

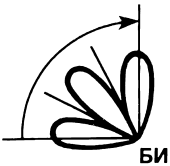
БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА

Е.Л. Шендеров

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

СУДОСТРОЕНИЕ

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА



БИБЛИОТЕКА
ИНЖЕНЕРА-
ГИДРОАКУСТИКА

Серия основана в 1976 году

Е.Л. Шендеров

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА



Ленинград
„Судостроение"
1989

ББК 32.875
Ш47
УДК 534.2

Редакционная коллегия:

А. В. Алексеев, В. Н. Бабий, Е. А. Васильцов, А. П. Евтютов, П. К. Зубарев, В. И. Ильичев, А. Е. Колесников, Е. А. Корепин, А. П. Ляликов, В. Ф. Мартынюк, В. В. Ольшевский, Л. В. Орлов, А. Л. Простаков, В. А. Сапрыкин, Г. М. Свердлин, Ю. Ф. Тарасюк, (ответственный редактор), *В. И. Тимошенко*

Рецензент д-р физ.-мат. наук проф. С. А. Рыбак

Шендеров Е. Л.

Ш47 Излучение и рассеяние звука. – Л.: Судостроение, 1989. – 304 с.: ил. – (Б-ка инженера-гидроакустика).

ISBN 5–7355–0101–1

Изложены основные вопросы, связанные с излучением и рассеянием звуковых волн в гидроакустике. Рассмотрены методы расчета звуковых полей для гидроакустических излучателей сложной формы и методы определения характеристик звуковых полей, рассеянных препятствиями.

Для инженеров, занимающихся проектированием судовых гидроакустических приборов, специалистов по судовой и архитектурной акустике.

Ш $\frac{2705140300-060}{048(01)-89}$ 32-89 **ББК 32.875**

ISBN 5–7355–0101–1

© Шендеров Е. Л.,1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Анализ звуковых полей, возникающих при излучении и рассеянии звука, встречается в различных технических приложениях акустики. Одной из наиболее широких областей, в которой используются расчеты звуковых полей, является судовая акустика. При изучении акустических характеристик судовых конструкций и акустических приборов приходится вычислять параметры звуковых полей, связанных со звукоизлучением сложных конструкций, дифракцией звука на корпусе судна, определением акустических характеристик упругих пластин и оболочек.

Научных публикаций в указанной области достаточно много. Полезные результаты представлены в коллективной монографии [93], имеющей энциклопедический характер, к сожалению, не переведенной на русский язык, а также в двухтомнике [54].

За последние двадцать лет, прошедших со времени выхода указанных книг, было опубликовано огромное (тысячи) количество статей, связанных с дифракцией и излучением волн. Накоплен большой опыт проведения расчетов и разработаны новые методы. Некоторые из них были известны и ранее, однако из-за ограниченных возможностей вычислительной техники не могли эффективно использоваться.

Настоящая книга, так же и предыдущая [63], содержит описание ряда методов, необходимых для квалифицированных инженеров и научных работников, применяющих в своей практике теоретический и расчетный анализы звуковых полей.

В одной книге невозможно охватить все вопросы, связанные с проблемой излучения и дифракции звука. В частности, сюда не вошли такие важные вопросы, как дифракция на решетках, излучение звука из открытого конца волновода. Этим проблемам посвящен ряд фундаментальных работ, например [10, 71]. Поэтому здесь рассмотрены лишь некоторые основные вопросы, которые не нашли достаточного полного освещения в книгах по акустике. К ним относятся, например, методы, связанные с применением интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции волн телами сложной формы.

Большое практическое и теоретическое значение имеет решение задачи о дифракции волн на ребре клина. Несмотря на то, что указанная задача принадлежит к числу классических, поток научных статей в этой области не ослабевает. В последнее время были получены важные расчетные формулы, равномерно описывающие поле во всем пространстве.

Здесь приведены некоторые результаты, позволяющие вычислять звуковое поле, рассеянное телами с острыми кромками, а также определять характеристики излучателей, искаженные в результате влияния таких тел.

Много работ посвящено рассеянию звука упругими телами. Однако в силу вычислительных и математических сложностей в этих работах в основном описаны акустические характеристики тел простых форм – однослойных пластин, цилиндрических и сферических оболочек. В настоящей книге использован матричный метод, позволяющий проводить вычисления звуковых полей при излучении и рассеянии звука многослойными цилиндрическими и сферическими оболочками, в том числе с учетом анизотропии материала.

В связи с большим количеством статей по затронутым в книге вопросам невозможно представить полный список литературы. Поэтому ссылки даны лишь на те работы, которые непосредственно связаны с излагаемым материалом, а также на некоторые последние публикации, включающие библиографию более ранних работ.

Отзывы и предложения по книге просим присылать по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8, издательство „Судостроение".

ПЛОСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ ЗВУКА

1.1. О постановке задач излучения и рассеяния звука

Методы решения задач излучения и рассеяния звука обычно принято разделять на приближенные и строгие (или точные). При этом для получения результатов по любой физической или технической проблеме необходимы: 1 – постановка задачи, которая включает выбор модели, адекватной данной задаче, и определение исходных параметров этой модели; 2 – математическое (логическое) решение; 3 – проверка полученных результатов. Только второй этап хотя бы принципиально допускает строгое логическое решение, все остальные являются чисто интуитивными.

Действительно, например, если бы часть исходных данных была получена строго, то естественно было бы включить эту часть работы в математический этап, при этом граница между этапом постановки и решения просто передвинулась. В связи с этим к постановке задачи неприменимо понятие „строгие методы". Аналогично и для проверки полученных результатов. Поскольку постановка задачи – процесс интуитивный, то и окончательные результаты всегда являются в той или иной степени неопределенными. Кроме того, результаты можно проверить сравнением их с результатами опыта и эксперимента, всегда имеющими погрешности, либо с результатами других расчетов, а при отсутствии этих данных – полагаясь на знания и здравый смысл. Во всех этих случаях какое-либо строгое логическое подтверждение полученных результатов принципиально невозможно, и решение считается верным, если квалифицированные специалисты ему верят на основании своего опыта и априорного знания результатов решения других близких задач. Поэтому само разделение методов на приближенные и строгие применимо лишь для этапа математического решения после того, как выбраны расчетная модель, основные уравнения и граничные условия.

Будем рассматривать стационарные задачи излучения и дифракции в линейной постановке, считая, что звуковое давление p в среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \tag{1.1}$$

где $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число; c – скорость звука в среде; λ – длина звуковой волны; зависимость от времени определяется

множителем $\exp(-i\omega t)$, т. е. колебания считаются монохроматическими (исключение представляет содержание п. 5.8).

В качестве граничных условий для задачи излучения звука обычно выбирают условие неразрывности нормальной составляющей смещения или колебательной скорости v_n на поверхности тела S, т. е.

$$v_n = \frac{1}{i\omega\rho} \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S , \qquad (1.2)$$

где ρ – плотность среды; n – нормаль к излучающей поверхности.

В левой части стоит нормальная составляющая колебательной скорости тела, в правой – нормальная составляющая скорости частиц в среде вблизи поверхности. Можно рассматривать следующие возможные варианты выбора расчетной модели. В качестве широко применяемого приближения можно считать, что задано распределение колебательной скорости по поверхности, т. е. $v_n = v_0 f(S)$, где $f(S)$ – известная функция, v_0 – колебательная скорость в некоторой точке, называемой точкой приведения. [В простейшем случае для равномерного амплитудно-фазового распределения скорости $f(S) = 1$]. При такой постановке задачи колебания поверхности считаются известными и не рассматриваются способ подвода энергии, процесс возбуждения колебаний и материал, из которого выполнен излучатель.

Более сложная задача возникает в случае, если колебательная скорость неизвестна, а заданы силы, действующие на тело. В этом случае совместно с задачей об излучении звука необходимо решать и задачу о возбуждении колебаний в упругом теле, т. е. кроме граничного условия (1.2) рассматривать уравнение упругих колебаний $L\vec{v} = \vec{F}$, где L – дифференциальный оператор; $\vec{v}$ – вектор колебательной скорости; $\vec{F}$ – вектор действующих сил. И, наконец, при расчете электроакустических излучателей встречается ситуация, при которой действующие силы также неизвестны, а заданы электрические напряжения, возбуждающие излучатель. В этом случае к указанным соотношениям необходимо добавить и уравнения, определяющие вид электромеханического преобразования, в частности уравнения пьезоэффекта.

Вдали от тел конечных размеров должно выполняться условие излучения Зоммерфельда $\lim_{r\to\infty} r(\partial p/\partial r - ikp) = 0$. Это условие эквивалентно требованию, согласно которому на больших расстояниях от источника поле должно описываться выражением $p \xrightarrow[r\to\infty]{} A(\varphi, \theta)\exp(ikr)/r$. Из него следует, что дальнее поле излучателя в безграничном пространстве должно представлять собой уходящую сферическую волну, а волны, приходящие к источнику, должны отсутствовать. Кроме того, разделение на два множителя (один из них зависит только от пространственных углов, второй – только от расстояния) говорит о возможности введения в рассмотрение диаграммы направленности, которая, начиная с некоторых достаточно больших величин r, не должна зависеть от расстояния.

Активные потери в среде, связанные с поглощением звука, формально описываются введением комплексного волнового числа $\overline{k} = k(1 + i\alpha)$ $(\alpha > 0)$ или комплексной скорости $\overline{c} = c(1 - i\beta)$ $(\beta > 0)$, что приводит к представлению распространяющейся волны в виде выражений $\exp(ikx) = \exp(i\overline{k}x)\exp(-\alpha kx)$. Заметим, что в случае, если фактор времени задан в виде $\exp(+i\omega t)$, то для правильного описания затухающей волны необходимо задавать в выражениях для $\overline{k}$ и $\overline{c}$ другие знаки, т. е. $\overline{k} = k(1 - i\alpha)$, $\overline{c} = c(1 + i\beta)$.

При решении ряда задач для среды без потерь в целях исключения возникающих в некоторых случаях неопределенностей используют *принцип предельного поглощения*. Согласно этому принципу вводят некоторое поглощение, т. е. считают, что $\alpha \neq 0$, а в окончательных формулах значение α устремляют к нулю. Например, в обычном смысле интеграл $\int_0^\infty \exp(ikx)dx$ является неопределенным, но по принципу предельного поглощения его можно представить как

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^\infty \exp[ik(1 + i\alpha)x]dx = \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{ik} \exp(ikx - \alpha x) \Big|_0^\infty \right].$$

Если до перехода к пределу подставить пределы интегрирования, то получим конечное выражение, равное i/k. Поле вблизи острых кромок тела должно удовлетворять условию Мейкснера (см. гл. 3), согласно которому поле на кромках должно оставаться конечным, т. е. источники энергии по этим линиям должны отсутствовать. Математически это условие можно записать следующим образом. При $r \to 0$, где r – расстояние от кромки, поле должно убывать не медленнее, чем

$$A + B(kr)^{\pi/\alpha}. \tag{1.3}$$

Здесь A и B – константы; α – внешний двугранный угол на острой кромке. Например, для полуплоскости $\alpha = 2\pi$. Постоянный член A может быть равен нулю, как, например, для ребра, расположенного на стыке акустически жесткой и мягкой полуплоскостей.

В большинстве случаев нет необходимости в процессе решения задач для тел с ребрами использовать это условие. Однако полученные конечные выражения должны ему удовлетворять и оно может служить одним из критериев правильности результата.

При решении задач о рассеянии звука на телах необходимо выбрать граничные условия на поверхности. Простейшими являются модели акустически мягкого и жесткого тел, для которых соответственно $p|_S = 0$ и $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S = 0$. Если представить полное поле p в виде $p = p_0 + p_s$, где p_0 и p_s – падающее и рассеянное поля соответственно, то эти условия приобретают вид

$$p_s|_S = -p_0|_S; \quad \left.\frac{\partial p_s}{\partial n}\right|_S = -\left.\frac{\partial p_0}{\partial n}\right|_S.$$

Правые части этих выражений считаются известными функциями.

Акустические свойства материала рассеивающего тела можно приближенно описать с помощью *локального импеданса*

$$Z = -p/v_n|_S, \tag{1.4}$$

причем положительное значение v_n соответствует нормали, направленной во внешнюю по отношению к телу сторону. Знак „–" появляется в связи с тем, что положительное звуковое давление на поверхности (сжатие) должно приводить к появлению колебательной скорости, направленной внутрь тела.

Импедансное условие (1.4) говорит о том, что в принятом приближении колебательная скорость в данной точке зависит лишь от звукового давления в этой же точке, но не зависит от давления в других точках на поверхности. Другими словами, считается, что вдоль поверхности тела не распространяются упругие волны. Частные случаи $Z = 0$ и $Z = \infty$ соответствуют акустически мягкому и жесткому телам.

Иногда полагают, что модели акустически жесткого и акустически мягкого тел являются крайними частными случаями и могут быть использованы для оценок в качестве границ, между которыми должны находиться результаты решения задач для реальных тел. В действительности это не так. В случае импедансных (или тем более упругих) тел при рассеянии волн возникают новые явления, например, возбуждение поверхностных волн вблизи поверхностей, обладающих импедансом гибкости, или периферических волн различных типов. Кроме того, при наличии потерь в материале рассеивающего тела (т. е. при $\mathrm{Re}\, Z \neq 0$) возникают потоки энергии, направленные внутрь тела, которые не существуют для акустически мягких и жестких тел. Во всех указанных случаях результаты решения задач рассеяния звука для импедансных и упругих тел не будут являться промежуточными между результатами для акустически жестких и мягких тел аналогичных размеров и форм.

Если распространением колебаний вдоль поверхности тела нельзя пренебречь, то модель, соответствующая импедансной поверхности, уже не годится и необходимо считать тело упругим, т. е. использовать граничное условие вида $Lv_n = p|_s$, где L – дифференциальный оператор, определяющий механические свойства тела; $p = (p_0 + p_s)|_S$ – полное звуковое давление на поверхности. В качестве примера можно указать на задачи дифракции и излучение звука упругими пластинами и оболочками.

1.2. Плоский излучатель в бесконечном жестком экране

1.2.1. Элементарный сферический излучатель. В соответствии с *принципом Гюйгенса* каждая точка излучающей поверхности сложной формы может рассматриваться как элементарный сферический

излучатель, а общее поле является суперпозицией волн от этих источников. Заметим, что наряду с таким представлением можно выразить поле излучателя сложной формы в виде комбинации полей сферических (монопольных) источников с дипольными источниками. Такое представление определяется интегралом Гельмгольца. Однако в любой из этих форм основную роль играет элементарный сферический излучатель.

Для вычисления звукового давления сферически симметричного излучателя радиусом a с колебательной скоростью v_0 заметим, что выражение

$$p(r) = A\exp(ikr)/r \tag{1.5}$$

во всем пространстве, кроме точки $r = 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) и принципу излучения. Для определения константы A воспользуемся граничным условием (1.2), которое можно записать в виде $v_0 = \left.\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a}$. В результате получится

$$p(r) = \rho c v_0 \frac{ika}{ika - 1}\frac{a}{r}\exp[ik(r-a)]. \tag{1.6}$$

Произведение $\rho c v_0$ характеризует звуковое давление, излучаемое бесконечной плоскостью, член a/r соответствует сферическому закону распространения, в экспоненциальный множитель входит фаза $k(r-a)$. Таким образом, фаза волны соответствует кратчайшему расстоянию от точки наблюдения до поверхности излучателя.

Мощность излучения

$$W = v_0^2 R_S/2, \tag{1.7}$$

где R_S – *сопротивление излучения*, равное вещественной части импеданса излучения $Z_S = R_S + iX_S$.

Импеданс излучения есть отношение полной силы, воздействующей на излучатель при его колебаниях, к колебательной скорости, т. е.

$$Z_S = p|_{r=a} S/v_0. \tag{1.8}$$

Здесь $S = 4\pi a^2$ – площадь излучателя. Кроме полного импеданса излучения будем также рассматривать *удельный импеданс* $z_S = r_S + ix_S$, рассчитанный на единицу площади и нормированный к величине ρc, т. е. $Z_S = \rho c S z_S$. Из выражения (1.6) найдем

$$r_S = (ka)^2/[1 + (ka)^2]; \quad x_S = -ka/[1 + (ka)^2]. \tag{1.9}$$

В качестве элементарного сферического излучателя возьмем пульсирующую сферу малых волновых размеров $ka \ll 1$. Тогда

$$p(r) = -\frac{ik\rho cQ}{4\pi}\,\frac{\exp(ikr)}{r}\,. \qquad (1.10)$$

Здесь $Q = v_0 S$ – *объемная колебательная скорость (производительность)* источника.

1.2.2. О максимально возможном значении излучаемой удельной акустической мощности на низких частотах. *Удельной акустической мощностью* γ называется мощность излучения, приходящаяся на единицу площади излучающей поверхности: $\gamma = W/S$. Существует ряд факторов, ограничивающих значение удельной акустической мощности излучателя. Некоторые из этих факторов носят чисто технический характер. Это может быть усталостная механическая прочность материалов, из которых изготовляют подвижную систему электроакустического преобразователя, или предельные значения возбуждающих электрических напряжений и токов. Другим ограничением является кавитационная прочность воды, она существенно зависит от гидростатического давления в среде. Кроме того, есть такой принципиальный фактор, как уменьшение удельного сопротивления излучения на низких частотах.

Рассмотрим сферический излучатель радиусом a с равномерным распределением по его поверхности колебательной скорости и амплитудой скорости v_0. Излучаемую акустическую мощность можно найти по формуле (1.7), зная сопротивление излучения R_S:

$$W = \frac{v_0^2 \rho c S}{2}\,\frac{(ka)^2}{1+(ka)^2}\,. \qquad (1.11)$$

Перейдем от колебательной скорости к смещению $u_0 = v_0/\omega$ и вычислим удельную излучаемую акустическую мощность $\gamma = W/S$

$$\gamma = \frac{u_0^2 \omega^2 \rho c}{2}\,\frac{(ka)^2}{1+(ka)^2} = \left(\frac{u_0}{a}\right)^2 \frac{\rho c^3}{2}\,\frac{(ka)^4}{1+(ka)^2}\,. \qquad (1.12)$$

Найдем отношение амплитуды смещения к радиусу излучателя

$$\frac{u_0}{a} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\rho c^3}}\,\frac{\sqrt{1+(ka)^2}}{(ka)^2}\,. \qquad (1.13)$$

Ясно, что амплитуда смещения меньше радиуса излучателя. В противном случае поверхность сжималась бы в точку при колебаниях. Реально следует считать, что амплитуда смещения много меньше радиуса излучателя, т. е. $u_0/a \ll 1$. Это ограничение ставит предел максимально возможному значению удельной акустической мощности.

Удельная мощность резко убывает [примерно как $(ka)^4$] при уменьшении волновых размеров излучателя. Из выражения (1.13)

следует, что для сохранения одной и той же удельной мощности при уменьшении частоты звука в 10 раз амплитуду колебаний следует увеличить почти в 100 раз.

Несмотря на то, что выше шла речь о сферическом излучателе, все сказанное относится и к излучателям других форм (монопольного типа излучения), в связи с тем, что на низких частотах при длине волны большей размера излучателя процесс излучения определяется не столько формой излучателя, сколько объемом жидкости, вытесняемой при колебаниях, т. е. объемной колебательной скоростью и сопротивлением излучения. Характер изменения последней величины связан со сферическим законом распространения звука, который для малых излучателей начинается практически от излучающей поверхности независимо от формы. В частности, для плоского круглого поршня радиусом a в жестком экране сопротивление излучения $R_s = \rho c S x_s$ определяется через x_s по формуле (1.33), приведенной ниже. Тогда удельная мощность будет

$$\gamma = \left(\frac{u_0}{a}\right)^2 \frac{\rho c^3}{r} (ka)^2 \left[1 - \frac{2J_1(2ka)}{2ka}\right].$$

На низких частотах ($ka \ll 1$) имеем $R_s \approx \rho c S (ka)^2/2$ и

$$\gamma \approx \left(\frac{u_0}{a}\right)^2 \frac{\rho c^3}{4} (ka)^4.$$

От формулы (1.12) последнее выражение отличается лишь множителем, близким к 1/2 при $ka < 1$.

Еще сильнее уменьшается удельная акустическая мощность на низких частотах для излучателей дипольного типа, например осциллирующей сферы, для которой

$$R_s = \frac{\rho c S}{3} \frac{(ka)^4}{4 + (ka)^4}. \qquad (1.14)$$

Следовательно,

$$\gamma = \left(\frac{u_0}{a}\right)^2 \frac{\rho c}{6} \frac{(ka)^6}{4 + (ka)^4}.$$

В этом случае удельная акустическая мощность на низких частотах уменьшается по закону $(ka)^6$, т. е. для сохранения удельной акустической мощности при уменьшении частоты звука в 10 раз амплитуду колебаний следует увеличить почти в 1000 раз. Аналогичная ситуация возникает и для осциллирующего плоского поршня.

Воспользовавшись выражением (1.78), приведенным ниже, определим сопротивление излучения на низких частотах ($ka \ll 1$), приходящееся на обе стороны диска. Удвоив результат (1.78), получим

$$R_S = \rho c S_1 \frac{8}{27\pi^2} (ka)^4, \qquad (1.15)$$

где $S_1 = 2\pi a^2$ – полная площадь обеих сторон поршня. Тогда зависимость удельной мощности от ka в виде $(ka)^6$ сохраняется и в этом случае. На рис. 1.1 приведены зависимости удельной акустической мощности от волнового радиуса для четырех типов излучателей: двух монопольных и двух дипольных. Видно, что при малых волновых размерах получить высокую удельную мощность принципиально невозможно.

1.2.3. Виды плоских излучателей. Излучатель в жестком экране. Рассмотрим некоторые основные виды плоских излучателей звука, различающиеся по режиму работы на тыльной стороне излучателя и на его продолжении. *Пульсирующий излучатель* (рис. 1.2, *а*) характеризуется тем, что колебательные скорости на разных сторонах равны по значению и противоположны по знаку. В силу симметрии поля относительно его плоскости очевидно, что на продолжении излучателя нормальная составляющая колебательной скорости равна нулю. Это означает, что пульсирующий излучатель, не меняя условий излучения, можно поместить в акустически жесткий экран. Таким образом, задачи об определении полей пульсирующего излучателя и излучателя, помещенного в акустически жесткий экран, эквивалентны. У *осциллирующего излучателя* (рис. 1.2, *б*) звуковые давления на разных сторонах противоположны по знаку, поскольку на одной стороне в данный момент происходит сжатие среды, на другой – расширение. Поэтому на продолжении излучателя звуковое давление равно нулю. Это дает возможность без изменения поля поместить излучатель в акустически мягкий экран. Решение задач для *одностороннего излучателя* (рис. 1.2, *в*) можно в силу принципа суперпозиции представить в виде полусуммы решения для пульсирующего и осциллирующего излучателей.

Для излучателей, помещенных в импедансный и упругий экраны (рис. 1.2, *г* и 1.2, *д* соответственно), на продолжении задано либо отношение p/v_z, либо дифференциальное уравнение $Lv_z = p$, описывающее упругие свойства экрана. Пульсирующий излучатель (см. рис. 1.2, *а*) отличается от остальных тем, что здесь колебательная скорость задана на всей бесконечной плоскости (задача Неймана), а в остальных случаях на продолжении излучателя она неизвестна (смешанная задача). Поэтому лишь для ситуации, изображенной на рис. 1.2, *а*, удается получить сравнительно просто строгое решение в замкнутом виде, а в остальных случаях задача оказывается гораздо более сложной.

Если размеры излучателей больше длины волны, то различия в условиях работы для всех перечисленных излучателей будут небольшими.

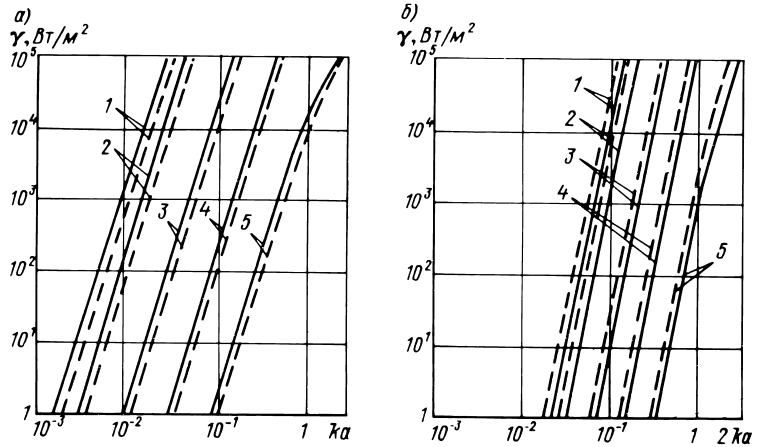


Рис. 1.1. Зависимость удельной акустической мощности от волнового радиуса излучателей: *а* – монопольные излучатели (—— пульсирующая сфера; ———— плоский поршень в жестком экране); *б* – дипольные излучатели (—— осциллирующая сфера; ———— осциллирующий плоский поршень без экрана)

1 – $u_0/a = 0{,}3$; *2* – $u_0/a = 0{,}1$; *3* – $u_0/a = 10^{-2}$; *4* – $u_0/a = 10^{-3}$; *5* – $u_0/a = 10^{-4}$

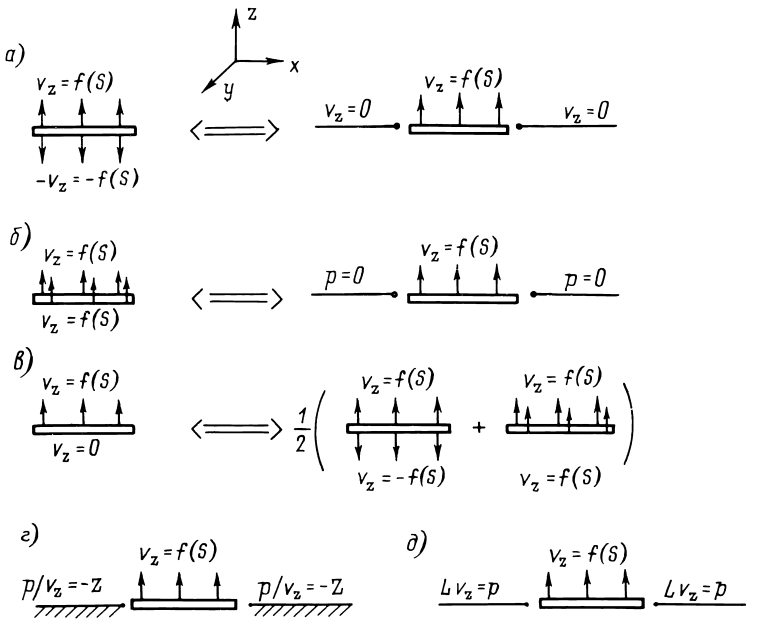


Рис. 1.2. Основные виды плоских излучателей: *а* – пульсирующий (в акустически жестком экране); *б* – осциллирующий (в акустически мягком экране); *в* – односторонний; *г* – в импедансном экране; *д* – в упругом экране

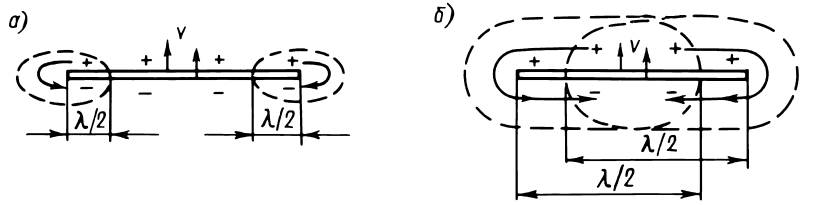


Рис. 1.3. Осциллирующий излучатель на высоких (*а*) и низких (*б*) частотах

Для того чтобы это пояснить, рассмотрим колебания осциллирующего излучателя (рис. 1.3, *а, б*).

Пусть в некоторый фиксированный момент времени на верхней стороне происходит сжатие среды, на нижней – расширение (условно показано знаками „+" и „–"). В этом случае возникает поток (перетекание) жидкости с верхней стороны на нижнюю вокруг краев. В результате произойдет частичное выравнивание звуковых давлений на противоположных сторонах излучателя. Через половину периода колебаний направление этого потока сменится на противоположное. Скорость, с которой может происходить выравнивание давлений, является скоростью звука в жидкости. Поэтому за половину периода область наиболее интенсивного выравнивания давления успеет захватить зону на краю излучателя шириной порядка половины длины звуковой волны. Во внутренней области за пределами этой зоны частицы практически не успеют „почувствовать" изменение давления на противоположной стороне.

На высоких частотах (см. рис. 1.3, *а*) краевые зоны малы по сравнению с размерами излучателя, и вклад их оказывается небольшим. Поэтому на высоких частотах (практически при $d > \lambda$, где d – минимальный размер излучателя) все изображенные на рис. 1.2 излучатели имеют почти одинаковые акустические характеристики. С уменьшением частоты и возрастанием длины волны (рис. 1.3, *б*) зоны интенсивного перетекания захватывают весь излучатель и эффективность излучения резко уменьшается. В этом случае излучатель лишь раздвигает частицы жидкости, почти не создавая сжатия в среде вдали от излучателя (акустическое короткое замыкание). Из этого следует, что на низких частотах показанные на рис. 1.2 излучатели должны иметь существенно разные характеристики.

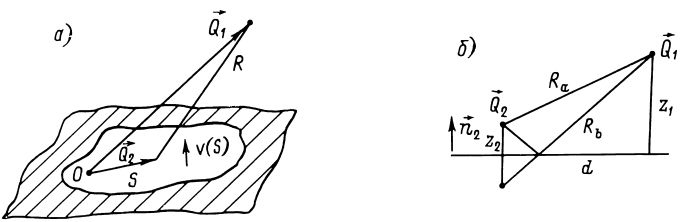


Рис. 1.4. Плоский излучатель в акустически жестком экране (*а*); к выводу формулы (1.21) (*б*)

Рассмотрим плоский излучатель S, расположенный в акустически жестком бесконечном экране (рис. 1.4, *а*). Распределение колебательной скорости по поверхности можно записать

$$v_z(S) = \begin{cases} v_0 f(S) & \vec{Q}_2 \text{ внутри } S; \\ 0 & \vec{Q}_2 \text{ вне } S. \end{cases} \tag{1.16}$$

Будем исходить из формулы, связывающей звуковое давление в точке, определяемой радиусом вектором $\vec{Q}_1$, со звуковым давлением и его нормальной производной на поверхности в точке $\vec{Q}_2$ [63]:

$$p(\vec{Q}_1) = \iint\limits_S \left[p(\vec{Q}_2) \frac{\partial G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)}{\partial n_2} - G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \frac{\partial p(\vec{Q}_2)}{\partial n_2} \right] dS_2. \tag{1.17}$$

Здесь n_2 – нормаль, направленная в сторону излучения звука; S – бесконечная плоскость. Индекс 2 указывает, что дифференцирование по нормали и интегрирование по поверхности проводятся по координатам точки $\vec{Q}_2$. Функция $G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ определяет поле на поверхности в точке $\vec{Q}_2$, излучаемое точечным источником, помещенным в точке наблюдения $\vec{Q}_1$. Функцию $G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$, называемую *функцией Грина*, можно выбирать различными способами, однако она должна удовлетворять неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) + k^2 G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) = -\delta(\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2), \tag{1.18}$$

где в правой части стоит δ-функция, характеризующая точечный источник. Кроме того, она должна быть симметричной функцией относительно перестановки точек $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$, что согласуется с принципом взаимности. Заметим, что в ряде работ, в частности [63], уравнение (1.18) записывают с множителем 4π в правой части. В этом случае в выражение (1.17) следует добавить множитель $1/4\pi$ и исключить этот множитель из функции Грина.

Выберем в качестве функции Грина поле точечного источника, расположенного вблизи акустически жесткой бесконечной плоскости, т. е.

$$G(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) = \frac{\exp(ikR_a)}{4\pi R_a} + \frac{\exp(ikR_b)}{4\pi R_b}, \tag{1.19}$$

где R_a – кратчайшее расстояние между точками $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ (считается, что точка $\vec{Q}_2$ чуть приподнята над плоскостью); R_b – расстояние между точкой наблюдения и зеркально отраженным источником (рис. 1.4, *б*).

Устремим точку $\vec{Q}_2$ на поверхность и учтем, что вблизи поверхности $\partial R_a/\partial \boldsymbol{n}_2 = -\partial R_b/\partial n_2$. Действительно, $R_a = \sqrt{(z_1 - z_2)^2 + d^2}$, $R_b = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 + d^2}$ и при дифференцировании по n_2 (т. е. фактически

по z_2) знаки окажутся разными. Это видно также и непосредственно из рис. 1.4, *б* – при удалении точки $\vec{Q}_2$ от поверхности R_a будет уменьшаться, а R_b – возрастать. Устремим точку $\vec{Q}_2$ на поверхность излучателя, т. е. будем считать, что $R_a \to R_b = R$. Тогда

$$G = 2\exp(ikR)/(4\pi R); \quad \partial G/\partial n = 0. \tag{1.20}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (1.17) обратится в нуль. Учитывая, что $\partial p/\partial n_2 = \partial p/\partial z = ik\rho c v_z$, получим

$$p(\vec{Q}_1) = -\frac{ik\rho c}{2\pi}\iint_S v_z \frac{\exp(ikR)}{R} dS. \tag{1.21}$$

Заметим, что интегрирование здесь в общем случае выполняется по всей бесконечной плоскости. Для излучателя в акустически жестком экране колебательная скорость v_z задана на всей плоскости выражением (1.16). Поэтому интегрирование по всей плоскости можно заменить интегрированием по излучающей поверхности:

$$p(\vec{Q}_1) = -\frac{ik\rho c v_0}{2\pi}\iint_S f(S)\frac{\exp(ikR)}{R} dS. \tag{1.22}$$

Физический смысл этого выражения состоит в том, что поле представлено в виде суперпозиции полей (1.10), излучаемых элементарными сферическими источниками с производительностью, равной $2v_0 f(S)dS$ (принцип Гюйгенса). В связи с этим выражение (1.22) иногда называют интегральной *формулой Гюйгенса* или чаще *интегралом Рэлея*. Дальнее поле на оси излучателя можно определить из выражения (1.22), полагая, что при расположении точки наблюдения вдали от излучателя (практически при $R > d^2/\lambda$, где d – максимальный размер излучателя) расстояние R является постоянным. Тогда

$$p(R) = -\frac{ik\rho cQ}{2\pi}\frac{\exp(ikR)}{R}, \tag{1.23}$$

где $Q = v_0 S_э$ – объемная скорость излучателя; $S_э = \iint_S f(S)dS$ – эквивалентная площадь.

В случае произвольной формы излучателя и произвольного распределения колебательной скорости использование формулы (1.22) связано с весьма трудоемким вычислением двойного интеграла от осциллирующей функции.

1.2.4. Интеграл Шоха. В случае равномерного распределения колебательной скорости $[f(S) = 1]$ двойной интеграл в выражении (1.22) по площади излучателя можно представить в виде однократного интеграла

по границе излучателя. Сначала рассмотрим частный случай (рис. 1.5, *а*), когда точка O_1, соответствующая проекции точки наблюдения $\vec{Q}_1$ на плоскость xy, лежит в пределах площади излучателя S. Введем полярную систему координат с центром O_1. Тогда $dS = rdrd\varphi$ и выражение (1.22) можно записать в виде

$$p(\vec{Q}_1) = -\frac{ik\rho cv_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\varphi)} \frac{\exp(ikR)}{R} rdrd\varphi. \qquad (1.24)$$

Будем рассматривать R в качестве новой переменной интегрирования. Тогда $R^2 = r^2 + z_1^2$, $RdR = rdr$. Пределы интегрирования по R при заданном угле φ будут (см. рис. 1.5, *а*) $z_1 \div L(\varphi)$, где $L(\varphi)$ – переменное расстояние от точки наблюдения до контура. Поэтому

$$p(\vec{Q}_1) = \frac{-ik\rho cv_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_1}^{L(\varphi)} \exp(ikR) dRd\varphi. \qquad (1.25)$$

После вычисления интеграла по R получаем

$$p(\vec{Q}_1) = \rho cv_0 \left\{ \exp(ikz_1) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[ikL(\varphi)]\, d\varphi \right\}. \qquad (1.26)$$

Выражение (1.26) дает решение в виде суммы плоской волны и краевых волн, как бы исходящих из точек контура области.

В случае, если проекция точки наблюдения лежит вне области S, то при интегрировании по φ следует разбить контур на два участка $l_1(\varphi)$ и $l_2(\varphi)$, ограниченных касательными, приведенными из проекции точки наблюдения. Пределы интегрирования по φ и r в выражении, аналогичном интегралу (1.24), будут $\varphi_1 \div \varphi_2$, $l_1(\varphi) \div l_2(\varphi)$

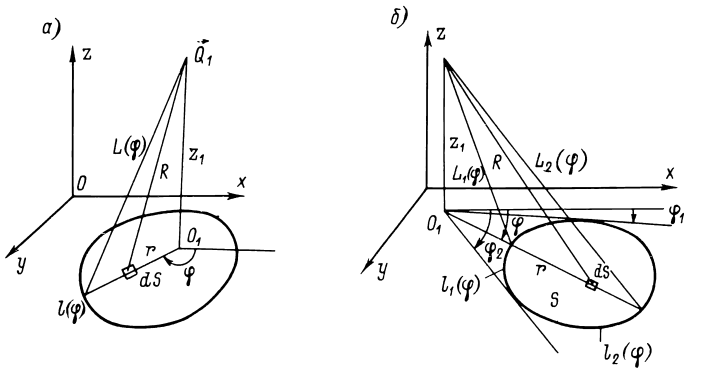


Рис. 1.5. К выводу интеграла Шоха: проекция точки наблюдения внутри (*а*) и вне (*б*) излучателя

соответственно. В выражении (1.24) пределы интегрирования теперь следует заменить на $\varphi_1 \div \varphi_2$ и $L_1(\varphi) \div L_2(\varphi)$ и вместо выражения (1.26) получим

$$p(\vec{Q}_1) = \frac{\rho c v_0}{2\pi} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp\left[ikL_1(\varphi)\right] d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \exp\left[ikL_2(\varphi)\right] d\varphi \right\}. \quad (1.27)$$

Интегралы (1.26), (1.27) называются *интегралами Шоха.* Покажем, что на больших расстояниях от излучателя поле носит характер расходящейся сферической волны. Проиллюстрируем это на простейшем примере, вычислив поле на оси круглого поршневого излучателя радиусом a. В этом случае в выражении (1.26) $L(\varphi) = \sqrt{z_1^2 + a^2} = L$, отсюда $p(z_1) = \rho c v_0 [\exp(ikz_1) - \exp(ikL)]$.

Получилось весьма простое выражение для поля на оси, справедливое при любых расстояниях до излучателя. Запишем это выражение в виде $p(z_1) = 2i\rho c v_0 \exp[ik(z_1 + L)/2] \sin[k(z_1 - L)/2]$ и будем считать, что $z_1 \gg a$, так что $L \approx z_1 + a^2/(2z_1)$. В данной зоне (зоне Фраунгофера), где $[ka^2/(2z_1) \ll 1]$, можно принять $\sin[k(z_1 - L)/2] \approx \approx -ka^2/(4z_1)$. Получим

$$p(z_1) = -\frac{ik\rho cQ}{2\pi} \frac{\exp(ikz_1)}{z_1},$$

где $Q = v_0 S$, что для равномерного распределения скорости совпадает с выражением (1.23).

1.2.5. Импеданс излучения и коэффициент концентрации. Акустическая мощность определяется интегралом по поверхности излучателя:

$$W = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2} \iint_S pv^* dS. \quad (1.28)$$

Звездочка представляет знак комплексного сопряжения. Эту же величину можно записать через квадрат колебательной скорости в некоторой выбранной точке, называемой точкой приведения, и сопротивление излучения по формуле (1.7). Тогда сопротивление излучения можно определить как величину

$$R_S = \frac{1}{|v_0|^2} \mathrm{Re} \iint_S pv^* dS. \quad (1.29)$$

По аналогии можно определить и *полный комплексный импеданс*

$$Z_S = \frac{1}{|v_0|^2} \iint_S pv^* dS = R_S + iX_S. \quad (1.30)$$

Для неравномерного распределения скорости по поверхности при таком определении оказывается, что Z_S зависит от выбора точки приведения. Однако излучаемая мощность, вычисленная по формуле (1.7), от выбора этой точки, разумеется, не зависит. Распределение звукового давления на поверхности излучателя $p(S)$ определяется формулой (1.22). Для излучателя сложной формы возникает четырехкратный интеграл и вычисления могут быть выполнены лишь в случае относительно простых форм. Устремим точку наблюдения Q_1 на поверхность излучателя и подставим выражение (1.22) в формулу (1.30). В результате получим

$$Z_S = \rho c S z_S, \tag{1.31}$$

где z_S – безразмерная величина, определяемая четырехкратным интегралом

$$Z_S = \frac{-ik^2}{2\pi S} \iiint\limits_{S_1 \; S_2} f(\vec{Q}_1) f^*(\vec{Q}_2) \frac{\exp\,[ikR(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)]}{kR(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)} dS_1 dS_2. \tag{1.32}$$

Здесь $R(\vec{Q}, \vec{Q}_2)$ – расстояние между двумя точками на поверхности излучателя; S_1 и S_2 – один и тот же излучатель площадью S, но один раз интегрирование выполняют по координатам точки $\vec{Q}_1$, а другой – по координатам точки $\vec{Q}_2$.

Этот интеграл вычислен аналитически лишь для диска с равномерным распределением скорости. Результирующие выражения (формулы Рэлея) имеют вид [50]

$$r_S = 1 - 2J_1(2ka)/(2ka); \quad x_S = -S_1(2ka)/(ka). \tag{1.33}$$

Здесь J_1 и S_1 – функции Бесселя и Струве соответственно. Зависимости безразмерных активной и реактивной составляющих импеданса излучения диска в жестком экране приведены ниже на рис. 1.10, где они сравниваются с аналогичными величинами для осциллирующего диска без экрана (или для диска в акустически мягком экране).

Для прямоугольного излучателя с равномерным распределением скорости выражение (1.32) удается представить через однократные интегралы. Такое преобразование выполнено в работах [60, 83].

Расчетные формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} r_S = 1 - \frac{2}{\pi v^2}\,[1 + \cos(vq) + vq\,\sin(vq) - \cos(vp) - \\ - \cos(v/p)] + \frac{2}{\pi}\,[pI_1(d) + I_1(1/d)/p]; \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

$$x_s = -\frac{2}{\pi\nu^2}[\sin(\nu q) - \nu q\cos(\nu q) + \nu(p+1)/p -$$

$$-\sin(\nu p) - \sin(\nu/p)] + \frac{2}{\pi}[pI_2(d) + I_2(1/d)/p,$$

где $\nu = k\sqrt{S}$, $d = a/b$ – отношение сторон прямоугольника, $S = ab$, $p = \sqrt{d}$, $q = \sqrt{d + 1/d}$, I_1, I_2 определяются выражением

$$\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix}(\xi) = \int\limits_{1/\sqrt{\xi}}^{\sqrt{\xi+1/\xi}} \sqrt{1 - 1/(\xi t^2)} \begin{cases} \cos(\nu t) \\ \sin(\nu t) \end{cases} dt.$$

Значениям I_1 и I_2 соответствуют $\cos(\nu t)$ и $\sin(\nu t)$, Простая формула для вычисления импеданса излучения прямоугольного поршня в жестком экране приведена в статье [113]:

$$\frac{Z_s}{\rho cS} = 1 - \frac{2}{\pi k^2 S}[ik(a+b) - 1 + \exp(ika) + \exp(ikb) +$$

$$+ \frac{2}{\pi}(U(a) + U(b)],$$

где $U(x) = \int\limits_1^{d/a} \sqrt{1 - 1/\xi^2}\exp(ikx\xi)d\xi, d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Из графика на рис. 1.6 видно, что для квадратного поршня активная составляющая r_s при $k\sqrt{S} > 3 \ldots 4$ становится близкой к единице. Это соответствует волновым размерам $a = b \approx (0{,}5 \ldots 0{,}7)\lambda$. Для сильно вытянутого прямоугольного поршня значение $k = \sqrt{S}$, при котором r_s становится близким к единице, возрастает, однако отношение b/λ, где b – наименьшая из сторон поршня, остается примерно таким же. Следовательно, в качестве критерия, при котором удельная нагрузка со стороны среды на поршень примерно соответствует удельной нагрузке для бесконечной плоскости, можно считать $b/\lambda > 0{,}5 \ldots 0{,}7$, где $b = MIN(a, b)$.

Наибольшие значения реактивной составляющей удельного импеданса приходятся на диапазон величины $k\sqrt{S}$ в пределах 2 ... 10.

Если размеры излучателя больше длины звуковой волны и функция $f(S)$, описывающая распределение колебательной скорости, носит плавный характер, то для оценки импеданса излучения можно принять приближение Кирхгофа [63], согласно которому в любой точке звуковое давление зависит только от скорости в этой точке (локальный характер излучения), причем $p \approx \rho c v$. Тогда, приняв $v = v_0 f(S)$, из выражения (1.30) получим

$$R_s \approx \rho c \iint\limits_S |f(S)|^2 dS, \; X_s \approx 0. \qquad (1.35)$$

Коэффициент концентрации $K_к$ (коэффициент направленного действия) в режиме излучения звука характеризует увеличение квадрата звукового давления, создаваемого направленным излучателем по отношению к ненаправленному при равной акустической мощности, т. е.

$$K_к = |p/p'|^2 \text{ при } W = W' \qquad (1.36)$$

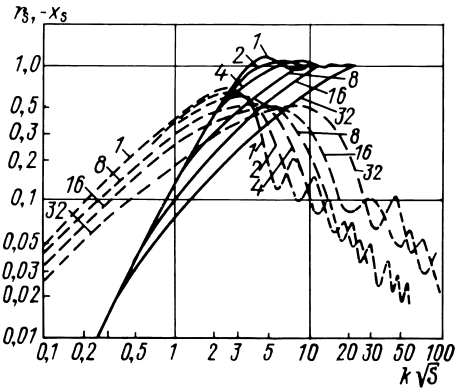


Рис. 1.6. Импеданс излучения прямоугольного поршня в жестком экране

——— r_s; ———— $-x_s$; цифры на кривых соответствуют отношению сторон b/a

где штрих указывает на то, что соответствующая величина относится к ненаправленному излучателю. Величина p зависит от направления, поэтому в общем случае и $K_к$ должен являться функцией пространственных углов. Однако обычно в качестве $|p|$ принимают максимальное значение звукового давления. Если формируется характеристика направленности с ясно выраженным главным максимумом, то $|p|$ будет давление на оси этого максимума и $K_к$ можно называть *коэффициентом осевой концентрации.*

Можно дать и другое определение

$$K_к = W'/W \text{ при } |p| = |p'| \ , \qquad (1.37)$$

которое эквивалентно определению (1.36). Между коэффициентом концентрации и активной составляющей импеданса излучения существует связь, которую можно найти следующим образом.

Акустическая мощность направленного излучателя определяется выражением (1.7), а для ненаправленного излучателя можно записать

$$W' = \frac{|p'|^2}{2\rho c} 4\pi R^2 . \qquad (1.38)$$

Используя соотношения (1.7) и (1.38), из определения (1.37) получим

$$K_к = \frac{4\pi}{\rho c R_s} \left| \frac{p'R}{v_0} \right|^2 . \qquad (1.39)$$

Это выражение определяет связь между коэффициентом концентрации и сопротивлением излучения для произвольного излучателя [50]. Заметим, что так как $|p|$ пропорционально v_0 и обратно пропорционально R, то фактически это выражение не зависит ни от v_0, ни от R.

Для плоского излучателя, использовав выражение (1.23), получим

$$K_к = \frac{k^2 S_э}{\pi[R_s/(\rho c S_э)]} . \qquad (1.40)$$

Если размеры излучателя больше длины звуковой волны, то в приближении Кирхгофа можно воспользоваться выражением (1.35). Тогда

$$K_к = \frac{k^2}{\pi} \frac{|\int\int_S f(S)dS|^2}{\int\int_S |f(S)|^2 dS} . \qquad (1.41)$$

При равномерном распределении скорости $[f(S) = 1]$ из последнего выражения получим хорошо известную формулу

$$K_к \approx k^2 S/\pi = 4\pi S/\lambda^2 . \qquad (1.42)$$

Несмотря на то что при выводе этого выражения были введены соотношения для плоских излучателей, примерно такая же зависимость от площади и длины волны сохраняется и для излучателей другой формы (например, цилиндрических), выполненных в виде фазированной антенной решетки. При этом хорошее приближение достигается формулой $K_к = \alpha 4\pi S/\lambda^2$, где коэффициент α обычно лежит в пределах 0,5 ... 1,0.

При использовании выражения (1.42) для остронаправленных излучателей надо соблюдать некоторую осторожность, так как из него следует, что $K_к$ неограниченно растет при увеличении направленности излучателя. Пусть, например, квадратный поршень со стороной, равной a, формирует диаграмму направленности с шириной главного максимума θ_0, равной 1°. Поскольку $\sin\theta_0 = \lambda/a$, то $a/\lambda = 57{,}3$ и $K_к = 4\pi(a/\lambda)^2 = 41\,000$.

Рассмотрим, может ли практически реализоваться такая величина. Интегрируя акустическую мощность по всему телесному углу Ω, запишем связь между коэффициентом концентрации и диаграммой направленности $D(\vec{k})$:

$$K_к = 4\pi/\int_\Omega D^2(\vec{k})d\Omega. \qquad (1.43)$$

Здесь $\vec{k}$ – вектор, определяющий направление на точку наблюдения.

Учтем теперь, что в результате неконтролируемых случайных факторов (неточностей при изготовлении элементов, дифракции на них, рассеяния на неоднородностях среды) образуется некоторый фон, который накладывается на исходную диаграмму и увеличивает ее значения, что особенно заметно в области вне главного максимума и первых добавочных. Для примера, приведенного выше, расчетные значения диаграммы при углах, близких к 90°, составляют $\sin[\lambda/(\pi a)]/[\lambda/(\pi a)] = 0{,}0056$. Практически этот уровень даже при весьма тщательном изготовлении

обычно не опускается ниже 0,01 ... 0,02. Для оценки влияния его на коэффициент концентрации положим, что

$$D^2(\vec{k}) = [D_0^2(\vec{k}) + \epsilon^2(\vec{k})]/[1 + \epsilon^2(\vec{k}_0)],$$

гле $D_0(\vec{k})$ и $D(\vec{k})$ – идеальная (исходная) и истинная (экспериментальная) диаграммы направленности соответственно; $\epsilon(k) \ll 1$; k_0 – направление главного максимума; множитель $[1 + \epsilon^2(\vec{k}_0)]^{-1}$ введен для нормировки. Тогда истинный коэффициент концентрации будет равен

$$K_к = \frac{4\pi[1 + \epsilon^2(\vec{k}_0)]}{\int\limits_\Omega [D_0^2(k) + \epsilon^2(\vec{k})]d\Omega}.$$

Пренебрегая в числителе малой величиной $\epsilon^2(\vec{k}_0)$, запишем

$$K_к = \frac{4\pi}{\iint\limits_\Omega D_0^2(\vec{k})d\Omega + 4\pi\epsilon^2}, \qquad (1.44)$$

где $\epsilon^2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_\Omega \epsilon^2(\vec{k})d\Omega$ – среднее по пространству значение величины $\epsilon^2(k)$. Из выражения (1.44) получаем оценку предельно достижимого коэффициента концентрации

$$K_к < 1/\epsilon^2. \qquad (1.45)$$

Это же соотношение можно сформулировать следующим образом: $K_к$ (дБ) $< -\epsilon$ (дБ), где $K_к$ (дБ) = 10 lg $K_к$; ϵ (дБ) = 20 lg ϵ, т. е. коэффициент концентрации не превышает среднего уровня фона (с обратным знаком), если обе эти величины выражены в децибелах.

Если принять ϵ равным 0,01, то из неравенства (1.45) следует $K_к <$ $< 10\,000$, что в 4 раза меньше величины, рассчитанной по формуле (1.42). Для уровня бокового поля $\epsilon = 0{,}02$ получим $K_к < 2500$, что в 16 раз меньше, чем по формуле (1.42). Таким образом, при больших отношениях a/λ выражение (1.42) приводит к совершенно неверным, сильно завышенным результатам. Следовательно, при больших отношениях a/λ коэффициент концентрации определяется не шириной главного максимума, а уровнем фона. Поэтому при фиксированном значении ϵ увеличение остроты главного максимума практически не приводит к увеличению коэффициента концентрации. Коэффициент концентрации излучателя с исходной диаграммой $D_0^2(\vec{k})$ можно записать в виде

$$K_0 = 4\pi/\int\limits_\Omega D_0^2(\vec{k})d\Omega. \qquad (1.46)$$

Тогда из выражений (1.44) и (1.46) получим

$$K_к = K_0/(1 + \epsilon^2 K_0). \qquad (1.47)$$

Таким образом, формула (1.42) дает достаточно точные результаты при $\epsilon^2 K_0 \ll 1$.

1.3. Излучение звука осциллирующим диском без экрана (или диском в акустически мягком экране)

1.3.1. Составление уравнений. В 1937 г. Л. Я. Гутиным была решена задача об излучении звука круглым осциллирующим поршнем без экрана [18]. Решение получено разложением неизвестных функций в ряды по сфероидальным функциям. В работе [18] приведены значение коэффициентов рядов, пригодных для вычисления при сравнительно небольшом волновом размере излучателя и равномерном распределении колебательной скорости по его поверхности. В связи с тем, что указанная задача является одной из наиболее важных в теории излучения звука, представляет интерес получить решение другим способом, основанным на приведении к интегральному уравнению, допускающему эффективное решение на ЭВМ при широких значениях волнового размера и произвольном осесимметричном распределении колебательной скорости.

Пусть диск радиусом a расположен в плоскости $z = 0$. На его поверхности задана скорость при $r \leqslant a$. Так как диск является осциллирующим, то в плоскости $z = 0$ звуковое давление должно быть равно нулю. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$v_z = v(r) = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \text{ при } r \leqslant a; \quad p = 0 \text{ при } r > a, \tag{1.48}$$

причем $v(r) = v_0 f(r)$, где v_0 – скорость в центре диска.

То же самое граничное условие соответствует диску с заданным распределением колебательной скорости, помещенному в акустически мягкий экран (см. рис. 1.2, *б*). Выбирая различные виды функции $f(r)$, можно получить решения ряда практически важных задач, например определить поле излучения гибкой осциллирующей мембраны или осциллирующего диска, расположенного в жестком кольцевом экране конечной ширины. Будем искать звуковое давление в верхнем полупространстве $(z \geqslant 0)$, используя *интегральное преобразование Ханкеля.* Осесимметричную функцию $p(r)$ можно представить в виде

$$p(r) = \int_0^\infty U(\gamma) J_0(\gamma r)\gamma d\gamma; \tag{1.49а}$$

$$U(\gamma) = \int_0^\infty p(r) J_0(\gamma r) r dr. \tag{1.49б}$$

Звуковое давление $p(r)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.1), которое для осесимметричного случая в цилиндрических координатах можно записать в виде

$$\frac{\partial P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z} + k^2 p = 0.$$

Подставим сюда интегральное представление (1.49а) и учтем, что функция Бесселя удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 J_0(\gamma r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial J_0(\gamma r)}{\partial r} + \gamma^2 J_0(\gamma r) = 0.$$

Поскольку $p(r)$ является функцией не только r, но и z, то в выражении (1.49а) от z должна зависеть и функция $U(\gamma)$. После подстановки получим $\partial^2 U(\gamma, z)/\partial z^2 + (k^2 - \gamma^2) U(\gamma, z) = 0$. Решениями этого уравнения являются функции $\exp(\pm i\sqrt{k^2 - \gamma^2}z)$. В силу принципа излучения приходящие из бесконечности волны должны отсутствовать. Поэтому для верхнего полупространства следует использовать знак „+", соответствующий волнам, уходящим от диска. Теперь можно записать

$$p(r, z) = \frac{\rho c v_0}{k^2}\int_0^\infty P(\gamma) J_0(\gamma r) \exp(i\sqrt{k^2 - \gamma^2}z)\gamma d\gamma. \qquad (1.50)$$

Множитель $\rho c v_0/k^2$ введен для нормировки, чтобы неизвестная функция $P(\gamma)$ была безразмерной. Из выражений (1.48) и (1.50) получим систему парных интегральных уравнений относительно функции $P(\gamma)$. Запишем эту систему через безразмерные переменные $s = \gamma/k$, $u = kr$, $\mu = ka$ в виде

$$\int_0^\infty P(ks) J_0(us)\sqrt{1 - s^2}\, sds = f(u/k) \text{ при } u < \mu; \qquad (1.51а)$$

$$\int_0^\infty P(kS) J_0(us) s ds = 0 \text{ при } u > \mu. \qquad (1.51б)$$

Решать эти уравнения будем следующим образом. Умножим левую и правую части уравнения (1.51а) на $u/\sqrt{x^2 - u^2}$ и проинтегрируем по u в пределах $(0, x)$. Поскольку в (1.51а) $u < \mu$, то и $x < \mu$. Затем умножим левую и правую части (1.51б) на $u/\sqrt{u^2 - x^2}$ и проинтегрируем в пределах (x, ∞). В этом уравнении $x > \mu$. Поменяем местами интегралы по u и s. С учетом формул (6.554.2,3) из работы [16] уравнения (1.51) примут вид

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\sqrt{1 - s^2}\, ds = \psi_1(x);\ x < \mu; \qquad (1.52а)$$

$$\int_0^\infty P(ks)\cos(xs)\, ds = 0;\ x < \mu, \qquad (1.52б)$$

где

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{f(u/k)u}{\sqrt{x^2 - u^2}}\, du. \qquad (1.53)$$

Продифференцируем (1.52б) по x:

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\,sds = 0;\quad x > \mu.$$

Левая часть этого выражения является функцией от x, которая равна нулю при $x > \mu$ и неизвестна при $x < \mu$. Обозначим эту функцию через $g(x)$, т. е.

$$\int_0^\infty P(ks)\sin(xs)\,sds = \begin{cases} g(x); & x < \mu; \\ 0; & x > \mu. \end{cases} \tag{1.54}$$

Выражение (1.54) задает связь между функциями p и g в виде интеграла Фурье. Записав соотношение, обратное этому интегралу, получим

$$P(ks)s = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu g(x)\sin(xs)\,dx. \tag{1.55}$$

В последнем выражении пределы интегрирования $(0, \infty)$ заменены на $(0, \mu)$, так как $g(x) = 0$ при $x > \mu$. Подставим выражение (1.55) в уравнение (1.52а) и обозначим переменную интегририрования в интеграле (1.56) через y. Получим

$$\int_0^\mu g(y)U(x,y)\,dy = \psi_1(x);\ x < \mu, \tag{1.56}$$

где

$$U(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\sin(xs)\sin(ys)\,ds. \tag{1.57}$$

$U(x, y)$ является расходящимся интегралом, однако его можно представить в виде суммы δ-функции и сходящегося интеграла. Для этого представим первый множитель в виде $(\sqrt{1-s^2}/s - i) + i$ и заметим, что

$$\delta(x-y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(xs)\sin(ys)\,ds. \tag{1.58}$$

Для того чтобы в этом убедиться, можно умножить подынтегральное выражение (1.58) на $\exp(-\alpha x)$, проинтегрировать по x и перейти к пределу $\alpha \to 0$. Это даст

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{s}{\alpha^2+s^2}\sin(ys)\,ds \to 1,$$

что обеспечивает необходимую нормировку δ-функции.

Так как $\int_0^{\mu} g(x)\delta(x-y)dx = g(y)$, то уравнение (1.56) можно привести к виду

$$g(x) + \int_0^{\mu} g(y)K(x,y)dy = \psi(x); \quad 0 \leqslant x \leqslant \mu, \tag{1.59}$$

где

$$K(x,y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} A(s)\sin(xs)\sin(ys)\,ds. \tag{1.60}$$

$$\psi(x) = -i\int_0^{x} \frac{f(u/k)u}{\sqrt{x^2-u^2}}du = -i\int_0^{x} f(\sqrt{x^2-\xi^2}/k)d\xi, \tag{1.61}$$

$$A(s) = \sqrt{1-s^2}/(is) - 1. \tag{1.62}$$

При $s \to \infty$ $A(s) \approx -1/(2s^2)$, что обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (1.60). Выражение (1.59) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода на конечном промежутке с симметричным ядром.

1.3.2. Преобразование ядра уравнения. Несмотря на то, что интеграл (1.60) абсолютно сходится, для упрощения вычислений его целесообразно привести к интегралу в конечных пределах.

Преобразуем ядро к виду $K(x, y) = (-I_1 - I_2 + I_3 + I_4)/(2\pi)$.

$$I_{1,2} = \int_0^{\infty} A(s)\exp[\pm is(x+y)]ds; \; I_{3,4} = \int_0^{\infty} A(s)\exp[\pm is(x-y)]ds. \tag{1.63}$$

Для выражений I_1 и I_3 берется знак „+", а для I_2, I_4 – знак „–". Будем считать s комплексной переменной, $\sqrt{1-s^2}$ – двузначная функция, причем $\operatorname{Im}\sqrt{1-s^2} > 0$. Это следует из условия излучения $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\gamma^2} > 0$, обеспечивающего в выражении (1.50) убывание экспоненты при возрастании z.

Пусть волновое число имеет небольшую мнимую часть, т. е. $k = k' + ik''$, $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ ($k'', \gamma'' > 0$). Уравнение $\operatorname{Im}\sqrt{k^2-\gamma^2} = 0$ приобретает вид $\gamma'' = k'k''/\gamma'$, что определяет гиперболы на комплексной плоскости γ (рис. 1.7, *а*). При $k'' \to 0$ эти гиперболы стремятся к штриховым кривым. Следовательно, на комплексной плоскости

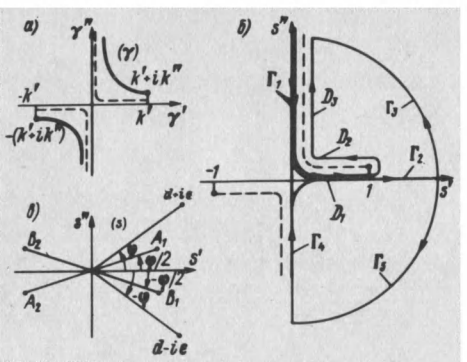


Рис. 1.7. К преобразованию ядра $K(x, y)$: *а* – разрезы на плоскости γ; *б* – контуры интегрирования; *в* – к извлечению корня из комплексной величины

безразмерной переменной s следует провести разрезы по штриховым линиям (рис. 1.7, *б*). Сначала рассмотрим интеграл I_1. Так как $x+y \geqslant 0$, то интеграл по дуге Γ_3 большого радиуса, для которой $\operatorname{Im} s > 0$, равен нулю.

Стянем контур $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ к интегралу по берегу разреза. Так как $\int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\Gamma_3} = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{D_1} + \int\limits_{D_2} + \int\limits_{D_3}$ и $\int\limits_{\Gamma_3} = 0$, то $I_1 = \int\limits_{\Gamma_2} = \int\limits_{D_1} + \int\limits_{D_2} + \int\limits_{D_3}$. Для участков D_1 и D_2 выполняется условие

$$\sqrt{1-s^2}|_{D_1} = -\sqrt{1-s^2}|_{D_2}. \tag{1.64}$$

Действительно, вблизи разреза на одной стороне $\sqrt{1-s^2}|_{D_1} = \sqrt{d+i\epsilon}$, а на другой стороне $\sqrt{1-s^2}|_{D_2} = \sqrt{d-i\epsilon}$ ($d > 0$, ϵ – малое вещественное число; на самом разрезе $\epsilon = 0$). Извлечем $\sqrt{d+i\epsilon}$. Его значениями будут комплексные числа, изображенные в виде точек A_1, A_2 (рис. 1.7, *в*). Чтобы выполнялось условие $\operatorname{Im}\sqrt{1-s^2} > 0$, надо выбрать значение A_1, находящееся в верхней полуплоскости. Извлечем $\sqrt{d-i\epsilon}$. Из значений B_1 и B_2 выбираем B_2, так как только оно имеет положительную мнимую часть. При этом его вещественная часть будет отрицательна. Таким образом, $\sqrt{d+i\epsilon} = \alpha + i\beta$; $\sqrt{d-i\epsilon} = -\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$), что при $\beta \to 0$ соответствует условию (1.64). С учетом условия (1.64) последнее выражение для I_1 можно записать в виде

$$I_1 = \int_0^1 [\sqrt{1-s^2}/(is) - 1]\exp[is(x+y)]\,ds + \int_1^0 [-\sqrt{1-s^2}/(is) -$$

$$- 1]\exp[is(x+y)]ds + \int\limits_{D_3} [\sqrt{1-s^2}/(is) - 1]\exp[is(x+y)]ds.$$

Интеграл по правому берегу D_3 можно также выразить через интеграл по левому берегу в пределах $(0, i\infty)$, заменив знак у корня. Тогда

$$I_1 = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{is}\exp[is(x+y)]\,ds + \int_0^{i\infty}\left[\frac{-\sqrt{1-s^2}}{is} - 1\right]\exp[is(x+y)]ds$$

При вычислении интеграла I_2 надо замкнуть путь интегрирования в **нижней полуплоскости**, так как показатель экспоненты отрицателен. Здесь разрезов нет. Поэтому $\int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\Gamma_4} + \int\limits_{\Gamma_5} = 0$. Так как $\int\limits_{\Gamma_5} = 0$, $I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} = -\int\limits_{\Gamma_4}$, следовательно,

$$I_2 = -\int_{i\infty}^0 \left[\frac{\sqrt{1-s^2}}{is} - 1\right]\exp[-is(x+y)]\,ds = \int_0^{i\infty}\left[\frac{\sqrt{1-s^2}}{is} + 1\right] \times$$

$$\times \exp[is(x+y)]\,ds.$$

Таким образом,

$$I_1 + I_2 = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{is}\exp[is(x+y)]\,ds.$$

Аналогично вычисляются I_3, I_4. При $x > y$

$$I_3 + I_4 = 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{is} \exp\,[is(x-y)]\,ds.$$

При $x < y$ получим то же выражение, где в показателе экспоненты стоит $y - x$. Эти два случая можно объединить, взяв $|x-y|$. Тогда

$$K(x,y) = \frac{i}{\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\left\{\exp\,[is\,(x+y)] - \exp\,[is(|x-y|)\right\}ds, \tag{1.65а}$$

или

$$K(x,y) = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\exp\,(isx_>)\,\frac{\sin\,(sx_<)}{s}\,ds, \tag{1.65б}$$

где $x_>$, $x_<$ – наибольшее и наименьшее из величин x, y соответственно. Заметим, что подынтегральные выражения не имеют особенностей при $s = 0$.

При численном решении интегрального уравнения необходимо многократно вычислять значения ядра в точках $x = x_n$, $y = y_m$. Для упрощения расчетов целесообразно представить функцию двух переменных $K(x, y)$ через функцию одной переменной. Непосредственно разбить интеграл (1.65а) на два слагаемых невозможно, так как интегралы будут расходящимися при $s = 0$. Поэтому прибавим и вычтем единицу в квадратных скобках выражения (1.65а).

Тогда получим

$$K(x,y) = F(|x-y|) - F(x+y), \tag{1.70}$$

где

$$\mathrm{Re}\,F(W) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\frac{\sin\,(sw)}{s}\,ds;\quad \mathrm{Im}\,F(w) = \frac{2}{\pi}\times$$

$$\times\int_0^1 \frac{\sqrt{1-s^2}}{s}\,\sin\,(sw/2)\,ds.$$

Заметим, что функция $F(w)$ не зависит от вида правой части уравнения (1.59), т. е. от распределения колебательной скорости. Поэтому она является для данной задачи универсальной и может быть табулирована.

1.3.3. Звуковое давление и импеданс излучения. Интегральное уравнение (1.59) с ядром (1.70) определяет решение поставленной задачи.

Если это уравнение численно решено и вспомогательная функция $g(x)$ найдена, то звуковое давление на поверхности можно определить из выражения (1.50) при $z = 0$. Подставим в выражение (1.50) представление (1.55) и с учетом формулы (6.671.7) [16] получим

$$\int_0^\infty J_0(us)\sin(xs)\,ds = \begin{cases} 0, & x < u; \\ 1/\sqrt{x^2-u^2}, & x > u. \end{cases}$$

Тогда

$$p(r) = \frac{2\rho c v_0}{\pi}\int_{kr}^{\mu}\frac{g(x)dx}{\sqrt{x^2-(kr)^2}} = \frac{2\rho c v_0}{\pi}\int_0^{\sqrt{\mu^2-(kr)^2}} g_1\left[\sqrt{u^2+(kr)^2}\right]du, \tag{1.71}$$

где $g_1(x) = g(x)/x$.

Найдем звуковое давление в дальнем поле при $kR = k\sqrt{r^2+z^2} \gg 1$. Поскольку

$$J_0(\gamma r) = [H_0^{(1)}(\gamma r) + H_0^{(2)}(\gamma r)]/2 \text{ и } H_0^{(1),\,(2)}(\gamma r) \approx \sqrt{-2/(\pi\gamma r)}\times$$

$$\times \exp\left[\pm i(kr - \pi/4)\right],$$

запишем

$$p(r,z) = \frac{\rho c v_0}{k^2\sqrt{2\pi r}}\left\{\exp(-i\pi/4)\int_0^\infty P(\gamma)\exp\left[(\gamma r + \sqrt{k^2-\gamma^2}z)\sqrt{\gamma}d\gamma + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \exp(+i\pi/4)\int_0^\infty P(\gamma)\exp\left[i(-\gamma r + \sqrt{k^2-\gamma^2}z)\right]\sqrt{\gamma}\,d\gamma\right\}.$$

Применим метод стационарной фазы [63]

$$\int_0^\infty F(x)\exp[i\psi(x)]dx \approx F(x_0)\frac{\sqrt{2\pi}\exp[i\psi(x_0) \pm i\pi/4]}{\sqrt{|\psi''(x_0)|}};\ |\psi''| \gg 1,$$

где x_0 – корень уравнения $\psi'(x_0) = 0$, а знак в показателе экспоненты соответствует знаку величины $\psi''(x_0)$. В первом интеграле $\psi(x) = \gamma r + \sqrt{k^2-\gamma^2}z$, откуда следует $\gamma_0 = k\sin\theta$, где $\sin\theta = r/\sqrt{r^2+z^2} = r/R$. При этом $\psi''(\gamma_0) = z/(k\cos^3\theta)$. Во втором интеграле стационарная точка определяется соотношением $\gamma_0 = -k\sin\theta$ и лежит вне промежутка интегрирования. Следовательно, второй интеграл асимптотически равен нулю. В результате находим

$$p(R,\theta) = -\frac{i\rho c v_0}{kR}\cos\theta P(k\sin\theta)\exp(ikR) \text{ при } kR \gg 1.$$

Подставив сюда представление (1.55), найдем

$$p(R,\theta) = \frac{2i\rho c v_0 \cos\theta}{\pi kR} \exp(ikR) \int_0^{\mu} g(x) \frac{\sin(x\sin\theta)}{\sin\theta} dx$$

при $kR \gg 1$. (1.72)

Импеданс излучения на одну сторону диска определим в виде

$$Z_s = R_s + iX_s = \frac{1}{v_0^2} \iint_s p(r) v^*(r) dS = \frac{2\pi}{v_0} \int_0^a p(r) f^*(r) r\, dr \qquad (1.73)$$

При таком определении Z_s излучаемая мощность (в полупространстве) будет $W = v_0^2 R_s/2$. Подставив в формулу (1.73) выражение (1.71), получим

$$Z_s = \frac{4\rho c}{k^2} \int_0^{\mu} f(u/k) \left(\int_0^{\mu} \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 - u^2}} dx \right) u du.$$

Воспользовавшись формулой для перемены порядка интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\mu} \left[\int_0^{\mu} F(x,u) dx \right] du = \int_0^{\mu} \left[\int_0^{x} F(x,u) du \right] dx,$$

получим после интегрирования по u

$$Z_s = \rho c S \frac{4}{\pi\mu^2} \int_0^{\mu} g(x) G(x) dx, \qquad (1.74)$$

где

$$S = \pi a^2, \quad G(x) = \int_0^{x} f(\sqrt{x^2 - \xi^2}/k) d\xi = \int_0^{x} \frac{f(u/k) u du}{\sqrt{x^2 - u^2}}$$

1.3.4. Случай низких частот. Рассмотрим случай низких частот ($\mu \ll 1$) при равномерном распределении колебательной скорости, т. е. $f(r) = 1$. В выражении (1.65б) при этом можно считать $x_> , x_< \ll 1$. Поэтому

$$K(x,y) \approx -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - s^2} (1 + isx_>) x_< ds = -\frac{x_<}{2} - \frac{2i}{3\pi} xy.$$

Правая часть уравнения (1.59) будет

$$\psi(x) = -i \int_0^{x} \frac{u}{\sqrt{x^2 - u^2}} du = -ix.$$

Интегральное уравнение (1.59) приобретает вид

$$g(x) - \frac{1}{2}\int_0^x yg(y)dy - \frac{x}{2}\int_x^\mu g(y)dy - \frac{2ix}{3\pi}\int_0^\mu yg(y)dy = -ix.$$

Это уравнение может быть решено точно после двукратного дифференцирования по x. Однако проще найти приближенное решение, положив $g(x) = Ax$. Подставив эту функцию в последнее уравнение, получим $A[1 + x^2/12 - \mu^2/4 - 2i\mu^3/(9\pi)] = -i$.

Таким образом, линейная функция удовлетворяет уравнению с точностью до членов $x^2/12$ $(x \leqslant \mu)$ по сравнению с единицей.

Пренебрегая в вещественной части квадратичными членами, найдем коэффициент A. В результате с учетом того, что $1/(1 - i\alpha) \approx 1 + i\alpha$ $(\alpha \ll 1)$, получим

$$g(x) = [2\mu^3/(9\pi) - i]x; \quad \mu \ll 1. \tag{1.76}$$

Распределение звукового давления на поверхности определится по формуле (1.71) после интегрирования:

$$p(r) = \rho c v_0 \left(\frac{4\mu^3}{9\pi^2} - \frac{2i}{\pi}\right)\sqrt{\mu^2 - (kr)^2}; \quad \mu \ll 1. \tag{1.77}$$

Таким образом, распределение звукового давления на поверхности описывается функцией $\sqrt{a^2 - r^2}$, что удовлетворяет условию Мейкснера на краю.

Импеданс излучения вычислим по формуле (1.74). В этом случае $G(x) = x$. После интегрирования получим формулы Л. Я. Гутина:

$$R_s = \rho c S \frac{8\mu^4}{27\pi^2}; \quad X_s = -\rho c S \frac{4\mu}{3\pi}. \tag{1.78}$$

Для вычисления звукового давления в дальнем поле воспользуемся формулой (1.72), причем при $\mu \ll 1$ можно считать $\sin(x \sin\theta) \approx x \sin\theta$. Тогда

$$p(R, \theta) = -\rho c v_0 \frac{2\mu^3}{3\pi} \cdot \frac{\exp(ikR)}{kR} \cos\theta, \tag{1.79}$$

что также совпадает с результатом Л. Я. Гутина.

В качестве примера решено интегральное уравнение (1.59) с ядром (1.70) для двух распределений скорости: равномерного $f(r) = 1$ и неравномерного – вида $f(r) = J_0(\alpha\, r/a)$ при $\alpha = 2{,}404$, соответствующим

скорости мембраны, закрепленной на краю и колеблющейся на первой моде колебаний. Интеграл в уравнении (1.59) заменялся суммой по правилу Симпсона, что дало систему уравнений относительно значений функции g_n в узлах $x_n = (n-1)\Delta x$:

$$g_n + \sum_{m=1}^{N} \alpha_m g_m K(x_n, y_m)\Delta x = \psi(x_n); \quad n = 1, 2, ..., N,$$

где $\Delta x = ka/(N-1)$ – шаг дискретизации; $\alpha_m = 1/3$ при $m = 1$ и $m = N$, остальные α_m равны 2/3 или 4/3 по правилу Симпсона; N – нечетное число [опыт решения уравнения (1.59) с заменой интеграла суммой по правилу прямоугольников и правилу Симпсона показал значительное преимущество последнего с точки зрения уменьшения порядка системы уравнений]. Число точек разбиения интервала определялось из условия $N = 5 + 2E[Qka/(4\pi)]$, где E – целая часть числа; Q – количество узлов на одну длину волны. Таким образом, минимальное число точек при малых ka составляло $N = 5$ и постепенно увеличивалось при возрастании ka. Установлено, что достаточно взять $Q = 10$ для получения трех верных знаков результата. Перед составлением системы уравнений табулировалась функция $F(w)$ и значения функции $K(x, y)$ в узлах определялись по таблице путем интерполяции. Время счета составляло не более нескольких секунд при $ka \approx 20$ и долей секунды при $ka < 5$. Заметим, что расчеты с решением интегрального уравнения при $ka > (10 \ldots 15)$ лишены практического смысла, так как в этом случае результаты весьма близки к результатам для излучателя в жестком экране.

Графики на рис. 1.8 дают возможность сравнить импедансы излучения осциллирующего поршня и поршня в жестком экране. Последние рассчитывались по формулам (1.33).

График $R_s/(\rho cS)$ для осциллирующей мембраны (рис. 1.9) стремится к значению 0,27. Это соответствует значению, которое можно получить, если считать, что при $ka > 5$ распределения скорости и давления примерно совпадают (см. рис. 1.12, *б*), причем $p(r) \approx \rho c v_0 f(r)$. В этом случае

$$R_s \approx \rho c 2\pi \int_0^a J_0^2(\alpha r/a) r dr = \rho cS[J_0^2(\alpha) + J_1^2(\alpha)],$$

что при $\alpha = 2{,}404$ дает $R_s/\rho cS = J_1^2(\alpha) = 0{,}27$.

На рис. 1.10 показано отношение $|p/p_0|$, где p и p_0 – звуковые давления на оси осциллирующего диска и диска в бесконечном жестком экране соответственно. Для диска в жестком экране

$$p_0 = -\frac{ik\rho c v_0}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} \iint_S f(r)\, dS. \qquad (1.80)$$

Из формул (1.72) и (1.80) получим

$$|p/p_0| = \left| \frac{4}{\pi\mu^2} \int_0^{\mu} g(x) x dx \Big/ \left[\frac{2}{\mu^2} \int_0^{\mu} f(u/k) u du \right] \right| \qquad (1.81)$$

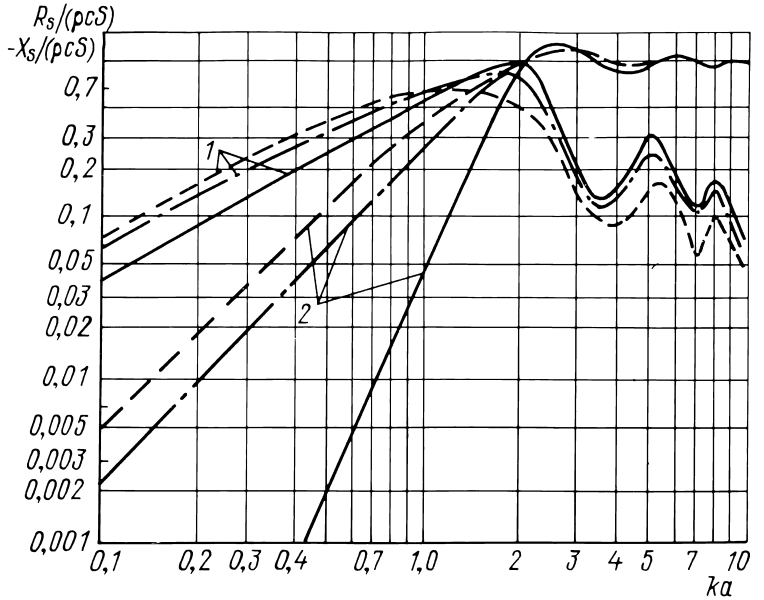


Рис. 1.8. Импедансы излучения пульсирующего (– – –), осциллирующего (———) и одностороннего (–·–·–) дисков

1 – x_S; *2* – r_S

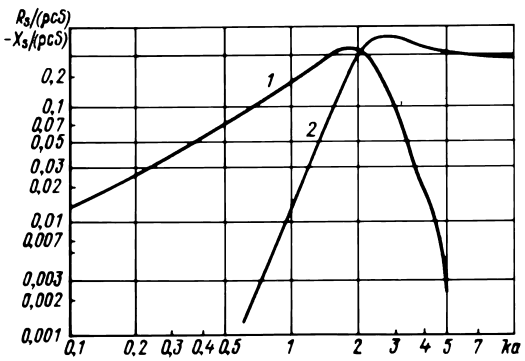


Рис. 1.9. Импеданс излучения осциллирующей мембраны без экрана с распределением колебательной скорости вида $J_0(ar/a)$; $a = 2{,}404$

1 – x_S; *2* – r_S

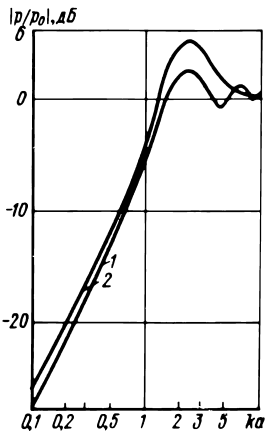


Рис. 1.10. Относительное звуковое давление на оси осциллирующего диска

1 – равномерное распределение колебательной скорости; *2* – распределение вида $J_0(ar/a)$; $a = 2{,}404$

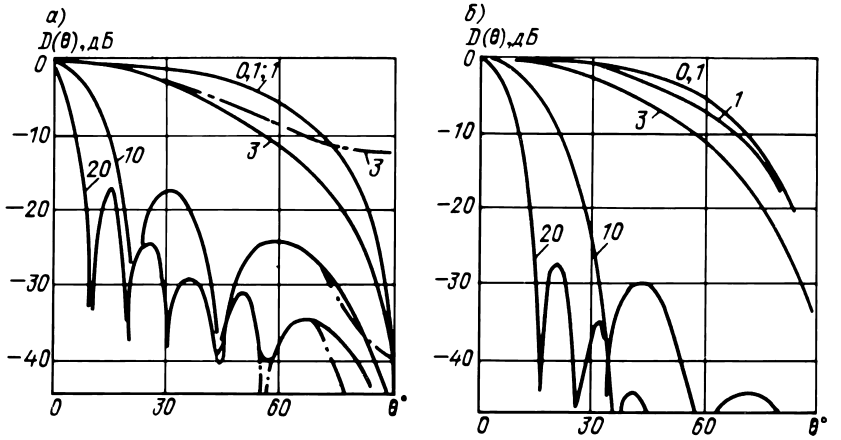


Рис. 1.11. Характеристики направленности осциллирующего диска: *а* – равномерное распределение скорости (поршень); *б* – неравномерное распределение $v = v_0 J_0(ar/a)$, $a = 2{,}404$ (мембрана)

——— точное решение для осциллирующего диска; –·–·– диск в жестком экране; цифры на кривых – значения *ka*

Нормирующая величина после наклонной черты в последнем выражении равна единице для диска с равномерным распределением скорости и $2J_1(a)/a$ – для осциллирующей мембраны. При $\mu > 5$ отношение $|p/p_0|$ быстро стремится к единице.

Характеристики направленности $D(\theta) = 20 \lg |p(\theta)/p(0)|$ при $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 1$ (рис. 1.11) почти не отличаются от функции $R(\theta) = \cos\theta$.

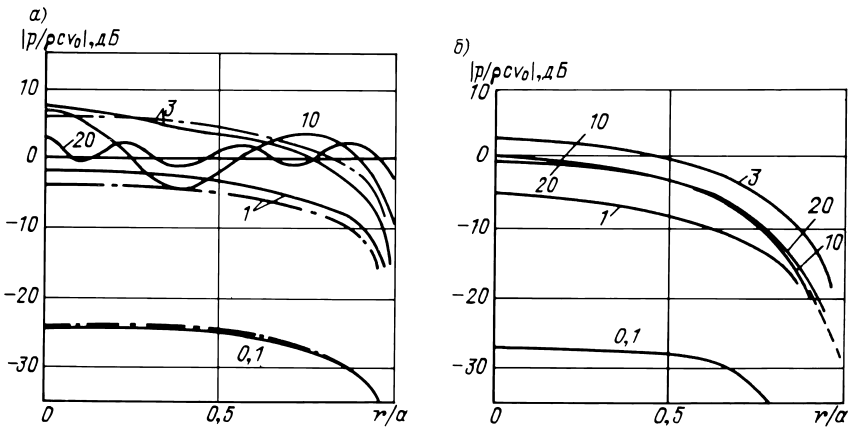


Рис. 1.12. Распределение звукового давления вдоль радиуса: *а* – равномерное распределение скорости [–·–·– расчет по формуле (1.77)]; *б* – распределение $v = v_0 J_0 \times (ar/a)$, $a = 2{,}404$ [––– зависимость $20 \lg J_0(ar/a)$]

——— точный расчет; цифры на кривых – значения *ka*

При $ka > 10$ различия между кривыми для диска в жестком экране и диска без экрана заметны лишь вблизи углов, близких к 90°.

На рис. 1.12, *б* показано распределение звукового давления вдоль радиуса. При $ka > 1$ распределение давления хорошо описывается функцией (1.77). С увеличением μ звуковое давление на оси диска с равномерным распределением скорости стремится к давлению в плоской волне. Для осциллирующей мембраны уже при $\mu > 5$ распределение давления оказывается весьма близким к распределению колебательной скорости (см. рис. 1.12, *б*).

Можно также получить решение и для неосесимметричного распределения скорости. Для этого следует воспользоваться методом решения парных интегральных уравнений, включающих функции Бесселя с ненулевым индексом [126].

1.3.5. Осциллирующий диск в жестком кольцевом экране. Как следует из рис. 1.8, эффективность излучения звука излучателем без экрана на низких частотах ($ka < 1$) значительно меньше эффективности такого же излучателя, помещенного в акустически жесткий экран. В п. 1.2.3 указано, что причиной этого является перетекание жидкости с одной стороны осциллирующего излучателя на другую, приводящее к выравниванию звуковых давлений на обеих сторонах излучателя. Поэтому экран, препятствующий выравниванию давлений, является средством для увеличения эффективности излучения. В связи с тем что реальные экраны имеют конечные размеры, необходимо оценить влияние размеров экрана на характеристики излучателя.

В работе [90] приведен ряд численных результатов, полученных разложением неизвестных функций в ряды по сфероидальным функциям. В отличие от этого ниже дано решение; полученное через общий алгоритм на основе интегрального уравнения.

Решение задачи об осциллирующем излучателе в жестком кольцевом экране следует из приведенного в этом параграфе решения в качестве частного случая. Положим, что в кольце $a_1 < r < a$ колебательная скорость равна нулю. В результате получим осциллирующий излучатель радиусом a_1, работающий в акустически жестком кольце радиусами a_1 и a. Запишем расчетные формулы. Распределение скорости зададим в виде

$$f(r) = \begin{cases} 1 \text{ при } r < a_1; \\ 0 \text{ при } a_1 < r < a. \end{cases}$$

Правую часть уравнения (1.59) запишем, взяв интеграл (1.61). Если $x < ka_1 = \mu_1$, то интегрирование надо выполнять в пределах $(0 \ldots x)$, а если $x > ka_1$ – в пределах $(0 \ldots ka_1)$. В результате получим

$$\psi(x) = \begin{cases} -ix & \text{при } x < \mu_1; \\ -i(x - \sqrt{x^2 - \mu_1^2}) & \text{при } x > \mu_1. \end{cases}$$

Импеданс излучения определим по формуле (1.74), однако нормировать его будем к величине $\rho c S_1$, где $S_1 = \pi a_1^2$ – площадь излучателя. После интегрирования получим

$$z_s = Z_s/\rho c S_1 = \frac{4}{\pi \mu_1^2} \int_0^{\mu} g(x) G(x) dx, \tag{1.82}$$

где

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < \mu_1; \\ x - \sqrt{x^2 - \mu_1^2} & \text{при } x > \mu_1. \end{cases} \tag{1.83}$$

Для небольших волновых размеров излучателя при увеличении ширины экрана до значений $k(a - a_1) \approx 1{,}5$ активная составляющая импеданса излучения (рис. 1.13) резко увеличивается. При дальнейшем увеличении ширины она осциллирует и при $k(a - a_1) \approx 6$ приближается к значениям для излучателя в жестком экране. Если диаметр излучателя примерно равен длине волны или более ($ka_1 \geqslant 3$), то жесткий экран практически не влияет на активную составляющую импеданса излучения.

Звуковое давление на оси излучателя в дальнем поле можно вычислить по формуле, аналогичной выражению (1.81), за исключением того, что при нормировке следует заменить a на a_1. Тогда

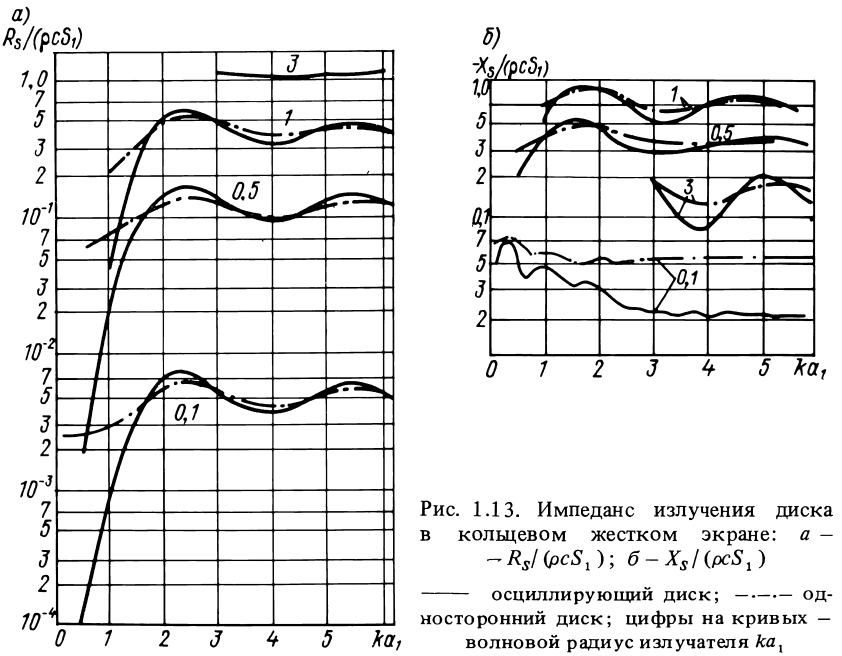


Рис. 1.13. Импеданс излучения диска в кольцевом жестком экране: *а* – $-R_s/(\rho c S_1)$; *б* – $X_s/(\rho c S_1)$

—— осциллирующий диск; –·–·– односторонний диск; цифры на кривых – волновой радиус излучателя ka_1

$$p/p_0 = \frac{4}{\pi\mu_1^2}\int_0^{\mu} g(x)\,x\,dx. \qquad (1.84)$$

Так же как и сопротивление излучения, звуковое давление при увеличении размеров экрана сначала сильно увеличивается, а затем осциллирует (рис. 1.14). Рассмотрим излучатель малых волновых размеров. При $ka \approx 6{,}3$, т. е. при $a \approx \lambda$, звуковое давление на оси резко уменьшается. Для того чтобы это объяснить, обратимся к рис. 1.15, *а*.

В точку наблюдения приходит прямой звук от излучателя и звук, излученный задней стороной и обогнувший экран (краевая волна). Звуковые давления на противоположных сторонах излучателя находятся в противофазе. Если ширина экрана равна длине волны, то фаза звуковой волны, приходящей от задней стороны излучателя к внешней кромке экрана, сдвигается на 360° и оказывается противоположной фазе прямой волны. Внешняя кромка играет при этом роль дополнительного

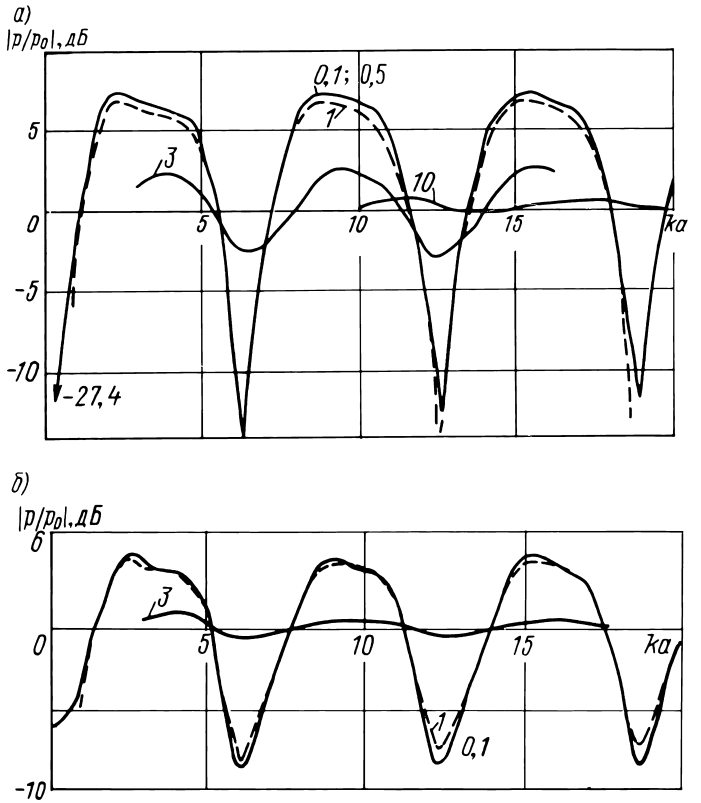


Рис. 1.14. Относительное звуковое давление на оси диска в жестком кольцевом экране (цифры на кривых – значения ka_1): *а* – осциллирующий диск; *б* – односторонний диск

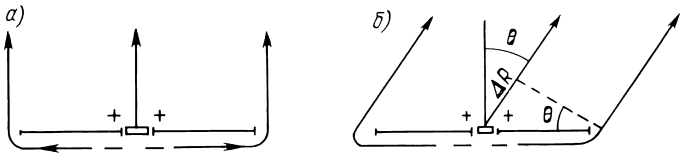


Рис. 1.15. Дифракция на кольцевом экране: *а* – поле на оси; *б* – образование боковых максимумов при $a \approx \lambda$

излучателя, действующего в противофазе по отношению к основному. Для промежуточных значений *ka* сдвиг фазы при прохождении волны вдоль задней стороны оказывается близким к 180°, что совместно с таким же сдвигом на задней стороне излучателя дает синфазное излучение основного и дополнительного излучателей (так называемая фазоинверсная система). При этих значениях *ka* звуковое давление оказывается бо́льшим, чем для излучателя в бесконечном жестком экране.

Влияние экрана на характеристики направленности в значительной степени определяется волновыми размерами излучателя. При малых волновых размерах (рис. 1.16, *а, б*) экран сильно влияет на характеристики. При значении *ka* = 6,3, соответствующем минимуму на частотной характеристике звукового давления (см. рис. 1.14), диаграмма направленности резко искажается – появляется провал вблизи оси. Заметим, что

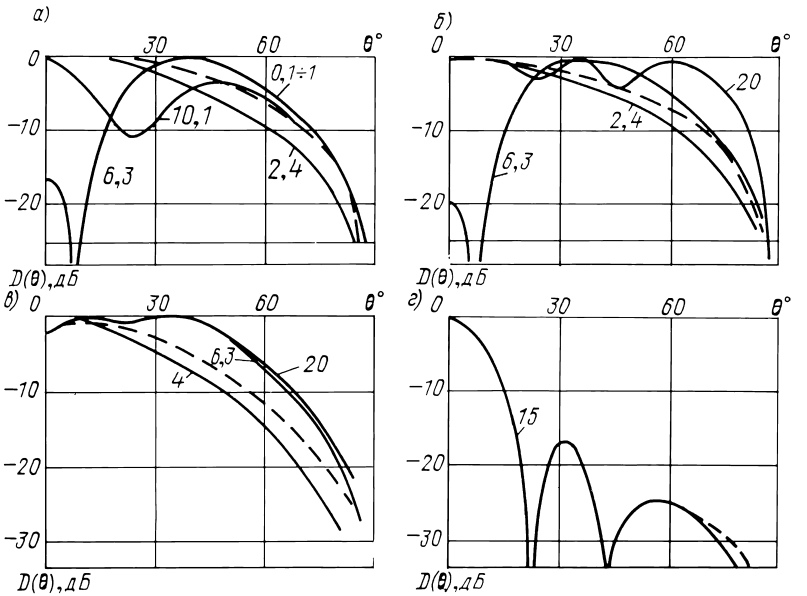


Рис. 1.16. Характеристики направленности осциллирующего диска в жестком кольцевом экране при ka_1 = 0,1 (*а*); ka_1 = 1 (*б*), ka_1 = 3 (*в*), ka_1 = 10 (*г*); цифры на кривых – значения *ka*

——— диск в экране; ––– экран отсутствует

сильное уменьшение звукового давления наблюдается лишь в сравнительно небольшой области углов. При увеличении угла θ появляется сдвиг по фазе между волнами от основного и дополнительного излучателей, соответствующий расстоянию ΔR на рис. 1.15, *б*. В результате уже не происходит противофазного сложения давлений. При увеличении размеров экрана заметно увеличиваются уровни при больших углах, что соответствует приближению к бесконечному акустически жесткому экрану.

В случае больших волновых размеров излучателя (рис. 1.16, *г*) влияние экрана незаметно, так как при этом направленные свойства почти полностью определяются характеристикой направленности самого излучателя.

Заметим, что появление глубоких провалов в частотной и угловой характеристиках связано с тем, что при круглой форме экрана все точки дополнительного излучателя на кромке, создающего краевую волну, работают синфазно. Для экранов другой формы (например, прямоугольных) такой синфазности уже нет и характеристики должны сглаживаться.

1.3.6. Односторонний излучатель без экрана и в жестком кольцевом экране. Поле одностороннего диска представляет собой полусумму полей осциллирующего и пульсирующего дисков (см. рис. 1.2, *в*). Дальнее поле пульсирующего диска радиусом a_1 (диска в бесконечном жестком экране) с равномерным распределением скорости определяется в виде

$$p_0(R,\theta) = \frac{-ik\rho c v_0 S_1}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{2J_1(\mu_1 \sin\theta)}{\mu_1 \sin\theta}. \qquad (1.85)$$

Взяв полусумму значений (1.72) и (1.85), получим выражение для дальнего поля одностороннего диска в кольцевом жестком экране:

$$p_1(R,\theta) = \frac{-ik\rho c v_0 S_1}{2\pi} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{1}{2} \left[\frac{2J_1(\mu_1 \sin\theta)}{\mu_1 \sin\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\cos\theta}{\pi\mu_1^2} \int_0^{\mu} g(x) \frac{\sin(x \sin\theta)}{\sin\theta} dx \right]. \qquad (1.86)$$

Здесь $\mu = ka$; $\mu_1 = ka_1$; a и a_1 – радиусы экрана и диска соответственно; $S_1 = \pi a_1^2$; $g(x)$ определяется по-прежнему из решения интегрального уравнения (1.59). Относительное звуковое давление на оси будет

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi\mu_1^2} \int_0^{\mu} g(x) x dx \right], \qquad (1.87)$$

а характеристика направленности (ненормированная) определяется выражением, стоящим в квадратных скобках формулы (1.86).

Импеданс излучения одностороннего диска в жестком кольцевом экране $Z_{s1} = R_{s1} + iX_{s1}$ определим в виде полусуммы значений, определяемых выражениями (1.33) и (1.82).

Заменив в первом из них ka на ka_1, получим

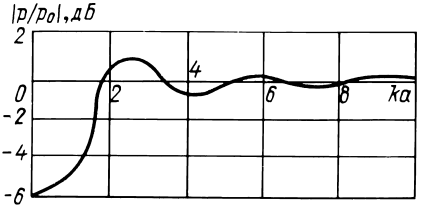


Рис. 1.17. Относительное звуковое давление на оси одностороннего диска без экрана

$$Z_{s1} = \rho c S_1 \cdot \frac{1}{2}\left[1 - \frac{J_1(2\mu_1)}{\mu_1} - i\frac{S_1(2\mu_1)}{\mu_1} + \frac{4}{\pi\mu_1^2}\int_0^{\mu} g(x)G(x)dx\right],$$

где $G(x)$ определяется выражением (1.83).

Импеданс излучения одностороннего диска без экрана ($ka = ka_1$) является промежуточным между импедансами пульсирующего и осциллирующего дисков. Звуковое давление на оси (рис. 1.17) при малых волновых размерах диска на 6 дБ меньше давления для диска в жестком экране, но при возрастании волновых размеров уже при $ka \approx 2$ они практически становятся одинаковыми.

На рис. 1.18 показаны характеристики направленности одностороннего диска. Обратим внимание на подъем характеристики в тыльной области вблизи углов, близких к 180°. Это связано с тем, что поле в тыльной области формируется в результате дифракции на кромке, в результате чего образуется некоторый дополнительный излучатель. В направлении $\theta = 180°$ все точки этого излучателя работают синфазно, что увеличивает давление в этом направлении. Аналогичное явление в оптике,

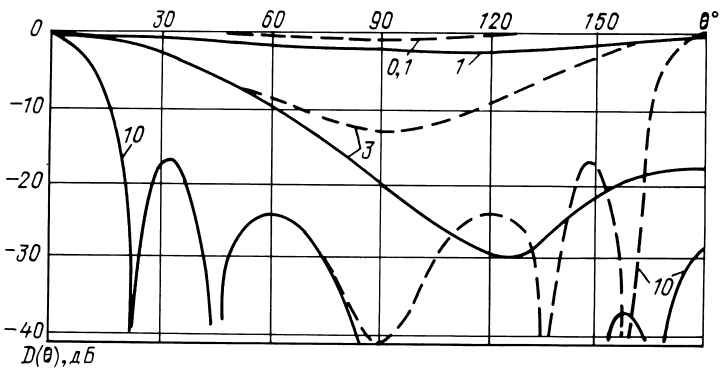


Рис. 1.18. Характеристики направленности одностороннего диска без экрана

——— точный расчет; ––– функция $20\lg|2J_1(ka\sin\theta)/(ka\sin\theta)|$; цифры на кривых – значения ka

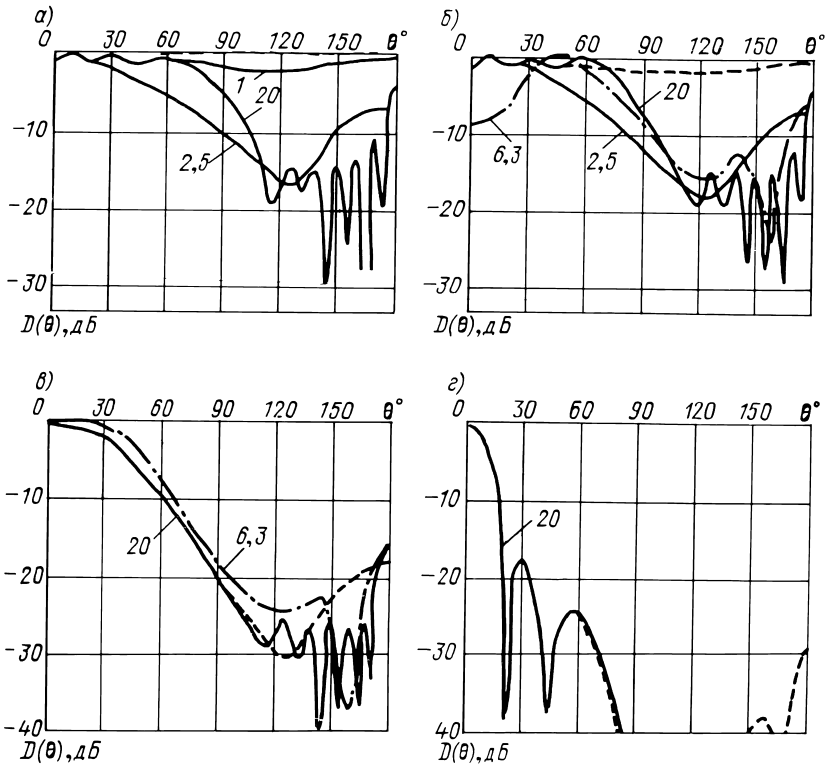


Рис. 1.19. Характеристики направленности одностороннего диска в жестком кольцевом экране при $ka_1 = 0{,}1$ (*а*), $ka_1 = 1$ (*б*), $ka_1 = 3$ (*в*), $ka_1 = 10$ (*г*) ——— характеристики без экрана ($ka = ka_1$); цифры на кривых – значения ka

наблюдаемое в виде светлого пятна на оси в области тени при дифракции света на диске, называется пятном Пуассона.

