существенным.

Представляется возможным высказать ряд общих соображений о рациональном выборе порядка следования низкочастотного и высокочастотного фильтров в зависимости от их параметров. При построении полосового фильтра в форме последовательного соединения низкочастотного и высокочастотного фильтров (см. рис. 4.6) последним должен стоять фильтр, полоса пропускания которого на основном интервале частот $[0, \pi/T]$ или $[0, f_{кв}/2]$ будет наименьшей. В этом случае суммарный уровень помех на выходе предыдущих звеньев будет максимально снижен.

В рассматриваемом численном примере эти полосы пропускания, соответствующие расчетным значениям f_0 и f_1 , равны для низкочастотного фильтра 80 Гц, для высокочастотного — 160 Гц (160 Гц=200 Гц—40 Гц). Поскольку разница между ними сравнительно мала, эффект уменьшения среднеквадратичного значения ошибки также не очень велик. Неидеальность характеристик фильтров приводит к дополнительному сглаживанию различия между структурами I и II. При построении фильтра с той же полосой пропускания, но более высокой частотой квантования ($f_{кв} \approx \approx 10\,000$ Гц), очевидно, можно рассчитывать на резкое различие значений дисперсий ошибок в случае реализации фильтра с помощью структур I и II (отношение σ_{II}^2/σ_I^2 принимает значения порядка сотен).

Приложение 1

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОШИБКИ КВАНТОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Покажем, что при достаточно малом шаге квантования случайного сигнала ошибка квантования представляет собой белый шум с равномерной плотностью вероятности, статистически независимый от квантуемого сигнала.

Пусть на вход квантующего устройства с нелинейной характеристикой, представленной на рис. 1.7, поступает стационарный случайный сигнал с непрерывной двумерной плотностью вероятности $\omega_{2,x}(x_1, x_2)$ (рис. П.1). На выходе квантующего устройства (см. рис. 1.8) случайный сигнал x_q принимает дискретные по уровню значения, кратные шагу квантования δ .

Вероятность того, что сигнал x_q в моменты времени t_1 и t_2 принимает квантованные значения $x_{q1}=i\delta$ и $x_{q2}=k\delta$, равна вероятности выполнения условий

$$i\delta - \delta/2 < x_1 < i\delta + \delta/2,$$

$$k\delta - \delta/2 < x_2 < k\delta + \delta/2.$$

При этом значение вероятности определяется интегралом

$$\begin{aligned} P(x_{q1} = i\delta, x_{q2} = k\delta) &= P(i\delta, k\delta) = \\ &= \int_{(i-1/2)\delta}^{(i+1/2)\delta} \int_{(k-1/2)\delta}^{(k+1/2)\delta} w_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Интеграл (П.1) равен объему фигуры $abcdefgk$ (рис. П.1), ограниченной сверху поверхностью $w_{2X}(x_1, x_2)$. Двумерная плотность ве-

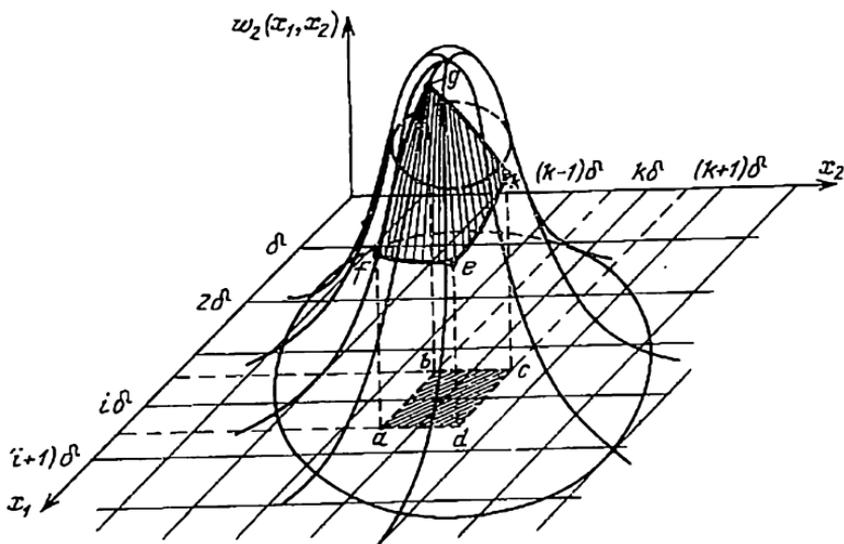


Рис. П.1. Двумерная плотность вероятности квантуемого сигнала.

