



В.Е. ШЕВЧЕНКО

**НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ
РЕШЕНИЯ
ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
МАТЕМАТИКА

В. Е. ШЕВЧЕНКО

НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Киев
Головное издательство
издательского объединения «Вища школа»
1979

ББК 22.12
517
Ш37

УДК 518(07)

Шевченко В. Е. Некоторые способы решения логических задач.— Киев : Вища школа, Головное изд-во. 1979.—80 с. 20202. 1702020000.

В книге в научно-популярной форме изложены основные способы решения логических задач: здравым рассуждением, при помощи исчисления высказываний, составлением таблиц и построением графов.

Пособие содержит свыше ста задач для самостоятельного решения, на которые в конце книги приведены ответы и краткие указания.

Пособие рассчитано на учащихся физико-математических и средних общеобразовательных школ. Оно может быть использовано учителями математики при проведении внеурочной кружковой работы.

Ил. 29. Список лит.: 10 назв.

Редакционная коллегия: чл.-кор. АН УССР А. В. Скороход (ответственный редактор), проф. Л. А. Калужнин, проф. Н. И. Кованцов, доц. В. И. Коба, доц. Н. Я. Лященко, доц. Ю. М. Рыжов, доц. М. И. Ядренко (заместитель ответственного редактора), канд. пед. наук Л. В. Кованцова.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией Е. Л. Корженевич

Ш $\frac{20202-067}{М 211 (04)-79}$ 361—79 1702020000

© Издательское объединение «Вища школа». 1979

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит решения логических задач так называемым *здравым рассуждением*, без привлечения каких-либо специальных математических теорий, а также решения задач при помощи выполнения операций над высказываниями по правилам математической логики, путем составления таблиц и построением графов. В книге много упражнений для самостоятельного решения, к которым в конце ее приведены ответы и краткие указания.

Конечно, выделение логических задач носит до некоторой степени условный характер. Трудно определить, какую задачу следует назвать логической. Кажется, любая задача является таковой, так как для ее решения требуются определенные логические рассуждения. Но все же мы склонны одни задачи называть арифметическими, поскольку в них имеем дело с числовым материалом, другие — геометрическими или алгебраическими в зависимости от того, идет ли в них речь о фигурах или об алгебраических выражениях. Но есть задачи, в которых мы не находим ни геометрических фигур, ни чисел. В них речь идет о высказываниях об объектах, вообще говоря, произвольной природы. Эти задачи, по традиции, и называют логическими задачами.

Логические задачи еще редко встречаются на страницах школьных задачников, хотя и весьма желательны в них. Их можно встретить в сборниках и книгах занимательного характера. Часто такие задачи предлагают на олимпиадах и рекомендуют для кружковых занятий.

Настоящая книга адресована учащимся физико-математических школ. Полагаем, что ее с интересом встретят учителя математики, студенты пединститутов и учащиеся средней школы. Некоторое убеждение в этом дает наш опыт, который показывает, что такие задачи вызывают интерес уже сами по себе. К тому же они возбуждают желание к более глубокому изучению специальной математической литературы.

Критические замечания и пожелания просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.

§ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СПОСОБОМ ЗДРАВОВОГО РАССУЖДЕНИЯ

Многие логические задачи решаются без применения каких-либо теорий, так называемым *способом здравого рассуждения*, т. е. рассуждением, анализирующим каждую из возможных ситуаций. Рассматривая все возможные ситуации и отбрасывая неподходящие, мы и приходим к решению задачи. Подробнее рассмотрим этот способ на примерах таких задач.

Задача 1. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. В лодку можно взять только или волка, или козу, или капусту. Как осуществить перевоз, чтобы волк не съел козу, а коза не съела капусту?

Решение. Первый рейс единственно возможный: крестьянин перевезет козу поскольку волк капусту не ест. Вторым рейсом он может перевезти либо волка, либо капусту. Но после этого он должен козу увезти на противоположный берег. В этом-то и заключается необычность мышления, которая и приводит к решению задачи. Третьим рейсом крестьянин перевозит, соответственно, капусту или волка и уж четвертым рейсом снова перевозит козу.

Рассмотрим более сложную задачу.

Задача 2. К реке подошли три генерала: Грозный, Лихой и Строгий, каждый со своим слугой. Как им переправиться на другой берег реки на двухместной лодке, если каждый из генералов запрещает своему слуге находиться при других генералах во время своего отсутствия?