Рисунки 1.13, *а, б* ... 1.19 позволяют проследить влияние размеров экрана на акустические характеристики диска. При ширине экрана, составляющей примерно половину длины волны $[k(a - a_1) \geqslant (2 \ldots 3)]$, импедансы излучения одностороннего диска в кольцевом экране и диска в бесконечном экране становятся практически равными. Заметим, что при возрастании размеров экрана осцилляции давления на оси (и для осциллирующего и для одностороннего дисков) не затухают (см. рис. 1.14, *а, б*). Это связано с тем, что при увеличении радиуса экрана a увеличивается и длина окружности $2\pi a$, определяющая длину дополнительного излучателя, имитирующего дифракцию на кромке. Производительность этого излучателя (при $a \gg a_1$) убывает по сферическому закону $1/a$, в результате чего вклад его остается постоянным. Такая ситуация имеет место лишь для идеального абсолютно жесткого экрана.

Практически из-за конечной упругости, а также вследствие потерь при распространении звука вдоль экрана звуковое давление убывает быстрее, чем по закону $1/a$, и вклад дополнительного излучателя уменьшается. В результате этого глубина провалов на рис. 1.14 при увеличении ka должна уменьшаться.

Влияние экрана на характеристики направленности одностороннего диска показано на рис. 1.19. При малых ka_1 (см. рис. 1.19, *а, б*) экран значительно снижает уровень тыльного излучения в области $\theta > 90°$. При $ka = 20$ этот уровень составляет около -15 дБ. Вблизи оси при $\theta \approx 180°$ всегда есть максимум, соответствующий упомянутому выше пятну Пуассона. При $ka_1 \geqslant 3$ (рис. 1.19, *в, г*) характеристика формируется в основном самим излучателем, а экран влияет значительно меньше.

1.4. Рассеяние звука на диске при нормальном падении

1.4.1. Акустически жесткий диск. Пусть звуковая волна падает нормально на диск в направлении оси z, совпадающей с осью диска. Запишем звуковые поля в верхнем и нижнем полупространствах в виде $p_в = p_i + p_{sв}$, $p_н = p_i + p_{sн}$, где $p_i = A_0 \exp(ikz)$ – падающая плоская волна; $p_{sв}$ и $p_{sн}$ – рассеянные поля в верхнем и нижнем полупространствах соответственно. Разделение поля на падающую и рассеянную части можно интерпретировать как введение некоторых фиктивных источников звука на поверхности диска, поля которых в сумме с падающей волной должны удовлетворять граничным условиям.

В плоскости $z = 0$ вне диска поле должно быть непрерывно: $p_в = p_н$, $\partial p_в/\partial z = \partial p_н/\partial z$ при $r > a$, т. е.

$$p_{sв} = p_{sн};\ \partial p_{sв}/\partial z = \partial p_{sн}/\partial z \text{ при } r > a: \tag{1.87}$$

Рассмотрим акустически жесткий диск, для которого в плоскости $z = 0$ выполняются следующие условия: $\partial p_в/\partial z = \partial p_н/\partial z = 0$ при $r < a$, т. е.

$$\partial p_{sв}/\partial z = \partial p_{sн}/\partial z = -\partial p_i/\partial z \text{ при } r < a. \tag{1.88}$$

Из условий (1.87) и (1.88) следует, что в плоскости $z = 0$ нормальные производные рассеянного поля одинаковы на обеих сторонах диска. Это означает, что фиктивный источник, создающий рассеянное поле, имеет колебательные скорости, одинаковые на обеих сторонах, т. е. относится к осциллирующему типу, изображенному на рис. 1.2, *б*. Если в данный момент в верхнем полупространстве фиктивные источники создают сжатие среды, то в нижнем полупространстве – расширение.

Таким образом, рассеянные поля в верхнем и нижнем полупространствах антисимметричны, т. е. одинаковы по значению и противоположны по фазе и $p_{sв} = -p_{sн} = p_s$. Сравнение этого результата с первым из равенств (1.87) показывает, что в плоскости $z = 0$ вне диска $p_s = 0$, т. е.

бесконечно тонкий акустически жесткий диск „не виден" из плоскости $z = 0$. В любой точке пространства полное поле можно записать в виде $p = p_i \pm p_s$, где знаки „+" и „–" относятся к верхнему и нижнему полупространствам соответственно. Граничные условия при рассеянии на жестком диске записываются в виде

$$\partial p_s/\partial z|_{z=0} = -ikA_0 \text{ при } r < a; \quad p_s|_{z=0} = 0 \text{ при } r > a. \tag{1.89}$$

Сравнив условия (1.48) и (1.89), получим, что задача об определении поля, рассеянного на жестком диске, совпадает с задачей вычисления поля осциллирующего излучателя с колебательной скоростью $v_z = v_0 = -A_0/(\rho c)$.

Таким образом, для рассеянного поля оказываются справедливыми все выражения п. 1.3 с заменой p на p_s и v_0 на $-A/(\rho c)$. По аналогии с формулой (1.72) получим выражение для диаграммы рассеяния

$$p_s(R, \theta) = \frac{i2A_0 \cos\theta}{\pi kR} \exp(ikR) \int_0^{\mu} g(x) \frac{\sin(x \sin\theta)}{\sin\theta} dx; \quad kR \gg 1. \tag{1.90}$$

Диаграммы рассеяния совпадают с диаграммами направленности осциллирующего диска, приведенными на рис. 1.11, *а*. Один из двух одинаковых лепестков диаграммы рассеяния расположен в области $0 \leqslant \theta \leqslant 90°$, второй (не показанный на рис. 1.11, *а*) – в области $90° \leqslant \theta \leqslant 180°$. Первый из них является тенеобразующим. Складываясь противофазно с падающей волной, рассеянная волна в этом лепестке формирует акустическую тень.

Рассеянное поле на оси будет

$$p_s(R, 0) = \frac{2A_0}{\pi kR} \exp(ikR) \int_0^{\mu} g(x) x dx. \tag{1.91}$$

В частности, при малых значениях $\mu = ka$ получим

$$p_s(R, \theta) = A_0 \frac{2\mu^3}{3\pi} \frac{\exp(ikR)}{kR} \cos\theta; \quad \mu \ll 1. \tag{1.92}$$

График зависимости амплитуды рассеянного поля на оси от параметра μ (рис. 1.20; кривая *2*) совпадает с кривой *1* на рис. 1.10. Нормирующее значение амплитуды на этом графике $p_{s\,к}$ соответствует амплитуде волны, рассеянной на диске больших волновых размеров ($\mu \gg 1$), что совпадает со значением, следующим из приближения Кирхгофа. Это значение можно получить из формулы (1.80), заменив v_0 на $-A_0/(\rho c)$ и приняв $f(r) = 1$, т. е.

$$p_{s\,к} = A_0 \frac{i(ka)^2}{2} \frac{\exp(ikR)}{kR}. \tag{1.93}$$

Таким образом, при $\mu \gg 1$

$$|p_s| \approx |p_{s\,к}| = kS/(2\pi R) = S/\lambda R;$$

$$\mu \gg 1. \qquad (1.94)$$

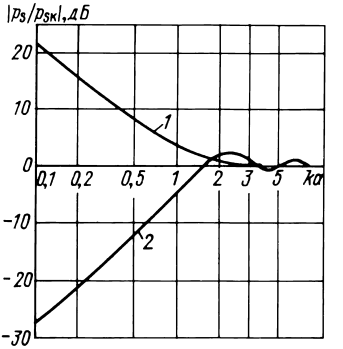


Рис. 1.20. Относительная амплитуда обратного рассеяния от диска *1* и *2* – акустически мягкий и жесткий диски соответственно

Левая часть кривой *1* на рис. 1.20 описывается прямой линией $20 \times \times \lg(p/p_{s\,к}) = 20 \lg [4\mu/(3\pi)]$, где p определяется по формуле (1.79) с заменой v на $-A_0(\rho c)$.

1.4.2. Акустически мягкий диск. В этом случае в плоскости $z = 0$ при $r > a$ сохраняются условия непрерывности (1.87), а на самом диске $p_в = p_н = 0$, т. е. $p_{s\,в} = p_{s\,н} = p_i$ при $r < a$. Таким образом, на всей плоскости $z = 0$ $p_{s\,в} = p_{s\,н}$ и фиктивные источники являются симметричными относительно плоскости $z = 0$. Поэтому рассеянное поле также будет симметричным и $p_{s\,в} = p_{s\,н} = p_s$; во всем пространстве. Следовательно, в обеих полупространствах $p = p_i + p_s$. В силу симметрии рассеянного поля относительно плоскости $z = 0$ выполняется условие $\partial p_s/\partial z = 0$ при $r > a$ и $z = 0$.

Таким образом, граничные условия имеют вид

$$p_s|_{z=0} = -p_i|_{z=0} \text{ при } r < a; \quad \partial p_s/\partial z|_{z=0} = 0 \text{ при } r > a.$$

Решение такой задачи можно получить тем же способом, что и в п. 1.3. Выражение, определяющее рассеянное поле, запишем в виде

$$p_s(r,z) = \frac{A_0}{k^2} \int_0^\infty P_s(\gamma) J_0(\gamma r) \exp\left(i\sqrt{k^2 - \gamma^2} z\right) \gamma d\gamma. \qquad (1.95)$$

Вместо (1.51) будет

$$\int_0^\infty P_s(ks) J_0(us) s ds = -1 \text{ при } u < \mu;$$

$$\int_0^\infty P_s(ks) J_0(us) \sqrt{1 - s^2}\, ds = 0 \text{ при } u > \mu.$$

Выполним те же преобразования, что и в п. 1.3, за исключением того, что дифференцировать по x будем выражение, соответствующее уравнению (1.52а), а не (1.52б). Вместо соотношения (1.55) будет

$$P_s(ks)\sqrt{1 - s^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g(x) \cos(xs)\, dx. \qquad (1.96)$$

В результате получим уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\left.\begin{aligned} & g(x) + \int_0^{\mu} g(y)\, K_1(x,y) = -i; \\ & K_1(x,y) = F_1(x+y) + F_1(|x-y|)\,; \\ & F_1(w) = \frac{1}{\pi}\left[i - w\int_0^1 \sqrt{1-s^2}\,\exp(isw)ds\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1.97)$$

Дальнее поле рассеяния определим из выражений (1.95), (1.96):

$$p_s(r,z) = \frac{2A_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\int_0^{\mu} g(x)\cos(xs)\,dx J_0(krs)\;\times$$

$$\times\;\exp\left(ikz\sqrt{1-s^2}\right)sds.$$

Интегрирование по s на участке (0 ... 1) дает результат, соответствующий дальнему полю рассеяния, а на участке (0 ... ∞) – ближнему полю, в котором амплитуды волн экспоненциально убывают при удалении от диска. Поэтому для определения дальнего поля можно ограничиться интегрированием по промежутку (0 ... 1).

Выполним замену переменных $s = \sin\theta$ и применим метод стационарной фазы так же, как и в 1.3. В результате получим

$$p_s(R,\theta) = -A_0\frac{2i}{\pi kR}\exp(ikR)\int_0^{\mu} g(x)\cos(x\sin\theta)dx;\; kR \gg 1. \qquad (1.98)$$

Рассмотрим случай низких частот ($\mu \ll 1$). В этом случае приближенное решение уравнения (1.97) будет $g(x) \approx -i$.

Тогда

$$p_s(R) = -A_0\frac{2\mu}{\pi}\frac{\exp(ikR)}{kR};\;\; \mu \ll 1. \qquad (1.99)$$

В отличие от жесткого диска [см. формулу (1.92)] рассеяние на мягком диске на низких частотах является ненаправленным. Амплитуда рассеяния в этом случае много больше, чем для жесткого диска, так как зависимость от μ здесь линейная. Используя выражение (1.93), получим относительное значение амплитуды рассеяния:

$$|p_s/p_{s\,к}| = 4/(\pi\mu);\;\; \mu \ll 1. \qquad (1.100)$$

Таким образом, в низкочастотной области амплитуда рассеяния на акустически мягком диске оказывается больше определяемой из приближения Кирхгофа. На рис. 1.20 (кривая *1*) показана зависимость $20\lg(|p_s/p_{s\,к}|)$ от параметра $\mu = ka$. Расчет проводился по формуле

$$|p_s/p_{s\kappa}| = \frac{4}{\pi\mu^2}\int_0^{\mu} g(x)dx,$$

следующей из выражений (1.93) и (1.98). Левая часть графика описывается асимптотически выражением (1.100).

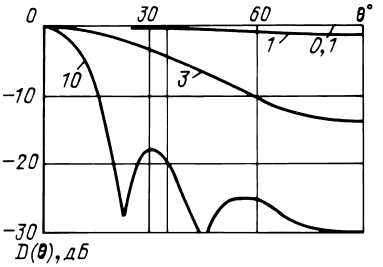


Рис. 1.21. Характеристики рассеяния на акустически мягком диске (цифры на кривых – значения ka)

Диаграммы рассеяния на акустически мягком диске (рис. 1.21) отличаются от диаграмм для жесткого диска, совпадающих с графиками на рис. 1.11, *а*, в основном поведением при углах, близких к 90°. В этих направлениях уровень для мягкого диска оказывается много бóльшим, чем для жесткого диска.

1.5. Излучение звука полосой в движущуюся среду

Рассмотрим особенности, возникающие при излучении звука в движущуюся среду. Ограничимся двумерной задачей, считая, что все параметры не зависят от координаты, перпендикулярной к плоскости xy на рис. 1.22. Скорость потока V направлена вдоль поверхности. Распределение колебательной скорости поверхности запишем в форме $w_y = w_0 f(x)$, где w_0 – скорость в точке $x = 0$. Уравнение Гельмгольца для движущейся среды имеет вид [5]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k^2\left(1 + i\frac{M}{k}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p = 0.$$

Здесь $M = V/c < 1$ – число Маха. Заметим, что вблизи поверхности y-составляющие скорости частиц среды v_y и такие же составляющие скорости самой поверхности w_y не совпадают [61] и условие неразрывности выполняется лишь для y-составляющих смещений, а не скоростей (это можно понять, если рассмотреть простейшую ситуацию, когда поток обтекает некоторую неровность на неподвижной поверхности. В этом случае $w_y = 0$, но $v_y \neq 0$). Заметим, что для составляющих скоростей среды и тела (v_n и w_n соответственно), нормальных к мгновенному положению поверхности тела при колебаниях, условие $v_n = w_n$ выполняется.

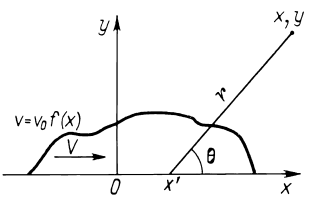


Рис. 1.22 Поток около излучателя

Между v_y, w_y и звуковым давлением на поверхности существует связь [123]:

$$v_y = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right) y(x); \quad \left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=0} = -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right) v_y(x) =$$

$$= -\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 w_y(y). \qquad (1.101)$$

Звуковое давление, создаваемое линейным источником, расположенным на жесткой поверхности перпендикулярно к плоскости рисунка, определяется следующим образом [64]:

$$p_0(r,\theta) = \frac{\omega\rho w_y(x')\exp\left[(x-x')kM/(1-M^2)\right]}{2(1-M^2)^{5/2}}\left[\left(1+\frac{M^2}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times H_0^{(1)}(k_1 r_1) - 2iM\cos\theta_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1) + \frac{M^2}{2}\cos(2\theta_1) H_2^{(1)}(k_1 r_1)\right], \qquad (1.102)$$

где $k_1 = k/\sqrt{1-M^2}$; $r_1 = [(x-x')^2/(1-M^2) + y^2]^{1/2}$; $\cos\theta_1 = \cos\theta : (1-M^2\sin^2\theta)^{1/2}$. Сравним это выражение с формулой, определяющей поле линейного источника, расположенного на жесткой поверхности в неподвижной среде: $p = \omega\rho w_y H_0^{(1)}(kr)/2$. Поток изменяет зависимость звукового давления от расстояния и приводит к появлению членов, содержащих функции $H_1^{(1)}(k_1 r_1)$ и $H_2^{(1)}(k_1 r_1)$. Кроме того, поле линейного источника в потоке приобретает направленность, причем присутствуют слагаемые, пропорциональные $\cos\theta_1$ и $\cos(2\theta_1)$ (дипольный и квадрупольный члены). Поскольку коэффициент при $\cos(2\theta_1)$ пропорционален M^2, то влияние квадрупольного члена начинает проявляться лишь при значительных M. Экспоненциальный член определяет сдвиг фаз, возникающий из-за „сноса" звукового поля потоком.

Если $k_1 r_1 \gg 1$ (дальнее поле), то

$$p_0(r_1,\theta) \approx \frac{\omega\rho w_y(x')\exp\left[i(x-x')kM/(1-M^2) + ik_1 r_1 - i\pi/4\right]}{2(1-M^2)^{5/2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r_1}}\left(1 + \frac{M^2}{2} - 2M\cos\theta_1 - \frac{M^2}{2}\cos(2\theta_1)\right), \qquad (1.103)$$

где $r_1 = r_1^{(0)} - x'\cos\theta_1/\sqrt{1-M^2}$; $r_1^{(0)} = [x^2/(1-M^2) + y^2]^{1/2}$.

Звуковое поле поршня с распределением колебательной скорости по его поверхности, заданным функцией $w_y(x')$, определяется в виде интеграла:

$$p(r,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(r,\theta,x') w_y(x') dx', \qquad (1.104)$$

где в качестве p_0 следует взять выражение (1.102) или (1.103).

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть распределение $w_y(x')$ представляет собой ступенчатую функцию (излучение полосы) $w_y(x') = w_0$ при $|x'| \leqslant l/2$ и $w_y(x') = 0$ при $|x'| > l/2$.

Тогда из выражений (1.103) и (1.104) после интегрирования получим

$$p(r,\theta) = \frac{\omega\rho l w_0 \exp(-i\pi/4)}{2(1-M^2)^2}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \times \frac{\exp[ikr/(1-M^2) - ikMx/(1-M^2)]}{(1-M^2\sin\theta)^{1/2}}\left[1 + \frac{M^2}{2} - 2M\cos\theta_1 - \frac{M^2}{2}\cos(2\theta_1)\right]\frac{\sin z}{z}, \quad (1.105)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $z = kl(M - \cos\theta_1)/[2(1-M^2)]$.

Выражение (1.105) может быть приведено к форме, полученной в работе [127]. При сравнении выражения (1.105) с результатом этой работы следует учесть, что в ней фактор времени взят в форме $\exp(+i\omega t)$, поэтому i следует заменить на $-i$. Кроме того, в работе [127] пропущен множитель $\exp[-ikMx/(1-M^2)]$, определяющий сдвиг фазы звуковой волны, распространяющейся вдоль направления потока.

Заметим, что согласно формулам (1.101) при ступенчатом распределении колебательной скорости на поверхности поршня колебательная скорость среды вблизи поршня будет иметь на концах особенности типа $\delta(x \pm l/2)$.

Появление дополнительных членов, зависящих от $\cos\theta_1$ и $\cos(2\theta_1)$, объясняется вкладом этих особенностей. Однако из формул (1.103), (1.105) можно сделать вывод о том, что дополнительные члены будут присутствовать в выражениях для излучаемого звукового давления не только при ступенчатых распределениях, но и при любых функциях $w_y(x)$ (включая и непрерывные функции с непрерывными первыми и вторыми производными на всей оси x).

Из выражения (1.105) следует, что звуковое давление достигает максимума при $\cos\theta_0 \approx M$. Таким образом, оказывается, что максимум излучения сдвинут относительно нормали к поверхности поршня на угол $\pi/2 - \theta_0$. При несоблюдении условия $M \ll 1$ искажения диаграммы излучения могут сильно возрасти. Некоторые расчетные графики для этого частного случая приведены в работе [127].

Пусть теперь функция распределения скорости поверхности задана в виде

$$w_y(x') = w_0 \exp(ikx'\cos\varphi) \text{ при } |x'| \leqslant l/2;$$

$$w_y(x') = 0 \text{ при } |x'| > l/2.$$

Такое распределение представляет собой волну, бегущую в направлении оси x со скоростью $c/\cos\varphi$.

Вычисление по формуле (1.104) приводит к выражению (1.105), в котором z следует заменить на

$$u = \frac{kl}{2(1-M^2)} [M - \cos\theta_1 + (1-M^2)\cos\varphi] .$$

При отсутствии потока максимум излучения должен быть направлен под углом $\theta_0 = \varphi$. При $M \neq 0$ (полагаем $M \ll 1$) максимум излучения лежит под углом $\cos\theta_0 \approx \cos\varphi + M$. Рассчитаем для примера звуковое давление, излучаемое поршнем в направлении $\theta = 180^\circ$ для $\varphi = 180^\circ$ [$w_y(x)$ представляет собой волну, бегущую вдоль поршня в отрицательном направлении оси x]. Тогда $u \approx kl(M - \cos\theta_1 - 1)/2$. Максимум излучения при отсутствии потока будет направлен под углом $\theta = 180^\circ$ и $\sin u/u = 1$. При наличии потока в этом направлении будет наблюдаться уменьшение звукового давления. Так, при $kl = 200$ и $M = 0{,}01$ получим $\sin u/u = 0{,}45$. Таким образом, при больших kl влияние потока на излучаемое звуковое давление может быть весьма существенным даже при сравнительно малых скоростях движения.

Следует отметить также следующее. Вначале мы предположили, что источником звука является колеблющийся поршень с заданным распределением колебательной скорости. Если же задана колебательная скорость среды v_y около поверхности (а не колебательная скорость самой поверхности w_y), то выражения для излучаемого звукового давления будут отличаться от формул, полученных выше. В неподвижной среде в силу условия неразрывности имеет место равенство $v_y = w_y$ и оба решения будут совпадать. В движущейся среде решения для различных способов возбуждения звука в потоке будут различными. Для точечных источников на зависимость излучаемого звукового давления от способа возбуждения было указано в работе [61].

Решение для случая, когда задана колебательная скорость среды w_y, получается в виде

$$p_0'(r_1,\theta) = \frac{\omega\rho w_y(x')\exp[i(x-x')kM/(1-M^2)}{2(1-M^2)^{3/2}} \times$$

$$\times [H_0^{(1)}(k_1 r_1 - iM\cos\theta_1 H_1^{(1)}(k_1 r_1)] . \qquad (1.106)$$

Последнее выражение отличается от формулы (1.102). В частности, здесь исчезает квадрупольный член и коэффициент 2 при дипольном члене. Отсюда следует, что искажения звукового поля, обусловленные наличием потока, проявляются более сильно, если источник представляет собой колеблющийся поршень, чем в том случае, когда источником звука является колебательное движение среды.

Формулу (1.106) можно также получить, используя известное из работы [123] выражение для двумерной функции Грина $g(\vec{r}, \vec{r}_0)$

движущегося линейного источника в безграничном пространстве. Интегрируя эту функцию по координате, перпендикулярной к потоку, получим выражение (1.106). Следует обратить внимание на то, что указанным способом мы приходим к формуле (1.106), а не к формуле (1.102). Это объясняется тем, что при записи указанной функции Грина предполагается, что в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$ задана объемная колебательная скорость среды.

Глава 2

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗЛУЧЕНИЯ И ДИФРАКЦИИ ЗВУКА

2.1. О возможности представления решений задач излучения и дифракции звука в виде рядов по расходящимся волнам

2.1.1. Гипотеза Рэлея. Известно, что при решении задач излучения и дифракции звука для областей в виде круговых цилиндров или сфер поле может быть представлено в виде бесконечного набора расходящихся цилиндрических или сферических волн. Например, для двумерного и трехмерного случаев соответственно в формах

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) \exp(in\theta); \tag{2.1}$$

$$p(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta). \tag{2.2}$$

Для простых граничных условий (в частности, для акустически мягкого или жесткого тела, а также для тела с постоянным поверхностным импедансом) коэффициенты a_n, b_n находятся в явном виде. В ряде других случаев (например, для смешанной задачи, когда на части поверхности задана колебательная скорость, а на другой – импеданс или звуковое давление) задача сводится к бесконечной системе уравнений для определения коэффициентов a_n, b_n, однако в любом из этих случаев ряды (2.1), (2.2) при увеличении числа членов сходятся и стремятся к точному решению во всем внешнем пространстве. Возникает вопрос: могут ли быть использованы эти разложения, если тело имеет форму, отличающуюся от кругового цилиндра или сферы. В дальнейшем для определенности будем говорить о плоской задаче.

Вопрос о возможности представления поля во внешней области в виде набора расходящихся волн составляет содержание *гипотезы Рэлея* (называемой иногда ошибкой Рэлея). Первоначально указанная проблема возникла при исследовании отражения звука от синусоидальной

поверхности [48]. Отраженное поле p_2 (рис. 2.1, *а*) было представлено в виде разложения по плоским волнам типа $\exp(+i\gamma z)$. В дальнейших работах по дифракции на синусоидальной поверхности было выяснено, что такое решение не является точным, так как не учитывает волн, приходящих к поверхности. Ясно, что в области *I* при $z > h$ в силу принципа излучения никаких приходящих волн быть не может. Однако в области *II*, ограниченной касательной к гребням, могут существовать как уходящие, так и приходящие рассеянные волны типа $\exp(-i\gamma z)$. Для пологой поверхности, изображенной на рис. 2.1, *а*, это не столь очевидно, как для более изогнутой поверхности, изображенной на рис. 2.1, *б*. В этом случае области *II* напоминают отрезки волноводов, открытых с одной стороны. В отверстии волновода происходит отражение звука от его открытого конца, что приводит к появлению волн p_4, распространяющихся не в положительном, а в отрицательном направлении оси z. Кроме того, простые геометрооптические представления о возможности возникновения отраженной волны p_5 приводят к заключению, что в области *II* существуют отраженные или рассеянные волны, распространяющиеся по направлению к границе.

В работах [30, 103, 121] показано, что решение Рэлея является приближенным и справедливо для пологих поверхностей. Для поверхности, описываемой уравнением $z = h\cos(2\pi x/l)$ (l – расстояние между гребнями), гипотеза Рэлея справедлива при выполнении условия $2\pi h/l < 0{,}448$ или $h/l < 1/14$. Заметим, что этот критерий не зависит от длины звуковой волны и определяется только геометрическими характеристиками поверхности.

Аналогичная ситуация возникает и при дифракции на теле, ограниченном замкнутой поверхностью [1]. В области *I* (рис. 2.2, *а*) вне описанной вокруг тела окружности могут существовать лишь расходящиеся волны вида $H_n^{(1)}(kr)$. Однако в промежуточной области *II* присутствуют также и сходящиеся волны $H_n^{(2)}(kr)$, причем значение таких волн возрастает с увеличением отклонений формы тела от окружности. На рис. 2.2, *б* ... *г* показаны случаи, когда роль этих волн особенно велика. Если тело имеет острую кромку (см. рис. 2.2, *б*), то в результате дифракции на ней возникнет волна p_4, которая вблизи поверхности распространяется в сторону уменьшения радиуса r. Для описания такой

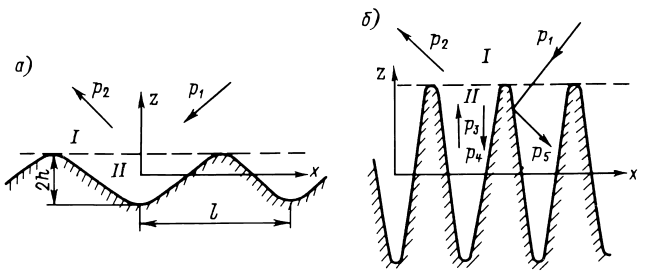


Рис. 2.1. Дифракции на синусоидальной пологой (*а*) и крутой (*б*) поверхностях

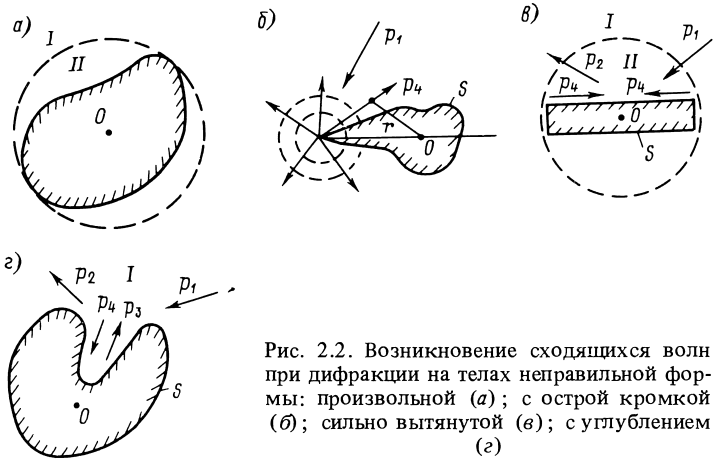


Рис. 2.2. Возникновение сходящихся волн при дифракции на телах неправильной формы: произвольной (*а*); с острой кромкой (*б*); сильно вытянутой (*в*); с углублением (*г*)

волны расходящихся волн недостаточно. Аналогичные, сходящиеся к центру волны p_4 могут быть сильно выражены при дифракции на сильно вытянутом теле (см. рис. 2.2, *в*). Ясно также, что для невыпуклого тела (см. рис. 2.2, *г*) во внутренней области присутствуют и уходящие и приходящие дифрагированные (рассеянные) волны. Менее очевидно, что для гладкого тела (см. рис. 2.2, *а*) в области *II* присутствуют сходящиеся дифрагированные волны.

Таким образом, решения (2.1), (2.2) в общем случае не удовлетворяют граничным условиям на поверхности для тел неправильной формы.

Гипотезу Рэлея часто связывают с вопросами сходимости рядов (2.1), (2.2) при продолжении их из области *I* в область *II* (см. рис. 2.2, *а*). Если поверхность тела S – окружность (или сфера в трехмерном случае), то все точки, где ряды могут расходиться, лежат внутри S. Для тела неправильной формы эти особые точки могут оказаться в области *II* или на поверхности. Следовательно, ряды уже нельзя продолжать из области *I* в область *II*.

В работе [1] показано (для двумерного случая), что гипотеза Рэлея справедлива лишь для некоторых поверхностей, которые описывают гладкими функциями, не слишком сильно отличающимися от окружности. Ниже приведены некоторые примеры поверхностей, для которых справедлива гипотеза Рэлея.

1. Эллипс, описываемый уравнением в полярных координатах $\rho(\varphi) = a\sqrt{1-\epsilon^2 \sin^2\varphi}$, $\epsilon = \sqrt{1-(b/a)^2}$; a, b – полуоси эллипса при $\epsilon < 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$.

2. Кривая $\rho(\varphi) = a\sqrt{1+\epsilon^2 \sin^2\varphi}$ при $\epsilon < 1{,}54$.

3. Окружность радиусом a с центром, смещенным относительно начала координат на расстояние $l < a/2$ (эксцентрик).

4. Кривая в виде овала, близкого к эллипсу, $\rho(\varphi) = (a + b\sin\varphi)^{-1}$ при $b < a/3$.

5. Кривая $(x^2-1)(y^2-1) = c$, где $0{,}2399 < c < 1$.

6. Улитка Паскаля $\rho(\varphi) = a + h \sin\varphi$ при $0 \leqslant h/a < 2/3$.

7. Синусоида, наложенная на окружность („шестерня") $\rho(\varphi) = a + h \sin(j\varphi)$, $j = 1, 2, 3, \ldots, a > 0)$. При $j = 1$ эта кривая совпадает с улиткой Паскаля. Максимальные значения h/a, при которых справедлива гипотеза Рэлея, приведены ниже [78, 143]

j	1	2	3	4	5	...	13	$j \gg 1$
h/a	2/3	0,2658	0,1668	0,1216	0,0957	...	0,0353	$0{,}448/j$

Для случая $j = 1$ можно увеличить область значений h/a, если передвинуть начало координат в точку $l = 2a/3$. Тогда максимальное значение h/a будет равно единице.

Существует также и ряд других кривых, удовлетворяющих гипотезе Рэлея и образованных пересечениями окружностей или эллипсов. Во всех остальных случаях использование представлений (2.1) для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности тел неправильной формы, приводит к неверным результатам. В качестве примера укажем на некоторые ошибочные работы. Например, в статье [124] решение записано в виде набора расходящихся волн. Граничные условия здесь удовлетворяют методом граничной коллокации, т. е. на поверхности выбраны опорные точки $\rho(\varphi_q)$ и систему алгебраических уравнений решают относительно коэффициентов a_n

$$\sum_{n=1}^{N} a_n H_n^{(1)} [k\rho(\varphi_q)] = f(\varphi_q); \quad q = 1, 2, \ldots, N,$$

где $f(\varphi_q)$ – известная функция, заданная на поверхности тела.

Другой метод решения, связанный с применением метода наименьших квадратов для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности цилиндра конечной высоты, использован в работе [149]. Поле излучения записывалось в виде расходящихся сферических волн (2.2). В результате были получены численные результаты, которые не согласовывались с точными решениями. Заметим, что текст статьи [149] почти полностью воспроизведен в работе [49]. Анализ погрешности, возникающей в результате представления решения в виде суммы расходящихся волн, выполнен в работе [68]. При этом рассматривалась двумерная задача на жестком прямоугольном брусе и для определения коэффициентов разложения был использован метод наименьших квадратов. В этом случае удалось вычислить погрешность удовлетворения граничных условий на прямоугольнике. Было показано, что для бруса с квадратным сечением при $ka = 0{,}5 \ldots 4$ ($2a$ – ширина бруса) погрешность составляет 0,1 ... 0,5. Для удлиненного бруса эта погрешность оказывается значительно большей и при отношении сторон, равном четырем, погрешность составляет 0,9, т. е. граничное условие практически не выполняется и результаты расчета поля на поверхности оказываются неверными. Пример расчета для тела с акустически мягкой поверхностью приведен в п. 2.1.2.

В работе [2] отмечено, что в связи с гипотезой Рэлея часто обращаются к результату работы [15] о полноте системы метагармонических

функций и иногда считают достаточным искать решение в виде ряда (2.1). На самом деле для разложимости краевых значений дифракционных полей в ряды, кроме полноты этой системы, необходима ее минимальность. Иными словами, система должна быть базисом, а это выполнимо лишь при условии, что поверхность удовлетворяет гипотезе Рэлея.

Вместе с тем сравнение результатов расчетов дифракционных полей в дальней зоне с разложением в ряд (2.1) и точным методом с применением интегральных уравнений показывает, что в ряде случае неплохие результаты получаются и для тел, форма которых не удовлетворяет гипотезе Рэлея. Например [78], были получены диаграммы рассеяния в дальнем поле для эллипса, близкие к точным при отношении осей до пяти, в то время как строгое предельное значение этого отношения равно $\sqrt{2}$. Однако для тела квадратного сечения удовлетворительной точности получить не удалось.

Следует отметить, что для дальнего поля результаты всегда оказываются лучше, чем для ближнего. Это объясняется тем, что особенности, возникающие из-за существования сходящихся волн (см. рис. 2.2), проявляются в основном вблизи тела (см. п. 2.1.2).

2.1.2. Погрешность в граничном условии. Для примера вычислим погрешность, возникающую при попытке применить разложение по расходящимся волнам для тела, не удовлетворяющего гипотезе Рэлея. Рассмотрим двумерную задачу о дифракции плоской волны $[p_i = p_0 \times \times \exp(ikx) = p_0 \exp(ikr\cos\theta)]$ на брусе прямоугольного сечения с акустически мягкой поверхностью. Для простоты будем считать, что волна падает нормально на одну из граней (рис. 2.3, *в*). Возьмем набор расходящихся волн $\psi_n = H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta)$ и запишем рассеянную волну в виде

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n. \tag{2.3}$$

На контуре l, определяющем границу, должно выполняться граничное условие $(p_i + p_s)|_l = 0$ или $p_s[\rho(\varphi), \varphi] = f[\rho(\varphi), \varphi]$, где $f = -p_i$, $\rho(\varphi)$ – уравнение контура в полярных координатах. Таким образом, задача заключается в том, чтобы разложить известную функцию $f(\varphi)$ на контуре l в ряд по системе ψ_n. Следуя методу наименьших квадратов, вычислим среднеквадратичную ошибку в граничном условии:

$$E^2 = \int_l |f - \sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n|^2 dl, \tag{2.4}$$

где N – число удерживаемых членов ряда.

Представив модуль в виде произведения комплексно-сопряженных величин, можно записать это выражение следующим образом:

$$E^2 = \int_l |f|^2 dl - \sum_{n=0}^{N} a_n \int_l f^* \psi_n dl - \sum_{n=0}^{N} a_n^* \int_l f \psi_n^* dl + \sum_{n=0}^{N} \sum_{q=0}^{N} a_n a_q^* \times$$

$$\times \int_l \psi_n \psi_q^* dl. \tag{2.5}$$

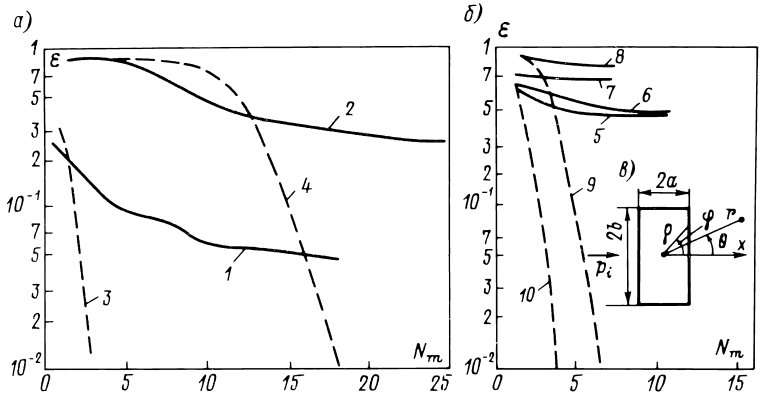


Рис. 2.3. Погрешности удовлетворения граничных условий при расчете дифракции звука на акустически мягких телах: *а* – *1* – $ka = kb = 1$; *2* – $ka = kb = 10$; *3* – $kR = 1{,}414$; *4* – $kR = 10{,}41$; *б* – *5* – $ka = 0{,}5$; $kb = 2$; *6* – $ka = 2$; $kb = 0{,}5$; *7* – $ka = 4$; $kb = 0{,}5$; *8* – $ka = 0{,}5$; $kb = 4$; *9* – $kR = 4{,}031$; *10* – $kR = 2{,}062$; *в* – расположение системы координат;

—— прямоугольник; ––– круг

Значение функционала E^2 становится минимальным при условиях

$$\partial E^2/\partial(\mathrm{Re}\, a_n) = 0; \quad \partial E^2/\partial(\mathrm{Im}\, a_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., N.$$

После дифференцирования получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_n:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n Z_{qn} = c_q, \quad q = 0, 1, ..., N, \tag{2.6}$$

где

$$Z_{qn} = \int_l \psi_n \psi_q^* \, dl; \quad c_q = \int_l f \psi_q^* \, dl. \tag{2.7}$$

Для прямоугольной границы при $n + q$ четном эти интегралы можно записать в виде

$$Z_{qn} = 4\left[ka \int_0^{\alpha_1} H_n^{(1)}\left(\frac{ka}{\cos\varphi}\right) H_q^{(2)}\left(\frac{ka}{\cos\varphi}\right) \frac{\cos(n\varphi)\cos(q\varphi)}{\cos^2\varphi} d\varphi + \right.$$

$$\left. + kb \int_{\alpha_1}^{\pi/2} H_n^{(1)}\left(\frac{kb}{\sin\varphi}\right) H_q^{(2)}\left(\frac{kb}{\sin\varphi}\right) \frac{\cos(n\varphi)\cos(q\varphi)}{\sin^2\varphi} d\varphi \right], \tag{2.8}$$

при $n + q$ нечетном $Z_{qn} = 0$. Эти коэффициенты удовлетворяют условию $Z_{qn} = Z_{nq}^*$. В этих формулах $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,(b/a)$ и

$$c_q = 2\left\{ ka\ [\exp(ika) + (-1)^q \exp(-ika)] \int_0^{a_1} H_q^{(2)}\left(\frac{ka}{\cos\varphi}\right) \times \right.$$

$$\times \frac{\cos(q\varphi)}{\cos^2\varphi} d\varphi + kb \int_{a_1}^{\pi/2} H_q^{(2)}\left(\frac{kb}{\sin\varphi}\right) \frac{\cos(q\varphi)}{\sin^2\varphi} \times$$

$$\left. \times [\exp(ikb\ \mathrm{ctg}\,\varphi) + (-1)^q \exp(-ikb\ \mathrm{ctg}\,\varphi)]\, d\varphi \right\}. \qquad (2.9)$$

Если система (2.6) решена, то погрешность можно определить следующим образом. Умножим обе части этой системы на a_q^* и просуммируем по q. Тогда получившаяся двойная сумма совпадет с четвертым слагаемым, а правая часть – с третьим слагаемым выражения (2.5). Эти члены уничтожаются и в результате получится

$$E^2 = \int_l |f|^2 dl - \sum_{n=0}^{N} a_n c_n^*.$$

Введем относительную погрешность удовлетворения граничных условий, пронормировав это выражение к значению первого слагаемого, т. е. запишем

$$\epsilon = \left(1 - \sum_{n=0}^{N} a_n c_n^* / \int_l |f|^2 dl\right)^{1/2}, \qquad (2.10)$$

причем в данном примере $\int_l |f|^2 dl = 4(ka + kb)$. Коэффициенты и свободные члены системы, определяемые выражениями (2.8), (2.9), возрастают при увеличении номеров n и q. Поэтому при решении системы ее необходимо регуляризовать [63], т. е. ввести замены

$$\tilde{Z}_{qn} = Z_{qn} / |H_n^{(1)}(k\tilde{a}) H_q^{(1)}(k\tilde{a})|;\quad \tilde{c}_q = c_q / |H_q^{(1)}(k\tilde{a})|;$$

$$\tilde{a}_n = a_n |H_n^{(1)}(k\tilde{a})|, \text{ где } \tilde{a} = \min(a, b).$$

Сравним результаты вычислений погрешностей по приведенным формулам для областей в виде прямоугольника и круга с одинаковыми граничными условиями.

Для кругового цилиндра $\rho(\varphi) = R$ и не зависит от угла φ. Поэтому интегралы (2.7) легко вычислить аналитически. При этом отличными от нуля оказываются лишь диагональные члены матрицы. Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\varphi) \cos(q\varphi) d\varphi = \begin{cases} 2\pi/\epsilon_n \text{ при } n = q; \\ 0 \quad \text{при } n \neq q; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \exp(ikR\cos\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi = 2\pi i^n J_n(kR),$$

где kR – волновой радиус цилиндра; $\epsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\epsilon_n = 2$ при $n > 0$, получим известное выражение для коэффициентов ряда (2.3) при

рассеянии плоской волны на акустически мягком цилиндре и значения правых частей:

$$a_n = -\epsilon_n i^n J_n(kR)/H_n^{(1)}(kR); \quad c_n = -2\pi i^n H_n^{(2)}(kR) J_n(kR).$$

Таким образом, для кругового цилиндра из формулы (2.10) получим $\epsilon = [1 - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n^2(kR)]^{1/2}$.

Результаты расчета отражены на графике рис. 2.3. Сплошные линии соответствуют прямоугольной области, штриховые – круговому цилиндру с волновым радиусом $kR = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2}$, равным волновому радиусу окружности, описанной вокруг прямоугольника.

Погрешность для кругового цилиндра быстро падает при $N > kR$, в то время как для квадрата (см. рис. 2.3, *а*) она уменьшается очень медленно. Чем больше волновые размеры тела, тем хуже удовлетворяются граничные условия. Если при $ka = kb = 1$ ценой значительного увеличения числа членов ряда и порядка системы уравнений удается получить сравнительно удовлетворительное значение $\epsilon \approx 0{,}05$, то при $ka = kb = 10$ погрешность остается на уровне величины $\epsilon = 0{,}25$ и далее почти не уменьшается. Однако еще хуже результаты получаются для сильно вытянутых тел (см. рис. 2.3, *б*). Например, при отношении сторон 1:8 погрешность вообще практически не уменьшается при возрастании числа членов ряда и остается весьма высокой. Из этого следует, что граничное условие на поверхности не удовлетворяется, несмотря на то что коэффициенты a_n быстро уменьшаются с увеличением номера n и хорошо стабилизируются.

В качестве примера приведена табл. 2.1 коэффициентов a_n и c_n для прямоугольной области, имеющей размеры: $ka = 0{,}5$; $kb = 4$. Для сокращения в таблице удержаны лишь две значащие цифры, хотя вычисления интегралов выполнялись с точностью 10^{-4}, а вычисления цилиндрических функций и решение системы уравнений – с точностью 10^{-8}. В скобках указан десятичный порядок числа.

Однако при столь быстро уменьшающихся коэффициентах ряд (2.3), вычисляемый для точки, находящейся на поверхности, может вообще расходиться, и даже в том случае, если он сходится, погрешность оказывается недопустимо большой. Таким образом, для тела, форма которого не соответствует условиям справедливости гипотезы Рэлея, оказывается практически невозможно удовлетворить граничным условиям и вычислить поле на поверхности или вблизи нее. Для задачи об излучении звука поверхностью в этих случаях нельзя получить правильные значения импеданса излучения.

Заметим, что наилучшие приближенные значения коэффициентов разложения дает метод наименьших квадратов; поэтому другие методы (например, метод коллокации) не могут улучшить описанную здесь ситуацию.

Вместе с тем для точки наблюдения, находящейся в дальнем поле, возможно в ряде случаев получать верные решения, несмотря на то

Таблица 2.1. **Коэффициенты разложения для прямоугольной области**

n	a_n			c_n
	$N=5$	$N=6$	$N=7$	
0	$-5{,}8 + i \cdot 5{,}9\,(-1)$	$-6{,}2 + i \cdot 6{,}2\,(-1)$	$-6{,}2 + i \cdot 6{,}2\,(-1)$	$-2{,}4 + i \cdot 3{,}0\,(0)$
1	$-5{,}5 - i \cdot 3{,}2\,(-1)$	$5{,}5 - i \cdot 3{,}2\,(-1)$	$5{,}7 - i \cdot 3{,}4\,(-1)$	$1{,}7 - i \cdot 1{,}0\,(0)$
2	$4{,}2 - i \cdot 1{,}4\,(-1)$	$5{,}1 - i \cdot 1{,}7\,(-1)$	$5{,}1 - i \cdot 1{,}7\,(-1)$	$4{,}4 - i \cdot 0{,}70\,(0)$
3	$-2{,}4 + i \cdot 1{,}3\,(-2)$	$-2{,}4 + i \cdot 1{,}3\,(-2)$	$-3{,}3 + i \cdot 1{,}8\,(-2)$	$-1{,}9 + i \cdot 0{,}77\,(0)$
4	$-3{,}4 + i \cdot 1{,}0\,(-3)$	$-7{,}3 + i \cdot 2{,}1\,(-3)$	$-7{,}3 + i \cdot 2{,}1\,(-3)$	$-1{,}4 + i \cdot 0{,}51\,(0)$
5	$8{,}6 - i \cdot 4{,}7\,(-5)$	$8{,}6 - i \cdot 4{,}7\,(-5)$	$2{,}2 - i \cdot 1{,}1\,(-4)$	$1{,}2 - i \cdot 1{,}7\,(0)$
6	–	$1{,}4 - i \cdot 0{,}4\,(-6)$	$1{,}4 - i \cdot 0{,}4\,(-6)$	$1{,}6 - i \cdot 3{,}3\,(0)$
7	–	–	$-2{,}5 + i \cdot 1{,}3\,(-7)$	$2{,}5 + i \cdot 0{,}02\,(0)$

Таблица 2.2. **Результаты вычислений левой и правой частей оптической теоремы (4.38) при рассеянии звука на акустически мягком прямоугольном теле**

ka	0,5	1	2	5	10	0,5	2	0,5	4
kb	0,5	1	2	5	10	2	0,5	4	0,5
$\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n \rvert^2 / \epsilon_n$	0,97	1,68	3,02	6,67	11,9	1,95	1,49	1,16	1,17
$-\mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-i)^n$	0,98	1,70	3,00	6,77	12,2	1,97	1,18	1,47	1,62

что граничные условия на поверхности не удовлетворяются. Удобным способом котроля правильности решения для точки, находящейся в дальнем поле, может служить использование *оптической теоремы* (см. п. 4.2), записанной в форме (4.29). Функция рассеяния $f_s(\theta)$ при этом определится из ряда (2.3), при $kr \gg 1$. Тогда

$$p_s(\theta) = p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4) f_s(\theta);\ f_s(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-i)^n \cos(n\theta).$$

Коэффициенты a_n должны удовлетворить условию (4.38). Некоторые результаты вычислений левой и правой частей этого условия приведены в табл. 2.2.

При $ka = kb$, т. е. для тела квадратного сечения, результаты вычисления сумм оказываются весьма близкими, что свидетельствует о возможности вычисления характеристики рассеяния в дальнем поле (или характеристики направленности для задачи об излучении звука). Однако при значительном увеличении отношения сторон получить хорошую точность не удается. Впрочем, даже при отношении сторон 1:8 расхождение между суммами рядов (см. табл. 2.2) значительно меньше погрешности определения звукового давления в ближнем поле.

Таким образом, в решении для дальнего поля автоматически отбираются лишь те слагаемые, которые необходимы для получения верных решений, а все члены, которых не хватает для того, чтобы получить правильное решение вблизи тела, на дальнее поле влияют гораздо меньше.

Именно этим объясняется положительный результат вычисления дальних полей рассеяния для тел сложной формы разложением в ряды, учитывающие лишь расходящиеся волны. Разложения в такие ряды применялись во многих работах (см. ссылки в п. 2.4) с использованием метода Т-матриц.

2.2. Интегральные уравнения для поля на поверхности при излучении звука

2.2.1. Интеграл Гельмгольца. Основной исходной формулой для вычисления звуковых полей, излучаемых или дифрагированных телами сложной формы, является *интеграл Гельмгольца*, определяющий звуковое поле в пространстве по значениям звукового давления и его нормальной производной (пропорциональной нормальной составляющей колебательной скорости) на поверхности тела (рис. 2.4):

$$p(\vec{x}) = \int_S \left[p(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x},\vec{y}) - \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x},\vec{y}) \right] dS_y. \qquad (2.11)$$

Здесь $G(\vec{x},\vec{y})$ – функция Грина для свободного пространства.

В трехмерном случае – это поле малого сферического источника

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\exp\,(ik|\vec{x}-\vec{y}|)}{|\vec{x}-\vec{y}|}\,; \quad (2.12)$$

в двумерном случае $G(\vec{x},\ \vec{y})$ представляет собой поле линейного источника

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\,(k|\vec{x}-\vec{y}|)\,, \quad (2.13)$$

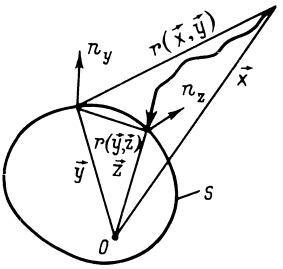


Рис. 2.4. Расположение тела и точки наблюдения

а S контур, ограничивающий область.

В формуле (2.11) $p(\vec{x})$ – звуковое давление в точке наблюдения, описываемой радиусом-вектором $\vec{x}$; $p(\vec{y})$ – звуковое давление на поверхности тела; $\partial p(\vec{y})/\partial n_y$ – нормальная производная звукового давления на поверхности тела; индекс y в выражении $\partial/\partial n_y$ показывает, что после дифференцирования звукового давления по нормали берется значение производной в точке y; dS_y – элемент поверхности вблизи точки $\vec{y}$.

Простой вывод формулы (2.11) и обсуждение физического смысла слагаемых, входящих в подынтегральное выражение, содержатся в работе [63]. Выражение (2.11) иногда называют интегралом Кирхгофа, а также формулой Грина. Заметим, что знак правой части выражения (2.11) противоположен знаку в формуле, приведенной в работе [63]. Это связано с тем, что дифференцирование проведено по нормали, внешней по отношению к области, в которой вычисляется звуковое поле, т. е. по нормали, направленной внутрь тела, в то время как в формуле (2.11) n_y означает нормаль, внешнюю по отношению к телу.

Формула Гельмгольца определяет звуковое давление в виде суммы вкладов двойных (дипольных) источников расположенных на поверхности тела, и простых источников (монополей). Для того чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо знать одновременно две функции – звуковое давление и колебательную скорость на поверхности тела. Вместе с тем известно, что для определения функции в пространстве по ее значению на поверхности достаточно знать лишь одну из указанных функций, вторую однозначно можно определить из решения задачи. Таким образом, интеграл Гельмгольца является переопределенным соотношением.

Если считать, что известно распределение колебательной скорости (нормальной составляющей) на поверхности $v_n(\vec{y}) = 1/(i\,\omega\rho)\,\partial p(\vec{y})/\partial n_y$, то неизвестными величинами будут $p(\vec{x})$ и $p(\vec{y})$. Следовательно, неизвестная функция входит и в левую и в правую части, что дает возможность привести соотношение (2.11) к интегральному уравнению, устремив точку наблюдения $\vec{x}$ в некоторую точку $\vec{z}$ на поверхности тела

(см. рис. 2.4). При выполнении предельного перехода $\vec{x} \to \vec{z}$ следует учесть, что при интегрировании по $\vec{y}$ расстояние $r(\vec{y}, \vec{z})$ при $\vec{y} = \vec{z}$ обращается в нуль. Особенности, появляющиеся при этом в подынтегральном выражении, являются интегрируемыми, однако при подходе к поверхности тела первое слагаемое меняется скачком. Введем обозначения:

$$H(\vec{x}) = \int_S \sigma(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) dS_y; \quad F(\vec{x}) = \int_S \mu(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} ds_y, \tag{2.14}$$

где $\sigma(\vec{y})$ и $\mu(\vec{y})$ – плотности распределения простых и двойных источников соответственно.

В данном случае рассмотрено излучение звука во внешнюю область, поэтому не имеет смысла говорить о поле внутри тела, однако для дальнейшего изложения полезно формально продолжить выражение (2.11) и во внутреннюю область, т. е. рассмотреть, как меняется левая часть этого равенства, если точка $\vec{x}$, пересекая поверхность, оказывается во внутренней области. Обозначим через $f(\vec{x}^+)$ и $f(\vec{x}^-)$ пределы функции $f(\vec{x})$, определяющие значения функции при приближении к поверхности снаружи и изнутри соответственно, а через $f(\vec{x})$ – значения на самой поверхности. Из теории потенциала [29] известно, что предельные значения величин $H(\vec{x})$ связаны соотношениями:

$$H(\vec{x}^+) = H(\vec{x}^-) = H(\vec{x}); \tag{2.15а}$$

$$\partial H(\vec{x}^+)/\partial n_z - \partial H(\vec{x}^-)/\partial n_z = -\sigma(\vec{x}); \tag{2.15б}$$

$$\partial H(\vec{x}^+)/\partial n_z = \partial H(\vec{x})/\partial n_z - \sigma(\vec{x})/2. \tag{2.15в}$$

Таким образом, функция $H(\vec{x})$ является непрерывной при переходе через границу, а ее производная меняется скачком. В противоположность этому функция $F(\vec{x})$ меняется скачком на границе, а производная является непрерывной, т. е.

$$F(\vec{x}^+) - F(\vec{x}^-) = \mu(\vec{x}); \tag{2.16а}$$

$$F(\vec{x}^+) = F(\vec{x}) + \mu(\vec{x})/2; \tag{2.16б}$$

$$\partial F(\vec{x}^+)/\partial n_z = \partial F(\vec{x}^-)/\partial n_z. \tag{2.16в}$$

Этим соотношением можно дать наглядную физическую интерпретацию. Функция $\sigma(\vec{y})$ имеет смысл колебательной скорости простых источников. Поэтому звуковое давление $H(\vec{x})$ вблизи поверхности можно рассматривать как результат совокупности воздействия малых сферических (или цилиндрических для двумерного случая) источников, расположенных на поверхности. Поскольку эти источники являются ненаправленными, то звуковые давления снаружи и внутри поверхностей должны

быть одинаковыми, что и определяется выражением (2.15а). Колебательные скорости среды вблизи этой поверхности изнутри и снаружи должны различаться, что описывается соотношениями (2.15б) и (2.15в).

Функцию $\mu(\vec{y})$ можно рассматривать, как воздействие некоторой тонкой колеблющейся оболочки, по обе стороны которой создаются различные звуковые давления [см. выражения (2.16а) и (2.16б)], причем нормальные составляющие скорости среды вблизи поверхности снаружи и изнутри должны быть одинаковыми, что определяется выражением (2.16в).

2.2.2. Интегральное уравнение Гельмгольца. Устремим точку $\vec{x}$ на поверхность в точку $\vec{z}$ и воспользуемся при выполнении предельного перехода соотношениями (2.15а) и (2.16б). В результате получим

$$\frac{1}{2}p(\vec{z}) = \int_S \left[p(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}) - \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}) \right] dS_y. \qquad (2.17)$$

Перепишем это соотношение в форме интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$p(\vec{z}) + \int_S p(\vec{y}) K(\vec{z},\vec{y}) dS_y = f(\vec{z}), \qquad (2.18)$$

где

$$K(\vec{z},\vec{y}) = -2 \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}); \qquad (2.19)$$

$$f(\vec{z}) = -2i\omega\rho \int_S v_n(\vec{y}) G(\vec{z},\vec{y}) dS_y. \qquad (2.20)$$

Последнее выражение записано с учетом того, что $v_n(\vec{y}) = 1/(i\omega\rho) \times \times \partial p(\vec{y})/\partial n_y$.

Таким образом, задача решается двухступенчато. На первой стадии решают интегральное уравнение (2.18) и определяют звуковое давление на поверхности, на второй – по формуле (2.11) вычисляют поле в пространстве.

Иногда приходится встречать утверждения о том, что в уравнениях типа (2.18) из-за наличия особенности в подынтегральном выражении в левой части интеграл необходимо понимать в смысле главного значения. В действительности такой необходимости нет, так как подынтегральное выражение в левой части не имеет особенности при $\vec{y} = \vec{z}$. Для того чтобы это показать, рассмотрим, например, двумерный случай. Пусть S определяется уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\alpha)$. Тогда

$$K(\vec{z},\vec{y}) = -2 \frac{\partial}{\partial n_y} \left[\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) \right] = \frac{ik}{2} H_1^{(1)}(kr) \frac{\partial r}{\partial n_y}. \qquad (2.21)$$

Производная от функции $u(\rho, \alpha)$ по нормали к кривой определяется выражением [63]

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\alpha) + [\rho'(\alpha)]^2}} \left[\rho(\alpha) \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{\rho'(\alpha)}{\rho(\alpha)} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right].$$

Расстояние между двумя точками на поверхности тела с радиусами-векторами $\vec{z}, \vec{y}$ определяется из формулы

$$r(\alpha, \alpha_1) = \sqrt{\rho^2(\alpha) + \rho^2(\alpha_1) - 2\rho(\alpha)\rho(\alpha_1)\cos(\alpha - \alpha_1)},$$

где α и α_1 – углы, характеризующие положения этих векторов.

Дифференцирование надо выполнять по координатам с индексом 1, соответствующим нормали n_y. Тогда

$$\frac{\partial r(\alpha, \alpha_1)}{\partial n_y} = \frac{\rho^2(\alpha_1) - \rho(\alpha)\rho(\alpha_1)\cos(\alpha - \alpha_1) + \rho'(\alpha_1)\rho(\alpha)\sin(\alpha - \alpha_1)}{r(\alpha, \alpha_1)\sqrt{\rho^2(\alpha_1) + [\rho'(\alpha_1)]^2}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\alpha_1 \to \alpha$, т. е. при $r \to 0$; функция $H_1^{(1)}(kr)$ при этом возрастает по закону $-2i/(\pi kr)$. В результате в выражении (2.21) возникает неопределенность вида $0/0$. Воспользовавшись дважды правилом Лопиталя, получим

$$K(\vec{z}, \vec{y}) \xrightarrow[\vec{y} \to \vec{z}]{} \frac{1}{\pi} \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{2[\rho^2 + (\rho')^2]} = \frac{\kappa}{2\pi}, \qquad (2.22)$$

где κ – кривизна кривой. Для любой гладкой кривой эта величина является конечной [при изломе в точке $\alpha_1 = \alpha$ можно получить тот же результат, если считать, что $\kappa = \lim_{\alpha_1 \to \alpha} \kappa(\alpha_1)$].

Таким образом, подынтегральное выражение в левой части уравнения (2.18) остается ограниченным при $\vec{y} \to \vec{z}$.

Подынтегральное выражение в формуле (2.20) имеет особенность при $\vec{z} = \vec{y}$, однако она является слабой [типа $1/r$ или $\ln(kr)$ – в трехмерном или двумерном случаях соответственно] и не препятствует вычислению интеграла.

Для численного решения уравнения (2.18) следует разбить всю поверхность на участки S_q $(q = 1, 2, ..., N)$ с центрами в точках $\vec{y}_q$, в пределах которых можно считать давление и скорость постоянными и равными p_q и v_q. Точки наблюдения $\vec{z}_s$ $(s = 1, 2, ..., N)$ поместим в центрах участков. В результате получается система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{N} p_q A_{sq} = f_s; \quad s = 1, 2, ..., N; \qquad (2.23)$$

где

$$A_{sq} = \delta_{sq} - 2 \int\limits_{\Delta S_q} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y; \qquad (2.24)$$

$$f_s = -2ik\rho c \sum_{q=1}^{N} v_q \int\limits_{S_q} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y; \qquad (2.25)$$

$$\delta_{sq} = \begin{cases} 1 \text{ при } s = q \\ \\ 0 \text{ при } s \neq q \end{cases} \quad - \text{символ Кронекера.}$$

В выражение (2.24) входят интегралы по участкам ΔS_q вида

$$I_q = \int\limits_{\Delta S_q} \frac{\partial G(\vec{z}_s, y)}{\partial n_y} dS_y.$$

Если $s \neq q$, т. е. точки наблюдения и интегрирования принадлежат различным участкам поверхности, то подынтегральное выражение не имеет особенности. При $s = q$ следует различать два случая. В двумерном случае, когда $G(\vec{z}_s, \vec{y}) = iH_0^{(1)}(k|\vec{z}_s - \vec{y}|)/4$, как показано выше [см. выражение (2.22)], при дифференцировании возникает неопределенность вида 0/0. Раскрыв эту неопределенность, получим, что $\partial G/\partial n_y = f''(\vec{x}_s) : (4\pi) = -\kappa/(4\pi)$, где $\kappa = 1/R$ – кривизна поверхности в точке $\vec{z}_s$; R – радиус кривизны. Заметим, что эти величины следует рассматривать с учетом знака $f''(x_s)$. В частности, для выпуклой поверхности κ и R отрицательны. Считая, что ΔS_q – малая площадка, в пределах которой кривизна меняется незначительно, получим $I_q = -\Delta S_q \kappa/(4\pi)$.

В трехмерном случае вычисления сложнее. На рис. 2.5 показан участок ΔS_q, в пределах которого находится точка наблюдения $\vec{z}_q$. Введем в точке интегрирования местную прямоугольную систему координат ξ, ζ, η, причем η совпадает с направлением внешней нормали, а $\xi\zeta$ лежат в касательной плоскости. Для вычисления нормальной производной будем считать, что в точке $\vec{y}$ один конец отрезка r приподнят над поверхностью на величину ϵ, т. е. $\partial/\partial n_y = \partial/\partial\epsilon$. Тогда $r = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2 + [\epsilon - f(\epsilon, \zeta)]^2}$, где $f = f(\xi, \zeta)$ – уравнение поверхности в выбранной местной системе координат [в данном случае $f(\xi, \zeta) < 0$]. При $s = q$, полагая, что размеры элемента ΔS_q малы по сравнению с длиной волны, получим:

$$\frac{\partial G(\vec{z}_q, \vec{y})}{\partial n_y} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial\epsilon} [\exp(ikr)/r] = \frac{1}{4\pi} \frac{irk - 1}{r^2} \exp(ikr) \frac{\partial r}{\partial\epsilon} \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial\epsilon} = \frac{\epsilon - f(\xi, \zeta)}{4\pi r^3}$$

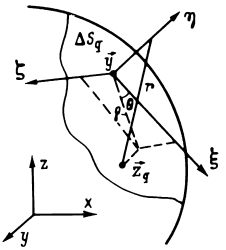


Рис. 2.5. К выводу формулы (2.26)

Выполним предельный переход $\epsilon \to 0$ и разложим функцию $f(\xi, \zeta)$ в ряд, учитывая, что $f(\xi, \zeta) = \dfrac{\partial f}{\partial \xi} = \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} = 0$ при $\xi = \zeta = 0$. Это даст $f/[4\pi(\xi^2 + \zeta^2 + f^2)]^{3/2}$, где

$$f \approx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \frac{\xi^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} \xi\zeta + \ldots \right),$$

причем производные вычислены в точке $\xi = \zeta = 0$.

Заметим, что систему координат можно развернуть вокруг оси η так, чтобы смешанная производная была равна нулю. Тогда будут справедливы соотношения: $\partial^2 f/\partial \xi^2 = 2\kappa_1$; $\partial^2 f/\partial \zeta^2 = 2\kappa_2$, где $\kappa_1 = 1/R_1$, $\kappa_2 = 1/R_2$ – главные кривизны поверхности; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны. Эти величины следует так же, как и выше, рассматривать с учетом знаков вторых производных. Для выпуклой поверхности они отрицательны. Введем полярную систему координат $\xi = \rho \cos\theta$, $\zeta = \rho \sin\theta$, где θ – угол между отрезком ρ и осью ζ. Оставляя в знаменателе квадратичные члены, получим $(\kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha)$: $: (4\pi\rho)$. Интеграл I_q теперь можно записать в виде

$$I_q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\theta)} \frac{\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta}{\rho} \rho d\rho d\theta,$$

где $l = l(\theta)$ – уравнение контура элемента ΔS_q в полярной системе координат. Полагая, что κ_1 и κ_2 мало меняются в пределах площадки ΔS_q, получим

$$I_q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta) l(\theta) d\theta. \qquad (2.26)$$

В частности, если элемент ΔS_q – участок плоскости, то $I_q = 0$. Если элемент имеет форму круга радиусом a, то $I_q = a\kappa/2$, где $\kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$ – средняя кривизна поверхности.

Опыт численного решения систем уравнений типа (2.23) [106, 120] показывает, что для получения удовлетворительной практической точности (порядка 1 %) достаточно разбивать поверхность на интервалы размерами $\lambda/10$. При интервалах $\lambda/4$ точность составляла 3 %. При дальнейшем увеличении интервала точность резко падает.

В ряде работ исследовалось также влияние угловых точек контура на точность расчетов, поскольку вблизи углов могут существовать значительные градиенты поля. С этой целью производилось закругление угловых точек радиусами $\lambda/20$ и $\lambda/40$. Кроме того, опорные точки сгущались вблизи углов, причем вместо интервалов $\lambda/10$ в этих областях

применялись интервалы $\lambda/20$ и $\lambda/40$. Было показано, что такие меры не дали никаких вычислительных преимуществ и результаты расчетов для этих вариантов оказались практически одинаковыми (разница не превысила 1 %). Поэтому особых изменений в расчетную схему для тел с острыми кромками вносить не следует.

Можно предложить и другие методы численного решения интегрального уравнения (2.18) [и аналогичного уравнения (2.28)]. К ним относятся разложения неизвестной функции по какой-либо системе функций, например в ряд Фурье, или в ряды по другим ортогональным системам. Обзор и сравнение различных численных методов решения интегральных уравнений применительно к решению уравнений типов (2.18) и (2.28) для задачи об излучении звука цилиндром конечной высоты приведены в статье [95]*.

Уравнение (2.23) устойчиво к малым ошибкам вычисления коэффициентов и правых частей. Кроме того, не теряется точность при увеличении числа N при заданном волновом размере тела (т. е. при уменьшении интервала S_q). Это связано с тем, что в матрице (2.24) присутствует постоянное слагаемое δ_{sq}, равное единице, для диагональных элементов. Оно обеспечивает преобладание диагональных элементов при увеличении размеров системы и устойчивость решения. Примеры численного решения системы (2.24) для задачи об излучении звука цилиндром конечной высоты приведены в п. 2.5.

Ограничения в применении метода связаны со следующим. Во-первых, необходимость разбиения поверхности на интервалы длиной не более $\lambda/10$ ограничивает волновые размеры тела. Практически оказывается, что в трехмерном случае вычисления возможны лишь для тел вращения при осесимметричном возбуждении, когда отсутствует зависимость звукового давления или колебательной скорости от одной из координат. В этом случае (так же как и для двумерных задач) периметр тела не должен превышать 20λ, чтобы порядок системы комплексных алгебраических уравнений не превышал 200. Для современных ЭВМ это число близко к предельному. Использование свойств, связанных с симметрией тела, может позволить увеличить максимальный размер тела вдвое или же при заданном размере уменьшить вдвое порядок системы.

Во-вторых, при увеличении размеров тела возникает принципиальная трудность, связанная с тем, что уравнение в форме (2.18) оказывается несостоятельным при совпадении частоты возбуждения с одной из резонансных частот внутренней области. При определении этих частот следует условно считать, что внутренняя область заполнена средой с теми же параметрами, что и снаружи, а на границе принято условие $p|_S = 0$ (задача Дирихле). Например, для бесконечного кругового цилиндра резонансные частоты определяются корнями уравнения $J_m(k_{mn}a) = 0$, а самой низкой резонансной частоте соответствует значение $k_{00}a = 2{,}4$.

---

* Описание вычислительных алгоритмов содержится в книге В. С. Сизикова и А. Ф. Верланя „Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие". Киев: Наук. думка. 1986. 543 с.

В результате в окрестности резонансных частот точность решения резко падает. В районе первого-второго резонансов еще удается выполнить вычисления, отступив несколько от резонансных частот, однако при повышении частоты плотность резонансных частот внутренней области (т. е. количество резонансов в заданном частотном диапазоне) возрастает настолько, что вычисления оказываются невозможными.

Рассмотрим простейший пример вычисления звукового давления на поверхности бесконечного цилиндра радиусом a с равномерным распределением колебательной скорости. Хорошо известно точное решение: $p = i\rho c v H_0^{(1)}(ka)/H_1^{(1)}(ka)$. Вычислим правую часть уравнения по формуле (2.20), которую в данном случае можно записать в виде

$$f = -2i\omega\rho v \int_0^{2\pi} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr)\, a\, d\varphi,$$

где $r = 2a \sin(\varphi/2)$ – расстояние между двумя точками на поверхности.

Заменой переменных $x = \sin(\varphi/2)$ интеграл приводится к виду

$$f = 2ka\rho c v \int_0^1 H_0^{(1)}(2kax) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрирование выполняется по формулам (6.552.4) и (6.552.5) из работы [16], что дает $f = \pi\rho c v J_0(ka) H_0^{(1)}(ka)$.

Если ka является корнем уравнения $J_0(k_n a) = 0$, то правая часть уравнения (2.18) обращается в нуль и неоднородное уравнение Фредгольма превращается в однородное. В результате теряется единственность решения. Поскольку решение уравнения должно существовать, то определитель системы уравнений обратится в нуль и вычисления станут невозможными.

В п. 2.3 применительно к задаче дифракции звука на прямоугольном брусе приводится пример влияния резонансных явлений на результаты численного решения интегрального уравнения. Далее в п. 2.2.6–2.2.7 указаны некоторые способы устранения этого явления.

2.2.3. Метод простых источников. По этому методу звуковое давление представляется в виде интеграла от неизвестной функции распределения некоторых фиктивных источников (монополей) на поверхности:

$$p(\vec{x}) = \int_S \sigma(\vec{y})\, G(\vec{x}, \vec{y})\, dS_y. \qquad (2.27)$$

Такое представление подразумевает, что на поверхности акустически прозрачного тела, совпадающего по форме с рассматриваемым, помещены *простые источники*, создающие то же поле, что и рассматриваемое тело. Отметим, что функция $\sigma(\vec{y})$ не описывает истинное звуковое давление на поверхности тела, а является вспомогательной. Решение в форме (2.27) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения, что определяется функцией Грина $G(\vec{x}, \vec{y})$.

Найдем нормальную составляющую колебательной скорости:

$$v_n(\vec{x}) = \frac{1}{i\omega\rho}\,\frac{\partial p(\vec{x})}{\partial n_x} = \frac{1}{i\omega\rho}\int\limits_S \sigma(\vec{y})\,\frac{\partial}{\partial n_x} G(\vec{x},\vec{y})\,dS_y$$

и устремим затем точку $\vec{x}$ на поверхность тела в точку $\vec{z}$ (см. рис. 2.4). Вблизи поверхности интеграл имеет разрыв, причем величина скачка определяется равенством (2.15в). В результате

$$v_n(\vec{z}) = \frac{1}{i\omega\rho}\left[-\frac{\sigma(\vec{z})}{2} + \int\limits_S \sigma(\vec{y})\,\frac{\partial}{\partial n_z} G(\vec{z},\vec{y})\,dS_y\right].$$

Получилось интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Его можно записать в виде

$$\sigma(\vec{z}) + \int\limits_S \sigma(\vec{y}) K(\vec{z},\vec{y})\,dS_y = f(\vec{z}), \qquad (2.28)$$

где

$$K(\vec{z},\vec{y}) = -2\,\frac{\partial}{\partial n_z} G(\vec{z},\vec{y}); \qquad (2.29)$$

$$f(\vec{z}) = -2i\omega\rho v_n(\vec{z}). \qquad (2.30)$$

В отличие от формулы (2.19) в выражении (2.29) дифференцирование проводится не в текущей точке $\vec{y}$, а в точке наблюдения $\vec{z}$. Кроме того, в правую часть не входит интеграл.

Это уравнение приводится к дискретному виду так же, как и уравнение (2.18). В результате получается система линейных уравнений:

$$\sum_{q=1}^{N} \sigma_q A_{sq} = f_s; \quad s = 1, 2, ..., N, \qquad (2.31)$$

где

$$A_{sq} = \delta_{sq} - 2\int\limits_{S_q} \frac{\partial}{\partial n_z} G(\vec{z}_s,\vec{y})\,dS_y; \qquad (2.32)$$

$$f_s = -2i\omega\rho v_s.$$

Здесь v_s – значения колебательной скорости в центрах участков с номерами $s = 1, 2, ..., N$.

Метод простых источников был использован для решения ряда задач излучения и дифракции звука в работе [81]. Этот метод обладает

тем же недостатком, что и метод интегрального уравнения Гельмгольца для внешней поверхности: решение интегрального уравнения невозможно для частот, близких к резонансными частотам объема среды, вытесняемого телом.

2.2.4. Использование интегрального уравнения для внутренней области. Вернемся к интегральной формуле Гельмгольца (2.11) и устремим точку наблюдения уже не на поверхность, а во внутреннюю область. В этом случае левая часть скачком обратится в нуль. Доказательство такого поведения функции $p(\vec{x})$ содержится в работе [63]. Обращение в нуль левой части формулы (2.11) также следует из соотношений (2.15а) и (2.16а). Действительно, $p(\vec{x}^-) = F(\vec{x}^-) - H(\vec{x}^-)$, где F и H определены выражениями (2.14), причем $\mu(\vec{y}) = p(\vec{y})$, $\sigma(\vec{y}) = \partial p_y/\partial n_y$. Тогда $p(\vec{x}^-) = F(\vec{x}^+) - H(\vec{x}^+) - \mu(\vec{x}) = p(\vec{x}^+) - \mu(\vec{x}) = 0$. Отсюда следует, что для точки $\vec{x}$, находящейся во внутренней области, должно выполняться равенство

$$\int_S p(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) dS_y = \int_S \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) ds_y; \; x \in R_i, \qquad (2.33)$$

которое можно записать в виде соотношения, похожего на интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Отличие от истинного интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода заключается в том, что значения $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежат различным областям: точки $\vec{x}$ находятся внутри тела, а $\vec{y}$ – на поверхности. Правая часть последнего уравнения является известной функцией. Поэтому

$$\int_S p(\vec{y}) K(\vec{x}, \vec{y}) dS_y = f(\vec{x}); \; x \in R_i, \qquad (2.34)$$

где

$$K(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}); \qquad (2.35)$$

$$f(\vec{x}) = i\omega\rho \int_S v_n(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) dS_y. \qquad (2.36)$$

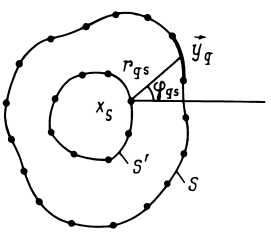


Рис. 2.6. Размещение опорных точек

Выберем внутри тела некоторую поверхность и разместим на ней N опорных точек $\vec{x}_s$ ($s = 1, 2, ..., N$). Разместим также N точек $\vec{y}_q$ ($q = 1, 2, ..., N$) на поверхности тела (рис. 2.6). Представив интеграл в виде суммы интегралов по малым участкам S_q, получим систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{q=1}^{N} p_q A_{sq} = f_s, \; s = 1, 2, ..., N, \qquad (2.37)$$

где

$$A_{sq} = \int\limits_{S_q} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}_s, \vec{y}_q) dS_y; \tag{2.38}$$

$$f_s = i\omega\rho \sum_{q=1}^{N} v_q G(\vec{x}_s, \vec{y}) dS_y. \tag{2.39}$$

В отличие от уравнений (2.18) и (2.28) уравнение (2.34) имеет решение при любых значениях волновых размеров тела. Однако оно обладает другим недостатком, свойственным уравнениям 1-го рода – резкой потерей точности при увеличении количества опорных точек. Действительно, число опорных точек $\vec{x}_s$ внутри тела должно совпадать с количеством интервалов разбиения поверхности. Количество этих интервалов, в свою очередь, зависит от волнового размера тела. При увеличении числа точек все больше будет расстояний $r_{qs} = |\vec{x}_s - \vec{x}_q|$, близких друг к другу по значению. Сумму (2.37) можно рассматривать, как представление некоторого вектора в N-мерном пространстве в системе неортогональных координат, оси которых расположены под углами друг к другу. При увеличении числа N углы между этими осями будут все острее. Решение системы эквивалентно пересечению некоторых прямых в указанном пространстве. Естественно, что точность определения точек пересечения прямых, расположенных под острыми углами друг к другу, должна быть невысокой. То же самое можно объяснить и с другой точки зрения. Матрица коэффициентов (2.38) в отличие от матриц (2.24) и (2.32) не имеет преобладающих диагональных членов, сохраняющих большое значение при увеличении N. Все члены матрицы оказываются одного порядка, что приводит к отсутствию сходимости рядов, составленных из коэффициентов матрицы по строкам и столбцам. Такая система является нерегулярной и точность ее решения при увеличении N будет уменьшаться.

2.2.5. Метод вспомогательных источников. Теория метода дана в работе [28], примеры применения для решения многих задач возбуждения и дифракции волн – в работах [21, 45, 86].

Применительно к задаче излучения звука, методы рассмотренные в перечисленных работах, могут быть сформулированы следующим образом. Представим неизвестное поле в точке наблюдения $\vec{y}_q$ (см. рис. 2.6) в виде суммы полей волн линейных для двумерной задачи (или точечных – для трехмерной задачи) источников, расположенных в нефизической области – внутри тела в точках $\vec{x}_s$, т. е.

$$p(\vec{y}_q) = \sum_{s=1}^{N} A_s G(kr_{qs}), \tag{2.40}$$

где $r_{qs} = |\vec{x}_s - \vec{y}_q|$. Функции $G(kr_{qs})$, определяемые формулами (2.12) и (2.13), образуют полную и линейно-независимую (хотя и не ортогональную) систему функций. Такую же систему образуют и функции $\partial G(kr_{qs})/\partial n_y$. Это дает возможность строить решение в виде набора таких

функций. Из граничного условия на поверхности $\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n_y} = v$ получим систему уравнений относительно коэффициентов A_s:

$$\sum_{s=1}^{N} A_s B_{sq} = i\omega\rho v(y_q); \quad q = 1, 2, ..., N, \tag{2.41}$$

где $B_{sq} = \partial G(kr_{qs})/\partial n_y$.

При решении задач этим методом теряется точность вычислений при совпадении частоты звука с одной из резонансных частот для области, ограниченной вспомогательным контуром. На этом свойстве построен эффективный способ численного определения резонансных частот резонаторов и волноводов [45].

В упомянутых выше работах даны рекомендации по выбору формы внутреннего контура, на котором располагают вспомогательные источники. Чем ближе вспомогательный контур к основному, тем сильнее преобладание диагональных членов системы уравнений, что улучшает обусловленность системы, а следовательно и точность решения. Однако при этом функция B_{sq} становится сильно осциллирующей и для обеспечения одинаковой точности счета необходимо брать больше членов разложения. При значительном увеличении членов разложения матрица системы становится плохо обусловленной по причинам, описанным в п. 2.2.4.

В работе [45] метод вспомогательных источников использован для построения решения задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом цилиндре, расположенном вблизи границы раздела различных сред. Аналогичным образом можно построить вычислительный алгоритм для расчета звукового поля, излучаемого цилиндром с направляющей произвольной формы, расположенным вблизи границы раздела двух жидких или газообразных сред.

Поле вспомогательных источников, расположенных в точках $\vec{x_s}$ (см. рис. 2.6), описывается независимой от направления функцией $G(kr_{qs})$. Можно модифицировать этот метод, располагая в этих точках источники более общего вида, например, в двумерном случае характеризуемые функцией $\sum_{l=0}^{L} a_l H_l^{(1)}(kr)\exp(il\varphi)$. Тогда вместо разложения (2.40) следует написать

$$p(\vec{y}_q) = \sum_{s=1}^{N}\sum_{l=-L}^{L} A_{sl} H_l^{(1)}(kr_{qs}) \exp(il\varphi_{qs}). \tag{2.42}$$

Подставив это разложение в граничное условие на поверхности тела в ряде опорных точек, получим систему уравнений для определения $N(2l + 1)$ неизвестных коэффициентов A_{sl}. Таким способом в работе [114] было вычислено поле дифракции электромагнитной волны на проводящем цилиндре диаметром 0,075λ конечной длины, равной 0,5λ, с двумя полусферическими закруглениями на концах. Вспомогательные точечные источники (трехмерный случай) располагались на цилиндрической поверхности, расположенной внутри тела. Общее число неизвестных коэффициентов составляло 160.

Для улучшения устойчивости вычислений при решении системы целесообразно выбирать число опорных точек на поверхности в 1,5 ... 2 раза больше числа неизвестных. При этом получается переопределенная система, в которой число уравнений больше числа неизвестных. Она решается методом наименьших квадратов (см. п. 2.2.6). Такая же рекомендация может быть отнесена и к основному варианту метода. Каких-либо сравнений эффективности различных модификаций метода до настоящего времени не производилось.

2.2.6. Комбинированный метод. В работе [137] предложен способ, позволяющий использовать преимущества двух описанных выше методов – интегрального уравнения Гельмгольца для поля на поверхности (см. п. 2.2.2) и интегрального уравнения для внутренней области (см. п. 2.2.4): сохранение устойчивости решения при возрастании числа N и отсутствие потери точности на частотах, близких к резонансным.

Разместим на поверхности тела N_1 точек $\vec{z}_s$ $(s = 1, 2, ..., N_1)$, в которых будут определяться значения звукового давления p_q и N_2 точек внутри тела $\vec{x}_s$ $(s = 1, 2, ..., N)$. Скомбинируем теперь N_1 уравнений типа (2.23) и N_2 уравнений типа (2.37). В результате получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{q=1}^{N_1} p_q B_{sq} = \psi_s; \quad s = 1, 2, ..., N_1 + N_2, \tag{2.43}$$

где

$$B_{sq} = \begin{cases} \delta_{sq} - 2 \int\limits_{S_q} \dfrac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y \text{ при } 1 \leqslant s \leqslant N_1, \\ -2 \int\limits_{S_q} \dfrac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}_s, \vec{y}) dS_y \text{ при } N_1 \leqslant s \leqslant N_1 + N_2; \end{cases} \tag{2.44}$$

$$\psi_s = \begin{cases} -2i\omega\rho \sum\limits_{q=1}^{N_1} v_q \int\limits_{S_q} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y \text{ при } 1 \leqslant s \leqslant N_1; \\ -2i\omega\rho \sum\limits_{q=1}^{N_1} v_q \int\limits_{S_q} G(\vec{x}_s, \vec{y}) dS_y \text{ при } N_1 \leqslant s \leqslant N_1 + N_2. \end{cases} \tag{2.45}$$

Получилась переопределенная система из $N_1 + N_2$ уравнений с N_1 неизвестными. Несмотря на это, решение должно существовать, так как известно, что истинное распределение звукового давления на поверхности удовлетворяет одновременно уравнениям (2.23) и (2.37). Однако при наличии вычислительных ошибок некоторые из уравнений системы (2.43) могут оказаться несовместными. Поэтому необходимо искать такое решение, которое наилучшим образом удовлетворяет системе, например, минимизировать среднеквадратичное отклонение от правой части результатов подстановки решения в левую часть. В соответствии с методом наименьших квадратов вычислим сумму квадратов отклонений по всем строкам системы:

$$\epsilon = \sum_{s=1}^{N_1+N_2} \left| \sum_{q=1}^{N_1} p_q B_{sq} - \psi_s \right|^2.$$

Неизвестные величины p_q должны быть выбраны так, чтобы ϵ было минимальным, т. е. они должны удовлетворять системе $\partial\epsilon/\partial p_q = 0$ ($q = 1, 2, ..., N_1$). Для выполнения дифференцирования следует представить квадрат модуля через произведение комплексно-сопряженных величин. В результате получим систему уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\sum_{q=1}^{N_1} p_q C_{sq} = D_s; \quad s = 1, 2, ..., N_1, \tag{2.46}$$

где

$$C_{sq} = \sum_{m=1}^{N_1+N_2} B^*_{ms} B_{mq}; \quad D_s = \sum_{m=1}^{N_1+N_2} B^*_{ms} \psi_m.$$

В работе [137] были приведены результаты расчетов диаграммы направленности линейки из 12 элементов, расположенных на поверхности экрана в виде акустически жесткого прямоугольного параллелепипеда шириной 4,49λ, глубиной 1,07λ и высотой h. Считалось, что линейка электрически компенсирована вдоль своей оси так, чтобы главный максимум был направлен вдоль поверхности экрана. При $h = 0{,}98\lambda$ во внутренней области было достаточно взять 8 дополнительных точек. Однако при увеличении высоты до 3,84λ для совпадения расчета с экспериментом потребовалось увеличить количество точек до 24. Это связано со значительной плотностью резонансных частот объема среды, вытесненной телом, при указанных волновых размерах. Отметим, что направление главного максимума не совпадало с направлением компенсации на угол, равный 90°.

Другой способ устранения резонансных явлений, также включающий переопределенные системы уравнений, рассмотрен в работе [129].

2.2.7. Устранение резонансных явлений изменением функции Грина. Указанные выше резонансные явления возникают вследствие того, что излучение источников, находящихся на поверхности тела, распространяется не только во внешнее пространство, но и внутрь области, занятой телом (как бы в воображаемый объем вытесненной среды). Это наводит на мысль о возможности устранения резонансных явлений введением во внутреннюю область некоторой фиктивной звукопоглощающей поверхности, препятствующей распространению волн. Заметим, что функции Грина $G(x, y)$ в формуле Гельмгольца (2.11) не обязательно выбирать в виде выражений (2.12) или (2.13), соответствующих полям ненаправленных источников в бесконечном пространстве. Как указано в работе [63], в качестве них могут быть использованы любые функции, удовлетворяющие уравнению распространения звуковых волн, условию излучения и заданной особенностью в источнике [типа $1/r$ для трехмерного случая и $\ln(kr)$ – для двумерного].

Выберем в качестве функции Грина поле, создаваемое источником, расположенным на поверхности тела в присутствии звукопоглощающей поверхности, расположенной во внутренней области. Рассмотрим, например, двумерный случай.

Выберем окружность радиусом a, расположенную целиком внутри тела, и зададим на этой окружности граничное условие $p/v|_{|\vec{x}|=a} = -Z$, где Z – некоторый импеданс; v – нормальная к окружности составляющая колебательной скорости. Чтобы поверхность $|\vec{x}| = a$ обладала поглощением, следует считать, что $\mathrm{Re}\, Z > 0$. Граничное условие можно также записать в виде

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{ikp}{z}\right)\Bigg|_{|\vec{x}|=a} = 0, \tag{2.47}$$

где $z = Z/\rho c$.

Теперь решим задачу о дифракции поля источника, расположенного в точке $\vec{y}$, принадлежащей поверхности S (рис. 2.7), на окружности с заданным граничным условием. Запишем

$$G(x, y) = \frac{i}{4}[H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k|\vec{x}|)\cos(m\varphi)], \tag{2.48}$$

где A_m – неизвестные коэффициенты.

Применим к треугольнику, показанному на рис. 2.7, теорему сложения для цилиндрических функций при $|\vec{x}| < |\vec{y}|$ [16]:

$$H_0^{(1)}(k|\vec{x} - \vec{y}|) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m H_m^{(1)}(k|\vec{y}|) J_m(k|\vec{x}|)\cos(m\varphi), \tag{2.49}$$

где $\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ при $m > 0$.

Подставив последнее выражение в граничное условие (2.47), получим формулу для коэффициентов A_m:

$$A_m = -\epsilon_m H_m^{(1)}(k|\vec{y}|)\frac{zJ_m'(ka) + iJ_m(ka)}{zH_m^{(1)\prime}(ka) + iH_m^{(1)}(ka)}. \tag{2.50}$$

Параметры a и z могут быть выбраны произвольным образом. В частности, можно принять $z = 1$, что соответствует условию полного звукопоглощения при нормальном падении звука на поверхность с импедансом $Z = \rho c$. В работе [141] указано, что ряд (2.48) сходится при любых значениях $|\vec{x}|$, удовлетворяющих условию $|\vec{x}| > a^2/|\vec{y}|$.

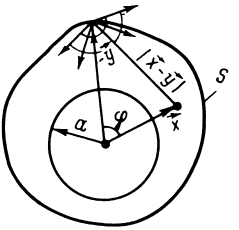


Рис. 2.7. Фиктивная поглощающая поверхность во внутренней области

2.2.8. Устранение резонансных явлений сочетанием уравнений относительно звукового давления и нормальной производной. Рассмотрим еще один способ устранения резонансных явлений при решении интегрального уравнения. Идея этого способа была предложена в работе [84]. Обратимся к

исходному интегралу Гельмгольца (2.11) и расположим точку наблюдения x на небольшом расстоянии от поверхности. Продифференцируем это выражение по нормали в точке $\vec{x}$, т. е. запишем

$$\frac{\partial p(\vec{x})}{\partial n_x} = \frac{\partial}{\partial n_x} \int_S p(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y - \int_S \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_x} dS_y.$$

Заметим, что в первом интеграле нельзя внести производную $\partial/\partial n_x$ под знак интеграла, поскольку особенность, содержащаяся в подынтегральном выражении, усилится настолько, что интеграл разойдется (однако вынести производную $\partial/\partial n_y$ из-под интеграла можно, так как это уменьшает особенность). Устремим точку $\vec{x}$ на поверхность в точку $\vec{z}$ и учтем предельные свойства интегралов по формулам (2.16). Поскольку $\partial p/\partial n = ik\rho c v_n$, получим

$$\frac{ik}{2} \rho c v_n(\vec{z}) = \frac{\partial}{\partial n_z} \int_S p(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y - ik\rho c \int_S v_n(y) \frac{\partial G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_z} dS_y. \tag{2.51}$$

Как было указано, собственные значения уравнения (2.18) (при которых численные решения оказываются невозможными) соответствуют резонансным частотам объема среды, вытесненной телом, с акустически мягкой границей (условие Дирихле). Уравнение (2.51) также имеет собственные значения, которые соответствуют резонансным частотам вытесненного объема среды с акустически жесткими границами (условие Неймана). Сложим эти два уравнения, предварительно умножив второе из них на некоторое число α. Для согласования размерностей α должно иметь размерность длины. Если выбрать α комплексным, то собственные значения комбинированного уравнения также окажутся комплексными. Поэтому при любых вещественных значениях волнового числа резонансных явлений наблюдаться не будет. Результирующее комбинированное уравнение можно записать в виде

$$p(\vec{z}) - 2 \int_S p(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y - 2\alpha \frac{\partial}{\partial n_z} \int_S p(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y =$$

$$= -\alpha ik\rho c v_n(z) - 2ik\alpha\rho c \int_S v_n(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_z} dS_y - 2ik\rho c \times$$

$$\times \int_S v_n(\vec{y}) G(\vec{z}, \vec{y}) dS_y.$$

Наиболее естественно выбрать при расчетах $\alpha = i/k$, тогда следует ожидать, что собственные числа уравнения должны быть чисто мнимыми.

Такая ситуация соответствует объему вытесненной среды со звукопоглощающей границей.

Приведение интегрального уравнения к алгебраической системе уравнений относительно значений звукового давления в некоторых выбранных точках поверхности может быть выполнено так же, как и при составлении системы (2.23). Разобьем поверхность на участки ΔS_q, $q = 1, 2, ..., Q$, в пределах которых значения p и v_n можно приближенно считать постоянными, и вынесем их из-под интегралов по этим участкам. Получится система уравнений

$$\sum_{q=1}^{Q} p_q K_{sq} = f_s; \quad s = 1, 2, ..., Q,$$

где

$$K_{sq} = \delta_{sq} - \int_{\Delta S_q} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y - 2\alpha \frac{\partial}{\partial n_z} \int_{\Delta S_q} \frac{\partial G(\vec{z}_s, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y;$$

$$f_s = -ik\rho c \left[\alpha v_n(\vec{x}_s) + 2\alpha \sum_{q=1}^{Q} v_n(\vec{y}_q) \int_{\Delta S_q} \frac{\partial G(\vec{z}_s, \vec{y})}{\partial n_z} dS_y + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{q=1}^{Q} v_n(\vec{y}_q) \int_{\Delta S_q} G(\vec{z}_s, \vec{y}) dS_y \right].$$

Если $s \neq q$, т. е. точка наблюдения $\vec{z}_s$ не лежит на площадке с номером q, то $r = |\vec{z}_s - \vec{y}| \neq 0$ и все интегралы непосредственно вычисляются. Если же $s = q$, то точка наблюдения находится на той же площадке, по которой выполняется интегрирование, и в подынтегральных выражениях возникают особенности. О вычислении величины $\int_{\Delta S_q} \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}_q, \vec{y}) dS_y$ уже было сказано выше [см. формулу (2.26)]. Рассмотрим вычисление интеграла

$$J_q = \frac{\partial}{\partial n_z} \int_{\Delta S_q} \frac{\partial G(\vec{z}_q, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y. \tag{2.52}$$

Для упрощения будем считать, что радиус кривизны элемента велик по сравнению с его размерами, т. е. элемент почти плоский. Для вычисления производных следует принять, что оба конца отрезка $|\vec{z}_q - \vec{y}|$ приподняты над поверхностью на расстоянии ϵ_z и ϵ_y соответственно, затем, после выполнения операций, указанных в формуле (2.52), устремить ϵ_z и ϵ_y к нулю. Введем полярные координаты ρ, θ с центром в точке $\vec{x}_s$. С учетом того, что $\partial/\partial n_z = \partial/\partial \epsilon_z$ и $\partial/\partial n_y = \partial/\partial \epsilon$, запишем:

$$J_q = \frac{\partial}{\partial \epsilon_z} \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\theta)} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \epsilon_y} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) \rho d\rho d\theta,$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2}$; ρ – проекция отрезка r на площадку ΔS_q; $l = l(\theta)$ – уравнение контура, ограничивающего площадку ΔS_q. Продифференцировав по ϵ_y после выполнения перехода $\epsilon_y \to 0$, получим:

$$J_q = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \epsilon_z}\left[\epsilon_z \int_0^{2\pi}\int_0^{l(\theta)} \exp(ikr_1)\frac{ikr_1 - 1}{r_1^3}\rho d\rho d\theta\right].$$

Здесь $r_1 = \sqrt{\rho^2 + \epsilon_z^2}$.

Внутренний интеграл можно взять с учетом равенства $\rho d\rho = r_1 dr_1$.

$$J_q = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \epsilon_z}\left[\epsilon_z \int_0^{2\pi}\frac{\exp(ikr_1)}{r_1}\Bigg|_{\epsilon_z}^{\sqrt{l^2(\theta)+\epsilon_z^2}} d\theta\right]$$

Подынтегральное выражение в нуль нигде не обращается. Поэтому после подстановки пределов интегрирования можно выполнить дифференцирование по ϵ_z и устремить его к нулю. В результате получим окончательно:

$$J_q = \frac{ik}{2} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\exp[ikl(\theta)]}{l(\theta)}d\theta. \qquad (2.53)$$

Заметим, что при уменьшении размеров элемента J_q возрастает. В работе [139] указано, что этот метод дает в ряде случаев лучшие результаты, чем комбинированный (см. п. 2.2.6).

2.2.9. Излучатель в импедансном экране. Рассмотрим следующую задачу. На участке поверхности S_1 (рис. 2.8) задана нормальная составляющая колебательной скорости $v_n(\vec{y})$. Оставшаяся часть S_2 покрыта материалом, который можно описать нормальным импедансом Z, причем

$$Z(\vec{y}) = -\frac{p(\vec{y})}{v_n(\vec{y})}\Bigg|_{\vec{y}\in S_2} = -\frac{p(\vec{y})\, i\omega\rho}{\partial p(\vec{y})/\partial n_y}\Bigg|_{\vec{y}\in S_2}. \qquad (2.54)$$

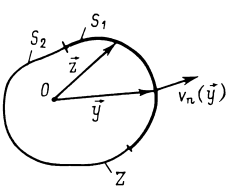


Рис. 2.8. К задаче об излучателе в импедансном экране

Знак „–" появился в связи с тем, что нормальная составляющая колебательной скорости считается направленной наружу, в то время как при положительном давлении на поверхности (сжатии) скорость должна быть направлена внутрь. Импеданс Z может зависеть от координат точки на поверхности тела.

Вернемся к выражению (2.17), справедливому для точки наблюдения $\vec{z}$, находящейся на поверхности тела, и представим интеграл в виде суммы

интегралов по участкам S_1 и S_2. На участке S_1 выполняется соотношение $\partial p(\vec{y})/\partial n_y = i\omega\rho v_n(\vec{y})$, где $v_n(\vec{y})$ – известное распределение колебательной скорости. Нормальная производная звукового давления на участке S_2 может быть выражена через звуковое давление по формуле (2.54):

$$\partial p(\vec{y})/\partial n_y = -i\omega\rho p(\vec{y})/Z(\vec{y}). \tag{2.55}$$

С учетом этих соотношений из выражения (2.17) найдем

$$\frac{1}{2}p(\vec{z}) = \int_{S_1} p(\vec{y})\frac{\partial}{\partial n_y}G(\vec{z},\vec{y})dS_y - i\omega\rho\int_{S_1} v_n(\vec{y})G(\vec{z},\vec{y})dS_y +$$

$$+\int_{S_2} p(\vec{y})\frac{\partial}{\partial n_y}G(\vec{z}_y,\vec{y})dS_y + i\omega\rho\int_{S_2}\frac{p(\vec{y})}{Z(\vec{y})}G(\vec{z},\vec{y})dS_y. \tag{2.56}$$

Последнее соотношение можно записать в виде интегрального уравнения (2.18), в котором ядро и правая часть определяются следующими выражениями:

$$K(\vec{z},\vec{y}) = -2\frac{\partial G(\vec{z},\vec{y})}{\partial n_y} - \alpha\frac{i\omega\rho}{Z(\vec{y})}G(\vec{z},\vec{y}); \tag{2.57}$$

$$f(\vec{z}) = -2i\omega\rho\int_{S_1} v_n(\vec{y})G(\vec{z},\vec{y})dS_y, \tag{2.58}$$

где $\alpha = 1$, если точка наблюдения $\vec{z}$ находится на участке S_2, и $\alpha = 0$ для точки $\vec{z}$ на участке S_1.

Частный случай акустически жесткого экрана получится, если положить $Z = \infty$. Однако в другом предельном частном случае – идеального акустически мягкого экрана – получить из соотношения (2.56) уравнение для поля на поверхности невозможно, так как в последнем из интегралов одновременно обращаются в нуль $p(\vec{y})$ и $Z(\vec{y})$.

2.3. Интегральные уравнения для поля на поверхности при рассеянии звука

Запишем соотношения, определяющие решение задачи о дифракции волн, излучаемых точечным или линейным источником (для трехмерного и двумерного случаев соответственно). Источник звука находится в точке M_1 (рис. 2.9). В свободном пространстве в точке M такой источник развивает звуковое давление

$$p_0(\vec{x}) = -ik\rho cQG_0(\vec{x},\vec{R}_1). \tag{2.58}$$

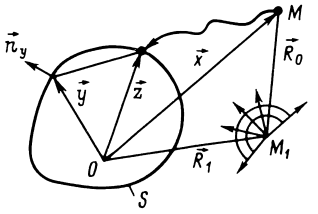


Рис. 2.9. К задаче о дифракции звука на теле произвольной формы

Здесь Q – объемная колебательная скорость источника (производительность); $G_0(\vec{x}, \vec{R}_1)$ – функция Грина для свободного пространства, причем

$$G_0(\vec{x}, \vec{R}_1) = \exp(ikR_0) / (4\pi R_0) \text{ или}$$

$$G_0(\vec{x}, \vec{R}_1) = iH_0^{(1)}(kR_0)/4$$

для трехмерного или двумерного случаев соответственно.