роятности величины x_q на выходе квантующего устройства представляет собой функцию двух переменных x_{q1} и x_{q2} вида

$$w_{2X_q}(x_{q1}, x_{q2}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(i\delta, k\delta) \delta(x_{q1} - i\delta) \delta(x_{q2} - k\delta),$$

где $\delta(x_{q1} - i\delta)$, $\delta(x_{q2} - k\delta)$ — дельта-функции Дирака.

С учетом (П.1) последнее соотношение записывается в форме

$$w_{2X_q}(x_{q1}, x_{q2}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(x_{q1}, x_{q2}) \delta(x_{q1} - i\delta) \delta(x_{q2} - k\delta), \quad (\text{П.2})$$

$$P(x_{q1}, x_{q2}) = \int_{x_{q1}-\delta/2}^{x_{q1}+\delta/2} \int_{x_{q2}-\delta/2}^{x_{q2}+\delta/2} \omega_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (\text{П.3})$$

Величины вероятностей (П.1) являются значениями функции (П.3) при $x_{q1} = i\delta$, $x_{q2} = k\delta$.

Найдем двумерную характеристическую функцию квантованного сигнала x_q , которая определяется как двумерное преобразование Фурье от плотности вероятности $\omega_{2X_q}(x_{q1}, x_{q2})$,

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{2X_q}(x_{q1}, x_{q2}) \exp\{-j(u_1 x_{q1} + u_2 x_{q2})\} dx_{q1} dx_{q2}. \quad (\text{П.4})$$

Подставляя в (П.4) соотношение (П.2), получаем

$$\begin{aligned} F_{2X_q}(u_1, u_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(x_{q1}, x_{q2}) \delta(x_{q1} - i\delta) \delta(x_{q2} - \right. \\ &\quad \left. - k\delta) \right\} \exp\{-j(u_1 x_{q1} + u_2 x_{q2})\} dx_{q1} dx_{q2} = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_{q1}, x_{q2}) \delta(x_{q1} - i\delta) \delta(x_{q2} - \\ &\quad - k\delta) \exp\{-j(u_1 x_{q1} + u_2 x_{q2})\} dx_{q1} dx_{q2}. \end{aligned}$$

В силу свойств дельта-функций последнее выражение примет вид

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(i\delta, k\delta) \exp\{-j(i\delta u_1 + k\delta u_2)\}. \quad (\text{П.5})$$

При достаточно малом шаге квантования δ двойная сумма приближенно может быть записана как двойной интеграл:

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = \frac{1}{\delta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(x_{q1}, x_{q2}) \exp\{-j(u_1 x_{q1} + u_2 x_{q2})\} dx_{q1} dx_{q2}. \quad (\text{П.6})$$

Представим соотношение (П.3) в виде

$$\begin{aligned} P(x_{q1}, x_{q2}) &= \int_0^{x_{q1}+\delta/2} \int_0^{x_{q2}+\delta/2} \omega_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\ &\quad - \int_0^{x_{q1}-\delta/2} \int_0^{x_{q2}+\delta/2} \omega_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{x_{q1} + \delta/2} \int_0^{x_{q2} - \delta/2} \omega_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
& + \int_0^{x_{q1} - \delta/2} \int_0^{x_{q2} - \delta/2} \omega_{2X}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{П.7})
\end{aligned}$$