Решение. Условия задачи не будут нарушены, если первым рейсом отправятся двое слуг. Переправившись через реку, один из них остается, а другой возвращает лодку. Вторым рейсом переезжают еще двое слуг, и один из них, например слуга генерала Грозного, возвращает лодку и остается со своим генералом на берегу. Третьим рейсом

отправляются через реку генералы Лихой и Строгий. Кому теперь возвращать лодку? Ни один из генералов этого сделать не может, поскольку его слуга не может оставаться в присутствии чужого генерала, если здесь нет своего генерала. Этого не может сделать и ни один из слуг, так как, переправив лодку на противоположный берег, он там будет находиться в присутствии чужого генерала. Выход только один — лодку должен возвращать один из генералов со своим слугой. Четвертым рейсом поедут два генерала, а затем еще двумя рейсами слуга перевезет оставшихся двух слуг.

Примечание. Первым рейсом может отправиться какой-либо генерал со своим слугой. Генерал возвратит лодку, а затем уже вторым рейсом отправятся двое слуг. В дальнейшем решение совпадает с рассмотренным.

Задача 3. (На студенческом математическом вечере. Шуточный номер — «проверка логического мышления и сообразительности»).

Трое испытуемых студентов садятся друг другу в затылок. (Понятно, что сидящий сзади видит головы двух впереди сидящих товарищей, а сидящий вторым видит голову только одного впереди сидящего. Обращиваться им запрещено).

Ведущий показывает испытуемым, что у него имеется пять колпаков: три черных и два белых. Затем он каждому надевает на голову колпак неизвестного для испытуемого цвета, а оставшиеся колпаки прячет.

Испытуемым предлагается в течение короткого времени назвать цвет своего колпака.

Потребуем доказать, что каким бы образом ни были распределены цвета колпаков, среди студентов найдется по крайней мере один, который может совершенно уверенно назвать цвет своего колпака.

Решение. Нам нужно рассмотреть различное распределение цветов при надевании колпаков.

1. Совершенно тривиальный случай, если первым двум студентам будут надеты белые колпаки. Так как их только два и сидящий сзади видит их надетыми на головы впереди сидящих, то он определенно скажет, что у него на голове черный колпак. (Безусловно, что после такого заявления сзади сидящего каждый из впереди сидящих может сказать, что у него на голове белый колпак).

2. Наденем на голову первому студенту белый колпак, а второму — черный. Теперь сидящий сзади не может знать,

какого цвета колпак у него на голове, поскольку он может быть либо белым, либо черным. В этом случае сидящий вторым рассуждает так: «Я вижу белый колпак. Если бы и на мне был белый колпак, то сидящий сзади уже заявил бы, что на нем черный колпак. Но он молчит. Значит, он не видит на мне белого колпака. Следовательно, на мне черный колпак».

Таким образом, в этом случае второй студент может вполне определенно заявить, что на нем черный колпак. (После такого заявления и впереди сидящий может сказать определенно, что на нем белый колпак. Сидящий же сзади назвать цвет своего колпака не может).

3. Наденем теперь впереди сидящему студенту черный колпак, а второму и третьему — безразлично какой. В этом случае ни третий, ни второй не могут назвать цвет своего колпака. Сидящий первым будет рассуждать так: «Если бы на мне был белый колпак, то кто-нибудь из сзади сидящих знал бы цвет своего колпака и сказал бы об этом. Но они оба молчат. Значит, на мне нет белого колпака». В этом случае впереди сидящий может определенно заявить, что на нем черный колпак.

Задача 4. Среди семи внешне одинаковых монет есть одна фальшивая — более легкая по весу. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах (без гирь) найти фальшивую монету?

Решение. Разложим монеты на три кучки — по три, две и две монеты. Затем взвесим монеты в одинаковых кучках (первое взвешивание). Если весы оказались не в равновесии, то в более легкой кучке еще одним взвешиванием находим фальшивую монету. Если же весы в равновесии, то фальшивая монета находится среди трех оставшихся монет. Положим на каждую чашку весов по одной монете. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета — более легкая. Если же весы в равновесии, то фальшивая монета — оставшаяся.

При условии, что фальшивая монета более тяжелая по весу, чем нормальная, задача решается аналогично.

Задача 5. Среди 12-ти внешне одинаковых монет есть одна фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее, чем нормальная монета. Как при помощи трех взвешиваний на чашечных весах (без гирь) найти фальшивую монету?