Полное поле в точке M можно представить в виде суммы падающего и рассеянного полей $p(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + p_s(\vec{x})$. Соотношения типа формулы Гельмгольца (2.11) могут быть записаны как для полного, так и рассеянного полей. Полное поле в точке $\vec{x}$ удовлетворяет соотношению

$$p_0(\vec{x}) + \int_S \left[p(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y =$$

$$= \begin{cases} p(x), \text{ если } \vec{x} \text{ вне } S; \\ 0, \text{ если } \vec{x} \text{ внутри } S. \end{cases} \qquad (2.60)$$

Здесь $G(\vec{x}, \vec{y})$ определяется выражением (2.12) или (2.13). Вывод формулы (2.60) дан в работе [63], однако по сравнению с представленными в ней формулами (3.21а) и (3.21б) знак у интеграла (2.60) выбран противоположным. Это связано с тем, что дифференцирование $\partial/\partial n_y$ приводится по нормали, внешней по отношению к телу, в то время как в работе [63] дифференцирование выполнялось по нормали, внешней по отношению к рассматриваемой области пространства, т. е. внутренней по отношению к телу.

Соотношение (2.60) для точки наблюдения, находящейся в воображаемой области среды, заполняющей пространство внутри тела, называют *уравнением нулевого поля.*

Если внутренняя область заполнена жидкостью с волновым числом k_1, то для звукового давления внутри тела справедливо выражение

$$-\int_S \left[p_1(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G_1(\vec{x}, \vec{y}) - \frac{\partial p_1(\vec{y})}{\partial n_y} G_1(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y =$$

$$= \begin{cases} p_1(\vec{x}), \text{ если } \vec{x} \text{ внутри } S; \\ 0, \text{ если } \vec{x} \text{ вне } S. \end{cases}$$

Знак „–" перед интегралом появляется вследствие того, что нормаль n_y

является внешней по отношению к области, в которой определяется поле. Здесь функции $G_1(\vec{x}, \vec{y})$ аналогичны функциям $G(\vec{x}, \vec{y})$ для внешнего пространства с заменой k на k_1.

Если поверхность S не является реальной физической поверхностью, рассеивающей звук, а представляет собой лишь воображаемую поверхность в пространстве, по которой проводится интегрирование, то рассеянное поле отсутствует и $p(\vec{x}) = p_0(\vec{x})$. В этом случае выполняется тождество

$$\int_S \left[p_0(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial p_0(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \vec{x} \text{ вне } S; \\ -p_0(\vec{x}), \text{ если } \vec{x} \text{ внутри } S. \end{cases} \qquad (2.61)$$

Из формул (2.60) и (2.61) следует формула Гельмгольца для рассеянного поля:

$$\int_S \left[p_s(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial p_s(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y =$$

$$= \begin{cases} p_s(\vec{x}), \text{ если } \vec{x} \text{ вне } S; \\ 0, \text{ если } \vec{x} \text{ внутри } S, \end{cases} \qquad (2.62)$$

формально аналогичная выражению (2.11). В выражениях (2.60) и (2.62) неизвестные распределения звуковых давлений и колебательных скоростей входят как в левые, так и в правые части. Следовательно, для определения полей рассеяния надо сначала решить интегральные уравнения относительно поля на поверхности.

Устремим точку $\vec{x}$ на поверхность тела в точку $\vec{z}$, как показано на рис. 2.9 волнистой линией. Так же, как и при выводе уравнений для задачи излучения звука, при выполнении предельного перехода следует учесть, что отдельные слагаемые, входящие в формулу Гельмгольца, являются разрывными функциями на поверхности, причем скачки этих функций и их производных определяются соотношениями (2.15), (2.16). В результате получим выражения, связывающие полное и рассеянное звуковые давления с нормальной составляющей колебательной скорости $v_n(\vec{y}) = \dfrac{1}{i\omega\rho} \dfrac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y}$ на поверхности тела:

$$\frac{1}{2} p(\vec{z}) = p_0(\vec{z}) + \int_S \left[p(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}, \vec{y}) - \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{z}, \vec{y}) \right] dS_y; \qquad (2.63)$$

$$\frac{1}{2}p_s(\vec{z}) = \int_S \left[p_s(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}) - \frac{\partial p_s(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}) \right] dS_y . \qquad (2.64)$$

Для того чтобы составить уравнения относительно неизвестных распределений звукового давления или колебательной скорости на поверхности тела, следует конкретизировать граничные условия на поверхности.

Для акустически жесткого тела, на поверхности которого колебательная скорость равна нулю, обращается в нуль второе слагаемое в подынтегральном выражении (2.63), а в уравнении для рассеянного поля (2.64) необходимо принять $\partial p_s(\vec{y})/\partial n_y = -\partial p_0(\vec{y})/\partial n_y$ [что следует из граничного условия $v_n(\vec{y}) = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p(\vec{y})}{\partial n_y} = 0$ на поверхности тела].

В результате получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для полного звукового давления на поверхности

$$p(\vec{z}) + \int_S p(\vec{y}) K(\vec{z},\vec{y}) dS_y = f(\vec{z}), \qquad (2.65)$$

где

$$K(\vec{z},\vec{y}) = -2 \frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}); \qquad (2.66)$$

$$f(\vec{z}) = 2p_0(\vec{z}), \qquad (2.67)$$

и аналогичное уравнение для рассеянного звукового давления на поверхности

$$p_s(\vec{z}) + \int_S p_s(\vec{y}) K(\vec{z},\vec{y}) dS_y = f_1(\vec{z}), \qquad (2.68)$$

где

$$f_1(\vec{z}) = -2 \int_S \frac{\partial p_0(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{z},\vec{y}) dS_y, \qquad (2.69)$$

а ядро $K(\vec{z},\vec{y})$ определяется выражением (2.66).

В случае акустически мягкой поверхности следует приравнять нулю полное звуковое давление на поверхности. Из соотношения (2.63) получим в этом случае уравнение относительно неизвестной нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности

$$\int_S v_n(\vec{y}) G(\vec{z},\vec{y}) dS_y = f_2(\vec{z}), \qquad (2.70)$$

где

$$f_2(\vec{z}) = p_0(\vec{z})/(i\omega\rho). \qquad (2.71)$$

Заметим, что уравнение (2.70) в отличие от (2.65) и (2.68) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода. Известно, что в общем случае решение уравнения 1-го рода является некорректно поставленной задачей, так как малые изменения правой части могут приводить к большим изменениям решения, что вызывает неустойчивость и необходимость применения методов регуляризации. Однако в данном случае эта проблема не возникает, так как ядро $G(\vec{z}, \vec{y})$ на участке интегрирования имеет особенность в точке $\vec{y} = \vec{x}$. Эта особенность является слабой [типа $1/r$ или $\ln(kr)$ в трехмерном и двумерном случаях соответственно], и так же как в формуле (2.20) несобственный интеграл существует в обычном смысле.

При переходе к дискретному представлению уравнения (2.70) в виде суммы интегралов по малым участкам S_q (на которых колебательную скорость можно приближенно считать постоянной) окажется, что наибольшие значения будут иметь интегралы по участкам в окрестности точек $\vec{z}_q$. В результате получится система линейных алгебраических уравнений, в которой наибольшие значения имеют коэффициенты, стоящие на главной диагонали. Решения такой системы оказываются устойчивыми по отношению к ошибкам вычисления. Кроме того, точность решения не снижается при увеличении количества опорных точек на поверхности в отличие от уравнения для внутренней области (2.34), ядро которого не имеет особенностей (так как точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$ принадлежат разным областям: $\vec{x}$ находится внутри тела, а $\vec{y}$ – на поверхности).

В случае рассеяния на импедансной поверхности можно получить интегральные уравнения относительно звукового давления и колебательной скорости, используя условие $p(\vec{z})/v_n(\vec{z}) = -Z(\vec{z})$. Здесь подчеркнуто, что импеданс может быть переменным. Для такой поверхности можно получить из соотношения (2.63) интегральное уравнение относительного звукового давления на поверхности в форме (2.65), где для ядра вместо (2.66) следует использовать выражение

$$K(\vec{z}, \vec{y}) = -2\left[\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}, \vec{y}) + \frac{i\omega\rho}{Z(\vec{y})} G(\vec{z}, \vec{y})\right]. \qquad (2.72)$$

Если исключить из соотношения (2.63) звуковое давление, то получим уравнение относительно колебательной скорости

$$v_n(z) + \int_S v_n(\vec{y}) K(\vec{z}, \vec{y}) dS_y = f(\vec{z}), \qquad (2.73)$$

где

$$K(\vec{z}, \vec{y}) = -\frac{2}{Z(\vec{z})}\left[Z(\vec{y})\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{z}, \vec{y}) + i\omega\rho G(\vec{z}, \vec{y})\right]; \qquad (2.74)$$

$$f(\vec{z}) = -2p_0(\vec{z})/Z(\vec{z}).$$

Аналогичные уравнения можно записать и для рассеянных составляющих поля.

Заметим, что при решении уравнений (2.65), (2.72) и (2.73) при $\operatorname{Re} Z = 0$ встретятся такие же резонансные явления, как и при решении уравнения (2.18). Однако при $\operatorname{Re} Z > 0$, т. е. в случае, если поверхность обладает звукопоглощающими свойствами, эти явления пропадают. Это связано с тем, что область среды, совпадающая по форме с рассеивающим телом и ограниченная звукопоглощающей границей, не имеет вещественных резонансных частот. Следовательно, совпадение частоты падающей волны с одной из резонансных частот объема невозможно.

В качестве примера приведем некоторые результаты решения двумерной задачи дифракции на прямоугольном акустически жестком брусе с волновыми размерами $2ka \times 2kb$. Численные результаты получены путем использования интегрального уравнения (2.68). На рис. 2.10 приведены вещественные и мнимые части амплитуды рассеяния звука на брусе квадратного сечения в направлении падения (вперед) для углов падения $\theta = 0°$ и $\theta = 45°$. Значения пронормированы так, что

$$p_s(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp\,(ikR - i\pi/4) F_s(\varphi), \quad kR \gg 1,$$

где R — расстояние от центра до точки наблюдения.

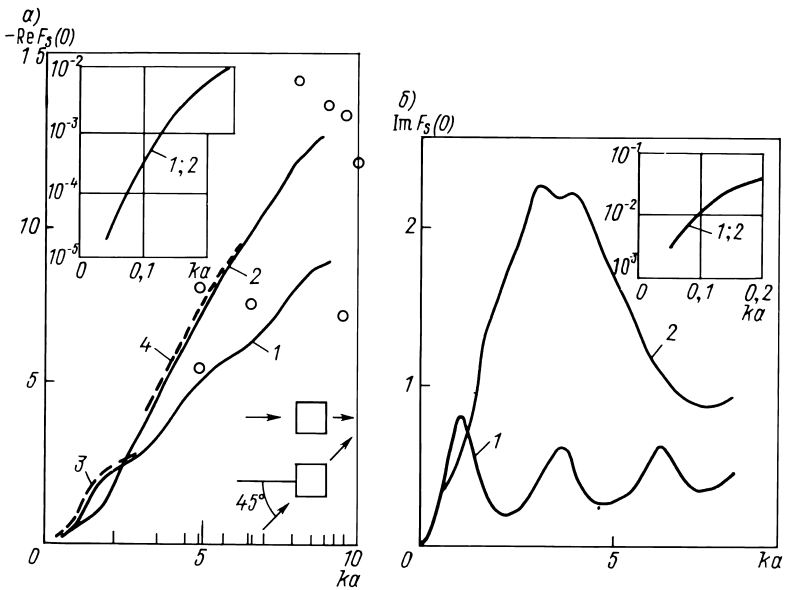


Рис. 2.10. Вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части амплитуды волны, рассеянной вперед (в направлении падения) брусом квадратного сечения

1, *2* — волна падает на грань и на ребро соответственно; *3* — $|F_s(0)|$ при $\theta = 0°$; *4* — $|F_s(0)|$ при $\theta = 45°$

В верхних частях рисунков в увеличенном масштабе показаны начальные участки кривых. При малых волновых размерах значения амплитуд рассеянных полей для различных ориентаций тела относительно направления падения практически совпадают. В этом случае амплитуда рассеяния весьма близка к амплитуде волны, рассеянной цилиндром, в который вписывается квадрат. При увеличении волнового размера графики амплитуды рассеянной волны (штриховые линии на рис. 2.10,*а*) стремятся к прямым линиям, определяемым приближением Кирхгофа, т. е. $|F_s(0)| \approx ka$ при $\theta = \theta^0$ и $|F_s(0)| \approx \sqrt{2}ka$ при $\theta = 45°$.

При решении интегрального уравнения (2.68) в данном случае не принималось никаких мер для исключения резонансных явлений, описанных выше. Их влияние на результаты измерения показано на рис. 2.10, *а*. Кружками обозначены ошибочные результаты, получающиеся при резонансных волновых размерах. В данном случае эти размеры соответствуют резонансам квадратной области с акустически мягкими границами ($p = 0$). Они определяются соотношением $(ka)_{mn} =$

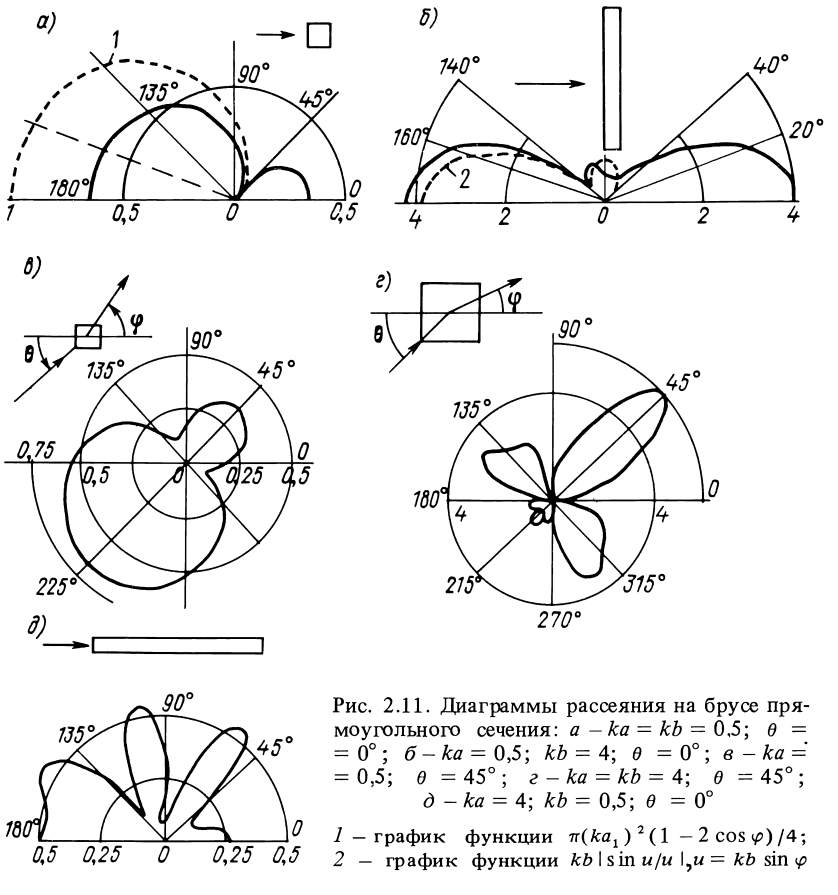


Рис. 2.11. Диаграммы рассеяния на брусе прямоугольного сечения: *а* – $ka = kb = 0{,}5$; $\theta = 0°$; *б* – $ka = 0{,}5$; $kb = 4$; $\theta = 0°$; *в* – $ka = 0{,}5$; $\theta = 45°$; *г* – $ka = kb = 4$; $\theta = 45°$; *д* – $ka = 4$; $kb = 0{,}5$; $\theta = 0°$

1 – график функции $\pi(ka_1)^2(1 - 2\cos\varphi)/4$;
2 – график функции $kb\,|\sin u/u|$, $u = kb\sin\varphi$

$= \pi\sqrt{m^2 + n^2}/2$; m, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Эти значения отмечены на горизонтальной оси штрихами. При небольших волновых размерах можно получить плавные кривые, выбирая для расчета значения ka, лежащие в промежутках между резонансными значениями $(ka)_{mn}$. Однако при $ka > (10 \ldots 20)$ плотность собственных частот возрастает настолько, что вычисления становятся невозможными.

Диаграммы рассеяния показаны на рис. 2.11. При малых значениях ka (рис. 2.11, *а, в*) диаграммы близки к диаграммам низкочастотного рассеяния на цилиндре, имеющем вид $\pi(ka_1)^2(1 - 2\cos\varphi)/4$ (рэлеевское рассеяние), где $a_1 = \sqrt{2}a$ – радиус описанной вокруг квадрата окружности. При увеличении волнового размера в направлении, перпендикулярном к направлению падения звука, появляются два лепестка (рис. 2.11, *б*), один из которых формирует зону тени, а второй – отраженное поле, Форма этих лепестков близка к функции $|\sin u/u|$, где $u = kb\sin\varphi$. При наклонном падении ($\theta = 45^\circ$) и малых волновых размерах (см. рис. 2.11, *в*) диаграмма рассеяния почти не отличается от диаграммы для нормального падения волны, показанной на рис. 2.11, *а*. При больших волновых размерах (рис. 2.11, *г*) существует тенеобразующий лепесток и лепестки, вызванные отражением от освещенных граней.

2.4. Метод переходных матриц в задаче о рассеянии звука телом произвольной формы (метод Т-матриц)

2.4.1. Переходная матрица. В работе [148] предложен метод решения задачи дифракции звука на поверхности произвольной формы, соединяющей разделение переменных в уравнении Гельмгольца с решением интегрального уравнения для внутренней области (см. п. 2.2.4).

Пусть звуковая волна p_0 (рис. 2.12) падает на поверхность тела S. Требуется определить звуковое поле p_S, рассеянное телом при заданных граничных условиях на поверхности. В работе [148] рассмотрены граничные условия Дирихле и Неймана (акустически мягкая и жесткая поверхности соответственно), а также случай препятствия в виде некоторого объема жидкости, плотностью и сжимаемостью отличающимися от аналогичных параметров окружающей среды. В дальнейшем метод был распространен на упругие тела, а также на системы тел с учетом взаимодействия отдельных тел.

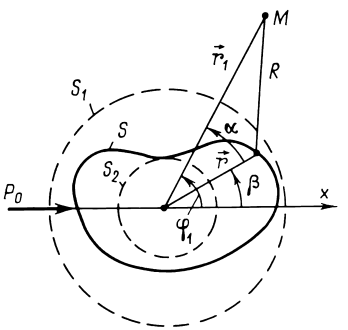


Рис. 2.12. К методу переходных матриц

Рассмотрим сначала двумерную задачу и будем считать, что начало координат находится внутри тела. При разделении переменных в уравнении Гельмгольца в цилиндрических координатах общее решение можно представить в виде ряда по функциям

Бесселя и Неймана. Поле падающей волны $p_0(\vec{r}_1)$ должно быть конечным в начале координат. Следовательно, в разложении падающей волны функции Неймана, имеющие в начале координат особенность, должны отсутствовать. Поэтому поле падающей волны можно представить в форме

$$p_0(\vec{r}_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m J_m(kr_1) \exp(im\varphi_1), \tag{2.75}$$

где коэффициенты a_m считаются известными. В частности, если волна падает на тело вдоль оси $\vec{x}$, как показано на рис. 2.12, то $p_0 = \exp(ikr_1 \cos\varphi_1)$ и $a_m = i^m$. Если падающее поле представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну $p_0(\vec{r}_1) = H_0^{(1)}(kr')$, $r' = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ с центром в точке r_2, φ_2, то при $r_2 > r_1$ по теореме сложения цилиндрических функций $a_m = (-1)^m H_0^{(1)}(kr_2) \exp(-im\varphi_2)$.

Окружим тело цилиндрической поверхностью S_1. Вне этой поверхности рассеянное поле можно представить в виде расходящихся цилиндрических волн, т. е. оно может быть описано рядом

$$p_s(\vec{r}_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m^{(1)}(kr_1) \exp(im\varphi_1), \tag{2.76}$$

где коэффициенты b_m являются неизвестными.

В промежутке между S и S_1 (за исключением тел, форма которых удовлетворяет гипотезе Рэлея; см. п. 2.1) могут присутствовать как расходящиеся, так и сходящиеся волны. Однако при использовании данного метода сразу непосредственно вычисляется поле вдали от тела без необходимости продолжения ряда (2.76) до поверхности. Поэтому вопрос о структуре поля в промежутке между S и S_1 при использовании данного метода не возникает.

Поскольку система коэффициентов b_m определяется из системы a_m, то должно существовать матричное соотношение

$$\mathrm{B} = \mathrm{TA}, \tag{2.77}$$

где A и B – матрицы-столбцы, составленные из коэффициентов a_m и b_m соответственно, а T – некоторая квадратная матрица, элементы которой зависят от формы тела и граничных условий. Матрицу T можно назвать переходной, поскольку она дает возможность определять неизвестные коэффициенты b_m по известным коэффициентам a_m. В ряде работ рассматриваемый метод называют *методом Т-матриц* (от англ. *transition* – переход).

2.4.2. Определение элементов матрицы перехода. Используем интегральное соотношение (2.60), связывающее поле в любой точке с полем на поверхности тела. В обозначениях, показанных на рис. 2.12, запишем это выражение в виде

$$p_0(\vec{r}_1) + p_s(\vec{r}_1) = \begin{cases} p(\vec{r}_1), \text{ если } \vec{r}_1 \text{ вне } S; \\ 0, \text{ если } \vec{r}_1 \text{ внутри } S, \end{cases} \tag{2.78}$$

где

$$p_s(\vec{r}_1) = \int_S \left[p(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} \right] dS - \qquad (2.79)$$

рассеянное поле. Значения $p(r)$ и $\partial p(\vec{r})/\partial n$ на поверхности являются неизвестными.

Воспользуемся теоремой сложения цилиндрических функций. Пусть точка M лежит вне описанной окружности S_1. В этом случае $r_1 > r$ и по теореме сложения можно записать:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) H_m^{(1)}(kr_1) \exp(im\alpha); \; r_1 > r. \qquad (2.80)$$

Подставим ряд (2.80) в подынтегральное выражение (2.79). Для выполнения дифференцирования по нормали воспользуемся формулой (7.10) из работы [63]. Если контур S в полярных координатах определяется кривой $r = r(\beta)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{r'}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right); \; r' = \frac{\partial r(\beta)}{\partial \beta}. \qquad (2.81)$$

Тогда

$$b_m = \frac{i}{4} \int_S \left[p(\vec{r}) f_1 - \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} J_m(kr) \right] \exp(-im\beta) dS, \qquad (2.82)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \left[krJ_m'(kr) + \frac{r'im}{r} J_m(kr) \right].$$

Поместим теперь точку M внутрь вписанной окружности S_2. В этом случае справедлива нижняя строка соотношения (2.78), которая называется условием погашения поля внутри области. Для области внутри S_2 выполняется условие $r_1 < r$ и теорема сложения запишется в виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_1) H_m^{(1)}(kr) \exp(im\alpha). \qquad (2.83)$$

Используя представления (2.75), (2.78), (2.81), (2.83), получим

$$-a_m = \frac{i}{4} \int\limits_S \left[p(\vec{r}) f_2 - \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} H_m^{(1)}(kr) \right] \exp(-im\beta) dS, \qquad (2.84)$$

где

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}} \left[krH_m^{(1)'}(kr) + \frac{r'im}{r} H_m^{(1)}(kr) \right].$$

Найти связь между коэффициентами b_m и a_m можно, исключив каким-либо способом из соотношений (2.82) и (2.84) неизвестные функции.

Дальнейший план решения заключается в следующем. Разложим неизвестные значения поля на поверхности и его нормальной производной в ряды по некоторой полной системе функций с учетом граничных условий на поверхности тела. Обозначим неизвестные коэффициенты через x_q. Подставив такое разложение в выражение (2.84), получим бесконечную систему уравнений относительно коэффициентов x_q. Особенность метода переходных матриц состоит в том, что связь между b_m и a_m можно получить, не вычисляя коэффициентов x_q.

Для определенности рассмотрим рассеяние на акустически мягком теле, для которого $p(\vec{r}) = 0$ (граничное условие Дирихле), и запишем неизвестное распределение нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности тела в форме ряда

$$\frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q \psi_q(\beta), \qquad (2.85)$$

где $\psi_q(\beta)$ – некоторая полная система функций.

Выбор этой системы довольно произволен и определяется, исходя из эффективности вычислительного процесса. Подставив этот ряд в (2.84), получим при $p(\vec{r}) = 0$

$$a_m = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q Q_{mq}; \quad m = -\infty \ldots \infty, \qquad (2.86)$$

где

$$Q_{mq} = \frac{i}{4} \int\limits_S H_m^{(1)}(kr) \psi_q(\beta) \exp(-im\beta) dS. \qquad (2.87)$$

Соотношение (2.86) можно записать в матричном виде

$$A = QX^T. \qquad (2.88)$$

Здесь A, X^T – матрицы-столбцы; Q – квадратная матрица. Индекс T означает транспонированную матрицу.

Аналогичным образом из (2.82) получим

$$b_m = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q R_{mq},$$

где

$$R_{mq} = -\frac{i}{4}\int_S J_m(kr)\,\psi_q(\beta)\,\exp(-im\beta)\,dS, \tag{2.89}$$

или в матричном виде

$$B = R^T X. \tag{2.90}$$

Следуя описанной выше схеме, исключим X из матричных соотношений (2.88) и (2.90). Для этого выразим сначала X через обратную матрицу в виде $X = (Q^T)^{-1}A$. Здесь $(Q^T)^{-1}$ – матрица, обратная по отношению к транспонированной матрице Q^T. А затем подставим X в (2.90). Получится $B = R^T(Q^T)^{-1}A$. Таким образом, переходная матрица определяется матричным произведением

$$T = R^T(Q^T)^{-1}. \tag{2.91}$$

Сформулируем полученный результат. Рассеянное звуковое поле определяется набором расходящихся волн (2.76), причем коэффициенты выражаются матричным произведением (2.77) столбца коэффициентов для разложения падающей на тело волны и матрицы перехода (Т-матрицы). Сама Т-матрица находится в виде матричного произведения (2.91), а элементы матриц Q и R представляют собой интегралы (2.87), (2.89).

Заметим, что Т-матрица не зависит ни от направления падения звука, ни от положения точки наблюдения, а определяется лишь формой тела и граничными условиями. Для тел, в которых отсутствует поглощение энергии, выполняется условие $T^*T = -\mathrm{Re}\,T$, что является аналогом оптической теоремы (см. п. 4.2) и определяется законом сохранения энергии. Т-матрица является симметричной, т. е. $T^T = T$. С Т-матрицей можно связать S-матрицу по правилу $S = I + 2T$ (здесь I – единичная матрица), которая тоже будет симметричной ($S^T = S$). Для тел без поглощения S-матрица будет унитарной, т. е. $(S^T)^* S = I$ или $S^*S = I$.

Убедимся, что описанный метод в частном случае дифракции плоской звуковой волны на круговом цилиндре радиусом a дает решение, совпадающее с хорошо известным результатом

$$b_m = -i^m J_m(ka)/H_m^{(1)}(ka). \tag{2.92}$$

Действительно, для кругового цилиндра $r(\beta) = a = \text{const}$, поэтому

$$Q_{mq} = \frac{ia}{4} H_m^{(1)}(ka) \int_0^{2\pi} \psi_q(\beta) \exp(-im\beta) d\beta.$$

Выберем в качестве системы ψ_q набор функций $\psi_a = \exp(iq\beta)$. Таким образом, разложение (2.85) в данном случае представляет собой ряд Фурье. Интеграл будет отличен от нуля лишь при $q = m$. Следовательно, в матрице Q_{mq} остаются лишь диагональные члены $Q_{mm} = i\pi a H_m^{(1)}(ka)/2$. В этом простейшем случае элементы транспонированной матрицы Q_{mm}^T будут такими же, а элементы обратной матрицы $(Q_{mm}^T)^{-1}$ определяются как $2/[i\pi a H_m^{(1)}(ka)]$.

Аналогичным образом получим $R_{mm} = -i\pi a J_m(ka)/2$. Здесь Т-матрица также будет диагональной с элементами $T_{mm} = -J_m(ka)/H_m^{(1)}(ka)$. Умножив эту матрицу на матрицу-столбец, составленную из элементов $a_m = i^m$, получим коэффициенты (2.92). Можно полагать, что и для тел с формой сечения, не очень сильно отличающейся от круговой, основную роль должны играть диагональные члены.

Метод Т-матриц обеспечивает существование и единственность решения при любых волновых размерах тела. Он позволяет получать решения при тех частотах, при которых применение методов, связанных с интегральными уравнениями, невозможно из-за возникновения описанных выше резонансных явлений.

Метод Т-матриц развит также для дифракции звука на упругих телах и для дифракции упругих волн в твердом теле. В этом случае вместо интегрального соотношения (2.79) используется тензорный аналог [132, 145, 147], в котором вместо звукового давления записывают тензор 2-го ранга для напряжений, а вместо скалярной функции Грина – тензорную функцию Грина 3-го ранга (повышение ранга на единицу происходит в связи с тем, что тензорная функция Грина связывает вектор возбуждающей силы в одной точке, т. е. тензор 1-го ранга с тензором 2-го ранга для напряжений в другой точке).

2.4.3. Метод нулевого поля. Изложенный выше метод Т-матриц основан на соединении уравнения для внутренней области с разложением поля в ряд по некоторой системе волновых функций. На этой же идее основан и метод нулевого поля, подробно исследованный в работе [76]. Название метода (от англ. *null–field method*) связано с тем, что в его основу положение соотношение (2.78), согласно которому поле обращается в нуль, если точка наблюдения M переходит во внутреннюю область. Заметим, что метод Т-матриц и метод нулевого поля похожи. Метод Т-матриц иногда называют методом нулевого поля. Различие между ними состоит в том, что в методе Т-матриц вычисляют сразу внешнее поле, а в методе нулевого поля – сначала определяют коэффициенты разложения для поля на поверхности.

Обратимся снова к уравнению Гельмгольца для полного поля (2.78). Будем считать, что точка наблюдения r_1 находится внутри области.

Для акустически мягких и жестких тел, на поверхности которых выполняются условия $p|_S = 0$ и $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S = 0$, соответственно, из этого уравнения получим:

$$\int_S G(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} dS = p_0(\vec{r}_1); \tag{2.93}$$

$$\int_S p(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial n} dS = -p_0(\vec{r}_1). \tag{2.94}$$

Неизвестными функциями в этих уравнениях являются распределения нормальной производной звукового давления (пропорциональной нормальной составляющей колебательной скорости) и звукового давления (пропорциональной нормальной составляющей колебательной скорости) и звукового давления на поверхности для акустически мягких и жестких тел соответственно.

Будем считать, что точка $\vec{r}_1$ лежит внутри поверхности S_2, целиком находящейся внутри тела. В этом случае $r_1 < r$ и справедливо разложение функции Грина в виде ряда (2.83). Рассмотрим уравнение (2.84) для акустически мягкого тела и представим неизвестную функцию $\partial p(r)/\partial n$ на поверхности в виде ряда (2.85). Подставив в уравнение (2.93) разложения (2.75), (2.83) и (2.85), получим соотношения (2.86), которые можно рассматривать как бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов x_q. Решив численно эту систему, получим распределение колебательной скорости на поверхности, а затем по формулам (2.78), (2.79) [с учетом того, что $p(\vec{r})|_S = 0$] и поле в любой точке во внешней области.

Аналогичным образом для акустически жесткой поверхности вместо (2.85) следует использовать разложение

$$p(\vec{r}) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q \psi_q(\beta). \tag{2.95}$$

Подставив в уравнение (2.78) ряды (2.75), (2.83) и (2.95), получим систему (2.86) с коэффициентами

$$Q_{mq} = -\frac{i}{4} \int_S f_2 \psi_q(\beta) \exp(-im\beta) dS. \tag{2.96}$$

После этого поле рассеяния определяется из уравнения (2.78) с учетом того, что $\partial p(\vec{r})/\partial n|_S = 0$.

Если поверхность является импедансной, то на поверхности S будет выполняться условие $p = -\frac{Z}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$. Подставим его в выражение (2.78),

считая, что $\vec{r}_1$ находится внутри S. Тогда

$$\int_S \left(\frac{Z}{i\omega\rho} \frac{\partial G}{\partial n} + G \right) \frac{\partial p}{\partial n} dS = p_0(\vec{r}_1) . \qquad (2.97)$$

Используем разложение (2.83) и (2.85). В результате получим систему уравнений вида (2.86) с коэффициентами

$$Q_{mq} = \frac{i}{4} \int_S \left[\frac{Z}{i\omega\rho} f_2 + H_m^{(1)}(kr) \right] \psi_q(\beta) \exp(-im\beta) dS. \qquad (2.98)$$

В частном случае акустически мягкого тела $Z = 0$ и получаем коэффициенты Q_{mq}, определяемые выражением (2.87). Из формулы (2.98) нельзя получить предельный переход к акустически жесткому телу, полагая $Z = \infty$. Поэтому для тела, близкого к акустически жесткому, удобней использовать другую форму, подставив в выражение (2.78) значение $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{i\omega\rho}{Z} p$. Тогда вместо уравнения (2.97) получим

$$\int_S \left(\frac{\partial G}{\partial n} + G \frac{i\omega\rho}{Z} \right) p dS = -p_0(\vec{r}_1) .$$

Используя разложения (2.83) и (2.95), получим систему (2.86) с коэффициентами

$$Q_{mq} = -\frac{i}{4} \int_S \left[f_2 + \frac{i\omega\rho}{Z} H_m^{(1)}(kr) \right] \exp(-im\beta) \psi_q(\beta) dS.$$

При $Z \to \infty$ это выражение переходит в формулу (2.96).

2.4.4. Применение методов Т-матриц и нулевого поля к задаче об излучении звука поверхностью произвольной формы. В этом случае они представляют собой способы решения уравнения (2.33) для точки наблюдения, находящейся во внутренней области. Применительно к двумерной задаче, используя обозначения, данные на рис. 2.12, перепишем это соотношение следующим образом:

$$\int_S p(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_1) dS = \int_S \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} G(\vec{r}, \vec{r}_1) dS. \qquad (2.99)$$

Для задачи об излучении звука можно записать $\partial p(\vec{r})/\partial n = i\omega\rho v_n(\beta)$, где $v_n(\beta)$ – известная нормальная составляющая колебательной скорости. Подставив в выражение (2.99) разложения (2.83), (2.95)

и соотношение $\alpha = \varphi - \beta$, получим систему уравнений относительно x_q:

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q U_{mq} = c_m; \quad m = -\infty \ldots \infty, \tag{2.100}$$

где

$$U_{mq} = \int_S f_2 \exp(-im\beta)\psi_q(\beta)dS; \tag{2.101}$$

$$c_m = i\omega\rho \int_S v_n(\beta) H_m^{(1)}(kr) \exp(-im\beta)dS.$$

Решив систему (2.100), найдем коэффициенты x_q, а следовательно, распределение звукового давления на поверхности тела.

Если необходимо найти звуковое давление вне описанной вокруг тела окружности, то можно определить сразу коэффициенты разложения ряда

$$p(\vec{r}_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m^{(1)}(kr_1)\exp(im\varphi), \tag{2.102}$$

используя представление о Т-матрице без вычисления промежуточных коэффициентов x_q. Для этого используем интегральное соотношение для внешней области

$$p(\vec{r}_1) = \int_S \left[p(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}_1)}{\partial n} - G(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial p(\vec{r})}{\partial n} \right] dS \quad (\vec{r}_1 \text{ вне } S)$$

и подставим в него разложение (2.83). Это даст коэффициенты ряда (2.102) в виде

$$b_m + d_m = \frac{i}{4} \int_S p(\vec{r}) f_1 \exp(-im\beta)dS, \tag{2.103}$$

где

$$d_m = \frac{i}{4} i\omega\rho \int_S v_n(\beta) J_m(kr) \exp(-im\beta)dS - \tag{2.104}$$

известные коэффициенты.

Представим звуковое давление на поверхности в виде ряда (2.95). Тогда

$$b_m + d_m = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q R_{mq}; \quad m = -\infty \ldots \infty, \tag{2.105}$$

где

$$R_{mq} = \frac{i}{4} \int_S \psi_q(\beta) f_1 \exp(-im\beta)dS.$$

Системы уравнений (2.100) и (2.105) можно записать в виде матричных соотношений $U^T X = C$, $B + D = R^T X$. Индекс T по-прежнему означает транспонированную матрицу, X, C, B, D – матрицы-столбцы, образованные из соответствующих коэффициентов. Из первого соотношения следует $X = (U^T)^{-1} C$, где $(U^T)^{-1}$ – обратная транспонированная матрица. Окончательно получим:

$$B = R^T (U^T)^{-1} C - D. \qquad (2.106)$$

Убедимся в том, что в частном случае кругового цилиндра последнее выражение переходит в хорошо известные формулы. Выбрав $\psi_q(\beta) = \exp(iq\beta)$, получим, что матрицы U и R являются диагональными с элементами $U_{mm} = 2\pi k a H_m^{(1)\prime}(ka)$, $R_{mm} = \frac{i}{4} 2\pi k a J_m'(ka)$. Тогда $(U_{mm}^T)^{-1} = [2\pi k a H_m^{(1)\prime}(ka)]^{-1}$;

$$c_m = i\omega\rho H_m^{(1)}(ka) a \int_0^{2\pi} v_n(\beta) \exp(-im\beta) d\beta;$$

$$d_m = i\omega\rho \frac{i}{4} a J_m(ka) \int_0^{2\pi} v_n(\beta) \exp(-im\beta) d\beta.$$

Подставив эти соотношения в формулу (2.106), с учетом формулы (5.11) получим

$$b_m = \frac{i\rho c}{2\pi H_m^{1\prime}(ka)} \int_0^{2\pi} v_n(\beta) \exp(-im\beta) d\beta,$$

что приводит к выражению (18.18) в работе [63].

2.4.5. Замечания по поводу методов Т-матриц и нулевого поля. Сходимость разложений неизвестных функций видов (2.85) и (2.95), а следовательно, и порядок системы уравнений определяются не только волновыми размерами, но и формой тела. От формы тела также зависит и устойчивость численного решения системы. Для тел (см. п. 2.4.2) формой, не очень сильно отличающейся от круговой, преобладающими должны быть диагональные члены матрицы. Решение системы при этом будет достаточно хорошим. Для вытянутых тел в двумерном случае в разложениях (2.80), (2.83) предпочтительнее вместо цилиндрических функций использовать функции эллиптического цилиндра, а в трехмерном – сфероидальные функции.

Для достаточно больших m численные значения цилиндрических (или сферических – в трехмерном случае) функций могут выходить за разрядную сетку применяемой вычислительной машины. Для устранения этого явления полезно ввести замену этих функций другими, выделить сильно растущие при увеличении m множители и затем сократить их в левой и правой частях системы уравнений.

Если имеется априорное представление о характере распределения поля на поверхности, то целесообразно ввести в разложения некоторый весовой множитель $w(\vec{r})$, т. е. считать, что

$$\psi(\vec{r}) = w(\vec{r}) \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q \psi_q(\beta),$$

где $\psi(\vec{r})$ означает либо p, либо $\partial p/\partial n$ на поверхности.

Особенно полезно вводить такой множитель при наличии у тела углов или острых кромок, вблизи которых распределение звукового давления или колебательной скорости на поверхности тела может сильно изменяться. Например, известно, что при дифракции на акустически мягкой и бесконечно тонкой полуплоскости колебательная скорость вблизи ребра ведет себя как $1/\sqrt{x}$, где x – расстояние до ребра. Поэтому при решении задачи о рассеянии звука на акустически мягкой полосе шириной $2a$ следует ввести функцию $w(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, учитывающую характер поведения поля вблизи кромок [148]. При рассеянии на теле прямоугольной формы вблизи углов в качестве такой функции надо взять $x^{-1/3}$, где x – расстояние до вершины прямого угла, что следует из условия Мейкснера (см. гл. 3).

Система функций ψ_q может быть выбрана различными способами. Это могут быть тригонометрические или экспоненциальные функции вида $\cos(q\beta)$, $\sin(q\beta)$ или $\exp(iq\beta)$ (разложения в ряды Фурье), ортогональные полиномы или те же функции, по которым выполняется разложение в ряд функции Грина, например вида $J_q(kr)\exp(iq\beta)$. В ряде работ по методу Т-матриц [99] используют последние выражения, хотя их преимущества перед обычным разложением в ряд Фурье по функциям $\exp(iq\beta)$ не кажутся очевидными.

Каких-либо сравнений эффективности (т. е. точности, затрат машинного времени, устойчивости к малым отклонениям входных и промежуточных результатов от точных) описанных в этой главе методов до настоящего времени не проводилось.

В работе [140] проведено сравнение эффективности метода Т-матриц и метода, связанного с решением интегрального уравнения типа (2.18) применительно к задаче о дифракции на жестком сфероиде. Полученные результаты свидетельствуют о том, что при малом удлинении тела метод Т-матриц дает лучшую сходимость, чем метод интегральных уравнений. При увеличении удлинения сходимость и точность метода Т-матриц значительно ухудшаются. Это вызвано тем, что матрицы становятся плохо обусловленными и точность вычислений при их обращении уменьшается. В то же время метод интегральных уравнений почти нечувствителен к форме тела. Для улучшения сходимости и устойчивости решения методом Т-матриц для сильно вытянутых тел можно использовать в разложениях полей вместо сферических сфероидальные функции.

2.5. Сопротивление излучения цилиндра конечной высоты

2.5.1. Выбор расчетной модели. Решение задачи об излучении звука цилиндром конечной высоты имеет ряд приложений в акустике. Кроме того, конечный цилиндр является удобной моделью для оценки

вычислительных методов, так как предельные случаи высокого и низкого (круглая пластина) кругового цилиндра допускают аналитические решения.

Работы, относящиеся к данной задаче, можно разделить на две группы. В одних излучатель изменяют похожим на него излучателем другой формы, для которой можно применять аналитические методы, в других даны численные методы, использующие интегральное уравнение Гельмгольца [88, 95, 136, 137].

В случае, если выполняется соотношение $h > \lambda/2$ и цилиндр достаточно высокий, т. е. $h > a$ (h – полувысота цилиндра, a – радиус), а колебательная скорость торцов невелика, удобной моделью конечного цилиндра является цилиндр, дополненный вдоль образующей полубесконечными жесткими экранами.

Решение этой задачи приводит к простым формулам для звукового давления в дальней зоне (см. [63], с. 151). Представление сплошного цилиндра шаровым слоем и полого цилиндра, заполненного средой и открытого с торцов тонким сферическим слоем [16], приближенно возможно лишь для малой высоты цилиндра. В качестве приближенных моделей для высоких $h \gg a$ и низких $h \ll a$ цилиндров иногда используют вытянутые и сплющенные сфероиды, хотя сплющенный сфероид плохо имитирует низкий цилиндр, излучающий узкой боковой поверхностью, так как кривизна боковых кромок сфероида оказывается намного больше кривизны боковой поверхности цилиндра.

Для замены одного излучателя другим требуется ввести некие принципы эквивалентности. Естественное требование – равенство объемных колебательных скоростей – оказывается недостаточным для выбора геометрических размеров эквивалентного излучателя, поэтому его размеры получаются более или менее произвольными. Отметим ошибочную работу [149], воспроизведенную в книге [49]. В ней использовано разложение по расходящимся сферическим волнам для поверхности, не удовлетворяющей гипотезе Рэлея. Несмотря на это, значения активной составляющей импеданса излучения, рассчитанные в этой работе при $ka = 1;\ 2;\ 5$ для цилиндра размерами $h/a > 2$, близки к реальным, хотя и несколько занижены. Это объясняется тем, что активная составляющая импеданса получена расчетом полной акустической мощности в дальней зоне с учетом вклада от торцов, колеблющихся с некоторой скоростью, пропорциональной нормальной производной потенциала, описываемого упомянутым разложением в ряд, хотя по исходным данным скорость на торцах должна быть равна нулю.

Ниже приведены результаты, полученные в работе [25], основанные на численном решении интегрального уравнения Гельмгольца (2.17). Рассмотрим конечный цилиндр (рис. 2.13) с заданным осесимметричным распределением колебательной скорости на его поверхности и на торцах. Без существенных усложнений решается также и смешанная задача, когда на одной части поверхности задана колебательная скорость, а на другой – звуковое давление.

Несимметричные относительные плоскости $z = 0$ распределения скорости и звукового давления представлялись в виде суммы симметричной

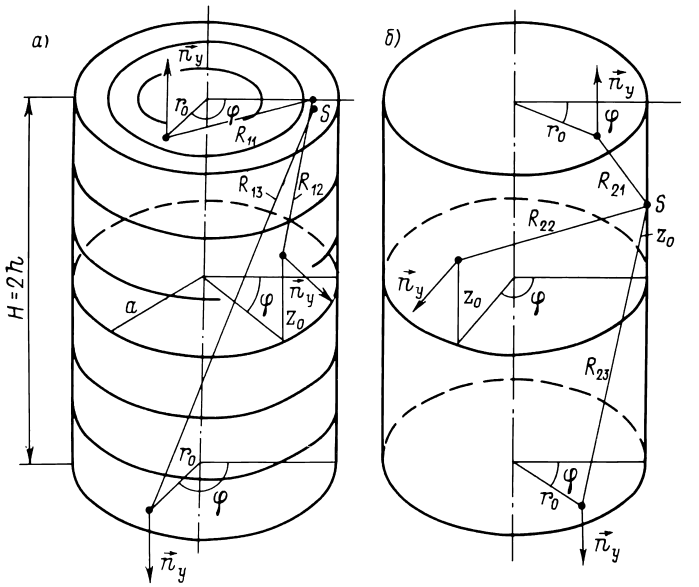


Рис. 2.13. Цилиндр конечной высоты: *а*, *б* – точки наблюдения на верхнем торце и на боковой поверхности соответственно

и антисимметричной составляющих, что позволяло в два раза уменьшить порядок системы уравнений. Поверхность цилиндра разбивалась на $2N$ полосок и колец (рис. 2.13, *а*), где $N = n_1 + n_2$, n_1 и n_2 – число разбиений на торце и половине боковой поверхности соответственно. В середине каждого кольца и полоски выбиралась узловая точка. Считая звуковое давление и колебательную скорость внутри каждой полоски неизменными, из интегрального уравнения (2.18) получим систему уравнений (2.23), где вместо N следует взять $2N$.

Пусть точка наблюдения с номером s, где $1 \leqslant s < n$, находится на верхнем торце (см. рис. 2.13, *а*). В этом случае в функции Грина $G(\vec{z}_s, \vec{y}) = \exp(ikR)/(4\pi R)$ в качестве R надо брать значения R_{11}, R_{12}, R_{13} в зависимости от того, где находится точка интегрирования. Поэтому сумму в системе (2.23) надо разбить на три части, соответствующие положениям точки интегрирования на верхнем торце, боковой поверхности и нижнем торце, причем $R_{11} = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi)^{1/2}$; $R_{12} = [r^2 + a^2 - 2ra\cos\varphi + (h - z_0)]^{1/2}$; $R_{13} = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi + H^2)^{1/2}$. Для указанных областей получим: $\partial G_{11}/\partial n_y = 0$;

$$\frac{\partial G_{12}}{\partial n_y} = \frac{\partial G_{12}}{\partial a} = \frac{\exp(ikR_{12})}{4\pi R_{12}^2}(ikR_{12} - 1)\frac{\partial R_{12}}{\partial a},$$

где $\partial R_{12}/\partial a = (a - r\cos\varphi)/R_{12}$;

$$\frac{\partial G_{13}}{\partial n_y} = \frac{\exp(ikR_{13})}{4\pi R_{13}^2}(ikR_{13} - 1)\frac{\partial R_{13}}{\partial n_y}.$$

Для вычисления $\partial R_{13}/\partial n_y$ следует найти изменения расстояния R_{13} при перемещении точки, в которой вычисляется производная, в отрицательном направлении оси z, т. е. взять

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\partial}{\partial \xi} [r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi + (H + \xi)^2]^{1/2} = H/R_{13}.$$

Таким образом получаются первые n_1 уравнений системы. Для получения последующих n_2 уравнений поместим точку наблюдения с номером s на боковую поверхность, причем $n_1 + 1 \leqslant s \leqslant n_2$. Тогда в качестве расстояний R в функции Грина следует взять R_{21}, R_{22}, R_{23}, разбив сумму в системе (2.23) на три части соответственно. Нормальные производные рассчитывают так, как указано выше. В частности, для вычисления $\partial R_{22}/\partial n_y$ следует взять $\lim_{\xi \to 0} [a^2 + (a + \xi)^2 - 2a(a + \xi)\cos \varphi + (z - z_0)^2]^{1/2} = a(1 - \cos \varphi)/R_{22}$. В результате получится $n_1 + n_2$ уравнений относительно такого же количества неизвестных значений. Коэффициенты матрицы в явном виде здесь не приведены из-за их громоздкости.

При вычислении некоторых коэффициентов, реализуемых двойными интегралами (2.24) и (2.25) по площади полосок или колец, встречаются особенности подынтегральных выражений. Для вычисления интегралов узловая точка окружалась эллипсом и область, охватываемая им, исключалась из промежутка интегрирования, что соответствовало вычислению интегралов в смысле главного значения. Численными экспериментами были установлены следующие значения полуосей эллипсов, необходимые для вычисления с заданной точностью: $e_r = 0{,}005a$; $e_\varphi = 0{,}005\pi$; $e_z = (0{,}0025 - 0{,}005)h$. Интегралы вычислялись методом Гаусса. Время расчета определялось в основном временем расчета матричных элементов.

Если распределение скоростей v_q ($q = 1, 2, \ldots, N$) известно на всей поверхности, то правые части можно вычислить непосредственно по формулам (2.25, *г*), если же, например, на полоске или кольце с номером q скорость v_q неизвестна, а задано звуковое давление p_q (смешанная задача), то можно представить соответствующий столбец матрицы коэффициентов системы со столбцом правой части. В этом случае решение системы уравнений получится в виде $p_1, p_2, \ldots, p_{q-1}, v_q, p_{q+1}, \ldots, p_N$. Ряд элементов матриц обладает симметрией относительно перестановок номеров элементов и их сдвига. Учет симметрии позволяет сократить время вычислений. Импеданс излучения определяется по формуле

$$Z_s = \frac{1}{v_0^2} \int_S p(\vec{r}) v^*(\vec{r}) dS,$$

где v_0 – амплитуда колебательной скорости в некоторой точке на поверхности цилиндра, называемой точкой приведения (см. гл. 1).

Излучаемая акустическая мощность при этом определяется в виде $W = v_0^2 \operatorname{Re} Z_s/2$. Взаимный импеданс, характеризующий взаимодействие по полю между участками с номерами l и m, находится по формуле

$$Z_{lm} = \frac{1}{v_{0m} v_{0l}^*} \int_{\Delta S_l} p_m(\vec{r}) v_l^*(\vec{r}) dS,$$

где $p_m(\vec{r})$ – звуковое давление, возбуждаемое колебаниями участка с номером m на заторможенной поверхности ΔS_l участка с номером l; v_{0m} и v_{0l}^* – амплитуды колебательной скорости в точках приведения.

2.5.2. Излучение звука цилиндром с акустически жесткими торцами. Введем безразмерные коэффициенты импеданса излучения по формуле $\alpha - i\beta = Z_s/(\rho c S_{\text{из}})$, где $S_{\text{из}}$ – излучающая часть поверхности, на которой $vp \neq 0$. Определим также нормированное звуковое давление $p' = p/(\rho c v_0)$, где v_0 – скорость в центре боковой поверхности, а для цилиндра, излучающего торцами, – в центре торца. Для цилиндра, излучающего боковой поверхностью, скорость считалась постоянной, а на торце – равной нулю. Для цилиндра, излучающего торцом, скорость на торце считалась постоянной, а на боковой поверхности – равной нулю.

В табл. 2.3 показаны результаты расчетов коэффициентов α и β при различном числе разбиений поверхности. Из таблицы видно, что для

Таблица 2.3. **Результаты расчетов импеданса $\alpha - i\beta$ для цилиндра $h/a = 2$ с жесткими торцами в зависимости от числа разбиений, характеризующие сходимость решения**

$n_1 + n_2$	$ka = 1$	$ka = 2$	$n_1 + n_2$	$ka = 1$	$ka = 2$
1 + 1	$1{,}29 - i \cdot 0{,}800$	$3{,}49 + i \cdot 0{,}075$	4 + 7	$0{,}732 - i \cdot 0{,}479$	$0{,}895 - i \cdot 0{,}309$
2 + 2	$0{,}756 - i \cdot 0{,}507$	$1{,}005 - i \cdot 0{,}189$	5 + 10	$0{,}730 - i \cdot 0{,}477$	$0{,}885 - i \cdot 0{,}308$
2 + 3	$0{,}748 - i \cdot 0{,}490$	$0{,}960 - i \cdot 0{,}297$	6 + 12	$0{,}729 - i \cdot 0{,}477$	$0{,}881 - i \cdot 0{,}307$
3 + 5	$0{,}736 - i \cdot 0{,}481$	$0{,}912 - i \cdot 0{,}310$			

$ka = 1$ уже при $N = 4$ значения импеданса с практической точностью мало отличаются от предельных. Для $ka = 2$ это происходит при $N = 8$.

Для оценки абсолютных погрешностей результатов расчетов [137] решалась вспомогательная задача. Распределение нормальной составляющей колебательной скорости на поверхности задавалась в виде соответствующего полю точечного источника, расположенного в центре полностью звукопрозрачного цилиндра. После решения интегрального уравнения найденные значения звукового давления сравнивались с известным точным значением звукового давления на этой поверхности, создаваемого точечным источником. Максимальная погрешность при этом не превышала 3 % при $ka < 2$ и 4 % при $ka < 4$ для $N = 18$.

Рассмотрим предельный случай высокого $h/a \gg 1$ цилиндра. Из табл. 2.4 следует, что при $h/a = 3$ различие сопротивлений излучения конечного и бесконечного цилиндров еще заметны.

Таблица 2.4. **Импеданс излучения длинных цилиндров с жесткими торцами**

ka	$h/a = 3$	$h/a = 10$	$h/a = \infty$
0,2	$0{,}108 - i \cdot 0{,}312$	$0{,}252 - i \cdot 0{,}356$	$0{,}288 - i \cdot 0{,}334$
0,4	$0{,}336 - i \cdot 0{,}474$	$0{,}461 - i \cdot 0{,}409$	$0{,}496 - i \cdot 0{,}395$
0,6	$0{,}549 - i \cdot 0{,}492$	$0{,}618 - i \cdot 0{,}399$	$0{,}635 - i \cdot 0{,}389$
1,0	$0{,}750 - i \cdot 0{,}372$	$0{,}789 - i \cdot 0{,}337$	$0{,}792 - i \cdot 0{,}333$
1,5	$0{,}852 - i \cdot 0{,}336$	$0{,}916 - i \cdot 0{,}263$	$0{,}882 - i \cdot 0{,}266$

Импеданс излучения поршня конечной высоты $h/a = 0{,}1$ при симметричном (относительно средней плоскости) возбуждении мало отличается от импеданса для бесконечно тонкого пульсирующего поршня (табл. 2.5).

Таблица 2.5. **Импеданс излучения цилиндра, излучающего торцами**

ka	Пульсирующий поршень $h/a = 0$	Цилиндр, излучающий торцами, $h/a = 0{,}1$	ka	Пульсирующий поршень, $h/a = 0$	Цилиндр, излучающий торцами $h/a = 0{,}1$
0,2	$0{,}0199 - i \cdot 0{,}168$	$0{,}0201 - i \cdot 0{,}162$	2,0	$1{,}033 - i \cdot 0{,}535$	$0{,}002 - i \cdot 0{,}564$
0,5	$0{,}120 - i \cdot 0{,}397$	$0{,}120 - i \cdot 0{,}381$	2,5	$1{,}131 - i \cdot 0{,}322$	$1{,}130 - i \cdot 0{,}348$
1,0	$0{,}423 - i \cdot 0{,}647$	$0{,}395 - i \cdot 0{,}610$	3,0	$1{,}092 - i \cdot 0{,}159$	$1{,}103 - i \cdot 0{,}158$
1,5	$0{,}774 - i \cdot 0{,}680$	$0{,}723 - i \cdot 0{,}661$	4,0	$0{,}941 - i \cdot 0{,}122$	$1{,}940 - i \cdot 0{,}0986$

На рис. 2.14 показан импеданс излучения для трех различных моделей: цилиндра, дополненного бесконечно длинными жесткими экранами,

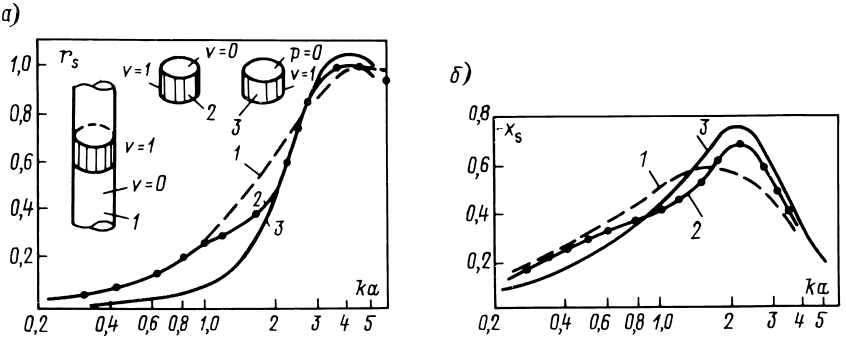


Рис. 2.14. Сравнение импедансов излучения для трех моделей цилиндрического излучателя: вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части

1 – цилиндр в полубесконечных жестких цилиндрических экранах; *2, 3* – цилиндры с жесткими и мягкими торцами соответственно. Кривые *1* ... *3* соответствуют моделям *1* ... *3*

цилиндра без экранов при жестких торцах и то же при мягких торцах; $h = 0{,}5$. При $ka < 1$ кривые *1* и *2* практически совпадают. Это объясняется тем, что при малом волновом радиусе дифракция на жестком экране оказывается незначительной, а объемные скорости колебаний для всех моделей являются одинаковыми. Для цилиндра с акустически мягкими торцами вещественная составляющая импеданса намного меньше, чем у цилиндра с жесткими торцами, вследствие того, что на мягких торцах появляются участки с распределением колебательной скорости, противофазным по отношению к скорости на боковой поверхности.

Влияние высоты цилиндра на импеданс излучения можно проследить на рис. 2.15. При возрастании высоты активная составляющая импеданса излучения α увеличивается, однако даже при $h/a = 2{,}5$ при малых ka она оказывается значительно меньше, чем для цилиндра бесконечной высоты. Для бесконечного цилиндра $r_S = \mathrm{Re}\,[-H_0^{(1)}(ka)/H_1^{(1)}(ka)]$.

Мнимая часть импеданса характеризует присоединенную (соколеблющуюся) массу M_S. По определению $\mathrm{Im}\,Z_S = -i\omega M_S = i\rho c 2\pi a H x_S$, откуда следует, что $M_S = -M_0 2x_S/(ka)$, где $M_0 = \rho\pi a^2 H$ – масса вытесненной цилиндром жидкости. Из последнего соотношения и рис. 2.15 следует, что на низких частотах M_S может достигать примерно $3M_0$, что соответствует присоединенной массе пульсирующей сферы на низких частотах. При $ka = 1{,}5 \ldots 2$ присоединенная масса оказывается наибольшей для цилиндров средней высоты $h/a = 0{,}5 \ldots 0{,}75$ (кривые *5, 6, 7* на рис. 2.15, *б*). Ее значение при этом приблизительно равно M_0.

Интегральное уравнение Гельмгольца (см. п. 2.2.2) не дает однозначного решения, когда волновое число k равно одному из характеристических или критических чисел (определяющих резонансные частоты) объема среды, вытесняемого телом при граничном условии $p|_S = 0$ (среда в объеме с акустически мягкими стенками). Для конечного по высоте цилиндра набор соответствующих значений параметра ka определяется в виде

$$k_{mnq} = \sqrt{[\pi n a/(2h)]^2 + \alpha_{mq}^2}, \qquad (2.107)$$

где n, m, q – целые числа; α_{mq} – корень функции $J_m(\alpha_{mq}) = 0$.

Для случая азимутальной симметрии $m = 0$; $\alpha_{01}' = 2{,}405$; $\alpha_{02} = 5{,}520$ и т. д. При симметричном распределении скорости относительно плоскости $z = 0$ n нечетно, а при антисимметричном – четно. При $h/a \to \infty$ величина $k_{mnq}a \to \alpha_{mq}$, т. е. $ka = \alpha_{01}$ является минимальным критическим волновым размером. Для низких цилиндров ($h/a \ll 1$) критические волновые числа отодвигаются в область высоких частот. Если же $h/a > 1$, то в области $ka < 3$ встречаются одно или несколько критических волновых чисел. Численными экспериментами установлено, что при количестве разбиений, указанных выше, относительная погрешность в определении импеданса в интервале $k_{mnq}a \pm 0{,}3$ не превышает $5 \ldots 6\,\%$. При увеличении числа разбиений погрешность уменьшается, однако возрастает время расчета.

Главный максимум диаграммы направленности конечного цилиндра при излучении звука боковой поверхностью и жестких торцах может

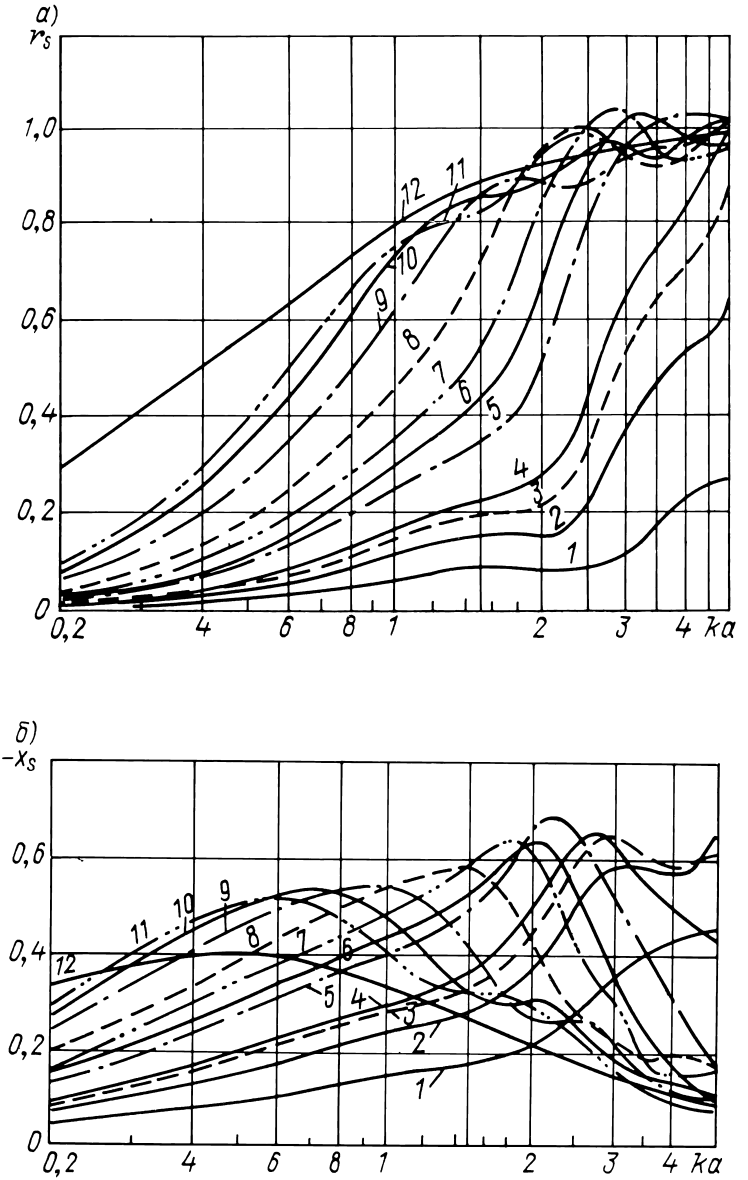


Рис. 2.15. Импедансы излучения для цилиндров различной высоты с жесткими торцами: вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части

Кривым *1 ... 12* соответствуют значения отношения $h/a = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}259;\ 0{,}33;\ 0{,}5;\ 0{,}62;\ 0{,}75;\ 1{,}0;\ 1{,}5;\ 2{,}0;\ 2{,}5;\ \infty$

быть направлен как в сторону оси, так и перпендикулярно к ней (рис. 2.16). Для короткого цилиндра, высота которого гораздо меньше диаметра (рис. 2.16, *а*), главный максимум направлен вдоль оси. В этом случае диаграммы близки к диаграммам излучения звука пульсирующим кольцом $|J_0(ka\sin\theta)|$. Здесь θ – угол, отсчитываемый от оси. При вытянутом вдоль оси цилиндре (рис. 2.16, *г*) максимум излучения направлен перпендикулярно к оси и диаграмма приближенно описывается диаграммой отрезка $|\sin A/A|$, где $A = kh\sin\beta$, β – угол, отсчитываемый от нормали к оси. Максимум может быть направлен перпендикулярно к оси и для сравнительно коротких цилиндров, если их высота достаточно велика по сравнению с длиной волны. Заметим, что значение $ka = 2{,}53$ (рис. 2.16, *в*) соответствует характеристическому значению, определяемому формулой (2.109) при $n = 1$, $h/a = 2$, $\alpha = 2{,}405$. Решение для этого случая получено в работе [129] с использованием переопределенных систем уравнений.

Рассмотрим зависимость звукового давления в дальнем поле (в направлении, перпендикулярном к оси цилиндра) от волнового радиуса при различных отношениях h/a (рис. 2.17). Звуковое давление пронормировано к значению p_0, представляющему аналогичную величину для цилиндра, дополненного жесткими полубесконечными цилиндрическими экранами по формуле (21.17) из работы [63]:

$$p_0 = -\frac{i\rho c v_0 H}{\pi\cos\theta H_1^{(1)}(ka\cos\theta)}\,\frac{\exp(ikR)}{R}\,\frac{\sin u}{u};\quad u = \frac{kH}{2}\sin\theta. \qquad (2.108a)$$

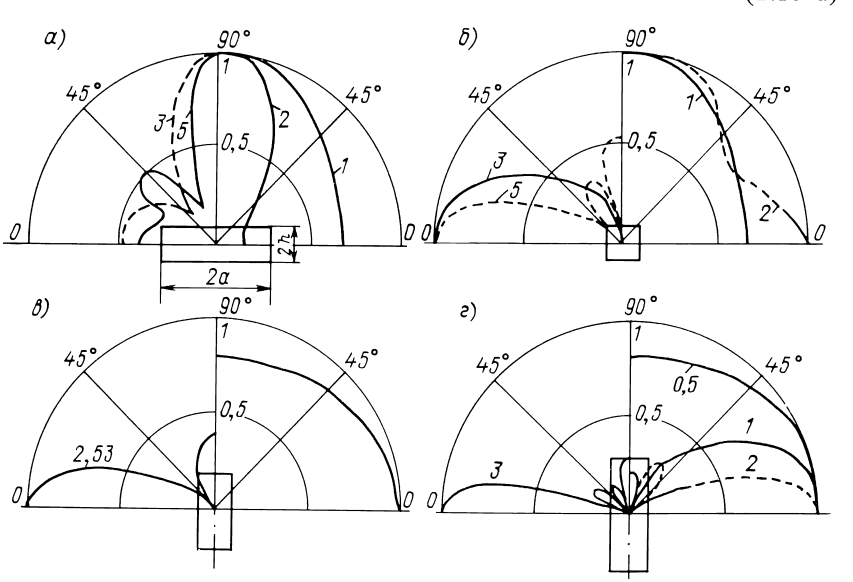


Рис. 2.16. Диаграммы направленности при излучении цилиндра боковой поверхностью и жестких торцах: *а* – $h/a = 0{,}3$; *б* – $h/a = 1$; *в* – $h/a = 2$; *г* – $h/a = 3$ (цифры на кривых – значения параметра ka)

Здесь θ – угол между направлением на точку наблюдения и нормалью к оси; R – расстояние от центра до точки наблюдения; $H = 2h$ – полная высота (в работе [63] она обозначена h). Тогда нормирующий множитель будет

$$|p_0| = \frac{\rho c v_0 H}{\pi R |H_1^{(1)}(ka)|} . \qquad (2.108б)$$

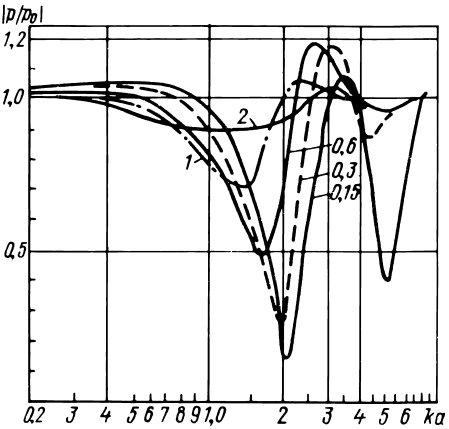


Рис. 2.17. Относительное звуковое давление в дальнем поле, излучаемое конечным цилиндром с жесткими торцами в направлении, перпендикулярном к оси. Давление пронормированно к значению, определяемому по формуле (2.108б). (Цифры на кривых – отношения h/a)

При малых и больших значениях ka относительное звуковое давление $|p/p_0|$ слабо отличается от единицы. При малых ka звук почти полностью огибает экраны и они мало влияют на звуковое поле. При значительном возрастании ka и фиксированном отношении h/a возрастает направленность излучения (см. рис. 2.16) и роль излучения вокруг торцов также уменьшается. Наибольшие отклонения отношения $|p/p_0|$ от единицы наблюдаются в области промежуточных значений $ka \approx 1 \ldots 3$. В этом случае появляется интенсивная интерференция волн, излучаемых передней и тыльной сторонами и распространяющихся вокруг торцов. При сложении этих волн в противофазе звуковое давление уменьшается. Жесткие акустически непрозрачные цилиндрические экраны препятствуют огибанию звука вокруг торцов и при указанных значениях ka существенно увеличивают звуковое давление. При весьма коротком цилиндре ($h/a = 0{,}15$) появляется уже ряд глубоких минимумов, соответствующих увеличению разности длин хода волн между передней и тыльной сторонами на значение, кратное длине волны.

2.5.3. Импеданс излучения цилиндра с акустически мягкими торцами. Рассмотрим цилиндрический излучатель с акустически мягкими торцами и равномерным распределением колебательной скорости по боковой поверхности. В этом случае можно использовать алгоритм, описанный в п. 2.5.1, считая известными звуковое давление на торце (равное нулю) и колебательную скорость на боковой поверхности. В системе алгебраических уравнений, вытекающих из интегрального уравнения, следует положить равными нулю все значения неизвестных коэффициентов, соответствующие звуковому давлению на торцах, и перенести из правой части в левую неизвестные члены, зависящие от колебательной скорости на торцах. Если n_1 и n_2 – число разбиений на торце и на половине боковой поверхности соответственно, причем $N = n_1 + n_2$, то решение системы уравнений получится в виде $v_1, v_2, \ldots, v_{n1}, p_{n1+1}, \ldots, p_N$.

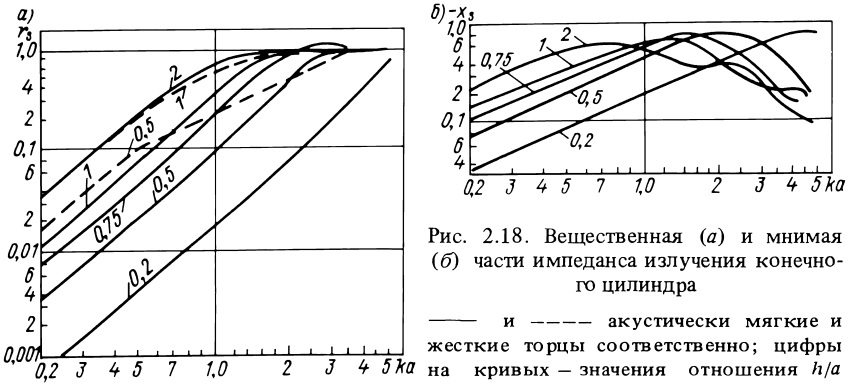


Рис. 2.18. Вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части импеданса излучения конечного цилиндра

—— и ———— акустически мягкие и жесткие торцы соответственно; цифры на кривых – значения отношения h/a

Сравнение активной составляющей импеданса цилиндра с акустически мягкими и жесткими торцами (рис. 2.18) показывает, что при малых волновых размерах мягкие торцы сильно уменьшают сопротивление излучения. Так, например, при $ka < 0{,}5$ и $h/a = 0{,}5$ сопротивление излучения уменьшается примерно в 5 раз. При $ka > 4$ влияние мягких торцов сказывается незначительно. Резкое уменьшение активной части сопротивления излучения на низких частотах объясняется наличием на акустически мягких торцах участков с распределением скорости в противофазе по отношению к скорости на боковой поверхности, в результате чего объемная скорость значительно уменьшается.

2.5.4. Импеданс излучения круглого поршневого излучателя конечной высоты. Описанный выше алгоритм численного решения интегрального уравнения Гельмгольца позволяет решить и другую практически важную задачу – определить импеданс излучения круглого поршневого излучателя конечной высоты. Для этого следует считать, что на торцовых поверхностях цилиндра (см. рис. 2.13) задана нормальная составляющая колебательной скорости, а на боковой поверхности полагаются равными нулю либо радиальная составляющая колебательной скорости, либо звуковое давление (акустически жесткая или акустически мягкая боковая поверхность соответственно). Импеданс излучения торца цилиндра определится при этом выражением

$$Z_т = \rho c S_т (r_s - i x_s) = \frac{1}{|v_т|^2} \int_{S_т} p(\vec{x}) v^*(\vec{x}) dS,$$

где $v_т$ – нормальная составляющая колебательной скорости в центре торца; $S_т = \pi a^2$. При этом определении полный импеданс излучения цилиндра будет равен $2Z_т$. Для того чтобы найти распределения звукового давления на поверхности торца, необходимо решить численно интегральное уравнение (2.18). При этом можно рассматривать два частных случая: колебательные скорости на противоположных торцах направлены в разные стороны (пульсирующий поршень) и в одну сторону (осциллирующий поршень).

Верхняя группа на рис. 2.19, *а* соответствует акустически жесткой боковой поверхности пульсирующего поршня. Кривые для $h/a = 0$ рассчитаны по формуле Рэлея (1.33) для импеданса излучения круглого пульсирующего поршня или, что то же самое, круглого поршня, расположенного в акустически жестком экране. Сравнение значений r_s для тонкого поршня и поршня конечной высоты показывает, что для промежуточных значений $ka \approx 0{,}5 \ldots 1$ увеличение высоты до $h/a = 2$ примерно вдвое уменьшает активную составляющую импеданса излучения. Это связано с тем, что при малой толщине каждая из сторон излучателя ведет себя, как поршень в бесконечном жестком экране, в то время как при большой толщине излучение каждой из сторон происходит приблизительно так же, как для поршня, расположенного на торце одностороннего цилиндрического экрана. Другими словами, при малой толщине две противоположные стороны излучателя, колеблющиеся синфазно, нагружают друг друга, а при увеличении расстояния между ними их взаимодействие ослабляется и сопротивление излучения падает.

При акустически мягкой боковой поверхности, как и следует ожидать, активная составляющая импеданса оказывается значительно меньшей, чем при акустически жесткой поверхности (при $ka < 1$ примерно на порядок). При $ka > 2$ независимо от высоты и типа боковой поверхности коэффициент r_s близок к единице.

Характер кривых реактивной составляющей импеданса (рис. 2.19, *б*) при изменении указанных выше параметров остается примерно постоянным.

Рассмотрим теперь импеданс излучения осциллирующего поршня конечной высоты с жесткой боковой поверхностью (рис. 2.20).

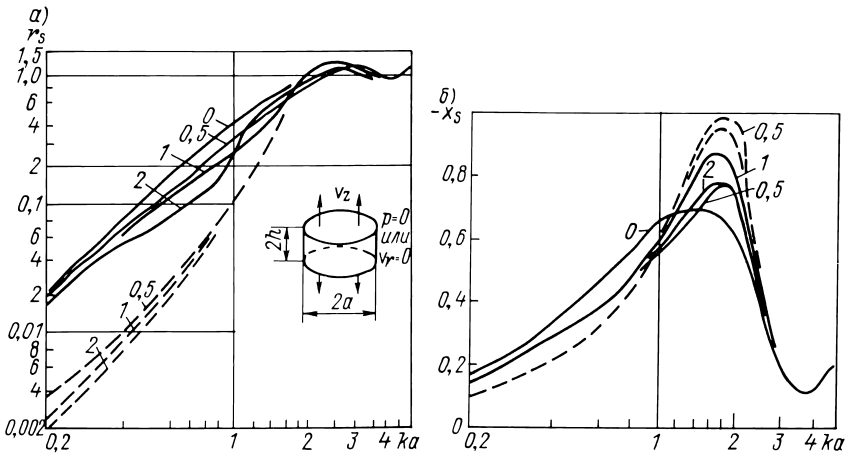


Рис. 2.19. Вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части импеданса излучения пульсирующего круглого поршня конечной высоты

—— и – – – акустически жесткая и мягкая боковые поверхности соответственно; цифры на кривых – значения параметра h/a

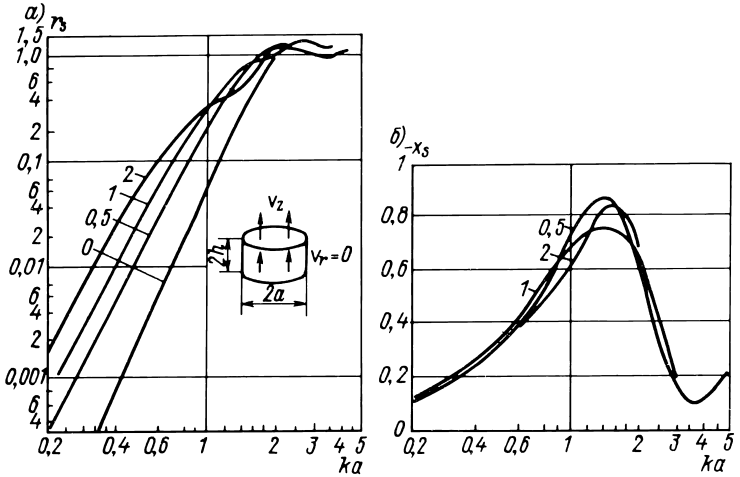


Рис. 2.20. Вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части импеданса излучения осциллирующего круглого поршня конечной высоты с акустически жесткой боковой поверхностью (цифры на кривых – значения параметра h/a)

В отличие от пульсирующего поршня в данном случае при увеличении высоты активная составляющая возрастает. Действительно, излучение осциллирующего поршня носит дипольный характер, а при увеличении высоты возрастает и расстояние между двумя противофазными источниками, расположенными на верхней и нижней излучающих поверхностях. В результате ослабляются явления, связанные со взаимной компенсацией звуковых давлений на этих поверхностях, и сопротивление излучения увеличивается.

2.5.5. Сопротивление излучения круглого поршня, расположенного в акустически мягком концентрическом экране конечной высоты. Решение задачи об излучении звука круглым поршнем нулевой толщины, вставленным в абсолютно жесткий концентрический экран, может быть получено методом разделения переменных в сплющенной эллипсоидальной системе координат и применением парных интегральных уравнений (см. п. 1.3.6). Однако задача для абсолютно мягкого экрана конечной толщины такими способами уже не решается. Ниже приведены результаты вычисления активной составляющей импеданса излучения для модели, показанной на рис. 2.21, полученные решением интегрального уравнения (2.18). Здесь b – радиус экрана.

При увеличении отношения b/a сопротивление излучения уменьшается и стремится к значению для поршня в акустически мягком экране (или для осциллирующего поршня), приведенному в п. 1.3. При уменьшении указанного отношения кривые стремятся к значениям, характерным для пульсирующего поршня (или поршня в акустически жестком экране). Эти значения показаны на рис. 2.21 стрелками вблизи оси ординат. Резкий спад кривых вблизи значения $b/a = 1$ свидетельствует

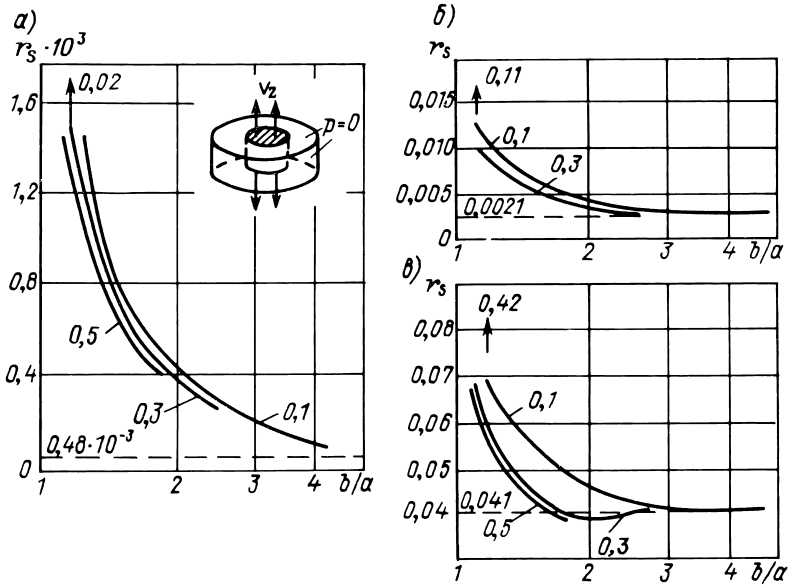


Рис. 2.21. Вещественная составляющая импеданса излучения пульсирующего поршня конечной высоты, расположенного в акустически мягком концентрическом экране при $ka = 0{,}2$ (*а*), $ka = 0{,}5$ (*б*); $ka = 1$ (*в*)

– – – – значения, приведенные в п. 1.3; цифры на кривых – значения h/a

о сильном влиянии на сопротивление излучения даже весьма узкого акустически мягкого экрана. Из сравнения графиков на рис. 2.21, *а* ... *в* следует, что при возрастании волнового размера ka роль экрана уменьшается. Все кривые на рис. 2.21 ограничены сверху и снизу значениями сопротивлений излучения соответственно для пульсирующего и осциллирующего излучателей с акустически мягкой боковой поверхностью.

2.6. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы

2.6.1. Излучение звука тонким осциллирующим телом. Решение на основе интеграла Гельмгольца. Рассмотрим излучение звука осциллирующим телом, толщина которого мала по сравнению с другими размерами и длиной волны. На поверхности задана нормальная составляющая колебательной скорости, причем на противоположных сторонах поверхности скорости совпадают. Возьмем сначала тело толщиной, не равной нулю (рис. 2.22), и запишем излучаемое звуковое давление в точке $\vec{x}$ в виде суммы интегралов Гельмгольца (2.11) по обеим сторонам поверхности:

$$p(\vec{x}) = \int\limits_{S_1} \left[p_1(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial p_1(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y +$$

$$+ \int\limits_{S_2} \left[p_2(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} - \frac{\partial p_2(\vec{y})}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] dS_y.$$

Здесь $p_1(\vec{y})$ и $p_2(\vec{y})$ – звуковые давления на поверхности на сторонах S_1 и S_2 соответственно.

Устремим толщину тела к нулю и учтем, что на противоположных сторонах образовавшейся поверхности внешние нормали будут направлены в разные стороны. Входящие в последние выражения производные $\partial G/\partial n_y$ можно записать в виде $\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\exp(ikR)}{4\pi R}\right]\frac{\partial R}{\partial n_y}$. На противоположных сторонах поверхности производные $\partial R/\partial n_y$ имеют разные знаки. Например, на рис. 2.22 при перемещении одного из концов отрезка R по нормали на участке S_1 длина отрезка уменьшается, а на участке S_2 – увеличивается. Поэтому для тонкой поверхности справедливо соотношение $\partial G/\partial n_y|_{S_1} = -\partial G/\partial n_y|_{S_2}$.

Будем считать, что положительное направление колебательной скорости совпадает с направлением нормали на стороне S_1. Тогда $\partial p(\vec{y})/\partial n_y|_{S_1} = -\partial p(\vec{y})/\partial n_y|_{S_2} = i\omega\rho v$. Учитывая эти соотношения, получим

$$p(\vec{x}) = \int\limits_{S_1} [p_1(\vec{y}) - p_2(\vec{y})] \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y. \qquad (2.109)$$

Таким образом, излучаемое звуковое давление определяется через разность давлений на противоположных сторонах поверхности. Устремим точку наблюдения $\vec{x}$ на поверхность в точку $\vec{z}$, предварительно взяв нормальную производную в этой точке. Тогда после выполнения предельного перехода аналогично тому, как это сделано в п. 2.2, получим

$$\frac{i\omega\rho}{2} v(\vec{z}) = \int\limits_{S} [p_1(\vec{y}) - p_2(\vec{y})] \frac{\partial^2 G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y \partial n_z} dS_y. \qquad (2.110)$$

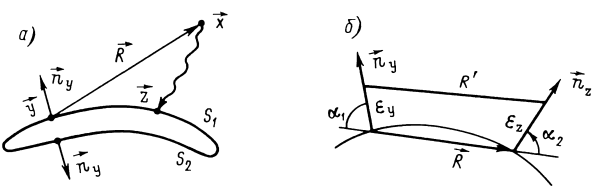


Рис. 2.22. К расчету излучения звука тонкой поверхностью: *а* – к составлению интегрального уравнения; *б* – к вычислению $\partial^2 R/\partial n_y \partial n_z$

Индекс 1, отмечающий одну из сторон поверхности, опущен. Заметим, что внести производную непосредственно под знак интеграла нельзя, так как особенность, содержащаяся в функции Грина, усилится настолько, что интеграл в точке $\vec{y} = \vec{z}$ разойдется. Поэтому интеграл надо понимать следующим образом. Вырежем в окрестности точки $\vec{z}$ небольшой участок ΔS, где существует особенность. Будем полагать, что в пределах этого участка разность $p_1(\vec{y}) - p_2(\vec{y})$ меняется мало и ее можно вынести из-под знака интеграла, приняв равной ее значению в точке $\vec{z}$. Тогда получим

$$\frac{i\omega\rho}{2} v(\vec{z}) = \int\limits_{S-\Delta S} [p_1(\vec{y}) - p_2(\vec{y})] \frac{\partial^2 G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y \partial n_z} dS_y + [p_1(\vec{z}) -$$

$$- p_2(\vec{z})] \frac{\partial}{\partial n_z} \int\limits_{\Delta S} \frac{\partial G(z, \vec{y})}{\partial n_y} dS_y. \qquad (2.111)$$

Интеграл по участку ΔS является конечной величиной и его значение определяется формулой (2.53).

Таким образом, получилось интегральное уравнение относительно неизвестной разности давлений на обеих сторонах поверхности. Входящее в первый из интегралов ядро уравнения можно записать после двукратного дифференцирования функции Грина:

$$\frac{\partial^2 G(\vec{z}, \vec{y})}{\partial n_y \partial n_z} = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R^2} \left[\frac{-k^2R^2 - 2ikR + 2}{R} \frac{\partial R}{\partial n_y} \frac{\partial R}{\partial n_z} + \right.$$

$$\left. + (ikR - 1) \frac{\partial^2 R}{\partial n_y \partial n_z} \right],$$

причем $\partial R/\partial n_y = -\cos(\vec{n}_y, \vec{R}) = \cos\alpha_1$; $\partial R/\partial n_z = \cos(\vec{n}_z, \vec{R}) = \cos\alpha_2$.

Для вычисления величины $\partial^2 R/\partial n_y \partial n_z$ приподнимем концы отрезка R над поверхностью (рис. 2.22, *б*) вдоль нормалей на малые расстояния ϵ_y и ϵ_z, продифференцируем и затем устремим ϵ_y и ϵ_z к нулю. Из рисунка видно, что

$$R' = [(R + \epsilon_y \cos\alpha_1 + \epsilon_z \cos\alpha_2)^2 + (\epsilon_y \sin\alpha_1 - \epsilon_z \sin\alpha_2)^2]^{1/2}.$$

После вычисления величины $\lim\limits_{\epsilon_y, \epsilon_z \to 0} \partial^2 R'/\partial\epsilon_y \partial\epsilon_z$ получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial n_x \partial n_y} = -\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \frac{1}{R}\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos(\vec{n}_y, \vec{R}) \cos(\vec{n}_z, \vec{R}) -$$

$$- \frac{1}{R} \cos(\vec{n}_y, \vec{n}_z).$$

Теперь ядро можно записать в явном виде в форме, представленной в работе [139]

$$\frac{\partial^2 G(\vec{z},\vec{y})}{\partial n_y \partial n_z} = -\frac{\exp(ikR)}{4\pi R^3}\left[(-k^2R^2 - 3ikR + 3)\cos(\vec{n}_y, \vec{R})\cos(\vec{n}_z, R) + \right.$$

$$\left. + (ikR - 1)\cos(\vec{n}_y, n_z)\right]. \qquad (2.112)$$

Используя соотношение (2.109), можно получить некоторое представление о звуковом поле даже без численного решения интегрального уравнения. Рассмотрим, например, излучение звука полым цилиндром, совершающим радиальные осесимметричные колебания. Торцы открыты и внутренняя полость свободно сообщается с внешней средой (рис. 2.23). Будем искать поле в удаленной точке с координатами $x_1, 0, z_1$, лежащей в плоскости xz. Тогда $R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y^2 + (z - z_1)^2}$, где $x_1 = R_0 \times$ $\times \cos\theta$; $x_2 = a\cos\varphi$; $z = R_0 \sin\theta$. Следовательно,

$$R = R_0\left[1 - 2\left(\frac{a}{R_0}\cos\theta\cos\varphi - \frac{z_2}{R_0}\sin\theta\right) + \frac{a^2 + z_2^2}{R_0^2}\right]^{1/2}.$$

Полагая, что $R_0 \gg a$, h и $kR_0 \gg 1$, получим $R \approx R_0 - a\cos\theta\cos\varphi -$ $- z_2 \sin\theta$.

Отсюда следует: $\partial R/\partial n_y = \partial R/\partial a = -\cos\theta\cos\varphi$;

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{(ikR - 1)}{4\pi}\frac{\exp(ikR)}{R^2}\frac{\partial R}{\partial n_y} \approx -\frac{ik}{4\pi}\frac{\exp(ikR)}{R}\cos\theta\cos\varphi.$$

Теперь получим

$$p(R_0,\theta) = -\frac{ika\cos\theta}{4\pi}\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\int_{-h}^{h}[p_1(z_2) - p_2(z_2)] \times$$

$$\times \int_0^{2\pi}\exp(-ika\cos\theta\cos\varphi -$$

$$- ikz_2\sin\theta)\cos\varphi\, d\varphi\, dz_2.$$

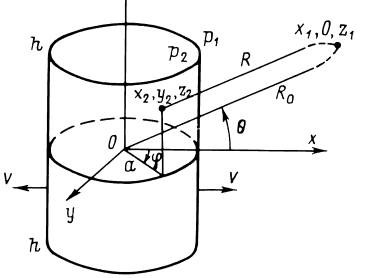


Рис. 2.23. Система координат в задачах об излучении звука полым конечным цилиндром

С учетом того, что

$$\int_0^{2\pi}\exp(-ika\cos\theta\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi =$$

$$= -2\pi i J_1(ka\cos\theta),$$

получим звуковое давление в дальнем поле

$$p(R_0,\theta) = -\frac{\mu}{2}\cos\theta \times$$

$$\times J_1(ka\cos\theta)\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\int_{-h}^{h}[p_1(z_2)-p_2(z_2)]\exp(-ikz_2\sin\theta)dz_2,$$

где $\mu = ka$.

Рассмотрим частный случай $kh < 1$. Тогда значение интеграла мало зависит от угла θ и характеристику направленности $D(\theta)$ можно записать, пронормировав давление к его значению при $\theta = 0$, т. е.

$$D(\theta) \approx |\cos\theta J_1(\mu\cos\theta)/J_1(\mu)|, \quad kh \gg 1. \tag{2.114}$$

Последнее выражение можно получить из следующих простых рассуждений. Представим цилиндр с бесконечно тонкой стенкой как предельный случай цилиндра со стенкой, имеющей конечную толщину Δa . Так как колебательные скорости на внешней и внутренней поверхностях направлены в любой момент времени в одну и ту же сторону, то, если, например, на внешней поверхности в данный момент сжатие среды, на внутренней – разрежение. Поэтому излучение звука при осциллирующей поверхности можно представить в виде суммы полей излучения двух противофазных пульсирующих полей радиусами $a + \Delta a$ и a . Поскольку характеристика направленности пульсирующего кольца есть $J_0(ka\cos\theta)$, общее воздействие будет $J_0[k(a+\Delta a)\cos\theta] - J_0(ka\times\times\cos\theta)$. При $\Delta a \to 0$ получим $\partial J_0(ka\cos\theta)/\partial a$, что с точностью до постоянного множителя совпадает с выражением (2.114).

Если кроме условия $kh < 1$ выполняется условие $ka < 1$, то из выражения (2.114) получим

$$D(\theta) \approx \cos^2\theta; \quad ka < 1, kh < 1. \tag{2.115}$$

Коэффициент концентрации можно получить, проинтегрировав характеристику направленности по пространству после перехода к углу $\alpha = \pi/2 - \theta$, отсчитываемому от оси:

$$K_к = \frac{2}{\int_0^{\pi} D^2(\alpha)\sin\alpha d\alpha} = \frac{2}{\int_0^{\pi}\sin^5\alpha d\alpha} = \frac{15}{8}\ . \tag{2.116}$$

Рассмотрим теперь асимптотику решения для цилиндра большей волновой высоты, т. е. при $kh \gg 1$. В этом случае в первом приближении можно считать , что за исключением небольших участков вблизи краев звуковые давления p_1 и p_2 являются постоянными по высоте и равны давлениям на внешней и внутренней поверхностях бесконечного цилиндра. Считая, что колебательная скорость по высоте является постоянной и равной v_0, можно записать:

$$p_1 - p_2 \approx -i\rho c v_0\left[\frac{H_0^{(1)}(\mu)}{H_1^{(1)}(\mu)} - \frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)}\right] = \frac{2\rho c v_0}{\pi\mu H_1^{(1)}(\mu)J_1(\mu)} \tag{2.117}$$

В результате получим при $kh \gg 1$

$$p_1(R_0, \theta) \approx -\frac{\rho c v_0 h}{\pi} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} \frac{\cos\theta J_1(\mu\cos\theta)}{H_1^{(1)}(\mu) J_1(\mu)} \times$$

$$\times \frac{\sin u}{u}; \quad u = \frac{kH}{2} \sin\theta. \tag{2.118}$$

Последний сомножитель представляет собой характеристику направленности линейки высотой H. Заметим, что при $\mu = \mu_n$, где μ_n – корень уравнения $J_1(\mu_n)$, звуковое давление (за исключением направлений $\theta = 0, \pi/2$) обращается в бесконечность. Это является следствием принятого приближения, при котором не учитывается активная нагрузка на излучатель с внутренней стороны из-за излучения через открытые концы. Более точный расчет, результаты которого приведены ниже, показывает, что при $\mu = \mu_n$ излучаемое давление остается конечным.

2.6.2. Решение с использованием парных интегральных уравнений. Разобьем все пространство на две области $r > a$ и $r < a$. Звуковое давление в этих областях можно представить в виде разложений в интегралы Фурье–Бесселя, причем при $r < a$ следует использовать конечную на оси функцию J_0, а при $r > a$ – функцию $H_0^{(1)}$, определяющую расходящиеся цилиндрические волны. Запишем общие решения уравнения Гельмгольца в этих областях [63]

$$p_1 = \frac{\rho c v_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(w) H_0^{(1)}(\sqrt{k^2 - w^2}\, r) \exp(iwz) dw \text{ при } r > a; \tag{2.119а}$$

$$p_2 = \frac{\rho c v_0}{k} \int_{-\infty}^{\infty} P_2(w) J_0(\sqrt{k^2 - w^2}\, r) \exp(iwz) dw, \text{ при } r < a. \tag{2.119б}$$

Множитель $\rho c v_0/k$ введен для нормировки так, чтобы неизвестные функции $P_1(w)$ и $P_2(w)$ были безразмерными. Скорость поверхности зададим в виде $v = v_0 f(z)$, где v_0 – скорость в плоскости $z = 0$. Для упрощения будем считать, что $f(z)$ – четная функция. В этом случае $\partial p_{1,2}/\partial z|_{z=0}$ в силу симметрии. Из выражений (2.119) следует, что $P_1(w)$ и $P_2(w)$ должны быть четными функциями. Тогда

$$p_1 = \frac{2\rho c v_0}{k} \int_0^{\infty} P_1(w) H_0^{(1)}(\sqrt{k^2 - w^2}\, r) \cos(wz) dw \text{ при } r > a; \tag{2.120а}$$

$$p_2 = \frac{2\rho c v_0}{k} \int_0^{\infty} P_2(w) J_0(\sqrt{k^2 - w^2}\, r) \cos(wz) dw \text{ при } r < a. \tag{2.120б}$$

При $r = a$ должно выполняться граничное условие, соответствующее равенству радиальных составляющих колебательных скоростей внутри и вне этой поверхности при любых z. Кроме того, при $|z| > h$ должна обеспечиваться непрерывность звуковых давлений.

Таким образом, можно записать:

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial p_2}{\partial r}\right|_{r=a} \text{ при любых } z; \quad \left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=a} = i\omega\rho v_0 f(z)$$

$$\text{при } |z| < h; \quad p_1|_{r=a} = p_2|_{r=a} \text{ при } |z| > h. \tag{2.121}$$

Введем безразмерные величины $u = kr$; $s = w/k$; $\mu = ka$; $\beta = 2kh$; $\alpha = kz$; $\gamma = \sqrt{1 - s^2}$. Первое из условий (2.121) дает соотношение

$$P_2(ks) = P_1(ks) H_1^{(1)}(\mu\gamma)/J_1(\mu\gamma). \tag{2.122}$$

Заметим, что функция $P_1(w)$, определяющая давление при $r > a$, должна быть непрерывной при любых w из-за отсутствия собственных колебаний во внешней области. Однако функция $P_2(w)$, соответствующая внутренней области, имеет особенности в точках, соответствующих корням уравнения $J_1(\mu\gamma) = J_1(\sqrt{k^2 - w^2}a) = 0$, т. е. при $w_n = \pm\sqrt{(ka)^2 - \mu_n^2}/a$, где μ_n – корень уравнения $J_1(\mu_n) = 0$. Вычеты в точках $w = w_n$ соответствуют нормальным волнам, распространяющимся в трубе с акустически жесткими стенками. Кроме того, из-за неоднозначности функции $\sqrt{k^2 - w^2}$ на комплексной плоскости w должны быть проведены разрезы. Будем считать $\operatorname{Im} k > 0$ и $\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - w^2} > 0$. Тогда все возникающие полюса будут смещены с линии интегрирования, как показано на рис. 2.24. Разрез, соответствующий условию $\operatorname{Im}\sqrt{k^2 - w^2}$, показан на этом рисунке штриховой линией. В окончательных выражениях перейдем к пределу $\operatorname{Im} k = 0$.

Подставим выражения (2.120) во второе и третье граничные условия. Используя соотношение (2.122) и равенство $J_1(x)H_0^{(1)}(x) - H_1^{(1)}(x)J_0(x) = 2i/(\pi x)$, получим систему парных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty P_1(ks) H_1^{(1)}(\mu\gamma)\gamma\cos(\alpha s)\,ds =$$

$$= -if(\alpha/k)/2 \text{ при } \alpha < \beta/2; \tag{2.123а}$$

$$\int_0^\infty P_1(ks)\frac{\cos(\alpha s)}{\gamma J_1(\mu\gamma)}\,ds = 0$$

$$\text{при } \alpha > \beta/2. \tag{2.123б}$$

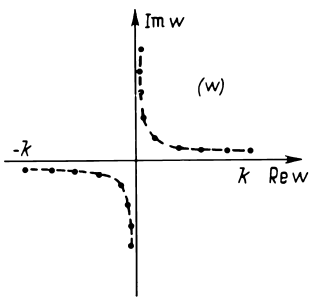


Рис. 2.24. Расположение полюсов на комплексной плоскости

Решение этой системы будем выполнять способом, близким к использованному в задаче об излучении осциллирующего диска (см. п. 1.3). Продифференцируем уравнение (2.123б) по α. Затем умножим его на $1/\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ и проинтегрируем по α в пределах x, ∞. Учтем при этом первую из формул (3.753.2,3) работы [16]:

$$\int_x^\infty \frac{\sin(\alpha s)}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} J_0(xs); \quad \int_0^x \frac{\cos(\alpha S)}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} J_0(xs). \qquad (2.124)$$

Это дает уравнение

$$\int_0^\infty \frac{P_1(ks)}{\gamma J_1(\mu\gamma)} s J_0(xs) ds = 0 \text{ при } x > \beta/2. \qquad (2.125)$$

Правая часть этого уравнения равна нулю при $x > \beta/2$ и неизвестна при $x < \beta/2$. Обозначим эту неизвестную функцию через $g(x)$. Тогда получим соотношение, которое можно рассматривать как одно из пары преобразований Ханкеля:

$$g(x) = \int_0^\infty G(s) s J_0(xs) ds; \quad G(s) = \int_0^\infty g(x) x J_0(xs) dx.$$

Обращая уравнение (2.125), получим

$$\frac{P_1(ks)}{\gamma J_1(\mu\gamma)} = \int_0^{\beta/2} g(x) x J_0(xs) dx. \qquad (2.126)$$

В последнем выражении пределы интегрирования 0, ∞ заменены на 0, $\beta/2$, так как $g(x) = 0$ при $x > \beta/2$. Умножим теперь уравнение (2.123а) на $1/\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ и проинтегрируем по α в пределах 0, x. Воспользуемся второй из формул (2.124) и соотношением (2.126), в котором обозначим переменную интегрирования через y. Получится уравнение относительно функции $g(y)$:

$$\int_0^{\beta/2} g(y) y U(x, y) dy = \psi_1(x), \qquad (2.127)$$

где

$$U(x, y) = \int_0^\infty \gamma^2 J_1(\mu\gamma) H_1^{(1)}(\mu\gamma) J_0(xs) J_0(ys) ds, \qquad (2.128)$$

$$\psi_1(x) = -\frac{i}{\pi} \int_0^x \frac{f(\alpha/k)}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} d\alpha. \qquad (2.129)$$

Исследуем поведение подынтегрального выражения (2.128) при $s \to \infty$. В этом случае $\gamma = i\sqrt{s^2 - 1} \to is$. Учтем соотношения $J_1(iz) =$

$= iI_1(z)$ и $H_1^{(1)}(iz) = -(2/\pi)K_1(z)$, где $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $K_1(z)$ – функция Макдональда, а также асимптотику [51]

$$I_1(z)K_1(z) \approx \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{3}{8z^2}\right) \text{ при } z \gg 1. \tag{2.130}$$

Тогда произведение первых трех сомножителей в выражении (2.128) при $s \to \infty$ будет $is/(\pi\mu)$. Поскольку произведение $J_0(xs)J_0(ys)$ при $s \to \infty$ пропорционально $1/s$, все подынтегральное выражение не убывает при $s \to \infty$ и интеграл расходится. Однако (см. п. 1.3) выражение (2.128) можно представить в виде суммы δ-функции и сходящегося интеграла. Для этого прибавим и вычтем из произведения первых трех множителей (2.128) величину $is/(\pi\mu)$. В результате можно выделить функцию

$$\frac{\delta(x-y)}{y} = \int_0^\infty sJ_0(xs)J_0(ys)ds. \tag{2.131}$$

Для того, чтобы убедиться в справедливости этого выражения, следует умножить правую часть на $\exp(-\epsilon x)$, проинтегрировать по x и устремить ϵ к нулю. Это даст

$$\int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{s^2+\epsilon^2}} J_0(ys)ds \to \int_0^\infty J_0(ys)ds = 1/y,$$

что соответствует интегралу по x от левой части. Теперь выражение (2.128) можно записать в форме

$$L(x,y) = \frac{i}{\pi\mu}\,\frac{\delta(x-y)}{y}\int_0^\infty \left[\gamma^2 J_1(\mu\gamma)H_1^{(1)}(\mu\gamma) - \frac{is}{\pi\mu}\right] J_0(xs)J_0(ys)ds.$$

После этого уравнение (127) приводится к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$g(x) + \int_0^{\beta/2} g(y)K(x,y)dy = \psi(x), \tag{2.132}$$

где

$$K(x,y) = y\int_0^\infty B(s)J_0(xs)J_0(ys)ds; \tag{2.133}$$

$$B(s) = -i\pi\mu w^2 J_1(\mu w)H_1^{(1)}(\mu w) - s; \tag{2.134}$$

$$\psi(x) = -\mu\int_0^x \frac{f(\alpha/k)}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}d\alpha. \tag{2.135}$$

2.6.3. О вычислении ядра уравнения. Привести интеграл (2.133) к интегралу в конечных пределах так, как это сделано в п. 1.3, не удается. Поэтому представим этот интеграл в виде $K(x, y) = y(L_1 + L_2)$, где

$$L_1 = \int_0^1 B(s) J_0(xs) J_0(ys) ds; \quad L_2 = \int_1^\infty B_1(s) J_0(xs) J_0(ys) ds,$$

причем

$$B_1(s) = 2\mu(s^2 - 1) I_1(\mu\sqrt{s^2 - 1}) K_1(\mu\sqrt{s^2 - 1}) - s. \qquad (2.136)$$

Вычисление величины L_1 затруднений не вызывает. Рассмотрим интеграл L_2. При больших значениях s (при $s \gg 1$, $\mu\sqrt{s^2 - 1} \gg 1$) можно использовать асимптотику (2.130). Тогда $B_1(s) \approx -[1/2 + 3/(8\mu^2)]/s$. При xs, $ys \gg 1$, взяв асимптотические значения функций $J_0(xs)$, $J_0(ys)$, получим подынтегральное выражение в виде

$$-\left(1 + \frac{3}{4\mu^2}\right) \frac{1}{\pi\sqrt{xy}} \frac{\cos(xs - \pi/4)\cos(ys - \pi/4)}{s^2}. \qquad (2.137)$$

Таким образом, интеграл сходится достаточно медленно (как $1/s^2$). Поэтому целесообразно разбить его на два слагаемых $L_2 = L_3 + L_4$, где $L_3 = \int_1^A$; $L_4 = \int_A^\infty$, выбрав значение A так, чтобы с использованием асимптотики (2.137) вычислить интеграл L_4 аналитически. Представим произведение косинусов в виде $\cos[(x - y)s] + \sin[(x + y)s]$ и проинтегрируем по частям. Получим

$$L_4 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8\mu^2}\right) \frac{1}{\pi A\sqrt{xy}} [\cos z_1 + \sin z_2 + z_1(\mathrm{Si}\, z_1 - \pi/2) -$$

$$- z_2\, \mathrm{Ci}\, z_2],$$

где $z_1 = |A(x - y)|$, $z_2 = A(x + y)$, $\mathrm{Si}\, z_1$ и $\mathrm{Ci}\, z_2$ – интегральные синус и косинус, которые вычисляют по простым аппроксимациям, приведенным в работе [51].