и подставим его в формулу (П.6). Применяя к полученному выражению теорему запаздывания и теорему о преобразовании Фурье от интеграла, найдем

$$\begin{aligned}
F_{2X_q}(u_1, u_2) = & \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{e^{j(\delta/2)u_1} e^{j(\delta/2)u_2}}{j u_1 j u_2} F_{2X}(u_1, u_2) - \right. \\
& - \frac{e^{-j(\delta/2)u_1} e^{j(\delta/2)u_2}}{j u_1 j u_2} F_{2X}(u_1, u_2) - \\
& - \frac{e^{j(\delta/2)u_1} e^{-j(\delta/2)u_2}}{j u_1 j u_2} F_{2X}(u_1, u_2) + \\
& \left. + \frac{e^{-j(\delta/2)u_1} e^{-j(\delta/2)u_2}}{j u_1 j u_2} F_{2X}(u_1, u_2) \right], \quad (\text{П.8})
\end{aligned}$$

где $F_{2X}(u_1, u_2)$ — двумерная характеристическая функция квантуемого сигнала:

$$\begin{aligned}
F_{2X}(u_1, u_2) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{2X}(x_1, x_2) \exp \{ -j(u_1 x_1 + \\
& + u_2 x_2) \} dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

После элементарных преобразований получаем

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = F_{2X}(u_1, u_2) \frac{e^{j\delta u_1/2} - e^{-j\delta u_1/2}}{j\delta u_1} \frac{e^{j\delta u_2/2} - e^{-j\delta u_2/2}}{j\delta u_2}$$

или

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = F_{2X}(u_1, u_2) \frac{\sin(\delta u_1/2) \sin(\delta u_2/2)}{(\delta u_1/2) (\delta u_2/2)}. \quad (\text{П.9})$$

Обозначим

$$F_{2q}(u_1, u_2) = \frac{\sin(\delta u_1/2) \sin(\delta u_2/2)}{(\delta u_1/2) (\delta u_2/2)}. \quad (\text{П.10})$$

Тогда уравнение (П.9) можно переписать в следующем виде:

$$F_{2X_q}(u_1, u_2) = F_{2X}(u_1, u_2) F_{2q}(u_1, u_2). \quad (\text{П.11})$$

Таким образом показано, что двумерная характеристическая функция квантованного сигнала $x_q(t)$ равна произведению двумерной характеристической функции квантуемого сигнала $x(t)$ и двумерной характеристической функции $F_{2q}(u_1, u_2)$. Последняя существенно зависит от величины шага квантования и может рас-

смагиваться как двумерная характеристическая функция ошибки квантования $q(t)$. Известно, что если двумерная характеристическая функция суммы двух случайных процессов равна произведению двумерных характеристических функций каждого из процессов, то такие случайные процессы статистически взаимно независимы.

Таким образом, на основании соотношения (П.11) можно сделать вывод о том, что при достаточно малом шаге квантования квантуемый случайный сигнал и шум квантования статистически независимы. Кроме того, из формулы (П.10) следует, что двумерная характеристическая функция ошибки квантования равна произведению двух одномерных характеристических функций ошибки вида

$$F(u) = \frac{\sin(\delta u/2)}{\delta u/2}. \quad (\text{П.12})$$

Следовательно, любые два значения ошибки квантования, разнесенные по времени, статистически независимы.

Одномерную плотность вероятности шума квантования легко найти с помощью обратного преобразования Фурье от характеристической функции (П.12)

$$w(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{juq} \frac{\sin(\delta u/2)}{\delta u/2} du,$$

которое дает

$$w(q) = \begin{cases} 1/\delta & \text{при } -\delta/2 \leq q \leq \delta/2, \\ 0 & \text{при } q < -\delta/2, q > \delta/2. \end{cases} \quad (\text{П.13})$$

Таким образом, распределение плотности вероятности шума квантования равномерное.

Дисперсия шума квантования равна

$$\bar{q}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 w(q) dq = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{1}{\delta} q^2 dq = \frac{\delta^2}{12}. \quad (\text{П.14})$$

1

Приложение 2

Как показано в [33], интеграл вида

$$I = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} Y(z) Y(z^{-1}) \frac{dz}{z} \quad (\text{П.15})$$

может быть вычислен через коэффициенты изображения

$$Y(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{l-1} z^{-(l-1)} + a_l z^{-l}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{l-1} z^{-(l-1)} + b_l z^{-l}} \quad (\text{П.16})$$

без нахождения полюсов.