Решение. Разложим монеты на три кучки — по четыре монеты в каждой. Взвесим монеты в двух кучках (первое взвешивание). Рассмотрим возможные случаи.

1. Весы находятся в равновесии. В этом случае фальшивая монета находится среди четырех монет оставшейся кучки. Из четырех монет оставшейся кучки мы возьмем на чашку весов только три монеты, а на другую чашку весов положим три нормальные монеты (второе взвешивание). Если весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — четвертая оставшаяся, и третьим взвешиванием мы определяем, тяжелее или легче она, чем нормальная монета. Если же весы находятся не в равновесии, то это второе взвешивание нам определяет, тяжелее или легче фальшивая монета, чем нормальная. Затем третьим взвешиванием мы из трех монет выделяем фальшивую (см. предыдущую задачу).

2. Весы находятся не в равновесии. Пусть, для конкретности, монеты первой кучки перетягивают монеты второй кучки. Это нам дает некоторую информацию, а именно: 1) в оставшейся третьей кучке все монеты нормальные; 2) если фальшивая монета попала в первую кучку, то вторая кучка состоит из нормальных монет, а фальшивая монета тяжелее нормальной (нам это, конечно, важно знать); 3) если фальшивая монета попала во вторую кучку, то первая кучка состоит из нормальных монет, а фальшивая монета легче нормальной.

Для дальнейшей работы нам важно ориентироваться, какие монеты и из какой кучки мы будем брать.

Продолжаем взвешивание. Положим на одну чашку весов две монеты из первой кучки и одну монету из второй кучки, а на другую чашку — оставшиеся две монеты из первой кучки и одну нормальную монету (это у нас второе взвешивание).

Если весы оказались в равновесии, то среди монет, лежащих на весах, нет фальшивой, а фальшивая находится среди трех оставшихся монет второй кучки. Значит, фальшивая монета легче нормальной. Теперь третьим взвешиванием легко находим среди трех монет фальшивую, уже зная, что она легче нормальной (см. предыдущую задачу).

Если весы не уравнились, то нужно рассмотреть еще два случая:

а) Тяжелее оказалась та чашка, на которой лежит монета из второй кучки (напомним, что она одна). Это значит, что монета из второй кучки нормальная, но вместе с ней лежит фальшивая монета из первой кучки (т. е. фальшивая монета тяжелее нормальной). Теперь третьим взвешиванием среди двух монет найдем фальшивую, более тяжелую по весу.

б) Тяжелее оказалась та чашка, на которой лежит монета из третьей кучки (т. е. нормальная монета). Это может быть или за счет того, что вместе с ней лежит фальшивая монета из первой кучки и она тяжелее нормальной, или же за счет того, что монета из второй кучки на другой чашке весов фальшивая и она легче нормальной. Все это выясняется третьим взвешиванием, при котором на чашки весов мы положим по одной монете из первой кучки, лежащие на одной чашке с монетой из третьей кучки. Неравновесие указывает на то, что фальшивая монета та, что тяжелее, и что она тяжелее нормальной. Равновесие указывает на то, что фальшивая монета была на другой чашке весов, что она из второй кучки и легче нормальной.

Примечание. В случае (2) можно было бы при втором взвешивании разделить между чашками весов монеты не первой кучки, а второй. Предлагаем читателю самостоятельно продумать все возможные ситуации при этом условии.

Упражнения

1. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

— Кто испачкал скатерть? — спросила бабушка.

— Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша. — Это сделал Боря.

— Ну, а ты что скажешь? — спросила бабушка Борю.

— Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря. — А Алеша не пачкал скатерть.

— Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете, — рассердилась бабушка. — Ну, а каков твой ответ? — спросила она Витю.

— Не сердись, бабуля! Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, — сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

2. К реке подошли три генерала — Грозный, Строгий и Лихой, причем с Грозным двое слуг, со Строгим один слуга, а Лихой без слуги. Как им переправиться с одного берега на другой на двухместной лодке, если каждый из генералов запрещает своему слуге находиться с другими генералами во время своего отсутствия?

3. Решить предыдущую задачу при условии, что и у генерала Лихого есть слуга.

4. На некотором острове отдельными селениями живут два племени: «правдолюбы» и «шутники». «Правдолюбы» всегда говорят только правду, а «шутники» постоянно шутят, а поэтому всегда лгут. Жители одного племени бывают в селении другого племени и наоборот.