Значения A выбирают при выполнении пробных расчетов. Для ориентировки можно считать, что указанные асимптотики справедливы, если величина A будет наибольшей из значений 3, $\sqrt{10/\mu^2 + 1}$, $3/x$, $3/y$. Если $x = 0$, то

$$L_4 = \int_A^\infty B_1(s) J_0(ys) ds \approx \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8\mu^2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \int_A^\infty \frac{\cos(ys - \pi/4)}{s^{3/2}} ds.$$

После замены переменных $\sqrt{s} = \xi$ и интегрирования по частям последнее выражение приводится к виду

$$L_4 = -\left(1 + \frac{3}{4\mu^2}\right)\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi yA}} [\cos(yA) + \sin(yA)] + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2}\,[S(\sqrt{2yA/\pi}) - C(\sqrt{2yA/\pi})] \right\}.$$

Здесь S и C – интегралы Френкеля, вычисляемые по приближенным формулам [51]. Аналогичное выражение получится и при $y = 0$ с заменой y на x.

2.6.4. Импеданс излучения и звуковое давление в дальнем поле. Для того чтобы найти акустическую мощность, вычислим величину

$$W = \mathrm{Re}\frac{1}{2}\left(\int_{S_1} p_1 v_1^*{}_n dS + \int_{S_2} p_2 v_{2n}^* dS\right),$$

где S_1 и S_2 – наружная и внутренняя поверхности цилиндра соответственно; $v_1^*{}_n$ и v_{2n}^* – нормальные составляющие колебательной скорости на этих поверхностях.

Поскольку $v_{1n} = -v_{2n} = v_0 f(x)$,

$$W = \frac{v_0}{2}\,\mathrm{Re}\,2\pi a \int_0^h (p_1 - p_2)\,|_{r=a} f^*(z)dz.$$

Приравняв эту мощность величине $v_0^2 R_s/2$, где R_s – вещественная часть импеданса излучения, получим

$$R_s = \frac{2\pi a}{v_0}\,\mathrm{Re}\int_0^h (p_1 - p_2)|_{r=a} f^*(z)dz.$$

Аналогичным образом можно определять и комплексный импеданс

$$Z_s = \frac{2\pi a}{v_0}\int_0^h (p_1 - p_2)\,|_{r=a} f^*(z)dz. \qquad (2.138)$$

Вычислим импеданс излучения для равномерного распределения скорости $f(z) = 1$. Тогда после замены $\alpha = kz$ получим

$$Z_s = \frac{4\pi a}{kv_0}\int_0^{\beta/2} (p_1 - p_2)\,|_{r=a}\, d\alpha. \qquad (2.139)$$

Подставим сюда выражения (2.120), (2.122) и учтем, что

$$\int_0^\infty J_0(xs)\frac{\sin(\beta s/2)}{s}\,ds = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.140)$$

В результате получим

$$z_s = \frac{Z_s}{\rho c S} = \frac{4i}{\mu\beta} \int_0^{\beta/2} g(x)\, x\, dx, \tag{2.141}$$

где $S = 2\pi a h$ — площадь боковой поверхности.

Определим звуковое давление вдали от цилиндра при $kR_0 = k\sqrt{r^2 + z^2} \gg 1$. Воспользуемся выражением (2.119а) и подставим асимптотику для $H_0^{(1)}$ при больших значениях аргумента. Тогда

$$p_1 \approx \frac{\rho c v_0}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \int_{-\infty}^{\infty} P_1(w)\,(k^2 - w^2)^{-1/4} \exp\,[i\varphi(w)]\, dw,$$

где $\varphi(w) = \sqrt{k^2 - w^2}\, r + wz - \pi/4$.

Вычислим этот интеграл методом стационарной фазы. Решив уравнение $\varphi'(w) = 0$, получим $w_0 = k \sin\theta$, причем $\sin\theta = z/R_0$, $\varphi(w_0) = kR - \pi/4$, $\varphi''(w_0) = -r/(k\cos^3\theta)$. Подставив эти значения в формулу (9.2) из работы [63], найдем

$$p_1(R_0, \theta) \approx -\frac{i2\rho c v_0}{kR} P_1(k \sin\theta) \exp\,(ikR_0).$$

Используя связь (2.126), получим

$$p_1(R_0, \theta) = -\frac{i2\rho c v_0}{k} \frac{\exp\,(ikR_0)}{R_0} \cos\theta J_1(\mu\cos\theta) \times$$

$$\times \int_0^{\beta/2} g(x)\, x J_0(x \sin\theta)\, dx. \tag{2.142}$$

Заметим, что звуковое давление в дальнем поле, определяемое формулой (2.142), в точности совпадает с выражением (2.113), полученным при помощи интеграла Гельмгольца. Для того чтобы это показать, составим разность звуковых давлений на внешней и внутренней сторонах с использованием представлений (2.119) и (2.122) при $r = a$. Для интегрирования по s используем выражения (2.126) и (6.671.2) из работы [16]:

$$\int_0^{\infty} J_0(xs) \cos(kzs)\, ds = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - (kz)^2}} & \text{при } x > kz; \\ 0 & \text{при } x < kz. \end{cases}$$

В результате получим,

$$[p_1(z) - p_2(z)]\,|_{r=a} = \frac{4i\rho c v_0}{\pi\mu} \int_{k|z|}^{\beta/2} \frac{g(x)\, x}{\sqrt{x^2 - (kz)^2}}\, dx.$$

Подставим это выражение в интеграл (2.113) и воспользуемся формулой Дирихле для замены переменных в двойном интеграле:

$$\int_0^a \left[\int_u^a f(u, v)du \right] dv = \int_0^a \left[\int_0^u f(u, v)dv \right] du.$$

После этого выделится интеграл, вычисляемый по формуле (3.753.2) из работы [16]:

$$\int_0^x \frac{\cos(\alpha \sin\theta)}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} J_0(x \sin\theta)$$

и в результате получится выражение (2.142).

Для проведения расчетов удобно пронормировать звуковое давление, определяемое формулой (2.142), к звуковому давлению, излучаемому конечным цилиндром, дополненным акустически жесткими полубесконечными цилиндрическими экранами. Это давление определяется выражениями (2.108а, б). Заметим, что звуковое давление в направлении, перпендикулярном к оси $\theta = 0$, можно выразить через импеданс излучения (2.141):

$$p_1(R_0, 0) = -\frac{v_0 k}{2\pi} \frac{\exp(ikR_0)}{R_0} J_1(\mu) Z_s, \quad kR_0 \gg 1. \tag{2.143}$$

Имея соотношение между звуковым давлением и импедансом излучения, можно найти коэффициент концентрации. Для этого вычислим акустическую мощность $W = v_0^2 Z_s/2$. Ненаправленный излучатель с такой же мощностью создавал бы звуковое давление

$$p_0 = \sqrt{\frac{2\rho c W}{4\pi R_0^2}} = \sqrt{\frac{\rho c v_0^2}{4\pi R_0^2} \operatorname{Re} Z_s}.$$

Коэффициент концентрации определяется как $K_к = |p_1/p_0|^2$. Используя выражение (2.143), получим

$$K_к = \frac{\mu\beta}{2} J_1^2(\mu) \frac{|z_s|^2}{r_s}; \quad r_s = \operatorname{Re} z_s = \operatorname{Re} [Z_s/(\rho c S)]. \tag{2.144}$$

2.6.5. Асимптотики решения для короткого и длинного цилиндров. Пусть $\beta = kh \ll 1$ и $h < a$, т. е. $\beta < \mu$. Тогда второе слагаемое в левой части уравнения (2.132) мало по сравнению с правой частью, которая при равномерном распределении колебательной скорости принимает вид $\psi = -\pi\mu/2$. Поэтому в качестве начального приближения можно принять $g^{(0)}(x) = -\pi\mu/2$. Взяв первую итерацию, получим

$$g(x) \approx -\frac{\pi\mu}{2} - \int_0^{\beta/2} g^{(0)}(y) K(x, y) dy = -\frac{\pi\mu}{2} \left[1 - \int_0^{\beta/2} K(x, y)\, dy \right].$$

Подставив сюда выражение (2.133), получим после интегрирования по y

$$g(x) \approx -\frac{\pi\mu}{2}\left[1 - \frac{\beta}{2}\int_0^\infty \frac{B(s)}{S} J_0(xs) J_1\left(\frac{\beta s}{2}\right) ds\right].$$

Для определения сопротивления излучения нам понадобится комплексное значение $g(x)$. Однако вещественная часть второго слагаемого мала по сравнению с единицей. Поэтому достаточно вычислить лишь мнимую часть, которая определяется интегралом в пределах (0, 1). Так как $x \leqslant \beta \leqslant 1$, можно принять $J_0(xs) \approx 1$, $J_1(\beta s/2) \approx \beta s/4$. Тогда

$$g(x) \approx -\frac{\pi\mu}{2}\left[1 + \frac{i\pi\beta^2}{32} F(\mu)\right] = \text{const}, \qquad (2.145)$$

где $F(\mu) = 4\mu\int_0^1 (1 - s^2) J_1(\mu\sqrt{1 - s^2})\, ds$. При $\mu \gg 1$ $F(\mu) \approx 1$; при $\mu \ll 1$ $F(\mu) \approx 8\mu^3/15$.

Используя выражения (2.141) и (2.145), получим

$$z_s \approx \frac{\pi^2\beta^2}{128} F(\mu) - \frac{i\pi\beta}{4}; \quad \beta \ll 1, \ \beta < \mu. \qquad (2.146)$$

Функция $F(\mu)$, изображенная на рис. 2.25, является осциллирующей, что отражает резонансный характер колебаний во внутренней области.

Звуковое давление при $\theta = 0$ можно определить по формуле (2.143), а характеристику направленности – из выражения (2.142) после нормировки к значению при $\theta = 0$. В результате снова получим выражения (2.114), (2.115).

Если подставить формулу (2.146) в (2.144), определяющую коэффициент концентрации, и принять $\mu \ll 1$, то получим значение $K_к = 15/8$, совпадающее с величиной, найденной непосредственным интегрированием характеристики направленности (2.116), что косвенно подтверждает правильность приведенных здесь асимптотик.

Рассмотрим теперь случай цилиндра большой волновой высоты, т. е. $\beta \gg 1$. В качестве приближенного решения возьмем функцию $g(y) \approx A_1/\sqrt{(\beta/2)^2 - y^2}$, где A_1 – неизвестная константа. Подставим эту функцию в уравнение (2.132) и учтем, что по формуле (6.554.2) из работы [16]

$$\int_0^{\beta/2} yJ_0(ys)\frac{dy}{\sqrt{(\beta/2)^2 - y^2}} = \frac{\sin(\beta s/2)}{s}$$

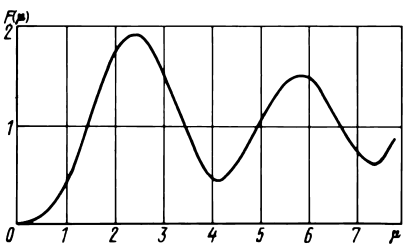


Рис. 2.25. График функции $F(\mu)$

Тогда уравнение приобретает вид

$$\frac{A_1}{\sqrt{(\beta/2)^2 - x^2}} + A_1 \int_0^\infty B(s) J_0(xs) \frac{\sin(\beta s/2)}{s} ds = -\frac{\pi\mu}{2}. \qquad (2.147)$$

При $\beta \gg 1$ функция $\sin(\beta s/2)/s$ меняется гораздо быстрее, чем $B(s)$, причем ее максимальное значение достигается при $s = 0$. Поэтому функцию $B(s)$ можно вынести из-под знака интеграла, взяв ее значение при $s = 0$, т. е. $B(0) = -i\pi\mu J_1(\mu) H_1^{(1)}(\mu)$. Тогда останется интеграл, вычисляемый по формуле (2.1.40). После этого уравнение (2.147) приобретает вид

$$A_1 \left[\frac{1}{\sqrt{(\beta/2)^2 - x^2}} - \frac{i\pi^2\mu}{2} J_1(\mu) H_1^{(1)}(\mu) \right] \approx -\frac{\pi\mu}{2}.$$

Таким образом, функция $g(y)$ удовлетворяет уравнению (2.132) при $\beta \gg 1$ с точностью до членов порядка $(\beta/2)^{-1}$. Пренебрегая первым слагаемым, найдем значение A_1, а затем и функцию $g(y)$ в виде

$$g(y) \approx \frac{-i}{\pi J_1(\mu) H_1^{(1)}(\mu) \sqrt{(\beta/2)^2 - y^2}}; \quad \beta \gg 1.$$

Теперь по формулам (2.141), (2.142) можно найти импеданс излучения и звуковое давление в дальнем поле. После интегрирования получим для звукового давления снова формулу (2.118), а для импеданса — значение

$$z_s = \frac{2}{\pi\mu H_1^{(1)}(\mu) J_1(\mu)}; \quad \beta \gg 1, \qquad (2.148)$$

что совпадает с суммой импеданса излучения бесконечного цилиндра для внешней z_{s1} и внутренней z_{s2} областей. С учетом того, что $z_{s1} = -iH_0^{(1)}(\mu)/H_1^{(1)}(\mu)$ и $z_{s2} = iJ_0(\mu)/J_1(\mu)$, вычислим суммы этих значений и получим выражение (2.14), которое, в свою очередь, совпадает с отношением $(p_1 - p_2)/v_0$, следующим из формулы (2.117).

Заметим, что выражение (2.118) отличается от формулы (2.107) при $kh \gg 1$ для цилиндра в полубесконечных экранах множителями, которые являются существенными лишь при углах θ, близких к $\pi/2$. В этой области начинает сказываться дипольный характер излучения открытого цилиндра.

2.6.6. Результаты расчетов. Уравнение (2.132) численно решалось таким же образом, как и уравнение (1.59). Интеграл заменялся суммой по правилу Симпсона. Минимальное число узлов, в которых вычислялась

функция $g(x)$, было равно пяти и при возрастании высоты цилиндра увеличивалось из расчета 20 точек на одну длину волны. В результате получалась система линейных алгебраических уравнений. Численные эксперименты с увеличением числа узлов показали, что указанного количества точек достаточно для получения трех верных цифр результатов. Матрица системы вычислялась с использованием результатов, полученных в п. 2.6.3.

На графиках (рис. 2.26), показывающих линии равных уровней сопротивления излучения (нормированного к ρcS, где $S = 2\pi aH$ – площадь боковой поверхности), видны резонансные области, в которых нагрузка со стороны среды сильно возрастает. Максимумы вблизи оси ординат соответствуют продольным резонансным колебаниям внутреннего столба жидкости. Первый из них соответствует длине цилиндра, близкой к $\lambda/2$, а второй – к $3\lambda/2$. Заметим, что максимальная величина r_s достигается не при $kH = \pi$, а при несколько меньшем значении kH. Разность $\xi = \pi - kH$ близка к удвоенной величине поправки на открытый конец полубесконечного волновода [10] и составляющей $2 \cdot 0{,}61 \cdot ka$ при $ka \ll 1$ (поправка удваивается, так как открыты оба конца трубы). Узкие вертикальные гребни рельефа, изображенного на рис. 2.26, являются следствиями резонансов при радиальных колебаниях, которые могут существовать лишь при достаточной высоте. Области, в которых находятся эти подъемы, примерно соответствуют корням уравнения $J_1(\mu_n) = 0$, где $\mu_n = (ka)_n$, $n = 1, 2, \ldots$ [строго говоря, эти области следует называть не резонансными, а антирезонансными, так как для

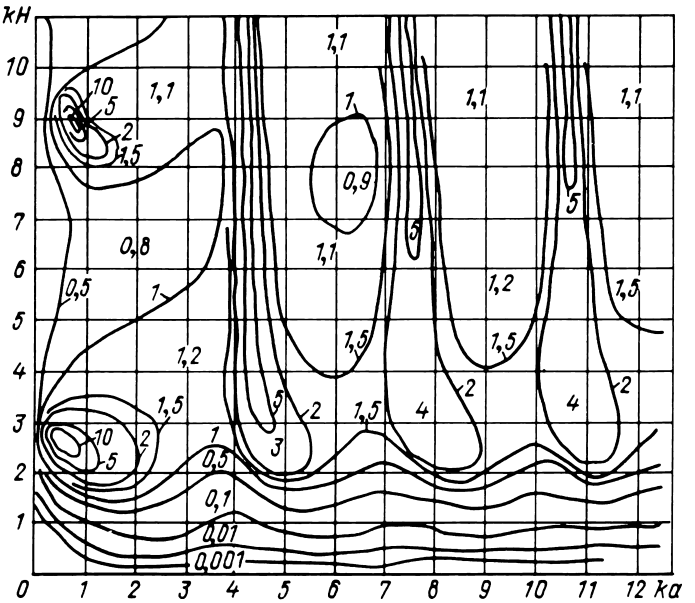


Рис. 2.26. Линии равных значений сопротивления излучения $r_s = R_s/(\rho cS)$ на плоскости ka, kH

цилиндра бесконечной высоты в окрестности линий $ka = \mu_n$ мнимая часть импеданса оказывается бесконечной, как следует из формулы (2.148)]. При уменьшении kH и фиксированном ka значения r_s сильно уменьшаются в соответствии с формулой (2.146). В этом случае цилиндр превращается в узкую осциллирующую ленту, свернутую в кольцо.

Мнимая часть импеданса может иметь разные знаки при различных соотношениях ka и kH. Известно, что для выпуклых излучающих поверхностей всегда $x_s > 0$, что соответствует инерционному характеру мнимой части импеданса. Для тела, имеющего внутреннюю полость, из-за упругости внутреннего объема среды импеданс может иметь характер гибкости.

На рис. 2.27 показаны линии перемены знака x_s на плоскости ka, kH и одно из сечений этой плоскости, соответствующее зависимости x_s от ka при $kH = 5$. При небольших значениях kH всегда $x_s > 0$. При увеличении высоты цилиндра линии смены знака стремятся к вертикальным прямым, определяемым корнями уравнений $J_0(\tau_n) = 0$, $J_1(\mu_n) = 0$. В случае больших значений kH при пересечении линий $ka = \mu_n$ значения x_s меняются очень резко – почти скачком, как и должно быть вблизи антирезонансных значений ka.

Линии разных уровней отношения $|p_1/p_0|$, где p_0 определяется выражением (2.108б) при $\theta = 0$, на плоскости ka, kH (рис. 2.28) похожи на линии равных значений r_s. Однако при $ka = \mu_n$ появляются узкие глубокие провалы, обусловленные наличием нуля при $\theta = 0$ в характеристике направленности кольца, составленного из диполей. При увеличении высоты цилиндра эти провалы сужаются. Большие значения излучаемого звукового давления достигаются при резонансных колебаниях среды в узкой трубке (при $ka \approx 0{,}2 \ldots 0{,}8$) по высоте. Положение первого максимума соответствует значению $kH = \pi - \xi$, где ξ – упомянутая выше поправка на открытые концы трубы.

Диаграммы направленности для полого цилиндра (рис. 2.29) могут сильно отличаться от диаграммы для конечного цилиндра, расположенного в жестких полубесконечных экранах. Эти отличия наиболее существенны для направлений, близких к осевым. Несмотря на то что выражение (2.114) было получено для случая $kH \ll 1$, фактически оно оказывается справедливым и для значения $kH = 1$. При дальнейшем увеличении kH будет сказываться влияние множителя $\sin u/u$ в выражении (2.118), учитывающего направленность линейки высотой H. Однако главный максимум при промежуточных значениях kH оказывается несколько более узким, чем для линейки.

Вид диаграмм направленности резко меняется при значении $ka = 3{,}853$, близком к резонансной величине 3,832 (рис. 2.29, *г*). В этом случае (за исключением углов, близких к 90°) характеристика оказывается похожей на диаграмму излучения двух сосредоточенных источников, расположенных вблизи концов, и описываемой функцией $\cos\left|\left(\frac{kH}{2}\sin\theta\right)\right|$. Это объясняется следующим образом.

При резонансных значениях ka звуковое давление внутри бесконечно длинного цилиндра, а также импеданс (2.148) обращаются

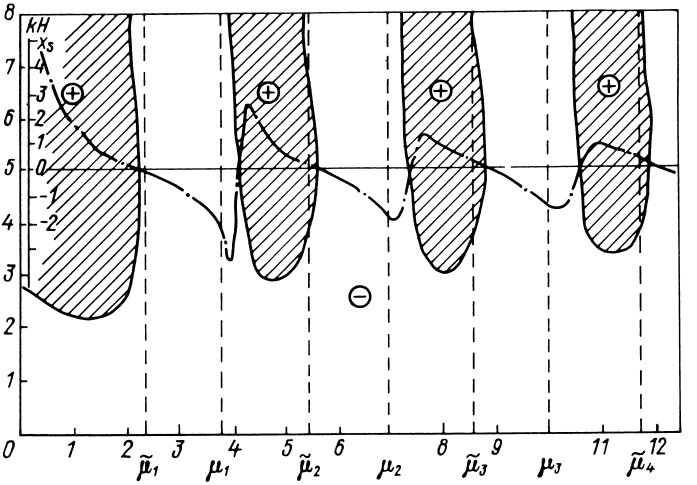


Рис. 2.27. Линии перемены знака мнимой части импеданса
——— $x_S = X_S/(\rho c S)$; —·—· зависимость x_S от ka при $kH = 0{,}5$

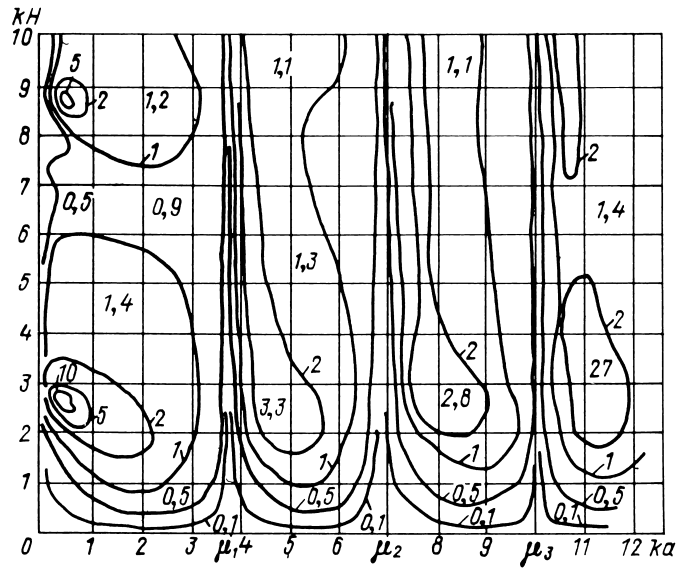


Рис. 2.28. Линии равных значений нормированного звукового давления $|p/p_0|$ в дальнем поле при $\theta = 0$

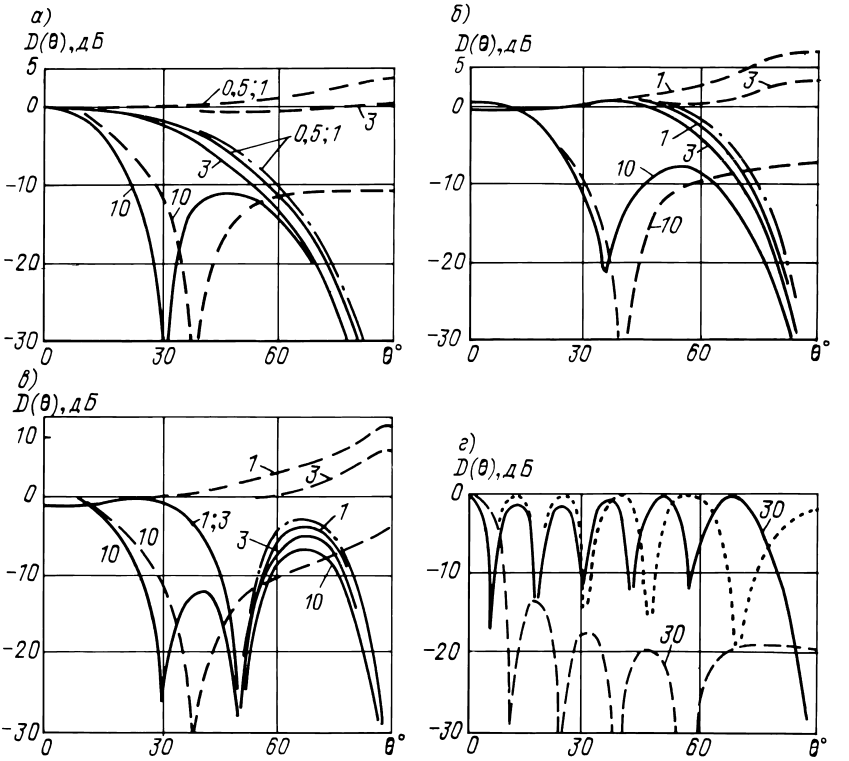


Рис. 2.29. Характеристика направленности цилиндра с открытыми концами (——) и конечного цилиндра, расположенного в акустически жестких полубесконечных экранах (– – –) при $ka = 1$ (*а*), $ka = 3$ (*б*), $ka = 6$ (*в*); $ka = 3{,}853$ (*г*)
–·–· графики функции (2.114) ····· график функции $20 \ln \cos\left(\frac{kH}{2} \sin\theta\right)$;
цифры на кривых соответствуют значениям kH.

в бесконечность. Если длина цилиндра конечна, то бесконечных значений давления быть не может, однако из-за значительного возрастания давления во внутренней области появляются сильные перепады давления вблизи концов, и, следовательно, большие потоки энергии через открытые отверстия. Это приводит к тому, что звуковое давление, излучаемое внутренней частью через концы, оказывается значительно бóльшим, чем давление, излучаемое внешней боковой поверхностью. Таким образом создаются два сильных источника, расположенных на расстоянии H друг от друга, что и приводит к появлению характеристики, показанной на рис. 2.29, *г*.

ДИФРАКЦИЯ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

3.1. Разделение переменных для клиновидной области

3.1.1. Обзор некоторых работ. Задача о дифракции волн на клине (и в частном случае – на полуплоскости) представляет собой фундаментальную проблему, на решении которой основаны многие представления о волновых процессах в акустике, оптике и радиофизике. Исследованию дифракции волн на клине и полуплоскости посвящена обширная литература. Явления, связанные с воздействием края экрана на проходящую волну, изучаются применительно к волнам различной природы – звуковым, упругим волнам в твердой среде, световым, электромагнитным волнам СВЧ, гравитационным волнам на поверхности жидкости. Интерес к этим исследованиям в акустике обусловлен несколькими причинами.

Во-первых, решения задач о поле источника звука в присутствии клина или полуплоскости являются основой для многих практических приложений, например для оценки эффективности ограниченных звукоизолирующих барьеров. Во-вторых, решения указанных задач служат в качестве эталонных формул для изучения более сложных явлений (например, дифракции на теле с острыми криволинейными кромками), для которых не построена строгая теория. В этих случаях используются приближенные методы – геометрическая [7] и физическая [53] теории дифракции, основанные на применении точных выражений для элементов тела, которые могут быть представлены в виде поверхностей простых форм. Такими точными (эталонными) выражениями и являются решения для клиновидной области. Во многих случаях математический аппарат, применяемый для изучения дифракции на клине электромагнитных волн, не отличается от математического аппарата, необходимого для исследования аналогичных явлений в акустике. Однако можно указать ситуации, когда методы, применяемые в акустике, оказываются гораздо более сложными. Примером может служить задача о дифракции звука на полубесконечной упругой пластине [4, 33] или на стыке двух упругих пластин [26].

Одно из основных решений задачи дифракции волн на полубесконечном экране было получено в 1894 ... 1896 гг. А. Зоммерфельдом [56]. В основе решения лежит метод, названный позже методом разветвленных решений. Идея метода заключается в следующем. Поскольку звуковое давление на различных сторонах экрана должно быть разным, то зависимость давления от угла φ должна иметь разрыв при переходе через полуплоскость $\varphi = 0$, в которой расположен экран. Для того чтобы построить такое разрывное решение, можно взять непрерывную по углу функцию, имеющую период 4π. Тогда при обходе на угол 2π (т. е. с одной стороны экрана на другую) будет получаться значение давления, отличное от исходного. В качестве такой зависимости можно взять

выражение вида $f[\exp(i\varphi/2)]$, где f – некоторая функция, выраженная в виде интеграла по плоским волнам. При этом всю плоскость можно интерпретировать как один из листов двулистной Римановой поверхности, сшитых по линии $\varphi = 0$. Верхний лист отображает реальную физическую поверхность, а нижний является вспомогательным.

Для клина с внешним углом α (см. рис. 3.1, *а*) аналогичным образом берется выражение вида $f[\exp(i\pi\varphi/\alpha)]$. В дальнейшем были развиты более систематические подходы к задачам дифракции на полуплоскости и клине, однако все конечные результаты фактически сводятся к решениям указанного вида.

Обстоятельное изложение теории дифракции на клине и полуплоскости дано в работе [44]. Рассматриваются граничные условия Дирихле и Неймана, соответствующие акустически мягким и жестким границам. В указанных работах получены также решения задач дифракции нестационарных волн. Результаты для различных случаев нестационарной дифракции приведены в работе [54]. Точное решение задачи о дифракции на полуплоскости цилиндрической волны общего вида $H_n^{(1)}(kr) \times \cos(n\varphi)$ содержатся в статье [79]. Поле, возбуждаемое дипольным источником в клиновидной области, исследовано в статьях [40, 77]. Новый подход к проблеме дифракции волн на кромке экрана предложен в работе [12]. В ней вводится в рассмотрение семейство лучей, соединяющих источник и точку наблюдения. Один из этих лучей касается края экрана, а остальные огибают его на некотором удалении. Общее поле выражено в виде интеграла по всем возможным (виртуальным) лучам. Влияние непрозрачного экрана учитывается тем, что часть лучей отсекается и при интегрировании удерживаются лишь лучи, огибающие экран. Такой подход должен соответствовать дифракции на поглощающем экране. В статье [109] получено решение для полуплоскости, одна сторона которой является акустически жесткой, а другая – акустически мягкой. Заметим, что решение такой задачи выполняется точно так же, как это сделано ниже в этой главе. При разделении переменных следует воспользоваться граничными условиями $p|_{\varphi=0} = 0$ и $\partial p/\partial\varphi|_{\varphi=\alpha} = 0$, из которых получится $\nu = \pi(2n-1)/2$, где $n = 1, 2, \ldots$ Дальнейшие преобразования не отличаются от приведенных ниже.

Гораздо более сложной задачей является проблема дифракции звука на импедансном клине, так как в этом случае методом разделения переменных не удается удовлетворить граничным условиям. Основополагающими работами в этой области явились статьи [37, 38]. В дальнейшем методы, предложенные в указанных статьях, были развиты в работах [6, 110, 131, 146].

Для импедансной полуплоскости в ряде работ [133, 134] применяется метод Винера–Хопфа, причем решена задача о дифракции на полуплоскости, на конце которой имеется полоса, обладающая свойствами, отличающимися от свойств основного экрана. В работе [134] такое решение выполнено для акустически жесткого экрана с мягкой или поглощающей полосой на конце, а в работе [133] – для экрана с импедансной полосой. Из результатов приведенных расчетов следует, что дифрагированное

поле в области акустической тени при $ka > 1$ (a – ширина полосы) практически такое же, как и для полубесконечного экрана, обладающего теми же свойствами, что и полоса (т. е. при $ka = \infty$). Из этого следует, что звуковое поле в области тени определяется лишь свойствами экрана в окрестности края и мало зависит от свойств остальной части экрана.

Значительное число работ посвящено применению теории дифракции звука на клине и полуплоскости к проблеме создания звукоизолирующих барьеров [104, 107, 108, 112, 118, 130, 138]. В работе [117] рассмотрено изменение спектра сигнала, излучаемого импульсным источником после огибания препятствия. Обстоятельная статья [104] содержит сведения об уменьшении шума барьерами, стоящими на земле. Приведены экспериментальные данные по уменьшению транспортного шума специальными звукопоглощающими барьерами. Показано, что значительную роль играет импеданс поверхности земли, на которой установлен барьер, поскольку отражение от земли, как от импедансного экрана, приводит к интерференции и появлению осцилляций в спектре шума.

Большое значение имеет также толщина экрана [130]. Если экран выполнен в виде параллелепипеда и длина наименьшей из граней превышает длину звуковой волны, то можно рассматривать дифракцию на каждом из ребер независимо. Волна, дифрагированная на одном из ребер, будет затем снова дифрагировать на соседнем ребре, и в итоге эффективность экрана конечной толщины будет больше экрана нулевой толщины. Ряд экспериментальных результатов приведен в работах [104, 138]. Подробные обзоры литературы по уменьшению шума барьерами содержатся в статьях [104, 112].

Весьма сложными являются задачи о дифракции звука на полубесконечных упругих пластинах. Они не имеют аналогов в теории дифракции электромагнитных волн. К настоящему времени известны лишь решения для тонкой упругой пластины, движение которой описывается уравнением изгибных колебаний [4, 26, 33, 39].

3.1.2. Дифракция цилиндрической звуковой волны на клине. Рассмотрим сначала двумерную задачу с использованием полярной системы координат, изображенной на рис. 3.1. Звук излучается линейным источником A_0 в виде бесконечно длинного тонкого пульсирующего цилиндра с осью, перпендикулярной к плоскости рисунка. Объемная скорость (на единицу длины цилиндра) равна Q, радиус a излучающего цилиндра мал по сравнению с длиной волны и расстоянием до поверхности клина. Поэтому вторичной дифракцией, т. е. рассеянием волн, отраженных от клина, на самом излучающем цилиндре можно пренебречь.

Звуковое поле, излучаемое цилиндром при отсутствии клина, будет

$$p_0 = \frac{k\rho cQ}{4} H_0^{(1)}(kR), \tag{3.1}$$

где $Q = v_0 2\pi a$; $ka \ll 1$; v – колебательная скорость; $R = |\vec{r}_0 - \vec{r}|$ – кратчайшее расстояние до точки наблюдения. Звуковое поле (3.1)

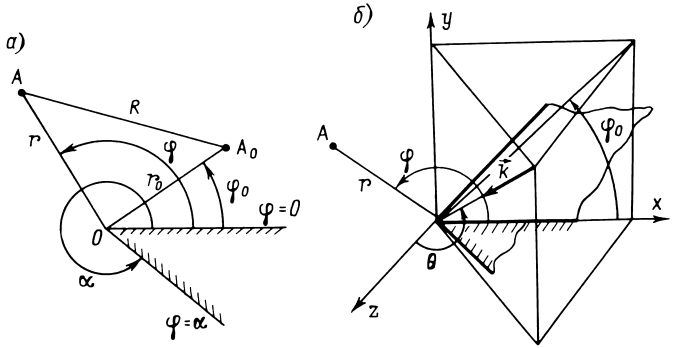


Рис. 3.1. Расположение систем координат: *а* – двумерная задача; *б* – падение плоской волны под углом к ребру клина

можно выразить через функцию Грина для свободного пространства в двумерном случае:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} (k|\vec{r}_0 - \vec{r}|) . \tag{3.2}$$

Таким образом, поле линейного источника отличается от функции Грина лишь постоянным множителем, т. е.

$$p_0 = -ik\rho cQG_0(\vec{r}, \vec{r}_0) . \tag{3.3}$$

Функция $G_0(\vec{r}, \vec{r}_0)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}_0) + k^2 G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{\delta(r - r_0)}{r} \delta(\varphi - \varphi_0), \tag{3.4}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2}$.

Заметим, что оператор Лапласа действует на функцию G по координатам точки наблюдения r, φ, а не по координатам источника r_0, φ_0. Необходимо построить функцию Грина для уравнения (3.4), удовлетворяющую заданным условиям на гранях клина $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$. Рассмотрим сначала однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.4), относительно некоторой функции $F(r, \varphi)$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \varphi^2} + k^2 F = 0.$$

Используя метод разделения переменных, будем искать решение в виде $F(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Тогда последнее уравнение можно записать как

$$\frac{r^2}{R(r)}\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{r}{R(r)}\frac{dR(r)}{dr} + k^2r^2 = -\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}\frac{1}{\Phi(\varphi)}.$$

Левая часть зависит только от r, правая – только от φ, поэтому каждая из них может быть равна только постоянной величине. Обозначив ее через ν^2, запишем два уравнения:

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)R(r) = 0; \tag{3.5}$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi(\varphi) = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) имеет решение в виде цилиндрических функций с индексом ν, например $J_\nu(kr)$ или $H_\nu^{(1)}(kr)$, а уравнение (3.6) – в виде тригонометрических функций $\cos(\nu\varphi)$ или $\sin(\nu\varphi)$. В задачах излучения и дифракции звука телом, ограниченным замкнутой поверхностью, выдвигается требование однозначности поля при обходе вокруг начала координат на угол, кратный 2π. Следовательно, в этих случаях ν должно быть целым числом. В клиновидной области при изменении угла φ на угол больший, чем α, поле меняется скачком. Поэтому ν в общем случае должно быть нецелым.

Рассмотрим сначала клин с акустически жесткими границами. Граничные условия можно записать в виде $\partial p/\partial n|_{\varphi = 0,\ \alpha} = 0$. Поскольку дифференцирование по нормали эквивалентно дифференцированию по произведению $r\varphi$ при постоянном r и переменном φ, то граничное условие будет $\partial\Phi/\partial\varphi|_{\varphi = 0,\ \alpha} = 0$. Запишем $\Phi(\varphi)$ в виде $\Phi(\varphi) = A\cos(\nu\varphi) + B\sin(\nu\varphi)$. Из граничного условия при $\varphi = 0$ получаем $B = 0$, а из условия при $\varphi = \alpha$ находим

$$\nu = \pi m/\alpha;\quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

Цилиндрические функции необходимо выбирать на основании следующего. При $r > r_0$ поле должно состоять только из расходящихся волн $H_\nu^{(1)}(kr)$. При $r < r_0$ могут быть как расходящиеся, так и сходящиеся к началу координат волны. Однако в любой точке (кроме точки, в которой находится источник) поле должно быть конечным. Требование ограниченности поля в начале координат $r = 0$ приводит к тому, что при $r < r_0$ зависимость от расстояния должна быть $J_\nu(kr)$.

Таким образом, поле может быть выражено в виде сумм, состоящих из слагаемых следующего типа:

$$a_m J_\nu (kr) \cos (\nu\varphi) \quad \text{при } r_0 > r;$$

$$b_m H_\nu^{(1)} (kr) \cos (\nu\varphi) \quad \text{при } r_0 < r. \tag{3.8}$$

Заметим, что поле должно быть непрерывным при переходе через окружность $r = r_0$. Для того чтобы удовлетворить этому требованию, приравняем выражения (3.8) при $r = r_0$. Тогда

$$a_m J_\nu (kr_0) = b_m H_\nu^{(1)} (kr_0). \tag{3.9}$$

Введем обозначение $c_m = b_m / J_\nu (kr_0)$. Тогда из соотношения (3.9) получим $a_m = c_m H_\nu^{(1)} (kr_0)$. Таким образом, функции (3.8) можно представить в виде

$$c_m J_\nu (kr_0) H_\nu^{(1)} (kr) \cos (\nu\varphi) \text{ при } r_0 < r; \tag{3.10а}$$

$$c_m J_\nu (kr) H_\nu^{(1)} (kr_0) \cos (\nu\varphi) \text{ при } r_0 > r. \tag{3.10б}$$

Используя обозначения [54] для расстояний r и r_0, оба последних произведения можно записать в едином виде

$$c_m J_\nu (kr_<) H_\nu^{(1)} (kr_>) \cos (\nu\varphi). \tag{3.11}$$

где $r_<$ и $r_>$ – наименьшее и наибольшее из расстояний r и r_0 соответственно.

Таким образом, функцию Грина для области, внешней к акустически жесткому клину, можно представить как сумму ряда

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_\nu (kr_<) H_\nu^{(1)} (kr_>) \cos (\nu\varphi).$$

Для того чтобы определить коэффициенты c_m, следует подставить это представление в уравнение (3.4) и положить $r = r_0$, т. е. $r_> = r_<$ и $\varphi = \varphi_0$. Однако непосредственная подстановка не приводит к цели, так как в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$ поле имеет особенность. Запишем для сокращения дальнейших преобразований последнее выражение в виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m (r) \cos (\nu\varphi). \tag{3.12}$$

Разложим дельта-функцию $\delta (\varphi - \varphi_0)$ в ряд Фурье по функциям $\cos (\nu\varphi)$, т. е. запишем

$$\delta (\varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m \cos \frac{\pi m \varphi}{\alpha}.$$

Умножим обе части на $\cos (\pi q\varphi/\alpha)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до α. Учитывая, что

$$\int_0^a \cos\frac{\pi m\varphi}{\alpha}\cos\frac{\pi q\varphi}{\alpha}\,d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq m; \\ \alpha/2 & \text{при } q = m \neq 0; \\ \alpha & \text{при } q = m = 0, \end{cases}$$

получим

$$\delta(\varphi-\varphi_0) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m \cos\frac{\pi m\varphi}{\alpha}\cos\frac{\pi m\varphi_0}{\alpha}, \qquad (3.13)$$

где $\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ при $m > 0$. Подставив выражения (3.12) и (3.13) в уравнение (3.4), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}A_m(r)\right] + r(k^2-\nu^2)A_m(r) = -\delta(r-r_0)\frac{\epsilon_m}{\alpha}\cos\frac{\pi m\varphi_0}{\alpha}.$$

Проинтегрируем теперь левую и правую части по некоторому промежутку r_1, r_2, внутри которого находится точка r_0:

$$\left[r\frac{\partial}{\partial r}A_m(r)\right]_{r_1}^{r_2} + (k^2-\nu^2)\int_{r_1}^{r_2} rA_m(r)\,dr = -\frac{\epsilon_m}{\alpha}\cos\frac{\pi m\varphi_0}{\alpha}.$$

При подстановке верхнего и нижнего пределов следует использовать выражения (3.10а) и (3.10б) соответственно. Стягивая промежуток интегрирования к точке r_0, получим, что второе слагаемое в левой части обратится в нуль, а оставшиеся члены будут удовлетворять соотношению

$$c_m kr_0[J_\nu(kr_0)H_\nu^{(1)\prime}(kr_0) - J'(kr_0)H_\nu^{(1)}(kr_0)] = -\frac{\epsilon_m}{\alpha}\cos\frac{\pi m\varphi_0}{\alpha}.$$

С учетом того, что выражение в квадратных скобках равно $2i\alpha/(\pi kr_0)$, найдем значения коэффициентов c_m. В результате получим функцию Грина для клина с акустически жесткими гранями

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{\pi i}{2\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\epsilon_m J_\nu(kr_<)H_\nu^{(1)}(kr_>)\cos(\nu\varphi)\cos(\nu\varphi_0), \qquad (3.14)$$

где $\nu = \pi m/\alpha$, $\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ при $m > 0$.

Для клина с акустически мягкими гранями при граничном условии $p|_{\varphi=0,\,\alpha} = 0$ таким же образом получим

$$G(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{\pi i}{\alpha}\sum_{m=1}^{\infty}J_\nu(kr_<)H_\nu^{(1)}(kr_>)\sin(\nu\varphi)\sin(\nu\varphi_0). \qquad (3.15)$$

Заметим, что функции Грина (3.14) и (3.15) являются симметричными относительно координат r, φ и r_0, φ_0. Поэтому они удовлетворяют принципу взаимности.

3.1.3. Дифракция цилиндрической звуковой волны на полуплоскости. Дифракция на полуплоскости описывается выражениями (3.14), (3.15), в которых следует положить $\alpha = 2\pi$. Тогда для акустически жесткой полуплоскости

$$G(\vec{r}, \vec{r_0}) = \frac{i}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_{m/2}(kr_<) H_{m/2}^{(1)}(kr_>) \cos\frac{m\varphi}{2} \cos\frac{m\varphi_0}{2}. \qquad (3.16)$$

Для акустически мягкой полуплоскости

$$G(\vec{r}, \vec{r_0}) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} J_{m/2}(kr_<) H_{m/2}^{(1)}(kr_>) \sin\frac{m\varphi}{2} \sin\frac{m\varphi_0}{2}. \qquad (3.17)$$

Из физических соображений следует, что если источник находится на продолжении акустически жесткой полуплоскости, то влияние последней должно отсутствовать. Для того чтобы это проверить, положим $\varphi_0 = \pi$. Тогда члены ряда с нечетными номерами пропадут, а члены с четными номерами $m = 2n$ образуют ряд с целыми индексами

$$\frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n J_n(kr_<) H_n^{(1)}(kr_>) \cos(n\varphi).$$

Применим к треугольнику $A_0 0A$ теорему сложения для цилиндрических функций. Тогда сумму последнего ряда можно записать в виде $iH_0^{(1)}(kR)/4$, где $R = |\vec{r_0} - \vec{r}|$ – расстояние между точками A и A_0. Таким образом, получаем функцию Грина для свободного пространства.

3.1.4. Дифракция плоской звуковой волны на клине. Устремим в формулах (3.14), (3.15) величину $kr_>$ к бесконечности и воспользуемся асимптотическим представлением при $kr_0 = kr_> \gg 1$

$$H_\nu^{(1)}(kr_0) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp(ikr_0 - i\nu\pi/2 - i\pi/4). \qquad (3.18)$$

Пронормируем звуковое давление к давлению на ребре, которое развивает линейный источник в свободном пространстве. Воспользуемся для этого функцией Грина (3.2), в которой положим $r = 0$, $kr_0 \gg 1$. Тогда

$$G_0(0, \vec{r_0}) \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4). \qquad (3.19)$$

Разделив каждое из выражений (3.14) и (3.15) на правую часть формулы (3.19), с учетом асимптотики (3.18) запишем полное звуковое давление, возникающее в результате дифракции плоской звуковой волны единичной амплитуды.

Для акустически жесткого клина

$$p = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \exp(-i\nu\pi/2) J_\nu(kr) \cos(\nu\varphi) \cos(\nu\varphi_0) \tag{3.20}$$

Для акустически мягкого клина

$$p = \frac{4\pi}{\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \exp(-i\nu\pi/2) J_\nu(kr) \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi_0). \tag{3.21}$$

Заметим, что последнее выражение определяет дифракцию плоской волны вида $p_0 = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)]$, фронт которой параллелен ребру клина, т. е. оси z (см. рис. 3.1, *б*), а направление падения перпендикулярно к ребру. Если же волна падает под углом к ребру клина и угол между волновым вектором и ребром клина составляет θ, то падающая волна описывается выражением $p_0 = \exp[-ikr \cos(\varphi - \varphi_0) \sin\theta + ikr \cos\theta]$. Здесь φ_0 – угол между проекцией волнового вектора на плоскость xy и осью x. Результат дифракции такой волны на клине определяется соотношениями (3.20) и (3.21), в которых следует заменить k на $k \sin\theta$ и добавить множитель $\exp(ikz \cos\theta)$.

3.1.5. Условие на ребре. Рассмотрим характер изменения поля вблизи ребра, т. е. при $kr \to 0$. В этом случае выражения (3.20) и (3.21) можно записать соответственно в виде

$$p \approx C_1 + C_2 (kr)^{\pi/\alpha}; \quad p \approx C_3 (kr)^{\pi/\alpha}, \tag{3.22}$$

где C_1, C_2, C_3 – величины, не зависящие от r.

Из этих представлений следует, что звуковое давление на ребре остается ограниченным, несмотря на то, что для наблюдателя, находящегося вдали от ребра, дифрагированные волны представляются исходящими из источника, расположенного на ребре (см. п. 3.2.4). Как следует из формул (3.22), реального физического источника энергии на ребре нет.

Радиальную составляющую колебательной скорости можно записать для акустически жесткой и мягкой поверхностей в форме

$$v_r = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \approx C_4 (kr)^{\pi/\alpha - 1}. \tag{3.23}$$

Если $\alpha > \pi$, то показатель степени будет отрицательным и вблизи ребра появляется особенность. Наиболее сильной она будет при $\alpha = 2\pi$.

В этом случае $v_r \approx C_4/\sqrt{kr}$. Появление бесконечных колебательных скоростей вблизи ребра объясняется весьма большими градиентами поля в этой области. (Разумеется, бесконечное возрастание скорости является следствием пренебрежения вязкостью среды и нелинейностью). При $\alpha < \pi$ (двугранный угол) особенностей колебательной скорости вблизи ребра не возникает.

Соотношения (3.22) и (3.23) составляют содержание *условий Мейкснера*, определяющих характер поля вблизи острых кромок тел, рассеивающих или излучающих звук.

3.2. Разделение поля на геометрооптическую и дифракционную составляющие

3.2.1. Преобразование рядов к интегральной форме. Сходимость рассматриваемых разложений определяется множителями $J_\nu(kr_<)$. Записанные выше ряды хорошо сходятся при небольших значениях $kr_<$. Так же как и для рядов, возникающих при решении задач излучения звука цилиндром, члены рядов начинают быстро убывать, когда индекс превысит аргумент. Сходимость обеспечивается, если $\nu \approx$ $\approx (1{,}5 \ \ldots \ 2)kr_<$, т. е. $m \approx \dfrac{(1{,}5 \ldots 2)\alpha}{\pi} kr_<$. В частности, когда $\alpha = 2\pi$, необходимо суммировать ряды до $m \approx (3 \ \ldots \ 4)kr_<$. Практически непосредственное вычисление полей по формулам (3.14) ... (3.17) и (3.20), (3.21) возможно при $kr_<$, не превышающих нескольких десятков. Для вычисления полей в дальней зоне необходимо получить асимптотические представления, справедливые при $kr_< \gg 1$.

Заметим, что ряды (3.14), (3.15) можно записать единообразно:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{\pi i}{4\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_\nu(kr_<) H_\nu^{(1)}(kr_>) \{\cos[\nu(\varphi - \varphi_0) \pm$$

$$\pm \cos[\nu(\varphi + \varphi_0)]\} . \qquad (3.24)$$

Верхний и нижний знаки используются для акустически жесткого и мягкого клиньев соответственно. Схема дальнейших преобразований заключается в следующем. Преобразуем ряд (3.24) в два интеграла на комплексной плоскости некоторой переменной. Один из них может быть вычислен точно в виде суммы рядов по вычетам. Этот интеграл описывает геометрооптическую составляющую поля, т. е. прямую (падающую) волну и волны, отраженные от граней клина. Второй вычисляется асимптотически при больших волновых расстояниях до ребра клина и дает дифракционное поле в дальней зоне.

Воспользуемся соотношением (8.424) из работы [16]:

$$J_\nu(kr_<) H_\nu^{(1)}(kr_>) = \frac{\exp(-i\pi\nu/2)}{\pi i} \int_{\nu}^{i\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{k^2(r_<^2 + r_>^2)}{t}\right)\right] \times$$

$$\times J_\nu\left(\frac{ik^2 r_> r_<}{t}\right) \frac{dt}{t} \qquad (3.25)$$

Функцию Бесселя от мнимого аргумента, входящую в правую часть выражения, запишем в форме интеграла (8.412.6) из работы [16]

$$J_\nu\left(\frac{ik^2 r_> r_<}{t}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_1}\exp\left[\frac{k^2 r_> r_<}{t}\sin\theta+i\nu\theta\right]d\theta.$$

Контур L_1 изображен по рис. 3.2, *а*. Области, где интеграл сходится, заштрихованы. Подставим последнее выражение в формулу (3.25), изменим порядок интегрирования с учетом соотношения

$$H_0^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_0^{i\infty}\exp\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{z^2}{t}\right)\right]\frac{dt}{t},$$

которое следует из формулы (3.25), если положить в ней $kr_<=0$, $\nu=0$. После этого получим

$$J_\nu(kr_<)H_\nu^{(1)}(kr_>)=\frac{\exp(-i\pi\nu/2)}{2\pi}\int\limits_{L_1}\exp(i\nu\theta)\times$$

$$\times H_0^{(1)}(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\sin\theta})d\theta. \qquad (3.26)$$

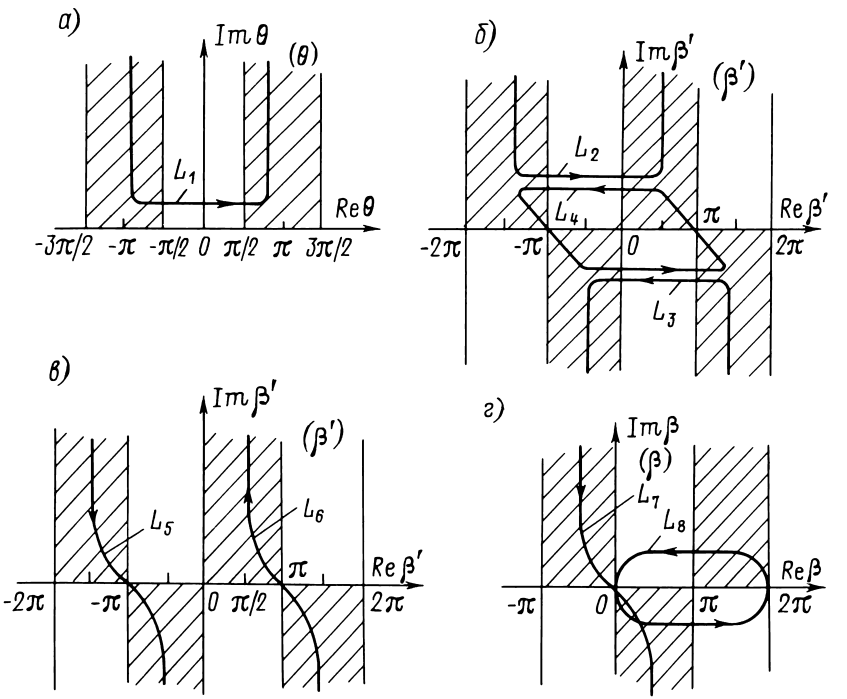


Рис. 3.2. Контуры интегрирования: *а* – L_1; *б* – L_2, L_3, L_4; *в* – L_5, L_6; *г* – L_7, L_8

Заметим, что здесь можно отказаться от обозначений $r_>$, $r_<$, так как они входят симметрично.

Сдвинем контур интегрирования влево на $\pi/2$, для чего выполним замену переменных $\beta' = \theta - \pi/2$. После этого контур L_1 займет положение L_2 (рис. 3.2, *б*). Подставим полученное выражение в функцию Грина (3.24) и преобразуем косинусы к экспоненциальному виду. В подынтегральном выражении получаются суммы членов четырех геометрических прогрессий. После суммирования и преобразований получим

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{i}{8\alpha} \int\limits_{L_2} H_\nu^{(1)} \left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\beta'}\right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(\beta' + \varphi - \varphi_0)/\alpha\right]} - \frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(-\beta' + \varphi - \varphi_0)/\alpha\right]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(\beta' + \varphi + \varphi_0)/\alpha\right]} \mp \frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(-\beta'' + \varphi + \varphi_0)/\alpha\right]} \right] d\beta'.$$

Если во втором и четвертом слагаемых сделать замену переменных $\beta'' = -\beta'$, то последнее выражение можно записать в более компактном виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{i}{8\alpha} \int\limits_{L_2 + L_3} H_0^{(1)} \left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\beta''}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(\beta'' + \varphi - \varphi_0)/\alpha\right]} \pm \frac{1}{1 - \exp\left[i\pi(\beta'' + \varphi + \varphi_0)/\alpha\right]} \right\} d\beta''.$$

Прибавим и вычтем интеграл по замкнутому контуру L_4. Интегралы по горизонтальным участкам уничтожаются, а оставшееся выражение можно записать в виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{i}{8\alpha} \left(\int\limits_{L_5 + L_6} - \int\limits_{L_4} \right).$$

Контуры L_5 и L_6 изображены на рис. 3.2, *в*. Заменами переменных $\beta = \beta' + \pi$ и $\beta = \beta' - \pi$ интегралы по контурам L_5 и L_6 можно свести к интегралу по контуру L_7, а интеграл по контуру L_4 – к интегралу по контуру L_8 (рис. 3.2, *г*). Обозначив эти слагаемые через G_d и G_g, запишем

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = G_g + G_d, \qquad (3.27)$$

где

$$G_g = \frac{-i}{8\alpha} \int\limits_{L_8} H_0^{(1)}[k\rho(\beta)] \left\{ \frac{1}{1-\exp[i\pi(\beta-\pi+\varphi-\varphi_0)/\alpha]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{1-\exp[i\pi(\beta-\pi+\varphi+\varphi_0)/\alpha]} \right\} d\beta; \qquad (3.28)$$

$$G_d = -\frac{\sin(\pi^2/\alpha)}{8\alpha} \int\limits_{L_7} H_0^{(1)}[k\rho(\beta)] \left\{ \frac{1}{\cos\frac{\pi^2}{\alpha} - \cos\left[\frac{\pi}{\alpha}(\varphi-\varphi_0+\beta)\right]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{\cos\frac{\pi^2}{\alpha} - \cos\left[\frac{\pi}{\alpha}(\varphi+\varphi_0+\beta)\right]} \right\} d\beta. \qquad (3.29)$$

Здесь обозначено

$$\rho(\beta) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\beta}. \qquad (3.30)$$

Как будет показано ниже, слагаемые G_d и G_g описывают *дифракционную и геометрооптическую составляющие поля* соответственно.

3.2.2. Геометрооптическая составляющая поля. Для вычисления интеграла по замкнутому контуру L_8 рассмотрим полосы, находящиеся на вещественной оси в точках

$$\beta_m = 2m\alpha + \pi - \varphi + \varphi_0; \quad \beta'_m = 2m\alpha + \pi - \varphi - \varphi_0; \quad m = 0, \pm1, \pm2, .. \qquad (3.31)$$

Интеграл определится в виде суммы вычетов, причем надо учитывать только полюсы, находящиеся в промежутке 0 ... 2π. Поэтому отдельные члены ряда будут отличны от нуля лишь при выполнении условий

$$\pi - |2m\alpha + \varphi - \varphi_0| > 0, \quad \pi - |2m\alpha + \varphi + \varphi_0| > 0.$$

Для сокращения записи введем единичную функцию Хевисайда $H(x) = 1$ при $x \geqslant 0$ и $H(x) = 0$ при $x < 0$. Вычислив вычеты, представим величину G_g в виде конечной суммы:

$$G_g = \frac{i}{4} \sum_{m\sim} H_0^{(1)}(k\rho(\beta_m)) H(\pi - |2m\alpha + \varphi - \varphi_0|) \pm$$

$$\pm \frac{i}{4} \sum_{m\sim} H_0^{(1)}(k\rho(\beta'_m)) H(\pi - |2m\alpha + \varphi + \varphi_0|). \qquad (3.32)$$

Суммирование распространяется на такие положительные и отрицательные значения m, при которых β_m и β'_m находятся в пределах $0 \div 2\pi$.

Члены ряда (3.32) допускают простую геометрооптическую интерпретацию. Рассмотрим сначала клин, имеющий угол раствора $\alpha > \pi$ (рис. 3.3, *а*). В этом случае в промежуток $0 \div 2\pi$ могут попасть только три полюса: β_0, β'_0 и β''_{-1}. Как будет показано ниже, член $m = 0$ первой суммы в формуле (3.32) определяет прямую волну, распространяющуюся непосредственно от источника к точке наблюдения, член $m = 0$ второй суммы описывает волну, отраженную от верхней грани, и член $m = -1$ второй суммы – волну, отраженную от нижней грани.

Пространство вне клина разбивается на три области. В области *I* существуют две волны – прямая и отраженная от верхней грани. Прямой волне соответствует луч A_0A, для которого $R = \rho(\beta_0) = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$. Поэтому поле прямой волны определяется первым слагаемым ряда (3.32), т. е. $iH_0^{(1)}(kR)/4$. Отраженная волна от верхней грани определяется первым слагаемым второй суммы (3.32), причем $\rho(\beta'_0) = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi + \varphi_0)}$. Из рис. 3.3, *а* видно, что эта величина равна длине пути A_0BA, равной расстоянию от мнимого источника B'_0 до точки наблюдения. Знак „+" перед вторым слагаемым соответствует акустически жесткому клину. Если грани клина акустически мягкие, то отражение происходит с изменением фазы на 180°, что учитывается знаком минус.

В область *II* волна, отраженная по законам геометрической акустики, не попадает. Вторая сумма ряда (3.32) в этой области пропадает, так как аргумент функции $H(x)$ становится меньше нуля.

В области *III* аргументы функции Хевисайда и в первой и во второй суммах становятся отрицательными, поэтому здесь $G_g = 0$. Действительно, зона *III* является областью геометрической тени, в которую не попадают ни падающая, ни отраженная волны.

Если источник звука A_0 находится левее и ниже штриховой линии, являющейся продолжением нижней грани клина, то нижняя грань является освещенной и существует волна, отраженная от этой грани. Подобную ситуацию характеризует член второй суммы, для которого $m = -1$.

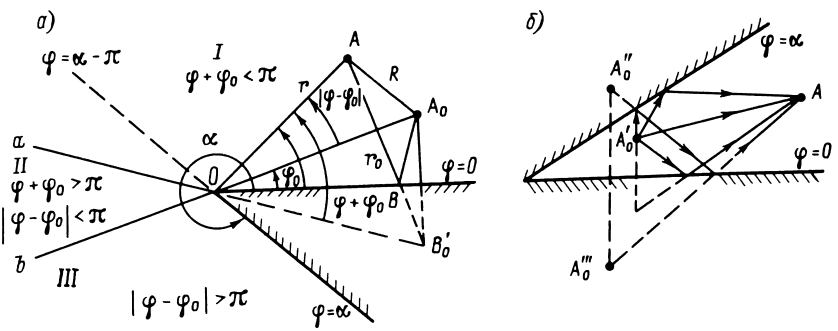


Рис. 3.3. Геометрооптические составляющие поля: *а* – клин, имеющий угол $\alpha > \pi$; *б* – клин, имеющий угол $\alpha < \pi$

Если же источник звука расположен вблизи биссектрисы угла α, то освещаются одновременно и верхняя и нижняя грани. При этом все три члена (которым соответствуют значения β_0, β'_0, β'_{-1}) оказываются отличными от нуля.

При $\alpha < \pi$ (рис. 3.3, *б*) клин превращается в двугранный угол. При этом количество полюсов, определяемых формулой (3.31), увеличивается. Каждому из полюсов соответствует луч, отражающийся от граней клина, и мнимый источник зеркально отраженной волны. Кроме однократно отраженных появляются и многократно отраженные волны. Так, например, мнимый источник A''_0 можно отразить от грани $\varphi = 0$. В результате получится источник A''_0, которому соответствует двукратно отраженная волна. Аналогично можно отразить источник A'_0 относительно грани $\varphi = \alpha$, в результате чего получится еще один двукратно отраженный луч, не показанный на рисунке.

Приведенные рассуждения показывают, что слагаемое G_g описывает волны, распространяющиеся по геометрооптическим законам.

3.2.3. Дифракционная составляющая поля. Слагаемое G_d в выражении (3.27) определяет вклад волны, который не укладывается в рамки простых лучевых представлений. Этот член можно назвать *дифракционным.* Заметим, что для двугранного угла ($\alpha < \pi$) существуют значения α, при которых дифракционный член равен нулю. Это происходит при $\alpha = \pi/q$, где q – целое число, так как при этом $\sin(\pi^2/\alpha) = 0$. Для дифракции на клине ($\alpha > \pi$) дифракционный член отличен от нуля при любых значениях угла α.

Формулы (3.27) ... (3.32) являются точными соотношениями, справедливыми при любых расстояниях r и r_0. Как было показано в п. 3.2.2, геометрооптическая составляющая вычисляется точно и представляется в виде конечной суммы (3.32), содержащей небольшое количество членов. Однако составляющая G_d, выраженная через интеграл по незамкнутому контуру, может быть вычислена асимптотически лишь в том случае, если выполняется условие $kr \gg 1$ или $kr_0 \gg 1$.

Воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ханкеля при $k\rho \gg 1$, запишем

$$G_d \approx -\frac{\sin(\pi^2/\alpha)}{8\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\int\limits_{L_7}\frac{\exp[ik\rho(\beta) - i\pi/4]}{\sqrt{\rho(\beta)}}[\beta]\,d\beta. \qquad (3.33)$$

Здесь через $[\beta]$ обозначено выражение, ограниченное квадратными скобками в формуле (3.29). Применим к этому интегралу метод перевала. Положение седловой точки β_s определяется уравнением $\rho'(\beta) = 0$, откуда следует $\beta_s = 0$. Вблизи этой точки может оказаться полюс функции $[\beta]$. В этом случае надо будет учесть вклад полюса. Такая ситуация встретится, если будет выполняться одно из условий $\varphi - \varphi_0 \approx \pi$ или $\varphi + \varphi_0 \approx \pi$, т. е. в тех случаях, когда точка наблюдения находится вблизи границ геометрической тени для прямой и отраженной волн (см. рис. 3.1, *а*). Поэтому дифракционную составляющую G_d следует

вычислять модифицированным методом перевала, обобщенным на случай, если полюс находится вблизи седловой точки [54; т. 1. С. 492]. В соответствии с этим методом справедливо асимптотическое выражение

$$\int_L F(z)\exp[pf(z)]dz \approx \exp[pf(z_s)][\sqrt{\pi/pT} \pm$$

$$\pm i2a\sqrt{\pi}\exp(-pb^2)\,Q(\mp ib\sqrt{p})], \qquad (3.34)$$

где L – контур наискорейшего спуска; z_s – точка перевала; $a = \lim\limits_{z \to z_0}[(z-z_0)F(z)]$; $b = \sqrt{f(z_s)-f(z_0)}$; $T = hF(z_s) + a/b$; $h = \sqrt{-2/f''(z_s)}$; $Q(y) = \int\limits_y^\infty \exp(-x^2)dx$; z_0 – простой полюс; $pf''(z_s) \gg 1$.

Верхние знаки используются при $\operatorname{Im} b > 0$, а нижние – при $\operatorname{Im} b < 0$. Если $f(z) = i\hat{f}(z)$, где $\hat{f}$ – вещественная функция, z_s – вещественная величина, то $\arg h = \pm\pi/4$, причем знак совпадает со знаком величины $\hat{f}(z_s)$. Значение $\arg b$ определено таким образом, чтобы $b \to (z_0 - z_s)/h$ при $z_0 \to z_s$. Если полюс отсутствует, т. е. $F(z)$ – аналитическая функция, то $a = 0$, и формула (3.34) превращается в выражение (21.1) из работы [63], соответствующее обычному методу перевала.

Применим формулу (3.34) к интегралу (3.33). Точка перевала будет $\beta_s = 0$. Полюсы находятся в точках $\beta_0^{(1)} = \pi - \varphi + \varphi_0$; $\beta_0^{(2)} = \pi - \varphi - \varphi_0$; $\beta_0^{(3)} = 2\alpha - \pi - \varphi_0 - \varphi$. Если какой-либо из полюсов располагается вблизи точки перевала, то это означает выполнение одного из следующих условий:

$$\varphi \approx \pi + \varphi_0; \quad \varphi \approx \pi - \varphi_0; \quad \varphi \approx 2\alpha - \pi - \varphi_0. \qquad (3.35)$$

Первое из этих условий соответствует положению точки наблюдения вблизи границы тени для прямой волны, т. е. линии *Ob* на рис. 3.3, *а*. При выполнении второго условия точка наблюдения находится вблизи линии *Oa*, определяющей границу тени для волны, отраженной от верхней грани клина. И наконец, третье условие соответствует положению точки наблюдения вблизи прямой, находящейся на границе света и тени для волны, отраженной от нижней грани [эта прямая на рис. 3.3, *а* не показана]. В последнем случае предполагается, что излучатель A_0 находится ниже линии $\varphi = \alpha - \pi$, являющейся продолжением нижней грани, т. е. освещает эту грань.

При вычислении интеграла (3.33) целесообразно представить результат в виде суммы двух слагаемых, соответствующих первому и второму членам в квадратных скобках формулы (3.34)

$$G_d = G_{d1} + G_{d2}, \qquad (3.36)$$

где

$$G_{d1} = \frac{i \exp\,[ik(r + r_0)\,]}{4\alpha\sqrt{k^2 r r_0}} \sin\frac{\pi^2}{\alpha}\left[\frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,[\pi(\varphi - \varphi_0)\,/2]} \pm\right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,(\pi(\varphi + \varphi_0)\,/2)}\right]; \qquad (3.37)$$

$$G_{d2} \approx q_1 \psi(\varphi) \pm q_2 \psi(-\varphi) \pm q_3 \psi(2\alpha - \varphi); \qquad (3.38)$$

$$\psi(\theta) = -\frac{\exp\,[ik(r + r_0) + i\pi/4]}{4\sqrt{2\pi k\,(r + r_0)}}\left[F(\xi) - \frac{\exp\,(i\pi/4)}{\xi\sqrt{2\pi}}\right] \times$$

$$\times \operatorname{sign}\,(\pi - |\,\theta - \varphi_0\,|)\,;$$

$$\xi = \sqrt{\frac{kr r_0}{r + r_0}}\left|\cos\frac{\theta - \varphi_0}{2}\right|. \qquad (3.39)$$

Здесь $F(\xi)$ – функция, выражающаяся через *интегралы Френеля*

$$F(\xi) = \exp\,(-i2\xi^2)\{1 - (1 - i)\,[C(2\xi/\sqrt{\pi}) + iS(2\xi/\sqrt{\pi})]\}\,. \qquad (3.40)$$

Знаки „+" и „–" в формуле (3.38) по-прежнему относятся к акустически жестким и мягким границам соответственно: $\operatorname{sign}(x) = +1$ при $x > 0$ и $\operatorname{sign}(x) = -1$ при $x < 0$; $q_1 = 1$ при $\varphi_0 < \alpha - \pi$ или при $\varphi_0 > \pi$ и $q_1 = 0$ при других углах падения; $q_2 = 1$ при $\varphi_0 < \pi$ и $q_2 = 0$ при $\varphi_0 > \pi$; $q_3 = 1$ при $\varphi_0 > \alpha - \pi$ и $q_3 = 0$ при $\varphi_0 < \alpha - \pi$. Таким образом, первое слагаемое в формуле (3.38) отлично от нуля в тех случаях, когда есть граница свет–тень для прямой волны, второе и третье – если есть волны, отраженные от верхней и нижней граней соответственно.

Если волна падает в пределах углов, ограниченных лучами, являющимися продолжениями граней клина, то зона тени для прямой волны отсутствует и первое слагаемое пропадает.

Заметим, что при вычислениях с использованием интегралов Френеля иногда возникают недоразумения, связанные с различными определениями этих функций, встречающимися в литературе. Здесь использованы следующие определения:

$$C(x) = \int_0^x \cos\,\frac{\pi}{2}t^2\,dt;\quad S(x) \approx \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt. \qquad (3.41)$$

Для вычисления интегралов Френеля на ЭВМ можно пользоваться формулами [51]

$$C(x) = \frac{1}{2} + f(x)\sin\,(\pi x^2/2) - g(x)\cos\,(\pi x^2/2)\,; \qquad (3.42)$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - f(x)\cos(\pi x^2/2) - g(x)\sin(\pi x^2/2),$$

где

$$f(x) = \frac{1 + 0{,}926x}{2 + 1{,}792x + 3{,}104x^2}; \quad g(x) = \frac{1}{2 + 4{,}142x + 3{,}492x^2 + 6{,}670x^3}.$$

Ошибка при применении этих формул не превышает $2 \cdot 10^{-3}$. Таблицы более точных значений $f(x)$ и $g(x)$ приведены в работе [51].

Другое асимптотическое представление дифракционного поля при $kr,\ kr_0 \gg 1$ получено в работе [105]. В ней объединены слагаемые G_{d1} и G_{d2}. Результаты можно записать в наших обозначениях следующим образом:

$$G_d = \frac{-i}{8\alpha} \frac{\exp(ik(r + r_0))}{\sqrt{k^2 r r_0}} D(\varphi, \varphi_0), \tag{3.43}$$

где

$$D(\varphi, \varphi_0) = \sum_{j=1}^{4} a_j \operatorname{ctg} T_j F_1(x_j); \quad x_j = \frac{kr r_0}{r + r_0} 2\left(\frac{\alpha}{\pi} \sin T_j\right)^2;$$

$$F_1(x_j) = x_j \sqrt{2\pi} \exp(-i\pi/4) F(x_j),$$

где $F(x_j)$ определяется по формуле (3.40), $T_1 = \pi(\pi + \varphi - \varphi_0)/(2\alpha)$; $T_2 = \pi(\pi - \varphi + \varphi_0)/(2\alpha)$; $T_3 = \pi(\pi + \varphi + \varphi_0)/(2\alpha)$; $T_4 = \pi(\pi - \varphi - \varphi_0)/(2\alpha)$; $a_j = 1$ для жесткого клина и $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = a_4 = -1$ для мягкого клина. Как показано в работе [105], ошибка при использовании этой формулы меньше 3 % для $r = 0{,}25\lambda$ и 1 % для $r = 0{,}5\lambda$.

3.2.4. Обсуждение результатов. Итак, точное решение задачи о дифракции цилиндрической звуковой волны (3.1) на клине с акустически жесткими или мягкими гранями можно записать в виде

$$p = -ik\rho c Q G(\vec{r}, \vec{r}_0), \tag{3.44}$$

где функция Грина $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ определяется рядом (3.24). Заметим, что этот ряд описывает полное поле, т. е. сумму падающего, отраженного и дифрагированного звуковых полей. Ряд (3.24) пригоден для вычислений в том случае, если величина $kr_<$, равная наименьшему из волновых расстояний kr и kr_0, не слишком велика. Реально при расчетах на ЭВМ ряд удобно использовать, если $kr_<$ не превышает нескольких десятков, т. е. расстояние $r_<$ не превышает десяти длин звуковой волны. При больших значениях параметров kr и kr_0 следует использовать представления поля в виде суммы (3.27), описывающей поле в виде суммы

геометрооптической и дифракционной составляющих, причем геометрооптическая составляющая определяется конечным рядом (3.32), пригодным при любых волновых расстояниях kr и kr_0.

Дифракционная составляющая, в свою очередь, разбивается на два слагаемых (3.37), (3.38), причем G_{d1} определяет дифрагированное поле вдали от границ тени для прямой и отраженной волн, а $G_{d1} + G_{d2}$ определяет поле в окрестности этих границ.

Зависимость амплитуды и фазы полей G_{d1} и G_{d2} от волнового расстояния kr соответствует цилиндрической волне, распространяющейся от вершины клина. Поэтому наблюдателю, находящемуся в зоне тени вдали от вершины, будет казаться, что дифрагированная звуковая волна исходит из вершины клина.

Заметим, что все три составляющие поля (G_g, G_{d1} и G_{d2}) являются функциями угла φ, имеющими разрывы на границах, определяемых соотношениями (3.35). Вместе с тем суммарное поле $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ является непрерывной функцией угла φ, как и должно быть из физических соображений. Действительно, на указанных линиях разрывы одних членов компенсируются разрывами других и полное поле оказывается гладкой функцией. Для того чтобы это показать, рассмотрим, например, окрестность луча Ob на рис. 3.3, *а*, являющегося границей тени для прямой волны. Вычислим сначала функцию $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ выше луча Ob при $\varphi = \varphi_0 + \pi - \epsilon$, где ϵ – малый угол. Геометрооптическая часть поля будет состоять лишь из падающей волны, которая определяется по формуле (3.32):

$$G_g = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(k \sqrt{r_0^2 + r^2 + 2 r_0 r \cos \epsilon}\right)_{\epsilon \to 0} \approx \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k (r + r_0)}} \times$$

$$\times \exp\left[ik(r + r_0) - i\pi/4\right]. \qquad (3.45)$$

Члены G_{d1} и G_{d2} при $\epsilon \to 0$ можно записать в виде

$$G_{d1} \approx -\frac{i}{4\pi\epsilon} \frac{\exp\left[ik(r + r_0)\right]}{\sqrt{k^2 r r_0}}; \qquad (3.46)$$

$$G_{d2} \approx -\frac{\exp\left[ik(r + r_0) + i\pi/4\right]}{4\sqrt{2\pi k (r + r_0)}} + \frac{i \exp\left[ik(r + r_0)\right]}{4\pi\epsilon \sqrt{k^2 r r_0}}. \qquad (3.47)$$

Поскольку при $\epsilon \to 0$ $\xi \to \sqrt{\frac{k r r_0}{r + r_0}} \cdot \frac{\epsilon}{2}$, то $F(\xi) \to 1$. Сложив функции G_g, G_{d1}, G_{d2}, получим, что члены, имеющие особенность при $\epsilon \to 0$, уничтожаются, а оставшиеся слагаемые дадут в результате

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) \approx \frac{i}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi k (r + r_0)}} \exp\left[ik(r + r_0) - i\pi/4\right]; \quad (\varphi = \varphi_0 + \pi). \qquad (3.48)$$

Ниже луча Ob при $\varphi = \varphi_0 + \pi + \epsilon$ по формуле (3.32) получим $G_g = 0$. Это соответствует отсутствию прямой волны в зоне тени, а слагаемые

G_{d1} и G_{d2} будут отличаться от соответствующих величин, определяемых выражениями (3.46) и (3.47), лишь знаками. Полное поле снова будет при этом описываться выражением (3.48). Следовательно, предельные переходы $\epsilon \to 0$ как сверху, так и снизу границы зоны тени приводят к одной и той же величине. Это и доказывает непрерывность асимптотических формул, полученных выше. Таким образом, эти выражения являются равномерными асимптотическими представлениями, справедливыми для любых положений источника и точки наблюдения (при kr, $kr_0 \gg 1$).

Заметим, что функция Грина (3.48) равна половине функции Грина для свободного пространства, откуда следует, что в дальнем поле на границе зоны тени всегда соблюдается условие $p = p_0/2$. Последнее соотношение не зависит ни от граничных условий на поверхности, ни от угла раствора клина, ни от угла падения звука.

3.2.5. Асимптотические формулы для дифракции плоской волны на клине. Устремим r_0 к бесконечности и пронормируем полученное выражение к звуковому давлению на ребре клина, которое развивает линейный источник в свободном пространстве. Для этого необходимо разделить полученную функцию Грина $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ на функцию Грина $G_0(0, \vec{r}_0)$, определяемую выражением (3.19). После этого получим звуковое давление, возникающее при падении на клин плоской волны единичной амплитуды

$$p = p_g + p_{d1} + p_{d2}, \tag{3.49}$$

где

$$p_g = \sum_m \exp\,(ikr\cos\beta_m) H(\pi - |2m\alpha + \varphi - \varphi_0|) \pm$$
$$\pm \sum_m \exp\,(ikr\cos\beta'_m)\, H(\pi - |2m\alpha + \varphi + \varphi_0|)\,; \tag{3.50}$$

$$p_{d1} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \exp\,(ikr + i\pi/4) \sin\frac{\pi^2}{\alpha} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,[\pi(\varphi - \varphi_0)/\alpha]} \pm \frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,[\pi(\varphi + \varphi_0)/\alpha]}\right]; \tag{3.51}$$

$$p_{d2} = q_1\psi_1(\varphi) \pm q_2\psi_1(-\varphi) \pm q_3\psi_1(2\alpha - \varphi)\,; \tag{3.52}$$

$$\psi_1(\theta) = -\frac{1}{2}\exp\,(ikr)\left[F(\xi_1) - \frac{\exp\,(i\pi/4)}{\xi_1\sqrt{2\pi}}\right] \operatorname{sign}\,(\pi - |\theta - \varphi_0|); \tag{3.53}$$

$$\xi_1 = \sqrt{kr}\left|\cos\frac{\theta - \varphi_0}{2}\right|\,. \tag{3.54}$$

Здесь β_m и β'_m по-прежнему определяются выражениями (3.31), а $F(\xi_1)$ – формулой (3.40); знаки „+" и „–" соответствуют акустически жестким и мягким граням; функция $\operatorname{sign}(x)$ определяет знак числа; q_1, q_2, q_3 определены так же, как в формуле (3.38); m – положительные и отрицательные целые числа, при которых β_m и β'_m лежат в пределах $0 \div 2\pi$.

При $\alpha > \pi$ составляющая p_g сводится к трем слагаемым

$$p_g = \exp(-ikr\cos(\varphi-\varphi_0))\,H(\pi-|\varphi-\varphi_0|) \pm \exp(-ikr\cos(\varphi+\varphi_0))\times$$

$$\times H[\pi-(\varphi+\varphi_0)] \pm \exp[-ikr\cos(2\alpha+\varphi+\varphi_0)]H[\pi-|\varphi+\varphi_0-2\alpha|],$$

из которых первое описывает прямую волну, второе – волну, отраженную от верхней грани, и третье – волну, отраженную от нижней грани.

В несколько иной форме представлено решение при $kr \gg 1$ в работе [87], где объединены члены $p_g + p_{d2}$. Эти составляющие можно преобразовать к виду

$$p_g + p_{d2} \approx \psi_2(u_1) + \psi_2(u_2)H(5\pi - 2\varphi_0 - 4\alpha) \mp \psi_2(u_3) \pm$$
$$\pm \psi_2(u_4)\,H(4\pi + 2\varphi_0 - 3\alpha),$$

где

$$\psi_2(u_j) = \exp(-ikr\cos u_j)\,[f(x_j) - f_1(x_j)];\ j = 1, 2, 3, 4;$$

$$f(x) = \frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty \exp(it^2)dt = \frac{1}{2} - \operatorname{sign}(x)\frac{\exp(-i\pi/4)}{\sqrt{2}}\left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)+\right.$$

$$\left.+\,iS\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)\right];\quad f_1(x) = \frac{\exp[i(x^2+\pi/4)]}{2\sqrt{\pi}x};\quad x_j = \epsilon_j\sqrt{2kr}\cos(u_j/2);$$

$$\epsilon_1 = \operatorname{sign}[\varphi - (\varphi_0+\pi)];\ \epsilon_2 = 1;\ \epsilon_3 = \operatorname{sign}[\varphi - (\pi-\varphi_0)];$$

$$\epsilon_4 = \operatorname{sign}(2\alpha - \pi - \varphi_0 - \varphi);\ u_1 = \varphi - \varphi_0;\ u_2 = \varphi - \varphi_0 - 2\alpha;$$

$$u_3 = \varphi + \varphi_0;\ u_4 = \varphi + \varphi_0 - 2\alpha.$$

3.2.6. Дифракция плоской волны на полуплоскости. Для того чтобы получить формулы, описывающие дифракцию плоской волны на полуплоскости, следует положить $\alpha = 2\pi$. Асимптотические выражения при $kr > 1$ следуют из соотношений (3.49) ... (3.54), однако в частном случае полуплоскости можно получить точные формулы, справедливые при любых значениях kr. Вернемся к выражению (3.27). Для того чтобы получить геометрооптическую часть поля, в формуле (3.32) следует устремить источник A_0 к бесконечности и выполнить нормировку, указанную выше при выводе формулы (3.49). В результате получится выражение, в котором при $\varphi_0 < \pi$ останутся лишь два слагаемых $m = 0$ в каждой из сумм.

Выражение для дифракционной части поля можно получить из формулы (3.29). Полагая, что источник находится на большом расстоянии

$(kr \gg 1)$, и выполнив нормировку к значению поля на ребре (3.19), получим

$$p_d = -\frac{i}{4\pi}\int\limits_{L_7} \exp(ikr\cos\beta)\left\{\frac{1}{\cos[(\varphi-\varphi_0+\beta)/2]} \pm \frac{1}{\cos[(\varphi+\varphi_0+\beta)/2]}\right\}d\beta.$$

Следуя [53], разобьем контур L_7 (см. рис. 3.2) на два симметричных относительно точки $\beta = 0$ участка и во втором выполним замену $\beta \to -\beta$. Получим

$$p_d = \frac{-i}{\pi}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\int\limits_0^{\pi/2-i\infty} \frac{\cos(\beta/2)}{\cos\beta+\cos(\varphi-\varphi_0)} \exp(ikr\cos\beta)d\beta \pm <\varphi+\varphi_0>.$$

Обозначение $<\varphi+\varphi_0>$ указывает, что второе слагаемое имеет тот же вид, что и первое, но с заменой $\varphi-\varphi_0$ на $\varphi+\varphi_0$. После замены переменных $x = (1+i)\sin(\beta/2)$ получается интеграл по вещественной оси

$$p_d = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\exp(ikr - i\pi/4)\int\limits_0^{\infty} \frac{\exp(-krx^2)}{x^2 - 2i\cos^2[(\varphi-\varphi_0)/2]}dx \pm$$

$$\pm <\varphi+\varphi_0>.$$

Для вычисления этого интеграла можно воспользоваться формулой (3.466.1) из работы [16]:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\exp(-a^2/x^2)}{x^2+b^2}dx = [1-\Phi(ab)]\frac{\pi}{2b}\exp(a^2b^2),$$

где $\Phi(z) = \int\limits_0^z \exp(-t^2)dt$. Заменой $-t^2 = i\pi y^2/2$ последний интеграл можно свести к интегралам Френеля. [Заметим, что определения интегралов Френеля [16] отличаются от определения (3.41)]. В результате получим выражение для полного поля, которое приведем в форме, представленной в работе [54]:

$$p = p_g + p_d, \tag{3.55}$$

где

$$p_g = \exp[-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)]H(\pi - |\varphi-\varphi_0|) \pm$$

$$\pm \exp[-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)]H(\pi-\varphi-\varphi_0); \tag{3.56}$$

$$p_d = -\frac{1}{2}\exp(ikr)[F(\xi_1)\operatorname{sign}(\pi - |\varphi-\varphi_0|) \pm F(\xi_2)\operatorname{sign}(\pi-\varphi-\varphi_0)|;$$

$$\xi_1 = \sqrt{kr}\,|\cos[(\varphi-\varphi_0)/2]; \quad \xi_2 = \sqrt{kr}\,|\cos[(\varphi+\varphi_0)/2]|. \tag{3.57}$$

Здесь $F(\xi)$ определяется выражением (3.40), а $\varphi_0 < \pi$.

Выражения (3.55) ... (3.57) дают точное решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на акустически жесткой и мягкой (знаки „+" и „–" соответственно) полуплоскостях, справедливое при любых значениях φ и r. Скачки геометрооптической части поля на границах зон тени для прямой и отраженной волн компенсируются такими же скачками дифракционной части, в результате поле остается непрерывным.

3.3. Дифракция сферической звуковой волны на клине

3.3.1. О связи между решениями задач дифракции для линейных и точечных источников. Между решениями задач дифракции звука для линейных и точечных источников существует простая связь, которая позволяет сразу записать решение одной из этих задач, если известно решение другой. Рассмотрим случаи, изображенные на рис. 3.4. На рис. 3.4, *а* показан бесконечный в направлении оси z *линейный пульсирующий источник* A_0, излучающий звук в присутствии некоторой отражающей поверхности. Поверхность является цилиндрической с произвольной форме поперечного сечения и бесконечной в направлении оси z. В частном случае поверхность может иметь форму клина или полуплоскости с ребром, параллельным оси z. Источник может находиться и на самой поверхности. В последнем случае получится задача об излучении звука цилиндром. В связи с тем, что поле не зависит от координаты z, точку наблюдения A можно расположить в плоскости xy. Будем обозначать все величины для двумерного и трехмерного случаев верхними индексами 2 и 3 соответственно. Звуковые давления, излучаемые источниками A_0, в двумерном и трехмерном случаях при отсутствии отражающей поверхности можно представить через соответствующие функции Грина для свободного пространства

$$p_0^{(2)} = -ik\rho c Q^{(2)} G_0^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_0); \quad p_0^{(3)} = -ik\rho c Q^{(3)} G_0^{(3)}(\vec{R}, \vec{R}_0). \qquad (3.58)$$

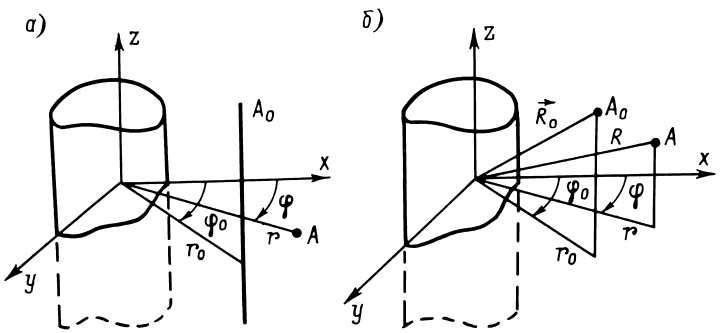


Рис. 3.4. Дифракция на бесконечном цилиндрическом теле: линейный (*а*) и точечный (*б*) источники A_0

Здесь $Q^{(2)}$ и $Q^{(3)}$ – объемные колебательные скорости для обоих источников, причем в двумерном случае $Q^{(2)}$ рассчитана на единицу длины источника. Функции Грина для свободного пространства имеют вид

$$G_0^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_0)=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\vec{r}-\vec{r}_0|);\ G_0^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0)=\frac{\exp(ik|\vec{R}-\vec{R}_0|)}{4\pi|\vec{R}-\vec{R}_0|}. \quad (3.59)$$

В присутствии отражающей поверхности эти источники создают звуковые давления

$$p^{(2)}=-ik\rho cQ^{(2)}G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_0);\ p^{(3)}=-ik\rho cQ^{(3)}G^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0), \quad (3.60)$$

где функции Грина $G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_0)$ и $G^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0)$ удовлетворяют неоднородным уравнениям Гельмгольца с правыми частями в виде двумерных и трехмерных дельта-функций $-\delta^{(2)}(\vec{r}-\vec{r}_0)$, $-\delta^{(3)}(\vec{R}-\vec{R}_0)$ соответственно, граничным условиям на поверхности и условию излучения на бесконечности. Нашей задачей является установление связи между функциями $G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_0)$ и $G^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0)$.

Линейный источник A_0 (рис. 3.4, *а*) можно представить в виде суперпозиции элементарных точечных источников длиной dz_0, равномерно распределенных по его длине. Объемная колебательная скорость каждого из таких источников будет $Q^{(3)}=Q^{(2)}dz_0$. Проинтегрировав второе из выражений (3.60) по координате z_0, получим поле линейного источника

$$p^{(2)}=-ik\rho cQ^{(2)}\int_{-\infty}^{\infty}G^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0)\,dz_0.$$

Сравнивая эту формулу с первым из выражений (3.60), получим соотношение

$$G^{(2)}(\vec{r},\vec{r}_0)=\int_{-\infty}^{\infty}G^{(3)}(\vec{R},\vec{R}_0)\,dz_0. \quad (3.61)$$

Таким образом, двумерная функция Грина получается из трехмерной интегрированием по координате источника z_0. В связи с тем, что для бесконечной в направлении оси z поверхности S поле точечного источника зависит от разности $|z-z_0|$, а интегрирование выполняется в бесконечных пределах, функция $G^{(2)}(r,r_0)$ не зависит от координаты z.

В частном случае при отсутствии отражающей поверхности, взяв функции Грина для свободного пространства (3.59), запишем соотношение

$$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|\vec{r}-\vec{r}_0|)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(ik\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2+(z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2+(z-z_0)^2}}dz_0. \quad (3.62)$$

Последнее соотношение можно рассматривать как разложение цилиндрической волны по сферическим волнам.

Для того чтобы получить выражение, обратное по отношению к формуле (3.61), воспользуемся разложением сферической волны по цилиндрическим функциям (6.616.3) из работы [16]:

$$\frac{\exp\,(ia\sqrt{b^2+t^2})}{\sqrt{b^2+t^2}} = \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\,(itx) H_0^{(1)}\,(b\sqrt{a^2-x^2})\,dx. \qquad (3.63)$$

Применив ее к сферической волне, определяемой вторым из выражений (3.59), запишем

$$\frac{\exp\,(ik\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2+(z-z_0)^2})}{4\pi\sqrt{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2+(z-z_0)^2}} = \frac{i}{8\pi}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\sqrt{k^2-\xi^2}|\vec{r}-\vec{r}_0|)\exp\,(i\xi|z-z_0|)\,d\xi. \qquad (3.64)$$

Каждая из волн $iH_0^{(1)}(\sqrt{k^2-\xi^2}|\vec{r}-\vec{r}_0|)/4$ с разными ξ создает в присутствии отражающей поверхности поле $\tilde{G}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_0)$, причем тильда означает, что в выражении для $G^{(2)}$ волновое число k должно быть заменено на $\sqrt{k^2-\xi^2}$. Для того чтобы получить поле, создаваемое источником с линейно меняющейся фазой, входящей в выражение (3.64), следует умножить $G^{(2)}$ на $\exp(i\xi|z-z_0|)/2\pi$. После интегрирования по всем таким волнам получим поле точечного источника

$$G^{(3)}(\vec{R}, \vec{R}_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}^{(2)}(\vec{r}, \vec{r}_0)\exp\,(i\xi|z-z_0|)\,d\xi. \qquad (3.65)$$

Таким образом, чтобы получить поле точечного источника в известном выражении для поля, создаваемого линейным источником, необходимо в последнем заменить k на $\sqrt{k^2-\xi^2}$, умножить на $\exp(i\xi|z-z_0|)/(2\pi)$ и проинтегрировать по ξ.

3.3.2. Геометрооптическая и дифракционная составляющие звукового поля. Расположение сферического источника звука A_0 и точки наблюдения A показано на рис. 3.5. Углы φ и φ_0 отсчитываются в плоскостях S и S_0, перпендикулярных к ребру клина. Величины r_0 и r являются кратчайшими расстояниями от источника и приемника до ребра клина.

Источник A_0 с объемной колебательной скоростью Q излучает сферическую звуковую волну, причем звуковое давление в свободном пространстве определяется выражением

$$p_0 = -ik\rho cQG_0(\vec{R}, \vec{R}_0), \qquad (3.66)$$

где

$$G_0(\vec{R}, \vec{R}_0) =$$

$$= \frac{\exp\,(ik|\vec{R} - \vec{R}_0|}{4\pi|\vec{R} - \vec{R}_0|} = \frac{\exp\,(ikd)}{4\pi d}. \qquad (3.67)$$

Величины $\vec{R}$ и $\vec{R}_0$ – радиусы-векторы точек A и A_0, причем

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}, R_0 = \sqrt{r_0^2 + z_0^2},$$

$$d = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \times}$$

$$\times \cos\,(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2.$$

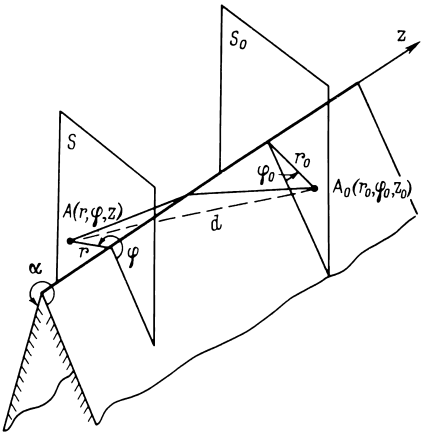


Рис. 3.5. Расположение системы координат в задаче о дифракции поля точечного источника на клине

Для того чтобы найти поле такого источника, воспользуемся формулой (3.65), определяющей связь между решениями для двумерного и трехмерного случаев. Применив эту формулу к функции Грина (3.24), получим

$$G(\vec{R}, \vec{R}_0) = \frac{i}{8\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_\nu(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_<) H_\nu^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_>) \times$$

$$\times \left\{ \cos\,[\nu(\varphi - \varphi_0)] \pm \cos\,(\nu(\varphi + \varphi_0)] \right\} \exp\,(i\xi|z - z_0|)\, d\xi. \qquad (3.68)$$

Это выражение можно преобразовать к виду, аналогичному представлению (3.27)

$$G(\vec{R}, \vec{R}_0) = G_g + G_d, \qquad (3.69)$$

где

$$G_g = -\frac{i}{16\pi\alpha} \int_{L_s} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[\sqrt{k^2 - \xi^2}\rho(\beta)] \exp\,(i\xi|z - z_0|) d\xi \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{1 - \exp\,[i\pi(\beta - \pi + \varphi - \varphi_0)/\alpha]} \pm \frac{1}{1 - \exp\,[i\pi(\beta - \pi + \varphi + \varphi_0)/\alpha]} \right\} d\beta;$$

$$G_d = -\frac{\sin\,(\pi^2/\alpha)}{16\pi\alpha} \int_{L_7} \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[\sqrt{k^2 - \xi^2}\rho(\beta)] \exp\,(i\xi|z - z_0|)\, d\xi \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,(\pi(\varphi - \varphi_0 + \beta)/\alpha)} \pm \frac{1}{\cos\,(\pi^2/\alpha) - \cos\,(\pi(\varphi + \varphi_0 + \beta)/\alpha)} \right] d\beta,$$

где $\rho(\beta)$ определяется выражением (3.30).

Интегрирование по ξ выполняется с помощью формулы (3.63). В результате получится

$$G_g = \frac{-1}{8\pi a} \int\limits_{L_8} \frac{\exp[ikd(\beta)]}{d(\beta)} \left\{ \frac{1}{1-\exp[i\pi(\beta-\pi+\varphi-\varphi_0)/\alpha]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{1-\exp[i\pi(\beta-\pi+\varphi+\varphi_0)/\alpha]} \right\} d\beta; \qquad (3.70)$$

$$G_d = \frac{i\sin(\pi^2/\alpha)}{8\pi a} \int\limits_{L_7} \frac{\exp[ikd(\beta)]}{d(\beta)} \left[\frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha)-\cos(\pi(\varphi-\varphi_0+\beta)/\alpha)} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha)-\cos(\pi(\varphi+\varphi_0+\beta)/\alpha)} \right] d\beta, \qquad (3.71)$$

где

$$d(\beta) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\beta + (z-z_0)^2}. \qquad (3.72)$$

Геометрооптическую часть поля можно найти, вычислив вычеты в полюсах β_m, определяемых соотношениями (3.31):

$$G_d = \sum_m \frac{\exp[ikd(\beta_m)]}{4\pi d(\beta_m)} H(\pi - |2m\alpha + \varphi - \varphi_0|) \pm \sum_m \frac{\exp[ikd(\beta'_m)]}{4\pi d(\beta'_m)} \times$$

$$\times H(\pi - |2m\alpha + \varphi + \varphi_0|). \qquad (3.73)$$

Суммирование проводится по тем же значениям m, что и в формуле (3.32). Физический смысл отдельных членов конечных рядов, входящих в выражение (3.73), аналогичен смыслу членов рядов (3.32) за исключением того, что цилиндрические волны заменяются сферическими. Выражение (3.73) отлично от нуля в случае, если источник и приемник находятся в зоне видимости друг друга. Член $m = 0$ первой суммы определяет прямую сферическую волну, распространяющуюся непосредственно от излучателя к точке наблюдения, а остальные члены определяют сферические волны, отраженные от граней клина по законам геометрической оптики.

Для клина $\alpha > \pi$ остаются лишь слагаемые $m = 0$ первой суммы и $m = 0$, $m = -1$ второй суммы, определяющие соответственно прямую волну и волны, отраженные от граней клина:

$$G_g = \frac{\exp(ikd_1)}{4\pi d_1} H(\pi - |\varphi - \varphi_0|) \pm \frac{\exp(ikd_2)}{4\pi d_2} H[\pi - (\varphi + \varphi_0)] \pm \frac{\exp(ikd_3)}{4\pi d_3} \times$$

$$\times H[\pi - |2\alpha - (\varphi + \varphi_0)|], \qquad (3.74)$$

где

$$d_1 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + (z - z_0)^2}; \quad d_2 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0} \times$$

$$\times \sqrt{\cos(\varphi + \varphi_0) + (z - z_0)^2}; \quad d_3 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos[2\alpha -}$$

$$\overline{-(\varphi + \varphi_0)] + (z - z_0)^2}.$$

В зависимости от взаимного расположения точек A и A_0 один, два или все три члена могут обратится в нуль.