Для $l=1$ имеем [33]

$$I = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & b_0 \\ \gamma_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{\gamma_0 b_1 - \gamma_1 b_0}{b_1^2 - b_0^2}, \quad (\text{П.17})$$

где

$$\gamma_0 = \frac{a_1 a_0}{b_0}; \quad \gamma_1 = \frac{(a_1^2 + a_0^2) b_0 - a_0 a_1 b_1}{b_0^2}. \quad (\text{П.18})$$

Для $l = 2$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & b_1 & b_0 \\ \gamma_1 & b_2 + b_0 & 0 \\ \gamma_2 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \\ b_1 & b_2 + b_0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(b_2 + b_0)(b_2 \gamma_0 - b_0 \gamma_2) + b_1 \gamma_1 (b_0 - b_2)}{(b_2 - b_0)(b_2 - b_1 + b_0)(b_2 + b_1 + b_0)}, \quad (\text{П.19})$$

где

$$\gamma_0 = \frac{a_2 a_0}{b_0}; \quad \gamma_1 = \frac{a_2 a_1 + a_1 a_0}{b_0} - \frac{b_1 a_2 a_0}{b_0^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{a_2^2 + a_1^2 + a_0^2}{b_0} - \frac{b_2 a_2 a_0 + b_1 (a_2 a_1 + a_1 a_0)}{b_0^2} +$$

$$+ \frac{b_1^2 a_2 a_0}{b_0^3}. \quad (\text{П.20})$$

Для $l = 3$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_0 & b_2 & b_1 & b_0 \\ \gamma_1 & b_3 + b_1 & b_0 & 0 \\ \gamma_2 & b_2 + b_0 & b_3 & 0 \\ \gamma_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ b_2 & b_3 + b_1 & b_0 & 0 \\ b_1 & b_2 + b_0 & b_3 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}, \quad (\text{П.21})$$

где

$$\gamma_0 = \frac{a_3 a_0}{b_0}; \quad \gamma_1 = \frac{a_3 a_1 + a_2 a_0}{b_0} - \frac{b_1 a_3 a_0}{b_0^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{b_0} (a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_1 a_0) - \frac{1}{b_0^2} (b_2 a_3 a_0 + b_1 a_3 a_1 + b_1 a_2 a_0) + \frac{b_1^2}{b_0^3} a_3 a_0; \quad (\text{П.22})$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{1}{b_0} (a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2) - \\ & - \frac{1}{b_0^2} [b_3 a_3 a_0 + b_2 a_3 a_1 + b_2 a_2 a_0 + b_1 (a_3 a_2 + a_2 a_1 + a_1 a_0)] + \\ & + \frac{b_1}{b_0^3} (2b_2 a_3 a_0 + b_1 a_3 a_1 + b_1 a_2 a_0) - \frac{b_1^3}{b_0^4} a_3 a_0. \end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что полученные таким образом соотношения справедливы лишь в том случае, если все корни знаменателя передаточной функции (П.16) по модулю меньше единицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1969.
2. Верешкин А. Е., Дивьети Л. Д., Росси К. М., Шмид Р. М. Вероятностный анализ ошибок квантования в линейном цифровом фильтре при учете различных структур его реализации. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 8.
3. Верешкин А. Е., Дивьети Л. Д., Росси К. М., Шмид Р. М. О двух новых структурах реализации дискретной передаточной функции с комплексными полюсами. — «Автоматика и телемеханика», 1968, № 9.
4. Воронов А. А. Основы автоматического управления. Часть II, М. — Л., «Энергия», 1966.
5. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М., ГТТИ, 1934.
6. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. Э. Численные методы анализа. М., «Наука», 1967.
7. Джури Э. А. Импульсные системы автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1963.
8. Калахан Д. Современный синтез цепей. М., «Энергия», 1966.
9. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Многомерные дискретные системы управления. М., «Наука», 1966.
10. Катковник В. Я., Полуэктов Р. А. Об оптимальной передаче непрерывного сигнала через импульсную цепь. — «Автоматика и телемеханика», 1964, № 2.
11. Катковник В. Я. Об одном способе выбора параметров дискретных полосовых фильтров. — «Автоматика и телемеханика», 1969, № 8.