В одно из этих селений попал путешественник, но не знает, в какое. Доказать, что путешественнику достаточно первому встречному задать вопрос: «Вы местный?», чтобы по ответу определить, в селении какого племени он находится.

5. На листке написаны два натуральных числа. Двое играющих по очереди делают ходы. Ход играющего состоит в том, что он зачеркивает любое из написанных чисел и вместо него пишет любое натуральное

число, меньшее зачеркнутого, или ноль. Игра продолжается до тех пор, пока не будут написаны ноли. Выигрывает тот, кто последним пишет ноль. Как должен вести игру начинающий, чтобы выиграть? В каком случае для выигрыша следует первый ход уступить противнику?

6. На листке написаны три натуральных числа, из которых одно равно единице, а два других произвольные. Двое играющих по очереди делают ходы. Ход играющего состоит в том, что он зачеркивает любое из написанных чисел и вместо него пишет любое натуральное число, меньшее зачеркнутого, или ноль. Игра продолжается до тех пор, пока всюду будут написаны ноли. Выигрывает тот, кто последним пишет ноль. Какова тактика игры начинающего, чтобы выиграть? В каком случае (при безошибочной игре противника) выигрыш начинающего невозможен?

7. Четыре человека сидят друг за другом так, что сидящий сзади видит головы трех впереди сидящих, предпоследний видит головы двух впереди сидящих, второй видит голову впереди сидящего. Оборачиваться им запрещено. Они знают, что есть семь шляп: три белых и четыре черных. Каждому из них на голову надевают шляпу так, что он не видит, какого цвета шляпа ему надета, и не знает, какие шляпы остались. Доказать, что каким бы образом ни были надеты шляпы, всегда найдется по крайней мере один из них, который может вполне определенно сказать, какого цвета шляпа у него на голове.

8. Среди 26-ти монет, внешне одинаковых, есть одна фальшивая, более тяжелая по весу. Как при помощи трех взвешиваний на чашечных весах (без гирь) найти фальшивую монету?

9. Три друга — Игорь, Павел и Олег — окончили различные факультеты пединститута и получили назначения по специальности в города Артемовск, Донецк и Лисичанск. В Донецке не оказалось свободного места для математика. Химик обрадовался назначению в Лисичанск. Олегу сразу же поручили организацию географического кружка для учащихся. Павел отказался от направления в Лисичанск.

Кто из друзей какой факультет окончил и в какой город получил назначение на работу?

10. Четыре мальчика — Игорь, Сережа, Миша и Юра — играли во дворе в футбол и разбили окно.

— Кто разбил окно? — спросила тетя Даша.

— Окно разбил или ваш Юра, или Миша, — сказал Сережа.

— Я окно не разбивал, — возразил Юра.

— Это сделал Миша, — сказал Игорь.

— Нет, Игорь, ты ошибся, — заметил Миша.

— Ну что, задали они тебе задачу? — сказал дядя Вася, наблюдавший эту беседу. — Могу еще добавить, что трое из этих футболистов всегда говорят только правду. А вот четвертого я плохо знаю.

Кто разбил окно? С кем из мальчиков дядя Вася был мало знаком?

§ 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

В своей практической деятельности мы постоянно имеем дело с высказываниями. *Высказыванием называется всякое утверждение (или всякое предложение), о котором можно судить, истинно оно или ложно.* Например, утверждение « $2 > 0$ » является высказыванием и оно истинно, а

утверждение « $2 < 0$ » — ложно, утверждение же « $x^2 + y^2 = z^2$ » высказыванием не является, ибо о нем нельзя судить, истинное оно или ложное.

Будем обозначать высказывания малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, \dots

Конкретное содержание высказывания нас не будет интересовать. Единственной существенной для нас характеристикой каждого высказывания есть *истинность* или *ложность*; эту характеристику назовем *значением истинности* (или истинностным значением) данного высказывания.

Условимся значение истинности высказывания обозначать числом 1, если высказывание истинно, и числом 0, если высказывание ложно. Таким образом, 1 и 0 выступают как значения некоторой функции, заданной на множестве высказываний и принимающей только два значения: 1 или 0. Следовало бы ввести специальный символ для обозначения истинностного значения высказывания, подобно тому, как мы вводим обозначения функции $f(x)$, но мы этого не будем делать, чтобы не загромождать изложение символикой, а будем истинное высказывание приравнивать числу 1, а ложное — числу 0. Например, высказывание «Москва — столица СССР» — истинное. Если его обозначить буквой a , то можно записать: $a = 1$. Высказывание «сумма чисел 2 и 3 больше шести» — ложное. Если его обозначить буквой c , то можно записать: $c = 0$.