Если точки A и A_0 расположены вдали от ребра таким образом, что $kd''(\beta)|_{\beta_s = 0} \gg 1$, т. е. $krr_0/l \gg 1$, то интеграл (3.71) можно вычислить методом перевала. Выполняя преобразования (см. п. 3.2), получим

$$G_d = G_{d1} + G_{d2}, \tag{3.75}$$

где

$$G_{d1} \approx \frac{\exp(ikd + i\pi/4)}{4\alpha\sqrt{2\pi krr_0 l}} \sin\frac{\pi^2}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha) - \cos[\pi(\varphi - \varphi_0)/\alpha]} \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha) - \cos[\pi(\varphi + \varphi_0)/\alpha]} \right\}. \tag{3.76}$$

Здесь $l = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}$ — длина кратчайшего пути из точки A_0 в точку A, касающегося ребра клина. Член G_{d2} для клина, угол которого $\alpha > \pi$ будет равен

$$G_{d2} \approx q_1 \psi_2(\varphi) \pm q_2 \psi_2(-\varphi) \pm q_3 \psi_2(2\alpha - \varphi), \tag{3.77}$$

где

$$\psi_2(\theta) = \frac{\exp(ikl)}{8\pi l} \left[F(\xi) - \frac{\exp(i\pi/4)}{\xi\sqrt{2\pi}} \right] \operatorname{sign}(\pi - |\theta - \varphi_0|). \tag{3.78}$$

Знаки „+" и „–" относятся к акустически жесткому и мягкому клиньям соответственно и функция $F(\xi)$ определяется формулой (3.40), в которой в качестве ξ следует использовать величину

$$\xi = \sqrt{\frac{krr_0}{l}} \left| \cos\frac{\theta - \varphi_0}{2} \right|,$$

а q_1, q_2, q_3 определены так же, как в формуле (3.38).

Составляющая G_{d2} дает существенный вклад лишь в окрестности границ освещенных зон для прямой и отраженных волн.

Так же, как и выражение (3.27), сумма (3.69) дает решение, непрерывное по углу φ, несмотря на то что отдельные слагаемые имеют разрывы.

Обращение в бесконечность слагаемых G_{d1} и G_{d2} на границах освещенных зон для прямой и отраженных волн создает неудобства при расчетах поля вблизи указанных границ, так как соответствующие члены должны вычисляться с большой точностью. Это является причиной поиска решений, не имеющих бесконечных разрывов. В работе [111] приведена формула для дифракционного поля, возникающего при падении на жесткий клин сферической волны. В обозначениях, принятых в этой главе, для падающей волны вида (3.66), (3.67) дифракционную составляющую G_d можно преобразовать к виду, справедливому как для жесткой, так и для мягкой поверхностей:

$$G_d = \frac{\exp\,(ikl + i\pi/4)}{8\alpha\sqrt{2\pi\, krr_0 l}} D\,(\varphi, \varphi_0), \qquad (3.79)$$

где

$$D(\varphi, \varphi_0) = \sum_{j=1}^{4} a_j \operatorname{ctg} T_j F_1(y_j);\quad y_j = \sqrt{krr_0/l}\,|\cos R_j|;$$

$$R_1 = \alpha H(\varphi - \varphi_0 - \alpha + \pi) - (\varphi - \varphi_0)/2;\ R_2 = \alpha H(|\varphi - \varphi_0 - \pi| - \alpha) -$$

$$- (\varphi - \varphi_0)/2;$$

$$R_3 = \alpha H(\varphi + \varphi_0 - \alpha - \pi) - (\varphi + \varphi_0)/2;\ R_4 = \alpha H(|\varphi + \varphi_0 - \pi| - \alpha) - (\varphi + \varphi_0)/2.$$

Величины T_j, a_j и функция F_1 определены так же, как и в формуле (3.43).

Для функции $F_1(\xi)$ в работе [111] дана приближенная формула, которую в наших обозначениях можно записать в виде

$$F_1(\xi) \approx \exp\left[\frac{-i\pi}{4}\left(1 - \frac{\xi}{1{,}4\xi^2 + 1}\right)\right]\begin{cases} \xi\sqrt{2\pi}\,[1 - 1{,}4\xi/(\xi + 1{,}2)] \\ \text{для } \xi < 0{,}63; \\ 1 - 0{,}2/(\xi^2 + 0{,}63)^2 \\ \text{для } \xi > 0{,}63. \end{cases}$$

При использовании этой формулы ошибка при вычислении звукового поля по сравнению с точным вычислением интегралов Френеля не превышает 0,03 дБ.

Функция $\operatorname{ctg} T_j$ может обращаться в бесконечность на границах указанных выше зон, однако при этом функция $F_1(y_j)$ обращается в нуль и бесконечных разрывов не возникает. Поэтому дифракционное поле содержит лишь конечные скачки, которые компенсируются соответствующими скачками геометрооптической составляющей.

В статье [107] приведены многочисленные примеры применения формулы (3.79) для расчета дифракции звука на барьерах, в том числе для барьеров конечной толщины, а также есть сопоставление с экспериментальными данными.

В работе [122] приведены простые асимптотические формулы для дифракционного поля при падающих на клин цилиндрической и сферической волнах, справедливые как в освещенной и теневой областях, так и на их границе. Полное поле записано в виде

$$G = S(|\varphi - \varphi_0|) \pm S(\varphi + \varphi_0); \tag{3.80}$$

знаки „+" и „–" относятся к акустически жесткому и мягкому клиньям соответственно. Функции $S(u)$ представляются в виде суммы геометрооптического и дифракционного слагаемых $S(u) = S_g(u) + S_d(u)$. Геометрооптические слагаемые совпадают с соответствующими выражениями (3.32) или (3.73) для цилиндрической и сферической падающих волн соответственно. Дифракционная составляющая записывается в форме $S_d(u) = I(\pi - u) + I(\pi + u)$. Функцию $I(\delta)$ после приведения к принятым в этой главе обозначениям можно записать следующим образом.

Для цилиндрической падающей волны (3.2):

$$I(\delta) = -\frac{i}{8}\cos t \cdot \operatorname{sign}(\sin t) H_0^{(1)}[k(r + r_0)] F(\xi), \tag{3.81}$$

где $t = \pi\delta/(2\alpha)$; $\xi = \frac{\alpha}{\pi}\left|\sin t\right| \sqrt{\frac{krr_0}{r + r_0}}$.

Для падающей сферической волны (3.67):

$$I(\delta) = -\frac{\cos t}{8\pi} \operatorname{sign}(\sin t) \frac{\exp(ikl)}{l} F(\xi), \tag{3.82}$$

где $\xi = \frac{\alpha}{\pi}|\sin t| \sqrt{\frac{krr_0}{l}}$; $l = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}$; $F(\xi)$ в формулах (3.81) и (3.82) определяется выражением (3.40). Указано, что ошибка при использовании этих формул для значений $kr_0 = 1$ и $kr_0 > 9$ составляет менее 5 %.

Выражения (3.76), (3.77), (3.79) и (3.80) получены при условии, что kr, $kr_0 \gg 1$. Несмотря на это, расчеты показывают, что погрешность при их использовании невелика даже в тех случаях, когда эти условия не выполняются. Например, формула (3.79) дает погрешность не более 0,5 дБ при kr, $kr_0 > 0{,}1$.

Можно получить строгое выражение в виде суммы четырех интегралов, справедливое при любых значениях волновых расстояний kr и kr_0.

Заменой $\beta = \pi + iw$ выражение (3.71) для дифракционной составляющей можно преобразовать к виду

$$G_d = \sum_{j=1}^{4} a_j V(\xi_j), \tag{3.83}$$

где $\xi_1 = |\varphi - \varphi_0|$; $\xi_2 = 2\alpha - |\varphi - \varphi_0|$; $\xi_3 = \varphi + \varphi_0$; $\xi_4 = 2\alpha - (\varphi + \varphi_0)$; $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = a_4 = \pm 1$, где верхний и нижний знаки относятся к акустически жесткой и мягкой поверхностям соответственно;

$$V(\xi_j) = \frac{1}{8\alpha} \int_0^{\infty} G_0(\pi + iw) Q(w, \xi_j) dw, \tag{3.84}$$

где

$$Q(w, \xi_j) = \frac{\sin [\pi(\pi - \xi_j)/\alpha]}{\operatorname{ch}(\pi w/\alpha) - \cos [\pi(\pi - \xi_j)/\alpha]};$$

$$G_0(\pi + iw) = \frac{\exp [ikd(w)]}{4\pi d(w)}; \quad d(w) = \sqrt{r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 + 2rr_0 \operatorname{ch} w}.$$

Результаты ряда расчетов дифракционных полей по этой формуле приведены в статье [75]. Недостатками формулы (3.83) являются медленная сходимость интеграла, осциллирующий характер подынтегрального выражения и особенность при $w = 0$ для значения $\xi_j = \pi$, т. е. на границах зон на рис. 3.3, *а*. В статье [102] выполнено преобразование интеграла (3.83) к виду, более удобному для расчетов. Результат можно записать в форме

$$V(\xi_j) = -\frac{\exp(ikl)}{4\pi l} U_j \operatorname{sign} [A(\xi_j)], \tag{3.85}$$

где

$$U_j = \int_0^{\infty} e^{-y} q(y) \frac{kl}{kl + iy} \left(1 + \frac{i}{kl + iy}\right) dy;$$

$$l = \sqrt{(r + r_0)^2 + (z - z_0)^2}; \quad g(y) = \operatorname{arctg} [\operatorname{tg} |A(\xi_j)| \cdot \operatorname{th} (\pi X/\alpha)];$$

$$X = \operatorname{Arsh} Z(y); \quad A(\xi_j) = \frac{\pi}{2\alpha}(-\alpha - \pi + \xi_j) + \pi H(\pi - \xi_j);$$

$$Z(y) = \left[\frac{yl}{krr_0}\left(\frac{i}{2} - \frac{y}{4kl}\right)\right]^{1/2}.$$

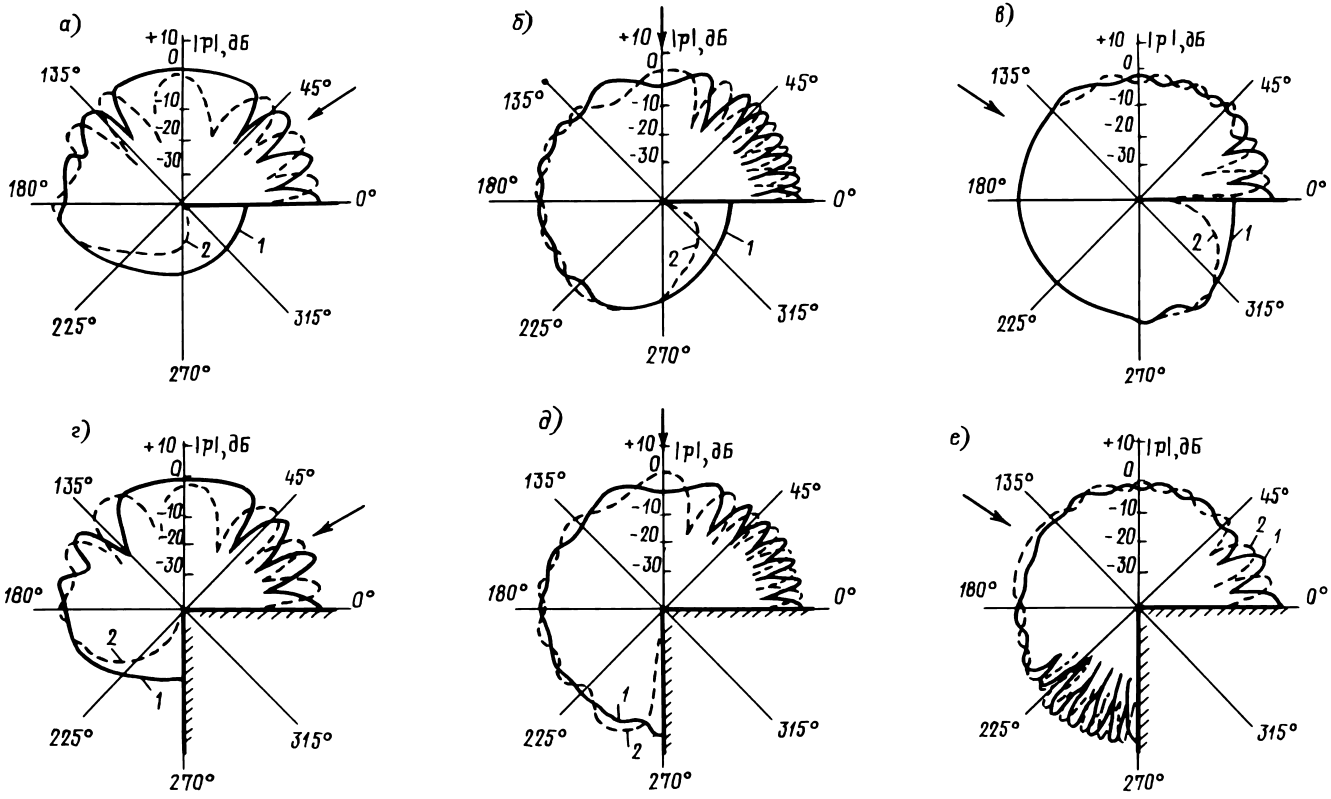


Рис. 3.6. Амплитуда полного звукового давления при дифракции плоской волны на полуплоскости (*а, б, в*) и прямом угле (*г, д, е*); *а, г* – $\varphi_0 = 30°$; *б, д* – $\varphi_0 = 90°$; *в, е* – $\varphi_0 = 150°$

1 и *2* – жесткая и мягкая поверхности соответственно

(В работе [102] в последней формуле имеются описки. Здесь записано исправленное выражение). Учитывая, что $\operatorname{Arsh} Z = \ln (Z + \sqrt{Z^2 + 1})$, функцию $q(y)$ можно преобразовать к виду

$$q(y) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}|A(\xi_j)| \frac{u(y) - 1}{u(y) + 1}\right); \quad u(y) = (Z(y) + \sqrt{Z^2(y) + 1})^{2\pi/\alpha}.$$

Интеграл хорошо сходится и, несмотря на некоторую громоздкость подынтегрального выражения, легко вычисляется.

Ветви многозначных функций арктангенса и квадратного корня выбираются при расчете таким образом, чтобы при изменении y от 0 до ∞ q непрерывно менялось в первом квадранте. При этом фаза корня меняется от $\pi/4$ до $\pi/2$.

На рис. 3.6 показаны диаграммы амплитуды полного звукового давления при дифракции плоской звуковой волны на полуплоскости ($\alpha = 2\pi$) и прямом угле ($\alpha = 3\pi/2$) для акустически мягкой и жесткой поверхностей. Принято при расчете $kr = 20, kr_0 = 10^4$. Стрелки показывают направление падения волны. Глубокие осцилляции являются следствием интерференции падающей и отраженной волн. Слабые осцилляции в областях, где нет геометрически отраженных волн, обусловлены интерференцией между падающей плоской волной и дифракционной волной, расходящейся от вершины. В области акустической тени звуковое давление для акустически мягкого экрана убывает гораздо быстрее, чем для жесткого.

Заметим, что диаграммы рассеяния, изображенные на рис. 3.6, являются также диаграммами направленности точечных источников, расположенных на волновом расстоянии $kr = 20$ от вершины, в направлениях, указанных стрелками.

На рис. 3.7 изображены диаграммы направленности источника или приемника, расположенного на продолжении акустически мягкой полуплоскости ($\varphi_0 = \pi$) при различных расстояниях от источника до края. Вблизи акустически мягкой поверхности звуковое давление сильно уменьшается. При малых волновых расстояниях ($kr \ll 1$) диаграмма

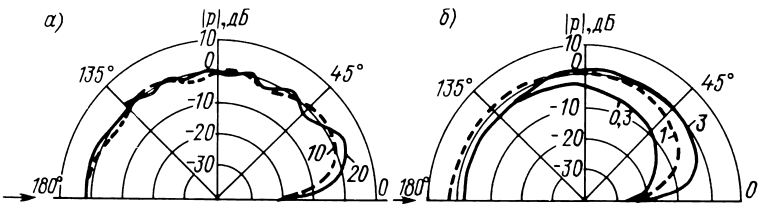


Рис. 3.7. Диаграммы направленности точечного приемника, расположенного на продолжении акустически мягкой полуплоскости при $kr = 10$; 20 (*а*); $kr = 0{,}3$; 1; 3 (*б*); цифры на кривых – значения kr

описывается в основном первым членом ряда (3.21) и в этом случае имеет вид

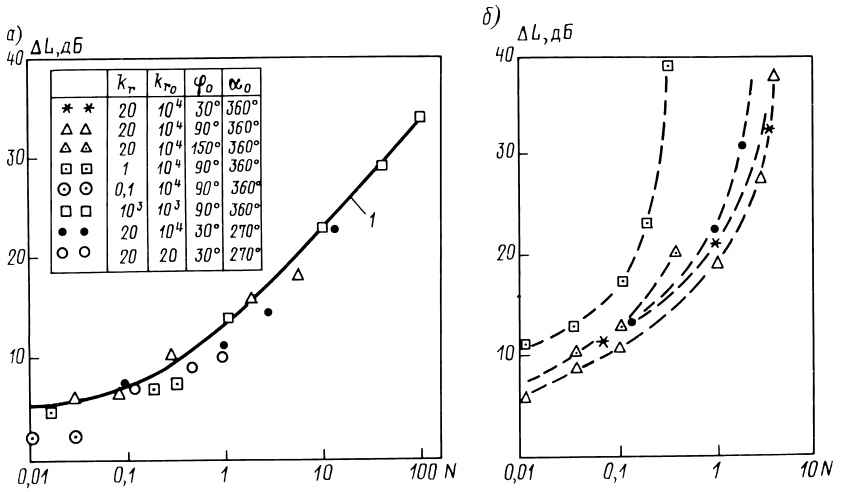
$$p \approx 2\sqrt{kr/\pi}\exp(-i\pi/4)\sin(\varphi/2). \qquad (3.86)$$

Таким образом, при $kr \ll 1$ диаграмма направленности источника или приемника, расположенного вблизи ребра на продолжении акустически мягкой полуплоскости, определяется функцией $|\sin(\varphi/2)|$.

3.3.3. Звукоизолирующие барьеры. Приведенные выше формулы позволяют оценить эффективность ограниченных *звукоизолирующих барьеров*, например в виде стенки конечной высоты или угла здания. Ясно, что уровень снижения шума зависит от того, насколько глубоко в области акустической тени находятся точка наблюдения. В качестве универсального параметра можно принять величину $N = (kl - kd)/\pi$, пропорциональную разности волнового расстояния от источника до наблюдателя вокруг ребра и прямого пути (см. рис. 3.5). Если точки A и A_0 лежат в одной плоскости, перпендикулярной к ребру, то $N = (kr + kr_0 - kd)/\pi$. Эффективность экрана можно оценить величиной ΔL (дБ) $= -20\lg|G/G_0|$ для сферической и цилиндрической волн или ΔL (дБ) $= -20\lg|p|$ для плоской волны. При этом предполагается, что прямое прохождение звука сквозь экран значительно меньше, чем огибание звуком края.

На рис. 3.9, *а* приведена зависимость ΔL от N в широком диапазоне параметров для акустически жесткого экрана. Видно, что все рассчитанные значения группируются вокруг некоторой кривой с разбросом не более 3 дБ. Сплошной линией показана зависимость

$$\Delta L = 5 + 20\lg(\sqrt{2\pi N}/\operatorname{th}\sqrt{2\pi N}), \qquad (3.87)$$



k_r	k_{r_0}	φ_0	α_0
20	10^4	30°	360°
20	10^4	90°	360°
20	10^4	150°	360°
1	10^4	90°	360°
0,1	10^4	90°	360°
10^3	10^3	90°	360°
20	10^4	30°	270°
20	20	30°	270°

Рис. 3.8. Эффективность акустически жесткого (*а*) и мягкого (*б*) барьеров
1 — расчеты по формуле (3.87)

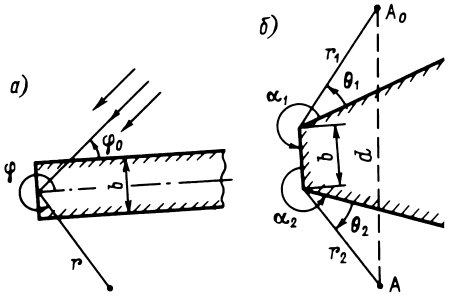


Рис. 3.9. Барьеры конечной толщины: *а* – полоса; *б* – усеченный клин

предложенная в работе [112]. Поправки к этой зависимости приведены в статье [108]. Эффективность акустически мягкого экрана (рис. 3.8, *б*) оказывается значительно больше жесткого. Однако реализовать такой экран в воздушной акустике, по-видимому, невозможно.

Величины ослабления шума, показанные на рис. 3.8, могут быть достигнуты лишь в свободном пространстве при отсутствии других тел, отражающих звук и производящих засветку зоны тени. Наличие таких предметов может сильно уменьшить эффективность барьеров. Значительную роль играет также отражение звука от основания, на котором стоит барьер. Сведения о влиянии отражений от грунта на звукоизоляцию барьеров приведены в работах [104, 108, 112, 125, 135].

Звукоизолирующие свойства увеличивают экранами конечной толщины (рис. 3.9). В работе [100] исследовано влияние толщины экрана на его эффективность.

Результаты расчетов показывают, что величина добавки (к звукоизоляции барьера, обусловленная влиянием конечной толщины) остается приблизительно одинаковой (в пределах 0,5 дБ) при любых расстояниях от точки наблюдения до края. Указанная добавка сильно зависит от углов, под которыми расположены излучатель и приемник (рис. 3.10). Если излучатель и приемник находятся почти на одной прямой ($\varphi \approx \varphi_0 + 180^\circ$), то величина добавки невелика, если же приемник перемещается в зону глубокой тени – добавка возрастает.

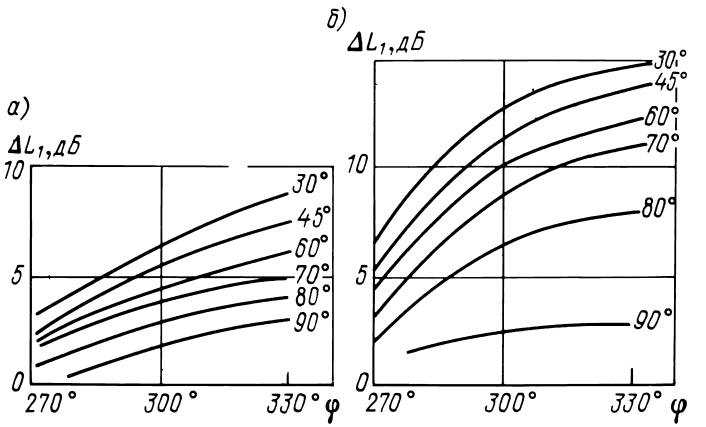


Рис. 3.10. Добавка к звукоизоляции барьера, обусловленная влияниями конечной толщины ($kr = 1000$): *а* – $kb = 6$; *б* – $kb = 30$; цифры на кривых – значения угла φ_0

Строгое решение, приведенное в работе [100], является весьма громоздким. Более простое приближенное выражение [130] для экрана в виде усеченного угла (см. рис. 3.9, *б*), справедливое при kr_1, kr_2, $kb \gg 1$, имеет вид

$$p_d = \frac{i \exp(ikl)}{4\pi l} [f(y_>) - ig(y_>)][f(By_<) - ig(By_<)].$$

Здесь f и g – вспомогательные функции, входящие в формулы для интегралов Френеля (3.42); $l = \sqrt{(r_1 + r_2 + b)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ – полная длина пути; z_1 и z_2 – координаты излучателя и приемника в направлении, перпендикулярном к чертежу; $y_>$ и $y_<$ – соответственно наибольшая и наименьшая из величин y_1 и y_2, определяемых соотношениями

$$y_1 = \frac{\alpha_1}{\pi^2} \sqrt{\frac{kr_1(b + r_2)}{\pi l}} \cdot \frac{\cos(\pi^2/\alpha_1) + \cos(\pi\theta_1/\alpha_1)}{\sin(\pi^2/\alpha_1)};$$

$$y_2 = \frac{\alpha_2}{\pi^2} \sqrt{\frac{kr_1(b + r_1)}{\pi l}} \cdot \frac{\cos(\pi^2/\alpha_2) + \cos(\pi\theta_2/\alpha_2)}{\sin(\pi^2/\alpha_2)};$$

$$B = \sqrt{\frac{b(b + r_1 + r_2)}{(b + r_1)(b + r_2)}}; \quad \alpha_1, \alpha_2 > \pi.$$

Пронормировав значение амплитуды p_d к значению звукового давления в точке наблюдения при отсутствии экрана, т. е. $p_0 = \exp(ikd) : (4\pi d)$, получим величину ослабления, дБ,

$$L = 20 \lg(l/d) - 10 \lg\{[f^2(y_>) + g^2(y_>)][f^2(By_<) + g^2(By_<)]\}. \quad (3.88)$$

Заметим, что последнее выражение содержит лишь монотонные функции f и g и не приводит к появлению осцилляций. Это связано с тем, что это выражение (3.89) не учитывает многократную дифракцию звука между вершинами углов на рис. 3.9, *б* и дает поэтому сглаженные результаты.

Изменения спектра сигнала, излучаемого импульсным источником, в результате дифракции на краю барьера (в частности, конечной ширины) показаны в работе [118]. Многочисленные примеры дифракции звука на экранах конечной ширины (в том числе со скошенными краями) приведены в статьях [107, 112, 130].

3.4. Клин со звукопоглощающими гранями

3.4.1. Возможные виды описаний свойств звукопоглощающих экранов. Прежде всего необходимо определить, что такое звукопоглощающий экран. Одно из определений соответствует концепции абсолютно

черного экрана в оптике (*экран Зоммерфельда*). Такая поверхность должна полностью поглощать любые падающие звуковые волны при произвольном угле падения. Сформулировать математически граничное условие для полного поля на такой поверхности невозможно. Можно считать, что звуковое поле в присутствии идеальной звукопоглощающей поверхности должно быть составлено только из волн, бегущих в сторону поверхности, а волны, отраженные от нее, должны отсутствовать.

Заметим, что если в безграничной среде, не содержащей каких-либо звукоотражающих и поглощающих тел, выделить мысленно некоторую поверхность, то она также не будет отражать падающие на нее волны. Однако в отличие от такой поверхности звукопоглотитель должен быть еще и непрозрачным. Указанное простое и очевидное различие между поглощающим и прозрачным экранами иногда не учитывается, что приводит к недоразумениям, когда ошибочно называют звукопоглощающими такие экраны, для которых амплитуда отраженной волны мала в результате их высокой звукопрозрачности, а не за счет поглощения в самом материале.

Идеально звукопоглощающий экран (аналогичный абсолютно черному телу в оптике) в акустике является нереализуемым не только из-за того, что любая идеализация (как, например, абсолютно жесткие и мягкие поверхности) практически недостижима , но и по принципиальным соображениям. Если на поверхности тела задано некоторое соотношение между звуковым давлением и нормальной составляющей колебательной скорости, то такой экран будет импедансным или упругим и коэффициент отражения от него будет определяться соотношением

$$A(\theta) = \frac{Z\cos\theta - \rho c}{Z\cos\theta + \rho c}, \tag{3.89}$$

где $Z = -p/v_n$ – нормальный импеданс поверхности. Невозможно подобрать механические свойства поверхности, не зависящие от угла падения θ, таким образом, чтобы при любом угле падения оказалось $A(\theta) = 0$. В случае $Z = \rho c$ (экран Кирхгофа – полное согласование акустических свойств экрана и среды) $A = 0$ лишь при нормальном падении звука. Следовательно, свойства идеального звукопоглотителя (если бы такой существовал) не могут быть описаны с помощью нормального импеданса. Конструкции, для которых коэффициент отражения звука был бы мал при любых углах падения, вплоть до скользящих, неизвестны.

Другое обстоятельство, относящееся к дифракции на звукопоглощающих телах при любом типе их описания (как в виде абсолютно черного тела, так и импедансной поверхности) связано с тем, что для создания реального звукопоглотителя необходимо обеспечить плавное согласование его акустических характеристик с акустическими характеристиками среды, так как резкие скачки свойств вызовут появление отраженных волн. Критерием поверхности перехода является соотношение длины звуковой волны и толщины экрана. Таким образом, хорошие

звукопоглотители должны иметь толщину, сравнимую с длиной волны, и не могут быть тонкими.

Несмотря на указанные ограничения, целесообразно изучить акустические характеристики некоторых моделей звукопоглощающих поверхностей, которые следует рассматривать как предельные случаи. К таким моделям относятся упомянутые выше идеальные звукопоглощающий и импедансный экраны, а также поверхность, для которой поле описывается в виде полусуммы полей для акустически мягкой и жесткой поверхностей.

3.4.2. Идеально звукопоглощающий экран. Дифракция цилиндрической звуковой волны. Найдем представление функции Грина для такого экрана в виде набора волн, бегущих в направлении положительных и отрицательных значений угла φ. Разделив переменные в уравнении (3.4), запишем частное решение соответствующего однородного уравнения в виде

$$c(\nu) H_{\nu}^{(1)}(kr) \exp(\pm i\nu\varphi), \tag{3.90}$$

где $c(\nu)$ – некоторая, пока произвольная функция индекса ν. В выражении (3.11) ν принимало дискретные значения, при которых удовлетворялись граничные условия на акустически жестких или мягких гранях. В свободном пространстве при отсутствии отражений величину ν можно рассматривать как некоторое „угловое" волновое число для волн, бегущих в азимутальном направлении, по и против часовой стрелки. Ограничения, приводящие к дискретному набору значений, для свободного пространства отсутствуют и ν может принимать любые вещественные или комплексные значения.

Пусть грани клина являются звукопоглощающими и вследствие этого, как указано выше, – незвукопрозрачными. В этом случае из-за отсутствия отражений от граней индекс ν так же, как и для свободного пространства, может иметь сплошной спектр значений. Однако должны быть введены дополнительные ограничения, заключающиеся в том, что волны, распространяющиеся в направлениях $\pm\varphi$, не проходят клин насквозь. Для этого надо считать, что при $\varphi > \varphi_0$ (см. рис. 3.1, *а*) существуют лишь волны, направления распространения которых имеют угловую составляющую против часовой стрелки, а при $\varphi > \varphi_0$ – по часовой стрелке, т. е. $\exp[+i\nu(\varphi+\varphi_0)]$ при $\varphi > \varphi_0$ и $\exp[-i\nu(\varphi-\varphi_0)]$ при $\varphi < \varphi_0$. Две последние зависимости можно объединить: $\exp(i\nu|\varphi-\varphi_0|)$. Общее решение получится путем интегрирования по ν (в отличие от суммирования в п. 3.1).

Представим радиальный множитель, входящий в правую часть неоднородного уравнения (3.4), в виде суперпозиции радиальных функций $H_{\nu}^{(1)}(kr)$, входящих в частное решение (3.90). Для этого воспользуемся представлением, приведенным в работе [54]:

$$r\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{2}\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu J_{\nu}(kr_0) H_{\nu}^{(1)}(kr) d\nu = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \nu[1-\exp(i2\pi\nu)] \times H_{\nu}^{(1)}(kr_0) H_{\nu}^{(1)}(kr) d\nu. \tag{3.91}$$

Поскольку в последнем выражении интегрирование выполняется вдоль мнимой оси, целесообразно записать и функцию Грина в виде интеграла по этому же пути

$$G(r, \vec{r}_0) = \int_0^{i\infty} c(\nu) H_\nu^{(1)}(kr) \exp(i\nu|\varphi - \varphi_0|)\, d\nu. \qquad (3.92)$$

Такой выбор пути обеспечивает сходимость интеграла. Весовая функция $c(\nu)$ должна быть выбрана таким образом, чтобы это решение давало поле источника цилиндрической волны, расположенного в точке r_0, φ_0. Поэтому оно должно удовлетворять неоднородному уравнению (3.4). Подставим выражения (3.91) и (3.92) в уравнение (3.4). Левая и правая части полученных интегральных соотношений должны быть равны при любых значениях r и φ, поэтому должны быть равны и подынтегральные выражения.

Учитывая, что функция $H_\nu^{(1)}(kr)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} H_\nu^{(1)}(kr) + r \frac{\partial}{\partial r} H_\nu^{(1)}(kr) = (\nu^2 - k^2 r^2) H_\nu^{(1)}(kr),$$

после указанной подстановки получим

$$c(\nu)\left\{\nu^2 \exp[i\nu(\varphi - \varphi_0)] + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \exp(i\nu|\varphi - \varphi_0|)\right\} = -\frac{\nu}{4}[1 - \exp(i2\pi\nu)] \times$$

$$\times H_\nu^{(1)}(kr_0)\delta(\varphi - \varphi_0).$$

Проинтегрируем левую и правую части по φ в интервале φ_1, φ_2, содержащем внутри себя точку φ_0:

$$c(\nu)\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \nu^2 \exp[i\nu(\varphi - \varphi_0)]\, d\nu + \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp(i\nu|\varphi - \varphi_0|)\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}\right\} \times$$

$$= -\frac{\nu}{4}[1 - \exp(i2\pi\nu)]\, H_\nu^{(1)}(kr_0).$$

Стянем промежуток φ_1, φ_2 к точке φ_0. Первый член в левой части будет стремиться к нулю. При вычислении второго члена следует учесть, что в показателе стоит модуль и, следовательно, производная имеет разрыв при $\varphi = \varphi_0$. Поэтому второе слагаемое будет отлично от нуля, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \exp[i\nu(\varphi - \varphi_0)]\Big|_{\varphi = \varphi_2} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \exp[i\nu(\varphi_0 - \varphi_2)]\Big|_{\varphi = \varphi_1} =$$

$$= i\nu\left\{\exp[i\nu(\varphi_2 - \varphi_0)] + \exp[i\nu(\varphi_0 - \varphi_1)]\right\}_{\varphi_1, \varphi_2 \to \varphi_0} 2i\nu.$$

В результате находим

$$c(\nu) = \frac{i}{8}\left[1 - \exp(i2\pi\nu)\right] H_{\nu}^{(1)}(kr_0).$$

Теперь из выражения (3.92) получим функцию Грина для идеального звукопоглощающего клина

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{i}{8}\int_0^{i\infty}\left[1 - \exp(i2\pi\nu)\right] H_{\nu}^{(1)}(kr_0) H_{\nu}^{(1)}(kr) \exp\left[i\nu(\varphi - \varphi_0)\right] d\nu. \tag{3.93}$$

На верхнем конце участка интегрирования при больших значениях $|\nu|$ функция Ханкеля возрастает пропорционально $\exp(\pi|\nu|/2)$. Подынтегральное выражение при этом меняется по закону $\exp[(\pi - |\varphi - \varphi_0|)/|\nu|]$. Поэтому интеграл сходится лишь при $|\varphi - \varphi_0| > \pi$, т. е. в том случае, если точка наблюдения находится в области геометрической тени. Ниже будет показано, что этим же представлением можно воспользоваться и для точки наблюдения, находящейся в освещенной области, если выделить в явном виде член, соответствующий прямой волне, т. е. $iH_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}_0|)/4$.

Заметим, что r и r_0, φ и φ_0 входят в выражение (3.93) симметрично, поэтому оно удовлетворяет принципу взаимности.

Функция Грина (3.93) не зависит от угла раствора клина. Это связано с тем, что при идеально звукопоглощающем клине звуковая волна как бы не замечает границ раздела среды. Однако акустическая непрозрачность клина приводит к тому, что падающее поле в зоне тени отсутствует. В связи с тем, что поле во всем пространстве должно быть непрерывной функцией координат и резкого скачкообразного изменения амплитуды поля при переходе через границу зоны тени быть не может, должно существовать дополнительное поле, компенсирующее скачок падающей волны. Это поле и является дифракционным. Для того чтобы выделить падающую и дифракционную волны, воспользуемся интегральным представлением произведения функций Ханкеля по формуле (2.14.2.5) из работы [46]. Выполнив замену переменной в этой формуле $x = -i\theta$ и учитывая, что $H_{-\nu}^{(1)} = H_{\nu}^{(1)} \exp(i\pi\nu)$, получим

$$H_{\nu}^{(1)}(kr_0) H_{\nu}^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi}\int_{i\infty}^{-i\infty} H_0^{(1)}\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\theta}\right)\exp\left[i\nu(\theta - \pi)\right] d\theta.$$

Подставим эту формулу в выражение (3.93) и выполним интегрирование по ν. Получится выражение, справедливое при $|\varphi - \varphi_0| > \pi$:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{8\pi}\int_{i\infty}^{-i\infty}\left[\frac{1}{\theta - \pi + |\varphi - \varphi_0|} - \frac{1}{\theta + \pi + |\varphi - \varphi_0|}\right]\times$$

$$\times H_0^{(1)}\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos\theta}\right) d\theta. \tag{3.94}$$

Проанализируем полученное выражение. Оно имеет два полюса: $\theta_1 = \pi - |\varphi - \varphi_0|$ и $\theta_2 = -\pi - |\varphi - \varphi_0|$. При $|\varphi - \varphi_0| > \pi$ оба полюса лежат слева от начала координат и пути интегрирования. При уменьшении разности $|\varphi - \varphi_0|$ полюсы будут перемещаться вправо и при $|\varphi - \varphi_0| = \pi$ полюс θ_1 пересечет путь интегрирования. В этом случае соотношение (3.93) будет уже несправедливо и, чтобы получить верное выражение, необходимо учесть вычет в этом полюсе, который будет равен величине $iH_0^{(1)}(kR)/4$, где $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$. Последнее выражение в точности определяет вклад прямой волны от источника в освещенной области при $|\varphi - \varphi_0| < \pi$. Полюс θ_2 при любых значениях лежит слева от контура интегрирования, и его можно не учитывать.

Для вычисления интеграла (3.94) в дальнем поле при kr, kr_0 воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля при больших значениях аргумента. Тогда в подынтегральное выражение войдет множитель $\exp[f(\theta)]$, где $f(\theta) = ik\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos\theta}$. Поэтому для вычисления интеграла можно применить метод перевала. Точка перевала θ_0 определится из уравнения $\partial f(\theta)/\partial\theta = 0$, откуда получим $\theta_0 = 0$, т. е. точка перевала лежит в начале координат. Поскольку подынтегральное выражение имеет полюсы, следует воспользоваться модифицированной формулой (3.34). Окончательный результат запишем в виде суммы

$$G = G_g + G_{d1} + G_{d2}, \tag{3.95}$$

где G_g – геометрооптический член, представляющий собой поле падающей волны в освещенной области

$$G_g = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr) H(\pi - |\varphi - \varphi_0|); \tag{3.96}$$

$H(\pi - |\varphi - \varphi_0|)$ – по-прежнему ступенчатая функция Хевисайда; G_{d1} и G_{d2} – дифракционные члены, причем

$$G_{d1} = -\frac{i}{4\pi k\sqrt{rr_0}} \exp[ik(r + r_0)] \left[\frac{1}{\pi - |\varphi - \varphi_0|} + \frac{1}{\pi + |\varphi - \varphi_0|}\right]. \tag{3.97}$$

Член G_{d2} определяет поправку, существенную лишь вблизи границы зоны тени, при этом $G_{d2} = \psi(\varphi)$, где $\psi(\varphi)$ определяется выражением (3.39). Из выражения (3.97) следует, что дифракционное поле представляет собой цилиндрическую волну, распространяющуюся от ребра экрана.

3.4.3. Дифракция плоской звуковой волны на идеальном звукопоглощающем экране. Для этого чтобы получить выражения для поля, возникающего при падении на поглощающий клин плоской звуковой волны, следует устремить r_0 к бесконечности и пронормировать поле таким же образом, как это было сделано в п. 3.2.5. Тогда получим выражение (3.49), в котором

$$p_g = \exp\,[-ikr\cos\,(\varphi-\varphi_0)]H(\pi-|\varphi-\varphi_0|); \qquad (3.98)$$

$$p_{d1} = -\frac{\exp\,(ikr+i\pi/4)}{\sqrt{2\pi kr}}\left[\frac{1}{\pi-|\varphi-\varphi_0|}+\frac{1}{\pi+|\varphi-\varphi_0|}\right];\ p_{d2}=\psi_1(\varphi), \qquad (3.99)$$

где $\psi_1(\varphi)$ определяется формулой (3.53). Несмотря на то, что отдельные составляющие поля имеют разрывы на линии $|\varphi-\varphi_0|=\pi$, суммарное поле остается непрерывным.

3.4.4. Дифракция сферической звуковой волны на идеальном звукопоглощающем экране. Расположение источника и приемника показано на рис. 3.5. Так же, как и в п. 3.3.2, решение для трехмерного случая можно получить из формулы (3.94), заменив во всех слагаемых k на $\sqrt{k^2-\xi^2}$, умножив на $\exp\,[i\xi(z-z_0)]/(2\pi)$ и проинтегрировав по ξ. Интегрирование по формуле (3.63) превратит цилиндрические волны в сферические и после применения метода перевала получится результат, справедливый при $kr,\ kr_0 \gg 1$:

$$G = G_g + G_{d1} + G_{d2}, \qquad (3.100)$$

где

$$G_g = \frac{\exp\,(ikd)}{4\pi d}H(\pi-|\varphi-\varphi_0|); \qquad (3.101)$$

$$G_{d1} = -\frac{\exp\,(ikl+i\pi/4)}{4\pi\sqrt{2\pi krr_0 l}}\left[\frac{1}{\pi-|\varphi-\varphi_0|}+\frac{1}{\pi+|\varphi-\varphi_0|}\right]; \qquad (3.102)$$

$G_{d2}=\psi_2(\varphi)$, где $\psi_2(\varphi)$ определяется формулой (3.78), $d=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\,(\varphi-\varphi_0)+(z-z_0)^2}$ – расстояние между точками A_0 и A; $l=\sqrt{(r+r_0)^2+(z-z_0)^2}$ – длина кратчайшего пути из точки A_0 в точку A, касающегося ребра клина.

Геометрооптические члены (3.98) и (3.101) для клина с идеально звукопоглощающими гранями, как и следует ожидать, содержат лишь члены, описывающие прямые волны, а слагаемые, характеризующие отраженные волны, в данном случае отсутствуют.

Заметим, что зависимость амплитуды дифракционной волны от расстояния r при падающей плоской волне соответствует цилиндрической волне, излучаемой из вершины клина. При падающей сферической волне эта зависимость является более сложной даже в том случае, если источник и точка наблюдения находятся в плоскости, перпендикулярной к ребру двугранного угла, т. е. при $z=z_0$. В этом случае зависимость от расстояния имеет вид $(rr_0(r+r_0))^{-1/2}$. Поэтому при $r \gg r_0$ и $r \ll r_0$ получаются зависимости $|p_{d1}| \equiv 1/r$ и $|p_{d1}| \equiv 1/\sqrt{r}$, что соответствуют сферическому и цилиндрическому законам.

3.5. Клин с импедансными гранями

3.5.1. Формула Г. Д. Малюжинца. Решение задачи о дифракции звука на клине с импедансными гранями является гораздо более сложным, чем решение для клина с акустически жесткими, акустически мягкими или идеально звукопоглощающими гранями. Это связано с тем, что при импедансных гранях невозможно выполнить разделение переменных в уравнении Гельмгольца таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям. Рассмотрим граничные условия $p/v_n|_{\varphi=0,\,\alpha} = -Z_{1,2}$. Здесь v_n – нормальная к грани составляющая колебательной скорости, $Z_{1,2}$ – нормальные импедансы на гранях $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ соответственно. Положительной считается составляющая скорости, направленная в сторону внешней по отношению к клину нормали, т. е.

$$v_n|_{\varphi=0} = \frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial (r\varphi)}\bigg|_{\varphi=0}; \quad v_n|_{\varphi=\alpha} = -\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial (r\varphi)}\bigg|_{\varphi=\alpha}.$$

Поэтому граничные условия имеют вид

$$\left(p + \frac{1}{r}\frac{Z_1}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\bigg|_{\varphi=0} = 0; \left(p - \frac{1}{r}\frac{Z_2}{i\omega\rho}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)\bigg|_{\varphi=\alpha} = 0. \quad (3.103)$$

Если теперь по аналогии с рассуждениями, приведенными при определении возможных значений индекса (3.7), попытаться использовать представления вида $J_\nu(kr_<)H_\nu^{(1)}(kr_>)[A_\nu\cos(\nu\varphi) + B_\nu\sin(\nu\varphi)]$, то окажется, что найти значения индекса ν невозможно, так как этому препятствует множитель $1/r$. Единственным случаем, когда все же можно записать решение с разделяющими переменными, является клин с гранями переменного импеданса в виде линейно возрастающих функций $Z_{1,2} = ra_{1,2}$, где $a_{1,2}$ – постоянные [54]. Тогда вторые слагаемые в граничном условии (3.103) не будут зависеть от r.

В результате получится трансцендентное уравнение относительно ν, решение которого и определяет набор допустимых значений индекса. Следует, однако, отметить, что реализовать практически клин, у которого вершина была бы акустически мягкой, а при удалении от нее импеданс возрастал бы, по-видимому, невозможно.

Точное решение задачи о дифракции плоской звуковой волны на импедансном клине изложено в работах [37, 38]. Результат получен в виде интеграла Зоммерфельда путем решения функциональных уравнений. Полное поле в дальней зоне складывается из геометрооптической составляющей p_g в виде суммы прямой и отраженных волн, поверхностных волн, распространяющихся вдоль граней клина $p_{\text{пов}}$, и дифракционного поля p_d.

Дифракционное поле p_d, в свою очередь, складывается из двух членов p_{d1} и p_{d2}, первый из которых описывает поле вдали от границ раздела

зон *I, II, III* (см. рис. 3.3, *а*), т. е. границ освещенных областей для прямой и отраженных волн, а второй – в окрестности этих границ. Таким образом, $p = p_g + p_{d1} + p_{d2} + p_{\text{пов}}$.

Поверхностные волны возбуждаются лишь в случае, если импеданс носит характер гибкости, т. е. $\operatorname{Im} Z_{1,2} > 0$. Если $\operatorname{Re} Z_{1,2} = 0$, то эти волны свободно распространяются вдоль граней от ребра. При $\operatorname{Re} Z_{1,2} \neq 0$ они затухают при распространении в результате поглощения энергии поверхностью.

Геометрооптическая составляющая для клина, имеющего угол $\alpha > \pi$, определяется в виде

$$p_g = \exp\left[-ikr\cos(\varphi - \varphi_0)\right] H(\pi - |\varphi - \varphi_0|) + A_1(\pi/2 - \varphi_0) \times$$

$$\times \exp\left[-ikr\cos(\varphi + \varphi_0)\right] H\left[(\pi - (\varphi + \varphi_0)\right] + A_2(\alpha - \varphi_0 - \pi/2) \times$$

$$\times \exp\left[-ikr\cos(2\alpha + \varphi + \varphi_0)\right] H(\pi - |\varphi + \varphi_0 - 2\alpha|). \qquad (3.104)$$

Здесь первое слагаемое – прямая волна, существующая в освещенной области, второе и третье слагаемые – волны, отраженные от верхней и нижней граней клина соответственно и существующие в областях, определяемых геометрооптическими соотношениями; $H(x)$ – ступенчатая *функция Хевисайда* (см. п. 3.2); $A_1(\theta)$ и $A_2(\theta)$ – коэффициенты отражения от верхней и нижней граней соответственно, причем

$$A_{1,2}(\theta) = \frac{Z_{1,2}\cos\theta - \rho c}{Z_{1,2}\cos\theta + \rho c}, \qquad (3.105)$$

где θ – угол падения звука на соответствующую грань.

Дифракционная составляющая p_{d1} при $kr \gg 1$ имеет следующий вид:

$$p_{d1} \approx \frac{\exp(ikr + i\pi/4)}{\sqrt{2\pi kr}} \cdot \frac{\pi}{2\Phi} \cdot \frac{\sin[\pi\varphi_0/(2\Phi)]}{\Psi(\Phi - \varphi_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{\Psi(\Phi - \varphi - \pi)}{\cos\dfrac{\pi(\varphi + \pi)}{2\Phi} - \cos\dfrac{\pi\varphi_0}{2\Phi}} - \frac{\Psi(\Phi - \varphi + \pi)}{\cos\dfrac{\pi(\pi - \varphi)}{2\Phi} - \cos\dfrac{\pi\varphi_0}{2\Phi}} \right], \qquad (3.106)$$

где

$$\Psi(\gamma) = \Psi_\Phi\left(\gamma + \Phi + \frac{\pi}{2} - \eta_1\right) \cdot \Psi_\Phi\left(\gamma - \Phi - \frac{\pi}{2} + \eta_2\right) \times$$

$$\times \Psi_\Phi\left(\gamma + \Phi - \frac{\pi}{2} + \eta_1\right) \cdot \Psi_\Phi\left(\gamma - \Phi + \frac{\pi}{2} - \eta_2\right);$$

$\Phi = \alpha/2$, η_1 и η_2 – углы скольжения Брюстера, причем $\sin \eta_{1,2} = \rho c/Z_{1,2}$. Для границ, частично поглощающих звук, выполняется условие $0 < \mathrm{Re}\,\eta_{1,2} < \pi/2$.

Функция Г. Д. Малюжинца $\Psi_\Phi(z)$ определяется интегралом

$$\Psi_\Phi(z) = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}(zs) - 1}{s\,\mathrm{ch}(\pi s/2)\cdot \mathrm{sh}(2\Phi s)}\,ds\right]. \qquad (3.107)$$

Этот интеграл может быть вычислен или непосредственно численным интегрированием или разложением в ряды, приведенными в работе [20]. Там же имеются графики функции $\Psi_\Phi(z)$ для некоторых значений угла Φ и комплексного аргумента. Интеграл (3.107) сходится при $|\mathrm{Re}\,z| < \pi/2 + \alpha$. При других значениях z можно использовать рекуррентные соотношения

$$\Psi_\Phi(z) = \Psi_\Phi(z - 4\Phi)\,\mathrm{ctg}(z/2 - \Phi + \pi/4); \qquad (3.108а)$$

$$\Psi_\Phi(z) = \frac{\Psi_\Phi^2(\pi/2)}{\Psi_\Phi(z-\pi)}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4\Phi}(z - \pi/2)\right]. \qquad (3.108б)$$

Более простые выражения для функции $\Psi_\Phi(z)$ получаются в том случае, если угол Φ удовлетворяет соотношению $4\Phi/\pi = n/m$, где n и m – целые числа, причем n – нечетное;

$$\Psi_{\pi n/(4m)}(z) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{\cos(a_{k,l}/2)}{\cos[0{,}5(z/n + a_{k,l})]}\right)^{(-1)^l},$$

где $a_{k,l} = \pi[(2l-1)/n - (2k-1)/m]/2$. В частности, для четвертьплоскости (дифракция на прямом угле) будет $\Phi = 3\pi/4$, $n = 3$, $m = 1$. Тогда

$$\Psi_{3\pi/4}(z) = \frac{2}{3}(1/2 + \cos(z/3))/\cos(z/6). \qquad (3.109)$$

Для полуплоскости при $\Phi = \pi$ функция $\Psi_\pi(z)$ записывается через интеграл, приведенный в работе [146]:

$$\Psi_\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{8\pi}\int_0^z \frac{\pi\sin u - 2\sqrt{2}\pi\,\sin(u/2) + 2u}{\cos u}\,du\right\}$$

или

$$\Psi_\pi(z) = \left[\frac{\sqrt{2}\cos(z/2) + 1}{\sqrt{2}+1}\right]^{1/2}(\cos z)^{-1/8}\exp\left(-\frac{1}{4\pi}\int_0^z \frac{u\,du}{\cos u}\right).$$

В статье [146] приведены простые приближенные выражения

$$\left.\begin{aligned}\Psi_\pi(z) &= 1{,}05302\sqrt{\cos(z/4 - i\ln z)}\exp\left[\frac{iz}{2\pi}\exp(iz)\right] \text{ при } \operatorname{Im} z \geqslant 4{,}6;\\ \Psi_\pi(z) &= 1 - 0{,}01390\,z^2 \text{ при } \operatorname{Im} z < 4{,}6.\end{aligned}\right\} \quad (3.110)$$

Эти формулы справедливы в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \pi/2$. При других значениях $\operatorname{Re} z$ следует использовать рекуррентные соотношения (3.108), причем $\Psi_\pi(\pi/2) = 0{,}965\,62$. Формулы (3.110) обеспечивают точность не хуже, чем 0,27 % по амплитуде и 2,4 % по фазе.

Аппроксимация функции Г. Д. Малюжинца в комплексной области изменения аргумента при $\pi/2 \leqslant \Phi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \operatorname{Re} z < \pi/2$ с ошибкой, меньшей, чем 0,5 %, имеет вид [146]

$$\Psi_\Phi(z) \approx \sqrt{\cos\left[\pi z/(4\Phi)\right]}\,\exp(-\gamma/\pi), \text{ при } \operatorname{Im} z > 6,$$

где

$$\gamma = 2{,}556343\Phi - 3{,}259678\Phi^2 + 1{,}659306\Phi^3 - 0{,}388354\Phi^4 + 0{,}03473964\Phi^5;$$

$$\Psi_\Phi(z) \approx \exp\left(-0{,}15\sum_{n=1}^{5}\frac{\operatorname{ch}(n_1 z) - 1}{n_1 \operatorname{ch}(\pi n_1/2)\,\operatorname{sh}(2\Phi n_1)}\right)$$

при $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 11$. Здесь $n_1 = 0{,}3n - 0{,}15$. Эти формулы обеспечивают вычисление функции $\Psi_\Phi(z)$ в сочетании с выражениями (3.108) при любых значениях аргумента. При $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 3$ справедливо более простое выражение

$$\Psi_\Phi(z) \approx 1 - z^2\delta/\Phi^2, \quad \delta = 0{,}04626 + 0{,}054\Phi - 0{,}0078\Phi^2.$$

При $\operatorname{Im} z < 0$ следует использовать тождества $\Psi_\Phi(z^*) = \Psi_\Phi^*(z)$; $\Psi_\Phi(-z) = \Psi_\Phi(z)$.

Приближенное представление функции Г. Д. Малюжинца дано в статье [110]:

$$\Psi_\Phi(z) = \exp\left[\sum_{q=1}^{10} b_{2q}\, z^{2q}\right], \quad (3.111)$$

причем приведены таблицы коэффициентов b_{2q} для значений величины $N = \Phi/\pi$ от 0,5 до 1,0 с шагом 0,05. Формула (3.111) обеспечивает точность не хуже 10^{-6} при $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 2\Phi$.

Для других значений z могут быть использованы соотношения (3.108). В этой же работе приведена следующая аппроксимация:

$$\Psi_\Phi(z) = \left[\frac{2\cos\left[\pi z/(z/(4\Phi)\right] + 1}{3\cos\left(\pi z/(8\Phi)\right)}\right]^{4\Phi/(3\pi)} + \exp\left[-p(N)\left(\frac{z^2}{4\Phi} - \epsilon_N\right)\right], \quad (3.112)$$

где $p(N) = a\ (0{,}75 - N) + b\,(0{,}75 - N)^2$, причем при $\Phi \leqslant 0{,}75\pi$ $a = 0{,}234$; $b = 0{,}123$, а при $\Phi > 0{,}75\pi$ $a = 0{,}208$; $b = 0{,}109$; $\epsilon_N = \alpha^{13}/(13(2\Phi)^{12})$. Максимальная относительная ошибка не превосходит 10^{-3}. Указано, что формулы (3.111) и (3.112) справедливы и при комплексных z, но не даны границы их применимости по $\mathrm{Im}\, z$.

Дифракционную составляющую p_{d2} (существенную лишь в окрестностях границ раздела зон, показанных на рис. 3.3, *а*) можно записать в виде, аналогичном выражению (3.52):

$$p_{d2} = \psi_1(\varphi) + A_1\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\psi_1(-\varphi) + A_2(\alpha - \varphi_0 - \pi/2)\psi_1(2\alpha - \varphi), \tag{3.113}$$

где $\psi_1(\varphi)$ – по-прежнему определяется формулой (3.53).

Составляющая p_{d2} компенсирует бесконечный разрыв поля на границах освещенных зон и в сумме с геометрооптической составляющей p_g обеспечивает непрерывность поля при изменении угла.

3.5.2. Поле в области тени для различных типов экранов. На рис. 3.11 показана зависимость поля в области акустической тени при дифракции плоской звуковой волны на полуплоскости. Волна падает под углом $\varphi_0 = 90°$. Волновое расстояние до точки наблюдения составляет 10π. Кривые *1* и *5* рассчитаны по формулам (3.49) ... (3.54), причем в области тени $p_g = 0$. Кривая *3* определяет дифракционное поле для идеально-поглощающей полуплоскости (экран Зоммерфельда), рассчитанное по формуле (3.99). Интересно сравнить полученный результат с амплитудой звуковой волны за звукопоглощающими экранами, свойства которых описываются нормальным импедансом (экран Кирхгофа). Расчет для такого экрана выполнен по формуле (3.106) при $Z = Z_1 = Z_2 = \rho c$, $\alpha = 2\pi$. Наибольшее ослабление уровня звукового давления в области глубокой тени наблюдается для акустически мягкого, а наименьшее – для акустически жесткого экрана. Идеально звукопоглощающий и импедансный экраны имеют различные характеристики, причем наибольшие отличия наблюдаются при больших углах φ. При этом

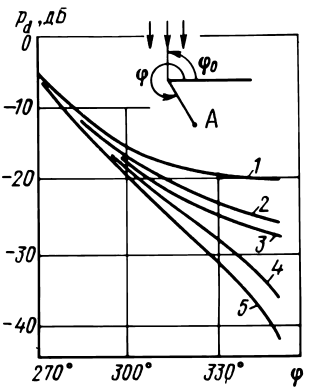


Рис. 3.11. Амплитуда звукового давления в области тени для различных видов экранов

1 – жесткий экран; *2* – полусумма решений для жесткого и мягкого экранов; *3* – идеально поглощающий экран (экран Зоммерфельда); *4* – импедансный экран (экран Кирхгофа); *5* – мягкий экран; $\varphi_0 = 90°$; $kr = 10\pi$

импедансный экран обеспечивает ослабление поля, не намного отличающееся от ослабления, вносимого акустически мягким экраном. Этому явлению можно дать простое объяснение.

Коэффициент отражения плоской звуковой волны от бесконечного экрана, обладающего импедансом Z, определяется соотношением (3.89), из которого следует, что при $Z = \rho c$ коэффициент отражения обращается в нуль лишь при нормальном падении звука. В верхней полуплоскости при $\varphi_0 = 90^\circ$ поле, отраженное по законам геометрической акустики, будет отсутствовать. Однако отсутствие отраженной волны еще не означает того, что экран ведет себя как идеально поглощающий при любых положениях точки наблюдения. Воспользуемся принципом взаимности и будем считать, что в точке A (см. рис. 3.11) находится источник звука, а на линии $\varphi_0 = 90^\circ$ расположен наблюдатель. Тогда становится ясно, что при φ, близких к 360°, звуковая волна, падающая на экран, должна пройти под острым углом к поверхности. Считая в формуле (3.89) $\theta \approx 90^\circ$, получим, что при скользящем падении коэффициент отражения близок к -1, т. е. к величине, соответствующей акустически мягкому экрану. Поэтому и дифрагированное звуковое поле для импедансного звукопоглощающего экрана в области тени оказывается близким полю для акустически мягкого экрана.

В работах [85, 134] обсуждается вопрос о возможности расчета дифрагированного поля для звукопоглощающего экрана в виде полусуммы дифрагированных полей для акустически жесткого и мягкого экранов. Это связано со следующим. При отражении плоской звуковой волны от бесконечной импедансной плоскости суммарное поле определяется в виде

$$p = \exp\left[-ik(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0)\right] + A(\theta)\exp\left[-ik(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0)\right],$$

где $A(\theta)$ – коэффициент отражения, причем $\theta = \pi/2 - \varphi_0$.

Возьмем полусумму значений p для акустически жесткого и мягкого экранов, приняв $A(\theta) = 1$ или $A(\theta) = -1$ соответственно. В этом случае получится только первое слагаемое, а отраженная волна пропадает, что соответствует звукопоглощающему экрану. Возникает вопрос – можно ли таким же образом вычислить и дифракционное поле для звукопоглощающего экрана, взяв за основу решение для акустически жесткого и мягкого экранов?

На рис. 3.11 приведена кривая *2*, рассчитанная как полусумма значений звукового давления для акустически жесткого и мягкого экранов. Видно, что она не совпадает ни с результатами для звукопоглощающего экрана импедансного *3*, ни для идеально звукопоглощающего экрана *4*. Однако она проходит ближе к кривой *3*, поскольку положенная в ее основу концепция более соответствует экрану Зоммерфельда, чем экрану Кирхгофа.

При $\varphi = 270^\circ$, т. е. на границе освещенной зоны, ослабление для любых типов экранов составляет 6 дБ.

3.6. Излучение звука источниками, расположенными на стенках двугранных углов

3.6.1. Звуковое давление в дальнем поле. Приведенные выше выражения для функции Грина могут быть использованы и для решения задачи излучения звука источниками, находящимися на стенках клина. В качестве примера рассмотрим излучение звука пульсирующими источниками, расположенными на стенках системы двугранных углов, изображенных на рис. 3.12 [27]. Все грани имеют конечную длину. Нормальная составляющая колебательной скорости $v(r)$ одинакова на всех гранях. Таким образом, мы имеем периодическую систему источников с периодом $\alpha = 2\pi/M$ по углу φ, где M – количество полуплоскостей. Заметим, что в частном случае $M = 1$ мы получаем задачу об излучении звука полосой шириной a, при $M = 2$ – ту же задачу при ширине полосы $2a$.

В силу симметрии звукового поля относительно каждой из полуплоскостей на продолжениях отрезков, изображенных на рис. 3.12, *а*, нормальная составляющая колебательной скорости будет равна нулю. Поэтому, не нарушая картину звукового поля, можно дополнить каждый отрезок акустически жестким экраном и перейти к двугранному углу, изображенному на рис. 3.12, *б*.

Звуковое поле можно вычислить, интегрируя функцию Грина для двугранного угла с жесткими стенками. Воспользуемся формулой (12.13) из работы [63]. Учтем при этом, что множитель $1/(4\pi)$ уже включен в выражение для функции Грина, приведенные в этой главе. Тогда

$$p(r, \varphi) = \int_S \frac{\partial p}{\partial n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0)\, dS_0. \qquad (3.114)$$

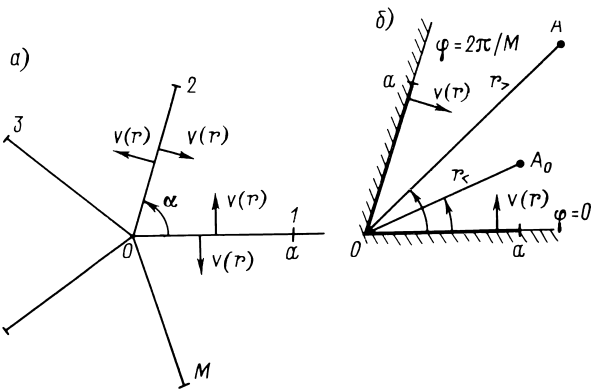


Рис. 3.12. Излучатели на стенках двугранных углов конечной длины (*а*) и дополненного жестким экраном (*б*)

Индекс у элемента dS_0 указывает, что интегрирование выполняется по переменной r_0. Функция $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ представляет собой функцию Грина для клина с акустически жесткими стенками, определяемую выражением (3.14).

Устремим точку A_0 сначала на поверхность $\varphi_0 = 0$, а затем на поверхность $\varphi_0 = \alpha$; интегрирование в формуле (3.114) проводится по всей внутренней поверхности двугранного угла. Поэтому $\int\limits_S = \int\limits_0^a + \int\limits_a^0$. В первом из этих интегралов (при $\varphi_0 = 0$) $\partial p/\partial n_0 = \partial p/\partial \varphi = -i\omega\rho v_0$, а во втором (при $\varphi_0 = \alpha$) $\partial p/\partial n_0 = -\partial p/\partial \varphi = +i\omega\rho v_0$. Будем искать поле в точке $r_> = r$, считая, что $r > a$. Тогда выражение (3.114) можно переписать в виде

$$p(r, \varphi) = -i\omega\rho \int\limits_0^a v(r_0)[G(\vec{r}, \vec{r}_0)|_{\varphi_0 = 0} + G(\vec{r}, \vec{r}_0)|_{\varphi_0 = \alpha}]dr_0. \qquad (3.115)$$

Запишем колебательную скорость в виде $v(r) = v_0 f(r)$, где $f(r)$ – заданная безразмерная функция. После подстановки функции Грина (3.14) получим

$$p(r, \varphi) = \frac{M\rho c v_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m H_q^{(1)}(kr) C_q \cos(q\varphi); \quad r > a, \qquad (3.116)$$

где $q = Mm$;

$$C_q = k \int\limits_0^a f(r_0) J_q(kr_0) dr_0.$$

При равномерном амплитудном распределении $f(r_0) = 1$ задача сводится к вычислению интеграла от функции Бесселя, который можно представить в виде суммы ряда

$$\int\limits_0^{ka} J_q(x)dx = 2 \sum_{s=0}^{\infty} J_{q+2s+1}(ka).$$

Для дальнего поля при $kr \gg 1$ из выражения (3.116) получим

$$p(r, \varphi) = \frac{Mpcv_0}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \times$$

$$\times \exp(ikr - i\pi/4) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q \times$$

$$\times C_q \cos(q\varphi). \qquad (3.117)$$

Члены ряда (3.117) быстро убывают при $q = M_m > ka$, т. е. при $m > ka/M$.

Формулы (3.116), (3.117) дают решение задачи для двумерного случая.

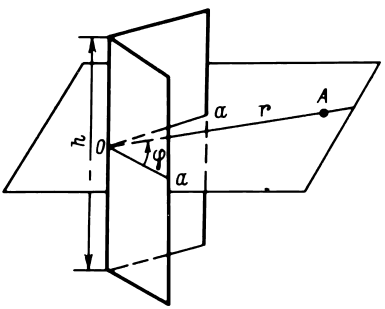


Рис. 3.13. Двугранный угол конечной высоты

Для определения поля в дальней зоне в трехмерном случае, если излучатель имеет высоту h (рис. 3.13), можно воспользоваться соотношением (21.28), полученным в работе [63],

$$p_{\text{огр}} = p \frac{h \exp(-i\pi/4)}{\sqrt{r\lambda}}.$$

Здесь p и $p_{\text{огр}}$ – звуковые давления, развиваемые излучателями, один из которых имеет бесконечную высоту, а другой является ограниченным в этом направлении и имеет высоту h. Предполагается при этом, что излучатель дополнен по высоте жесткими экранами.

В рассматриваемом здесь случае пульсирующих излучателей это требование оказывается выполненным автоматически, так как симметричный относительно своей плоскости излучатель без экрана полностью эквивалентен излучателю, дополненному по высоте экраном. (Для несимметричного, например осциллирующего, излучателя последнее выражение с достаточной для практических целей точностью справедливо при высоте, превышающей длину волны). Для трехмерного случая звуковое давление, развиваемое конечным по высоте излучателем, будет

$$p_{\text{огр}}(r, \varphi) = \frac{-iMh\rho c v_0 \exp(ikr)}{2\pi} \frac{}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q \cos(q\varphi). \qquad (3.118)$$

На рис. 3.14 приведены зависимости звукового давления от угла φ, вычисленные по формуле (3.117) и пронормированные к максимальным значениям амплитуды поля при различных количествах полуплоскостей. Принято равномерное амплитудное распределение колебательной скорости $f(r) = 1$. Кривые на рис. 3.14, *а* для $M = 2$ совпадают с диаграммами направленности плоского поршня длиной $2a$. Более сложный характер имеют зависимости при $M = 3$. При малых волновых размерах ka максимумы диаграммы расположены при $\varphi = 0$, 60, 120°, а при больших ka – при $\varphi = 30$ и 90°. Действительно, при $a < \lambda$ (схема слева на рис. 3.14, *б*) указанные направления соответствуют минимальной разности фаз вкладов отдельных элементов каждого из излучателей. При $a > \lambda$ (см. схему справа) каждый из излучателей приобретает собственную направленность и начинает излучать перпендикулярно к своей поверхности, в результате чего направления максимальных значений смещаются. Для $M = 4$ (рис. 3.14, *в*), как и следует ожидать, максимумы излучения направлены перпендикулярно к поверхности. При $M \geqslant 5$ должны происходить явления, связанные с переотражением звука, излучаемого одной гранью, на противоположной грани. При $a > \lambda$ (схема слева) пары граней 2–5 и 3–1 формируют максимумы в направлениях $\varphi = 0$ и 72° соответственно, а пара 3–5 – максимум в направлении биссектрисы угла, т. е. $\varphi = 36°$. Взаимное переотражение в этом случае мало́, так как при низких часто-

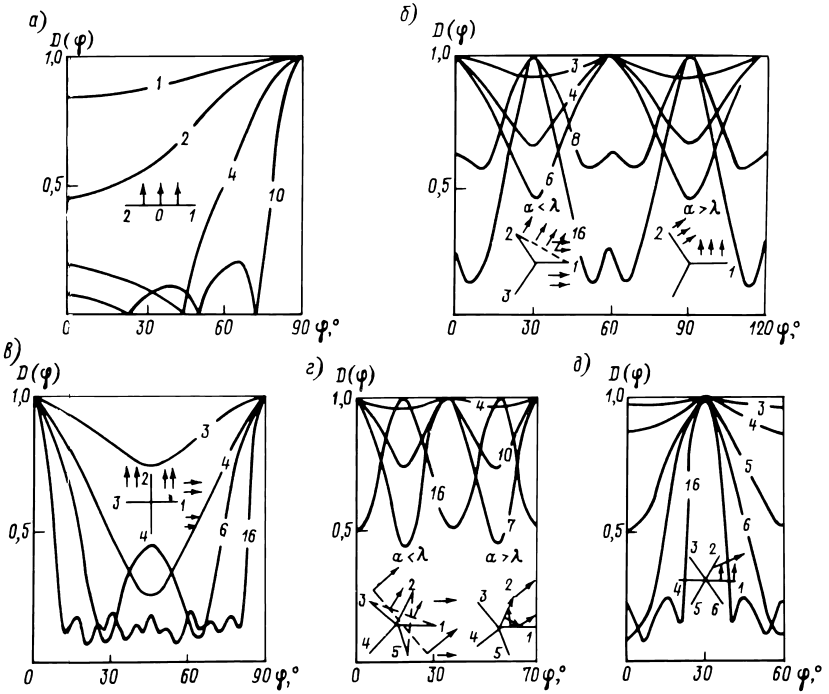


Рис. 3.14. Диаграммы направленности: *а* – при $M = 2$; *б* – при $M = 3$; *в* – при $M = 4$; *г* – при $M = 5$; *д* – при $M = 6$; номера кривых соответствуют волновому размеру ka

тах происходит дифракция и излучение пары 3–5, образующей „почти плоский" поршень, огибает грани 1–2. При $a > \lambda$ начинается переотражение по геометрическому закону. В этом случае главные максимумы оказываются направленными под углами 18 и 54°. Для $M = 6$ (рис. 3.14, *д*) при $a < \lambda$ максимумы излучения в направлении 30° формируются парами граней 3–6, 1–4 и т. д., максимумы при $a > \lambda$ формируются также в направлении 30° согласно схеме.

Зависимости максимального звукового давления [пронормированного к величине $\rho c v_0 h/(2\pi)$] приведены на рис. 3.15.

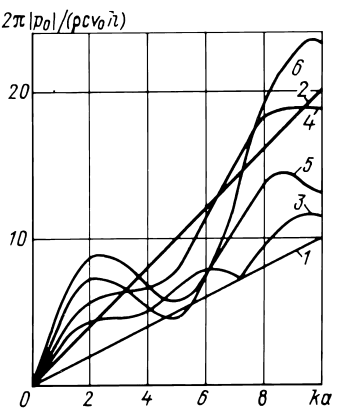


Рис. 3.15. Максимальное звуковое давление (номера кривых соответствуют числу M)

3.6.2. Коэффициент концентрации и сопротивление излучения. Вычислим теперь коэффициент концентрации $K_к$. В связи с тем, что главный максимум может быть направлен в разные точки пространства, будем полагать, что $K_к$

определено для направления, соответствующего биссектрисе угла, т. е. $\varphi = \pi/M$. Из рис. 3.14 видно, что это направление соответствует положению главного максимума при $a < \lambda$. Таким образом, для малых волновых размеров найденное значение $K_к$ будет наибольшим для всех углов φ. В тех случаях, когда главный максимум не будет совпадать с направлением биссектрисы, полученное значение $K_к$ уже не будет максимальным (и может, например, оказаться меньше единицы).

Для получения максимального значения $K_к$, соответствующего главному максимуму диаграммы, следует рассчитанную по формуле (3.120) величину $K_к$ поделить на квадрат значения диаграммы направленности в направлении биссектрисы, т. е. на $D^2(\pi/M)$.

Полагая, что $h > \lambda$, воспользуемся формулой для коэффициента концентрации цилиндрического излучателя [50]

$$K_к = \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{2}{\int_0^{2\pi} D^2(\varphi)\, d\varphi}. \qquad (3.119)$$

Диаграмма направленности, пронормированная в направлении биссектрисы угла, будет

$$D(\varphi) = \left| \frac{p(\varphi)}{p(\pi/M)} \right| = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q \cos(q\varphi) \Big/ \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q (-1)^m \right|.$$

После подстановки в (3.119) получим

$$K_к = \frac{2h}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{M} \cdot \frac{\left| \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q (-1)^m \right|^2}{\int_0^{2\pi/M} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q \cos(q\varphi) \right|^2 d\varphi}.$$

Для того чтобы выполнить интегрирование, следует представить квадрат модуля суммы в виде произведения комплексно-сопряженных величин. В результате найдем

$$K_к = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\left| \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (-i)^q C_q (-1)^m \right|^2}{\sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m |C_q|^2}. \qquad (3.120)$$

Вычислим импеданс излучения. Воспользуемся определением

$$Z_s = \frac{1}{v_0^2} \int_0^h \int_0^a p(r_1, 0) v^*(r_1)\, dr_1 dz = \frac{h}{v_0} \int_0^a p(r_1, 0) f^*(r_1)\, dr_1.$$

(* – знак комплексного сопряжения). При таком определении излучаемая мощность будет

$$W = \frac{1}{2} h \cdot \mathrm{Re} \int_0^a p(r_1, 0) v^*(r_1)\, dr_1 = v_0^2 R_S/2,$$

где $R_S = \mathrm{Re}\, Z_S$. Нормированную величину $z_S = r_S + i x_1 = Z_S/(\rho c S)$, где $S = a h$ – площадь одной стороны излучателя, можно записать в виде

$$Z_S = \frac{1}{\rho c a v_0} \int_0^a p(r_1, 0) f^*(r_1)\, dr_1. \qquad (3.121)$$

Заметим, что воспользоваться выражением (3.116) в данном случае нельзя, так как оно справедливо лишь при $r > a$, а при вычислении импеданса излучения придется вычислять звуковое поле на поверхности излучателя в точке $r_1 < a$. Поэтому следует вернуться к исходным выражениям (3.114), (3.115) для вычисления поля в точке наблюдения, находящейся на поверхности излучателя, разбить интеграл (3.114) на сумму двух интегралов в пределах $0, r_1$ и r_1, a, в первом из которых переменная интегрирования $r < r_1$, т. е. $r_< = r$ и $r_> = r_1$, а во втором $r > r_1$, т. е. $r_> = r$ и $r_< = r_1$. Тогда

$$p(r_1, 0) = \frac{M\omega\rho}{2} \Big[\int_0^1 v(r) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m J_q(kr) H_q^{(1)}(kr_1)\, dr_1 +$$

$$+ \int_{r_1}^a v(r) \sum_{m=0}^{\infty} J_q(kr_1) H_q^{(1)}(kr)\, dr \Big].$$

После подстановки этого выражения в формулу (3.121) получим два двойных интеграла. Второй из них можно преобразовать, используя формулу Дирихле для изменения порядка интегрирования в двойном интеграле. В результате получим

$$z_S = \frac{M}{2ka} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m d_m, \qquad (3.122)$$

Здесь

$$d_m = 2 \int_0^{ka} \Big[\int_0^{x_1} J_q(x) H_q^{(1)}(x_1)\, f(x/k) f^*(x_1/k) dx \Big] dx. \qquad (3.123)$$

Исследуем сходимость суммы (3.122), учитывая, что коэффициенты содержат как возрастающие, так и убывающие функции номера n.

Рассмотрим члены суммы с достаточно большими индексами цилиндрических функций $q = Mm > ka$, т. е. $m > ka/M$. Для этих членов $q > x,\ x_1$. Воспользуемся асимптотическим выражением для цилиндрических функций при индексе, большем аргумента, и составим произведение

$$F_q(x, x_1) = J_q(x) H_q^{(1)}(x_1) \approx \frac{i}{\pi [(q^2 - x^2)(q^2 - x_1^2)]^{1/4}} \times$$

$$\times \left[\frac{q + \sqrt{q^2 - x_1^2}}{q + \sqrt{q^2 - x^2}} \cdot \frac{x}{x_1} \right]^q \exp\left(\sqrt{q^2 - x_1^2} - \sqrt{q^2 - x^2}\right). \qquad (3.124)$$

Для исследования сходимости положим $q > x, x_1$. Тогда имеем оценку $F_q(x, x_1) \approx -i/(x/x_1)^q/(\pi q)$. Теперь найдем оценку коэффициентов d_m при $m \gg ka/M$ и $f(x) = 1$. После интегрирования получим

$$d_m \approx -i(ka)^2/[\pi q(q+1)]. \qquad (3.125)$$

Таким образом, d_m имеет порядок $(Mm)^{-2}$ и ряд сходится. Заметим, однако, что этот ряд сходится медленнее, чем ряд (3.117), и при вычислении интеграла (3.123) с помощью ЭВМ возможная ситуация, при которой J_q обратится в машинный нуль, а $H_q^{(1)}$ выйдет за разрядную сетку, хотя сходимость еще не будет обеспечена. Поэтому для вычислений следует сумму (3.122) разбить на две суммы: от 0 до N и от $N+1$ до ∞, где N находится из соотношения $M(N+1) \approx (3 \div 5)ka$, т. е. $N \approx (3 \div 5)ka/M - 1$, но не менее двух. Первая сумма вычисляется непосредственно, для второй суммы используется приближенное соотношение (3.124). Кроме того, можно применить методы улучшения сходимости, используя оценку (3.125). Гораздо более простое выражение для вещественной составляющей r_s (сопротивления излучения) можно получить другим способом. Запишем выражения для излучаемой мощности в виде

$$W = \frac{v_0^2 R_s}{2} = \frac{|p_0|^2}{2\rho c} \frac{4\pi r^2}{K_к},$$

где p_0 – звуковое давление в дальнем поле, вычисленное в том же направлении, для которого определен коэффициент концентрации $K_к$, – в направлении биссектрисы $\varphi = \pi/M$. Отсюда

$$r_s = R_s/(\rho c S) = \frac{|p_0|^2}{v_0^2} \frac{4\pi r^2}{K_к S_{полн} (\rho c)^2}. \qquad (3.126)$$

Здесь $S_{полн} = 2ahM$ – полная площадь излучающей поверхности с учетом того, что каждый излучатель имеет две стороны. Используя формулы (3.118), (3.120) и (3.126), получим

$$r_s = \frac{M}{2ka} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m |C_q|^2. \qquad (3.127)$$

В отличие от формулы (3.122) в последнем выражении ряд быстро сходится. При малых значениях M зависимость $r_s/(\rho c)$ от k (рис. 3.16) быстро стремится к единице. Заметим, что кривая для $M = 2$, как и следует ожидать, в точности совпадет с кривой для $M = 1$, если масштаб по оси абсцисс увеличить в 2 раза в соответствии со сказанным выше.

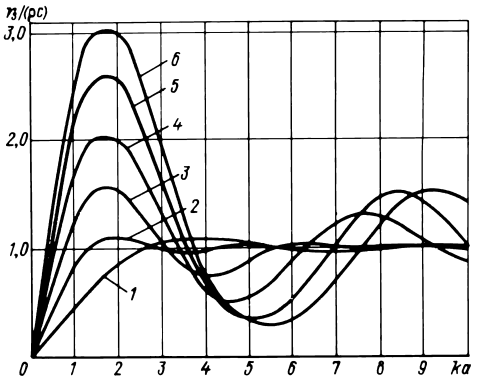


Рис. 3.16. Сопротивление излучения, рассчитанное на единицу площади (номера кривых соответствуют числу M).

При увеличении M появляются значительные осцилляции кривых, что связано со взаимной нагрузкой излучателей друг на друга. Особенно сильно возрастает первый максимум кривой. Для того чтобы оценить его положение, возьмем $M \gg ka$. Тогда в формуле (3.127) останется лишь член $m = 0$. Приравняем нулю производную $dr_s/d(ka)$. В результате получим уравнение относительно ka:

$$2kaJ_0(ka) = \int_0^{ka} J_0(x)dx.$$

Для решения этого уравнения можно использовать таблицы интегралов от функции Бесселя, приведенные, например, в работе [51]. Первый корень этого уравнения равен 1,713. Поэтому максимальное значение сопротивления излучения достигается при $a = 0{,}27\lambda$. Появление этого максимума объясняется тем, что при больших M область между соседними излучателями превращается в узкий клин конечной длины, имеющий некоторую аналогию с отрезком волновода, открытого с одной стороны. Так же, как и для отрезка волновода, излучение из узкой клиновидной области должно носить резонансный характер.

Глава 4

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА НЕКОТОРЫХ ТЕЛАХ С ИДЕАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

4.1. Сечение рассеяния и радиус эквивалентной сферы. Основные определения

При решении задачи о рассеянии звука препятствием чаще всего интересуются параметрами поля вдали от препятствия в области Фраунгофера ($r \to \infty$), где рассеянное поле можно представить в виде

сферической расходящейся волны. Для трехмерного случая в сферической системе координат рассеянное поле можно записать в виде произведения множителей, один из которых зависит только от расстояния, а второй – только от пространственных углов (рис. 4.1):

$$p_s(r_0, \theta, \varphi) = p_0 \frac{\exp(ikr_0)}{kr_0} f_s(\theta, \varphi). \tag{4.1}$$

Здесь $f_s(\theta, \varphi)$ – комплексная амплитуда звукового давления; p_0 – амплитуда звукового давления в падающей плоской волне.

Поток энергии через поверхность S_0 в рассеянной волне (мощность рассеяния) определяется формулой

$$W_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} p_s v_{sn}^* dS, \tag{4.2}$$

где v_{sn} – нормальная к поверхности S_0 составляющая колебательной скорости в рассеянной волне; звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Выберем в качестве S_0 сферу большого радиуса ($kr_0 \gg 1$), охватывающую препятствие. Тогда

$$v_{sn} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P_s}{\partial r_0} \approx \frac{p_0}{\rho c} \frac{\exp(ikr_0)}{kr_0} f_s(\theta, \varphi);$$

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Из выражений (4.1) и (4.2) теперь получим

$$W_s = \frac{p_0^2}{2\rho c k^2} \int_{\Omega} |f_s(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{4.3}$$

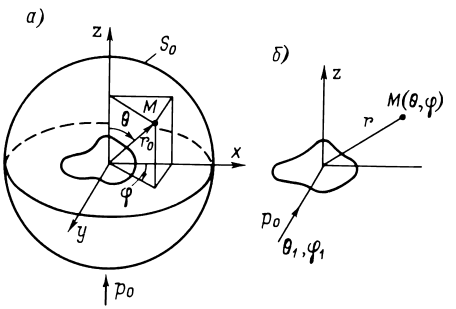


Рис. 4.1. Система координат: *а* – расположение точки наблюдения; *б* – двухпозиционное рассеяние

Интегрирование проводится по всему телесному углу. Интенсивность падающей плоской волны запишем в виде $I_0 = p_0^2/(2\rho c)$.

Отношение

$$\sigma_s = W_s / I_0 \tag{4.4}$$

имеет размерность площади и называется *полным сечением*

рассеяния. Эта величина равна площади сечения некоторой трубки, выделенной в падающем звуковом поле, мощность звукового поля в которой совпадает с мощностью, рассеянной препятствием. Из определений (4.4) следует, что

$$\sigma_s = \frac{1}{k^2} \int\limits_{\Omega} |f_s(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{4.5}$$

Если тело обладает поглощением, то можно ввести в рассмотрение *полное поперечное сечение поглощения*

$$\sigma_a = W_a / I_0, \tag{4.6}$$

где W_a – мощность, поглощенная внутри тела.

В практическом отношении более важной задачей является определение значения звукового давления или интенсивности в волне, рассеянной в заданном направлении, например в направлении, обратном направлению падающей волны (см. рис. 4.1, *а*; $\theta = 180^\circ$). Введем в рассмотрение некоторый фиктивный ненаправленный излучатель, создающий сферическую волну с амплитудой, равной амплитуде рассеянной волны в заданном направлении θ, φ. Мощность такого излучателя будет $W_\Phi = 4\pi r_0^2 \frac{|p_s|^2}{2\rho c}$.

Отнесем эту мощность к интенсивности падающей волны и определим, таким образом, поперечное сечение рассеяния в заданном направлении θ, φ:

$$\sigma(\theta, \varphi) = 4\pi r_0^2 |p_s(\theta, \varphi)/p_0|^2, \tag{4.7}$$

зависящее от положения точки наблюдения.

В частном случае обратного отражения следует воспользоваться последним выражением, в котором p_s необходимо определять для направления, обратного направлению падения волны. В тех случаях, когда необходимо изучить поведение рассеянного поля при различных углах облучения препятствия (см. рис. 4.1, *б*), рассматривают также *двухпозиционное сечение рассеяния*. При этом амплитуда рассеянного поля p_s и поперечник рассеяния будут функциями углов θ_1, φ_1 и θ, φ, определяющих соответственно ориентацию падающей волны и положение точки наблюдения. При $\varphi = \varphi_1 + 180^\circ$ и $\theta = 180^\circ - \theta_1$ двухпозиционное сечение рассеяния превращается в *сечение обратного рассеяния* для заданной ориентации поля.

Зная сечение обратного рассеяния, легко определить звуковое давление в волне, рассеянной в обратном направлении. Будем обозначать добавочным индексом L все значения для направления $\theta = 180^\circ$, т. е. для этого направления звуковое давление в рассеянной волне и сечение обратного рассеяния будут

$$p_{sL} = p_0 \frac{\exp(ikr_0)}{kr_0} f_{sL}; \quad \sigma_L = 4\pi r_0^2 \left| \frac{p_{sL}}{p_0} \right|^2.$$

Отсюда получим выражение, связывающее звуковое давление, рассеянное в обратном направлении, с сечением обратного рассеяния

$$|p_{sL}| = \frac{p_0}{r_0} \sqrt{\frac{\sigma_L}{4\pi}}. \tag{4.8а}$$

В качестве меры обратного рассеяния рассматривают также *радиус эквивалентной отражающей сферы* или (сокращенно) *эквивалентный радиус* тела. Известно, что для акустически жесткой или мягкой сферы радиусом a больших волновых размеров ($ka \gg 1$) амплитуда звуковой волны, отраженной в обратном направлении $\theta = 180°$, определяется простым соотношением

$$p_{sL} = p_0 a/(2r_0). \tag{4.8б}$$

Рассмотрим отражающую сферу, создающую в обратном направлении такое же звуковое давление, что и исследуемое тело. Радиус $a_э$ такой эквивалентной сферы можно выразить через сечение рассеяния в обратном направлении σ_L. Считая, что p_{sL} в формуле (4.8б) равно $|p_{sL}|$ в выражении (4.8а), найдем

$$\sigma_L = \pi a_э^2. \tag{4.9}$$

Таким образом, сечение обратного рассеяния совпадает с площадью большого круга эквивалентной сферы.

Приравняем выражения (4.7) и (4.9) и найдем эквивалентный радиус, использовав определение (4.1). Тогда получим выражение

$$a_э = 2|f_{sL}|/k, \tag{4.10}$$

связывающее эквивалентный радиус сферы для обратного отражения с амплитудой обратного рассеяния.

Заметим, что радиус эквивалентной сферы $a_э$ для реального тела сферической формы приближенно равен радиусу этого препятствия a лишь при условии $ka \gg 1$. На рис. 4.2 показаны зависимости отношения $a_э/a$ от волнового радиуса для акустически жесткой и мягкой сфер, а также звукопоглощающей сферы с поверхностным импедансом, равным волновому сопротивлению среды ($Z = \rho c$).

Расчет выполнен по приведенной ниже формуле (4.32). При $ka > 1$ эквивалентные радиусы жесткой и мягкой сфер становятся близкими к геометрическому радиусу. На низких частотах эквивалентный радиус жесткой сферы оказывается гораздо меньше, чем ее геометрический радиус. Для акустически мягкой сферы эквивалентный радиус на низких

частотах вдвое больше геометрического (заметим, что мы не рассматриваем здесь резонансные колебания газового пузырька в жидкости, при котором амплитуда рассеяния может быть много большей). Облицовка сферы звукопоглощающим покрытием уменьшает эквивалентный радиус, но не приводит к полному отсутствию отражения. На низких частотах амплитуда отражения от сферы со звукопоглощающим покрытием оказывается даже большей, чем от акустически жесткой сферы. Следует отметить, однако, что само понятие о локальном импедансе поверхности справедливо лишь для тел, размер которых больше длины волны в материале, так как оно предполагает независимость колебаний различных точек поверхности. В противном случае необходимо рассматривать не импедансное, а упругое тело.

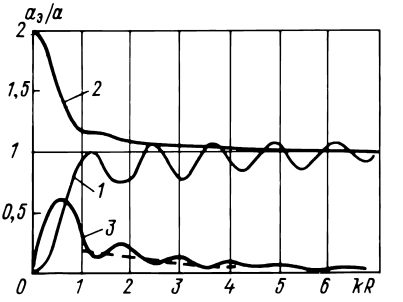


Рис. 4.2. Радиусы эквивалентной сферы для тел сферической формы *1, 2* – жесткая и мягкая сферы соответственно; *3* – импедансная звукопоглощающая сфера ($Z = \rho c$).

Полное сечение рассеяния сферы [24] оказывается вдвое больше сечения обратного рассеяния, т. е. при $ka \gg 1$ $\sigma_s = 2\pi a^2$. Это связано с тем, что в результате дифракции создается не только отраженная волна, но и область тени, причем на образование последней тратится ровно половина рассеянной мощности.

4.2. Оптическая теорема

4.2.1. Трехмерный случай. Существует простое, но весьма нетривиальное соотношение, связывающее мощность в рассеянной волне и звуковое давление в направлении падения плоской волны на препятствие. Рассмотрим полный поток энергии через некоторую поверхность, окружающую препятствие, и будем считать, что источник звука лежит вне этой поверхности. Для начала будем считать, что препятствие не поглощает звук, т. е. активные потери (диссипация) отсутствуют. В этом случае полный поток энергии через любую замкнутую поверхность S, окружающую препятствие, должен быть равен нулю. Поток энергии можно записать следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_S p v_n^* dS = -\frac{1}{2\omega\rho}\operatorname{Im}\int_S p\frac{\partial p^*}{\partial n}dS = 0. \qquad (4.11)$$

Записав полное звуковое поле в виде суммы падающего и рассеянного полей ($p = p_i + p_s$), получим

$$W = -\frac{1}{2\omega\rho}\operatorname{Im}\int_S\left(p_i\frac{\partial p_i^*}{\partial n} + p_i\frac{\partial p_s^*}{\partial n} + p_s\frac{\partial p_i^*}{\partial n} + p_s\frac{\partial p_s^*}{\partial n}\right)dS = 0. \qquad (4.12)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что интеграл от первого слагаемого равен нулю. Это связано с тем, что поток энергии в падающей волне, определяемый этим слагаемым, равен нулю, так как источники находятся вне этой поверхности, а активные потери внутри нее отсутствуют. Интеграл от последнего члена равен потоку энергии в рассеянной волне W_s, соответствующему формуле (4.2). Таким образом,

$$W_s = \frac{1}{2\omega\rho} \operatorname{Im} \int_S \left(p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial n} + p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial n} \right) dS. \tag{4.13}$$

Выбор поверхности S для дальнейшего вывода непринципиален. В частности, можно считать, что S совпадает с поверхностью тела. Падающую плоскую волну запишем в виде (рис. 4.3) $p_i = p_0 \times \exp(ikz) = p_0 \exp(ikl\cos\beta)$. Тогда $\partial p_i/\partial n = p_0 ik \exp(ikz)\partial z/\partial n = p_0 ik \exp(ikl\cos\beta)\cos\gamma$, где γ – угол между осью z и нормалью к поверхности. Из выражения (4.13) получим

$$W_s = \frac{p_0}{2\rho\omega} \operatorname{Im} \int_S \left(-p_s ik \exp(-ikl\cos\beta)\cos\gamma + \exp(ikl\cos\beta)\frac{\partial p_s^*}{\partial n} \right) dS. \tag{4.14}$$

Запишем теперь интеграл Гельмгольца для рассеянного поля

$$p_s(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[p_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) - \frac{\partial p_s}{\partial n} \frac{\exp(ikr)}{r} \right] dS. \tag{4.15}$$

Будем считать, что точка наблюдения находится вдали от тела в области Фраунгофера и лучи $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$ практически параллельны (см. рис. 4.3). В этом случае $r \approx r_0 - l\cos\alpha$.

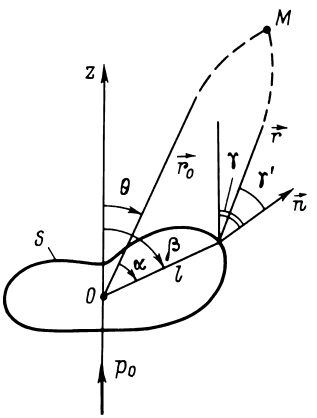


Рис. 4.3. К выводу оптической теоремы

Вычислим нормальную производную

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp(ikr)}{r} \right) =$$

$$= \frac{ikr - 1}{r} \frac{\exp(ikr)}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \approx$$

$$\approx -ik \exp(-ikl\cos\alpha) \frac{\exp(ikr_0)}{r_0} \cos\gamma'.$$

Здесь γ' – угол между лучом $\vec{r}$ и нормалью; $\partial r/\partial n = -\cos\gamma'$.

Используя последнее выражение, из формулы (4.15) получим

$$p_s(r_0,\theta) = \frac{1}{4\pi}\frac{\exp(ikr_0)}{r_0}\int_S\left[-p_s ik\exp(-ikl\cos\alpha)\cos\gamma' - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial p_s}{\partial n}\exp(-ikl\cos\alpha)\right] dS. \qquad (4.16)$$

Выразим $p_s(r_0, \theta)$ через функцию рассеяния $f_s(\theta, \varphi)$ по формуле (4.1). Тогда

$$\int_S\left[-p_s ik\exp(-ikl\cos\alpha)\cos\gamma' - \frac{\partial p_s}{\partial n}\exp(-ikl\cos\alpha)\right] dS = \frac{4\pi p_0}{k} f_s(\theta,\varphi) \qquad (4.17)$$

Сравним теперь интегралы, входящие в выражения (4.14) и (4.17), и заметим при этом, что $\mathrm{Im}\,(\exp(ikl\cos\beta)\partial p_s^*/\partial n) = -\mathrm{Im}\,(\exp(-ikl\cos\beta) \times \partial p_s/\partial n)$. Если точка наблюдения M находится на оси z, то $\theta = 0$, $\alpha = \beta$, $\gamma = \gamma'$. В этом случае указанные интегралы будут равны. В результате получим

$$W_s = \frac{4\pi}{k}\frac{p_0^2}{2\omega\rho}\,\mathrm{Im} f_s(0), \text{ или } W_s = I_0 4\pi\,\mathrm{Im} f_s(0)/k^2, \qquad (4.18)$$

где через $f_s(0)$ обозначено значение $f_s(\theta = 0)$.

Таким образом, получился довольно неожиданный результат – полная энергия в рассеянной волне определяется через мнимую часть комплексной амплитуды звукового давления в рассеянной волне, вычисленную в одной-единственной точке – в направлении падающей волны (рассеяние „вперед"). Величину W_s можно по формуле (4.3) выразить через диаграмму рассеяния. Используя соотношение (4.18), получим

$$\mathrm{Im} f_s(0) = \frac{1}{4\pi}\int_\Omega |f_s(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \qquad (4.19)$$

Интегрирование выполняется по всему телесному узлу. Используя формулу (4.5), можно связать полное сечение рассеяния и величину $\mathrm{Im} f_s(0)$:

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2}\mathrm{Im} f_s(0). \qquad (4.20)$$

По аналогии с задачей излучения звука определим коэффициент концентрации для рассеянного поля

$$K_s = \frac{4\pi}{\int\limits_{\Omega} \left| \frac{f_s(\theta, \varphi)}{f_s(0)} \right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi} \tag{4.21}$$

Под знаком интеграла здесь стоит нормированная (к значению при $\theta = 0$) характеристика рассеяния. Используя формулу (4.19), получим

$$\mathrm{Im} f_s(0) = |f_s(0)|^2 / K_s. \tag{4.22}$$

Соотношения (4.18) ... (4.20) называются *оптической теоремой*, поскольку они впервые были получены в теории электромагнитного поля. Сведения о доказательстве и применении этой теоремы имеются в работах [59, 89, 119].

Выражение (4.19) может служить для косвенного контроля правильности вычислений при расчете диаграммы рассеяния.

Если тело обладает поглощением, то правая часть выражения (4.11) уже не будет равна нулю и оптическая теорема должна быть дополнена с учетом поглощенной мощности W_a. В этом случае вместо выражений (4.18), (4.20) следует записать

$$W_s + W_a = I_0 4\pi \, \mathrm{Im} f_s(0)/k^2; \tag{4.23а}$$

$$\sigma_s + \sigma_a = 4\pi \, \mathrm{Im} f_s(0)/k^2. \tag{4.23б}$$

Соотношение (4.23а) можно применять для вычисления энергии, поглощенной телом. Если подставить в него соотношение (4.3), то с учетом определения (4.21) получим

$$W_a = I_0 \frac{4\pi}{k^2} [\mathrm{Im} f_s(0) - |f_s(0)|^2 / K_s]. \tag{4.24}$$

Из формулы (4.18) следует, что $\mathrm{Im} f_s(0) > 0$, а из выражения (4.24) видно, что должно выполняться и более сильное неравенство

$$\mathrm{Im} f_s(0) \geqslant |f_s(0)|^2 / K_s. \tag{4.25}$$

4.2.2. Двумерный случай. Все предыдущие формулы относились к трехмерной задаче. Оптическую теорему для двумерного случая можно получить аналогичным образом. В качестве определения функции рассеяния в дальнем поле для двумерного случая возьмем выражение

$$p_s(r_0, \theta) = p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4) f_s(\theta), \tag{4.26}$$

выделив в качестве множителей расходящуюся цилиндрическую волну. Вместо интеграла (4.15) следует использовать выражение

$$p_s(\vec{r}_0) = \frac{i}{4}\int_S \left[p_s \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) - \frac{\partial p_s}{\partial n} H_0^{(1)}(kr)\right] dS.$$

Здесь S – контур, ограничивающий тело. Возьмем асимптотические значения при $kr \to \infty$, полагая $r = r_0 - l\cos\alpha$,

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4 - ikl\cos\alpha);$$

$$\frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \approx -ik\sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4 - ikl\cos\alpha)\cos\gamma'.$$

Далее вывод не отличается от трехмерного случая. Все геометрические величины показаны на рис. 4.3, причем в данном случае следует считать, что S – сечение цилиндрической поверхности плоскостью чертежа. Вместо формулы (4.17) получим $\int_S = -4i f_s(\theta)$.

Мощность в рассеянной волне (на единицу длины цилиндра в направлении образующей) получим из выражения (4.14), используя найденное значение интеграла

$$W_s = -\frac{2p_0}{k\rho c}\operatorname{Re} f_s(0), \qquad (4.27а)$$

или

$$W_s = -I_0 4\operatorname{Re} f_s(0)/k. \qquad (4.27б)$$

Рассеянная мощность определится интегрированием по пространству

$$W_s = \frac{1}{2\rho c}\int_0^{2\pi} |p_s(\theta)|^2 r_0 d\theta = I_0 \frac{2}{\pi k}\int_0^{2\pi} |f_s(\theta)|^2 d\theta. \qquad (4.28)$$

Из последних двух выражений получим

$$\operatorname{Re} f_s(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(\theta)|^2 d\theta. \qquad (4.29)$$

В отличие от трехмерной задачи в двумерном случае оптическая теорема связывает с диаграммой рассеяния не мнимую, а вещественную

часть комплексной амплитуды звукового давления. Из выражения (4.29) следует, что $\mathrm{Re} f_s(0) < 0$.

Взяв отношение рассеянной мощности к интенсивности падающей волны, по формуле (4.27б) получим полный поперечник рассеяния

$$\sigma_s = -4\,\mathrm{Re} f_s(0)/k. \tag{4.30}$$

В данном случае он имеет размерность длины и соответствует ширине полосы, выделенной в падающем поле, мощность в которой совпадает с мощностью, рассеянной препятствием.

При наличии поглощения в материале тела в двумерном случае вместо выражения (4.27б) следует записать $W_s + W_a = -I_0 4\,\mathrm{Re} f_s(0)/k$. Здесь W_s и W_a – соответственно рассеянная и поглощенная мощности, рассчитанные на единицу длины в направлении образующей. Последнее выражение позволяет рассчитать мощность, рассеянную телом. Используя в качестве W_s интеграл (4.28), получим

$$W_a = -I_0 \frac{4}{k}\left(\mathrm{Re} f_s(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(\theta)|^2 d\theta\right).$$

4.2.3. Следствия из оптической теоремы для решений в виде рядов. Рассмотрим в качестве примера одно из следствий оптической теоремы при использовании решений в виде рядов, полученных методом разделения переменных. Как указано в п. 2.1, вне сферы, описанной вокруг препятствия (и тем более в дальнем поле), падающую и рассеянную волны можно представить в виде разложений

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr_0) P_n(\cos\theta); \tag{4.31}$$

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) a_n h_n^{(1)}(kr_0) P_n(\cos\theta). \tag{4.32}$$

Для упрощения здесь рассматривается осесимметричное поле, хотя результат оказывается справедливым для препятствий произвольной формы. В выражении (4.32) в коэффициентах выделены множители $i^n(2n+1)$. При $kr_0 \gg 1$ можно записать

$$h_n^{(1)}(kr_0) \approx (-i)^{n+1} \frac{\exp(ikr_0)}{kr_0}.$$

Тогда

$$p_s \approx -ip_0 \frac{\exp(ikr_0)}{kr_0} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n P_n(\cos\theta).$$

Представив последнее выражение в виде (4.1), запишем

$$f_s(\theta) = -i \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n P_n(\cos\theta). \tag{4.33}$$

Положив $\theta = 0$, получим левую часть выражения (4.19) в виде

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\ \mathrm{Re}\, a_n. \tag{4.34}$$

Для вычисления правой части следует взять интеграл

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n P_n(\cos\theta) \right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Поскольку подынтегральное выражение от азимутального угла не зависит, то интеграл по φ равен 2π. Квадрат модуля можно представить в виде произведения комплексно-сопряженных рядов с разными индексами

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n P_n(\cos\theta) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) a_m^* P_m(\cos\theta)\ \sin\theta d\theta.$$

Поменяем местами суммирование и интегрирование и воспользуемся условием ортогональности для полиномов Лежандра

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta)\ \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Теперь правая часть оптической теоремы (4.22) будет $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |a_n|^2$.