12. Катковник В. Я. Стабилизация спектра стационарного случайного процесса. — «Известия АН СССР. Техническая кибернетика», 1969, № 2.
13. Косякин А. А. Статистическая теория квантования по уровню. — «Автоматика и телемеханика», 1961, № 6.
14. Косякин А. А. Статистический анализ цифровых автоматических систем. В кн.: Многосвязные и инвариантные системы. Нелинейные и дискретные системы. М., «Наука», 1968.
15. Коршунов Ю. М., Бобиков А. И. Цифровые сглаживающие и преобразующие системы. М., «Энергия», 1969.
16. Случайные колебания. Под ред. Кренделла С. М., «Мир», 1967.
17. Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. М., «Машиностроение», 1962.
18. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Сов. радио», 1969.
19. Лэннинг Дж. Х., Бэтти Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., ИЛ, 1958.
20. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1962.
21. Основы автоматического управления. Под ред. Пугачева В. С. М., Физматгиз, 1963.
22. Райцын Т. М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. М., «Энергия», 1970.
23. Рейдер К. М., Гоулд Б. Методы расчета цифровых фильтров в частотной области. Пер. с англ. В кн.: Труды института инженеров по электротехнике и радиотехнике, 1967, т. 55, № 2.
24. Сапожков М. А. Речевой сигнал в кибернетике и связи. М., Связьиздат, 1963.
25. Справочная книга по технике автоматического регулирования. Под ред. Дж. Траксела. Пер. с англ. М.—Л., «Энергия», 1962.
26. Ту Ю. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.
27. Тьен Чанг Хсай. Синтез цифровых фильтров. — «Зарубежная радиоэлектроника», 1970, № 1.
28. Фланаган Д. Л. Анализ, синтез и восприятие речи. М., «Связь», 1968.
29. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., ГИИТТЛ, 1957.
30. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., Физматгиз, 1962.
31. Цифровое управление в системах автоматики. Сб. статей. Под ред. В. А. Мясникова. Л., «Наука», 1968.
32. Цыпкин Я. З. Оценка влияния квантования по уровню на процессы в цифровых автоматических системах. — «Автоматика и телемеханика», 1960, № 3.
33. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963.
34. Чанг Ш. С. Л. Синтез оптимальных систем автоматического управления. М., «Машиностроение», 1964.
35. Antoniou A. Realization of Digital Filters. — «IEEE Trans.», 1972, v. AE-20, № 1.
36. Vanzaigo F., Pellandini F. Problemes de realization des filtres digitaux. — «Agen Special Issue on Digital Filters», 1969, July.