Те утверждения (или те предложения), о которых нельзя судить — истинны они или ложны, не являются высказываниями. Например, утверждение «эта книга интересная» не является высказыванием. Не будут высказываниями предложения вопросительные и восклицательные.

Высказываниями не будут и утверждения вида: $3 + x = 7$; «число x делится на 5»; $\sin(x + y) = 0,5$ и др. Это так называемые *высказывательные формы*, или *предикаты*, которых мы здесь не будем затрагивать. Все же скажем, что высказывательные формы становятся высказываниями, если переменной (или переменным — если их несколько) придать некоторое числовое значение (конечно, из области допустимых), или применить *квантор* по какому-нибудь переменному, или комбинируя и то и другое. Например: $(\exists x) (3 + x = 7)$ (читается: существует такое значение x , что $3 + x = 7$) стало истинным высказыванием, а вот $(\forall x) (3 + x = 7)$ (читается: для всякого x справедливо равенство $3 + x = 7$) тоже представляет собой

высказывание, но оно ложное. Понятно, что высказывательные формы можно построить и о предметах нечисловой природы. Важно научиться отличать высказывания от невысказываний и уметь вводить для высказываний буквенные обозначения.

Различают высказывания простые и сложные. Высказывание считается простым, если никакая его часть не является высказыванием. *Сложные* высказывания характеризуются тем, что образованы из нескольких высказываний с помощью определенных способов соединения высказываний; простые высказывания этим свойством не обладают. Например, высказывание «Рим — столица Франции» — простое. А высказывание «неверно, что Рим — столица Франции» — сложное высказывание, потому что его часть является тоже высказыванием.

Запись высказывания при помощи символов называют *логической формулой* или формулой алгебры высказываний, а то и просто *формулой*, если не происходит смешивания с другими формулами.

Обычно удобно логическую формулу обозначать одной буквой, преимущественно заглавной.

Упражнения

11. В данном предложении выделить простые высказывания и обозначить их буквами. Определить, истинны они или ложны.

«Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов».

12. Какие из перечисленных ниже предложений являются высказываниями и каково значение их истинности?

1) «В плоскости существует прямая, перпендикулярная данной прямой».

2) «Сумма внутренних углов данного треугольника больше двух прямых углов».

3) «Ряд простых чисел бесконечен».

4) «Число x делится на 3».

5) «Существует такое значение x , что $x^2 - 5x + 6 = 0$ ».

6) «Треугольник ABC — прямоугольный».

13. В данных предложениях найти простые высказывания и обозначить их буквами:

1) «В велогонке Коля был первым, Витя — вторым, а Сережа пришел последним».

2) «Мальчик запланировал выполнить такую работу: выучить уроки, поиграть с сестричкой, почитать книгу и поиграть в футбол».

3) «Если числитель и знаменатель дроби умножить на некоторое отличное от нуля число, то значение дроби не изменится».

4) «Если сумма цифр числа делится на девять, то и само число делится на девять».

5) «Ревела буря, дождь шумел, во мраке молнии блистали, и беспрерывно гром гремел, и ветры в дебрях бушевали».

6) «Если завтра будет дождь, мы не поедem в лес за грибами».

7) «Павел выиграл партию в шахматы у Василия, а партии с Олегом и Игорем свел вничью».

Логические операции. Из простых или элементарных высказываний можно составлять сложные высказывания или формулы. Для этой цели употребляют символы, отвечающие союзам «и», «или», «если ..., то ...» и отрицанию «не» или «неверно, что ...». Важно то, что значение истинности сложных высказываний полностью определяется значениями истинности составляющих элементарных высказываний. Это дает возможность заниматься своеобразным исчислением высказываний (чаще называют алгеброй высказываний), т. е. определять значение истинности формулы на основании значений истинности составляющих высказываний.

1. Отрицание. Имея высказывание a , можно образовать новое высказывание, которое читается как «не a » или «неверно, что a ». Для обозначения отрицания высказывания употребляют символ « \neg » и пишут $\neg a$. Иногда обозначают отрицание еще так: \bar{a} . Мы будем пользоваться преимущественно первым обозначением.