Из сравнения последнего выражения с формулой (4.34) следует, что коэффициенты рядов, определяющих рассеяние на теле произвольной формы, должны удовлетворять условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) |a_n|^2 = -\mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) a_n, \tag{4.35}$$

справедливому для тел, в которых отсутствует поглощение энергии.

В качестве примера рассмотрим рассеяние на сфере. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что коэффициенты разложений для абсолютно жесткой и мягкой сфер $a_n = -j_n'(ka)/h_n^{(1)\prime}(ka)$; $a_n = -j_n(ka)/h_n^{(1)}(ka)$ соответственно удовлетворяют условию (4.35), причем это равенство выполняется не только для суммы, но и для каждого члена. В случае упругой сферы или сферы, обладающей локальным

поверхностным импедансом, коэффициенты определяются выражением

$$a_n = -\frac{j_n(ka) + j_n'(ka)\, Z_n/(i\rho c)}{h_n^{(1)}(ka) + h_n^{(1)\prime}(ka) Z_n/(i\rho c)}. \tag{4.36}$$

Для упругой сферы Z_n – модовые механические импедансы. Для импедансной сферы Z является локальным импедансом и не зависит от номера n. Соотношение (4.35) будет выполняться при условии $\mathrm{Re}\, Z_n = 0$, т. е. в том случае, когда сфера обладает чисто инерционным или чисто упругим импедансом, а поглощение отсутствует.

Выражение (4.35) выведено для осесимметричного трехмерного случая. Однако оно справедливо и для неосесимметричного рассеяния (при этом коэффициенты будут зависеть от двух индексов) и для двумерной задачи. В последнем случае падающая плоская волна и рассеянное поле вне поверхности в виде кругового цилиндра, описывающего тело, могут записаны в виде

$$p_i = p_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr_0) \exp(in\theta);$$

$$p_s = p_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n c_n H_n^{(1)}(kr_0) \exp(in\theta).$$

Заметим, что в рассеянной волне множитель i^n выделен из коэффициентов c_n. Вдали от препятствия рассеянную волну можно представить в форме

$$p_s(r_0, \theta) \approx p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k r_0}} \exp(ikr_0 - i\pi/4) f_s(\theta); \quad kr_0 \gg 1,$$

где

$$f_s(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\theta).$$

Подставив последнее выражение в оптическую теорему для двумерного случая (4.29), получим в правой части

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(-in\theta) \Big|^2 d\theta = -\frac{1}{2\pi} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^* \exp(-im\theta) d\theta.$$

Учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \exp[i\theta(n-m)]\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m; \\ 2\pi & \text{при } n = m, \end{cases}$$

получим соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = -\mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n, \tag{4.37}$$

аналогичное выражению (4.35) для трехмерного случая и справедливое при отсутствии активных потерь в препятствии.

Если же рассеянную волну записать в виде

$$p_S(\theta) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr_0) \cos(n\theta),$$

то получится

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 / \epsilon_n = -\mathrm{Re} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-i)^n, \tag{4.38}$$

где $\epsilon_n = 1$ при $n = 0$ и $\epsilon_n = 2$ при $n > 0$.

4.3. Обратное рассеяние звука от некоторых эталонных тел

4.3.1. Обратное рассеяние от длинного цилиндра. Рассмотрим задачу о рассеянии сферической звуковой волны на бесконечно длинном круговом цилиндре (рис. 4.4). В точке M_1 с координатами r_1, φ_1, z_1 находится источник сферической волны, создающий в свободном пространстве звуковое давление

$$p_i = -ik\rho cQG_0(\vec{R}_1, \vec{R}_2), \tag{4.39}$$

где Q – объемная колебательная скорость (производительность) источника; G_0 – функция Грина для свободного пространства:

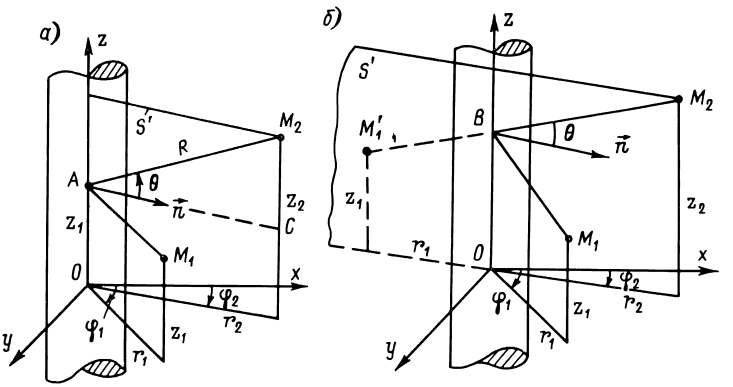


Рис. 4.4. Система координат в задаче о рассеянии сферической звуковой волны на цилиндре: $а - kr_1 \gg 1$; $б - kr_1 \gg 1, kr_2 \gg 1$

$$G_0(\vec{R}_1, \vec{R}_2) = \frac{\exp\ [ik(\vec{R}_1 - \vec{R}_2)\ ]}{4\pi|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|} = \frac{\exp\ (ikd)}{4\pi d}. \qquad (4.40)$$

Здесь d – расстояние между точкой излучения M_1 и точкой наблюдения M_2 с координатами r_2, φ_2, z_2, причем $d = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\ (\varphi_1 - \varphi_2) + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$.

Для того чтобы найти рассеянное поле, можно воспользоваться доводами, приведенными в п. 3.3.1 о связи между решениями двумерных и трехмерных задач. В двумерном случае, т. е. для источника в виде бесконечной нити, параллельной оси z, функция Грина определяется из решения задачи дифракции цилиндрической звуковой волны на цилиндре. Считая, что в двумерном случае функция Грина есть $G_0^{(2)} = iH_0^{(1)}(kl)/4$, где $l = [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos\ (\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}$, для рассеянной волны можно использовать выражение, приведенное в работе [63]. Для системы координат, изображенной на рис. 4.4, его можно переписать в виде

$$G_s^{(2)} = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(k) H_n^{(1)}(kr_1) H_n^{(1)}(kr_2) \exp\ [in(\varphi_1 - \varphi_2)], \qquad (4.41)$$

где $d_n(k)$ – коэффициенты, определяемые в виде

$$d_n(k) = -J_n'(ka)/H_n^{(1)\prime}(ka) \qquad (4.42)$$

для акустически жесткой поверхности;

$$d_n(k) = -J_n(ka)/H_n^{(1)}(ka) \qquad (4.43)$$

для акустически мягкой поверхности;

$$d_n(k) = -\frac{J_n(ka) + J_n'(ka)Zk/(i\omega\rho)}{H_n^{(1)}(ka) + H_n^{(1)\prime}(ka)Zk/(i\omega\rho)} -$$

для поверхности с импедансом Z.

Как указано в п. 3.3.1, чтобы получить решение в трехмерном случае, следует заменить k на $\sqrt{k^2 - \xi^2}$, умножить на $\exp\ (i\xi|z_1 - z_2|)/(2\pi)$ и проинтегрировать по ξ. В результате получим

$$G_s = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\ [in(\varphi_1 - \varphi_2)] \int_{-\infty}^{\infty} d_n(\sqrt{k^2 - \xi^2}) \times$$

$$\times H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_1) H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - \xi^2} r_2) \exp\ (i\xi|z_2 - z_1|)\, d\xi. \qquad (4.44)$$

Рассеянное поле p_s и полное поле $p = p_i + p_s$ определяются в виде

$$p_s = -ik\rho cQG_s; \quad p = -ik\rho cQ(G_0 + G_s). \tag{4.45}$$

Рассмотрим теперь некоторые важные частные случаи. Пусть точка наблюдения лежит на большом волновом расстоянии от оси, т. е. ($kr_2 \gg$ $\gg 1$. Тогда

$$H_n^{(1)}(\sqrt{k^2-\xi^2}r_r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi r_2}}(k^2-\xi^2)^{-1/4}(-i)^n \exp(i\sqrt{k^2-\xi^2}r_2 - i\pi/4). \tag{4.46}$$

В результате возникает интеграл, в который входит функция $f(\xi) =$ $= \exp[i\sqrt{k^2-\xi^2}r_2 + i\xi|z_1 - z_2|]$. Такой интеграл можно вычислить методом стационарной фазы. Положение точки стационарной фазы определяется из уравнения $f'(\xi) = 0$. Решив его, получим $\xi = k\sin\theta$, где θ – угол, показанный на рис. 4.4, *а*, причем $\operatorname{tg}\theta = |z_1 - z_2|/r_2$. На этом рисунке показана плоскость S', проходящая через ось и точку M_2. Точка A является основанием перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на ось, нормаль $\vec{n}$ к оси z лежит в плоскости S'. Таким образом, угол θ определяет направление на точку наблюдения, отсчитываемое от нормали к оси. Применив формулу (9.2) из работы [63], получим при $kr_2 \gg 1$

$$G_s = \frac{\exp(ikR)}{4\pi R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n d_n(k\cos\theta)H_n^{(1)}(kr_1\cos\theta)\exp[in(\varphi_1 - \varphi_1)], \tag{4.47}$$

где $R = \sqrt{r_2^2 + (z_1 - z_2)^2}$ – расстояние между точками A и M_2.

Пусть теперь выполняются одновременно два условия: $kr_1 \gg 1$, $kr_2 \gg 1$. Тогда в выражении (4.44) можно использовать асимптотику типа (4.46) для обеих функций Ханкеля. При этом получится интеграл, в который входит функция $f(\xi) = \exp\{i[\sqrt{k^2-\xi^2}(r_1 + r_2) + \xi|z_1 - z_2|]\}$. Точка стационарной фазы будет $\xi = k\sin\theta$, где θ – угол, показанный на рис. 4.4, *б*, причем $\operatorname{tg}\theta = |z_1 - z_2|/(r_1 + r_2)$. Угол θ соответствует положению точки зеркального отражения на оси z. В точке B суммарная длина пути M_1BM_2 является минимальной. Для того чтобы построить этот угол, следует провести плоскость через точку M_2 и ось z, отложить отрезки r_1 и z_1 на ее продолжении и получить точку M_1', лежащую в плоскости S'. Прямая, соединяющая M_1' и M_2, пересекает ось z в точке B. Угол между этой прямой и нормалью к оси, лежащей в плоскости S', есть угол θ. Вычисление интеграла методом стационарной фазы приводит к результату

$$G_s = \frac{\exp(ikl - i\pi/4)}{4\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{2}{kr_1r_2l}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n d_n(k\cos\theta)\exp[in(\varphi_1 - \varphi_2)], \tag{4.48}$$

где длина пути M_1BM_2 равна

$$l = \sqrt{(r_1+r_2)^2+(z_1-z_2)^2};\quad kr_1 \gg 1,\ kr_2 \gg 1. \tag{4.49}$$

Рассмотрим обратное рассеяние. Для этого будем считать, что точки излучения и приема совмещены. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$, $r_1 = r_2 = r_0$. Из формул (4.48), (4.49) получим значение G_{sL}, соответствующее обратному отражению,

$$G_{sL} = \frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}\,\frac{\exp(ikr_0 - i\pi/4)}{\sqrt{\pi k r_0}}\,\Phi_s(\pi), \tag{4.50}$$

где

$$\Phi_s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-1)^n d_n \tag{4.51}$$

значение функции рассеяния звука цилиндром в обратном направлении. Таблицы этой функции для акустически жесткого и мягкого цилиндров приведены в работе [63]. Пронормировав полученную величину к значению звукового давления в падающей волне на оси цилиндра, получим

$$\left|\frac{p_{sL}}{p_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}}\,|\Phi_s(\pi)|. \tag{4.52}$$

Воспользовавшись формулами (4.8а), (4.9), получим сечение обратного рассеяния и эквивалентный радиус

$$\sigma_L = \frac{4r_0}{k}\,|\Phi_s(\pi)|^2;\quad a_э = \sqrt{\frac{4r_0}{\pi k}}\,|\Phi_s(\pi)|. \tag{4.53}$$

Отметим, что величины σ_L и $a_э$ зависят от расстояния r_0. Это связано с тем, что в данном случае мы имеем дело с телом, длина h которого настолько велика, что точка излучения-приема находится в ближней зоне, определяемой неравенством $r_0 \ll h^2/\lambda$. При этом на длине отрезка h укладываются несколько зон Френеля. Эффективно участвует в формировании процесса отражения лишь первая зона, а остальные компенсируют друг друга. При увеличении расстояния до цилиндра размер первой зоны увеличивается и в процесс образования отраженной волны вовлекается все бóльшая часть цилиндра. Этот процесс происходит до тех пор, пока выполняется приведенное неравенство. Для тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием до объекта (точнее, если $r_0 > h^2/\lambda$), поперечник рассеяния и эквивалентный радиус не зависят от расстояния.

Если радиус цилиндра значительно превышает длину волны, т. е. $ka \gg 1$, то функция $|\Phi_s(\pi)|$ определяется асимптотическим

выражением, которое следует из формул (24.23) и (18.41) из работы [63]:

$$\Phi_s(\pi) \approx \sqrt{\pi k a}/2. \tag{4.54}$$

Тогда

$$|p_{sL}/p_0| \approx \sqrt{a/r_0}/2;\ \ \sigma_L \approx \pi a r_0;\ \ a_э \approx \sqrt{a r_0}. \tag{4.55}$$

Заметим, что при рассеянии плоской или цилиндрической волны на цилиндре вместо первой из формул (4.55) получается выражение $|p_{sL}/p_0| \approx \sqrt{a/(2r_0)}$, отличающееся множителем $\sqrt{2}$. Причина такого различия в уровнях отраженного сигнала связана с тем, что в случае падающей сферической волны на оси цилиндра укладывается много зон Френеля и действие нечетных зон частично компенсируют действие нулевой зоны. Это приводит к некоторому снижению отраженного поля, в то время как в случае падающей плоской или цилиндрической волны в создании отраженного поля все участки каждой из образующих цилиндра действуют синфазно.

4.3.2. Обратное расстояние от конечного цилиндра для точки излучения-приема, находящейся в дальней зоне. Если выполняется условие $r_0 > h^2/\lambda$, то точка излучения-приема находится в дальней (Фраунгоферовой) зоне. Это означает, что в пределах длины цилиндра h падающую волну можно приближенно считать плоской. В дальнейших преобразованиях будем предполагать, что $h \gg a$, т. е. цилиндр не вырождается в диск. Кроме того, здесь не учитывается отражение от торцов цилиндра, которое должно быть рассмотрено отдельно. Это означает, что угол падения θ не слишком близок к $\pi/2$. Для того чтобы выполнить переход от формул, описывающих рассеяние звука на бесконечном цилиндре, к формуле для ограниченного по длине цилиндра, воспользуемся соотношением (22.6) из работы [63]

$$p_{огр} = p_{дл} \frac{h \cos\theta}{\sqrt{\lambda r_0}} \exp(-i\pi/4).$$

Здесь $p_{огр}$ и $p_{дл}$ – значения звуковых давлений, излучаемых ограниченным и бесконечно длинным цилиндрами при расположении точки наблюдения в направлении, соответствующем направлению падения волны.

Предполагается также, что $kh > 1$. Такое же соотношение справедливо и для рассеянных звуковых полей. Если точка излучения-приема расположена в направлении, обратном направлению падения, то последнюю формулу необходимо умножить на выражение для диаграммы рассеяния, которое будет совпадать с формулой для диаграммы направленности отрезка длиной, равной удвоенной высоте цилиндра, т. е. $2h$. Высота удваивается в связи с тем, что при обратном отражении набег фазы волны между концами цилиндра определяется величиной $2AB$, где

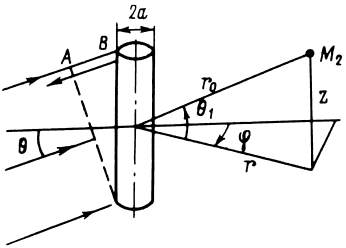


Рис. 2.5. Обратное рассеяние плоской волны на ограниченном цилиндре

AB – длина отрезка, показанного на рис. 4.5. Поэтому набег фазы волны оказывается вдвое больше, чем при обычном излучении или приеме звука цилиндром. Таким образом,

$$p_{\text{отр}} = p_{\text{дл}} \frac{h \cos\theta}{\sqrt{\lambda r}} \exp(-i\pi/4) D(\theta),$$

где $D(\theta) = \sin(kh \sin\theta)/(kh \sin\theta)$.

Для плоской волны, падающей под углом $\pi/2 - \theta$ к оси бесконечного цилиндра, рассеянное поле при $kr \gg 1$ определяется в виде выражения (18.38) из работы [63]):

$$p_s = p_0 \exp(ikr\cos\theta + ikz\sin\theta - i\pi/4) \sqrt{\frac{2}{\pi kr\cos\theta}}\, \Phi_s(\theta,\varphi), \quad (4.56)$$

где

$$\Phi_s(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n C_n(\theta)\cos(n\varphi) -$$

функция рассеяния, причем для импедансного цилиндра коэффициенты определяются выражением

$$C_n(\theta) = -\frac{J_n(ka\cos\theta) + Z\cos\theta J_n'(ka\cos\theta)/(i\rho c)}{H_n^{(1)}(ka\cos\theta) + Z\cos\theta H_n^{(1)\prime}(ka\cos\theta)/(i\rho c)}.$$

Для обратного рассеяния $\theta_1 = \theta$ и $\varphi = \pi$ (см. рис. 4.5). Использовав в качестве $p_{\text{дл}}$ значение p_s, определяемое выражением (4.56) и учитывая, что $r = r_0\cos\theta_1$, $z = r_0\sin\theta_1$, получим для звукового давления в волне, рассеянной в обратном направлении,

$$p_{sL} = p_{\text{отр}} = p_0 \exp(ikr_0 - i\pi/4) \frac{h}{\pi r_0} \Phi_s(\theta,\pi) D(\theta).$$

Относительное значение звукового давления в рассеянной волне будет

$$\left|\frac{p_{sL}}{p_0}\right| = \frac{h}{\pi r_0} |\Phi_s(\theta,\pi)|\, D(\theta). \quad (4.57)$$

По формулам (4.8а) и (4.9) найдем поперечное сечение обратного рассеяния и радиус эквивалентной сферы:

$$\sigma_L = \frac{4h^2}{\pi} |\Phi_s(\theta,\pi)|^2 D^2(\alpha); \quad a_{\text{э}} = \frac{2h}{\pi} |\Phi_s(\theta,\pi)|\, |D(\alpha)|. \quad (4.58)$$

Для акустически жесткого и мягкого цилиндров ($Z = \infty$ и $Z = 0$ соответственно) для определения величины $|\Phi_s(\theta, \pi)|$ могут быть использованы таблицы величины $\Phi_s(\pi) = \Phi_s(0, \pi)$, приведенные в работе [63], причем при $\theta \neq 0$ также можно пользоваться этими таблицами, взяв в качестве аргумента вместо ka значение $ka\cos\theta$.

Если радиус цилиндра гораздо больше длины волны, то в качестве $|\Phi_s(\theta, \pi)|$ можно использовать формулу (4.54), заменив в ней ka на $ka\cos\theta$. В этом случае получится

$$\left|\frac{p_{sL}}{p_0}\right| \approx \frac{h}{2\pi r_0}\sqrt{\pi ka\cos\theta}\,D(\theta);\ \sigma_L \approx kah^2\cos\theta\,|D(\theta)|^2;$$

$$a_э \approx h\sqrt{\frac{ka\cos\theta}{\pi}}\,|D(\theta)|^2. \qquad (4.59)$$

При $ka \gg 1$ и $kh \gg 1$ из последних выражений следует, что σ_L и $a_э$ много больше геометрических размеров тела. Заметим, что это имеет место лишь для весьма узкой области углов вблизи $\theta = 0$. При определении этой области следует учесть, что ширина максимума диаграммы $D(\theta)$ определяется через удвоенную высоту цилиндра в виде $\sin\Delta\theta = \lambda/(2h)$. В остальной области углов боковая поверхность цилиндра почти не вносит вклада в звуковое давление в волне, отраженной в обратном направлении. Кроме того, даже для узкой области углов θ, близких к нулю, столь большие значения величин σ_L и $a_э$ могут наблюдаться лишь при достаточно гладкой поверхности, на которой отсутствуют неровности высотой, сравнимой с длиной волны.

4.3.3. Отражение от плоского экрана. Рассмотрим пластину, полностью отражающую звук. Пластина может иметь произвольную форму, однако в дальнейшем будет предполагаться, что все ее размеры в своей плоскости больше длины волны.

Звуковое поле, отраженное пластиной, складывается из поля, отраженного поверхностью, и поля, дифрагированного на краях. Если точки излучения и приема лежат вблизи нормали к пластине (т. е. в области главного максимума диаграммы рассеяния), то вклад первого слагаемого будет определяющим и поле, дифрагированное на краях, можно не учитывать. Это дает возможность не решать точную дифракционную задачу, а воспользоваться приближением Кирхгофа. Однако при наклонном падении волны вклад звука, отраженного поверхностью, будет малым и почти

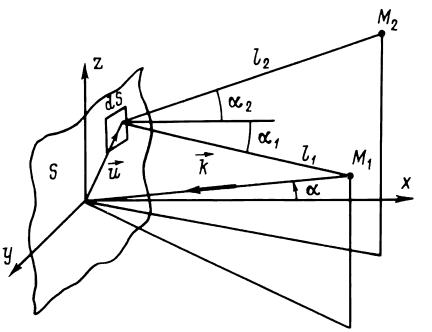


Рис. 4.6. Отражение звука от пластины

все рассеянное поле будет определяться дифракцией на краях. Радиус эквивалентной сферы, соответствующий дифракции на кромках, можно найти, используя результаты гл. 3. Формулы для этого случая записаны ниже в п. 4.3.5.

Вычислим амплитуду звукового давления, отраженного пластиной, в приближении Кирхгофа. Если источник сферической волны, находящейся в точке M_1 (рис. 4.6), создает на элементе dS поверхности звуковое давление

$$p_i = -ik\rho cQ \frac{\exp(ikl)}{4\pi l_1}, \tag{4.60}$$

то отраженное поле в точке M_2 определится формулой (8.9) из работы [63], которую можно записать в виде

$$p_S(M_2) = -\frac{k^2\rho cQ}{16\pi^2}\int_S \frac{\exp(ik(l_1+l_2))}{l_1 l_2}(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)\,dS, \tag{4.61}$$

где α_1 и α_2 – углы между отрезками l_1 и l_2 и нормалью к поверхности.

Будем считать, что точки M_1 и M_2 совмещены в одну точку M и находятся в дальней (Фраунгоферовой) зоне на расстоянии $r_0 > L^2/\lambda$, где L – максимальный размер пластины. Тогда $l_1 = l_2 = l$, $\alpha_1 = \alpha_2 \approx \alpha$. Считая, что в дальней зоне все отрезки l параллельны, можно записать $l \approx r_0 + \vec{k}\cdot\vec{u}$, где r_0 – расстояние от точки излучения-приема до начала координат; $\vec{u}$ – вектор в плоскости пластины, определяющий направление на элемент dS. Из формулы (4.61) получим

$$p_{SL} = -\frac{k^2\rho cQS\cos\alpha\,\exp(2ikr_0)}{8\pi^2 r_0^2} D_{2\omega}(\vec{k}), \tag{4.62}$$

где

$$D_{2\omega}(\vec{k}) = \frac{1}{S}\int_S \exp(i2\vec{k}\cdot\vec{u})dS - \tag{4.63}$$

характеристика направленности поршня площадью S на частоте, вдвое больше той частоты, для которой выполняется расчет.

Звуковое давление в падающей волне в том месте, где находится пластина, будет

$$p_0 = -ik\rho cQ\frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0}.$$

Взяв отношение $|p_{sL}/p_0|$, получим

$$\left|\frac{p_{sL}}{p_0}\right| = \frac{kS\cos\alpha}{2\pi r_0}\,|D_{2\omega}(\vec{k})|\,. \tag{4.64}$$

Величины σ_L и $a_э$ определятся по формулам (4.8а) и (4.9):

$$\sigma_L = \frac{k^2S^2}{\pi}\cos^2\alpha\,|D_{2\omega}(\vec{k})|^2;\quad a_э = \frac{kS}{\pi}\,|D_{2\omega}(\vec{k})|\cos\alpha. \tag{4.65}$$

В направлении оси диаграммы $\alpha = 0$ и $|D_{2\omega}| = 1$. В этом случае величины σ_L и $a_э$ значительно превышают соответствующие геометрические размеры пластины. Так, например, для диска площадью $S = \pi a^2$ можно записать

$$a_э = aka\left|\frac{2J_1(2ka\sin\alpha)}{2ka\sin\alpha}\right|\cos\alpha. \tag{4.66}$$

При $\alpha = 0$ получим $a_э/a = ka$. При $ka \gg 1$ [а именно при этом предположении и получены выражения (4.65), (4.66)] оказывается $a_э/a \gg 1$. Разумеется, этот вывод справедлив лишь для узкой области углов вблизи главного максимума (зеркальный блик) и достаточно ровной пластины с размерами неровностей, гораздо меньшими длины волны.

4.3.4. Отражение от гладкой поверхности произвольной формы. Если размеры отражающего тела, а также радиусы кривизны поверхности велики по сравнению с длиной звуковой волны, то звуковое давление в отраженной волне можно найти в приближении Кирхгофа с использованием метода стационарной фазы. Воспользовавшись формулой (10.11) из работы [63] для падающей на тело сферической волны вида $p_i = \dfrac{-ik\rho cQ}{4\pi}\dfrac{\exp(ikr_0)}{r_0}$, запишем для идеально отражающего тела

$$|p_{sL}| = \frac{k\rho cQ}{8\pi r_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+r_0/|R_1|)(1+r_0/|R_2|)}}\,. \tag{4.67}$$

Здесь R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны поверхности в точке зеркального отражения, определяемые решениями квадратного уравнения $R^2 - Rb/A + 1/A = 0$, причем $A = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$; $b = f_{xx} + f_{yy}$; f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} – вторые производные по соответствующим координатам от функции $z = f(x, y)$, определяющей форму поверхности. Ось z направлена в сторону источника звука, а производные вычислены в точке зеркального отражения. Знаки модуля введены в связи с тем, что кривизна

может быть отрицательной. Если $r_0 \gg R_1, R_2$, то, пронормировав давление в отраженной волне к давлению на расстоянии r_0 от источника, получим

$$\left| \frac{p_{sL}}{p_0} \right| = \sqrt{|R_1 R_2|}/(2r_0). \tag{4.68}$$

Заметим, что величина $|R_1 R_2|^{-1}$ называется *гауссовой кривизной поверхности*. В связи с тем, что произведение корней равно свободному члену, можно записать $\sqrt{|R_1 R_2|} = 1/\sqrt{|A|}$. По формулам (4.8а) и (4.9) получим

$$\sigma_L = \pi |R_1 R_2|; \; a_э = \sqrt{|R_1 R_2|}. \tag{4.69}$$

В частном случае сферы $|R_1| = |R_2| = a$, $\sigma_L = \pi a^2$ и $a_э = a$, что приближенно справедливо при условии $a > \lambda$.

Заметим, что предельный переход $R_1, R_2 \to \infty$ в этих формулах недопустим по двум причинам. Во-первых, при этом нарушается условие $r_0 \gg R_1, R_2$, и, во-вторых, для тела ограниченных размеров геометрическое приближение, соответствующее методу стационарной фазы, справедливо лишь в том случае, если на поверхности укладывается хотя бы несколько зон Френеля, т. е. стрелка прогиба превышает длину волны. Если размеры тела по одной или двум координатам бесконечны (например, цилиндр или плоскость соответственно), то следует пользоваться выражением (4.67), которое допускает указанный предельный переход. В случае бесконечного цилиндра следует принять $|R_1| \to \infty$, $R_2 = a$. При этом получим формулы (4.55). Для бесконечной плоскости $|R_1|$, $|R_2| \to \infty$. Тогда $|p_{sL}/p_0| = 1/2$, что соответствует амплитуде звукового давления, излучаемого зеркально отраженным источником, находящимся на удвоенном расстоянии от точки наблюдения.

В качестве примера рассмотрим обратное рассеяние звука на вытянутом эллипсоиде вращения с полуосями b и a $(a \geqslant b)$. На рис. 4.7 приведены зависимости эквивалентного радиуса для обратного рассеяния (нормированные к длине большой полуоси) от параметра ka в соответствии с работой [144]. Осцилляции связаны с возникновением дифракционных волн, огибающих эллипсоид по геодезическим линиям (линиям кратчайшего пути). Эти волны интерферируют с волной, отраженной по геометрооптическим законам, что приводит к появлению максимумов и минимумов при синфазном и противофазном сложении этих волн соответственно. При увеличении волновых размеров кривые стремятся к штриховым линиям, вычисленным в предположении, что все размеры велики по сравнению с длиной волны и отражение происходит по геометрическим законам, описывающимся формулами (4.69). Вычислив произведение главных радиусов кривизны эллипсоида, получим

$$a_э/a = [(a/b)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^{-1}; \; kb \gg 1, \tag{4.70}$$

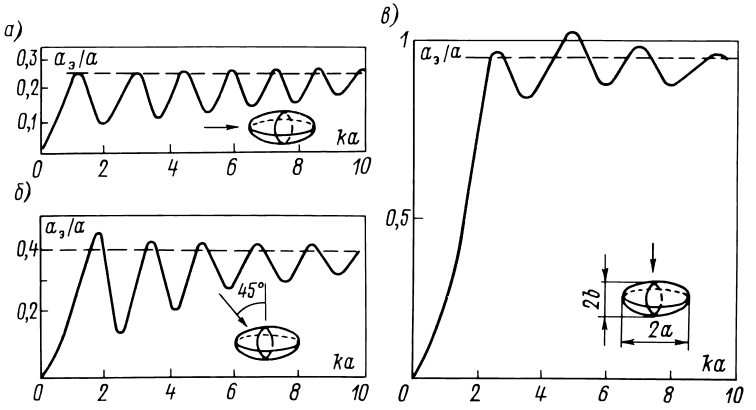


Рис. 4.7. Отношение эквивалентного радиуса вытянутого эллипсоида вращения к большой полуоси при $a/b = 2$: $а - \theta = 90°$; $б - \theta = 45°$; $в - \theta = 0°$ (––– геометрооптическое приближение)

где θ – угол между направлением падения волны и малой осью.

Для сильно вытянутого эллипсоида (рис. 4.8) существует острый максимум вблизи угла $\theta = 0$, похожий на максимум для конечного цилиндра вблизи направления, перпендикулярного к оси. Однако ширина этого максимума для эллипсоида и цилиндра определяется разными факторами. Для эллипсоида ширина максимума зависит от кривизны поверхности. В точке, соответствующей направлению $\theta = 0$, она минимальна, что и является причиной резкого увеличения уровня отражения, причем ширина максимума и величина сигнала, отраженного от эллипсоида больших волновых размеров ($kb \gg 1$), не зависят от частоты. Для конечного цилиндра, как это следует из соотношений (4.59), ширина кривой определяется диаграммой направленности отрезка на удвоенной частоте. Следовательно, уровень отраженного сигнала и ширина максимума зависят от частоты.

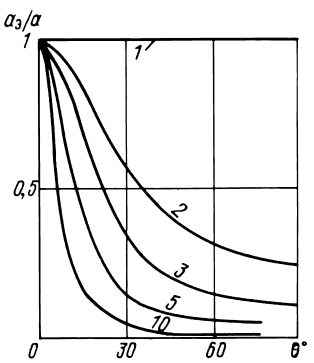


Рис. 4.8. Отношение эквивалентного радиуса вытянутого эллипсоида вращения к большой полуоси в геометрооптическом приближении ($kb \gg 1$); цифры на кривых – отношение a/b

4.3.5. Отражение от кромки клина. Рассмотрим обратное отражение звука от тела с острой кромкой. Слово „острой" означает в данном случае, что радиус кривизны кромки значительно меньше длины волны. Совместим точки приема и излучения (A и A_0 соответственно на рис. 3.5). Тогда $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$. Отраженное поле складывается из геометрической и дифракционной составляющих. Геометрическая составляющая представляет собой поле, отраженное от грани клина при нормальном падении волны как от бесконечной плоскости.

Если $\varphi < \pi/2$ или $\varphi > \alpha - \pi/2$ (см., например, рис. 3.3, *а*), то эта составляющая является преобладающей и дифракционной частью поля можно пренебречь. Однако в диапазоне углов $\alpha - \pi/2 > \varphi > \pi/2$ геометрическая составляющая отсутствует и все отраженное поле определяется дифракцией на кромке.

Дифракционная составляющая G_d складывается, в свою очередь, из составляющих G_{d1} и G_{d2}, причем последняя играет существенную роль лишь вблизи узкой границы зон существования геометрически отраженной волны, т. е. в окрестности линий $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = \alpha - \pi/2$. В остальной области углов можно рассматривать лишь составляющую G_{d1}, определяемую формулой (3.76). Для случая, соответствующего обратному отражению, эту формулу можно записать в виде

$$G_{d1} = \frac{\exp(ikr_0)}{4\pi r_0} \cdot \frac{\exp(ikr_0 + i\pi/4)}{\sqrt{\pi k r_0}} \Phi_1(\varphi_0), \tag{4.71}$$

где

$$\Phi_1(\varphi_0) = \frac{\pi}{2\alpha} \sin\frac{\pi^2}{\alpha} \left[\frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha) - 1} \pm \frac{1}{\cos(\pi^2/\alpha) - \cos(2\pi\varphi_0/\alpha)} \right].$$

Верхний и нижний знаки соответствуют акустически жестким и мягким граням. Пронормировав звуковое давление в отраженном поле к звуковому давлению в падающей волне на кромке клина, равному $-ik\rho cQ \exp(ikr_0)/(4\pi r_0)$, получим

$$\left| \frac{p_{sL}}{p_0} \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}} |\Phi_1(\varphi_0)|, \tag{4.72}$$

что формально аналогично выражению (4.52) для поля, отраженного от бесконечного цилиндра, причем в данном случае функция рассеяния Φ_1 зависит от угла падения φ_0.

Для сечения обратного рассеяния и эквивалентного радиуса получим выражения, аналогичные формулам (4.53): $\sigma_L = 4r_0 |\Phi_1(\varphi_0)|^2/k$; $a_э = \sqrt{4r_0/(\pi k)}\,|\Phi_1(\varphi_0)|$. При этом остаются справедливыми все замечания, приведенные в связи с формулами (4.53). Для полуплоскости ($\alpha = 2\pi$) функция $\Phi_1(\varphi_0)$ приобретает вид

$$\Phi_1(\varphi_0) = -\frac{1 \pm \cos\varphi_0}{4\cos\varphi_0},$$

причем предельные переходы $\varphi_0 \to \pi/2$ или $\varphi_0 \to 3\pi/2$ несправедливы, так как в окрестности этих значений необходимо учитывать член G_{d2},

определяемый формулой (3.77). При $\varphi_0 = \pi$ (источник находится на продолжении полуплоскости) значение $\Phi_1(\varphi_0)$ для акустически жесткой полуплоскости становится равным нулю, а для мягкой полуплоскости оказывается $|\Phi_1(\pi)| = 0{,}5$, что примерно соответствует значению функции обратного рассеяния от жесткого цилиндра с волновым радиусом $ka = 0{,}5$.

Приведенные выше формулы справедливы для клина бесконечной длины вдоль оси z на рис. 3.5 или же для клина конечной длины при условии, что $r_0 < h^2/(4\lambda)$ (причем $h > \lambda$), т. е. в том случае, если точка излучения-приема находится в ближней (Френелевой) зоне излучающего отрезка длиной h. Если же $r_0 > h^2/\lambda$, что соответствует дальней (Фраунгоферовой) зоне, то рассеянное поле можно определить так же, как и в п. 4.3.2, по формулам (4.58), в которых вместо $\Phi_s(\theta, \pi)$ следует использовать функцию $\Phi_1(\varphi_0)$.

4.3.6. Отражение от изогнутого цилиндра или изогнутой кромки клина. Вычислим величину звукового давления, отраженного цилиндром с искривленной осью (рис. 4.9, *а*). Ось в виде плоской кривой $y(x)$ и точка излучения-приема находятся в плоскости xy. Дальнейшие вычисления основаны на предположениях, что $r > \lambda$, $l > \lambda$, где l – длина оси. Кроме того, будем считать, что стрелка прогиба кривой в пределах длины также больше длины волны. Принятые предположения дают возможность исходить из асимптотических представлений теории дифракции, использовав в качестве эталонного решения выражения для бесконечного цилиндра с прямолинейной осью, записанные в п. 4.3.1.

Выражение (4.50) можно интерпретировать как произведение сферической волны, излучаемой источником, расположенным в точке A, и цилиндрической волны, излучаемой некоторыми фиктивными малыми пульсирующими источниками, расположенными на оси. Вычислим производительность этих источников, а затем проинтегрируем звуковое давление, излучаемое ими, по линии $y = f(x)$. Звуковое давление, излучаемое источниками, с объемной колебательной скоростью q (на единицу длины), расположенными на бесконечной прямой, можно определить из

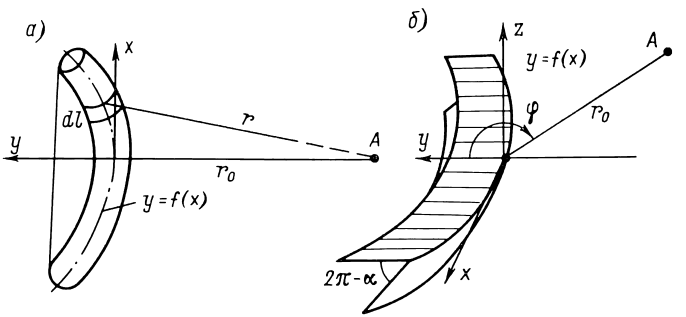


Рис. 4.9. Отражение от цилиндра (*а*) и кромки клина (*б*) изогнутой формы

выражения (18.21а) работы [63], положив $q = 2\pi\epsilon v$ (ϵ – радиус, v – колебательная скорость):

$$p = \frac{k\rho c q}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp\,(ikr - i\pi/4).$$

Приравняв эту величину значению рассеянного поля p_s, определяемого формулами (4.45), (4.50), получим, считая $r = r_0$,

$$q = -\frac{4i}{\sqrt{2}} Q \frac{\exp\,(ikr)}{4\pi r} \Phi_s(\pi). \tag{4.73}$$

Звуковое давление, излучаемое источниками с такой производительностью, расположенными на линии $y = f(x)$, можно записать в виде интеграла по этой линии

$$p_{sL} = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \int_l \frac{q \exp\,(ikr)}{r} dl.$$

Для точки A, находящейся в дальнем поле, можно приближенно считать лучи r и r_0 параллельными, тогда $r \approx r_0 + y(x)$. Использовав выражение (4.73), последний интеграл можно записать в виде

$$p_s = -k\rho c Q \frac{\exp\,(2ikr_0)}{4\pi r_0} \frac{\Phi_s(\pi)}{\pi r_0 \sqrt{2}} \int_l \exp\,[i2ky(x)]\,dl.$$

При выполнении принятых выше допущений последний интеграл можно вычислить методом стационарной формы. При его вычислении следует учесть, что в соответствии с выбором системы координат $y(x)\,|_{x=0} = y'(x)\,|_{x=0} = 0$. Поэтому стационарная точка имеет координаты $x = y = 0$. Кроме того, $y''(x)\,|_{x=0} = 1/R$, где R – радиус кривизны в точке $x = 0$. После вычисления интеграла, пронормировав полученное выражение к звуковому давлению в падающей волне в начале координат, получим

$$\left| \frac{p_{sL}}{p_0} \right| = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{|R|}{2\pi k}}\, |\,\Phi_s(\pi)\,|.$$

По формулам (4.8а), (4.9) получим

$$\sigma_L = 2|R| \cdot |\,\Phi_s(\pi)\,|^2/k; \quad a_э = \sqrt{2|R|/(\pi k)}\,|\,\Phi_s(\pi)\,|. \tag{4.74}$$

Заметим, что предельный переход $kR \to \infty$ в последних формулах недопустим, так как при увеличении радиуса кривизны стрелка прогиба

кривой l на хорде фиксированной длины станет меньше длины волны и метод стационарной фазы будет непригоден. Если стрелка прогиба значительно меньше длины волны, то цилиндр можно считать прямым и использовать выражения, приведенные в п. 4.3.2.

Аналогичным образом можно рассмотреть и изогнутую кромку клина. В этом случае придем к формулам, аналогичным выражениям (4.74):

$$\sigma_L = \frac{2}{k}\left|\frac{R}{\cos\varphi}\right| |\Phi_1(\varphi)|^2; \quad a_э = \sqrt{\frac{2|R|}{\pi k|\cos\varphi|}}\,|\Phi_1(\varphi)|.$$

Система координат для этого случая показана на рис. 4.9, *б*. В этих формулах также недопустим предельный переход $kR \to \infty$ и, кроме того, переход $\varphi \to \pi/2$, так как при этом возникнет синфазное сложение (фокусировка) вкладов всех источников, расположенных на ребре, что недопустимо при использовании метода стационарной фазы.

4.3.7. Осреднение значений поперечника рассеяния для некоторых тел по телесному углу. Если ориентация отражающего тела относительно источника звука неизвестна, то можно ввести в рассмотрение статистическую величину, характеризующую математическое ожидание сечения обратного рассеяния при случайном направлении падения волны на тело. Будем считать, что плотность вероятности падения волны на тело под пространственными углами β и φ (β – вертикальный угол на рис. 4.10, отсчитываемый от горизонтальной плоскости, φ – азимутальный угол), равна $w(\beta, \varphi)$, а поперечник рассеяния определяется известной функцией $\sigma_L(\beta, \varphi)$. Определим математическое ожидание, или *среднее сечение рассеяния*, в виде

$$\overline{\sigma}_L = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} w(\beta,\varphi)\,\sigma_L(\beta,\varphi)\cos\beta\,d\beta\,d\varphi, \tag{4.75}$$

причем в соответствии с определением плотности вероятности

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} w(\beta,\varphi)\cos\beta\,d\beta\,d\varphi = 1.$$

При дальнейших расчетах будем считать, что направления падения равновероятно распределены по азимуту в пределах углов 0, 2π и по вертикали в пределах $(-\beta_0, \beta_0)$, а при $|\beta| > \beta_0$ можно принять $w(\beta, \varphi) = 0$. Тогда

$$w(\beta,\varphi) = \begin{cases} (4\pi\sin\beta_0)^{-1} & \text{при } |\beta| < \beta_0; \\ 0 & \text{при } |\beta| > \beta_0. \end{cases} \tag{4.76}$$

Рассчитаем среднее сечение рассеяния для некоторых поверхностей, имеющих форму тела вращения вокруг оси x (см. рис. 4.10). В этих случаях диаграмма рассеяния будет являться функцией единственного угла между направлением падения и осью x. В связи с тем, что интегрирование

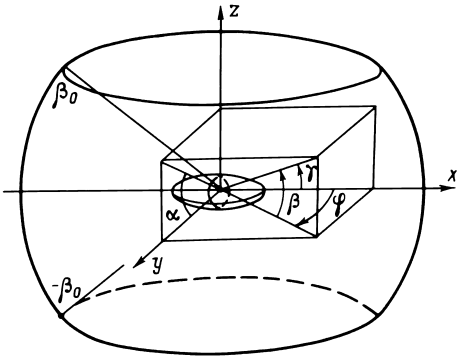


Рис. 4.10. Расположение системы координат

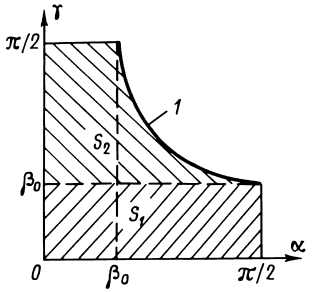


Рис. 4.11. Преобразование области интегрирования

1 – график функции $\sin\gamma = \sin\beta_0 / \sin\alpha$

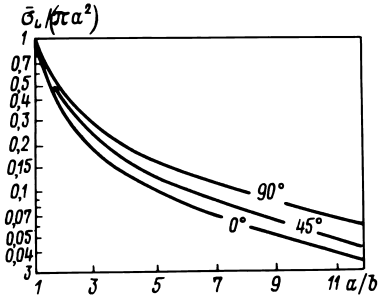


Рис. 4.12. Поперечное сечение обратного рассеяния для эллипсоида, осредненное в пределах сферического пояса высотой $\beta = 2\beta_0$; цифры на кривых – значения β_0; $kb \gg 1$

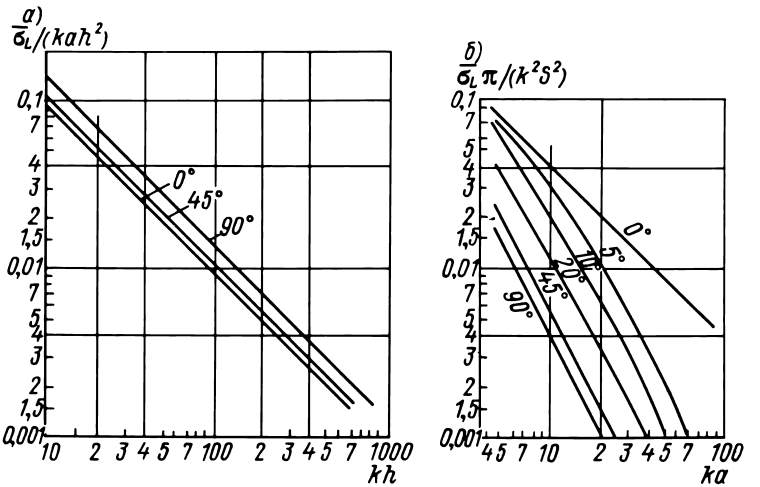


Рис. 4.13. Поперечное сечение обратного рассеяния конечного цилиндра при $ka \gg 1$ без учета торцов (*а*) и диска (*б*), осредненные в пределах сферического пояса высотой $\beta = 2\beta_0$; цифры на кривых – значения β_0

в формуле (4.75) выполняется в системе углов β, φ, необходимо провести пересчет углов по формулам, которые следуют из рис. 4.10:

$$\sin\beta = \sin\alpha \sin\gamma; \quad \operatorname{tg}\varphi = \cos\alpha \operatorname{tg}\gamma. \tag{4.77}$$

Интеграл (4.75) для функции w, определяемой выражением (4.76), можно записать в виде

$$\overline{\sigma_L} = \frac{2}{\pi \sin\beta_0} \int_0^{\beta_0} \int_0^{\pi/2} \sigma_L(\beta, \varphi) \cos\beta d\beta d\varphi.$$

Введем замену переменных (4.77) и вычислим якобиан этого преобразования

$$\Delta = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

После преобразований получим $\Delta \cos\beta = \sin\gamma$. Область интегрирования из прямоугольника со сторонами $\beta_0, \pi/2$ превращается в фигуру, изображенную на рис. 4.11, т. е. получится

$$\overline{\sigma_L} = \frac{2}{\pi \sin\beta_0} \iint_S \sigma_L(\gamma) \sin\gamma d\gamma d\alpha.$$

Разобьем область интегрирования на участки S_1 и S_2. Тогда

$$\overline{\sigma_L} = \frac{2}{\pi \sin\beta_0}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{\beta_0}\sigma_L(\gamma)\sin\gamma d\gamma + \int_{\beta_0}^{\pi/2}\sigma_L(\gamma)\sin\gamma\int_0^{a_1} d\alpha\, d\gamma\right],$$

где $\alpha_1 = \arcsin(\sin\beta_0/\sin\gamma)$. Таким образом,

$$\overline{\sigma_L} = \frac{1}{\sin\beta_0}\left[\int_0^{\beta_0}\sigma_L(\gamma)\sin\gamma d\gamma + \frac{2}{\pi}\int_{\beta_0}^{\pi/2}\sigma_L(\gamma)\sin\gamma \arcsin\left(\frac{\sin\beta_0}{\sin\gamma}\right)d\gamma\right]. \tag{4.78}$$

Приведем результаты расчета для некоторых частных случаев. Для эллипсоида вращения из выражений (4.9) и (4.70) получим, учитывая, что $\gamma = \pi/2 - \theta$,

$$\sigma_L(\gamma) = \pi a^2\left\{1 + \cos^2\gamma[(a/b)^2 - 1]\right\}^{-2}; \quad kb \gg 1.$$

При $a/b = 1$ (сфера) $\overline{\sigma_L}$ совпадает с площадью поперечного сечения, а при вытягивании эллипсоида оси x величина $\overline{\sigma_L}/(\pi a^2)$ сильно уменьшается

(рис. 4.12). Заметим, что для эллипсоида больших волновых размеров поперечник рассеяния определяется лишь формой и не зависит от частоты.

Рассмотрим цилиндр длиной h с осью, совпадающей с осью x, при $ka \gg 1$. Тогда по второй из формул (4.59) получим

$$\sigma_L(\gamma) = kah^2 \sin\gamma \left| \frac{\sin(kh\cos\gamma)}{kh\cos\gamma} \right|^2; \quad (kh \gg 1, h \gg a, ka \gg 1).$$

Для диска с осью, совпадающей с осью x, по результатам п. 4.3.3 можно записать

$$\sigma_L(\gamma) = \pi a^2 (ka)^2 \cos^2\gamma \left| \frac{2J_1(2ka\sin\gamma)}{2ka\sin\gamma} \right|^2.$$

Результаты интегрирования по формулам (4.78) для конечного цилиндра и диска показаны на рис. 4.13. В этих случаях значение $\overline{\sigma_L}$ зависит от частоты. Заметим, что для диска наибольшие значения $\overline{\sigma_L}$ достигаются при малых углах β_0. Это связано с тем, что характеристика рассеяния звука диском имеет острый максимум, направленный вдоль оси. Если величина сектора $2\beta_0$, из которого возможно падение волны, превышает ширину главного максимума характеристики, то для большинства пространственных углов обратное отражение почти не происходит и среднее значение величины σ_L сильно уменьшается. У цилиндра при $kL \gg 1$ главный максимум характеристики рассеяния имеет форму, похожую на диск, расположенный перпендикулярно к оси цилиндра. В этом случае изменение сектора $2\beta_0$ мало влияет на величину $\overline{\sigma_L}$.

Если отражающее тело имеет большие волновые размеры и сложную форму, то приближенно можно считать, что отражения от различных элементов тела складываются между собой со случайными фазами. Тогда сложение отраженных полей происходит по энергетическому закону [73]. Если ориентация отдельных участков относительно точки излучения неизвестна, то можно использовать осредненные значения σ_{Lj}. Тогда $\sigma_L = \sum_{j=1}^{N} \sigma_{Lj}$. При импульсном излучении звука следует учитывать лишь те элементы, которые находятся в пределах пространственной длины импульса.

Глава 5

РАССЕЯНИЕ ЗВУКА НА УПРУГИХ ТЕЛАХ

5.1. Многослойный упругий цилиндр

В связи со значительными вычислительными трудностями, встречающимися при теоретическом исследовании рассеяния звука на упругих телах, вычисления их полей выполнены лишь для тел сравнительно

простых форм. Большинство работ в этой области посвящено изучению рассеяния звука на телах, ограниченных цилиндрическими и сферическими поверхностями. Методы, связанные с составлением интегральных уравнений, и метод Т-матриц, описанные в гл. 2, в принципе позволяют найти поля рассеяния и упругими телами более сложной формы. Однако из-за ограниченных возможностей существующих ЭВМ вычисления возможны лишь при сравнительно небольших волновых размерах тел. Поэтому основное внимание исследователей было обращено на решение модельных задач дифракции звука на цилиндрических и сферических телах, среди которых сплошные тела, упругие слои и тонкие оболочки с различными заполнителями, полости в упругой среде. Подробный обзор многих из этих работ можно найти в работах [13, 14, 17, 42].

5.1.1. Дифракция плоской волны на системе цилиндрических слоев. Рассмотрим дифракцию плоской звуковой волны

$$p_{\text{пад}} = p_0 \exp(ikr\cos\theta) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n J_n(kr)\cos(n\theta) \tag{5.1}$$

на многослойном цилиндре, представляющем собой систему M коаксиальных упругих слоев с радиусами r_n (рис. 5.1, *а*). Слои жестко соединены друг с другом так, что проскальзывания их поверхностей не происходит. Волновые сопротивления жидкостей внутри и вне цилиндра равны $Z_0 = \rho_0 c_0$ и $Z = \rho c$ соответственно. Поле внутри цилиндра p_i и рассеянную волну во внешнем пространстве запишем в обычной форме:

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n C_n J_n(k_0 r)\cos(n\theta); \tag{5.2}$$

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n B_n H_n^{(1)}(kr)\cos(n\theta). \tag{5.3}$$

Поля смещений и напряжений в каждом из слоев можно выразить через скалярные и векторные потенциалы для расходящихся и сходящихся

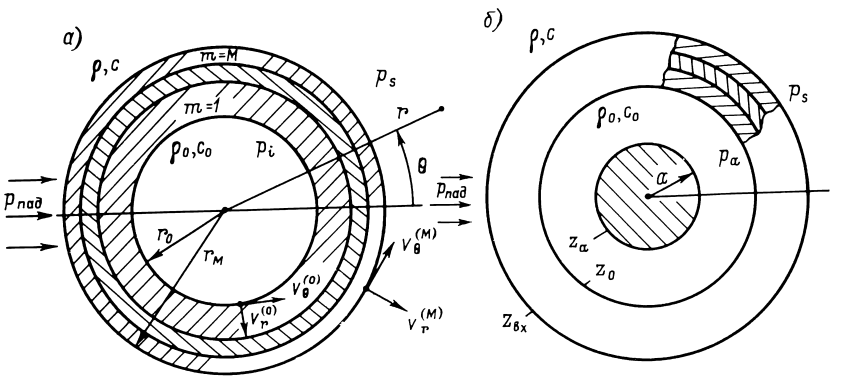


Рис. 5.1. Многослойный цилиндр: *а* – внутренняя полость заполнена средой; *б* – во внутренней полости расположен цилиндр

волн. Используя условия непрерывности нормальных и касательных смещений, а также нормальных и сдвиговых напряжений, получим $4M$ уравнений, к которым следует добавить еще два уравнения, получающиеся из граничных условий на внешней и внутренней поверхностях всей системы слоев. В результате получим $4M + 2$ уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений, причем такая система уравнений должна решаться для каждой моды колебаний с номерами $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким способом получено решение для упругого цилиндра с упругим внутренним заполнителем [13, 14, 101]. Несмотря на то, что решение системы комплексных уравнений на ЭВМ даже при довольно больших M (порядка нескольких десятков) не вызывает затруднений, сама запись матрицы коэффициентов такой системы оказывается весьма громоздкой. Более компактную запись можно получить, используя матричную форму связи между смещениями и напряжениями на двух сторонах слоя [41] аналогично тому, как это делается при решении задачи о прохождении звука через систему слоев [8, 63].

Представленная ниже матричная форма записи может быть использована для анализа акустических характеристик *слоисто-неоднородных сред* с кусочно-непрерывным изменением параметров. Она может быть использована также и для сред с плавными изменениями параметров, если разбить слой по толщине на ряд элементарных слоев, в каждом из которых параметры меняются незначительно. Другая форма матричных представлений импедансов, пригодная для сред с переменными по толщине параметрами, использована в работах [3, 52]. Рассмотрим некоторую моду колебаний с номером n. Предположим, что нам известна *матрица передачи* $\|A_{jk}\|$, где $j, k = 1, 2, 3, 4$, связывающая величины v_θ, v_r, σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ на двух сторонах составного цилиндрического слоя для указанной формы колебаний:

$$\begin{Vmatrix} v_\theta^{(0)} \\ v_r^{(0)} \\ \sigma_{rr}^{(0)} \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} \end{Vmatrix} = \|A_{jk}\| \cdot \begin{Vmatrix} v_\theta^{(M)} \\ v_r^{(M)} \\ \sigma_{rr}^{(M)} \\ \sigma_{r\theta}^{(M)} \end{Vmatrix} ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь v_r и v_θ – радиальная и тангенциальная составляющие колебательных скоростей соответственно; σ_{rr} и $\sigma_{r\theta}$ – нормальные и касательные напряжения, причем все величины считаются принадлежащими к выбранной форме колебаний с номером n. Поэтому в последующих выражениях для ряда величин следовало бы ввести индекс n, например $v_{rn}^{(M)}$, p_{0n}, M_{22n} и т. д. Однако для сокращения записи этот индекс опущен и принадлежность записываемых величин к фиксированной моде колебаний отмечена ссылкой $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Верхние индексы (M) и (0) относятся к внешней и внутренней поверхностям системы слоев соответственно. Учитывая, что на этих поверхностях $\sigma_{r\theta}^{(M)} = \sigma_{r\theta}^{(0)} = 0$, можно записать для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$v_r^{(0)} = A_{21} v_\theta^{(M)} + A_{22} v_r^{(M)} + A_{23} \sigma_{rr}^{(M)}; \quad \sigma_{rr}^{(0)} = A_{31} v_\theta^{(M)} + A_{32} v_r^{(M)} + A_{33} \sigma_{rr}^{(M)},$$

$$0 = A_{41} v_\theta^{(M)} + A_{42} v_r^{(M)} + A_{43} \sigma_{rr}^{(M)}.$$

Исключив отсюда $v_\theta^{(M)}$, получим для $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$v_r^{(0)} = M_{22} v_r^{(M)} + M_{23} \sigma_{rr}^{(M)}; \quad \sigma_{rr}^{(0)} = M_{32} v_r^{(M)} + M_{33} \sigma_{rr}^{(M)}, \tag{5.4}$$

где

$$M_{22} = A_{22} - A_{21} A_{42}/A_{41}; \quad M_{23} = A_{23} - A_{21} A_{43}/A_{41};$$

$$M_{32} = A_{32} - A_{31} A_{42}/A_{41}; \quad M_{33} = A_{33} - A_{31} A_{43}/A_{41}. \tag{5.5}$$

Последние выражения формально совпадают с аналогичными формулами для системы плоских слоев (33.4) из работы [63]. Учтем, что на границах системы слоев выполняются условия непрерывности напряжений

$$(\sigma_{rr} + p_{\text{пад}} + p_s)|_{r=r_M} = 0; \quad (\sigma_{rr} + p_i)|_{r=r_0} = 0.$$

Следовательно, выражения (5.4) можно переписать в виде

$$v_r^{(0)} = M_{22} v_r^{(M)} - M_{23}(p_{\text{пад}} + p_s)|_{r=r_M};$$

$$-p_i|_{r=r_0} = M_{32} v_r^{(M)} - M_{33}(p_{\text{пад}} + p_s)|_{r=r_M}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.6}$$

Введем в рассмотрение *входной импеданс системы* (для моды колебаний с номером n) как отношение звукового давления на внешней поверхности к радиальной составляющей колебательной скорости с обратным знаком. Перемена знака связана с тем, что положительное звуковое давление действует внутрь, в то время как положительная составляющая скорости направлена наружу:

$$-\frac{p}{v_r^{(M)}}\bigg|_{r=r_M} = -\frac{p_{\text{пад}} + p_s}{v_r^{(M)}}\bigg|_{r=r_M} = Z_{\text{вх}}. \tag{5.7}$$

Отношение $p_i/v_r^{(0)}$ на внутренней стороне слоя (при $r = r_0$) обозначим через Z_0, т. е. $Z_0 = -p_i/v_r^{(0)}|_{r=r_0}$. Заметим, что Z_0 представляет собой *импеданс нагрузки с внутренней стороны слоя*, причем

$$Z_0 = -i\rho_0 c_0 J_n(k_0 r_0)/J_n'(k_0 r_0). \tag{5.8}$$

Разделив второе уравнение системы (5.6) на первое, получим

$$Z_{\text{вх}} = \frac{M_{22} Z_0 - M_{32}}{M_{33} - M_{23} Z_0}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.9}$$

Неизвестные коэффициенты B_n можно получить из соотношения (5.7), учитывая, что на внешней стороне $v_r^{(M)}|_{r=r_M} = \dfrac{1}{i\omega\rho}\left.\dfrac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_M}$,

$$B_n = -\frac{J_n(\mu_M) + J_n'(\mu_M) Z_{\text{вх}}/(iw)}{H_n^{(1)}(\mu_M) + H_n^{(1)}(\mu_M) Z_{\text{вх}}(iw)}. \tag{5.10}$$

Здесь $\mu_M = kr_M$, $w = \rho c$. Коэффициенты C_n определяются из первого уравнения системы (5.6). Учитывая, что

$$J_n'(x)H_n^{(1)}(x) - J_n(x)H_n^{(1)}(x) = -2i/(\pi x), \tag{5.11}$$

получим

$$C_n = \frac{w_0}{w}\,\frac{-2i(M_{22} + M_{23}Z_{\text{вх}})}{\pi\mu_M J_n'(\mu_0)[H_n^{(1)}(\mu_M) + H_n^{(1)\prime}(\mu_M)Z_{\text{вх}}/(iw)]}.$$

5.1.2. Определение элементов матрицы передачи. Пространственные задачи о рассеянии звука конечными оболочками являются достаточно сложными. Приближенное решение некоторых таких задач дано в работах [43, 47]. В работе [41] найдены элементы матрицы передачи для трехмерной задачи, в которой существует волновое движение вдоль оси от цилиндра. Мы ограничимся здесь более простым случаем, когда волна падает параллельно образующей цилиндра и зависимость звукового давления от координаты вдоль оси отсутствует.

Введем скалярный и векорный потенциалы смещений в слое с номером $+m$ $\vec{u} = \operatorname{grad}\Phi + \operatorname{rot}\vec{\Pi}$; $\vec{v} = -i\omega\vec{u}$.

В двумерном случае отлична от нуля лишь составляющая векторного потенциала, направленная вдоль оси. Потенциалы Φ и Π_z удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Phi + k_l^2\Phi = 0; \quad \Delta\Pi_z + k_t^2\Pi_z = 0,$$

где k_l и k_t – волновые числа для продольных волн и волн сдвига соответственно. Решения этих уравнений в слое для формы с номером n представим в виде

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= (b_1 J_n(k_l r) + b_2 N_n(k_l r))\cos(n\theta);\\ \Pi_z &= (b_3 J_n(k_l r) + b_4 N_n(k_t r))\sin(n\theta).\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

Заметим, что в этих выражениях зависимости от угла θ выбраны таким образом, чтобы радиальная составляющая скорости была симметрична относительно направления $\theta = 0$, а тангенциальная составляющая – антисимметрична. Коэффициенты b_j будем считать компонентами

вектора-столбца $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$. Здесь верхний индекс T означает транспонирование, т. е. запись в виде столбца. Выражения, связывающие компоненты колебательной скорости с потенциалами, имеют вид [63]

$$\left.\begin{aligned} v_\theta &= -i\omega\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Pi_z}{\partial r}\right);\ v_r = -i\omega\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z}{\partial\theta}\right);\\ \sigma_{rr} &= -\lambda k_l^2\Phi + 2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Pi_z}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial r\partial\theta}\right);\\ \sigma_{r\theta} &= \mu\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - k_t^2\Pi_z - 2\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial z^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Введем следующие обозначения: a_1 и a_2 – внешний и внутренний радиусы слоя соответственно; $\mu_{l1} = k_l a_1$, $\mu_{l2} = k_l a_2$, $\mu_{t1} = k_t a_1$, $\mu_{t2} = k_t a_2$; T_1 и T_2 – векторы-столбцы, составленные из компонент скоростей и напряжений на внешней и внутренней поверхностях, т. е. $T_{1,2} = [\hat{v}_\theta^{(1,2)}, \hat{v}_r^{(1,2)}, \hat{\sigma}_{rr}^{(1,2)}, \hat{\sigma}_{r\theta}^{(1,2)}]^T$, где уголок сверху означает, что в соответствующих величинах взяты лишь радиальные части, т. е. $v_\theta^{(1,2)} = \hat{v}_\theta^{(1,2)}\sin(n\theta)$; $v_r^{(1,2)} = \hat{v}_r^{(1,2)}\cos(n\theta)$; $\sigma_{rr}^{(1,2)} = \hat{\sigma}_{rr}^{(1,2)}\cos(n\theta)$; $\sigma_{r\theta}^{(1,2)} = \hat{\sigma}_{r\theta}^{(1,2)}\sin(n\theta)$.

Подставив выражения (5.12) в формулы (5.13) при $r = a_1$ и $r = a_2$, получим две системы соотношений, которые можно записать в матричной форме:

$$T_1 = XB;\ T_2 = YB;\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5.14)$$

Элементы матрицы X определяются следующими выражениями:

$$x_{11} = \frac{i\omega n}{a_1}J_n(\mu_{l1});\ x_{12} = \frac{i\omega n}{a_1}N_n(\mu_{l1});$$

$$x_{13} = i\omega k_t J_n'(\mu_{t1});\ x_{14} = i\omega k_t N_n'(\mu_{t1});\ x_{21} = -i\omega k_l J_n'(\mu_{l1});$$

$$x_{22} = -i\omega k_l N_n'(\mu_{l1});\ x_{23} = \frac{-i\omega n}{a_1}J_n(\mu_{t1});\ x_{24} = -\frac{i\omega n}{a_1}N_n(\mu_{t1});$$

$$x_{31} = k_l^2[-\lambda J_n(\mu_{l1}) + 2\mu J_n''(\mu_{l1})];\ x_{32} = k_l^2[-\lambda N_n(\mu_{l1}) + 2\mu N_n''(\mu_{l1})];$$

$$x_{33} = \frac{2\mu n}{a_1}\left[-\frac{1}{a_1}J_n(\mu_{t1}) + k_t J_n'(\mu_{t1})\right];\ x_{34} = \frac{2\mu a}{a_1}\left[-\frac{1}{a_1}N_n(\mu_{t1}) + k_t N_n'(\mu_{t1})\right];$$

$$x_{41} = \frac{2\mu n}{a_1}\left[-k_l J_n'(\mu_{l1}) + \frac{1}{a_1} J_n(\mu_{l1})\right];\ x_{42} = \frac{2\mu n}{a_1}\left[-k_l N_n'(\mu_1) + \frac{1}{a_1} N_n(\mu_{l1})\right];$$

$$x_{43} = \mu k_t^2 [J_n(\mu_{t1}) - 2J_n''(\mu_{t1})];\ x_{44} = -\mu k_t^2 [N_n(\mu_{t1}\mu_{l1}) - 2N_n''(\mu_{t1})] \cdot$$

Элементы матрицы Y получаются из элементов матрицы X заменой a_1, μ_{l1}, μ_{t1} на a_2, μ_{l2}, μ_{t2}. Из первого уравнения (5.14) найдем $B = X^{-1}T_1$, где X^{-1} – обратная матрица. Из второго уравнения (5.14) получим искомое соотношение, связывающее компоненты скоростей и напряжений на внутренней и внешней границах, $T_2 = YX^{-1}T_1$. Таким образом, матрица передачи для одного слоя с номером m будет

$$A^{(m)} = YX^{-1};\ n = 0, 1, 2, ... \qquad (5.15)$$

Переходя последовательно от одного слоя к другому, получим результирующую матрицу передачи для всей системы слоев в виде матричного произведения

$$A = A^{(M)} A^{(M-1)} ... A^{(1)};\ n = 0, 1, 2, ...$$

Выражение (5.10) справедливо и для одиночного упругого цилиндра с волновым радиусом $\mu_M = ka$. При этом входной импеданс на внешней стороне цилиндра для моды с номером n определяется следующим выражением:

$$Z_{вх} = -i\rho_M c_t \frac{1}{\mu_t} \frac{D_2}{D_1};\ n = 0, 1, 2, ..., \qquad (5.16)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$a_{12} = (\mu_t^2 - 2n^2) J_n(\mu_l) + 2\mu_l J_n'(\mu_l);\ a_{22} = \mu_l J_n'(\mu_l);$$

$$a_{32} = 2n(J_n(\mu_l) - \mu_l J_n'(\mu_l));\ a_{13} = 2n(J_n(\mu_t) - \mu_t J_n'(\mu_t));$$

$$a_{23} = nJ_n(\mu_t);\ a_{33} = (\mu_t^2 - 2n^2) J_n(\mu_t) + 2\mu_t J_n'(\mu_t).$$

Здесь $\mu_l = k_l a$; $\mu_t = k_t a$.

5.1.3. Система с внутренним упругим или импедансным цилиндром. Усложним задачу и будем считать, что во внутренней области коаксиально с внешней системой слоев расположен еще один цилиндр радиусом $r = a$. Этот цилиндр может быть импедансным или упругим. Можно также считать его упругой оболочкой или системой упругих слоев. В любом

из этих случаев рассматриваемая здесь схема расчета позволяет записать достаточно универсальное решение. Свойства внутреннего цилиндра будем характеризовать его входным импедансом Z_a, который представляет собой отношение звукового давления на его поверхности к радиальной составляющей колебательной скорости (для моды колебаний с номером n):

$$Z_a = -p_a / v_r|_{r=a} = -i\omega\rho_0 p_a \Big/ \frac{\partial p_a}{\partial r}\Big|_{r=a}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.17}$$

Для цилиндра, имеющего поверхность, обладающую локальным импедансом, Z_a не зависит от номера n. Для цилиндра, представляющего собой один или совокупность упругих слоев, входной импеданс Z_a можно определить точно таким же образом, как и для внешней системы слоев. Например, если внутренний цилиндр является многослойной системой без внутреннего заполнителя, то можно воспользоваться выражением (5.9), положив $Z_0 = 0$ и заменив значения радиусов соответствующих слоев.

Звуковое поле в пространстве между внутренним и внешним цилиндрами p_a можно представить либо в виде суммы сходящихся и расходящихся волн с использованием функций $H_n^{(1)}(k_0 r)$ и $H_n^{(2)}(k_0 r)$, либо в виде разложения по функциям $J_n(k_0 r)$, $N_n(k_0 r)$. Запишем это поле в виде ряда

$$p_a = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n [D_n J_n(k_0 r) + E_n N_n(k_0 r)] \cos(n\theta). \tag{5.18}$$

Определим импеданс на внутренней стороне внешней системы слоев в виде

$$Z_0 = -p_a / v_r^{(0)}|_{r=r_0} = -i\omega\rho_0 p_a \Big/ \frac{\partial p_a}{\partial r}\Big|_{r=r_0}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.19}$$

Заметим, что при отсутствии внутреннего цилиндра этот импеданс определяется выражением (5.8). Импедансы Z_a и Z_0 можно найти из условий (5.17), (5.19):

$$\frac{Z_a}{iw_0} = -\frac{D_n J_n(\mu_a) + E_n N_n(\mu_a)}{D_n J_n'(\mu_a) + E_n N_n'(\mu_a)};$$

$$\frac{Z_0}{iw_0} = -\frac{D_n J_n(\mu_0) + E_n N_n(\mu_0)}{D_n J_n'(\mu_a) + E_n N_n'(\mu_0)}, \tag{5.20}$$

где $\mu_a = k_0 a$, $\mu_0 = k_0 r_0$, $w_0 = \rho_0 c_0$. Исключив отношение D_n/E_n из этих выражений, получим

$$Z_0 = -iw_0 \frac{\Delta_1 - \Delta_2 Z_a/(iw_0)}{\Delta_3 - \Delta_4 Z_a/(iw_0)}, \tag{5.21}$$

где

$$\Delta_1 = J_n(\mu_a) N_n(\mu_0) - J_n(\mu_0) N_n(\mu_a); \quad \Delta_2 = J_n(\mu_0) N_n'(\mu_a) - J_n'(\mu_a) N_n(\mu_0);$$

$$\Delta_3 = J_n(\mu_a) N_n'(\mu_0) - J_n'(\mu_0) N_n(\mu_a); \quad \Delta_4 = J_n'(\mu_0) N_n'(\mu_a) - J_n'(\mu_a) N_n'(\mu_0).$$

Для вычисления коэффициентов D_n, E_n воспользуемся соотношениями (5.6), (5.18), (5.19). Сначала выразим D_n, E_n через B_n, а затем воспользуемся выражением (5.10). После преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} D_n &= \frac{i\rho_0 r_0}{\rho r_M}(M_{22} + M_{23} Z_{\text{вх}}) \frac{N_n(\mu_0) + N_n'(\mu_0)\, Z_0/(iw_0)}{H_n^{(1)}(\mu_M) + H_n^{(1)\prime}(\mu_M) Z_{\text{вх}}/(iw)}; \\ E_n &= -\frac{i\rho_0 r_0}{\rho r_M}(M_{22} + M_{23} Z_{\text{вх}}) \frac{J_n(\mu_0) + J_n'(\mu_0)\, Z_0/(iw_0)}{H_n^{(1)}(\mu_M) + H_n^{(1)\prime}(\mu_M) Z_{\text{вх}}/(iw)}. \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Здесь $Z_{\text{вх}}$ вычисляется по формуле (5.9), а Z_0 в формулах (5.9) и (5.22) – по формуле (5.21), $w = \rho c$.

Формула (5.3) определяет поле рассеяния в точке с координатами r, θ при падении плоской волны в направлении $\theta = 0$. Однако по принципу взаимности это же выражение можно использовать и для вычисления звукового поля в дальней зоне в направлении $\theta = 0$, излучаемого источником, находящимся в точке с координатами r, θ. Рассмотрим пульсирующий цилиндр производительностью Q (на единицу длины). Ось этого цилиндра параллельна оси рассеивающего цилиндра, и ее положение определяется координатами R_0, 0. В свободном пространстве такой источник создает звуковое давление

$$p_c = k\rho c Q H_0^{(1)}(kR_0) \approx k\rho c Q \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} \exp(ikR_0 - i\pi/4); \quad kR_0 \gg 1. \tag{5.23}$$

При $R_0 \gg a$ и $kR_0 \gg 1$ можно считать, что волна, излучаемая таким источником в пределах поверхности рассеивающего цилиндра, приближенно является плоской. Поэтому поле, рассеиваемое такой волной на препятствии в точке с координатами r, θ, можно записать, используя ряд (5.3), заменив p_0 на p_c. Таким образом, для звукового давления в рассеянной волне получим

$$p_s = k\rho c Q \sqrt{\frac{2}{\pi k R_0}} \exp(ikR_0 - i\pi/4) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n B_n H_n^{(1)}(kr) \cos(n\theta),$$

где B_n – коэффициенты, определенные выше для падающей плоской волны. Точно такое же выражение описывает и поле, излучаемое линейным источником такой же производительности, помещенным в точку с координатами r, θ, при расположении наблюдателя в точке R_0, 0. Аналогичным образом, заменив в выражениях (5.2) или (5.18) амплитуду плоской волны p_0 на значение p_c, определяемое формулой (5.23), получим поле, излучаемое линейным источником, находящимся во внутренней области.

Все формулы, полученные выше, можно использовать и в тех случаях, когда в материалах упругих слоев имеются потери. Для этого достаточно считать волновые числа для продольных и поперечных волн в слоях комплексными. При этом следует иметь в виду следующее. Функции $J_n(\tilde{z})$ и $N_n(\tilde{z})$ комплексного аргумента $\tilde{z} = z(1 + i\epsilon)$ (где z вещественно) при значениях z, больших нескольких десятков, и $\epsilon > (0{,}1 \ldots 0{,}2)$ оказываются весьма большими по абсолютной величине и близкими друг к другу по значению. Это следует из асимптотических представлений, справедливых при $|\tilde{z}| > n$ и $|\tilde{z}| \gg 1$: $J_n(\tilde{z}) \approx \sqrt{2/(\pi\tilde{z})} \cos(\tilde{z} - \pi n/2 - \pi/4)$; $N_n(\tilde{z}) \approx \sqrt{2/(\pi\tilde{z})} \sin(z - \pi n/2 - \pi/4)$. Если $\tilde{z} = z_1 + iz_2$ и $z_2 \gg 1$, то

$$N_n(\tilde{z}) \approx iJ_n(\tilde{z}) \approx i\sqrt{2/(\pi\tilde{z})}\,\mathrm{ch}\, z_2 [\cos(z_1 - \pi n/2 - \pi/4) - i \sin(z_1 -$$

$$- \pi n/2 - \pi/4)\,\mathrm{th}\, z_2] \approx i\sqrt{2/(\pi\tilde{z})}\,\mathrm{ch}\, z_2 \exp[-i(z_1 - \pi n/2 - \pi/4)].$$

Таким образом, в указанном приближении оказывается, что $|J_n(\tilde{z})| \approx |N_n(\tilde{z})| \gg 1$ и различие между этими функциями проявляется лишь в асимптотических членах более высокого порядка. При обращении матриц (или при вычислении соответствующих определителей) встретятся разности различных комбинаций произведений этих функций от комплексных значений волновых радиусов слоев $\tilde{k}_l r_j = k_l r_j (1 + i\eta_{kl})$, $\tilde{k}_t r_j = k_t r_j (1 + i\eta_{kt})$, где η_{kl} и η_{kt} – величины, связанные с коэффициентами потерь η_l и η_t в материалах слоев соотношениями $\eta_{kl} \approx \eta_l/2$, $\eta_{kt} \approx \eta_t/2$. Поэтому при η_{kl} и η_{kt}, больших, чем 0,1 ... 0,2, будет резко падать точность и в случае больших значений волновых радиусов слоев вычисления оказываются возможными лишь при сравнительно небольших коэффициентах потерь. Аналогичная ситуация возникает и в случае, если необходимо учитывать потери в промежутке между слоями. Тогда необходимо считать k_0 комплексной величиной.

В результате слагаемые, входящие в выражения Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, окажутся весьма большими и близкими друг к другу по значению. Наиболее сильно указанное явление будет проявляться, если какие-либо слои имеют низкую скорость поперечных волн (резиноподобные среды). Тогда $k_t r_j \gg k_l r_j$. Кроме того, обычно такие среды имеют и высокие коэффициенты потерь. В этом случае придется вычислять цилиндрические функции больших комплексных аргументов. Некоторую помощь при вычислениях в таких ситуациях могут оказать рекуррентные соотношения для функций $\Delta_1 \ldots \Delta_4$ [51].

Графики на рис. 5.2 позволяют проследить некоторые закономерности, связанные с влиянием внешнего слоя на поле, возникающее на поверхности внутреннего цилиндра (см. рис. 5.1, *б*) при $r = a$. При расчете принято, что внешняя система состоит из слоя с параметрами $c_l = 5{,}8 \cdot 10^3 (1 - i\eta_{kl})$ м/с; $c_t = 3{,}2 \cdot 10^3 (1 - i\eta_{kt})$ м/с; $\rho_M = 7800$ кг/м^3. В зазоре находится среда с параметрами $\rho_0 = \rho = 10^3$ кг/м^3, $c_0 = c = 1{,}5 \cdot 10^3$ м/с. Внутренний цилиндр либо акустически жесткий с импедансом $Z_a = \infty$, либо звукопоглощающий с импедансом $Z_a = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг/мс^2. По вертикальной оси отложены значения $L_p = 20 \times \lg |p_i/p_0|$, дБ. При малой волновой толщине внешнего слоя и малом зазоре (рис. 5.2, *а*) на тыльной стороне (при $\theta > 90°$) появляется акустическая тень. В этом случае потери в материале внешнего слоя почти не оказывают влияния на поле и кривые *1, 2* и *3, 4* практически совпадают. Кривые *5, 6* характеризуют поле на поверхности внутреннего цилиндра

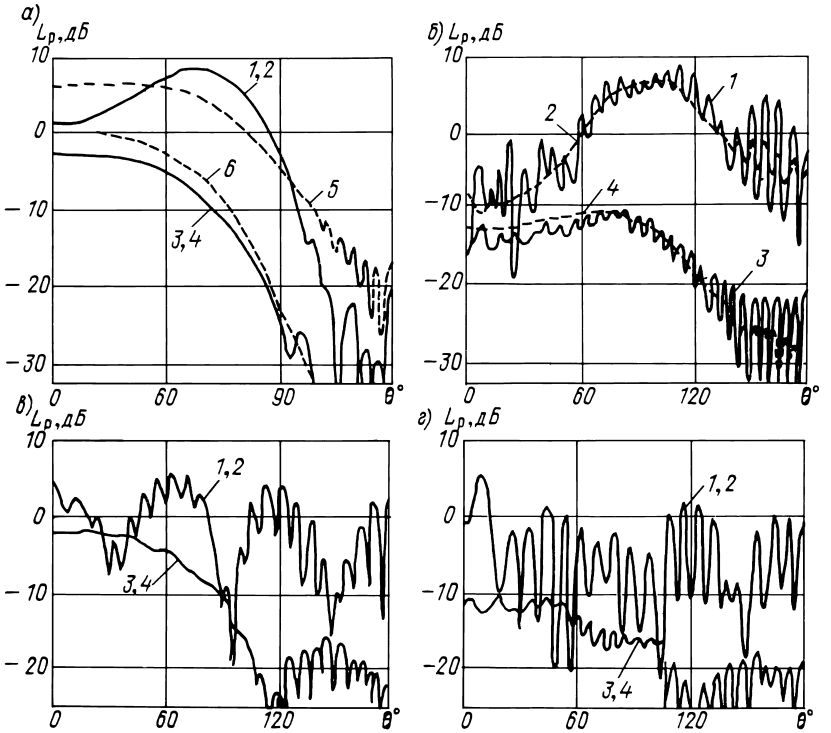


Рис. 5.2. Звуковое поле на поверхности внутреннего цилиндра: *а* – $kh = 0{,}25$; $kd = 1{,}25$; *б* – $kh = 1{,}08$; $kd = 1{,}25$; *в* – $kh = 0{,}25$; $kd = 12{,}5$; *г* – $kh = 1{,}08$; $kd = 12{,}5$

1 – жесткий внутренний цилиндр ($Z_a = \infty$) с внешней оболочкой при $\eta = 0$; *2* – то же при $\eta = 0{,}1$; *3* – поглощающий внутренний цилиндр [$Z_a = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг/(м^2·с)] с внешней оболочкой при $\eta = 0$; *4* – то же при $\eta = 0{,}1$; *5* – жесткий внутренний цилиндр без оболочки; *6* – поглощающий внутренний цилиндр без оболочки ($h = r_M - r_0$, $d = r_0 - a$, $\eta = \eta_{kl}/2 = \eta_{kt}/2$)

без внешнего слоя. При возрастании волновой толщины внешнего слоя (рис. 5.2, *б*) появляются сильные осцилляции, вызванные возбуждением во внешнем слое волны изгибного типа. В этом случае введение потерь в материал существенно уменьшает неравномерность поля.

Уровень поля в области акустической тени сильно зависит от свойств внутреннего цилиндра. При акустически жестком внутреннем цилиндре (кривые *1, 2*) в результате распространения звука в зазоре (как в волноводе) уровень в тыльной области резко повышается, что особенно заметно при больших зазорах (рис. 5.2, *в, г*). В этом случае основную роль играют многократные отражения звука в зазоре, а потери во внешнем слое практически не влияют на проникновение звука в зону тени.

5.1.4. Дальнее поле рассеяния. Влияние резонансных явлений. Дальнее поле рассеяния при $kr \gg 1$ можно получить из ряда (5.3), использовав асимптотическое выражение для функций Ханкеля. Тогда

$$p_s \approx p_0 \sqrt{\frac{a}{2r}} \exp(ikr) f(\theta), \tag{5.24}$$

где

$$f(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi ka}} \exp(-i\pi/4) \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n B_n \cos(n\theta).$$

Нормировка функций $f(\theta)$ в последнем выражении выполнена таким образом, что для акустически жесткого и мягкого цилиндров амплитуда обратного рассеяния удовлетворяет условию $f(\pi) \to 1$ при $ka \to \infty$. Ниже на рис. 5.13 приведена зависимость амплитуды волны, рассеянной упругой сферической оболочкой, от волнового радиуса. Кривая носит изрезанный характер, причем отсутствует тенденция к уменьшению неравномерности даже при $ka \gg 1$.

Можно предположить, что отдельные максимумы и минимумы связаны с резонансными колебаниями цилиндра как упругого тела, однако непосредственно из выражения (5.24) трудно найти условия, при которых такие резонансы имеют место. Для того чтобы определить условия, при которых появляются резонансные колебания, влияющие на амплитулу рассеянной волны, целесообразно выделить из общего решения члены, характеризующие рассеяние на акустически жестком или мягком телах. Если рассеяние происходит на упругом цилиндре с волновым сопротивлением, существенно превышающем волновое сопротивление среды, то удобно в качестве таких множителей взять коэффициенты разложения для акустически жесткого цилиндра. Если же рассеивающим телом является тонкостенная оболочка без внутреннего заполнителя, то следует использовать коэффициенты для акустически мягкого цилиндра. Поля рассеяния, соответствующие указанным решениям для идеальных тел, можно назвать фоном, на котором должны наблюдаться процессы, связанные с резонансными колебаниями.

Выделим в выражении (5.10) слагаемые, соответствующие рассеянию на акустически жестком или мягком цилиндрах ($B_n^{(h)}$ и $B_n^{(s)}$ соответственно):

$$B_n^{(h)} = -J_n'(\mu_M)/H_n^{(1)'}(\mu_M);\ B_n^{(s)} = -J_n(\mu_M)/H_n^{(1)}(\mu_M). \tag{5.25}$$

Тогда, учитывая формулу (5.11), получим

$$B_n = B_n^{(h)} + \frac{2w}{\pi\mu_M [H_n^{(1)'}(\mu_M)]^2 (Z_{\text{вх}} + Z_s)} \tag{5.26}$$

или

$$B_n = B_n^{(s)} + \frac{2iZ_{\text{вх}}}{\pi\mu_M H_n^{(1)}(\mu_M) H_n^{(1)'}(\mu_M)(Z_{\text{вх}} + Z_s)},$$

где $Z_s = iwH_n^{(1)}(\mu_M)/H_n^{(1)'}(\mu_M)$ – импедансы излучения (рассчитанные на единицу площади для форм колебаний с номером n). Слагаемые $B_n^{(h)}$ и $B_n^{(s)}$ определяют упомянутый выше фон, обращение в нуль мнимых частей знаменателя соответствует резонансам слоя. Обозначим резонансные частоты через ω_{nl}. Первый индекс означает номер моды возбуждения, а второй – порядковый номер резонанса для данной моды. Выделим вещественную и мнимую части импеданса излучения $Z_s = x_s + iy_s$. Модовые импедансы $Z_{\text{вх}}$ являются чисто мнимыми величинами (при отсутствии потерь в материале). Следовательно, отношение $Z_{\text{вх}}(\omega_{nl})/i$ вещественно. Таким образом, условие резонанса можно записать в форме

$$-iZ_{\text{вх}}(\omega_{nl}) + y_s(\omega_{nl}) = 0. \tag{5.27}$$

Разложим мнимую часть величины $Z_{\text{вх}} + Z_s$ в ряд Тейлора по частоте в окрестности резонанса: $-iZ_{\text{вх}}(\omega) + y_s(\omega) = -iZ_{\text{вх}}(\omega_{nl}) + y_s(\omega_{nl}) + + \beta_{nl}(\omega - \omega\ ) + \ldots$, где $\beta_{nl} = \partial(-iZ_{\text{вх}} + y_s)/\partial\omega|_{\omega=\omega_{nl}}$.

По условию (5.27) сумма первых двух слагаемых равна нулю. Поскольку x_s в окрестности резонанса меняется медленно, то в этой области его значение можно принять равным $x_s(\omega_{nl})$. Таким образом, $Z_{\text{вх}}(\omega) + Z_s(\omega) \approx x_s(\omega_{nl}) + i\beta_{nl}(\omega - \omega_{nl})$.

Отношение $\gamma_{nl} = x_s(\omega_{nl})/\beta_{nl}$ определяет ширину резонансного максимума. Суммируя по всем возможным резонансным частотам, получим

$$\left.\begin{aligned} B_n &\approx B_n^{(h)} + \frac{2w}{\pi\mu_M[H_n^{(1)'}(\mu_M)]^2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{i\beta_{nl}(\omega - \omega_{nl} - i\gamma_{nl})}; \\ B_n &\approx B_n^{(s)} + \frac{2i}{\pi\mu_M H_n^{(1)}(\mu_M) H_n^{(1)'}(\mu_M)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Z_{\text{вх}}(\omega_{nl})}{i\beta_{nl}(\omega - \omega_{nl} - i\gamma_{nl})}. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Заметим, что резонансы на частотных характеристиках рассеянного поля могут проявляться как в виде максимума, так и в виде минимума. Это связано с тем, что реально наблюдаются не сами резонансные колебания, а суммарный эффект их взаимодействия с фоновым рассеянием. В результате интерференции волн, соответствующих слагаемым $B_n^{(h)}$ или $B_n^{(s)}$, с волнами, определяемыми резонансными членами суммы, результирующие значения амплитуд рассеяния могут как увеличиваться, так и уменьшаться. Резонансные значения коэффициентов B_n при $\omega = \omega_{nl}$ можно определить по любой из формул (5.26) или (5.28). Учитывая, что на резонансе

$$Z_{\text{вх}} + Z_s = x_s = \frac{2w}{\pi\mu_M |H_n^{(1)\prime}(\mu_M)|^2},$$

получим

$$B_n = -iN_n'(\mu_M)/H_n^{(1)\prime}(\mu_M) \text{ при } \omega = \omega_{nl}.$$

Сравнивая это значение с коэффициентом $B_n^{(h)}$, находим, что при $\omega = \omega_{nl}$ выполняется простое соотношение $B_n = -(1 + B_n^{(h)})$.

В работе [97] показано, что резонансы с номерами $l = 1$ соответствуют *поверхностным волнам* (типа волн Рэлея на плоской поверхности), а резонансы с номерами $l = 2, 3, \ldots$ – *волнам „шепчущей галереи"*. Для того чтобы сопоставить скорости распространения этих волн и резонансные частоты ω_{nl}, рассмотрим множители $\cos(n\theta) = [\exp(in\theta) + \exp(-in\theta)]/2$, входящие в выражения (5.2), (5.3). Слагаемые $\exp(\pm in\theta)$ можно представить в виде $\exp(\pm ik_n x)$ (где $x = a\theta$ – линейная координата, отсчитываемая вдоль поверхности, $k_n = n/a$), в виде волн, распространяющихся вдоль поверхности в положительном и отрицательном направлениях. Волновым числам k_n соответствуют скорости $c_n = \omega a/n$. На резонансных частотах при $\omega = \omega_{nl}$ эти скорости будут $c_{nl} = \omega_{nl} a/n$. Таким образом, резонансы можно интерпретировать как совпадение скоростей c_{nl} и c_n.

Выражения (5.28) являются полезными для интерпретации результатов расчетов амплитуд рассеянных полей. Вместе с тем сами вычисления удобней выполнять с использованием исходных выражений для коэффициентов разложения (5.10). Это связано с трудностями аналитического определения коэффициентов β_{nl}.

Разложения в ряды типа (5.28), в которых выделяется „резонансный знаменатель", могут быть использованы и для анализа решений других задач дифракции на многослойных цилиндрических и сферических оболочках, рассеяния на газовом пузырьке в жидкости, рассеяния упругих волн на цилиндрической или сферической полости в твердом теле. Многочисленные примеры по указанным вопросам приведены в работе [97].

5.2. Периферические волны, возникающие при дифракции звука на упругих цилиндрических телах

5.2.1. Тонкая цилиндрическая оболочка. Возбуждение в оболочке упругих волн приводит к появлению ряда особенностей в рассеянных звуковых полях. Например, при рассеянии одиночного звукового импульса на упругой цилиндрической оболочке могут появляться периодические серии импульсов, многократно огибающих поверхность оболочки и обладающих малым затуханием. Ниже рассмотрены процессы, возникающие в области геометрической тени при рассеянии плоской монохроматической волны на пустотелой цилиндрической оболочке [32]. Рассчитаем звуковое поле вблизи поверхности оболочки. Воспользуемся решением задачи дифракции, полученным в книге [63]. Полное поле на поверхности можно определить в виде суммы падающей и рассеянной волн при $r = a$, где a – внешний радиус оболочки:

$$p = (p_{\text{пад}} + p_s)|_{r=a} = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n [J_n(ka) + B_n H_n^{(1)}(ka)] \cos(n\theta), \quad (5.29)$$

причем коэффициенты B_n определяются по формуле (5.10), а входящие в нее импедансы $Z_{\text{вх}}$ являются импедансами модовых колебаний, определяемых формулой (40.13) из работы [63]. [В этой формуле при определении коэффициента γ знак у слагаемого $(4-\sigma)n^2$ должен быть заменен с „+" на „–"]. Расчет проводился для стальной оболочки со следующими значениями параметров: модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, коэффициент Пуассона $\sigma = 0{,}29$, плотность $\rho_M = 7800$ кг/м^3, радиус оболочки $a = 2{,}7$ см, толщина стенок $h = 0{,}53$ мм, что соответствует в диапазоне частот $f = 150 \ldots 750$ кГц изменению волновой толщины kh от 0,3 до 1,33 и волнового радиуса ka от 10 до 100. Оболочка расположена в воде, причем $\rho c = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг/(м$^2 \cdot$ с).

Угловая зависимость звукового давления на поверхности оболочки (рис. 5.3) существенно зависит от волновой толщины оболочки. При малом значении волновой толщины оболочки ($kh < 0{,}8$) амплитуда

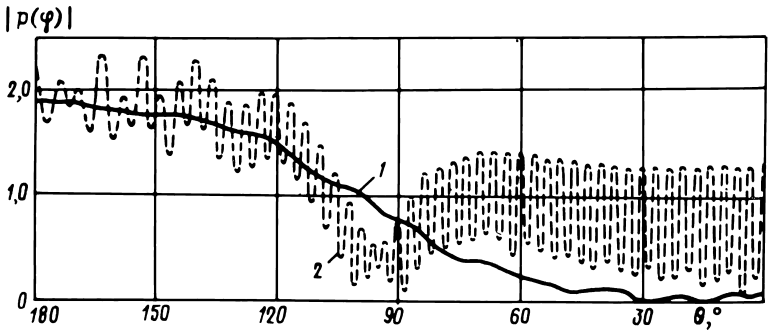


Рис. 5.3. Возбуждение периферической волны
$1 - kh = 0{,}33$; $2 - kh = 1{,}0$

поля за оболочкой резко уменьшается. При этом за ней образуется глубокая акустическая тень. При такой волновой толщине оболочка ведет себя подобно акустически мягкому рассеивателю. При больших значениях волновой толщины за оболочкой также образуется глубокая тень, и амплитуда поля в области тени совпадает со значениями, полученными при расчете звукового давления, рассеянного акустически жестким цилиндром. Однако в диапазоне волновой толщины оболочки kh = = 0,8 ... 1,2 возникают новые явления, которые не могут быть объяснены исходя из моделей акустически жесткой или мягкой поверхности рассеивающего цилиндра. В этом диапазоне волновой толщины уровень поля в области тени резко возрастает.

В то время как для акустически жесткого цилиндра давление в области тени (при ka = 50) примерно на 20 дБ меньше уровня в падающей волне, для упругой оболочки в диапазоне kh = 0,8 ... 1,2 разница уровней в освещенной и теневой областях составляет всего 3 ... 6 дБ. Если учесть, что в освещенной области звуковое давление может быть близким к удвоенному значению в падающей волне, то получится, что в максимумах осцилляций поля в области тени звуковое давление может превышать давление в падающей волне. Таким образом, упругая цилиндрическая оболочка даже большого волнового радиуса перестает играть роль экрана для звуковой волны.

Увеличение звукового давления в области тени обусловлено возникновением в окружающей среде *периферических волн*, распространяющихся вокруг оболочки и вызванных возбуждением бегущих волн по оболочке. Для анализа этого явления можно применить преобразование Ватсона рядов по цилиндрическим функциям, описывающих звуковое поле, в быстро сходящиеся (при больших значениях ka) ряды. Преобразование тригонометрических рядов методом Ватсона для акустически жесткого или мягкого цилиндров выполнено в работах [59, 63]. Вывод выражений для упругого цилиндра выполняется тем же способом. Отличие заключается в том, что в данном случае в выражении для функции $A(\nu)$, входящей в формулу (5.30), появляется множитель, зависящий от модовых импедансов цилиндра Z_ν, рассматриваемых как функция индекса.

Полное поле в области геометрической тени определяется выражением

$$p = -2\pi i \sum_S \operatorname*{Res}_{\nu=\nu_S} \frac{A(\nu)}{1-\exp(2\pi i\nu)} \left\{ \exp\left[i\nu_S(\theta+\pi) - \pi/2\right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[i\nu_S(3\pi/2 - (\theta-\pi))\right] \right\}, \qquad (5.30)$$

где

$$A(\nu) = -i^\nu \frac{J'_\nu(ka)}{H_\nu^{(1)\prime}(ka)} \frac{Z_\nu/(\rho c) + iJ_\nu(ka)/J'_\nu(ka)}{Z_\nu/(\rho c) + iH_\nu^{(1)}(ka)/H_\nu^{(1)\prime}(ka)} H_\nu^{(1)}(kr). \qquad (5.31)$$

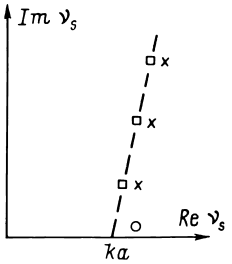


Рис. 5.4. Расположение полюсов на комплексной плоскости для тонкой цилиндрической оболочки

Суммирование производится по всем полюсам, вычисленным в корнях знаменателя функции $A(\nu)$, расположенных в первом квадранте комплексной плоскости ν. Для акустически жесткого цилиндра (т. е. при $Z_\nu = \infty$) имеется серия значений ν_s, являющихся корнями уравнения

$$H_\nu^{(1)\prime}(ka) = 0. \tag{5.32}$$

Будем называть эти значения корнями 1-го типа. На рис. 5.4 эти корни показаны квадратами. Вычеты в корнях 1-го типа определяют *волны Франца*, огибающие поверхность акустически жесткого цилиндра. Эти волны подробно описаны в работах [59, 63]. Положения этих корней определяются лишь одним параметром – волновым радиусом цилиндра. Корни 1-го типа имеют большую мнимую часть, которую можно рассматривать как величину, характеризующую затухание этих волн при их распространении вокруг оболочки. Поэтому волны Франца быстро убывают в области тени. Значения корня ν_1 1-го типа приведены в табл. 5.1. Корни более высоких

Таблица 5.1. **Корни уравнения (5.33)**

f, кГц	kh	ka	Корни			1-й корень уравнения $H_\nu^{(1)}(ka) = 0$
			1-го типа	2-го типа	3-го (изгибного) типа	
150	0,33	16,7	$1{,}06 + i \cdot 0{,}11$	$1{,}05 + i \cdot 0{,}19$	$1{,}82 + i \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-4}$	$1{,}14 + i \cdot 0{,}25$
300	0,67	33,4	$1{,}04 + i \cdot 0{,}07$	$1{,}04 + i \cdot 0{,}07$	$1{,}28 + i \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}$	$1{,}09 + i \cdot 0{,}16$
375	0,88	41,8	$1{,}03 + i \cdot 0{,}06$	$1{,}04 + i \cdot 0{,}06$	$1{,}16 + i \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}08 + i \cdot 0{,}13$
450	1,00	50,2	$1{,}03 + i \cdot 0{,}05$	$1{,}03 + i \cdot 0{,}05$	$1{,}08 + i \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}07 + i \cdot 0{,}12$
525	1,17	58,6	$1{,}03 + i \cdot 0{,}05$	$1{,}03 + i \cdot 0{,}05$	$1{,}04 + i \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-1}$	$1{,}06 + i \cdot 0{,}11$
600	1,33	66,9	$1{,}02 + i \cdot 0{,}04$	$1{,}03 + i \cdot 0{,}04$	$1{,}03 + i \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-1}$	$1{,}05 + i \cdot 0{,}10$

номеров имеют еще большие значения мнимой части. Поэтому при вычислении амплитуды звукового давления в зоне тени можно ограничиться первым членом ряда (5.30).

Если импеданс оболочки является конечной величиной, то корни уравнения (5.32) уже не являются корнями знаменателя в выражении (5.31), так как функция $H_\nu^{(1)}(ka)$ во втором и третьем сомножителях сокращаются. Поэтому корни знаменателя определяются из уравнения

$$\frac{Z_\nu}{\rho c} + i\frac{H_\nu^{(1)}(ka)}{H_\nu^{(1)\prime}(ka)} = 0. \tag{5.33}$$

Заметим, что последнее выражение можно записать в виде $Z_\nu + Z_\nu^{(1)} = 0$, где $Z_\nu^{(1)}$ – импеданс излучения цилиндра во внешнее пространство в форме колебаний с комплексным номером ν.

Для того чтобы определить положение полюсов на комплексной плоскости ν, необходимо вычислять цилиндрические функции комплексного индекса. Это можно сделать, использовав представление функции Ханкеля в виде интеграла Зоммерфельда. Для функции Z_ν в случае тонкой оболочки можно взять выражение, определяющее механический импеданс тонкой цилиндрической оболочки [63] (с поправкой, указанной выше). Уравнение (5.33) решается подбором значений корней методом перевала. Вычисленные в работе [32] значения корней приведены в табл. 5.1.

Результаты вычислений показывают, что уравнение (5.33) имеет две серии корней. При указанных в таблице значениях волновой толщины корни первой серии лежат вблизи значений, определяемых уравнением (5.32). На рис. 5.4 они показаны крестиками. Будем называть волны, соответствующие этим полюсам, волнами *2-го типа*, или *волнами типа Франца*. Эти полюсы определяют периферические волны, огибающие цилиндрическую поверхность, обладающую конечным нормальным импедансом. При изменении импеданса поверхности от акустически мягкого до акустически жесткого вещественная часть корня почти не меняется, а его мнимая часть, характеризующая затухание волны, в случае акустически мягкой поверхности резко возрастает. В табл. 5.1 приведены также значения корней уравнения (5.32), соответствующих дифракции на акустически мягкой поверхности. Для оболочки достаточно большой волновой толщины ($kh > 1{,}2$) полюсы 2-го типа практически совпадают с корнями уравнения (5.32), а при $kh \ll 1$ – с корнями уравнения $H_\nu^{(1)}(ka) = 0$. В таблице приведены значения корней ν_s/ka указанных типов, рассчитанные для фиксированных значений радиуса и толщины оболочки при изменении частоты падающей волны. Для всех типов корней в таблице приведены значения лишь первого корня, наиболее близко лежащего к вещественной оси и определяющего периферические волны, обладающие наименьшим затуханием при распространении вокруг цилиндра.

Наиболее интересные явления возникают за счет волн, соответствующих вычетам в полюсах 3-го типа. Положение этих полюсов существенно зависит от волновой толщины оболочки. При волновой толщине $kh \approx 1$ вещественная часть корня 3-го типа приблизительно равна волновому радиусу ka и вещественной части корня типа Франца. Однако мнимая часть этого корня значительно меньше мнимой части корня типа Франца. При $kh \approx 1$ скорость изгибных волн в оболочке становится сравнимой со скоростью звука в воде и в окружающей среде вблизи оболочки. При этом возникают периферические слабо затухающие волны, обусловленные изгибными колебаниями ее поверхности. Как будет показано ниже, именно периферические волны, вызванные изгибными колебаниями в оболочке, вносят основной вклад в поле в области геометрической тени.