37. Bennet W. R. Spectra of Quantized Signals. — «Bell System Technical Journal», 1948, v. 27, July.
38. Burrus C. S., Parks T. W. Time domain design of recursive digital filters. — «IEEE Trans.», 1970, v. AE-18, № 2.
39. Divieti L. D., Rossi C. M., Schmid R. M., Vereschkin A. E. A note on Computing Quantization Error in Digital Control Systems. — «IEEE Trans.», 1967, v. AC-12, № 5.
40. Halyo N., McAlpine G. A. A discrete model for product quantization errors in digital filters. — «IEEE Trans.», 1971, v. AE-19, № 3.
41. Gold B., Rader C. Digital processing of signals. New York, McGraw Hill, 1969.
42. Holtz H., Leondes C. T. The synthesis of recursive digital filters. — «J. Assoc. Comput. Mach.», 1966, v. 13, № 2.
43. Jackson L. B., Kaiser J. F., McDonald H. S. An approach to the implementation of digital filters. — «IEEE Trans.», 1968, v. AE-16, Sept.
44. Jackson L. B. Roundoff-noise Analysis for Fixed-point Digital Filters Realized in Cascade or parallel form. — «IEEE Trans.», 1970, v. AE-18, June.
45. Johnson G. W. Upper Bound on Dynamic Quantization Error in Digital Control Systems. — «IEEE Trans.», 1965, v. AC-10, № 4.
46. Knowles J. B., Olcayto F. M. Coefficient accuracy and digital filter response. — «Proc. IEEE», 1965, v. 112, June.
47. Knowles J. B., Edwards R. Effect of a Finite-word-length Computer in Sampled-data Feedback Systems. — «Proc. IEE», 1965, v. 112, № 6.
48. Kuo F. K., Kaiser J. F. System Analysis by Digital Computer. Ed. New York, Wiley, 1967, ch. 7.
49. Mason S. J. Feedback theory-some properties of signal flow graphs. — «Proc. IRE», 1953, v. 41, Sept.
50. Meek J. W., Veletsos A. S. Fast convolution for Recursive Digital Filters. — «IEEE Trans.», 1972, v. AE-20, № 1.
51. Nelson G. A., Pfeifer L. L., Wood R. C. High-Speed Octave Band Digital Filtering. — «IEEE Trans.», 1972, v. AE-20, № 1.
52. Rabiner L. R., Shaffer R. W. Recursive and Nonrecursive Realization of Digital Filters Designed by Frequency Sampling Techniques. — «IEEE Trans.», 1971, v. AE-19.
53. Slaughter J. B. Quantization errors in digital control systems. — «IEEE Trans.», 1964, v. AC-9, № 1.
54. Tufts D. W., Rorabacher D. W., Mosier W. E. Designing Simple, effective digital filters. — «IEEE Trans.», 1970, v. AE-18, June.
55. Weinberg L. Network Analysis and synthesis. McGraw Hill, 1962, № 4.
56. Weinstein C., Oppenheim A. V. A comparison of roundoff noise in floating point and fixed point digital filter realizations. — «Proc. IEEE», 1969, v. 57, June.
57. White S. A. A slow approach to mechanizing a fast digital Interpolation Filter. — «IEEE Trans.», 1972, v. AE-20, № 1.
58. Widrow B. Statistical Analysis of amplitude quantized Sampled-data Systems. — «AIEE Trans.», pt. II. 1961, January, № 52.
59. Wiener N. L. Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. John Wiley, 1950, № 4.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм реализации фильтра 37, 103, 105
- Винера Задача (синтез оптимального дискретного фильтра) 19
- Граф линейный 45
- прохождения сигналов 44
- Дискретный белый шум 9
- фильтр 10
- Дисперсия ошибки 19
- — квантования 35, 138
 - — округления 84
- Запаздывания теорема 144
- Звено формоимпульсное 46
- Квантование по времени 23
- по уровню 22
- Контуры 46
- несоприкасающиеся 46, 49
- Котельникова условия 20
- Критерий качества модели 19
- Мезона формула 43, 45, 61, 69
- Масштабирование переменных 137
- Метод вычетов 89, 96
- прямой Ляпунова 23
 - Рунге—Кутты 18
 - Эйлера 18
- Методы инвариантных весовых функций 14
- реализации цифровых фильтров 37—62
 - численного интегрирования 17
- Модель дискретная устойчивая 17
- — оптимальная 19
 - — —, критерий качества 19
 - — —, полюсы 17
 - с формоимпульсным элементом 16
- Моделирование цифрового фильтра второго порядка 105
- — первого порядка 103
- Оператор сдвнга полиномиальный 10
- Ошибка квантования 3, 24, 33, 141
- —, методы оценки 29
 - — результирующая 27, 63, 138
 - — по уровню 4, 26
 - округления 27
- Период дискретности 6, 19, 131
- Порядок фильтра 127
- Преобразование Фурье 7, 145
- Преобразователь аналого-цифровой 21, 23, 33
- цифро-аналоговый 21
- Программирование цифрового фильтра непосредственное (прямое) 38
- — — параллельное 40
 - — — последовательное (каскадное) 42, 68, 75, 135
- Путь замкнутый 46
- разомкнутый 45
- Синтез дискретных полосовых фильтров 108
- речевого сигнала 110
- Спектральная теория дискретных процессов 6—37
- Структура K_1, K_2 57, 75
- PI, P_2 56, 73
 - X_1, X_2 60, 97, 107
- каскадного соединения элементов 140
 - программирования каскадного 78, 91
 - — непосредственного 49
 - — — с многомерным входом 51, 99
 - — — — выходом 72, 76, 86
 - оптимальная 53, 100
 - прямая 51, 53
- Теория графов 4, 44, 49
- Уровень квантования 22
- Фиксатор 17, 23
- Фильтр Баттерворта 113
- — дискретный 120
 - — дискретный 10, 134
 - — линейный стационарный 10
 - — устойчивый 12
 - минимально-фазовый устойчивый 118
 - октавный 131
 - полосовой 4, 105, 111
 - — дискретный 108
 - — непрерывный 121
 - —, степень устойчивости 129
 - предимпульсный 21
 - —, оптимизация характеристик 22
 - синусный 124
 - тангенсный 127, 135
 - цифровой 32, 36, 38
 - —, весовая функция 11, 72
 - —, граф реализации 44
 - —, полоса пропускания 131, 134
 - —, условия физической реализуемости 40
 - Чебышева 113, 115
- Фильтрация предварительная 21, 134
- Функция передаточная 11, 39, 54, 58
- порождающая 112, 117
 - характеристическая 143
 - двумерная квантованного сигнала 144
 - — — ошибки квантования 145
- Характеристики спектральные 6
- частотные 6
- Цифровое кодирование сигнала 23
- Частота квантования 20, 141
- Шаг квантования 25, 141
- Шум квантования 24, 33, 36, 83