Таблица истинности отрицания $\neg a$ чрезвычайно проста:

a	$\neg a$
1	0
0	1

Можно сказать, что отрицание — это такая логическая операция, которая любому высказыванию a ставит в соответствие высказывание $\neg a$, значение истинности которого определяется значением истинности высказывания a по правилу, указанному в таблице. На таблицу можно смотреть как на косвенное определение отрицания.

2. Конъюнкция. Конъюнкция двух высказываний a и b соответствует союзу «и». Она обозначается символом « \wedge » или « $\&$ ». Будем пользоваться первым символом.

Запись $a \wedge b$ читают так: «конъюнкция высказываний a, b », или « a конъюнкция b », или «высказывание a и высказывание b », или, совсем коротко, « a и b ».

Таблица истинности конъюнкции двух высказываний a и b такова:

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Конъюнкция истинна только тогда, когда истинно каждое из составляющих высказываний. Поэтому если конъюнкция двух высказываний истинна, то будет истинным и каждое из составляющих высказываний. Полученный вывод легко распространить и на конъюнкцию большего числа высказываний. При решении логических задач часто пользуются именно этим свойством конъюнкции.

В обыденной речи иногда в роли союза «и» выступают союзы «а», «но». Например, «Антон был победителем, а Виктор занял второе место». В этом высказывании союз «а» выступает в роли союза «и». Это же предложение можно сформулировать и так: «Антон был победителем, и Виктор занял второе место».

Упражнения

14. Обозначить буквами простые высказывания и записать следующие предложения в виде формул:

- 1) «Число 144 делится на 2 и на 3, но не делится на 5».
- 2) «В параллелограмме противоположные стороны попарно конгруэнтны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам».
- 3) «Завтра мы пойдем на пляж, позагорает, но купаться не будем».
- 4) «Петя не только хорошо учится, но занимается спортом и посещает кружок радиолюбителей».
- 5) «Наш класс принимал участие в сборе металлолома, в озеленении школьного двора и в пионерской игре».

15. Известно, что конъюнкция $a \wedge (\neg b) \wedge (\neg c)$ истинна. Что можно сказать о значении истинности самих высказываний a , b , c ?

16. Составить таблицы истинности для следующих формул:

- 1) $a \wedge (\neg b)$; 2) $(\neg a) \wedge (\neg b) \wedge c$; 3) $a \wedge b \wedge (\neg c)$; 4) $(\neg a) \wedge (\neg b)$; 5) $(\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c)$.

3. Дизъюнкция. Дизъюнкция двух высказываний a и b соответствует союзу «или» и обозначается символом « \vee » или символом « $+$ ».

Запись $a \vee b$ может быть прочитана так: «дизъюнкция высказываний a , b » или « a дизъюнкция b », или «высказывание a или высказывание b », или, совсем коротко, « a или b ».

Таблица истинности дизъюнкции двух высказываний a и b такова:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Дизъюнкция двух высказываний ложна только в том случае, когда ложно каждое из составляющих высказываний. В остальных случаях дизъюнкция истинна. Поэтому если дизъюнкция двух высказываний ложна, то будет ложным и каждое из составляющих высказываний. Полученный вывод легко распространяется и на дизъюнкцию большего числа высказываний. Этим свойством дизъюнкции также часто пользуются при решении логических задач, так как в этом случае по значению истинности дизъюнкции можно сделать однозначный вывод о значении истинности составляющих ее высказываний.

Примечание. Кроме дизъюнкции, значение истинности которой дано в только что рассмотренной таблице, различают еще так называемую *разделенную дизъюнкцию*, которая истинна в том и только в том случае, когда одно из высказываний истинно, а другое ложно. Для такой дизъюнкции мы не будем вводить специального символа, так как она выражается через уже рассмотренные нами дизъюнкцию и конъюнкцию. В самом деле, рассмотрим сложное высказывание

$$(a \wedge (\neg b)) \vee ((\neg a) \wedge b)$$

(скобки, как всегда, регулируют порядок выполнения логических операций). Приведенная таблица показывает, что эта формула соответству-

a	b	$(a \wedge (\neg b)) \vee ((\neg a) \wedge b)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ет разделенной дизъюнкции, так как она истинна тогда и только тогда, когда одно из высказываний истинно, а другое ложно.

Упражнения

17. Записать следующие предложения в виде формул, вводя буквенные обозначения для простых высказываний:

1) «Завтра я или пойду в кино, или поиграю с мальчиками в футбол, или буду помогать папе».