Будем называть корень 3-го типа корнем *изгибного типа*. На рис. 5.4 показано, что корень этого типа лежит вблизи вещественной оси (он обозначен кружком). Взаимное расположение корней на рис. 5.4 показано

для случая $kh \approx 1$. С увеличением волновой толщины оболочки вещественные части корней 2-го и 3-го типов сближаются, а мнимая часть корня 3-го типа резко возрастает. Это связано с тем, что при увеличении волновой толщины возрастает скорость изгибной волны в оболочке. Значение $kh \approx 1$ соответствует критической частоте, при которой скорость изгибной волны в стальной пластине равна скорости звука в воде. При $kh > > 1$ скорость изгибной волны превышает скорость звука в воде. В результате сильно увеличивается излучение оболочки и возбуждающаяся в ней волна быстро теряет свою энергию при распространении.

При уменьшении волновой трещины ($kh < 0{,}8$) корень изгибного типа остается вблизи вещественной оси, а его вещественная часть резко возрастает, что определяется уменьшением скорости распространяющейся изгибной волны. Для того чтобы показать, что корень 3-го типа действительно соответствует изгибной волне, вычислим скорость изгибной волны в пластине, которая, например, при $f = 150$ кГц будет $c_и = = \omega^2 Eh^2/[12\rho_M(1-\sigma^2)]^{1/4} = 0{,}87 \cdot 10^3$ м/с. Взяв значение вещественной части корня 3-го типа из табл. 5.1 при этой частоте, получим $k_и a/(ka) = 1{,}82$, т. е. $c/c_и = 1{,}82$, или $c_и = 0{,}83 \cdot 10^3$ м/с, что весьма близко к скорости изгибной волны. Небольшое уменьшение скорости по сравнению со скоростью в пластине объясняется влиянием соколеблющейся (присоединенной) массы среды на скорость изгибной волны в оболочке.

Таким образом, в диапазоне волновых толщин $kh \approx 0{,}8 \ldots 1{,}2$ одновременно выполняются два условия: вещественные части корней 2-го и 3-го типов близки друг к другу, а мнимая часть у корня изгибного типа значительно меньше. Это и определяет в указанном диапазоне kh весьма существенный вклад периферической волны, обусловленной изгибными колебаниями оболочки, в поле в области геометрической тени. Приближенная оценка амплитуды поля в области тени показывает, что при $kh \ll 1$ отношение амплитуд волн, соответствующих корням 3-го и 2-го типов, пропорционально $|\nu_s|^{-3}$. Поэтому при небольших волновых трещинах, несмотря на малое затухание распространяющихся изгибных волн, их амплитуда значительно меньше амплитуды волн типа Франца. В этом диапазоне волновых толщин изгибные колебания оболочки практически не сказываются и амплитуда поля в области геометрической тени в основном такая же, как и при рассеянии на акустически мягком цилиндре.

При возрастании волновой толщины оболочки ($kh \approx 0{,}8 \ldots 1{,}2$) амплитуды возбуждения волн изгибного типа и типа Франца становятся примерно одинаковыми, так как модули корней 2-го и 3-го типов становятся близки друг к другу. В этом случае оценка амплитуды поля в области геометрической тени может быть сделана при сравнении экспоненциальных множителей $\exp(i\nu_s\varphi)$. Поскольку мнимая часть корня изгибного типа существенно меньше мнимой части корня типа Франца, то периферические волны, соответствующие корню изгибного типа, затухают значительно слабее при распространении вокруг оболочки.

Сравнив экспоненциальные множители при $kh \approx 1$, получим, что амплитуда волны, огибающей поверхность акустически жесткого цилиндра ($ka = 50$), примерно на 25 дБ меньше амплитуды поля, связанного с колебаниями изгиба. Примерно такое же соотношение следует и из рис. 5.3. Следовательно, основной вклад в поле в области геометрической тени вносит периферическая волна, вызванная изгибными колебаниями оболочки.

При дальнейшем возрастании волновой толщины оболочки ($kh > 1$) амплитуды возбуждения волн различных типов остаются примерно одинаковыми, а экспоненциальные множители, вычисленные в полюсах 3-го типа, убывают. Поэтому относительный вклад волны, соответствующий корню 3-го типа, уменьшается и при $kh > 1{,}3$ оболочка ведет себя подобно акустически жесткому цилиндру.

На рис. 5.5 приведены фотографии поля, рассеянного упругой оболочкой, полученные на установке для визуализации звуковых полей методом Теплера. Для опыта были взяты два стальных заполненных воздухом цилиндра с наружным диаметром 50 мм. Один из них имел толщину стенки 0,5, а другой – 2 мм. На цилиндрические оболочки падала плоская звуковая волна. Максимальная амплитуда поля в области геометрической тени для цилиндра с толщиной стенок 0,5 мм достигалась на частоте $f = 540$ кГц ($ka = 50$), что соответствует значению волновой толщины $kh = 1$. Визуализация поля для обоих цилиндров проведена на одной и той же частоте.

Периодическое чередование светлых и темных полос в области тени (см. рис. 5.5, *а*) представляет собой результат интерференции периферических волн, распространяющихся вокруг оболочки в направлении по часовой стрелке и против нее, максимумы поля (светлые полосы) соответствуют синфазному, а минимумы – противофазному сложению периферических волн. Измеряя расстояние между полосами, можно определить скорость периферических волн. Она составляет в данном примере $1{,}41 \cdot 10^3$ м/с, что соответствует расчетному значению скорости изгибных волн в пластине с учетом влияния жидкости на их распространение.

Фотометрирование негативов показало, что амплитуда поля в области тени при возбуждении периферической волны была всего лишь на 3 дБ меньше уровня в падающей волне. При волновой толщине $kh > 1$ (рис. 5.5, *б*) на той же частоте за оболочкой с толщиной стенки 2 мм наблюдается глубокая тень, такая же, как и при рассеянии на акустически жестком цилиндре. Возбуждение периферических волн различных типов при отражении звука в направлении, обратном направлению падающей звуковой волны, исследовано в работах [13, 14].

5.2.2. Сплошной упругий цилиндр. Дифракция звука на сплошном упругом цилиндре описывается выражением (27.7) работы [63]. Заметим, что выражение (27.7) совпадает с формулой (5.10) с точностью до постоянных величин, вынесенных в качестве множителей в формулу (5.3); однако в качестве $Z_{\text{вх}}$ надо использовать значения модовых импедансов, определяемых формулой (27.8). Поэтому преобразование

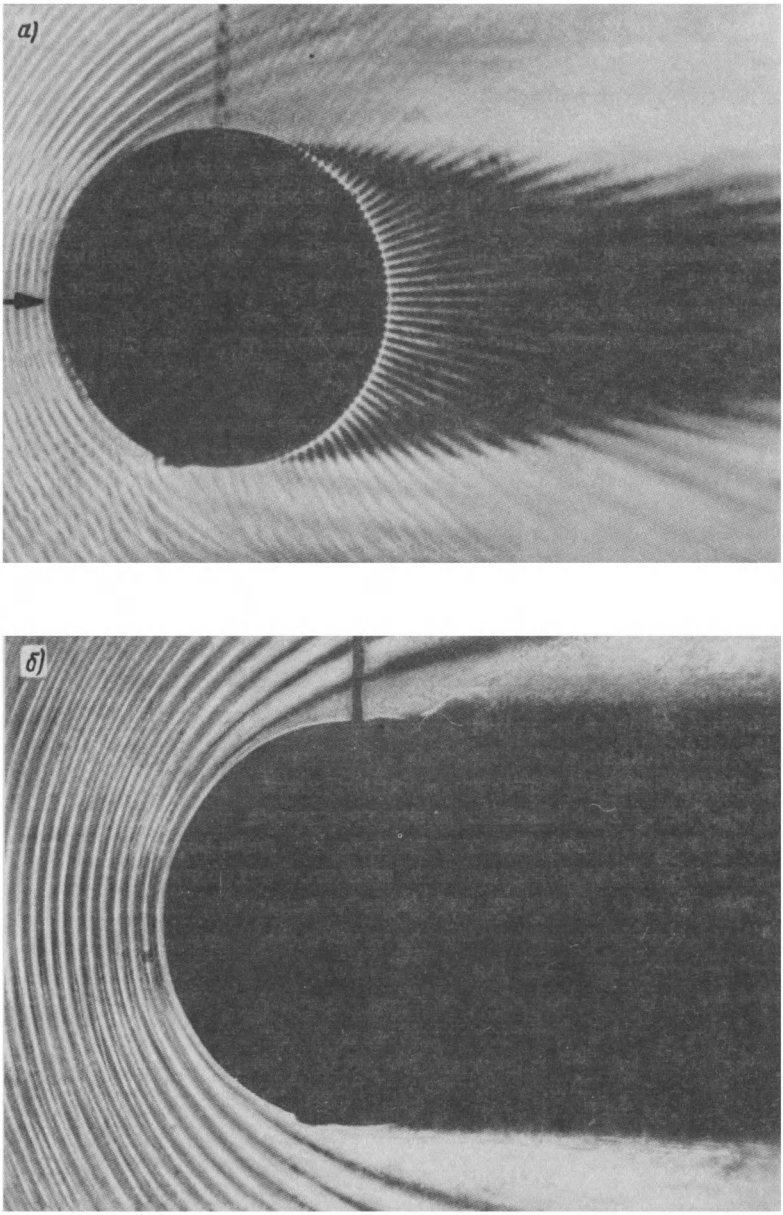


Рис. 5.5. Фотографии звукового поля при дифракции на цилиндрической оболочке: *а* – возбуждение периферических волн в зоне тени; *б* – периферические волны отсутствуют

Ватсона снова приводит к необходимости решать уравнение (5.33) относительно ν. Результаты решения этого уравнения на комплексной плоскости $\nu/(ka)$ для сплошного алюминиевого цилиндра в воде при $ka = 100$ показаны на рис. 5.6. Аналогичные результаты опубликованы в работах [91, 98].

Каждый из полюсов, показанных на рисунке, соответствует какой-либо периферической волне вида $\exp(\pm i\nu_s\varphi)$, распространяющейся вокруг цилиндра.

Для того чтобы понять закономерности, связанные с расположением этих полюсов, рассмотрим типы волн, распространяющихся внутри цилиндра, а также вблизи его поверхности. Внутри цилиндра могут распространяться продольные и сдвиговые волны с волновыми числами k_l и k_t соответственно. Отношения этих волновых чисел к волновому числу в воде (k_l/k и k_t/k) нанесены на горизонтальной оси и обозначены буквами l и t. Вблизи поверхности раздела могут существовать также поверхностные волны. Анализ уравнения для скоростей волн вблизи плоской поверхности раздела упругое полупространство – жидкость показывает, что вблизи границы возможно существование двух типов поверхностных волн. Одна из них распространяется в упругой среде со скоростью, близкой к скорости волн Рэлея для границы раздела упругой среды и вакуума. Наличие жидкости со скоростью распространения, меньшей скорости этих волн, приводит к тому, что появляется излучение звука в среду, в результате чего волна теряет энергию и затухает.

Таким образом, волновое число для этой волны (k_R) должно быть комплексной величиной. Отношение k_R/k для плоской поверхности раздела обозначено на рис. 5.6 как R_∞. Эта точка лежит немного правее точки, определяющей волновое число волн сдвига, так как скорость волны Рэлея несколько меньше скорости этих волн. Основная часть энергии этих волн распространяется в самом теле, а меньшая часть – в окружающей жидкости.

Вторая поверхностная волна (*волна Стоунли*) распространяется в жидкости вблизи поверхности примерно так же, как поверхностная волна вблизи границы, обладающей импедансом гибкости. Основная энергия этой волны движется по жидкости, а меньшая – по упругому телу. Скорость этой волны несколько меньше скорости волн в жидкости. Поэтому при плоской границе раздела такая волна распространяется без излучения энергии в дальнее поле. Точка на рис. 5.6, соответствующая этой волне для плоской границы, обозначена как S_∞. Она лежит немного правее точки $\nu/(ka) = 1$. Если граница является изогнутой, то появляется излучение в дальнее поле, что соответствует смещению

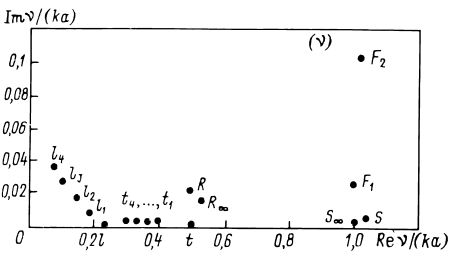


Рис. 5.6. Расположение полюсов на комплексной плоскости для сплошного алюминиевого цилиндра в воде

полюса вверх с вещественной оси (точка S). Кроме того, в случае изогнутой поверхности вместо одного полюса, соответствующего продольной волне, появляется серия полюсов l_1, l_2, ... и аналогичная серия для поперечных волн – t_1, t_2, ... Эти полюса уже не лежат на вещественной оси из-за излучения энергии в окружающую среду.

Для цилиндра больших волновых размеров распространение этих волн можно пояснить геометрооптическим способом (рис. 5.7, *а*). Звуковые лучи входят внутрь цилиндра по касательным (на внутренней стороне поверхности), причем точки входа B, B_1 определяются критическим углом падения звука

$$\theta_n = \arcsin\,(c/c_n), \tag{5.34}$$

где c_n – скорость волны, соответствующая какому-либо полюсу ν_n, причем $c_n = \omega a/\,\mathrm{Re}\,\nu_n$.

Эти лучи многократно отражаются от внутренней поверхности и образуют волны *„шепчущей галереи"*. Теория распространения этих волн для цилиндра, находящегося в вакууме, приведена в работе [9]. При распространении вдоль поверхности эти волны излучают звук во внешнее пространство и постепенно затухают. Степень затухания определяется мнимой частью $\dot{\nu}_n$ по закону $\exp(-\mathrm{Im}\,\dot{\nu}_n\varphi)$. Лучи выходят из цилиндра в точках C и C_1, для которых снова удовлетворяется условие (5.34). Пути $ABCM$ и AB_1C_1M удовлетворяют условию Ферма, согласно которому луч распространяется по траектории, обеспечивающей минимальное время распространения (относительно других соседних траекторий). В силу того, что скорость распространения упругих волн в материале больше скорости в окружающей среде (т. е. полюсы l_1 и t_1 лежат слева от точки $\mathrm{Re}\,\nu/(ka) = 1$), распространение луча по траектории $ABCM$ на рис. 5.7, *а* занимает меньшее время, чем распространение по более короткой траектории $ABCM$ на рис. 5.7, *б*, образованной касательными лучами.

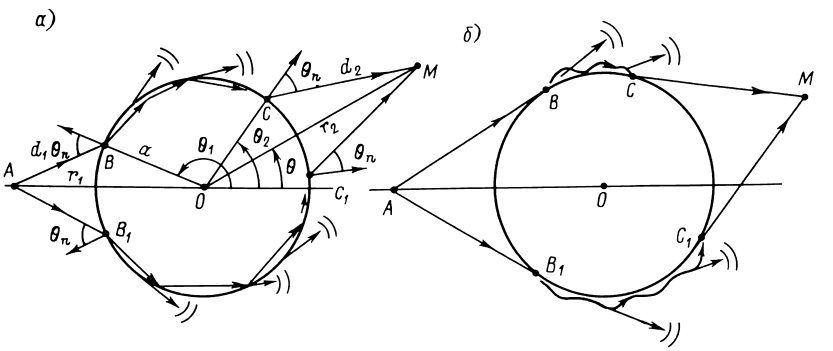


Рис. 5.7. Распространение периферических волн вокруг упругого цилиндра: *а* – волны „шепчущей галереи"; *б* – поверхностные волны в среде, а также волны типа Франца

Для того чтобы это показать, вычислим время распространения звука вдоль траектории $ABCM$ (см. рис. 5.7, *а*). Будем считать, что скорости волн на участках d_1 и d_2 равны c, а на дуге $BC - c_n$. Тогда время распространения определяется суммой $\tau = (d_1 + d_2)/c + a(\theta_1 - \theta_2)/c_n$, где $d_1 = (r_1^2 + a^2 + 2r_1 a \cos\theta_1)^{1/2}$; $d_2 = [r_2^2 + a^2 - 2r_2 a \cos(\theta_2 - \theta)]^{1/2}$. Условия минимума времени распространения будут $\partial\tau/\partial\theta_1 = 0$; $\partial\tau/\partial\theta_2 = 0$ или

$$\frac{r_1 \sin\theta_1}{d_1} - \frac{c}{c_n} = 0; \quad \frac{r_2 \sin(\theta_2 - \theta)}{d_2} - \frac{c}{c_n} = 0.$$

При $c_n > c$ эти соотношения справедливы для таких точек на поверхности, где углы θ_n падения и выхода луча удовлетворяют условию $\sin\theta_n = c/c_n$. Действительно, в этом случае последние уравнения можно записать в виде соотношений

$$\frac{\sin(\pi - \theta_1)}{d_1} = \frac{\sin(\pi - \theta_n)}{r_1}; \quad \frac{\sin(\theta_2 - \theta)}{d_2} = \frac{\sin(\pi - \theta_n)}{r_2},$$

справедливость которых вытекает непосредственно из теоремы синусов, примененной к треугольникам ABO и CMO.

Аналогичная ситуация имеет место и для полюса R, соответствующего волнам Рэлея и имеющим скорость большую, чем скорость звука в окружающей среде.

На рис. 5.6 показаны также полюса F_n, соответствующие волнам Франца, огибающим цилиндры по среде. Соотношения, определяющие скорости этих волн, приведены в работе [63]. Полюса, описывающие волны Франца, находятся немного правее точки $\mathrm{Re}\,\nu/(ka) = 1$. Поэтому скорости этих волн несколько меньше скорости волн в среде. Это означает, что траектории, обладающие свойством минимального времени распространения относительно соседних траекторий, будут состоять из участков, расположенных касательно к поверхности, как показано на рис. 5.7, *б*. Аналогичным образом распространяются и поверхностные волны (типа Стоунли). Мнимые части $\mathrm{Im}\,\nu/(ka)$ для полюсов, определяющих волны Франца, значительно больше, чем для полюсов, соответствующих волнам, распространяющимся в материале, а также поверхностным волнам. Поэтому волны типа Франца затухают при распространении вокруг цилиндра гораздо быстрее, чем волны других типов.

5.3. Образование каустик при взаимодействии звука с оболочками

При взаимодействии звука с упругой оболочкой во внутренней области могут возникать линии усиления звука (каустики). В работах [58, 115] было показано, что в ряде случаев внутри оболочки возникают

каустики, обусловленные излучением звука при распространении изгибных и продольных волн по оболочке в периферическом направлении. Кроме того, могут существовать каустики, обусловленные интерференцией лучей, отраженных от внутренней поверхности оболочки, а также волны типа „шепчущей галереи", дающие концентрацию энергии вблизи вогнутой поверхности. Рассмотрим картины звукового поля, возникающие в подобных ситуациях.

5.3.1. Каустика, возникающая в результате излучения изгибных и продольных волн в оболочке. При падении плоской звуковой волны на тонкую оболочку, заполненную средой с теми же параметрами, что и внешняя среда, внутри оболочки звуковое давление описывается следующим выражением, которое следует из формулы (40.12б) работы [63] при $\mu_1 = \mu_2 = \mu, \rho_1 c_1 = \rho_2 c_2 = \rho c$:

$$p(r, \varphi) = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n i^n J_n(kr) \cos(n(\theta - \pi))}{1/(\pi\mu) + H_n^{(1)\prime}(\mu) J_n'(\mu) Z_n/(2\rho c)}, \qquad (5.35)$$

где Z_n – по-прежнему механический импеданс оболочки для формы колебаний с номером n, $\mu = ka$.

Применим к выражению (5.35) преобразование Ватсона

$$p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\theta) = \frac{i}{2} \int_{\Gamma} \frac{\exp(i\beta(\theta - \pi))}{\sin(\pi\beta)} a(\beta) d\beta,$$

где

$$a(\beta) = -\frac{J_\beta(kr)}{\pi\mu [1/(\pi\mu) + H_\beta^{(1)\prime}(\mu) J_\beta'(\mu) Z_\beta/(2\rho c)]}.$$

Контур интегрирования Г охватывает вещественную ось. Последний интеграл преобразуется в интеграл по контуру, проходящему над вещественной осью:

$$p = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\beta(\theta - \pi)) \exp(-i\pi\beta/2)}{\sin(\pi\beta)} a(\beta) d\beta. \qquad (5.36)$$

Деформируем далее контур интегрирования так, чтобы он охватывал полюса функции $a(\beta)$, и замкнем его в верхней полуплоскости [можно показать, что при $|\beta| \to \infty$ и $\operatorname{Im}\beta > 0$ подынтегральная функция в выражении (5.36) убывает]. Значение интеграла (5.36) тогда будет определяться вычетами в полюсах, соответствующих корням уравнения

$$\frac{Z_\beta}{2\rho c} H_\beta^{(1)\prime}(\mu) J_\beta'(\mu) + \frac{1}{\pi\mu} = 0. \qquad (5.37)$$

Это уравнение на комплексной плоскости β имеет бесконечное множество корней, которые можно разделить на несколько групп. В первую группу входят корни, лежащие вблизи корней уравнения (5.32). Эти корни близки к корням Франца, описывающим дифракцию на акустически жестком цилиндре. Соответствующие этим полюсам волны близки к волнам Франца, огибающим цилиндр снаружи. В силу конечной упругости оболочки они будут создавать звуковое поле и внутри оболочки. Кроме того, имеется корень, который при $\mu \gg 1$ и $Z_\beta > \rho c$ приблизительно описывается уравнением $Z_\beta(\mu) \approx 0$. Этот случай реализуется лишь для упругой оболочки. Вещественную часть этого корня можно приближенно найти, приравняв нулю механический импеданс колебаний цилиндрической оболочки $Z_\beta(\mu)$, рассматриваемый как функция индекса β. Возьмем выражение (40.13) из работы [63] (с учетом поправки, приведенной в п. 5.2), заменим n на β, приравняем нулю и решим это уравнение относительно параметра $\mu_{\text{пр}} = \omega a/c_{\text{пр}}$, где $c_{\text{пр}} = \sqrt{E_1/\rho_M}$ – скорость продольной волны в пластине, $E_1 = E/(1-\nu^2)$ – модуль упругости тонкой пластины, ν – коэффициент Пуассона. Приближенная оценка в области $|\beta| \gg 1$ дает два решения: $\mu_{\text{пр}} \approx \beta$ и $\mu_{\text{пр}} \approx (h/a)\beta^2/\sqrt{12}$. Два соответствующих значения (обозначим их через $\beta_{\text{пр}}$ и $\beta_{\text{и}}$) определятся в виде $\beta_{\text{пр}} \approx \omega a/c_{\text{пр}}$, $\beta_{\text{и}} = \omega a/c_{\text{и}}$, где $c_{\text{и}}$ – скорость изгибной волны в тонкой пластине.

Исследование положений корней уравнения (5.33), близкого к уравнению (5.37) и возникающего в случае пустой внутри оболочки, показывает, что мнимая часть $\beta_{\text{и}}''$ полюса ($\beta_{\text{и}} \approx k_{\text{и}}a + i\beta_{\text{и}}''$), определяющая затухание волны при распространении вокруг оболочки в диапазоне волновых толщин оболочки $kh = 0{,}8 \ldots 1{,}3$ для волн изгибного типа, много меньше, чем мнимая часть корня, соответствующая волне типа Франца. Поэтому поле в области геометрической тени оболочки может в ряде случаев полностью определяться вкладом волн изгибного типа. Аналогичное положение имеет место и для оболочки, заполненной средой. Если эффективно возбудились волны изгибного или продольного типа, то затухание этих волн при распространении вокруг оболочки оказывается малым и они создают основную часть звукового поля внутри оболочки.

Ниже приводится преобразование для корня, соответствующего изгибным колебаниям оболочки. Вклад волны, связанной с продольными колебаниями оболочки, рассматривается аналогично.

Взяв вычет в полюсе $\beta_{\text{и}}$, получим вклад волны изгибного типа:

$$p_{\text{и}} = -\frac{2}{\mu} \frac{J_{\beta_{\text{и}}}(kr)}{\dfrac{\partial}{\partial\beta}\left[\dfrac{Z_\beta}{2\rho c} H_\beta^{(1)\prime}(\mu) J_\beta'(\mu)\right]\Big|_{\beta=\beta_{\text{и}}}} \frac{\cos(\beta_{\text{и}}(\theta-\pi))}{\sin(\pi\beta_{\text{и}})} \exp(-i\pi\beta_{\text{и}}/2)$$

Используя преобразование

$$\frac{\cos[\beta(\theta-\pi)]}{\sin(\pi\beta)} \exp(-i\pi\beta/2) = -i \frac{\exp[i\beta(\theta-\pi/2)] + \exp[i\beta(3\pi/2-\theta)]}{1-\exp(i2\pi\beta)}$$

и представляя выражение $[1-\exp(i2\pi\rho)]^{-1}$ в виде суммы геометрической прогрессии, получим

$$p_{\text{и}} = \frac{2i}{\pi} \frac{J_{\beta_{\text{и}}}(kr)}{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{Z_\beta}{2\rho c} H_\beta^{(1)\prime}(\mu) J_\beta'(\mu)\right]\Big|_{\beta=\beta_{\text{и}}}} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{\exp\left[i\beta_{\text{и}}(\theta-\pi/2+2\pi m)\right] + \exp\left[i\beta_{\text{и}}(3\pi/2-\theta+2\pi m)\right]\right\}. \quad (5.38)$$

Из выражения (5.38) видно, что вклад, вносимый в поле излучения изгибной волной, распространяющейся по оболочке, можно интерпретировать как сумму звуковых волн, распространяющихся внутри оболочки по часовой стрелке и против нее. К волнам, сделавшим один оборот, добавляются волны, сделавшие 2, 3, 4, ... оборота.

Для качественного анализа ограничимся рассмотрением радиального распределения звукового давления внутри оболочки. Поскольку $\operatorname{Re}\beta_{\text{и}} \gg 1$ и $kr \gg 1$, то функцию Бесселя в числителе формулы (5.38) можно выразить через функцию Эйри [55]

$$J_\beta(kr) = \frac{1}{u\sqrt{\pi}}\left[v(t) - \frac{1}{60u^2}(t^2 v'(t) + 4t v(t)) + \ldots\right], \quad (5.39)$$

где $u = (kr/2)^{1/3}$; $t = (\beta - kr)/u$;

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\xi^3}{3} + \xi t\right) d\xi - \quad (5.40)$$

функция Эйри. При $t > 0$ имеют место асимптотические разложения по обратным степеням величины $x = \frac{2}{3} t^{3/2}$

$$v(t) = \frac{t^{-1/4}}{2} e^{-x}\left(1 - \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} - \ldots\right);$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2} t^{1/4} e^{-x}\left(1 + \frac{b_1}{x} - \frac{b_2}{x^2} + \ldots\right),$$

а при $t < 0$

$$v(-t) = t^{-1/4}\left[\sin(x+\pi/4)\left(1 - \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right) - \cos(x+\pi/4)\left(\frac{a_1}{x} - \frac{a_3}{x^3} + \ldots\right)\right];$$

$$v'(-t) = t^{1/4}\left[-\cos(x+\pi/4)\left(1 + \frac{b_2}{x^2} - \ldots\right) + \sin(x+\pi/4)\left(\frac{b_1}{x} - \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right)\right].$$

Коэффициенты a_n, b_n определяются выражениями

$$a_1 = 5/72;\ a_n = \frac{[5 \cdot 11 \ldots (6n-1)]\,[7 \cdot 13 \ldots (6n-5)]}{n!\ 72^n};$$

$$b_1 = 7/72;\ b_n = \frac{[5 \cdot 11 \ldots (6_n - 7)]\,[7 \cdot 13 \ldots (6n+1)]}{n!\ 72^n}.$$

Свойства функций Эйри и таблицы значений приведены в работе [55]. Из приведенных выражений следует, что при $t < 0$ функция Эйри осциллирует, а при $t > 0$ – экспоненциально убывает. Таким образом, при $kr > k_и a$ амплитуда поля осциллирует, а при $kr < k_и a$ – быстро уменьшается. Это свидетельствует о том, что поле сосредоточено в основном в области $r > k_и a/k$, а внутри этой области оно практически отсутствует. Максимальное значение амплитуды наблюдается вблизи окружности радиусом $r = ac/c_и$. Эта окружность и является каустикой, на которой происходит усиление звука. Рассматривая таким же способом вклад другого корня, соответствующего волне продольного типа, получим, что кроме каустики, обусловленной излучением изгибных волн внутри оболочки, создается каустика за счет излучения продольных волн. Ее радиус определяется соотношением $r = ac/c_{пр}$.

На рис. 5.8 приведена фотография звукового поля внутри упругой цилиндрической оболочки, полученная при помощи визуализации звука методом Теплера ($f = 800$ кГц, $h = 0{,}05$ см, $2a = 15$ см). Видны две каустики звукового поля, возникающие при распространении по оболочке изгибных и продольных волн. В работе [115], где впервые была приведена подобная фотография, дана простая геометрическая интерпретация этого явления. Эффективное излучение звука пластиной при распространении по ней волны со скоростью c_1 происходит в направлении, определяемом углом $\theta = \arcsin(c/c_1)$ к нормали. Если волна бежит по изогнутой оболочке, то направление излучения составляет с нормалью к оболочке такой же угол в любой точке области. Поэтому огибающая семейства лучей внутри оболочки есть окружность. Внутрь этой окружности лучи не попадают, а вне ее – интерферируют и создают чередование максимумов и минимумов звукового давления.

5.3.2. Каустика, возникающая при геометрооптическом отражении. Другой тип каустики образуется при интерференции лучей, отраженных от поверхности оболочки и имеющих близкие длины хода (рис. 5.9). Общий подход к вычислению волновых полей вблизи каустик изложен в книге [8], где исследовались поля в области каустики, возникающих при полном внутреннем отражении и при рефракции в неоднородной среде. Для расчета поля вблизи каустик может быть применен метод стационарной фазы. Однако поскольку на каустике обращается в нуль не только первая, но и вторая производная фазовой функции, необходимо в этом случае в степенном разложении фазовой функции учитывать

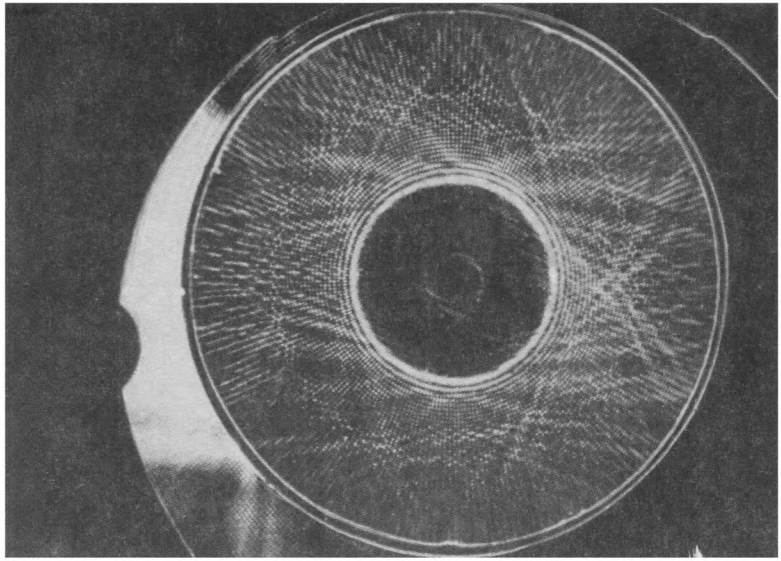


Рис. 5.8. Каустики, возникающие из-за излучения изгибных и продольных волн, распространяющихся по оболочке

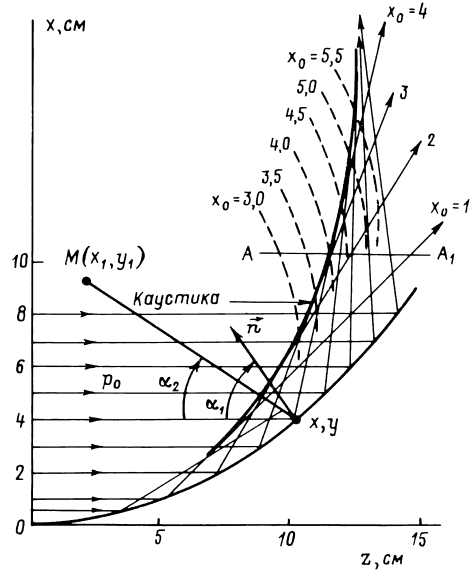


Рис. 5.9. Образование геометрооптической каустики

член третьего порядка. Пусть на оболочку (см. рис. 5.9) падает плоская звуковая волна $p_0 = \exp(ikz)$. В приближении Кирхгофа для отраженного поля p_r в точке $M(x_1, z_1)$ можно записать следующее выражение:

$$p_r = \frac{i}{4} \int_l \left. \frac{\partial p_0}{\partial n} \right|_l A(\alpha_1) H_0^{(1)}(kr)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\, dl,$$

где $A(\alpha_1)$ – коэффициент отражения звука.

При $kr \gg 1$, взяв асимптотику функции Ханкеля и учитывая, что $dl = dx/\cos\alpha_1$, получим

$$p_r \approx -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2k}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\alpha_1)}{\sqrt{r}} \exp(if(x)) \left(1 + \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\right) dx. \qquad (5.41)$$

Фазовая функция в интеграле (5.41) равна

$$f(x) = k[\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + z(x)].$$

Разложим эту функцию в степенной ряд вблизи некоторой точки x_0, сохранив члены до третьего порядка включительно:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Если точка x_0 выбрана таким образом, что $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то мы имеем приближение обычного метода стационарной фазы. На каустике выполняются одновременно два условия:

$$f'(x_0) = 0; \quad f''(x_0) = 0. \qquad (5.42)$$

Исключая из этих уравнений x_0, можно найти уравнение каустики $F(x_1, z_1)$. Значение x_0 будет играть роль параметра, определяющего положение точки на каустике. Зададим на каустике точку, соответствующую параметру x_0, и найдем распределение поля вблизи каустики вдоль кривой, на которой выполняется второе условие (5.42). (Естественно, что на этой кривой во всех точках, за исключением точек пересечения ее с каустикой, данное условие выполняться не будет). Вынося медленно изменяющиеся амплитудные множители за знак интеграла, преобразуем выражение (5.41) следующим образом:

$$p_r \approx -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2k}{\pi r_0}}\left[1 + \frac{\cos[\alpha_2(x_0)]}{\cos[\alpha_1(x_0)]}\right] A[\alpha_1(x_0)] \exp[if(x_0)] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ i[f'(x_0)(x - x_0) + f'''(x_0)(x - x_0)^3/6] \right\} dx,$$

где $r_0 = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + [z(x_0) - z_1]^2}$. Мнимая часть интеграла в силу симметрии промежутка интегрирования равна нулю, а вещественная часть заменой $\xi = [f'''(x_0)/2]^{1/3}(x - x_0)$ сводится к интегралу Эйри (5.40). Обозначив $t = f'(x_0)(2/f'''(x_0))^{1/3}$ и приняв приближенно $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$, получим

$$p_r \approx -\sqrt{\frac{2k}{r_0}} A(\alpha) \exp(if(x_0)) \left(\frac{2}{f'''(x_0)}\right)^{1/3} v(t). \qquad (5.43)$$

Таким образом, распределение поля вблизи каустики подчинено закону изменения функции Эйри от параметра t, зависящего от $f'(x_0)$. На самой каустике $f'(x_0) = 0$, слева от нее $f'(x_0) > 0$, а справа $-f'(x_0) < 0$. Поэтому справа от каустики поле осциллирует, а слева – быстро убывает.

Производные фазовой функции $f''(x_0)$ и $f'''(x_0)$ являются довольно громоздкими выражениями и написать уравнения каустики в аналитическом виде, решив совместно уравнения (5.42) относительно x_0, невозможно. Поэтому применим следующий способ. Задавая параметр x_0, построим семейство лучей, удовлетворяющих уравнение $f'(x_0) = 0$, т. е. лучей, отраженных по законам геометрической оптики (сплошные линии $x_0 = 1, 2, 3, \ldots$ на рис. 5.9). Затем построим при различных x_0 семейство кривых, на которых $f''(x_0) = 0$ (штриховые линии на рис. 5.9). Точки пересечения этих кривых с соответствующими лучами будут являться точками каустики. Переходя с одной такой кривой на другую, т. е. изменяя одновременно x_0 и z_1, можно получить распределение звукового давления вдоль любых других линий.

Таким способом рассчитано распределение звукового давления вдоль линии AA_1 (см. рис. 5.9) в окрестности каустики для сечения $x =$ $= 10{,}5$ см (рис. 5.10). Оболочка имела форму параболы $z = 5\sqrt{x}$ см, $f = 500$ кГц. По вертикальной оси отложена амплитуда звукового давления в отраженной волне, отнесенная к амплитуде звукового давления в падающей волне. Видно, что характер распределения определяется поведением функции Эйри. При приближении к каустике звуковое давление резко возрастает, а после ее пересечения – осциллирует. Максимальное значение звукового давления наблюдается не на самой каустике ($z = 11,4$ см), а вблизи нее ($z = 11,7$ см), поскольку функция Эйри имеет максимум не при $t = 0$, а при $t = -1{,}02$. Вблизи каустики амплитуда звукового давления в отраженной волне в 2,5 раза превышает амплитуду в падающей волне.

Фотография звукового поля, отраженного от вогнутой поверхности (рис. 5.11), получена так же, как и другие приведенные здесь фотографии, при помощи визуализации звука методом Теплера. Плоская звуковая волна падает на поверхность слева. В результате отражения создается яркая каустика, слева от нее звукового поля практически нет, а справа поле носит осциллирующий характер, обусловленный интерференцией между отраженными лучами.

Результаты расчета были проверены экспериментально при помощи количественного фотометрического анализа звуковых полей, визуализируемых теневым оптическим методом [57, 58]. Экспериментальная фотограмма звукового поля (см. рис. 5.10) в окрестности каустики хорошо совпадает с теоретической кривой.

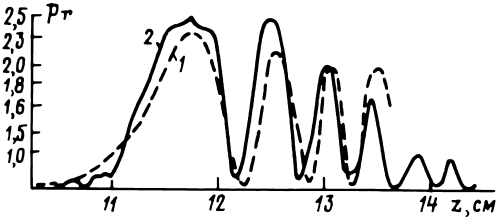


Рис. 5.10. Распределение амплитуды звукового давления в окрестности каустики в сечении AA_1 на рис. 5.9

1, 2 – расчетная и экспериментальная кривые соответственно

5.3.3. Каустика типа „шепчущей галереи". Рассмотрим еще один тип каустики, возникающий вследствие удержания звуковых волн вблизи криволинейной границы в результате ее кривизны. Это явление, известное под названием эффекта „шепчущей галереи", впервые было объяснено Рэлеем в работе [48]. Волны „шепчущей галереи" можно сопоставить со звуковыми лучами, распространяющимися вдоль криволинейной поверхности и испытывающими последовательные отражения от нее. Поэтому форма возникающих при этом каустик будет определяться формой отражающей поверхности.

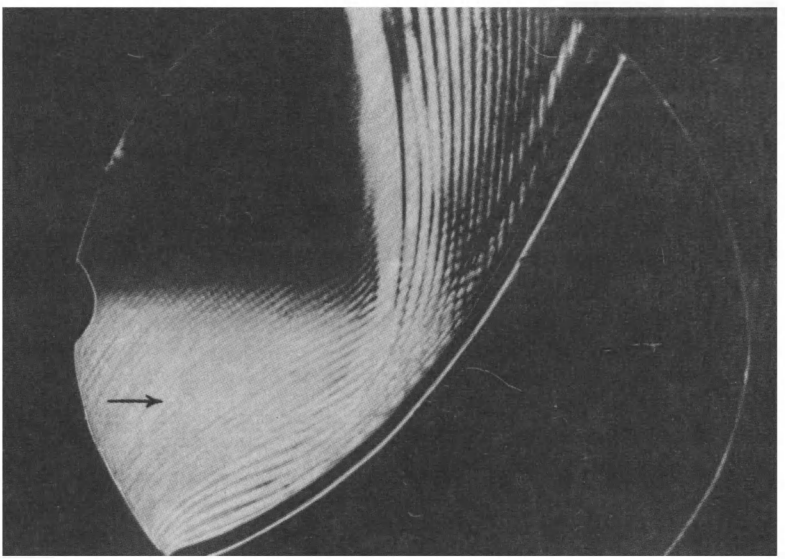


Рис. 5.11. Фотография звукового поля, отраженного от вогнутой поверхности (форма и размеры ее даны на рис. 5.9)

Для упругого тела такие волны описаны в работе [8]. Круговая каустика вблизи внутренней поверхности цилиндрической оболочки хорошо видна на фотографии звукового поля (рис. 5.12). Диаметр оболочки 20 см, частота 500 кГц. Звук проходит через малое отверстие в оболочке (отверстие на фотографии не видно) и падает на внутреннюю поверхность оболочки под углом скольжения $\alpha = 20^\circ$. Из геометрических представлений следует, что концентрация звукового поля происходит в поверхностном слое толщиной порядка $\Delta r = a(1 - \cos\alpha)$. Для рассматриваемого примера звуковое поле сосредоточено в пограничном слое толщиной 0,5 см. Заметим, что при касательном падении звука на оболочку при $\alpha \to 0$ для определения толщины этого слоя уже нельзя пользоваться геометрическими представлениями и необходим учет волновых явлений.

Оценить толщину слоя можно исходя из следующих соображений. Будем считать, что звуковая волна, распространяющаяся вдоль внутренней поверхности, описывается функцией $\exp(ikl) = \exp(ika\theta)$, где $l = a\theta$ – координата, отсчитываемая вдоль поверхности. Поле в цилиндрической области можно также представить в виде суперпозиции функций $J_n(kr)\exp(in\theta)$. Если рассматривать бегущие в азимутальном направлении волны при $ka \gg 1$, то можно отказаться от предположения об однозначности представления поля при обходе на угол, кратный 2π, и считать, что n может быть нецелым числом. Сопоставляя два выражения,

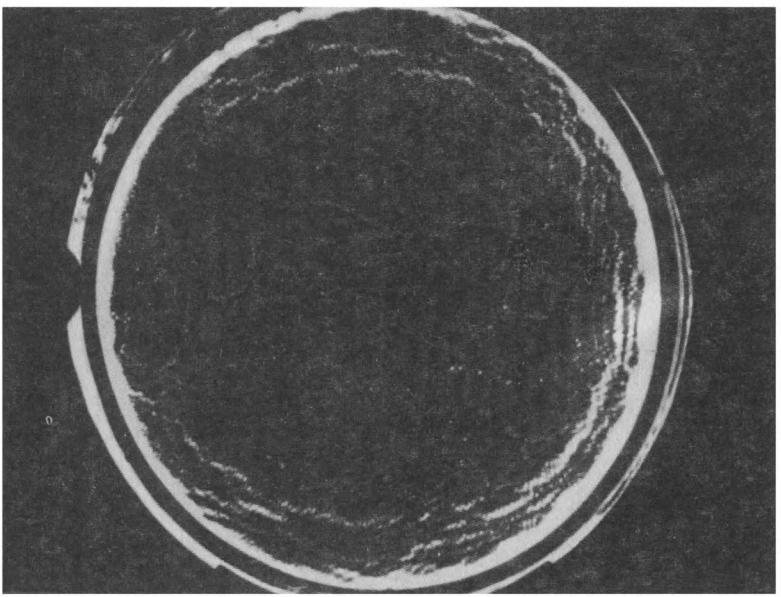


Рис. 5.12. Фотография звукового поля, соответствующего образованию каустики типа „шепчущей галереи" вблизи внутренней поверхности цилиндрической оболочки

получим, что $n = ka$. Поэтому последнее из них можно интерпретировать как бегущую волну вида $J_{ka}(kr)\exp(ika\theta)$.

Таким образом, задав скорость распространения волны вдоль поверхности, мы определили сразу и радиальное распределение звукового давления. Вблизи поверхности $kr \approx ka$, поэтому функцию Бесселя можно представить через функцию Эйри по формуле (5.39). Ограничиваясь первым членом, получим

$$J_{ka}(kr) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} v(t),$$

где $t = (ka - kr)(2/kr)^{1/3}$.

Из таблиц функций Эйри, приведенных в работе [55], следует, что при $t = 0$ (т. е. при $ka = kr$) $v(0) = 0{,}629$. Уменьшение этого значения в e раз происходит при $t \approx 1$, а в e^2 раз – при $t = 1{,}78$. Принимая за толщину слоя уменьшение звукового давления в e раз, получим $k(a - r) = (kr/2)^{1/3}$. Так как $a - r \ll a$, то для толщины слоя получим оценку $\Delta r = a - r \approx (ka/2)^{1/3}/k$. Для картины звукового поля, показанной на рис. 5.12, из этой формулы следует $\Delta r \approx 0{,}5$ см, что в данном частном случае совпадает с геометрооптической оценкой. Однако при $a \to 0$ геометрическая оценка дает $\Delta r \to 0$, в то время как последнее значение, основанное на волновых представлениях, определяет конечную толщину слоя.

5.4. Дифракция и излучение звука тонкой сферической оболочкой

5.4.1. Дифракция сферической звуковой волны на оболочке. Рассмотрим дифракцию звука, излучаемого точечным сферическим источником, на тонкой сферической оболочке. Внутри и вне оболочки находится среда, причем волновые сопротивления равны $w_1 = \rho_1 c_1$ и $w_2 = \rho_2 c_2$ для этих областей соответственно. Будем считать, что источник размещен на оси сферической системы координат, причем следует раздельно рассматривать случаи, когда источник находится вне и внутри оболочки. Имея такие решения, можно применить теорему взаимности [34], связывающую решения задач дифракции и излучения звука. Это дает возможность найти звуковое поле, излучаемое оболочкой под действием приложенных к ней сил, гармонически изменяющихся во времени. Запишем звуковое поле, излучаемое точечным источником, в виде

$$p_0 = -\frac{i k_2 w_2 Q}{4\pi} \frac{\exp(ik_2 r')}{r'}. \qquad (5.44)$$

Здесь Q – объемная колебательная скорость источника; $r' = [r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos(\pi - \theta)]^{1/2}$, где r_1 и r – радиальные координаты источника

и точки наблюдения соответственно; θ – полярный угол точки наблюдения; k_2 – волновое число среды вне оболочки.

Падающую сферическую волну, поле внутри оболочки p_1, дифрагированное поле $p_2^{(s)}$ можно представить в виде разложений

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \frac{k_2^2 w_2 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n j_n(k_2 r_<) h_n^{(1)}(k_2 r_>) P_n(\cos\theta); \\ p_1 &= \frac{k_2^2 w_2 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n A_n j_n(k_1 r_1) P_n(\cos\theta); \\ p_2^{(s)} &= \frac{k_2^2 w_2 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n B_n h_n^{(1)}(k_2 r) P_n(\cos\theta). \end{aligned}\right\} \quad (5.45)$$

Здесь A_n и B_n – неизвестные коэффициенты; $r_<$ и $r_>$ – соответственно наименьшее и наиболшее из значений r и r_1; j_n, $h_n^{(1)}$ – сферические функции Бесселя и Ханкеля.

Полное поле вне оболочки определится суммой $p_2 = p_0 + p_2^{(s)}$. Коэффициенты перед суммами в выражениях для p_1 и $p_2^{(s)}$ введены для нормировки. Радиальную составляющую колебательной скорости оболочки также можно представить в виде разложения

$$v_n = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n(\cos\theta), \quad (5.46)$$

где V_n – амплитуды радиальной составляющей колебательной скорости в соответствующих формах колебаний.

Механические свойства оболочки будем описывать при помощи механических импедансов для различных форм колебаний (модовых импедансов)

$$Z_n = [(p_{1n} - p_{2n})/V_n]\,|_{r=a}, \quad (5.47)$$

где p_{1n} и p_{2n} – составляющие звуковых давлений внутри и вне оболочки в форме колебаний с номером n, причем для источника, находящегося вне оболочки, $p_{2n} = p_0 + p_{2n}^{(s)}$ – полное звуковое давление в этой форме колебаний. Формулы для определения импедансов Z_n приведены в п. 5.5.

Считая, что толщина оболочки много меньше длины волн в среде и в материале оболочки, будем считать, что колебательные скорости внешней и внутренней поверхностей одинаковы. Тогда граничные условия можно записать в виде

$$\frac{1}{i\omega\rho_2} \frac{\partial(p_{0n} + p_{2n}^{(s)})}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{i\omega\rho_1} \frac{\partial p_{1n}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = V_n;$$

$$[p_{1n} - (p_{0n} + p_{2n}^{(s)})]\,|_{r=a} = Z_n V_n.$$

Подставляя в эти условия разложения (5.45), (5.46), получим значения неизвестных коэффициентов

$$A_n = \frac{w_1 h_n^{(1)}(k_2 r_1)}{\mu_2^2 j_n'(\mu_1) h_n^{(1)\prime}(\mu_2)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}; \qquad (5.48)$$

$$B_n = h_n^{(1)}(k_2 r_1)\, G_n,$$

где

$$G_n = -\frac{j_n'(\mu_2)}{h_n^{(1)\prime}(\mu_2)}\left[1 - \frac{w_2}{\mu_2^2 j_n'(\mu_2) h_n^{(1)\prime}(\mu_2)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}\right]. \qquad (5.49)$$

Здесь $\mu_1 = k_1 a$, $\mu_2 = k_2 a$. Величины $Z_{s1} = -iw_1 j_n(\mu_1)/j_n'(\mu_1)$, $Z_{s2} = iw_2 h_n^{(1)}(\mu_2)/h_n^{(1)\prime}(\mu_2)$ – есть импедансы излучения оболочки для внутренней и внешней областей соответственно.

В формуле (5.49) выделено слагаемое, определяющее коэффициенты разложения для акустически жесткой оболочки. Выражения (5.48), (5.49) отличаются от формул (42.13), (42.14) работы [43] множителем $h_n^{(1)}(k_2 r_1)$, соответствующим конечному расстоянию от источника до оболочки [при сравнении этих выражений следует учесть, что в формулах (42.13), (42.14) есть опечатки: знак перед $\rho_2 c_2/\mu_2^2$ должен быть заменен на „+" и $j_n(\mu_1)$ – на $j_n'(\mu_1)$].

Найдем далее звуковое поле сферического источника, помещенного внутрь оболочки. В этом случае вместо выражений (5.45) следует записать

$$p_0 = \frac{k_1^2 w_1 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n j_n(k_1 r_<) h_n^{(1)}(k_1 r_>) P_n(\cos\theta);$$

$$p_1^{(s)} = \frac{k_1^2 w_1 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n D_n j_n(k_1 r) P_n(\cos\theta); \qquad (5.50)$$

$$p_2 = \frac{k_1^2 w_1 Q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n E_n h_n^{(1)}(k_2 r) P_n(\cos\theta).$$

Теперь полное поле внутри оболочки будет $p_1 = p_1^{(s)} + p_0$ и граничные условия можно записать в виде

$$\frac{1}{i\omega\rho_2}\frac{\partial p_{2n}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{i\omega\rho_1}\frac{\partial (p_{1n}^{(s)} + p_{0n})}{\partial r}\bigg|_{r=a} = V_n; \quad (p_{1n}^{(s)} + p_{0n} - p_{2n})|_{r=a} = Z_n V_n.$$

Из этих условий найдем значения неизвестных коэффициентов

$$D_n = -\frac{j_n(k_1 r_1)}{j_n'(\mu_1)} h_n^{(1)\prime}(\mu_1)\left[1 - \frac{w_1}{\mu_1^2 j_n'(\mu_1) h_n^{(1)\prime}(\mu_1)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}\right]; \quad (5.51)$$

$$E_n = \frac{w_2 j_n(k_1 r_1)}{\mu_1^2 j_n'(\mu_1)\, h_n^{(1)\prime}(\mu_2)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}. \quad (5.52)$$

При выводе этих выражений, а также формул (5.48), (5.49) было использовано соотношение (вронскиан) для сферических функций

$$j_n(x) h_n^{(1)\prime}(x) - j_n'(x) h_n^{(1)}(x) = i/x^2. \quad (5.53)$$

Заметим, что при $j_n'(\mu_1) = 0$ значения D_n и E_n остаются конечными. Это можно показать с использованием формулы (5.53). Записанные выше выражения удовлетворяют принципу взаимности. Действительно, если подставить формулы (5.48) в (5.45), а (5.52) в (5.50) и поменять местами излучатель и приемник (т. е. расстояния r и r_1), то полученные выражения совпадут.

Запишем формулы для дальнего поля, рассеянного оболочкой в обратном направлении. Считая, что точки, в которых находится излучатель и приемник, совмещены, положим $r_1 = r$, $\theta = \pi$, причем $k_2 r \gg 1$. Используя асимптотику $h_n^{(1)}(k_2 r) \approx (-i)^{n+1} \exp(ik_2 r)/(k_2 r)$ и соотношение $P_n(-1) = (-1)^n$, получим для этого случая из выражений (5.45), (5.49)

$$p_2^{(s)} = -\frac{w_2 Q}{4\pi} \frac{\exp(i2k_2 r)}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n G_n. \quad (5.54)$$

Для проведения расчетов удобно пронормировать эту величину по звуковому давлению p_∞ в волне, отраженной от акустически жесткой оболочки большого волнового радиуса, причем

$$p_\infty = -\frac{ik_2 w_2 Q}{4\pi} \frac{a \exp(2ik_2 r)}{2r^2}.$$

В результате получим функцию $F(k_2 a)$, определяющую относительную амплитуду рассеяния в обратном направлении,

$$F(k_2 a) = \frac{p_2^{(s)}}{p_\infty} = -\frac{2i}{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n G_n. \quad (5.55)$$

Выражение, определяющее звуковое давление при рассеянии плоской волны на оболочке, можно получить из формулы (5.54),

пронормировав значение $p_2^{(s)}$ по звуковому давлению в падающей сферической волне (5.44), взятому в точке, где находится центр оболочки. Тогда получим

$$p_2^{(s)} = \frac{a}{2} \frac{\exp(ik_2 r)}{r} F(k_2 a). \tag{5.56}$$

Зависимость $F(k_2 a)$ (рис. 5.13) имеет высокие пики и глубокие минимумы, которые объясняются резонансными явлениями, описанными в п. 5.3. Представленную на рисунке область изменения параметров $k_2 a$ и $k_2 h$ можно разбить на три части. При $k_2 a < 5$ наблюдаются резонансы первых форм колебаний. В этом диапазоне невозможно разделить колебания на изгибные и продольные. При $5 < k_2 a < 45$ и $0{,}2 < k_2 h < 0{,}8$ четко выделяются минимумы, следующие с периодом $\Delta(k_2 a) = 3{,}5$. Они являются следствием возбуждения продольных периферических волн со скоростью, близкой к скорости продольной волны в пластине. Группа высоких пиков при $k_2 a > 45$ возникает из-за возбуждения изгибных периферических волн со скоростью, близкой к скорости звука в среде.

Зная период расположения экстремумов функции $F(k_2 a)$, можно вычислить скорости периферических волн. Рассмотрим сначала волну без дисперсии (например, продольную волну в тонкой оболочке). Экстремумы возникают, если разность хода волн, обогнувших оболочку за n и $n+1$ оборотов, кратна длине волны. Поэтому для двух соседних экстремумов на частотах ω_n и ω_{n+1} выполняется соотношение $\omega_{n+1} 2\pi a / c_p - \omega_n 2\pi a / c_p = 2\pi$, где c_p – скорость периферической волны.

Отсюда получим $c_p = c_2 \xi$, где $\xi = k_{n+1} a - k_n a = \Delta\omega a / c_2$ – разность значений волновых размеров для соседних экстремумов на рис. 5.13, $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n$. Для района $3 < k_2 a < 45$ получаем $\xi = 3{,}5$, т. е. $c_p =$

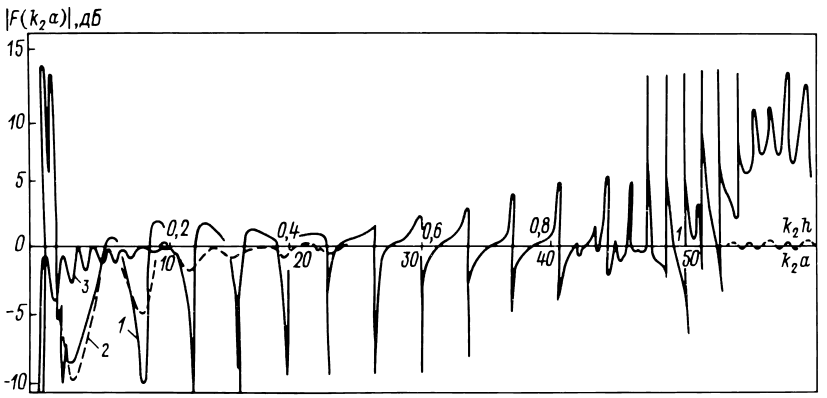


Рис. 5.13. Зависимость $20\lg|F(k_2 a)|$ для сферической оболочки при $\rho_M = 7800$ кг/м^3, $E = 2 \cdot 10^{11}(1 - i\eta)$ кг/мс^2, $\sigma = 0{,}29$; $\rho c = 1{,}5 \cdot 10^6$ кг/мс^2

1 – $\eta = 0$; *2* – $\eta = 0{,}1$; *3* – жесткая сфера

$= 3{,}5c_2 = 5{,}3 \cdot 10^3$ м/с, что соответствует скорости продольной волны в пластине.

При наличии дисперсии надо учесть, что скорости волн на частотах, соответствующих соседним экстремумам, будут различными. В этом случае $k_p(\omega_{n+1})\,2\pi a - k_p(\omega_n)\,2\pi a = 2\pi$, где $k_p(\omega) = \omega/c_p(\omega)$, причем $c_p(\omega)$ – фазовая скорость периферической волны. Если $\Delta\omega \ll \omega$, то $k_p(\omega_{n+1}) \approx k_p(\omega_n) + \Delta\omega dk_p(\omega)/d\omega|_{\omega = \omega_n}$. Производная по частоте определяет групповую скорость волны $c_{\text{гр}} = (dk_p(\omega)/d\omega)^{-1}|_{\omega = \omega_n} = c_2\xi$. Таким образом, расстояние между экстремумами связано с групповой скоростью периферической волны.

Высокие пики при $k_2 a > 45$ возникают из-за возбуждения изгибной периферической волны с фазовой скоростью, близкой к скорости звука в среде. Для этой области из рис. 5.13 получаем $\xi = 1{,}4$, откуда $c_{\text{гр}} = 2{,}1 \cdot 10^3$ м/с. Сравним эту скорость с групповой скоростью изгибных волн в пластине. При этом воизбежание больших ошибок надо использовать приведенную ниже уточненную формулу (5.73), определяющую волновое число изгибных волн в пластине $k'_{\text{и}}$ с учетом инерции вращения и сдвига. Вычислив производную по ω, получим

$$c_{\text{гр}} = \left(\frac{dk'_{\text{и}}}{d\omega}\right)^{-1} = c'_{\text{и}}\,\frac{u}{u - (c'_{\text{и}}/c_{\text{и}})^4}\,;\quad u = 2 - (c_R^{-2} + c_{\text{пр}}^{-2})(c'_{\text{и}})^2\,,$$

где $c'_{\text{и}} = \omega/k'_{\text{и}}$ – скорость изгибной волны с учетом инерции вращения и сдвига; $c_{\text{и}} = \omega/k_{\text{и}}$ – то же без учета этих явлений, c_R и $c_{\text{пр}}$ – скорости волн Рэлея и продольной волны в пластине соответственно. По этой формуле получим $c_{\text{гр}} = 2{,}35 \cdot 10^3$ м/с, что близко к значению, найденному из рис. 5.13.

Введение активных потерь в материал оболочки (кривая *2*, при $\eta = 0{,}1$) почти полностью устраняет возбуждение периферических волн, но резонансные явления на первых модах колебаний сохраняются. Это объясняется тем, что периферические волны возникают при больших волновых размерах, когда длина пробега волны вокруг оболочки велика по сравнению с длиной волны. В этих условиях достаточно сравнительно небольших потерь, чтобы задемпфировать периферическую волну. Первые моды колебаний возникают при малых волновых размерах и длинах пробега, поэтому потери влияют на эти моды гораздо меньше.

Для сравнения на этом рисунке приведена функция $F(k_2 a)$ для жесткой сферы. Осцилляции этой кривой являются следствием распространения вокруг оболочки дифракционных волн Франца [59].

Диаграммы рассеяния (рис. 5.14) в области возбуждения периферических волн очень критичны к частоте. Небольшое изменение волновых размеров (рис. 5.14, *а, б*) приводит для рассеяния в обратном направлении $\theta = 180^\circ$ к замене максимума минимумом. При наличии потерь в материале оболочки с коэффициентом потерь $\eta = 0{,}1$ диаграммы рассеяния для упругой оболочки в области возбуждения периферических волн практически совпадают с диаграммами для жесткой поверхности.

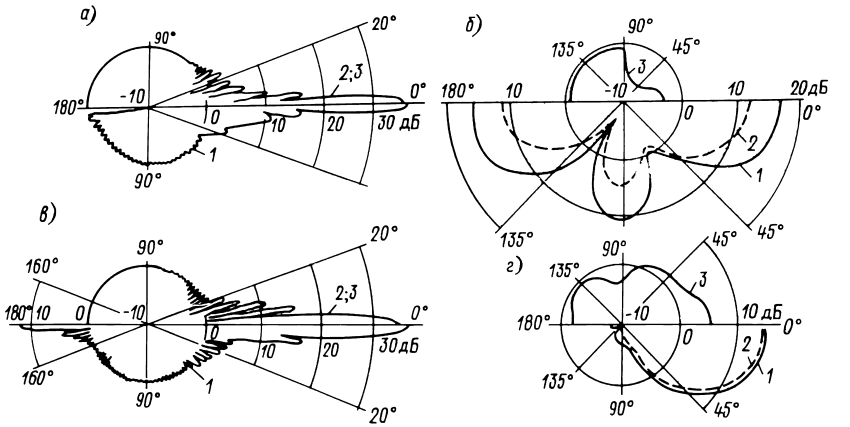


Рис. 5.14. Диаграммы рассеяния для оболочки с параметрами, представленными на рис. 5.13: $а - k_2 a = 51{,}58$; $б - k_2 a = 53{,}11$; $в - k_2 a = 1{,}45$; $г - k_2 a = 3$
$1 - \eta = 0$; $2 - \eta = 0{,}1$; 3 – жесткая сфера

Сильные изменения диаграммы рассеяния происходят в области возбуждения резонансов первых форм колебаний (рис. 5.14, *в*, *г*). В этом случае в соответствии со сказанным выше диаграммы гораздо меньше зависят от коэффициента потерь, чем при возбуждении периферических волн.

5.4.2. Излучение звука оболочкой. Решим теперь задачу об излучении звука оболочкой под действием сил с распределением плотности $f(\theta_2, \varphi_2)\exp(-i\omega t)$, где θ_2, φ_2 – координаты точек на поверхности, где приложены силы. Применим теорему взаимности для упругих тел, полученную в работе [34]. Используя форму записи этой теоремы в виде формулы (15.10) из работы [63], можно записать звуковое давление, излучаемое оболочкой,

$$p_{\text{изл}} = -\frac{1}{i\omega\rho Q} \times$$

$$\times \int_S f(\theta_2, \varphi_2) \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=a} dS_2, \quad (5.57)$$

где p – решение дифракционной задачи о поле точечного источника, помещенного в точку наблюдения; ρ – плотность среды, в которой необходимо определить звуковое поле.

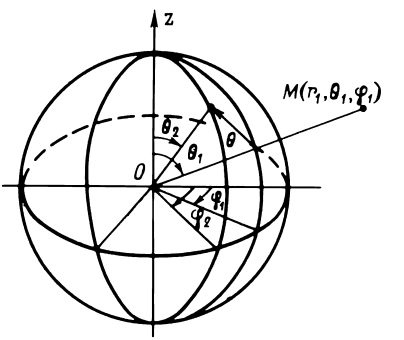


Рис. 5.15. Сферическая система координат

Индекс при dS_2 означает, что интегрирование проводится по координатам θ_2, φ_2.

Будем искать поле излучения в точке M с координатами r_1, θ_1, φ_1 (рис. 5.15). Поместим в эту точку сферический источник. Нам известно осесимметричное звуковое поле, создаваемое источником, расположенным на оси z. Если переместить источник в точку M, то поле этого источника будет осесимметричным относительно луча OM в системе координат с осью, повернутой на угол θ_1. Поэтому выражения (5.45) и (5.50) будут справедливыми, если угол θ отсчитывать так, как показано на рис. 5.15. Для того чтобы выполнить интегрирование по углам θ_2, φ_2 в исходной системе координат, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра. Для углов, показанных на рисунке, выполняется соотношение $\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. В этом случае по формуле (8.814) из работы [16] запишем

$$P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{n} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1) P_n^m(\cos\theta_2) \cos(m(\varphi_1 - \varphi_2)). \tag{5.58}$$

Здесь $\epsilon_m = 1$ при $m = 0$ и $\epsilon_m = 2$ при $m > 0$. Учтем, что $p = p_2 = p_0 + p_2^{(s)}$ и подставим первое и третье соотношения (5.45) в формулу (5.57). При этом следует сначала продифференцировать p_2 по r, а затем подставить значение $r = a$. Кроме того, в первом из выражений (5.45) необходимо принять $r_< = r$ и $r_> = r_1$. В результате получим звуковое давление вне оболочки ($r_1 \geqslant a$)

$$p_{\text{изл}}^{(2)} = \frac{i}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n C_n h_n^{(1)}(k_2 r_1) \sum_{m=0}^{n} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1) a_{nm}, \tag{5.59}$$

где

$$C_n = \frac{w_2}{h_n^{(1)\prime}(\mu_2)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}; \tag{5.60}$$

$$a_{nm} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta_2, \varphi_2) P_n^m(\cos\theta_2) \cos[m(\varphi_1 - \varphi_2)] \sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi_2. \tag{5.61}$$

Для того чтобы получить отсюда звуковое давление, излучаемое пустой оболочкой, достаточно положить $Z_{s1} = 0$.

Выражение (5.59) определяет поле излучение для произвольного (в том числе неосесимметричного) распределения возбуждающей силы. Заметим, что механические свойства оболочки входят в полученные выражения только через импедансы осесимметричных колебаний Z_n. Таким образом, даже при неосесимметричном возбуждении для определения звукового поля достаточно знать лишь набор импедансов осесимметричных колебаний. Для того чтобы это пояснить, заметим, что любое

распределение возбуждающей силы можно представить в виде суперпозиции элементарных точечных источников. Для каждого из этих источников, взятых по отдельности, можно провести ось симметрии и вычислить звуковое поле, используя импедансы осесимметричных колебаний. Поэтому и при суммировании звуковых полей, излучаемых этими источниками, в окончательном выражении используются только импедансы осесимметричных колебаний.

Аналогичным образом можно вычислить и звуковое давление внутри оболочки. Для этого следует в качестве вспомогательного решения взять звуковое поле сферического источника, помещенного в точку наблюдения, находящуюся внутри оболочки. Тогда в формуле (5.57) следует принять $p = p_1 = p_0 + p_1^{(s)}$, где p_0 и $p_1^{(s)}$ определяются выражениями (5.50). В результате получим звуковое давление внутри оболочки ($r_1 \leqslant a$)

$$p_{\text{изл}}^{(1)} = \frac{i}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n F_n j_n(k_1 r_1) \sum_{m=0}^{n} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1) a_{nm}, \tag{5.62}$$

где

$$F_n = \frac{w_1}{j_n'(\mu_1)[Z_n + Z_{s1} + Z_{s2}]}. \tag{5.63}$$

и a_{nm} по-прежнему определяются формулой (5.61).

В качестве примеров применения полученных соотношений рассмотрим излучение звука оболочкой под действием сосредоточенной силы, приложенной в полюсе $\theta_2 = 0$, и излучение под действием статистически распределенных сил.

Для описания сосредоточенной силы можно представить ее как распределенную силу с плотностью, описываемой дельта-функцией. Однако при этом не всегда ясно, как правильно записать постоянные множители. Поэтому будем считать, что сила равномерно распределена по небольшому сегменту вблизи полюса с центральным углом $2\Delta\theta$, т. е. $f = F/\Delta S$, где F – амплитуда сосредоточенной силы, $\Delta S = 2\pi a^2(1 - \cos\Delta/\theta) \approx \pi a^2 \times \times \sin^2\Delta\theta$ – площадь сегмента, причем $\Delta\theta \ll 1$. Учитывая осевую симметрию, из выражения (5.61) получим

$$a_{nm} = \frac{2F}{a^2 \sin^2\Delta\theta} \int_0^{\Delta\theta} P_n(\cos\theta_2) \sin\theta_2 d\theta_2$$

при $m = 0$ и $a_{nm} = 0$ при $m \neq 0$. Для малых значений $\Delta\theta$ можно принять $P_n(\cos\theta_2) \approx 1$. Тогда $a_{n0} = F/a^2$. Из выражений (5.58) и (5.62) получим

$$\left.\begin{aligned} p_{\text{изл}}^{(1)} &= \frac{iF}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n F_n j_n(k_1 r_1) P_n(\cos\theta_1) \text{ при } r_1 < a; \\ p_{\text{изл}}^{(2)} &= \frac{iF}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n C_n h_n^{(1)}(k_2 r_1) P_n(\cos\theta_1) \text{ при } r_1 > a. \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

Рассмотрим теперь случай, когда силы статистически распределены по поверхности, причем корреляционная функция имеет вид $K(x, y)$, где $x = \xi - \xi'$, $y = \eta - \eta'$ – длины дуг в меридиональном и широтном направлениях на поверхности оболочки.

Аналогичные задачи о возбуждении упругих пластин случайными силами (в том числе с ребрами жесткости) опубликованы в работах [19, 22, 65].

Будем считать, что силы слабо коррелированы, т. е. интервал, при котором силы являются независимыми, меньше длин волн в среде и оболочке. Тогда функцию корреляции можно аппроксимировать выражением

$$K(x, y) = \overline{f^2} d\delta(x)\delta(y), \tag{5.64}$$

где f^2 – средний квадрат плотности распределения слоя; δ – дельта-функция; d – константа, зависящая от конкретного вида той функции корреляции $K(x, y)$, которую мы аппроксимировали дельта-функцией. Эта величина пропорциональна площади корреляции сил и может быть оценена при помощи нормировки

$$d = \frac{1}{\overline{f^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int K(x, y)\, dx dy.$$

После перехода к сферическим координатам запишем корреляционную функцию в виде

$$K(\theta_2 - \theta_2', \varphi_2 - \varphi_2') = \overline{f(\theta_2, \varphi_2) f^*(\theta_2', \varphi_2')} = \frac{\overline{f^2} d}{a^2} \frac{\delta(\theta_2 - \theta_2')}{\sin\theta_2} \delta(\varphi_2 - \varphi_2'). \tag{5.65}$$

Черта означает осреднение по ансамблю реализаций. Найдем средний квадрат звукового давления вне оболочки $|\overline{p_{\text{изл}}^{(2)}}|^2 = |\overline{p_{\text{изл}}^{(2)} p_{\text{изл}}^{(2)*}}|$.

Подставим сюда формулу (5.59) и заменим в выражении для $p_{\text{изл}}^{(2)*}$ величины n, m, θ_2, φ_2 на n', m', θ_2', φ_2'. Получится выражение, в котором все члены будут детерминированными, за исключением произведения, определяемого выражением (5.65). Сначала выполняется интегрирование по φ_2' [с использованием свойства дельта-функции $u(x_1) = \int_a^b \delta(x - x_1) u(x) dx$, если x_1 лежит на промежутке $[a, b]$, а затем – по φ_2 с использованием условия ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \cos(m(\varphi_1 - \varphi_2)) \cos(m'(\varphi_1 - \varphi_2)) d\varphi_2 = \begin{cases} 2\pi/\epsilon_m \text{ при } m = m'; \\ 0 \quad \text{при } m \neq m'. \end{cases}$$

Для интегрирования по θ_2' используется то же свойство дельта-функции,

а для интегрирования по θ_2 – условие ортогональности присоединенных полиномов Лежандра

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\theta_2) P_{n'}^m(\cos\theta_2) \sin\theta_2 d\theta_2 = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при } n = n'; \\ 0 & \text{при } n \neq n'. \end{cases}$$

В результате выделится сомножитель

$$\sum_{m=0}^{n} \epsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [P_n^m(\cos\theta_1)]^2 = P_n(1) = 1.$$

Последний результат следует из формулы сложения (5.58), если положить в ней $\varphi_1 = \varphi_2$, $\theta_1 = \theta_2$. Окончательно получим

$$\overline{|p_{\text{изл}}^{(2)}|^2} = \frac{\overline{f^2} d}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|C_n|^2 |h_n^{(1)}(k_2 r_1)|^2; \quad r_1 > a. \tag{5.66}$$

Поле внутри оболочки можно вычислить, составив произведение $\overline{|p_{\text{изл}}^{(1)}|^2} = \overline{|p_{\text{изл}}^{(1)} p_{\text{изл}}^{(1)*}|}$, где $p_{\text{изл}}^{(1)}$ определяется выражением (5.62). Это даст

$$\overline{|p_{\text{изл}}^{(1)}|^2} = \frac{\overline{f^2} d}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|F_n|^2 j_n^2(k_1 r_1); \quad r_1 < a. \tag{5.67}$$

Заметим, что таким же образом можно определить и взаимно корреляционные функции звуковых давлений в точках, определяемых координатами r_1, θ_1 и r_1', θ_1'. Для этого следует составить произведения

$$K_p^{(1)}(\psi) = \overline{|p_{\text{изл}}^{(1)}(r_1, \theta_1) p_{\text{изл}}^{(1)*}(r_1', \theta_1')|}; \quad K_p^{(2)}(\psi) = \overline{|p_{\text{изл}}^{(2)}(r_1, \theta_1) p_{\text{изл}}^{(2)*}(r_1', \theta_1')|},$$

где $\psi = \theta_1 - \theta_1'$.

Повторяя указанные выше преобразования, получим

$$K_p^{(1)}(\psi) = \frac{\overline{f^2} d}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|F_n|^2 j_n(k_1 r_1) j_n(k_1 r_1') P_n(\cos\psi); \quad r_1 < a;$$

$$K_p^{(2)}(\psi) = \frac{\overline{f^2} d}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)|C_n|^2 h_n^{(1)}(k_2 r_1) h_n^{(2)}(k_2 r_1') P_n(\cos\psi); \quad r_1 > a.$$

При $r_1 = r_1'$ и $\psi = 0$ из этих выражений следуют формулы (5.66) и (5.67).

5.5. Механические импедансы колебаний сферической оболочки

5.5.1. Импедансы колебаний тонкой оболочки. В полученные выше формулы входят *механические импедансы для различных форм колебаний* оболочки, определяемые как отношение амплитуды нагрузки, действующей на оболочку, к колебательной скорости в форме колебаний с номером n, т. е.

$$Z_n = p_n / v_n. \tag{5.68}$$

При $p_n = p_{1n} - p_{2n}$ эта формула совпадает с определением (5.47). Заметим, что в этих выражениях знак направления действия нагрузки совпадает со знаком положительного направления скорости v_n, причем скорость считается положительной, если она направлена наружу. [Для нагрузки, приложенной к оболочке с внешней стороны, выражение (5.68) следовало бы записать в виде $Z_n = -q_n / v_n$].

Если не учитывать механические напряжения, возникающие в оболочке, и считать, что каждый ее элемент колеблется как масса, то импеданс будет $Z_n = -i\omega M$, где $M = \rho_M h$ – масса на единицу площади оболочки. В этом приближении импедансы не зависят от номера n. Указанное приближение справедливо при $ka > n$, $ka \gg 1$.

Выражения для механических импедансов, полученные на основе уравнений, учитывающих изгибные и продольные движения в оболочке, приведены в книге [63]. Эти выражения можно привести к виду $Z_n = -i\omega M \zeta_n$, где ζ_n – безразмерные величины:

$$\zeta_n = \frac{h_{1a}}{x_{\text{пр}}^2} \frac{m^3 + m^2 g_1 + m g_2 + g_3}{g_4 - m}. \tag{5.69}$$

Здесь

$$m = n(n+1);\ g_1 = -(x_{\text{пр}}^2 + 3 + \sigma);\ g_2 = (1 - \sigma^2 - x_{\text{пр}}^2)/h_{1a};$$

$$g_3 = (x_{\text{пр}}^2 + 1 - \sigma)(x_{\text{пр}}^2 - 2 - 2\sigma)/h_{1a};\ g_4 = x_{\text{пр}}^2 + 1 - \sigma;$$

$$h_{1a} = h^2/(12a^2);\ x_{\text{пр}}^2 = (k_{\text{пр}} a)^2 = a^2 \rho_M \omega^2 / E_1;\ E_1 = E/(1 - \sigma^2);$$

E, σ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $k_{\text{пр}}$ – волновое число продольной (симметричной волны) в пластине толщиной h. Эти выражения являются достаточно точными для тонких оболочек при $k_{\text{и}} h \ll 1$ ($k_{\text{и}}$ – волновое число изгибных волн в оболочке, h – толщина) и при не очень больших номерах мод колебаний, когда длина пространственного периода в данной моде больше длины изгибной волны. Однако в некоторых приложениях (например, при вычислении полюсов комплексных функций, возникающих при применении преобразования Ватсона к рядам, определяющим излучение звука оболочкой) приходится вычислять

импедансы колебаний на частотах вблизи критической частоты для пластины равной толщины.

Известно, что критическая частота для стальной пластины в воде, вычисленная по простейшей изгибной теории без учета инерции вращения и сдвига, отличается от истинного значения на 22 %. В указанной области частот необходимо использовать импедансы, вычисленные с учетом инерции вращения и сдвига.

Дифференциальное уравнение колебаний оболочки с учетом инерции вращения и сдвига получено в работе [67]. Оно имеет вид

$$\Delta^3 w + r_1 \Delta^2 w + r_2 \Delta w + r_3 w = -\frac{a^2}{\mu h \kappa^2} (\Delta^2 q_r + r_4 \Delta q_r + r_5 q_r) -$$

$$+ \frac{a^2 (1-\sigma^2)}{Eh} (a_2 \Delta^2 P - r_6 \Delta P), \qquad (5.70)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – „угловая" часть оператора Лапласа; w – радиальное смещение; $\kappa^2 = \pi^2/12$ или $\kappa^2 = 5/6$ – коэффициент сдвига; $\Delta P = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta q_\theta) + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} \right]$; q_r, q_θ, q_φ – соответствующие составляющие амплитуды внешней нагрузки.

Коэффициенты определяются следующим образом:

$$r_1 = a_1 + a_3 + a_6 - a_7 - a_2 a_4;$$

$$r_2 = a_1 a_6 - a_2 a_4 a_6 + a_1 a_3 - a_3 a_7 + a_3 a_6 - a_5 a_8 + a_4 a_8 + a_2 a_5 a_7;$$

$$r_3 = a_1 (a_3 a_6 - a_5 a_8); \; r_4 = a_3 + a_6; \; r_5 = a_3 a_6 - a_5 a_8; \; r_6 = a_8 - a_2 a_6;$$

$$a_1 = -\frac{2}{\kappa^2} \left(2 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} - \frac{K_1 x_t^2}{2} \right); \; a_2 = -1 - \frac{2}{\kappa^2} \frac{1+\sigma}{1-\sigma};$$

$$a_3 = (1-\sigma) \left(1 - \frac{\kappa^2}{2} + \frac{K_1 x_t^2}{2} \right); \; a_4 = 1 + \sigma + (1-\sigma) \frac{\kappa^2}{2};$$

$$a_5 = \frac{\kappa^2}{2} (1-\sigma)(1 + \frac{h_a}{2} x_t^2); \; a_6 = (1-\sigma) \left(1 - \frac{2}{h_a} + \frac{K_2 x_t^2}{2} \right);$$

$$a_7 = -(1-\sigma) \frac{2}{h_a}; \; a_8 = (1-\sigma) \left(\frac{2}{h_a} + x_t^2 \right),$$

где $x_t^2 = \rho_M \omega^2 a^2/\mu$ – квадрат волнового числа для волн сдвига; $K_1 = 1 + h^2/(12a^2)$; $K_2 = 1 + 3h^2/(20a^2)$; $h_a = h/(3\kappa^2 a^2)$.

Пусть на оболочку действует переменное во времени осесимметричное радиальное давление q_r, причем $q_\theta = q_\varphi = 0$. Представим q_r и w в виде разложений по полиномам Лежандра (индекс r далее опущен)

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n(\cos\theta); \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n P_n(\cos\theta) \tag{5.71}$$

и вычислим модовые импедансы по формуле $Z_n = -q_n/v_n = -q_n/(i\omega w_n)$. [По отношению к формуле (5.68) здесь изменен знак, так как в уравнении (5.70) положительной считается нагрузка, действующая с внешней стороны внутрь]. Учитывая первое из соотношений (5.86), после подстановки разложений (5.71) в уравнение (5.70) получим следующее выражение для механических модовых импедансов в виде $Z_n = -i\omega M\zeta_n$, где ζ_n – безразмерные величины, определяемые выражением

$$\zeta_n = -\frac{\kappa^2}{x_t^2}\,\frac{m^3 - r_1 m^2 + r_2 m - r_3}{m^2 - r_4 m + r_5}; \quad m = n(n+1). \tag{5.72}$$

По горизонтальной оси на рис. 5.16 нанесены две шкалы, одна из которых соответствует значениям $k_{\text{пр}}a$, а вторая $k'_{\text{и}}a$, причем волновое число для волн изгиба в пластине $k'_{\text{и}}$ определено из уравнения движения пластины [67, 69] с учетом инерции вращения и сдвига:

$$k'_{\text{и}} = \left(\pm \sqrt{k_{\text{и}}^4 + \left(\frac{k_R^2 + k_{\text{пр}}^2}{2} \right)^2} + \frac{k_R^2 + k_{\text{пр}}^2}{2} \right)^{1/2}, \tag{5.73}$$

где

$$k_R = \left(\frac{\omega^2 \rho_M 2(1+\sigma)}{E\kappa^2} \right)^{1/2}; \quad k_{\text{и}} = \left(\frac{\omega^2 12(1-\sigma^2)\rho_M}{Eh^2} \right)^{1/4};$$

$$k_{\text{пр}} = \left(\frac{\omega^2 \rho_M (1-\sigma^2)}{E} \right)^{1/2} -$$

волновые числа волн Рэлея, изгибных волн без учета инерции вращения и сдвига и продольных волн в тонкой пластине соответственно. При отрицательном значении корня получается мнимое волновое число для экспоненциально затухающих изгибных колебаний.

Значения волновых размеров, при которых ζ_n обращается в нуль, являются резонансными. Анализ соотношений (5.72) показывает, что при $n \gg 1$ имеется два типа резонансов, один из которых связан в основном с изгибными колебаниями оболочек, а другой – с продольными. Эти резонансы возникают при выполнении условий

$$k'_{\text{и}}a \approx n; \quad k_{\text{пр}}a \approx n. \tag{5.75}$$

Заметим, что в оболочке двойной кривизны, строго говоря, невозможно разделить изгибные и продольные колебания (как, например,

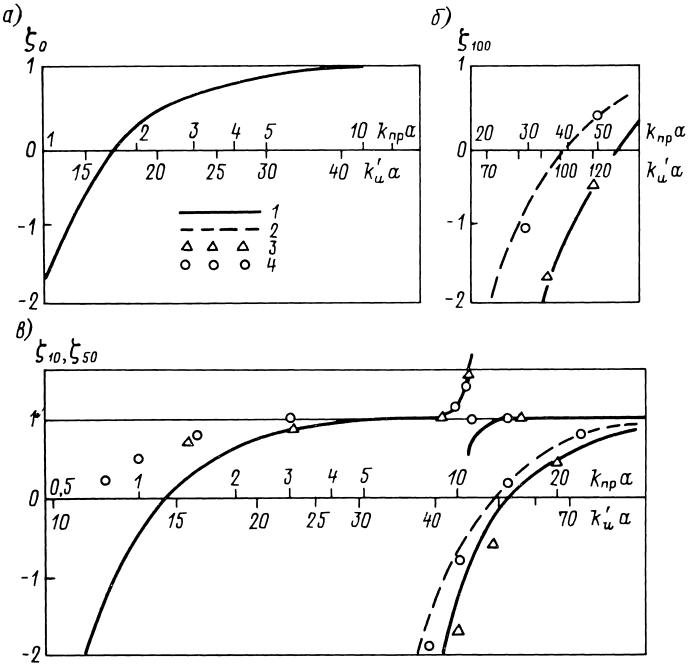


Рис. 5.16. Импедансы для различных форм колебаний упругой сферической оболочки при следующих параметрах: $E = 2 \cdot 10^{11}$ кг/(м^2 с), $\rho_M = 7800$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}3$; *а* – $n = 0$; *б* – $\delta = 100$; *в* – $n = 50$

1 и *2* – расчеты по формулам (5.69) и (5.72) соответственно; *3* – расчет по формуле (5.81); $k_и$ определено без учета инерции вращения и сдвига; *4* – то же, но с учетом этих эффектов по формуле (5.73)

в пластине или цилиндрической оболочке), так как изгиб оболочки неизбежно приводит к растяжению средней линии и возникновению продольных смещений. Однако при больших номерах мод колебаний взаимодействие между изгибными и продольными движениями уменьшается и приближенно можно говорить об изгибных и продольных колебаниях по отдельности.

Из рис. 5.16 следует, что кривые, вычисленные по формуле (5.72) для $n = 100$, пересекают ось абсцисс в точках, хорошо соответствующих значениям (5.75), в то время как кривые, вычисленные по формуле (5.69), дают завышенные значения резонансных частот. При малых значениях n кривые, рассчитанные по различным формулам, практически совпадают.

Интересно также сравнить значения импедансов, рассчитанные на основании теории оболочек, а также вычисленные простейшим образом, исходя из уравнений плоских пластин. Импедансы изгибных и продольных колебаний пластин по отношению к силе, распределенной по поверхности по закону $\exp(ikx \sin\theta)$ (т. е. по отношению к нагрузке в виде

волны, бегущей вдоль пластины), определены в работе [35]. Полный входной импеданс на поверхности пластины $Z_{пл}$ можно легко определить, даже не решая уравнений движения. Для этого следует воспользоваться известным выражением для коэффициента отражения звука от пластины, лежащей на границе раздела среды и вакуума:

$$A = \frac{Z_{пл} - Z_0^{(1)}}{Z_{пл} + Z_0^{(1)}},$$

где $Z_0^{(1)} = \rho c/\cos\theta$ – волновой импеданс среды; $Z_{пл}$ – входной импеданс пластины.

С другой стороны, для коэффициента отражения справедливо выражение

$$A = \frac{ZZ_{пр} - Z_0^{(1)}(Z + Z_{пр})}{ZZ_{пр} + Z_0^{(1)}(Z + Z_{пр})},$$

которое получается из формул (32.21) работы [63], если положить импеданс второй среды равным нулю. В этих выражениях Z и $Z_{пр}$ – импедансы изгибных и продольных колебаний пластины соответственно. Сравнивая последние выражения, получим

$$Z_{пл} = \frac{ZZ_{пр}}{Z + Z_{пр}}, \qquad (5.76)$$

т. е. полная проводимость пластины складывается из проводимостей на продольных и изгибных колебаниях.

Импеданс пластины для изгибных колебаний

$$Z = \frac{q_0}{-i\omega w_0} = -i\omega M\left(1 - \frac{k^4}{k_и^4}\sin^4\theta\right)$$

по отношению к нагрузке $q = q_0 \exp(ikx\sin\theta)$ определяется из уравнения движения пластины $(\Delta^2 - k_и^4)w = q/g$ (g – цилиндрическая жесткость) подстановкой $w = w_0\exp(ikx\sin\theta)$. Теперь будем считать, что пластина изогнута по сферической поверхности, но локальные механические свойства ее совпадают со свойствами плоской пластины. Введем угол $\theta = x/a$, где x – координата вдоль поверхности, и определим импеданс по отношению к нагрузке $q = q_n P_n(\cos\theta)$. Подстановка в уравнение движения пластины смещения в виде $w = w_n P_n(\cos\theta)$ с учетом соотношений (5.86) приводит к результату

$$Z = -i\omega M\left(1 - \frac{n^2(n+1)^2}{(k_и a)^4}\right).$$

Таким образом, импедансы по отношению к нагрузке $P_n(\cos\theta)$ в указанном приближении можно получить из выражений для импеданса по отношению к нагрузке $\exp(ikx\sin\theta)$ формальной заменой $\sin\theta \to \sqrt{n(n+1)}/(ka)$. Это связано с тем, что импеданс определяется величиной, характеризующей, насколько быстро меняется нагрузка вдоль конструкции. Параметром, характеризующим степень изменяемости нагрузки, является длина следа волны на поверхности. Для плоской волны эта величина зависит от $k\sin\theta$, а для собственной функции в виде полинома Лежандра – от $\sqrt{n(n+1)}/a$. Поэтому при указанной формальной замене сохраняются и выражения для импедансов.

Аналогичный результат получается и для импедансов продольных колебаний. С учетом этой замены из формул (32.5) и (32.9) работы [63] найдем

$$Z = -i\omega M\zeta_{\text{и}};\ \zeta_{\text{и}} = 1 - n^2(n+1)^2/(k_{\text{и}}a)^4; \tag{5.77}$$

$$Z_{\text{пр}} = \frac{i4E}{\omega h(1-\sigma^2)}\zeta_{\text{пр}};\ \zeta_{\text{пр}} = \frac{1-u_n}{(1-2\sigma)/(1-\sigma)-u_n}, \tag{5.78}$$

где $u_n = n(n+1)/(k_{\text{пр}}a)^2$. В выражении (5.77) в качестве $k_{\text{и}}$ можно использовать также значение $k_{\text{и}}$, определенное по формуле (5.73). Подставляя выражения (5.77) и (5.78) в формулу (5.76), получим $Z_{\text{пл}} = -i\omega M\zeta_{\text{пл}}$, где

$$\zeta_{\text{пл}} = \frac{\zeta_n}{1-(k_{\text{пр}}h/2)\zeta_{\text{и}}/\zeta_{\text{пр}}}. \tag{5.79}$$

Значения, рассчитанные по формуле (5.79), показаны на рис. 5.16 . Волновое число $k_{\text{и}}$ при этом вычислялось как без учета инерций вращения и сдвига (треугольники на рисунке), так и с учетом этих эффектов по формуле (5.73) (кружки на рисунке). При больших номерах мод колебаний ($n = 100$); значения, вычисленные по формуле (5.79), хорошо совпадают с результатами, полученными по теории оболочек, причем, как и следовало ожидать, кружки и треугольники хорошо ложатся на кривые, рассчитанные по формулам (5.69) и (5.72) соответственно. При малых номерах мод колебаний результаты расчета по формуле (5.79) не согласуются с результатами, полученными по теории оболочек, так как при малых номерах становится несправедливым разделение колебаний на изгибные и продольные.

Таким образом, выражение (5.72) является более точным по сравнению с выражением (5.69) примерно в такой же степени, как уравнение Тимошенко–Миндлина уточняет обычное уравнение изгибных колебаний.

5.5.2. Импедансы колебаний оболочки произвольной волновой толщины. Выражения (5.69) и (5.72) являются приближенными и пределы

их применения ограничены рамками теории тонких оболочек. Для определения критериев справедливости этих выражений сравним импедансы, вычисленные по этим формулам, с точными значениями, которые можно получить на основании теории упругости для слоя произвольной волновой толщины. Заметим, что использование точных формул для импедансов вместо приближенных в выражениях, полученных в п. 5.4, может быть всегда оправдано. Это связано с двумя обстоятельствами.

Во-первых, следует иметь в виду, что при выводе выражений в п. 5.4 предполагалось, что внутренняя и внешняя стороны оболочки колеблются с равными скоростями, в то время как для достаточно толстой оболочки это предположение не выполняется. Поэтому приведенные выражения для звуковых полей в этом случае должны быть видоизменены и необходимо вместо одного набора механических импедансов Z_n ввести элементы матриц M_{22}, M_{23} по формулам (5.9). Если же оболочка является пустой, то импеданс, определяемый как отношение давлений и скоростей на внешней стороне оболочки, полностью определяет движение внешней стороны оболочки, а следовательно, и звуковое поле. Поэтому для пустой оболочки формулы в п. 5.4 при использовании полученного ниже выражения для импеданса будут точными.

Во-вторых, применение точных выражений по теории упругости для очень тонких оболочек может быть связано с большой потерей точности при расчете, так как в определителе встретятся члены, весьма близкие по значению. Поэтому вычисления необходимо выполнять с большой точностью.

Закон Гука для изотропной упругой среды записывается в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\epsilon_\theta + \lambda\epsilon_\varphi + \lambda\epsilon_r;\ \sigma_{r\theta} = \mu\epsilon_{r\theta};\\ &\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\epsilon_\theta + (\lambda + 2\mu)\epsilon_\varphi + \lambda\epsilon_r;\ \sigma_{r\varphi} = \mu\epsilon_{r\varphi};\\ &\sigma_{rr} = \lambda\epsilon_\theta + \lambda\epsilon_\varphi + (\lambda + 2\mu)\epsilon_r;\ \sigma_{\varphi\theta} = \mu\epsilon_{\varphi\theta}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.80)$$

где λ, μ – постоянные Ламе; $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rr} – нормальные напряжения; $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\theta}$ – касательные напряжения. Деформации выражаются через смещения следующим образом:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta};$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r};\ \epsilon_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}. \qquad (5.81)$$

Как указано в п. 5.4.2, для решения даже неосесимметричных задач достаточно иметь лишь импедансы осесимметричных колебаний. Для осесимметричных движений оболочки касательные деформации $\epsilon_{r\varphi}$ и $\epsilon_{\varphi\theta}$ и

соответствующие касательные напряжения будут равны нулю. Используя формулы (5.80) и (5.81), получим следующую связь между смещениями и напряжениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \\
&+ \lambda\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \lambda\frac{u_r}{r} + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + (\lambda + 2\mu)\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \\
&+ (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{rr} = 2\lambda\frac{u_r}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \lambda\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.82а)$$

Воспользуемся уравнениями равновесия, записанными в сферических координатах [31]:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}(2\sigma_r - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \\
&+ \sigma_{r\theta}\operatorname{ctg}\theta) = \rho_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};\\
&\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi})\operatorname{ctg}\theta + 3\sigma_{r\theta}) = \rho_M\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.82б)$$

Подставив выражения (5.82а) в эти уравнения, получим уравнения движения

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r^2}u_r +$$

$$\frac{\lambda+\mu}{r}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta}-\frac{\lambda+3\mu}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\lambda+\mu}{r}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{\mu}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\times$$

$$\times\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{\lambda+3\mu}{r^2}\operatorname{ctg}\theta u_\theta=\rho_M\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2};\qquad(5.83)$$

$$\frac{(\lambda+\mu)}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta}+\frac{2(\lambda+2\mu)}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\mu\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+$$

$$+\frac{\lambda+2\mu}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2\mu}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\lambda+2\mu}{r^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-$$

$$-\frac{\lambda+2\mu}{\sin^2\theta}\frac{u_\theta}{r^2}=\rho_M\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}.$$

Эти уравнения можно решить, представив смещения в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала, после чего уравнения движения распадаются на два независимых друг от друга уравнения относительно этих потенциалов. Решениями последних являются сферические функции Бесселя и Неймана. В дальнейшем будут получены решения также для неизотропного сферического слоя, где этот прием уже не проходит. Поэтому для того, чтобы обеспечить по возможности одинаковую форму записи в этих случаях, будем решать уравнения (5.83) следующим образом.

Звуковое давление на внешней поверхности слоя представим в виде

$$p(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n P_n(\cos\theta),\qquad(5.84)$$

где p_n – известные коэффициенты.

Смещения u_r и u_θ можно записать в виде

$$u_r=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(r)P_n(\cos\theta);\ u_\theta=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(r)\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta),\qquad(5.85)$$

где $U_n(r)$ и $V_n(r)$ – неизвестные распределения радиальной и касательной составляющей смещения по толщине слоя. Заметим, что касательную составляющую необходимо представлять с использованием функций $\partial P_n(\cos\theta)/\partial\theta=P_n^1(\cos\theta)$, где P_n^1 – присоединенный полином Лежандра. Это объясняется тем, что в силу осевой симметрии в полюсе при $\theta=0$ должно отсутствовать касательное смещение. Поэтому надо выбирать функции, которые обращаются в нуль при $\theta=0$. Кроме того, формально

разделить переменные r и θ в уравнениях (5.83) удается только при таком представлении.

Подставим разложения (5.85) в уравнения (5.83) и учтем соотношения

$$\frac{\partial^2 P_n(\cos\theta)}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial P_n(\cos\theta)}{\partial\theta} = -n(n+1)P_n(\cos\theta);$$

$$\frac{\partial^2 P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial P_n^1(\cos\theta)}{\partial\theta} = -\left[n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\right] P_n^1(\cos\theta). \tag{5.86}$$

В результате переменные r и θ разделятся и получатся уравнения для радиальных функций $U_n(r)$ и $V_n(r)$:

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r} - \left[2 - \frac{n(n+1)\mu}{\lambda+2\mu}\right]\frac{U_n}{r^2} + \frac{\rho_M\omega^2}{\lambda+2\mu}U_n -$$

$$- \frac{n(n+1)(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)r}\frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{n(n+1)(\lambda+3\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{V_n}{r^2} = 0; \tag{5.87}$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{n(n+1)(\lambda+2\mu)}{\mu r^2}V_n +$$

$$+ \frac{\rho_M\omega^2}{\mu}V_n + \frac{\lambda+\mu}{\mu r}\frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{U_n}{r^2} = 0.$$

Решение этих уравнений выполняется подстановкой

$$U_n(r) = X_n'(r) - Y_n(r)n(n+1)/r;\ V_n(r) = X_n(r)/r - Y_n'(r) - Y_n(r)/r. \tag{5.88}$$

Штрих означает дифференцирование по r. Функции $X_n(r)$ и $Y_n(r)$ выполняют такую же роль, как и скалярный и векторный потенциалы.

Уравнения (5.87) распадаются на два независимых уравнения

$$\left\{X'' + \frac{2}{r}X' + \left[\frac{-n(n+1)}{r^2} + \frac{\omega^2\rho_M}{\lambda+2\mu}\right]X\right\}' = 0;$$

$$Y'' + \frac{2}{r}Y' + \left[\frac{-n(n+1)}{r^2} + \frac{\omega^2\rho_M}{\mu}\right]Y = 0,$$

решениями которых являются функции $X_n(r) = A_n j_n(k_l r) + B_n n_n(k_l r)$; $Y_n(r) = C_n j_n(k_t r) + D_n n_n(k_t r)$, где j_n и n_n – сферические функции Бесселя и Неймана; $k_l = \omega/c_l$, $k_t = \omega/c_t$, причем $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_M}$, $c_t = \sqrt{\mu/\rho_M}$ – скорости продольных и поперечных волн в безграничной среде, $C_0 = D_0 = 0$.

Для того чтобы найти импедансы при нагрузке, приложенной к внешней стороне слоя, будем считать, что

$$(\sigma_{rr} + p)|_{r=a_1} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=a_2} = \sigma_{r\theta}|_{r=a_1} = \sigma_{r\theta}|_{r=a_2} = 0. \tag{5.89}$$

Здесь a_1 и a_2 – внешний и внутренний радиусы слоя соответственно. Используя эти граничные условия, а также соотношения (5.82а), (5.85), (5.88), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, которую можно записать в матричном виде

$$\|a_{ij}\| \cdot \begin{Vmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -p_n a_1^2/\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \tag{5.90}$$

где

$$a_{11} = 2\mu_{l1}^2 j_n''(\mu_{l1}) - \frac{\lambda}{\mu}\mu_{l1}^2 j_n(\mu_{l1}); \quad a_{31} = 2[\mu_{l1} j_n'(\mu_{l1}) - j_n(\mu_{l1})];$$

$$a_{12} = 2\mu_{l1}^2 n_n''(\mu_{l1}) - \frac{\lambda}{\mu}\mu_{l1}^2 n_n(\mu_{l1}); \quad a_{32} = 2[\mu_{l1} n_n'(\mu_{l1}) - n_n(\mu_{l1})];$$

$$a_{13} = 2n(n+1)[j_n(\mu_{t1}) - \mu_{t1} j_n'(\mu_{t1})]; \quad a_{33} = -\mu_{t1}^2 j_n''(\mu_{t1}) - (n^2 - n - 2) j_n(\mu_{t1}); \tag{5.91}$$

$$a_{14} = 2n(n+1)[n_n(\mu_{t1}) - \mu_{t1} n_n'(\mu_{t1})]; \quad a_{34} = -\mu_{t1}^2 n_n''(\mu_{t1}) - (n^2 - n - 2) n_n(\mu_{t1});$$

$a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}$ получаются из $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$ соответственно заменой μ_{l1} на μ_{l2}, μ_{t1} на μ_{t2}. Здесь $\mu_{l1} = k_l a_1$, $\mu_{l2} = k_l a_2$, $\mu_{t1} = k_t a_1$, $\mu_{t2} = k_t a_2$, λ, μ – коэффициенты Ламе. При этом импедансы будут вычисляться по формуле $Z_n = -p_n/v_{nr}|_{r=a}$ или

$$Z_n = -ia_1 p_n \{\omega[(A_n j_n'(\mu_{l1}) + B_n n_n'(\mu_{l1}))\mu_{l1} - n(n+1)(C_n j_n(\mu_{t1}) + D_n(\mu_{t1}))]\}^{-1}. \tag{5.92}$$

На основе этого решения было проведено сравнение точных результатов и приближенных, получаемых по формулам (5.69), (5.72).

На рис. 5.17 приведены зависимости от волновой толщины величин $\zeta_n = Z_n/(-i\omega M)$ (для стальной оболочки с параметрами $E = 2 \cdot 10^{11}$ кг/(м $\cdot$ с^2), $\rho_M = 7800$ кг/м^3, $\sigma = 0{,}3$, $h/a_1 = 0{,}01$), вычисленных различными способами. Пересечения кривых с осью абсцисс (корни уравнения $Z_n = 0$) соответствуют резонансам оболочки, причем для каждой моды колебаний имеется последовательность резонансных значений параметра $k_{\text{пр}}h$. Значения первой резонансной частоты для моды $n = 0$, вычисленные по разным теориям оболочек, а также на основании точного решения, практически совпадают (рис. 5.17, *а*). Значение резонансной частоты для этой формы колебаний описывается известной формулой

$$\omega_0 = \frac{1}{a}\left(\frac{2E}{\rho_M(1-\sigma)}\right)^{1/2}. \qquad (5.93)$$

Следующий резонанс появляется при $k_l h \approx \pi$ ($k_{\text{пр}}h \approx 3{,}47$), что соответствует полуволновому резонансу оболочки по толщине. Как и следует ожидать, теории тонких оболочек не могут описать такие движения.