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Динамические характеристики цифровых фильтров	6
1.1. Квантование по времени. Частотные свойства линейных дискретных фильтров	6
1.2. Дискретные модели непрерывных звеньев. Предымпulseная фильтрация	13
1.3. Квантование по уровню. Цифровые фильтры	22
1.4. Оценка максимальной ошибки квантования сигнала по уровню	29
1.5. Вероятностные характеристики ошибки квантования	33
Глава 2. Методы реализации цифровых фильтров	37
2.1. Способы программирования дискретной передаточной функции цифрового фильтра	37
2.2. Метод графов в задаче реализации цифровых фильтров	43
2.3. Структуры реализации цифровых фильтров	49
2.4. Структуры параллельного программирования дискретной передаточной функции с комплексными полюсами	57
Глава 3. Результирующие ошибки округления на выходе цифрового фильтра при различных структурах его реализации	62
3.1. Учет ошибок округления в графах реализации цифрового фильтра. Результирующие ошибки квантования	62
3.2. Оценка максимальной результирующей ошибки квантования на выходе цифрового фильтра	71
3.3. Среднеквадратичное значение результирующей ошибки округления	83
3.4. Оптимальные структуры реализации цифровых фильтров	100
3.5. Экспериментальная оценка результирующих ошибок квантования	102
Глава 4. Цифровые полосовые фильтры	108
4.1. Применение полосовых фильтров в различных областях техники	108
4.2. Методы синтеза полосовых фильтров	111
4.3. Определение параметров фильтров	121
4.4. Выбор структуры реализации полосового цифрового фильтра	135
Приложение 1	141
Приложение 2	145
Список литературы	147
Предметный указатель	150

АРКАДИЯ ЕВТИХЬЕВИЧ ВЕРЕШКИН
ВЛАДИМИР ЯКОВЛЕВИЧ КАТКОВНИК

ЛИНЕЙНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ
И МЕТОДЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

(Анализ ошибок квантования по уровню)

Редактор *М. С. Гордон*
Художественный редактор *Э. Е. Вендрова*
Технический редактор *Э. Н. Ратникова*
Корректор *Л. И. Кирильченко*

Сдано в набор 13/IV 1973 г. Подписано в печать 24/VIII 1973 г. Т-11068
Формат 84×108/32 Бумага типографская № 2 Объем 7,98 усл. п. л.
8,364 уч.-изд. л. Тираж 7 600 экз. Зак. 187 Цена 40 коп.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693

Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома»
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,
Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

40 коп.

11

1077