2) «Об этом четырехугольнике для дальнейшего его использования достаточно знать, или что его стороны попарно параллельны, или что противоположные стороны попарно конгруэнтны, или что одна пара противоположных сторон параллельна и конгруэнтна, или что диагонали в точке пересечения делятся пополам».

3) «Летом я поеду в Москву или в Ленинград, а мой товарищ поедет в пионерский лагерь или в деревню к бабушке».

4) «Натуральное число не может быть одновременно и простым и составным».

18. Известно, что дизъюнкция $(a \vee (\neg b) \vee (\neg c))$ ложна. Что можно сказать о значении истинности самих высказываний a, b, c ?

19. Составить таблицы истинности для следующих формул: 1) $a \wedge (b \vee (\neg a))$; 2) $(a \vee b) \wedge (a \vee (\neg b))$; 3) $(a \wedge b) \vee c$; 4) $(a \wedge b) \vee (\neg c)$; 5) $(a \vee (\neg b)) \wedge c$; 6) $a \vee (\neg (a \wedge b))$; 7) $(\neg (a \vee b)) \wedge c$; 8) $(\neg a) \wedge (\neg (a \vee b))$; 9) $(\neg a) \vee (a \wedge (\neg b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b)))$.

4. Импликация. Импликация двух высказываний соответствует союзу «если ..., то ...» и обозначается символом « \Rightarrow » или « \supset ».

Запись $a \Rightarrow b$ может быть прочитана так: «если a , то b », или «если верно высказывание a , то верно и высказывание b », или «высказывание a имплицирует высказывание b », или «из высказывания a следует высказывание b », а также, более коротко, «из a следует b », « a влечет b », « b следует из a » и др.

Таблица истинности импликации двух высказываний такова:

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эта таблица показывает, что из истинного высказывания a следует только истинное высказывание b . Ложное же высказывание a имплицирует как ложное, так и истинное высказывание b (говорят: из лжи — все что угодно).

В импликации $a \Rightarrow b$ высказывание a называют *условием* или *посылкой* импликации, а b — *заключением* или *следствием* импликации.

Пусть a и b — какие-либо высказывания (простые или сложные). Если импликация $a \Rightarrow b$ принимает значение истинности только истина (т. е. 1), то говорят, что a *логи-*

чески влечет b или что b является логическим следствием a . Например, конъюнкция высказываний a и b логически влечет каждое из высказываний a , b .

Упражнения

20. Показать, что из определения импликации (см. таблицу) вытекает истинность следующих утверждений:

- 1) «Если b истинно, то $a \Rightarrow b$ истинно».
- 2) «Если a ложно, то $a \Rightarrow b$ истинно».
- 3) «Из истинного условия следует только истинное заключение».
- 4) «Ложь следует только из лжи».

21. Показать, что из значения истинности импликации $a \Rightarrow b$ нельзя дать определенного заключения о значении истинности импликации $b \Rightarrow a$.

22. Составлением таблицы истинности показать, что из истинного высказывания a л о г и ч е с к и с л е д у е т импликация $b \Rightarrow a$ (говорят, что если a истинно, то a следует из всякого b).

23. Составлением таблицы истинности показать, что если высказывание a ложно, то из него л о г и ч е с к и с л е д у е т импликация $a \Rightarrow b$.

24. Составить таблицы истинности для следующих формул:

- 1) $(a \Rightarrow b) \vee (\neg b)$; 2) $(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow (\neg a))$; 3) $a \wedge b \wedge (a \Rightarrow \neg b)$; 4) $(\neg (a \wedge (\neg b))) \Rightarrow ((\neg b) \Rightarrow a)$; 5) $(a \Rightarrow b) \vee (a \Rightarrow (a \wedge b))$.

25. Записать высказывание формулой и составить для нее таблицу истинности: «Если завтра не будет дождя, мы отправимся на реку или пойдем в лес».

5. Эквивалентность. Эквивалентность двух высказываний — это логическая операция, которая соответствует словам «необходимо и достаточно» или союзу «тогда и только тогда, когда». Эквивалентность обозначается символом \Leftrightarrow . Запись $a \Leftrightarrow b$ читают так: «высказывание a эквивалентно высказыванию b » или « a тогда и только тогда, когда b », или « a необходимо и достаточно для b ».