Рассмотрим графики при $n \gg 1$ (например, при $n = 100$ на рис. 5.17, *б*). Здесь распределение смещений по углу определяется выражением

$$P_n(\cos\theta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \cos\theta}}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \pi/4\right],$$

из которого следует, что по окружности оболочки должно уложиться $n + 1/2$ волн (в отличие от цилиндрической оболочки, где распределение описывается выражением $\cos(n\varphi)$ и по окружности укладывается n волн), т. е. $2\pi a = (n + 1/2)\lambda_{\text{об}}$, где $\lambda_{\text{об}}$ – длина волны, распространяющейся по оболочке. Для определения типа этой волны рассмотрим резонансные значения $k_{\text{пр}}h = A$, где A – абсциссы пересечения кривых

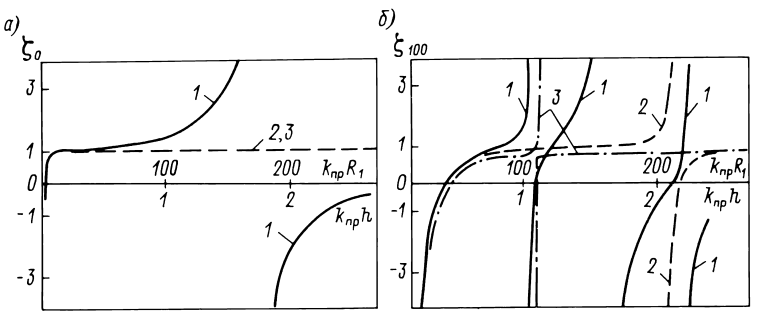


Рис. 5.17. Импедансы для различных форм колебаний упругого сферического слоя

1 – расчет по точной теории, *2* и *3* – по формулам (5.69) и (5.72) соответственно

с горизонтальной осью. Это соотношение можно записать следующим образом: $2\pi h = A\lambda_{пр}$. Из последних выражений следует: $c_{об} = c_{пр}Aa/[(n + 1/2)h]$, где $c_{об}$ – скорость волны, распространяющейся по оболочке.

Для примера, приведенного на рис. 5.17, *б*, первое резонансное значение параметра A равно 0,26. Для этого значения A последнее выражение дает следующее значение скорости: $c_{об} = 0{,}257c_{пр}$. Эта величина близка к скорости изгибной волны, распространяющейся в пластине равной толщины.

Для того чтобы в этом убедиться, вычислим скорость изгибной волны в пластине по формуле (5.73). При указанных значениях параметров получим $c_{и} \approx 0{,}253c_{пр}$, что весьма близко к найденному выше значению. Заметим, что и резонансное значение для изгибных колебаний, определенное из выражения (5.72), хорошо совпадает с величиной, найденной по точной теории (5.92). Второй резонанс для $n = 10$ имеет место при $A \approx 1$, что приводит к соотношению $c_{об} = 0{,}99c_{пр}$. Следовательно, второй корень определяет резонанс для продольных колебаний в оболочке. Значения этого корня, вычисленные по всем трем теориям, весьма близки друг к другу. Таким образом, первый и второй корни соответствуют изгибной и продольной волнам, т. е. низшим антисимметричной и симметричной модам волн Лэмба в пластине.

Третий и последующий резонансы определяются волнами Лэмба высоких порядков. Из рис. 5.17, *б* следует, что третий резонанс описывается наряду с точной теорией и теорией с учетом инерции вращения и сдвига (5.72), в то время как более простое выражение (5.69) уже не содержит информацию о соответствующих движениях оболочки.

Из результатов расчетов следует также, что значения импедансов, найденные по точной теории (5.92) и по уточненной теории тонких оболочек (5.72), близки друг к другу при значениях $k_{пр}h < (0{,}4 \ldots 0{,}5)$, хотя резонансные частоты вычисляются достаточно точно по теории (5.72) и при больших значениях $k_{пр}h$ (до $k_{пр}h \sim 2{,}5$). В работе [13] рассматривается диапазон частот, в котором оправдано применение теории тонких оболочек при решении задач рассеяния для круговых цилиндров. Из сформулированного в этой работе критерия следует, что приближенное решение, полученное с помощью теории тонких оболочек, хорошо аппроксимирует точное решение при волновых толщинах $k_{пр}h < 1/3$ (для $h/a_1 < 1/30$), что близко к значениям $k_{пр}h$, полученным выше для сферической оболочки.

Можно предложить и другой способ решения уравнений (5.87), при котором радиальные функции $U_n(r)$ и $V_n(r)$ разлагаются в степенные ряды. Получается система уравнений с коэффициентами, не содержащими сферических функций. Эти коэффициенты вычисляются гораздо проще, чем выражения (5.91). При сравнительно небольшой волновой толщине слоя в вычислительном отношении эта система может оказаться проще, чем система (5.90), особенно в случае наличия потерь в материале слоя. При этом отпадает необходимость вычисления сферических функций комплексного аргумента. Этот способ будет рассмотрен далее в связи с вычислением импедансов трансверсально-изотропного слоя.

5.6. Механические импедансы колебаний трансверсально-изотропного сферического слоя

5.6.1. Решение в виде степенных рядов. Многие конструкционные материалы являются анизотропными, т. е. их свойства, измеренннные в разных направлениях, не совпадают. Простейший вид анизотропии – *трансверсальная (поперечная) анизотропия*. В прямоугольной системе координат при такой анизотропии свойства материала одинаковы в любом направлении в одной плоскости (например, в плоскости xy), но отличаются от свойств в поперечной плоскости xz. Многие слоистые материалы (например, слоистые пластики) состоят из чередующихся тонких слоев с разными параметрами. Если толщина каждого слоя много меньше общей толщины материала и длины волны, то такую слоистую систему можно аппроксимировать трансверсально-изотропной средой.

Упругие параметры *трансверсально-изотропной среды* описываются пятью модулями упругости c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, либо техническими модулями E_1, E_3, G_1, G_3, σ_1, σ_3. Ось *3* направлена перпендикулярно к плоскости изотропии, поэтому E_1, G_1, σ_1 – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; E_3, G_3, σ_3 – те же величины в поперечной плоскости, причем $\sigma_1 = E_1/(2G_1) - 1$. Для слоистых материалов G_3 иногда называют модулем межслойного сдвига. Указанные модули связаны между собой соотношениями [31]

$$c_{11} = \frac{E_1}{(1+\sigma_1)m}\left(1 - \sigma_3^2\frac{E_1}{E_3}\right);\ c_{33} = E_3(1-\sigma_1)/m;\ c_{44} = G_3; \quad (5.94)$$

$$c_{12} = \frac{E_1}{(1+\sigma_1)m}\left(\sigma_1 + \sigma_3^2\frac{E_1}{E_3}\right);\ c_{13} = E_1\sigma_3/m;$$

$$(c_{11} - c_{12})/2 = G_1;\ \ m = 1 - \sigma_1 - 2\sigma_3^2 E_1/E_3.$$

Прохождение и отражение звука доя трансверсально-изотропной пластины рассмотрено в работе [69].

Перейдем теперь к рассмотрению трансверсально-изотропного сферического слоя [65, 70]. Будем считать, что каждый элемент слоя имеет ось симметрии бесконечного порядка, проходящую через центр сферы. Это означает, что скорости упругих волн в любой плоскости, проходящей через центр сферы, зависят от направления распространения волны по толщине слоя и отличаются от скоростей в касательной плоскости. Однако скорости в касательной плоскости от направления распространения не зависят. В этом случае упругие свойства среды описываются теми же модулями, что и для плоской трансверсально-изотропной среды, причем ось *3* направлена по радиусу, а оси *1* и *2* – в плоскости изотропии, расположенной касательно к поверхности.

Закон Гука для такого слоя записывается в виде [31]

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{\theta\theta} = c_{11}\epsilon_\theta + c_{12}\epsilon_\varphi + c_{13}\epsilon_r;\ \sigma_{r\theta} = c_{44}\epsilon_{r\theta};\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}\epsilon_\theta + c_{11}\epsilon_\varphi + c_{13}\epsilon_r;\ \sigma_{r\varphi} = c_{44}\epsilon_{r\varphi};\\
&\sigma_{rr} = c_{13}\epsilon_\theta + c_{13}\epsilon_\varphi + c_{33}\epsilon_r;\ \sigma_{\varphi\theta} = (c_{11} - c_{12})\epsilon_{\varphi\theta}/2.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.95)$$

Переход к изотропной среде осуществляется заменой $c_{12} = c_{13} = \lambda$, $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu$, где λ и μ – постоянные Ламе; $c_{44} = \mu$

В дальнейшем будем рассматривать импедансы для осесимметричных колебаний. Заметим, что это не ограничивает общности задачи о произвольном движении слоя, поскольку, как показано в п. 5.4, решение для неосесимметричного возбуждения может быть выражено через импедансы осесимметричных колебаний. В связи с этим касательные деформации $\epsilon_{r\varphi}$ и $\epsilon_{\varphi\theta}$ и соответствующие касательные напряжения равны нулю. Используя закон Гука (5.95) и соотношения (5.81), получим следующую связь между смещениями и напряжениями:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{\theta\theta} = c_{11}\frac{u_r}{r} + \frac{c_{11}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + c_{12}\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta +\\
&+ c_{12}\frac{u_r}{r} + c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}\frac{u_r}{r} + \frac{c_{12}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + c_{11}\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta +\\
&+ c_{11}\frac{u_r}{r} + c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{rr} = 2c_{13}\frac{u_r}{r} + \frac{c_{13}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + c_{13}\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + c_{33}\frac{\partial u_r}{\partial r};\\
&\sigma_{r\theta} = c_{44}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (5.96)$$

Подставив эти соотношения в уравнения равновесия (5.82, *б*), получим уравнения движения

$$c_{33}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2c_{33}}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2(c_{13} - c_{11} - c_{12})}{r^2}u_r + \frac{c_{13} + c_{44}}{r}\times$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\times \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_{13}-c_{44}-c_{11}-c_{13}}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{c_{13}+c_{44}}{r}\times \\
&\times \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{c_{44}}{r^2}\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{c_{44}}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \\
&+ \frac{c_{13}-c_{44}-c_{11}-c_{12}}{r^2}\operatorname{ctg}\theta u_\theta = \rho_M \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}; \\
&\frac{c_{13}+c_{44}}{r}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{2c_{44}+c_{11}+c_{12}}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \\
&+ \frac{c_{11}}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2c_{44}}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{c_{11}}{r^2}\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \left(c_{11} - \frac{c_{11}}{\sin^2\theta} - c_{12} - 2c_{44}\right)\frac{u_\theta}{r^2} = \rho_M \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.97)
$$

Аналогичные уравнения для изотропной среды решаются путем представления смещения в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала, что эквивалентно использованию подстановок (5.88). После этого уравнения движения распадаются на два независимых друг от друга уравнения относительно вспомогательных функций, решениями которых являются сферические функции Бесселя и Неймана. В данном случае такое представление не приводит к цели, так как уравнения, получающиеся после введения потенциалов, остаются связанными друг с другом. Поэтому приходится решать их непосредственно в перемещениях. Представим амплитуды смещений в виде разложений (5.85) и используем соотношения (5.86). После этого получим уравнения относительно неизвестных радиальных функций $U_n(r)$ и $V_n(r)$:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{s_1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{s_2}{r^2}U_n + s_3 U_n + \frac{s_4}{r}\frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{s_5}{r^2}V_n = 0; \\
&\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{s_6}{r}\frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{s_7}{r^2}V_n + s_8 V_n + \frac{s_9}{r}\frac{\partial U_n}{\partial r} + \frac{s_{10}}{r^2}U_n = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.98)
$$

Коэффициенты определяются следующим образом:

$$
s_1 = 2;\ s_2 = \frac{1}{c_{33}}\left(2(c_{13}-c_{11}-c_{12}) - n(n+1)c_{44}\right);
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&s_3 = \rho_M \omega^2 / c_{33};\ s_4 = n(n+1)(c_{13} + c_{44})/c_{33};\\
&s_5 = -n(n+1)(c_{13} - c_{44} - c_{11} - c_{12})/c_{33};\ s_6 = 2;\\
&s_7 = (c_{11} - c_{12} - 2c_{44} - n(n+1)c_{11})/c_{44};\ s_8 = \rho_M \omega^2 / c_{44};\\
&s_9 = (c_{13} + c_{44})/c_{44};\ s_{10} = (2c_{44} + c_{11} + c_{12})/c_{44};\\
&s_{11} = -n(n+1)/2;\ s_{12} = c_{33}/(2c_{13}).
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.99)
$$

К уравнениям (5.98) необходимо добавить граничные условия на внешней и внутренней поверхностях слоя. Будем считать, что касательные напряжения на поверхностях отсутствуют, а внутренняя поверхность свободна. Тогда должны выполняться граничные условия (5.89). Используя эти условия, а также два последних выражения (5.96), получим

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left(\frac{U_n}{r} + \frac{V_n}{r} s_{11} + s_{12} \frac{\partial U_n}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a_1} = -\frac{p_n}{2c_{13}};\\
&\left(\frac{U_n}{r} + \frac{V_n}{r} s_{11} + s_{12} \frac{\partial U_n}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a_2} = 0;\\
&\left(\frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r}\right)\Bigg|_{r=a_1} = 0;\\
&\left(\frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r} + \frac{U_n}{r}\right)\Bigg|_{r=a_2} = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.100)
$$

При других граничных условиях в соотношениях (5.100) следует изменить лишь правые части.

Уравнения (5.98) совместно с граничными условиями (5.100) образуют полную систему соотношений, необходимую для определения смещений. Можно использовать различные методы численного решения, например метод сеток или метод Галеркина.

Для относительно небольших волновых трещин целесообразно использовать разложения по степеням $\epsilon = z/a$, где $a = (a_1 + a_2)/2$ – средний радиус, а $z = r - a$ – координата, отсчитываемая от средней поверхности,

$$
U_n(r) = \sum_{m=0}^{M_1} x_m \epsilon^m;\ V_n(r) = \sum_{m=0}^{M_1} y_m \epsilon^m. \qquad (5.101)
$$

Заметим, что минимальное количество членов, которые необходимо учитывать, равно трем (т. е. $M_1 = 2$). Применение линейного приближения

типа $x_0 + x_1\epsilon$ и $y_0 + y_1\epsilon$ приводит к неверным результатам, в чем можно убедиться, попытавшись найти статическое смещение при $\omega = 0$, а также резонансную частоту моды $n = 0$ для изотропного слоя. Это связано с тем, что при линейном приближении используются четыре неизвестных коэффициента, которые полностью определяются из граничных условий. При этом уравнения (5.98) не учитываются. При более точном вычислении с учетом квадратичных членов и с использованием уравнений (5.98) оказывается, что три первых слагаемых в каждом из рядов (5.101) имеют одинаковый порядок даже для весьма тонких слоев.

Аналогичное разложение по степеням z/a применялось в работе [72] для решения задачи о свободных колебаниях трансверсально-изотропного сферического слоя, однако способ вычислений в этой работе, связанный с рекуррентным алгоритмом, по-видимому, невозможно использовать для задачи о вынужденных колебаниях.

Подставим сначала разложения (5.101) в граничные условия (5.100). В результате получим четыре уравнения относительно $2(M_1 + 1)$ неизвестных коэффициентов x_m, y_m:

$$x_0 + s_{11}y_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m(\epsilon_1^m + (1+\epsilon_1)s_{12}m\epsilon_1^{m-1}) +$$

$$+ y_m s_{11}\epsilon_1^m = -\frac{p_n a(1+\epsilon_1)}{2c_{13}};$$

$$x_0 + s_{11}y_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m[(-\epsilon_1)^m + (1-\epsilon_1)s_{12}m(-\epsilon_1)^{m-1}] +$$
$$+ y_m S_{11}(-\epsilon_1)^m = 0;$$
$$x_0 - y_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m\epsilon_1^m + y_m(m-1+m/\epsilon_1)\epsilon_1^m = 0;$$
$$x_0 - y_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m(-\epsilon_1)^m + y_m(m-1-m/\epsilon_1)(-\epsilon_1)^m = 0. \qquad (5.102)$$

Здесь $\epsilon_1 = h/2a$. Остальные уравнения можно получить, подставив разложения (5.101) в уравнения (5.98) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ϵ:

$$x_{q-2}\mu_L^2 + x_{q-1}2\mu_L^2 + x_q(\mu_L^2 + q(q+1) + s_2) + x_{q+1}2(q+1)^2 +$$

$$+ x_{q+2}(q+2)(q+1) + y_q(qs_4 + s_5) + y_{q+1}(q+1)s_4 = 0;$$

$$y_{q-2}\mu_T^2 + y_{q-1}2\mu_T^2 + y_q(\mu_T^2 + q(q+1) + s_7) + y_{q+1}2(q + \qquad (5.103)$$

$$+1)^2 + y_{q+2}(q+2)(q+1) + x_q(qs_9 + s_{10}) + x_{q+1}(q+1)s_9 = 0.$$

Здесь $q = 0, 1, 2, \ldots$; $\mu_L^2 = \rho_M\omega^2a^2/c_{33}$; $\mu_T^2 = \rho_M\omega^2a^2/c_{44}$ – квадраты волновых средних радиусов для продольной и сдвиговой волн соответственно, распространяющихся в направлении радиуса.

Необходимо использовать первые $2(M_1 + 1) - 4$ уравнений (5.103), причем для $q = 0$ и $q = 1$ коэффициенты с отрицательными индексами следует считать равными нулю. Тогда совместно с уравнениями (5.102) образуется система $2(M_1 + 1)$ уравнений относительно коэффициентов x_m, y_m.

Заметим, что минимальное количество уравнений даже для весьма тонкого слоя равно шести. Таким образом, для тонкого слоя должны быть использованы уравнения (5.102) и два уравнения (5.103) при $q = 0$.

Эти уравнения следует использовать для всех мод колебаний $n \neq 0$. Для $n = 0$ систему уравнений можно получить, приравняв нулю смещения u_θ, а следовательно, и V_n. Тогда останется только первое уравнение (5.98) и два первых условия (5.100). Соответствующая система уравнений будет

$$\left.\begin{aligned}
&x_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m(\epsilon_1^m + (1+\epsilon_1)s_{12}m\epsilon_1^{m-1}) = -\frac{p_0 a}{2c_{13}}(1+\epsilon_1);\\
&x_0 + \sum_{m=1}^{M_1} x_m((-\epsilon_1)^m + (1-\epsilon_1)s_{12}m(-\epsilon_1)^{m-1}) = 0;\\
&x_{q-2}\,\mu_L^2 + x_{q-1}2\mu_L^2 + x_q[\mu_L^2 + s_2 + q(q+1)] +\\
&+ x_{q+1}2(q+1)^2 + x_{q+2}(q+2)(q+1) = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.104)$$

где $q = 0, 1, 2, \ldots$

Достоинством полученных систем уравнений является их быстрая сходимость при небольших волновых толщинах оболочки, а также простота коэффициентов матрицы, в которые входят лишь элементарные операции и отсутствуют тригонометрические, а также специальные функции, вычисление которых занимает на ЭВМ значительное время.

Для тонкой оболочки достаточно оставить в системе (5.104) три первых уравнения, т. е. принять $M_1 = 2$, $q = 0$. Приравняв определитель этой системы нулю, получим резонансное значение величины μ_L^2, а из него – угловую резонансную частоту для нулевой формы колебаний:

$$\omega_0 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\rho_M}\left(c_{11} + c_{12} - \frac{2c_{13}^2}{c_{33}}\right)} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\rho_M}\frac{E_1}{(1-\nu_1)}}.$$

Для изотропной оболочки это выражение переходит в хорошо известную формулу (5.93).

Для сферически-симметричного случая ($n = 0$) уравнения (5.98) решаются аналитически. Первое уравнение системы примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{dU_0}{dr} + \left(\frac{s_2}{r^2} + k_{L3}^2\right)U_0 = 0,$$

где $k_{L3} = \omega\sqrt{\rho_M / c_{33}}$ – волновое число для продольных волн, распространяющихся вдоль радиуса.

Сравнивая последнее уравнение с уравнением, определяющим сферические функции Бесселя

$$\frac{d^2 j_q(\alpha r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dj_q(\alpha r)}{dr} + \left(-\frac{q(q+1)}{r^2} + \alpha^2\right) j_q(\alpha r) = 0,$$

находим, что решением будет функция $U_0 = j_q(\mu)$, где $\mu = k_{L3} r$, а q определяется из уравнения $s_2 = -q(q+1)$ или $q_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{1/4 - s_2}$. При отсутствии потерь в среде s_2 является вещественной величиной, причем $s_2 < 0$. Следовательно, имеются два значения $q_{1,2}$, одно из которых положительно, а другое отрицательно. Таким образом, общее решение при $n = 0$ можно записать в виде $U_0(r) = Aj_{q1}(k_{L3} r) + Bj_{q2}(k_{L3} r)$. Неизвестные коэффициенты A и B определяются из первых двух граничных условий (5.100)

$$\left(-\frac{U_0}{r} + s_{12}\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a_1} = -\frac{p_0}{2c_{13}}; \quad \left(\frac{U_0}{r} + s_{12}\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=a_2} = 0.$$

В результате получаем

$$U_0(r) = \frac{p_0 a_1}{2c_{13}}\left[-a_{22} j_{q1}(\mu) + a_{21} j_{q2}(\mu)\right] / (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \quad (5.105)$$

где

$$a_{11} = j_{q1}(\mu_1) + s_{12}\mu_1 j'_{q1}(\mu_1); \; a_{12} = j_{q2}(\mu_1) + s_{12}\mu_1 j'_{q2}(\mu_1);$$

$$a_{21} = j_{q1}(\mu_2) + s_{12}\mu_2 j'_{q1}(\mu_2); \; a_{22} = j_{q2}(\mu_2) + s_{12}\mu_2 j'_{q2}(\mu_2);$$

$$\mu_2 = k_{L3} a_2; \; \mu_1 = k_{L3} a_1; \; \mu = k_{L3} r.$$

Заметим, что при наличии в среде потерь комплексными величинами оказываются не только аргументы μ_1, μ_2, μ, но и индексы q_1 и q_2.

Для изотропной среды $s_2 = -2, q_1 = 1, q_2 = -2$. Поэтому решениями будут функции

$$j_{-2}(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} J_{-3/2}(\mu) = \frac{1}{\mu}\left(-\sin\mu - \frac{\cos\mu}{\mu}\right) = n_1(\mu)$$

и

$$j_1(\mu) = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} J_{3/2}(\mu) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\sin\mu}{\mu} - \cos\mu\right),$$

т. е. сферические функции Бесселя и Неймана с индексом, равным единице.

Несмотря на то что выражение (5.105) представляет собой замкнутую форму решения, в вычислительном отношении оно вряд ли проще, чем система (5.104). Это связано с необходимостью вычисления сферических функций Бесселя дробного индекса (а для среды с потерями – функций комплексного индекса от комплексного аргумента) с использованием интегральных представлений этих функций.

5.6.2. Результаты расчетов импедансов. После решения системы уравнений (5.102), (5.103) для $n \neq 0$ или (5.104) при $n = 0$ можно определить импедансы в виде отношения $z_n = -p_n/(-i\omega u_n)|_{r=a_1}$ или

$$z_n = -ip_n[\omega \sum_{m=0}^{M_1} x_m \epsilon_1^m]^{-1};\ \epsilon_1 = (a_1 - a_2)/a\ . \qquad (5.106)$$

Как отмечалось выше, минимальное число членов ряда, которым можно ограничиться для тонких оболочек, равно трем (т. е. $M_1 \geqslant 2$). При возрастании волновой толщины слоя и номера моды это число увеличивается. Расчеты показывают, что при волновой толщине слоя $k_{\text{пр}}h < 0{,}5$ и $n \leqslant 100$ для достижения относительной точности 10^{-4} достаточно ограничиться числом членов ряда, равным шести, а при $k_{\text{пр}}h \leqslant 1{,}5$ – числом, равным 8 ... 9.

Для изотропного слоя было проведено сравнение результатов, полученных при помощи рядов (5.101), и точного решения в форме (5.92). При вычислении по формуле (5.106) удерживалось семь членов ряда. Для всех рассмотренных значений $n \leqslant 100$ результаты, полученные этими двумя способами, практически совпадают.

Заметим, что алгоритм (5.101) позволяет без дополнительных усложнений вычислять импедансы для оболочек, обладающих потерями, т. е. при комплексных значениях волновых чисел, в то время как для выполнения расчетов по формуле (5.92) требуется иметь программы вычисления цилиндрических функций при комплексных значениях аргумента.

Для определения типов волн, распространяющихся по оболочке в случае трансверсально-изотропной среды, можно провести рассуждения, аналогичные рассуждениям для изотропного слоя. В работе [70] приведен численный пример для оболочки из стеклопластика при $h/a_1 = 0{,}01$. Из этих результатов следует, что для $n = 0$ второй резонанс наблюдается при $k_{L3}h \approx \pi$, что соответствует резонансу слоя по толщине. Для $n \gg 1$ на окружности оболочки должно укладываться $n + 0{,}5$ волн и для определения скоростей этих волн, соответствующих резонансным значениям волновой толщины, можно воспользоваться выражением $c_{\text{об}} = c_{L3}Aa/[(n + 0{,}5)h]$, где A – резонансное значение волновой толщины. В указанном примере (см. рис. 3 работы [70]) для $n = 100$ первому резонансному значению $A = 0{,}3$ отвечает волна со скоростью $c_{\text{об}} \approx 0{,}279c_{L3}$.

Вычислим скорость изгибной волны для трансверсально-изотропной пластины. Эта скорость определяется формулой (5) работы [69].

Эта формула совпадает с выражением (5.73) для изотропной пластины, но с другими значениями входящих в нее величин: $\tilde{k}_и = \omega^2 M/D_1$; $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\sigma_1^2)}$; $k_{пр} = \omega/c_{пр}$; $c_{пр} = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_M(1-\sigma_1^2)}}$; $k_R = \frac{\omega}{c_R}$. Уравнение для определения скорости волн Рэлея c_R в трансверсально-изотропной среде приведено в работе [69]. Для стеклопластика с указанными параметрами получается $c_R = 0{,}97 c_{Tз}$, где $c_{Tз} = \sqrt{G_з/\rho_M}$ – скорость поперечной волны, распространяющейся в направлении нормали.

Используя указанные соотношения, получим, что для трансверсально-изотропной пластины с теми же параметрами, что и для сферического слоя, скорость изгибной волны определяется как $c_и \approx 0{,}296 c_{Lз}$. Поэтому можно считать, что первый резонанс соответствует резонансу оболочки при изгибных колебаниях. Второе резонансное значение отвечает продольной волне.

5.7. Дифракция звука на системе трансверсально-изотропных сферических слоев

5.7.1. Формулы для вычисления звуковых полей. Приведенный в п. 5.6 алгоритм можно использовать с некоторыми изменениями не только для вычисления модовых импедансов пустотелого трансверсально-изотропного слоя, но и для сферического слоя, заполненного средой. Кроме того, он позволяет найти матрицы передачи слоев, что дает возможность решить задачу для *слоисто-неоднородной оболочки*, каждый из слоев которой является *трансверсально-изотропным*.

Рассмотрим модель, изображенную на рис. 5.1, *б*. Сохранив обозначения, указанные на этом рисунке, будем теперь считать эту конфигурацию уже не цилиндрической, а сферической. Падающую на оболочку плоскую волну представим в виде

$$p_{пад} = \exp(ikr\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n j_n(kr) P_n(\cos\theta). \qquad (5.107)$$

Рассеянную волну p_s и поле p_a в пространстве между внешней оболочкой и внутренней поверхностью запишем в виде разложений, эквивалентных выражениям (5.3) и (5.18):

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos\theta); \qquad (5.108)$$

$$p_a = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n [D_n j_n(k_0 r) + E_n N_n(k_0 r)] P_n(\cos\theta). \qquad (5.109)$$

Свойства внутренней оболочки будем по-прежнему характеризовать ее импедансом Z_a, заданным на поверхности $r = a$. Если эту поверхность можно считать обладающей локальным импедансом, то Z_a не зависит от номера моды. Если же внутренняя оболочка является упругой или представляет набор трансверсально-изотропных слоев, то следует считать,

что Z_a зависит от номера моды и определяется таким же образом, как и импеданс для внешней системы слоев.

На внешней поверхности внутренней оболочки и на внутренней поверхности системы слоев выполняются граничные условия (5.17), (5.19). Из них следуют соотношения для $n = 0, 1, 2, ...$

$$\left.\begin{aligned} \frac{Z_a}{iw_0} &= -\frac{D_n j_n(\mu_a) + E_n n_n(\mu_a)}{D_n j_n'(\mu_a) + E_n n_n'(\mu_a)}; \\ \frac{Z_0}{iw_0} &= -\frac{D_n j_n(\mu_0) + E_n n_n(\mu_0)}{D_n j_n'(\mu_0) + E_n n_n'(\mu_0)}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.110)$$

Здесь и далее: $\mu_a = k_a a$, $\mu_0 = k_0 r_0$, $\mu_M = k r_M$, $w = \rho c$, $w_0 = \rho_0 c_0$. Исключив из этих выражений D_n, или E_n, получим для $n = 0, 1, 2, ...$

$$Z_0 = -iw_0 \frac{d_1 - d_2 Z_a/(iw_0)}{d_3 - d_4 Z_a/(iw_0)}, \qquad (5.111)$$

где

$$d_1 = j_n(\mu_a) n_n(\mu_0) - j_n(\mu_0) n_n(\mu_a); \; d_2 = j_n(\mu_0) n_n'(\mu_a) - j_n'(\mu_a) n_n(\mu_0);$$

$$d_3 = j_n(\mu_a) n_n'(\mu_0) - j_n'(\mu_0) n_n(\mu_a); \; d_4 = j_n'(\mu_0) n_n'(\mu_a) - j_n'(\mu_a) n_n'(\mu_0).$$

Поступая так же, как в п. 5.1, найдем коэффициенты

$$B_n = -\frac{j_n(\mu_M) + j_n'(\mu_M) Z_{вх}/(iw)}{h_n^{(1)}(\mu_M) + h_n^{(1)}(\mu_M) Z_{вх}/(iw)}; \qquad (5.112)$$

$$D_n = i\frac{w_0}{w}\frac{\mu_0^2}{\mu_M^2}[M_{22} + M_{23} Z_{вх}] \frac{n_n(\mu_0) + n_n'(\mu_0) Z_0/(iw_0)}{h_n^{(1)}(\mu_M) + h_n^{(1)\prime}(\mu_M) Z_{вх}/(iw)};$$

$$E_n = -i\frac{w_0}{w}\frac{\mu_0^2}{\mu_M^2}[M_{22} + M_{23} Z_{вх}] \frac{j_n(\mu_0) + j_n'(\mu_0) Z_0/(iw_0)}{h_n^{(1)}(\mu_M) + h_n^{(1)\prime}(\mu_M) Z_{вх}/(iw)};$$

Здесь входной импеданс всей системы $Z_{вх}$ на внешней поверхности $r = r_M$ определяется через импеданс Z_0 на внутренней поверхности $r = r_0$ по формуле (5.9), причем в качестве Z_0 следует использовать выражение (5.111). Коэффициенты M_{jk} определяются по-прежнему соотношениями (5.5). Таким образом, звуковое поле во внешней и внутренней областях выражается через коэффициенты матрицы передачи A_{jk} для системы упругих слоев.

5.7.2. Определение элементов матрицы передачи для слоя из изотропного материала. Для системы слоев, образованной из изотропных

материалов, элементы матрицы перехода могут быть получены таким же образом, как и в п. 5.1.2, с использованием скалярного и векторного потенциалов. При этом в силу осевой симметрии, единственной отличной от нуля составляющей векторного потенциала будет азимутальная составляющая Π_φ (так как все смещения лежат в плоскостях, проходящих через ось. Выделим элементарный слой с номером m. Вместо выражений (5.12) теперь следует записать

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= (b_1 j_n(k_l r) + b_2 n_n(k_l r)) P_n(\cos\theta); \\ \Pi_\varphi &= [b_3 j_n(k_t r) + b_4 n_n(k_t r)] \partial P_n(\cos\theta)/\partial\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (5.113)$$

Здесь k_l и k_t – волновые числа для продольных и поперечных волн в элементарном слое. Все коэффициенты b_j и волновые числа в этих выражениях зависят от номера слоя.

Колебательные скорости и напряжения в сферической системе координат связаны с потенциалами смещений следующим образом:

$$v_\theta = -i\omega\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial r} - \frac{\Pi_\varphi}{r}\right]; \; v_r = -i\omega\left[\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\theta} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\Pi_\varphi\right];$$

$$\sigma_{rr} = -\lambda k_l^2 \Phi + 2\mu\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_\varphi}{\partial r\partial\theta} - \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\Pi_\varphi + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial r}\right]; \qquad (5.114)$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu\left[-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{\partial^2\Pi_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2}\Pi_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\Pi_\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\Pi_\varphi}{\sin^2\theta} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Pi_\varphi}{\partial\theta}\right)\right];$$

Подставим сюда выражения (5.113) и вычислим компоненты скоростей и напряжений на поверхностях элементарного слоя, входящего в систему слоев. Получится восемь соотношений, которые, так же как и в п. 5.1, записываются в матричной форме

$$T_1 = XB; \; T_2 = YB, \qquad (5.115)$$

где T_1 и T_2 – векторы-столбцы, составленные из компонент скоростей

и напряжений на внешней и внутренней поверхностях слоя радиусами a_1 и a_2 соответственно, т. е. $T_{1,2} = [\hat{v}_\theta^{(1,2)}, \hat{v}_{rr}^{(1,2)}, \hat{\sigma}_{rr}^{(1,2)}, \hat{\sigma}_{r\theta}^{(1,2)}]^T$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$, где уголок сверху означает, что в соответствующих величинах взяты лишь радиальные части, т. е. $v_\theta^{(1,2)} = \hat{v}_\theta^{(1,2)} \partial P_n(\cos\theta)/\partial\theta$;

$$v_r^{(1,2)} = \hat{v}_r^{(1,2)} P_n(\cos\theta); \quad \sigma_{rr}^{(1,2)} = \hat{\sigma}_{rr}^{(1,2)} P_n(\cos\theta);$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1,2)} = \hat{\sigma}_{r\theta}^{(1,2)} \partial P_n(\cos\theta)/\partial\theta;$$

через X обозначены матрица с элементами

$$x_{11} = -\frac{i\omega}{a_1} j_n(\mu_{l1}); \quad x_{12} = -\frac{i\omega}{a_1} n_n(\mu_{l1});$$

$$x_{13} = \frac{i\omega}{a_1} [\mu_{t1} j_n'(\mu_{t1} + j_n(\mu_{t1})]; \quad x_{14} = \frac{i\omega}{a_1} [\mu_{t1} n_n'(\mu_{t1}) + n_n(\mu_{t1})];$$

$$x_{21} = -i\omega k_l j_n'(\mu_{l1}); \quad x_{22} = -i\omega k_l n_n'(\mu_{l1}); \quad x_{23} = \frac{i\omega n(n+1)}{a_1} j_n(\mu_{t1});$$

$$x_{24} = \frac{i\omega n(n+1)}{a_1} n_n(\mu_{t1}); \quad x_{31} = x_{11}/a_1^2; \quad x_{32} = x_{12}/a_1^2;$$

$$x_{33} = \mu x_{13}/a_1^2; \quad x_{34} = \mu x_{14}/a_1^2; \quad x_{41} = \mu x_{31}/a_1^2;$$

$$x_{42} = \mu x_{32}/a_1^2; \quad x_{43} = x_{33}/a_1^2; \quad x_{44} = x_{34}/a_1^2, \tag{5.116}$$

причем $\mu_{l1} = k_l a_1$; $\mu_{t1} = k_t a_1$. Элементы матрицы Y образуются из элементов матрицы X заменой a_1 на a_2 и μ_{l1}, μ_{t1} на μ_{l2}, μ_{t2} соответственно. Исключим из соотношений (5.115) матрицу B. Для этого запишем $B = X^{-1} T_1$, где X^{-1} – обратная матрица и $T_2 = YX^{-1} T_1$. Таким образом, матрица передачи для слоя с номером m будет

$$A^{(m)} = YX^{-1}. \tag{5.117}$$

Результирующая матрица передачи для всей системы слоев определится в виде матричного произведения

$$A = A^{(m)} A^{(m-1)} \ldots A^{(1)}. \tag{5.118}$$

5.7.3. Определение элементов матрицы передачи для трансверсально-изотропного слоя. Алгоритм, приведенный в п. 5.6, позволяет найти входной импеданс трансверсально-изотропного слоя, т. е. отношение

$Z_n = -p_n / v_n(a_1) = \sigma_{rr} / v_n(a_1)$, связывающее радиальные компоненты напряжения и колебательной скорости (в форме колебаний с номером n) на внешней границе слоя. Для определения матрицы передачи этого недостаточно, так как необходимо знать соотношения между всеми составляющими напряжений и смещений на обеих сторонах слоя. Введем в рассмотрение матрицу проводимостей по правилу

$$\begin{array}{c|cccc} & v_r^{(1)} & v_r^{(2)} & v_\theta^{(1)} & v_\theta^{(2)} \\ \hline \sigma_{rr}^{(1)} & g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ \sigma_{rr}^{(2)} & g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} & g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} & g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{array} \qquad (5.119)$$

которое можно интерпретировать следующим образом: $g_{11} = v_r^{(1)}/\sigma_{rr}^{(1)}$, $g_{12} = v_r^{(2)}/\sigma_{rr}^{(1)}$ и т. д. Верхние индексы 1 и 2 обозначают внешнюю и внутреннюю стороны элементарного слоя. Матрицу проводимостей можно определить при помощи алгоритма, приведенного в п. 5.6, со следующими изменениями. Зададим на внешней и внутренней сторонах слоя по очереди значения напряжений, записанные в левом столбце матрицы (5.119), полагая остальные напряжения равными нулю, и определим значения скоростей, записанные в верхней строке. Для этого решим систему (5.102), (5.103) 4 раза, задав правые части в уравнениях (5.102) следующим образом: в первый раз будем считать, что в правой части первого уравнения стоит величина $a_1/(2c_{13})$, а остальные правые части – нули. Во второй раз положим, что в правой части второго уравнения стоит $a_2/(2c_{13})$, затем в третий и четвертый раз будем полагать аналогичным образом, что в третьем и четвертом уравнениях в правых частях находятся члены a_1/c_{44} и a_2/c_{44}. При каждом решении системы будем полагать, что остальные значения правых частей равны нулю. В результате получим 4 системы коэффициентов $x_m^{(j)}$, $y_m^{(j)}$, где $j = 1, 2, 3, 4$. Имея эти коэффициенты, с использованием выражений (5.101) можно найти проводимости

$$\begin{aligned} g_{j1} &= -i\omega \sum_{m=0}^{M_1} x_m^{(j)} \epsilon_1^m; \quad g_{j2} = -i\omega \sum_{m=0}^{M_1} y_m^{(j)} (-\epsilon_1)^m; \\ g_{j3} &= -i\omega \sum_{m=0}^{M_1} x_m^{(j)} \epsilon_1^m; \quad g_{j4} = -i\omega \sum_{m=0}^{M_1} y_m^{(j)} (-\epsilon_1)^m; \end{aligned} \qquad (5.120)$$

где $\epsilon_1 = (a_1 - a_2)/(2a)$; $a = (a_1 + a_2)/2$.

Дальнейшая схема вычисления элементов матрицы передачи состоит в следующем. Матрица передачи А определяется в виде

$$T_2 = AT_1. \qquad (5.121)$$

Положим сначала $\sigma_{rr}^{(2)} \neq 0$, а $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} = 0$. Тогда из (5.121) получим

$$v_\theta^{(2)} = a_{11} v_\theta^{(1)} + a_{12} v_r^{(1)};\ v_r^{(2)} = a_{21} v_\theta^{(1)} + a_{22} v_r^{(1)};$$

$$\sigma_{rr} = a_{31} v_\theta^{(1)} + a_{32} v_r^{(1)};\ 0 = a_{41} v_\theta^{(1)} + a_{42} v_r^{(1)}.$$

Разделим все эти выражения на $\sigma_{rr}^{(2)}$ и воспользуемся определениями (5.119). Это даст первые четыре уравнения:

$$g_{24} = a_{11} g_{23} + a_{12} g_{21};\ g_{22} = a_{21} g_{23} + a_{22} g_{21};$$

$$1 = a_{31} g_{23} + a_{32} g_{21};\ 0 = a_{41} g_{23} + a_{42} g_{21}.$$

Затем положим $\sigma_{r\theta}^{(1)} \neq 0$, а все остальные компоненты напряжений на границах слоя – равными нулю, и повторим эти действия, а затем то же проделаем с $\sigma_{rr}^{(2)}$ и $\sigma_{r\theta}^{(2)}$. В результате получим 16 уравнений относительно элементов матрицы перехода. Решив их, найдем все элементы:

$$a_{11} = (g_{24} g_{41} + g_{21} g_{44})/u;\ a_{12} = (g_{23} g_{44} - g_{24} g_{43})/u;$$

$$a_{21} = (-g_{22} g_{41} + g_{21} g_{42})/u;\ a_{22} = (g_{23} g_{42} + g_{11} g_{43})/u;$$

$$a_{13} = g_{14} - a_{11} g_{13} + a_{12} g_{11};\ a_{23} = -g_{12} - a_{21} g_{13} + a_{22} g_{11};$$

$$a_{14} = g_{34} - a_{11} g_{33} - a_{12} g_{31};\ a_{24} = g_{32} - a_{21} g_{33} - a_{22} g_{31};\ a_{31} = g_{41}/u;$$

$$a_{32} = -g_{43}/u;\ a_{41} = g_{21}/u;\ a_{42} = g_{23}/u;\ a_{33} = a_{32} g_{11} - a_{31} g_{13};$$

$$a_{43} = a_{42} g_{11} - a_{42} g_{13};\ a_{34} = -a_{31} g_{33} - a_{32} g_{31};\ a_{44} = -a_{41} g_{33} - a_{42} g_{31}.$$

В этих выражениях $u = g_{23} g_{41} + g_{21} g_{43}$. Имея матрицу передачи для одного слоя, можно определить и матрицу для всей системы слоев в виде (5.118).

Приведенный здесь алгоритм определения матрицы передачи можно применять и для изотропных слоев. При сравнении выражений, полученных п. 5.7.2 и 5.7.3, необходимо иметь в виду следующее. Вычисление по формуле (5.117) требует обращения матрицы размерами 4 x 4 с элементами в виде сферических функций Бесселя и Неймана, а вычисление коэффициентов $x_m^{(J)}$, $y_m^{(J)}$ – решения системы уравнений, полученной в п. 5.6.1. В рядах (5.101) необходимо удерживать по крайней мере 7 ... 10 членов, даже если толщина слоя не очень велика ($k_{\text{пр}} h < 1$). Поэтому размер системы уравнений будет бо́льшим, чем для формулы (5.117). Однако вычисление коэффициентов системы уравнений (5.102), (5.103) гораздо проще, чем коэффициентов (5.118), особенно для материалов, имеющих потери. В результате объемы вычислений по этим формулам оказываются сопоставимыми. В то же время вычисления двумя разными способами дают возможность проконтролировать правильность результатов, что в данном случае весьма существенно в связи с громоздкостью формул.

5.7.4. Поле на поверхности оболочки. Ниже приведены некоторые результаты расчета по приведенным формулам. Предполагалось, что

плоская звуковая волна вида (5.107) падает на систему, изображенную на рис. 5.1, *б*. По формуле (5.109) вычислялось поле на поверхности внутренней оболочки, т. е. при $r = a$. Внутренняя оболочка выполнена из изотропного материала с параметрами: $\rho_M = 7800$ кг/м^3, $E = 2 \cdot 10^{11}$ кг/мс^2, $\sigma = 0{,}29$, $a/h = 25$. Внешняя система состоит из единственного трансверсально-изотропного слоя с параметрами: $\rho_M = 1600$ кг/м^3, $E_1 = 1{,}7 \cdot 10^{10}(1 - i \cdot 0{,}02)$ кг/мс^2, $E_3 = 0{,}6 \cdot 10^{10}(1 - i \cdot 0{,}04)$ кг/мс^2, $G_1 = 0{,}66 \cdot 10^{10}(1 - i \cdot 0{,}04)$ кг/мс^2, $G_3 = 0{,}25 \cdot 10^{10}(1 - i \cdot 0{,}06)$ кг/м$\cdot$ с^2, $\sigma_3 = 0{,}2$, $r_M/h = 25$, $r_M/a = 1{,}25$. Параметры внешней и внутренней сред являются одинаковыми и составляют $\rho = \rho_0 = 1000$ кг/м^3, $c = c_0 = 1500$ м/с. Звуковое давление на поверхности внутренней оболочки (рис. 5.18, *а ... г*) пронормировано к удвоенной величине давления в падающей волне. Для сравнения на каждом из рисунков нанесены графики для акустически жесткой поверхности, а рис. 5.18, *б, в* позволяют определить влияние внешней оболочки. При $kh = 0{,}335$ и $kh = 2{,}01$ (см. рис. 5.18, *б, г*) в освещенной области ($\theta > 90°$) поле является равномерным, а в зоне геометрической тени ($\theta \leqslant 90°$) звуковое давление уменьшается. В центре тени при $\theta \approx 0$ образуется область фокусировки, где уровень поля повышается. Особенно заметна эта область для оболочки большой волновой толщины, когда поверхность становится акустически жесткой. Такое явление связано с синфазным сложением дифракционных волн, огибающих

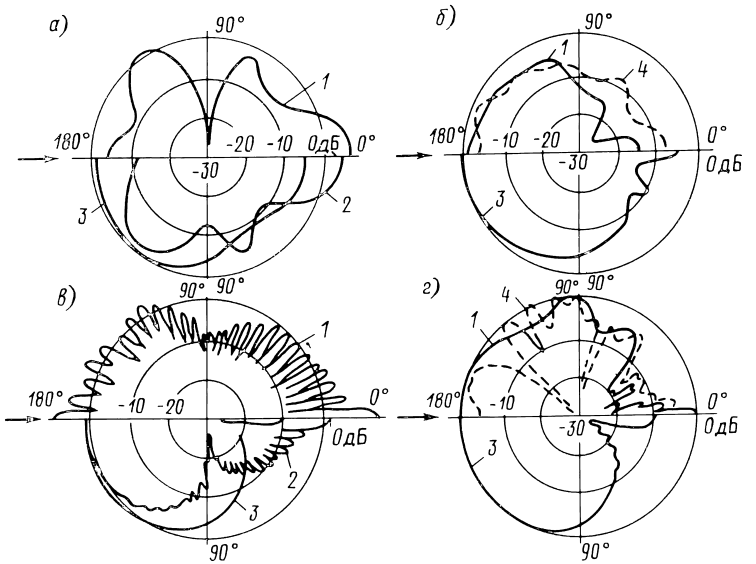


Рис. 5.18. Звуковое давление на поверхности оболочки ($r = a$) при $kh = 0{,}08$ (*а*), $kh = 0{,}335$ (*б*); $kh = 1{,}022$ (*в*), $kh = 2{,}01$ (*г*)

1 – без внешней оболочки при $\eta = 0$; *2* – то же при $\eta = 0{,}1$; *3* – жесткая внутренняя оболочка при отсутствии внешней; *4* – при наличии внешней оболочки

оболочку в центре зоны тени (рис. 5.19). В оптике освещенная центральная зона называется пятном Пуассона. Существует две точки фокусировки: B и A при $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ соответственно. Однако точка B является более сильной. Это объясняется различной степенью уменьшения амплитуды периферических волн при распространении вокруг оболочки вследствие излучения в окружающую среду. Для того чтобы попасть в точку B, лучи должны пройти 1/4 оборота, в то время как для точки A это расстояние составляет 3/4 оборота. Поэтому затухание волн для точки A оказывается значительно бо́льшим.

При $kh = 1{,}022$ (см. рис. 5.18, *в*) характер кривых сильно изменяется. Появляются значительные осцилляции, и акустическая тень за оболочкой почти полностью пропадает. Резко увеличивается уровень поля в областях фокусировки вблизи направлений $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$. Исчезновение зоны тени является следствием интенсивного возбуждения периферических волн, возникающих в результате изгибных колебаний оболочки. Это можно показать, подсчитав расстояние между интерференционными максимумами на характеристиках направленности и определив скорость периферической волны c_p. Осцилляции амплитуды возникают в результате интерференции волн, огибающих оболочку в противоположных направлениях.

Следовательно, расстояние между максимумами звукового давления на поверхности должно быть $\lambda_p/2$, где λ_p – длина периферической волны. Из этого условия получим, что $c_p/c = ka\,\Delta\theta^\circ/180^\circ$, где $\Delta\theta^\circ$ – угловое расстояние между максимумами. На рис. 5.20 кружками показаны значения скорости периферических волн, найденные исходя из периода осцилляций в зоне тени. Для характеристики, приведенной на рис. 5.18, *в*, получается $c_p/c \approx 0{,}95 \ldots 1{,}05$.

Обратимся теперь к зависимости скорости изгибной волны в стальной пластине от волновой толщины. Кривая *1* рассчитана по простейшей теории изгибных волн, кривая *2* – по формуле (5.72), учитывающей

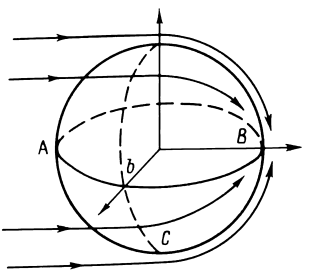


Рис. 5.19. Фокусировка периферических волн

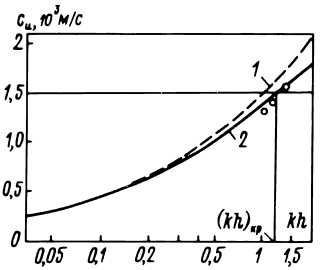


Рис. 5.20. Скорость изгибной волны в стальной пластине

1 – без учета инерции вращения и сдвига; *2* – с учетом этих эффектов; ○○○ – значения, вычисленные по осцилляциям поля на поверхности

инерцию вращения поперечных сечений и сдвиг. Заметим, что критическое значение $(kh)_{кр}$, при котором скорость изгибной волны в пластине совпадает со скоростью звука в воде, составляет 1,22. Кружки хорошо ложатся на кривую *2* вблизи критических значений волновой толщины оболочки. Таким образом, интенсивное образование периферических волн происходит в результате возбуждения изгибных колебаний в диапазоне волновых трещин, близких к критическому значению.

Активные потери в материале приводят к уменьшению амплитуды периферических волн (см. рис. 5.18, *в*). Вычисления для материала с потерями проводились формальной заменой вещественных значений модулей упругости на комплексные значения $\overline{E} = E(1 - i\eta_E)$; $\overline{G} = G(1 - i\eta_G)$, где η_E и η_G – коэффициенты потерь для продольных волн в стержне и волн сдвига. При $\eta = \eta_E = \eta_G = 0{,}1$ амплитуда периферической волны уменьшается на 10 дБ.

Уменьшить амплитуду периферических волн можно также нанесением на поверхность оболочки внешнего слоя из вязкоупругого материала. Влияние такого слоя на акустические характеристики оболочки рассматривалось в работах [96, 97, 101]. Внутри каждого слоя смещения и напряжения выражались через потенциалы и в результате для двухслойной системы без внутреннего заполнителя получалась система из девяти уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Для этой же цели можно воспользоваться общей методикой с применением переходных матриц, описанной в пп. 5.1, 5.7. Если скорость поперечной волны в вязкоупругом слое мала по сравнению со скоростью продольных волн, то при вычислениях сферических или цилиндрических функций можно встретиться с трудностью, описанной в п. 5.1.3, так как в этом случае величины $k_t a_{1,2}$ будут комплексными числами, большими по абсолютной величине. Если же совсем пренебречь возможностью возникновения поперечных волн в вязкоупругом слое, то его можно аппроксимировать жидким слоем с комплексной скоростью продольных волн c_0 и плотностью ρ_0. Модовые импедансы системы, состоящей из слоя (или системы слоев) с известными импедансами Z_n и нанесенного на внешнюю поверхность слоя с параметрами ρ_0, c_0, определяются таким же способом, как и в п. 5.7.1. Для них справедлива формула (5.111), причем в качестве внутреннего и внешнего радиусов этого слоя следует принять a и r_0 соответственно.

Влияние упругости оболочки на звуковое поле сильно проявляется при малых волновых размерах. Если $ka < 10$, то поле определяется в основном первыми несколькими членами разложения ($n < 10$). В этот диапазон волновых чисел попадает серия резонансов для каждой из мод колебаний. Некоторые из них видны на рис. 5.13. Им соответствуют точки, где модовые импедансы обращаются в нуль. В результате возникновения резонансных колебаний звуковое поле может сильно измениться.

На рис. 5.18, *а* видно изменение поля на поверхности стальной оболочки с параметрами, указанными выше, в резонансной области волновых размеров. Для сравнения приведены характеристики поля

на акустически жесткой поверхности. Видно, что звуковое давление в тыльной области упругой оболочки может быть больше звукового давления в освещенной области. Заметим, что в отличие от возбуждения периферических волн эти резонансные искажения сравнительно слабо зависят от коэффициента потерь в материале. Это связано с тем, что периферические волны возникают при больших волновых радиусах, когда волна в материале распространяется на расстояние, равное десяткам или сотням длин волн. При этом амплитуда сильно уменьшается по закону $\exp(-\eta k_1 l)$, где $k_1 l$ – волновая длина пути, даже при не очень больших коэффициентах потерь. В то же время при возникновении резонансов на низших модах колебаний из-за малых волновых размеров волновой параметр оказывается малым и существенного изменения амплитуды не происходит. Поэтому резонансные колебания при малых волновых размерах пропадают лишь при очень больших коэффициентах потерь.

Внешняя оболочки (см. рис. 5.18, *б, в*) несколько увеличивает уровень поля в зоне тени. Это связано как с распространением волн по этой оболочке, так и в промежутке между внутренней и внешней оболочками, как в волноводе. Обратим внимание также на резкий минимум при $\theta \approx 40^\circ$ на рис. 5.18, *г*. Он является следствием уменьшения коэффициента прохождения звука через пластмассовую пластину вследствие взаимодействия продольных (симметричных относительно срединной поверхности) и изгибных (антисимметричных) волн. Аналогичные кривые для пластины показаны на рис. 81 работы [63].

5.8. Отражение от оболочки звуковых импульсов

При отражении звуковых импульсов от упругих оболочек могут происходить значительные изменения формы импульса. Наиболее сильные изменения наблюдаются в той области частотного диапазона, где частотная характеристика $F(ka)$, характеризующая рассеяние в стационарном режиме, имеет резкие отклонения от регулярности, например максимумы или минимумы. В работе [82] было показано, что при облучении пустотелых цилиндрических оболочек короткими импульсами с высокочастотным заполнением в отраженной волне возникают последовательности импульсов, причем времена прихода импульсов соответствуют времени огибания оболочки периферическими волнами различных типов, например связанными с изгибными или продольными колебаниями. Большое число работ посвящено исследованию отражений импульсов от сферических оболочек. Обзоры многих из этих исследований приведены в работах [42, 142].

Рассмотрим отражение от упругого тела звукового импульса в виде ограниченного по времени синусоидального сигнала длительностью T и частотой заполнения ω_0. Воспользуемся интегральным преобразованием Фурье от вещественной функции $\psi_0(t)$, определяющей форму падающего на оболочку звукового импульса

$$\psi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega; \; S_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(t) \exp(i\omega t) dt, \qquad (5.122)$$

где $S_0(\omega)$ – *комплексный амплитудный спектр* падающего импульса. Для прямоугольного импульса с синусоидальным заполнением [т. е. для импульса вида $\psi_0(t) = \cos(\omega_0 t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, $\psi_0(t) = 0$ при $t < 0$ и $t > T$] спектр $S_0(\omega)$ имеет вид

$$S_0(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp(iu_1) \frac{\sin u_1}{u_1} + \exp(iu_2) \frac{\sin u_2}{u_2} \right];$$

$$u_1 = (\omega - \omega_0) T/2; \; u_2 = (\omega + \omega_0) T/2. \qquad (5.123)$$

Спектр отраженного сигнала $S(\omega)$ определится произведением $p_2^{(s)}(\omega) \times S_0(\omega)$, где $p_2^{(s)}(\omega)$ – частотная характеристика отраженного сигнала. Поэтому отраженный импульс можно представить в виде

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_2^{(s)}(\omega) S_0(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Подставив сюда выражение (5.56), получим

$$\psi(t') = \frac{a}{2\sqrt{2\pi} r_0} \int_{-\infty}^{\infty} F(ka) S_0(\omega) \exp(-i\omega t)' d\omega, \qquad (5.124)$$

где $t' = t - r/l$ – время, сдвинутое на величину, равную времени пробега волны от рассеивателя до точки наблюдения.

Заметим, что при отрицательных значениях частоты выполняются соотношения $S_0(-\omega) = S_0^*(\omega)$, $F(ka) = F^*(-ka)$. Поэтому выражение (5.124) можно записать в форме

$$\psi(t') = \frac{a}{r_0 \sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} F(ka) S_0(\omega) \exp(-i\omega t') d\omega. \qquad (5.125)$$

Численное интегрирование по этой формуле представляет собой довольно трудоемкую задачу. Это связано с тем, что подынтегральное выражение слабо убывает с увеличением частоты. Действительно, как следует из рис. 5.13, $F(ka)$ является неубывающей функцией частоты, а спектр (5.123) убывает по закону ω^{-1}. Улучшение сходимости может быть достигнуто, если учесть, что при увеличении ka функция $F(ka)$ либо быстро стремится к коэффициенту отражения звука $A(\omega)$ от плоской

поверхности, обладающей теми же акустическими характеристиками, что и сфера (для импедансной поверхности или упруго тела с большими потерями), либо осциллирует около этой величины (для упругого тела с малыми потерями). Аргумент комплексной функции $F(ka)$ при увеличении ka стремится к величине $-2ka$. (Такое значение фазы отражает тот факт, что отражение происходит в основном от ближайшей к излучателю точки сферы, т. е. пройденное расстояние есть $r - 2a$). Поэтому целесообразно прибавить и вычесть в подынтегральном выражении функцию $A(\omega)\exp(-i2ka)$, что приведет к разбиению отраженного поля на два слагаемых

$$\psi_1(t') = \frac{a}{\sqrt{2\pi r_0}} \operatorname{Re} \int_0^\infty S_0(\omega) A(\omega) \exp\left[-i\omega(t' + 2a/c)\right] d\omega; \qquad (5.126)$$

$$\psi_2(t') = \frac{a}{\sqrt{2\pi r_0}} \operatorname{Re} \int_0^\infty [F(ka) - A(\omega)\exp(-i2ka)] S_0(\omega) \exp(-i\omega t') d\omega. \qquad (5.127)$$

Если вернуться в выражении (5.126) к исходному времени t, то в показателе экспоненты будет $t - (r - 2a/c)$. Это означает, что время прихода импульса ψ_1 сдвинуто относительно начала отсчета на величину, соответствующую удвоенному времени пробега волны от точки приема-излучения до ближней точки сферы. Таким образом, функция $\psi_1(t')$ описывает импульс, отраженный от передней кромки тела. Если коэффициент отражения не зависит от частоты, как, например, для границы раздела двух полубесконечных сред или для поверхности, обладающей локальным импедансом, то по первой из формул (5.122) получим $\psi_1(t') = aA/(2r)\,\psi_0(t' + 2a/c)$. Отсюда следует, что форма импульса, отраженного от передней кромки тела, совпадает с формой падающего импульса. Если же коэффициент отражения зависит от частоты, то импульс будет отражаться с искажениями формы, причем искажения будут зависеть от длительности импульса. Основная энергия падающего импульса заключена в области частот $|\omega - \omega_0| \sim 2\pi/T$. Поэтому изменение формы импульса при отражении будем малым, если в указанном диапазоне функция $A(\omega)$ является достаточно гладкой, т. е. не имеющей резонансных максимумов или минимумов.

Все особенности, связанные с возбуждением оболочки и возбуждением периферических волн, заключены в слагаемом $\psi_2(t')$. При численном интегрировании по формуле (5.127) необходимо учитывать, что выражение $F(ka)$, определяемое формулой (5.55), является достаточно точным лишь в определенном диапазоне волновых толщин оболочки, ограниченном сверху некоторой предельной величиной, которой соответствует угловая частота ω_b. Эта частота зависит от той теории оболочек, для которой рассчитываются механические модовые импедансы Z_n. Поэтому пределы интегрирования должны быть ограничены

величинами $\pm\omega_b$. Это ограничение приводит к тому, что при интегрировании по частоте не будут восстанавливаться детали процесса, соответствующие малым интервалам времени.

Для пояснения рассмотрим короткий импульс в виде дельта-функции $\psi(t) = \delta(t)$. Его спектр имеет вид $S(\omega) = \text{const} = 1/\sqrt{2\pi}$. Если теперь выполнить обратное преобразование Фурье по первой из формул (5.122), то вместо исходной дельта-функции получим после интегрирования

$$\psi(t') = \frac{\omega_b}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\omega_b t)}{\omega_b t}.$$

Ширина основного максимума (по уровню 0,7) составляет $t_{\min} \approx \pi/\omega_b$. Таким образом, при ограничении пределов интегрирования невозможно различить детали импульса с масштабами меньшими, чем $t_{\min}$. Если воспользоваться теорией тонких сферических оболочек с учетом инерции вращения и сдвига (5.72), справедливой при $k_l h = \omega_b h/c_l < 1{,}2$, то оценка длительности минимально различимых деталей будет $t_{\min} \approx \approx \pi h/(1{,}2\,c_l) \sim 2h/c_l$, что соответствует удвоенному времени пробега продольной волны на толщине оболочки.

Из рис. 5.13 видно, что в диапазоне интенсивного возбуждения оболочки частотная характеристика представляет собой ряд острых максимумов, которые будут выделяться еще сильнее при исключении медленно меняющегося фона по формуле (5.127). Пусть падающий импульс является настолько коротким, что ширина его спектра больше расстояния между соседними максимумами. Например, для импульса со спектром, определяемым выражением (5.123), ширина спектра по уровню 0,7 определяется как $\Delta\omega_0 = 2\pi/T$. Поэтому будем полагать, что $\Delta\omega_0 > \Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – частотные интервалы между соседними пиками частотной характеристики. Для качественной оценки выражение в квадратных скобках в формуле (5.127) можно рассмотреть как набор дельта-функций $\sum_{q=0}^{Q} b_q \delta(\omega - \omega_q)$, где $\omega_q = \omega_1 + q\Delta\omega$; Q – число рассматриваемых максимумов; b_q – постоянные числа. В результате получим

$$\psi_2(t') = \text{Re}\left[\frac{a\exp(-i\omega t')}{r\sqrt{2\pi}} \sum_{q=0}^{Q} b_q S_0(\omega_q)\exp(-iq\Delta\omega t')\right]. \qquad (5.128)$$

Будем полагать, что произведение $b_q S_0(\omega_q)$ в не очень широком интервале частот изменяется медленно по сравнению с экспоненциальным множителем, и вынесем его за знак суммы. Обозначив несущественные для дальнейшего изложения величины через D, φ, получим после суммирования геометрической прогрессии

$$\psi_2(t') = D\frac{\sin[Q\Delta\omega t'/2]}{\sin(\Delta\omega t'/2)}\cos(\omega t' + \varphi). \qquad (5.129)$$

Таким образом, член $\psi_2(t')$ представляет собой узкополосный процесс с некоторой характерной частотой, амплитуда которого резко увеличивается в моменты времени, соответствующие условию

$$\Delta\omega t'_{\text{и}} = 2\pi n; \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.130}$$

Из последнего выражения получим $t'_{\text{и}} = n\dfrac{2\pi a}{c_x}\ \dfrac{c_x}{c\xi}$, где c_x – скорость распространения периферической волны, $\xi = k_{n+1}a - k_n a = \Delta\omega a/c$ – интервалы между экстремумами функции $F(k_2 a)$. Поскольку время одного пробега волны вокруг оболочки равно $2\pi a/c_x$, то $c_x = c\xi$. Таким образом, расстояние между экстремумами частотной характеристики отраженного сигнала связано со скоростью распространения периферических волн. Как показано в п. 5.4.1, при наличии дисперсии таким способом мы получаем не фазовую, а групповую скорость $c_{\text{гр}}$, определяющую скорость распространения энергии или импульсного пакета.

Значительное увеличение отраженного сигнала в моменты $t'_{\text{и}}$ означает что процесс представляет собой набор импульсов, следующих с интервалами, равными времени пробега периферических волн вокруг оболочки. Из выражения (5.129) следует, что форма импульсов в периферических волнах не совпадает в точности с формой падающего импульса, например в промежутках между импульсами периферических волн амплитуда отраженного сигнала не равна нулю.

При увеличении длительности падающего импульса возникнет ситуация, когда соседние импульсы периферических волн начнут накладываться друг на друга и разделить их будет невозможно. Для того чтобы определить критерий, соответствующий возникновению наложения импульсов друг на друга, рассмотрим условие $t'_1 < T$, где t'_1 определяется из выражения (5.130) при $n = 1$. Так как $T = 2\pi/\Delta\omega_0$, $t'_1 = 2\pi/\Delta\omega_0$, то $\Delta\omega_0 < \Delta\omega$. Таким образом, если ширина спектра падающего импульса меньше интервала между соседними пиками частотной характеристики,

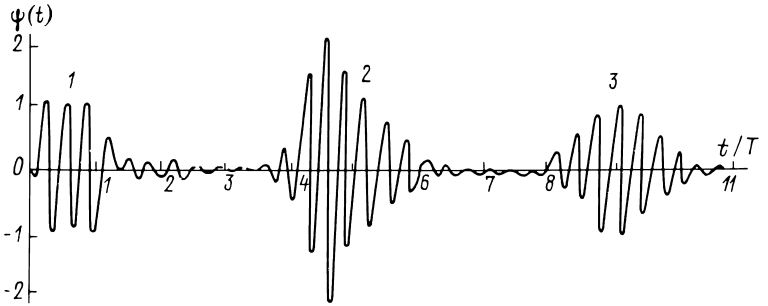


Рис. 5.21. Отражение импульса от алюминиевой сферической оболочки при следующих значениях параметров: $ka = 20, a/h = 20, T = a/c$

1 – импульс, отраженный от передней части; *2, 3* – импульсы периферических волн

то отдельные импульсы периферических волн сливаются в единый процесс. В пределе при $T \to \infty$ спектр (5.123) вырождается в дельта-функцию, а отраженный сигнал – в непрерывный процесс.

Результаты непосредственного расчета формы отраженного импульса [92] в области волновых толщин, где возбуждаются периферические волны (рис. 5.21), подтверждают описанный выше характер процесса. Первый пакет синусоид определяет импульс, отраженный от наиболее близкой к излучателю точки сферы. Остальные пакеты представляют собой импульсы периферических волн, причем амплитуда первого импульса периферической волны даже превышает амплитуду импульса, отраженного от передней части сферы. Это является следствием описанной выше фокусировки волн, обегающих сферу. Между импульсами уровень отраженного поля мал, но отличен от нуля. Заметим, что аналогичные явления, связанные с возбуждением периферических волн, существуют и для цилиндрической оболочки, однако для сферы они выражены гораздо сильнее, что также объясняется следствием фокусировки этих волн.

Интервалы между временем прихода различных волновых пакетов, а также их амплитуды зависят от размера сферы и свойств материала. Это обстоятельство легло в основу предложений, изложенных в книге [42], о процедуре определения параметров отражающего тела по параметрам отраженного импульса. Однако практическая реализация этих предложений является невыполнимой по следующим причинам. Для того чтобы определить параметры тела по деталям отраженного импульса, необходимо прежде всего быть уверенным в том, что тело является гладкой сферой, не содержащей выступов и неоднородностей (например, в виде ребер и сварных швов). В противном случае отражения от этих деталей существенно превысят упомянутые выше особенности в отраженном поле. Например, в работе [92] отмечалось, что при эксперименте даже поворот вокруг оси из-за неоднородностей сферической оболочки приводил к существенным изменениям в картине отражения. Как отмечалось в п. 5.4, наличие хотя бы небольших механических потерь в материале оболочки полностью исключает появление периферических волн. Для измерения амплитуд последовательности отраженных импульсов необходимо иметь большой запас измеряемого сигнала над уровнем фона, что весьма трудно реализовать, и, наконец, при распространении импульсов в неоднородной среде их форма сильно меняется из-за интерференции лучей, диссипации и рассеяния на неоднородностях. При этом длительность импульсов может увеличиваться в десятки и сотни раз [74]. В этих условиях выявление информативных деталей в отраженном поле практически невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апельцин В. Ф.* Метод неортогональных рядов и гипотеза Рэлея в теории дифракции//Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25. № 3. С. 329–347.

2. *Апельцин В. Ф., Кюркчан А. Г.* Гипотеза Рэлея и аналитические свойства волновых полей//Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30, № 2. С. 193–210.

3. *Безруков А. В., Приходько В. Ю., Тютекин В. В.* Рассеяние звуковых волн радиально-слоистыми цилиндрическими телами//Акуст. журн. 1987. Т. 32. № 6. С. 762–766.

4. *Белинский Б. П. Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической упругой волны на полубесконечном экране./Матем. вопросы теории дифракции и распространения волн: Тр. ин-та/Матем. институт им. В. А. Стеклова. 1971. № 115. С. 14–27.

5. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Физматгиз. 1946. 100 с.

6. *Бобровников М. С., Старовойтова Р. Л.* Дифракция цилиндрических волн на импедансном клине//Изв. вузов. Физика. 1963. № 6. С. 168–176.

7. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь. 1978. 248 с.

8. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.

9. *Он же.* О поверхностных волнах в твердом теле, удерживаемых кривизной границы//Акуст. журн. 1967. Т. 18. № 4. С. 541–555.

10. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966. 431 с.

11. *Вайнштейн Л. А., Суков А. И.* Дифракция на волнистой поверхности. Сравнение численных методов//Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 8. С. 1472–1478.

12. *Вайнштейн Л. А., Уфимцев П. Я.* Виртуальные лучи в задаче дифракции на клине//Там же. 1982. Т. 27. № 4. С. 625–633.

13. *Векслер Н. Д.* Информационные проблемы гидроупругости. Таллин: Валгус, 1980. 180 с.

14. *Векслер Н. Д.* Стационарное рассеяние акустической волны толстослойным круговым упругим цилиндром//Изв. АН ЭССР. 1986. Т. 35. № 4. С. 381–389.

15. *Векуа И. Н.* О полноте системы метагармонических функцией//Докл. АН СССР. 1953. Т. 90. № 5. С. 715–718.

16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и напряжений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

17. *Гринченко В. Т., Вовк И. В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 240 с.

18. *Гутин Л. Я.* О звуковом поле поршневых излучателей//Журн. техн. физ. 1937. Т. 7. № 10. С. 1096–1106.

19. *Евсеев В. Н., Иванов В. С., Романов В. Н.* Об определении звукового давления, создаваемого пластиной с ребрами жесткости под воздействием случайной нагрузки//Акуст. журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 220–227.

20. *Завадский В. Ю.* Вычисления волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.

21. *Заридзе Р. С., Хатиашвили Д. Ш.* Исследование резонансных свойств некоторых открытых систем. Тбилиси. Изд-во ТГУ. 1984. 114 с.

22. *Иванов В. С., Романов В. Н.* Излучение звука пластиной, возбуждаемой неоднородным полем случайных сил//Акуст. журн. 1985. Т. 31. № 2. С. 239–245.

23. *Квятковский С. О.* Возможности упрощения вычислительного процесса в методе Т-матриц на основе анализа поверхностных интегралов//Там же. 1987. Т. 33. № 1. С. 122–125.

24. *Кинг Р., У Тай-Цзунь.* Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. М.: Иностр. лит-ра: 1962. 193 с.

25. *Козырев В. А., Шендеров Е. Л.* О сопротивлении излучения цилиндра с акустически мягкими торцами//Акуст. журн. 1980. Т. 26. № 3. С. 422–430, 1981. Т. 27. № 3. С. 449–451.

26. *Коузов Д. П.* Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух упругих пластин//Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33. № 2. С. 240–250.

27. *Кудашева О. А., Шендеров Е. Л.* Звуковое поле источников, расположенных на стенках двугранных углов//Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 5. С. 631–632.

28. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз. 1963. 472 с.

29. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: В 2 т. М.–Л.: ГИИТЛ, 1951. Т. 2. 544 с.

30. *Кюркчан А. Г.* О диаграмме элемента в теории дифракционных решеток и гипотезе Рэлея//Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. № 8. С. 1525–1529.

31. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

32. *Лиходаева Е. А., Шендеров Е. Л.* Периферические волны, возникающие при дифракции плоской звуковой волны на тонкой цилиндрической оболочке//Акуст. журн. 1971. Т. 17. № 1. С. 79–84.

33. *Лямшев Л. М.* Дифракция на полубесконечной пластине в движущейся среде//Акуст. журн. 1966. Т. 12. № 3. С. 340–345.

34. *Он же.* К вопросу о принципе взаимности в акустике//Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 6. С. 1231–1234.

35. *Он же.* Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. М.: Изд-во АН СССР. 1955. 115 с.

36. *Он же.* Отражение звука цилиндрической оболочкой в движущейся среде //Акуст. журн. 1963. Т. 9. № 3. С. 329–335.

37. *Малюжинец Г. Д.* Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней//Докл. АН СССР. 1959. Т. 121. № 3. С. 436–439.

38. *Он же.* Излучение звука колеблющимися гранями произвольного клина// Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 2. С. 144–164.

39. *Малюжинец Г. Д., Тужилин А. А.* Дифракция плоской звуковой волны на тонкой полубесконечной упругой пластине//Журн. вычисл. математики и математ. физики. 1970. Т. 10. № 5. С. 1210–1227.

40. *Они же.* Электромагнитное поле, возбуждаемое электрическим диполем в угловой области//Докл. АН СССР. 1962. Т. 140. № 5. С. 1039–1042.

41. *Маляров К. В.* Передача звука через упругую слоистую цилиндрическую оболочку//Акуст. журн. 1974. Т. 10. № 1. С. 71–75.

42. *Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Стулов А. С.* Дифракция акустических импульсов на упругих телах. М.: Наука. 1979. 226 с.

43. *Музыченко В. В., Рыбак С. А.* Амплитуда обратного рассеяния звука ограниченной цилиндрической оболочкой в жидкости//Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 129–131.

44. *Петрашень Г. И., Николаев Б. Г., Коузов Д. П.* О методе рядов в теории дифракции волн от плоских угловых областей//Динамические задачи теории упругости. Л. 1958. Вып. 32. С. 5–165. (Учен. записки ЛГУ; сер. математ. наук; № 246).

45. *Поповиди-Заридзе Р. С.* Метод вспомогательных источников. Тбилиси. Изд-во ТГУ. 1984. 64 с.

46. *Прудников В. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.

47. *Рыбак С. А., Авилова Г. М.* Нормальные волны в слоисто-цилиндрических оболочках//Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 1. С. 18–22.

48. *Рэлей Дж.* Теория звука: В 2 т. М.–Л., ГИТТЛ. 1955. Т. 1–2.

49. *Скучик Е.* Основы акустики: В 2 т. М.: Мир. 1976. Т. 2. 548 с.

50. *Смарышев М. Д.* Направленность гидроакустических антенн. Л.: Судостроение. 1973. 278 с.

51. *Справочник* по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.

52. *Тютекин В. В.* Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел//Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 4. С. 529–536.

53. *Уфимцев П. Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио. 1962. 242 с.

54. *Фелсен Л., Меркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн: В 2 т. М.: Мир. 1978. Т. 1–2.

55. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио. 1970. 517 с.

56. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: Гостехиздат. 1937. 998 с.

57. *Хейфец Е. И., Смирнов Е. П., Шендеров Е. Л.* Количественный анализ звуковых полей при визуализации их теневым оптическим методом//Акуст. журн. 1973. Т. 19. № 2. С. 240–250.

58. *Хейфец Е. И., Шендеров Е. Л.* Образование каустик при взаимодействии звука с оболочками//Там же. 1972. Т. 18. № 3. С. 457–463.

59. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир. 1964. 427 с.

60. *Четаев Д. А.* Импеданс прямоугольного поршня, колеблющегося в бесконечном плоском экране//Приклад. математика и механика. 1951. Т. 15. С. 439–444.

61. *Чернов Л. А.* Теорема Кирхгофа в акустике движущейся среды//Труды комиссии по акустике АН СССР. 1950. С. 10–22.

62. *Шабров А. А.* Направленность одностороннего поршня в экране конечных размеров с переменным импедансом//Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 3. С. 114–117.

63. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение. 1972. 348 с.

64. *Он же.* Излучение звука полосой в движущуюся среду//Акуст. журн. 1966. Т. 12. № 1. С. 98–109.

65. *Он же.* Излучение звука упругими пластинами при возбуждении статистически распределенными силами//Там же. 1980. Т. 26. № 6. С. 913–920.

66. *Он же.* Импедансы колебаний трансверсально-изотропного сферического слоя//Там же. 1985. Т. 31. № 5. С. 644–649.

67. *Он же.* Импедансы осесимметричных колебаний сферической оболочки с учетом инерции вращения и сдвига//Там же. 1981. Т. 27. № 2. С. 300–306.

68. *Он же.* Применение метода наименьших квадратов для решения задач излучения и дифракции звука//Докл. VI Всесоюзн. акуст. конф. М.: Изд-во АН СССР. 1966. сер. А III-2. С. 1–4.

69. *Он же.* Прохождение звука через трансверсально-изотропную пластину// Акуст. журн. 1984. Т. 30. № 1. С. 122–129.

70. *Шендеров Е. Л., Шоренко И. Н.* Импедансы колебаний изотропной и трансверсально-изотропной сферических оболочек, вычисленные по различным теориям//Там же. 1986. Т. 32. № 1. С. 101–106.

71. *Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А.* Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев: Наук. думка, 1986. 231 с.

72. *Шульга Н. А.* Трехмерная теория колебаний оболочек//Механика композитных материалов и элементов конструкции: В 3 т. Т. 2. Под. ред.

Я. М. Григоренко. Механика элементов конструкций. Киев. Наук. думка. 1983. С. 335–356.

73. *Штаерр Е. А.* Рассеяние радиоволн на телах сложной формы. М.: Радио и связь, 1986. 183 с.

74. *Урик Дж.* Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1978. 445 с.

75. *Ambaud P., Bergassoli A.* Le probleme du diedre en acoustique//Acustica. 1972. V. 27. N 5. P. 291–298.

76. *Bates R. H. T., Wall D. S. H.* Null field approach to scalar diffraction.//Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1977. A-287. N 1339. P. 45–114.

77. *Boerska J., Lee S. W.* An exact solution for diffracion of a line-source field by a half-plane.//J. Math. Phys. 1977. V. 18. N 2. P. 321–328.

78. *Bolomey J. C., Wirgin A.* Numerical comparison fo the Greens function and the Waterman and Rayleigh theories of scattering from a cylinder with arbitrary cross-sections.//Proc. IEEE. 1974. V. 121. N 8. P. 794–800.

79. *Bowman J., Senior T. B. A.* Diffraction of a dipole field by a perfectly conducting half-plane.//Radio Sci. 1967. V. 2. N 11. P. 1339–1345.

80. *Böstrom A.* The null-field approach in series form – the direct and inverse problem.//Journ. Acoust. Soc. Am. 1986. V. 79. N 5. P. 1123–1129.

81. *Brundrit G. B.* A Solution to the problem of scalar scattering from a smooth bounded obstacle using integral equation.//Quart. J. Mech., Appl. Math. 1965. V. 18. N 2–3. P. 473–483.

82. *Burnard G. R., McKinney C. M.* Scattering of acoustic energy by solid and air-filled cylinders in water.//Journ. Acoust. Soc. Am. 1961. V. 33. N 2. P. 226–238.

83. *Burnett D. S. Soroka W. W.* Tables of rectangular piston radiation impedance functions with application to sound transmissions loss through deep apertures.//Journ. Acoust. Soc. Am. 1972. V. 51. N 5. Part 2. P. 1618–1620.

84. *Burton A. J., Miller G. L.* The application of integral equation methods to the numerical solutoin of some exterior boundary problems//Proc. of the Royal Soc. London. Ser. A. 1971. A-323. N. 1553. P. 201–210.

85. *Butler G. F.* Diffraction by a wedge with an impedance condition at the surface// Journ. of Sound and Vibr. 1976. V. 47. N 2. P. 283–286.

86. *Chertock G.* Sound radiation from vibrating surfaces//Journ. Acoust. Soc. Am. 1964. V. 64. N 7. P. 1305–1313.

87. *Ciarkowski A., Boersma J., Mittra R.* Plane wave diffraction by a wedge-a spectral domain approach//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1984. V. AP-32. N 1. P. 20–29.

88. *Coupley L. G.* Integral equatiom method for radiation from vibrating bodies// Journ. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 41. N 4. P. 807–816.

89. *DeHoop A. T.* On the plane-wave extinction cross-sections of the obstactle//Appl. Sci. Res. 1969. Ser. B. V. 6. N 7. P. 463–469.

90. *DeVore R. V., Hodge D. P., Kouyoumjian.* Radiation by finite circular pistons imbedded in a rigid circular baffle. I. Eigenfunctions solution//Journ. Acoust. Soc. Am. 1970. V. 48. N 5. Part 2. P. 1128–1134.

91. *Dickey J. W., Frisk G. V.,* Uberall H. Whispering gallerey wave modes on elastic cylinders//Journ. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 59. N. 6. P. 1339–1346.

92. *Dierics K. J., Hickling R.* Echoes from hollow aluminium spheres in water//Journ. Acoust. Soc. Am. 1967. V. 41. N 2. P. 380–393.

93. *Electromagnetic* and acoustic scattering by simple shapes/Ed. J. J. Bowman, T. B. A. Senior, P. L. E. Uslenghi. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp. 1969. V. 1–2.

94. *Electromagnetic* theory of gratings. Berlin, Heidelberg, New York. Springer-Verlag. 1980. 284 p. (Topics in current physics, V. 22).

95. *Fenlon F. H.* Calculation of the acoustic radiation field of the surface of a finite cylinder by the method of final residuals//Proc. IEEE. 1969. V. 57. N 3. P. 291–306.

96. *Flax L., Neubauer W.* Accustic reflection from layered elastic absorbtive cylinders//Journ. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61. N 2. P. 307–312.

97. *Flax L., Gaundard G. C.,* Uberall H. Theory of resonance acattering//Physical Acoustics. V. XV. New York: Academic Press. 1981. P. 191–204.

98. *Frisk G. V., Uberall H.* Creeping waves and lateral waves in accoustic scattering by large elastic cylinders//Journ. Acoustic. Soc. Am. 1976. V. 59. N 1. P. 46–54.

99. *Focus* on *T*-matrix approach: Symp. on acoustic, electromagnetic and electric wave scattering/Ed. V. V. Varadan, Varadan V. K. Ohio. 1979. 500 p.

100. *Fujiwara K., Ando Y., Maekawa Z.* Attenuation of a spherical sound wave diffraction by a thick plate//Acustica. 1973. V. 28. N 6. P. 341–347.

101. *Gaunard G. C.* High-frequency acoustic scattering from submered cylindrical shells coated with viscoelastic absorbing layers//Journ. Acoustic. Soc. Am. 1977. V. 62. N 3. P. 503–512.

102. *Hadden W. J., Pierce A. D.* Sound diffraction around screens and wedges for arbitrary point source locations//Journ. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. N 5. P. 1266–1276. Erratum: Journ. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 71. N 5. P. 1290.

103. *Holford R. L.* Scattering of sound waves at a periodical pressure–release surface. An exact solution//Journ. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 70. N 4. P. 1116–1128.

104. *Isei T., Embleton T. F. W., Piercy J. E.* Noice reduction by barriers on finite impedance ground//Journ. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. N 1. P. 46–58.

105. *Jacobsen K. R.* An alternative diffraction coefficient for the wedge//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1984. V. AP-32. N 2. P. 175–177.

106. *Kay A. F., Nihen J. F.* Scattering and current induced on sharp and round corners//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1966. V. AP-14. N 1. P. 112–114.

107. *Kawai T.* Sound diffraction by a many-sided barrier or pillar//Journ. Sound and Vibr. 1981. V. 79. N 2. P. 229–242.

108. *Kawai T., Fujimoto V., Itow T.* Noise propagation around thin half–plane// Acustica. 1977. V. 38. N 5. P. 313–325.

109. *Kending R. P., Hayek S. I.* Diffraction by a hard–soft barrier//Journ. Acoust. Sic. Am. 1981. V. 70. N 4. P. 1156–1165.

110. *Koheo Hondo, Eiju Nakajima.* Polynomial approximation of Malizhinets function//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1986. V. AP-34. N 7. P. 943–949.

111. *Kongoumjian R. G., Pathak P. M.* A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface//Proc. of the IEEE. 1974. V. 62. N 10. P. 1448–1461.

112. *Kurze V. I.* Noise reduction by barriers//Journ. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 55. N 3. P. 504–518.

113. *Levine H.* On the radiation impedance of a rectangular piston//Journ. of Sound and Vibr. V. 89. N 4. P. 447–455.

114. *Ludwig A. C.* A comparison of spherical wave boundary value matching versus inegral equation scattering solution for a perfect conducting body//IEEE Trans. on Art. and Prop. V. AP-34. N 7. P. 857–865.

115. *Makarov W. I., Rshevkin S. N.* Untersuchungen der schallansbreitung in festen Korpern, Platten und schalun mittels eines Optischen Verfahrens in Dunkelfeld//Proc. 3rd Intern. Congress on Acoustics. 1959. P. 398–403.

116. *Mangulis V.* Radiation of sound from a circular rigid piston in a nonrigid baffle// Int. Journ. Eng. Sci. 1964. V. 2. N 1. P. 115–117.

117. *Medwin H.* Shadowing by finite noise barriers//Journ. Acoust. Soc. Am. 1981. V. 69. N 4. P. 1060–1065.

118. *Medwin H., Childs E., Jebsen G. M.* Impulse studies of double diffraction: a discrete Hyigens interpretation//Journ. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72. N 3. P. 1005–1013.

119. *Mei C. C.* Note on a general relation between diffraction and radiation problems in acoustics//Journ. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61. N 1. P. 211–212.

120. *Mei K. K., Van Bladel J. G.* Scattering by perfectly conducting rectangular cylinders//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1963. V. AP-11. N 2. P. 185–192.

121. *Millar R. F.* On the Rayleigh assumption in scatteting by a periodic surface// Proc. Cambridge Phil. Soc. 1971. V. 69. P. 217–225.

122. *Mohsen A.* On the asymtotic diffraction of scalar waves by a wedge//Journ. Phis. A.: Math. and General. 1982. V. 15. N 6. P. 1965–1969.

123. *Morse Ph., Ingard U.* Linear acoustical theory. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1961. 128 p. Handbuch der Physik; Band XI/1.

124. *Mullin C. R., Sandberg R., Vellina C. O.* A numerical technique for the denermination of scattering cross–sections of infinite cylinders of arbitrary geometrical cross-sections//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1965. V. AP-13. N 1. P. 141–145.

125. *Nicolas J., Embleton T. E. W., Piercy J. H.* Precise model measurement versus theoretical prediction of barrier insertion loss in presence of ground//Journ. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 73. N 1. P. 44–54.

126. *Noble B.* The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying–factor method//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1963. V. 59. Part 2. P. 351–362.

127. *Oestreicher H. L.* The sound field of an infinitely long rectangular memrane in a moving medium//Proc. the 3rd Intern. Congress on Acoustics. Stuttgart. 1959. V. 11. P. 700–703.

128. *Pao Y. H., Varatharajulu V.* Huingens principle, radiation condition and integral formulas for the scattering of elastic waves//Journ. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 59. N 6. P. 1361–1371.

129. *Piaszuk C. M., Klosner J.* Acoustic radiation from vibrating surfaces at characteristic frequencies//Jouun. Acoust. Soc. Am. 1984. V. 75. N 2. P. 363–375.

130. *Pierce A. D.* Diffraction of sound around corners and over wide barriers//Journ. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 55. N 5. P. 941–949.

131. *Pierce A. D., Hadden W. J.* Plane wave diffraction by a wedge with finite impedance//Journ. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. N 1. P. 17–27.

132. *Pillai T. A. K., Varadan V. V., Varadan V. K.* Sound scattering by rigid and elastic infinite elliptical cylinders in water//Journ. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 72. N 3. P. 1032–1037.

133. *Rawlins A. D.* Diffraction of sound by a rigid screen with absorbent edge// Journ. of Sound and Vibr. 1976. V. 49. N 4. P. 522–541.

134. *Rawlins A. D.* Diffraction of sound by a rigid screen with a soft or perfectly absorbing edge//Journ. of Sound and Vibr. 1976. V. 45. N 1. P. 53–67.

135. *Rousseux P.* Sound attenuation by wide barriers on the ground//Acustica. 1984. V. 55. N 5. P. 293–300.

136. *Sandman B. E.* Fluid–loading influence coefficients for a finite cylindrical shell//Joun. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 60. N 6. P. 1256–1264.

137. *Schenk H. A.* Imporved integral formulation for acoustic radiation problems// Jouun. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 44. N 1. P. 44–58.

138. *Scholes W. J., Salvidge A. C., Sargent J. W.* Field performance of a noise barriers//Journ. of Sound and Vibr. 1971. V. 16. N 4. P. 617–642.

139. *Terai T.* On calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods//Journ. of Sound and Vibr. 1980. V. 69. N 1. P. 71–100.

140. *Tobocman W.* Comparison of the T–matrix and Helmholtz integral equation methods for wave scattering calculations//Journ. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 77. N 2. P. 369–374.

141. *Ursell F.* On the exterior problems of acoustics//Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973. V. 74. Part 1. P. 117–125.

142. *Überall H., Huang H.* Acoustic response of submerged elastic structures obtained through integral transforms.//Physical Acoustics/Ed. W. P. Mason, R. N. Thurston. V. XII. New-York: Academic Press. 1976. P. 217–275.

143. *Van den Berg P. M., Fokkema J. T.* The Rayleigh hypothesis in the theory of diffraction by cylindrical obstacles//IEEE Trans. of Ant. and Prop. 1979. V. AP-27. N 5. P. 577–583.

144. *Varadan V. V., Varadan V. K., Dragonette L. R.* Computation of a rigid body scattering by prolate spheroids using the T–matrix approach//Journ Acoust. Soc. Am. 1982. V. 71. N 1. P. 22–25.

145. *Varadan V. V., Varadan V. K., Su J. H.* Comprison of sound scattering by rigid and elastic obstacles in water//Journ. Acoust. Soc. Am. 1982. V. 71. N 6. P. 1377–1383.

146. *Volakis J. L., Senior T. B. A., Herman M. I.* Simple expressions for a functions occuring in diffraction theory//IEEE Trans. on Ant. and Prop. 1985. V. AP-33. N 6. P. 678–680; V. AP-35. N 7. P. 1083–1086.

147. *Waterman P. C.* Matrix theory of elastic wave scattering//Journ. Acoust. Soc. Am. 1976. V. 60. N 3. P. 567–580.

148. *Waterman P. C.* New Formulation of acoustic scattering//Journ. Acoust. Soc. Am. 1968. V. 45. N 6. 1417–1429.

149. *Williams W., Parke N. G., Moran D. A.* Acoustic radiation from a finite cylinder//Journ. Soc. Am. 1964. V. 36. N 12. P. 2316–2322.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Плоский излучатель звука** 5

1.1. О постановке задач излучения и рассеяния звука 5
1.2. Плоский излучатель в бесконечном жестком экране 8
1.2.1. Элементарный сферический излучатель (8). 1.2.2. О максимально возможном значении излучаемой удельной акустической мощности на низких частотах (10). 1.2.3. Виды плоских излучателей. Излучатель в жестком экране (12). 1.2.4. Интеграл Шоха. (16). 1.2.5. Импеданс излучения и коэффициент концентрации (18).
1.3. Излучение звука осциллирующим диском без экрана (или диском в акустически мягком экране) 24
1.3.1. Составление уравнений (24). 1.3.2. Преобразование ядра уравнения (27). 1.3.3. Звуковое давление и импеданс излучения (29). 1.3.4. Случай низких частот (31). 1.3.5. Осциллирующий диск в жестком кольцевом экране (36). 1.3.6. Односторонний излучатель без экрана и в жестком кольцевом экране (40).
1.4. Рассеяние звука на диске при нормальном падении 43
1.4.1. Акустически жесткий диск (43). 1.4.2. Акустически мягкий диск (45).
1.5. Излучение звука полосой в движущуюся среду 47

Глава 2. **Применение интегральных уравнений для решения задач излучения и дифракции звука** 51

2.1. О возможности представления решений задач излучения и дифракции звука в виде рядов по расходящимся волнам 51
2.1.1. Гипотеза Рэлея (51). 2.1.2. Погрешность в граничном условии (55).
2.2. Интегральные уравнения для поля на поверхности при излучении звука 60
2.2.1. Интеграл Гельмгольца (60). 2.2.2. Интегральное уравнение Гельмгольца (63). 2.2.3. Метод простых источников (68). 2.2.4. Использование интегрального уравнения для внутренней области (70). 2.2.5. Метод вспомогательных источников (71). 2.2.6. Комбинированный метод (73). 2.2.7. Устранение резонансных явлений изменением функции Грина (74). 2.2.8. Устранение резонансных явлений сочетанием уравнений относительно звукового давления и нормальной производной (75). 2.2.9. Излучатель в импедансном экране (78).
2.3. Интегральные уравнения для поля на поверхности при рассеянии звука 79

2.4. Метод переходных матриц в задаче о рассеянии звука телом произвольной формы (метод Т-матриц) 86
2.4.1. Переходная матрица (86). 2.4.2. Определение элементов матрицы перехода (87). 2.4.3. Метод нулевого поля (91). 2.4.4. Применение методов Т-матриц и нулевого поля к задаче об излучении звука поверхностью произвольной формы (93). 2.4.5. Замечания по поводу методов Т-матриц и нулевого поля (95).
2.5. Сопротивление излучения цилиндра конечной высоты 96
2.5.1. Выбор расчетной модели (96). 2.5.2. Излучение звука цилиндром с акустически жесткими торцами (100). 2.5.3. Импеданс излучения цилиндра с акустически мягкими торцами (105). 2.5.4. Импеданс излучения круглого поршневого излучателя конечной высоты (106). 2.5.5. Сопротивление излучения круглого поршня, расположенного в акустически мягком концентрическом экране конечной высоты (108).
2.6. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы 109
2.6.1. Излучение звука тонким осциллирующим телом. Решение на основе интеграла Гельмгольца (109). 2.6.2. Решение с использованием парных интегральных уравнений (114). 2.6.3. О вычислении ядра уравнения (118). 2.6.4. Импеданс излучения и звуковое давление в дальнем поле (119). 2.6.5. Асимптотики решения для короткого и длинного цилиндров (121). 2.6.6. Результаты расчетов (123).

Глава 3. **Дифракция и излучение звука в клиновидной области** 128

3.1. Разделение переменных для клиновидной области. 128
3.1.1. Обзор некоторых работ (128). 3.1.2. Дифракция цилиндрической звуковой волны на клине (130). 3.1.3. Дифракция цилиндрической звуковой волны на полуплоскости (135). 3.1.4. Дифракция плоской звуковой волны на клине (135). 3.1.5. Условие на ребре (136).
3.2. Разделение поля на геометрооптическую и дифракционную составляющие 137
3.2.1. Преобразование рядов к интегральной форме (137). 3.2.2. Геометрооптическая составляющая поля (140). 3.2.3. Дифракционная составляющая поля (142). 3.2.4. Обсуждение результатов (145). 3.2.5. Асимптотические формулы для дифракции плоской волны на клине (147). 3.2.6. Дифракция плоской волны на полуплоскости (148).
3.3. Дифракция сферической звуковой волны на клине 150
3.3.1. О связи между решениями задач дифракции для линейных и точечных источников (150). 3.3.2. Геометрооптическая и дифракционная составляющие звукового поля (152). 3.3.3. Звукоизолирующие барьеры (161).
3.4. Клин со звукопоглощающими гранями 163
3.4.1. Возможные виды описаний свойств звукопоглощающих экранов (163). 3.4.2. Идеально звукопоглощающий экран. Дифракция цилиндрической звуковой волны (165). 3.4.3. Дифракция плоской звуковой волны на идеальном звукопоглощающем экране (168). 3.4.4. Дифракция сферической звуковой волны на идеальном звукопоглощающем экране (169).
3.5. Клин с импедансными гранями. 170
3.5.1. Формула Г. Д. Малюжинца (170). 3.5.2. Поле в области тени для различных типов экранов (174).

3.6. Излучение звука источниками, расположенными на стенках двугранных углов 176
3.6.1. Звуковое давление в дальнем поле (176). 3.6.2. Коэффициент концентрации и сопротивление излучения (179).

Глава 4. **Рассеяние звука на некоторых телах с идеальными граничными условиями** 183

4.1. Сечение рассеяния и радиус эквивалентной сферы. Основные определения 183
4.2. Оптическая теорема. 187
4.2.1. Трехмерный случай (187). 4.2.2. Двумерный случай (190). 4.2.3. Следствия из оптической теоремы для решений в виде рядов.(192)
4.3. Обратное рассеяние звука от некоторых эталонных тел 195
4.3.1. Обратное рассеяние от длинного цилиндра (195). 4.3.2. Обратное рассеяние от конечного цилиндра для точки излучения-приема, находящейся в дальней зоне (199). 4.3.3. Отражение от плоского экрана (201). 4.3.4. Отражение от гладкой поверхности произвольной формы (203). 4.3.5. Отражение от кромки клина (205). 4.3.6. Отражение от изогнутого цилиндра или изогнутой кромки клина (207). 4.3.7. Осреднение значений поперечника рассеяния для некоторых тел по телесному углу (209).

Глава 5. **Рассеяние звука на упругих телах** 212

5.1. Многослойный упругий цилиндр. 212
5.1.1. Дифракция плоской волны на системе цилиндрических слоев (213). 5.1.2. Определение элементов матрицы передачи (216). 5.1.3. Система с внутренним упругим или импедансным цилиндром (218). 5.1.4. Дальнее поле рассеяния. Влияние резонансных явлений (223).
5.2. Периферические волны, возникающие при дифракции звука на упругих цилиндрических телах. 226
5.2.1. Тонкая цилиндрическая оболочка (226). 5.2.2. Сплошной упругий цилиндр (231).
5.3. Образование каустик при взаимодействии звука с оболочками 235
5.3.1. Каустика, возникающая в результате излучения изгибных и продольных волн в оболочке (230). 5.3.2. Каустика, возникающая при геометрооптическом отражении (239). 5.3.3. Каустика типа „шепчущей галереи" (243).
5.4. Дифракция и излучение звука тонкой сферической оболочкой 245
5.4.1. Дифракция сферической звуковой волны на оболочке (245). 5.4.2. Излучение звука оболочкой (251).
5.5. Механические импедансы колебаний сферической оболочки 256
5.5.1. Импедансы колебаний тонкой оболочки (256). 5.5.2. Импедансы колебаний оболочки произвольной волновой толщины (261).
5.6. Механические импедансы колебаний трансверсально-изотропного сферического слоя 269
5.6.1. Решение в виде степенных рядов (269). 5.6.2. Результаты расчетов импедансов (276).
5.7. Дифракция звука на системе трансверсально-изотропных сферических слоев 277
5.7.1. Формулы для вычисления звуковых полей (277). 5.7.2. Определение элементов матрицы передачи для слоя из изотропного материала (278). 5.7.3. Определение элементов матрицы передачи для трансверсально-изотропного слоя (280). 5.7.4. Поле на поверхности оболочки (282).
5.8. Отражение от оболочки звуковых импульсов. 286

Список литературы 292

Научное издание

Шендеров Евгений Львович

ИЗЛУЧЕНИЕ И РАССЕЯНИЕ ЗВУКА

Заведующий редакцией *П. К. Зубарев*
Редактор *А. И. Голикова*
Художественный редактор *Э. Я. Радомысльский*
Технический редактор *И. Ю. Подольская*
Корректор *С. Н. Маковская*
Оформление художника *В. П. Михайлуца*
ИБ № 1304

Подписано в печать. 09.10.89. М–27164. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,0. Усл. кр.-отт. 19,0. Уч.-изд. л. 19,7. Тираж 2150 экз. Изд. № 4331-88. Заказ № 618 Цена 4 р. 30 к.

Набрано в издательстве „Судостроение" на наборно-печатающем автомате оператором Т. В. Лебедевой

Издательство „Судостроение", 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „СУДОСТРОЕНИЕ"

Готовится к печати
и выйдет в 1990 г.
книга для специалистов по разработке и эксплуатации гидроакустических средств, специалистов по инженерной психологии

АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИИ ОПЕРАТОРОМ-ГИДРОАКУСТИКОМ

Ю. М. Забродин, А. П. Пахомов, В. В. Деев и др.

Доктор психологических наук, профессор Ю. М. Забродин с коллективом специалистов-гидроакустиков подготовили книгу о применении методов машинной обработки гидроакустической информации и о совершенствовании методов субъективного распознавания морских объектов с участием человека-оператора. В ней обобщены результаты деятельности человека-оператора и определен круг проблем, связанных с созданием человеко-машинных систем. Проанализированы методы и показатели, используемые в процессе психологических исследований, приведены результаты исследований деятельности оператора-гидроакустика, рассмотрены методологические, технические и математические аспекты построения автоматизированных распознающих систем.

ВНИМАНИЮ СПЕЦИАЛИСТОВ-ГИДРОАКУСТИКОВ!

В магазине № 2
„СУДОСТРОИТЕЛЬ"
(190031, Ленинград,
Садовая ул., 40)
имеются в продаже следующие книги издательства „Судостроение" в серии „Библиотека инженера-гидроакустика":

Орлов Л. В., Шабров А. А.

Гидроакустическая аппаратура рыбопромыслового флота (Расчет и проектирование). 1987. 1 р. 10 к.

Русин Ю. С.
Электропитание гидроакустической аппаратуры. 1986. 40 к.

Вышли в 1988 г. в этой серии:

Бурдик В. С. Анализ гидроакустических систем.
Пер с англ. 4 р. 80 к.
Гусев В. Г. Системы пространственно-временной обработки гидроакустической информации
1 р. 30 к.
Евтютов А. П., Митько В. Б. Инженерные расчеты в гидроакустике.
2-е изд., перераб. и доп. 1 р. 20 к.
Петровский В. С. Нестационарные задачи гидроакустики.
2 р. 70 к.
Свердлин Г. М. Гидроакустические преобразователи и антенны.
Учебник. 2-е изд., перераб. и доп. 50 коп.
Тикунов А. И. Рыбопоисковые приборы и комплексы.
Учебник. 1 р.

Выйдут в 1989 г. в этой серии:

Качанов Е. И., Пигулевский Е. Д., Яричин Е. М. Методы и средства гидроакустической голографии.
1 р. 20 к.
Милн П. Х. Гидроакустические системы позиционирования.
Пер. с англ. 1 р. 10 к.