Таблица истинности для эквивалентности такова:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Из этой таблицы видно, что эквивалентность двух высказываний истинна только в том случае, когда сами высказывания или одновременно истинны, или одновременно лож-

ны. В остальных случаях эквивалентность двух высказываний ложна.

Если эквивалентность двух (простых или сложных) высказываний принимает истинностное значение только истина (т. е. 1), то сами высказывания называются *логически эквивалентными*. Например, a логически эквивалентно $\neg(\neg a)$.

Равносильные формулы. Пусть A и B — две формулы логики высказываний, составленные из некоторых элементарных высказываний.

Понятие формулы логики высказываний определяется так. Пусть a, b, c, \dots — буквы, обозначающие простые высказывания.

1. Всякая буква a, b, c, \dots является формулой логики высказываний.

2. Если A и B — уже формулы логики высказываний, то $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ также являются формулами логики высказываний.

3. Формулами логики высказываний являются только те выражения, которые удовлетворяют пунктам 1 и 2.

Если эти формулы при всех возможных значениях истинности элементарных высказываний принимают одинаковые истинностные значения, то они называются *равносильными* формулами. Для обозначения равносильности будем пользоваться символом « \equiv ». Очевидна связь между символами « \equiv » и « \Leftrightarrow », а именно: две формулы A и B равносильны тогда и только тогда, когда они логически эквивалентны, т. е. когда формула $A \Leftrightarrow B$ принимает значение истинности только 1.

Упражнения

26. Составить таблицы истинности для следующих формул: 1) $(\neg(a \wedge (\neg b))) \Leftrightarrow ((\neg a) \vee (a \wedge b))$; 2) $(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$; 3) $(a \Leftrightarrow b) \wedge ((a \wedge (\neg b)) \vee ((\neg a) \wedge b))$; 4) $((\neg a) \wedge b) \Rightarrow ((\neg b) \wedge a)$; 5) $(\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow c))) \Leftrightarrow (a \wedge b \wedge (\neg c))$; 6) $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$.

27. Составлением таблиц показать равносильность следующих формул: 1) $a \Rightarrow b$; $\neg(a \wedge (\neg b))$; 2) $a \vee b$, $\neg((\neg a) \wedge (\neg b))$; 3) $a \Rightarrow b$; $(\neg b) \Rightarrow (\neg a)$; 4) $a \wedge b$, $\neg((\neg a) \vee (\neg b))$; 5) $\neg(a \Rightarrow b)$; $a \wedge (\neg b)$; 6) $\neg(\neg a)$; a ; 7) $((\neg a) \wedge b)$; $\neg(a \vee (\neg b))$.

28. Следующие предложения записать в виде формул:

1) «Число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3».

2) «Около плоского четырехугольника можно описать окружность в том и только в том случае, если суммы его противоположных углов равны между собой».

3) «Для того чтобы параллелограмм был квадратом, необходимо и достаточно, чтобы он был ромбом и имел прямой угол или был прямоугольником и имел равные смежные стороны».

29. Показать, что эквивалентность двух высказываний a и b равносильна конъюнкции импликаций $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$.

30. Каково значение истинности формулы $(a \Rightarrow (a \wedge (\neg b))) \vee (\neg b)$, если высказывание a ложно, а b истинно?

Краткий способ составления таблицы истинности. Для составления таблицы истинности можно воспользоваться следующей краткой формой. Запишем формулу, для которой нужно составить таблицу истинности, и под буквами, обозначающими элементарные высказывания, запишем распределение значений истинности. При этом если буква входит в формулу несколько раз, то под каждой из них повторяем значения истинности в том же порядке, в каком они записаны под первым ее вхождением. Затем, в соответствии с поставленными в формуле скобками, под знаками логических связок пишем значение истинности для этих связок. Таблица получается более компактной.

Например, для формулы $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\neg a) \vee b)$ получаем такую таблицу:

$(a \Rightarrow b)$				$\Leftrightarrow ((\neg a) \vee b)$			
1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0

В этой таблице под каждым *вхождением* буквы a подписан столбик 1, 1, 0, 0, а под каждым *вхождением* буквы b подписан столбик 1, 0, 1, 0. Теперь, в соответствии с расстановкой скобок (сначала выполняются логические операции в скобках), под знаком импликации запишем столбик из значений истинности для импликации — 1, 0, 1, 1; под знаком отрицания — значения 0, 0, 1, 1. Далее, под знаком дизъюнкции запишем 1, 0, 1, 1, наконец, под знаком эквивалентности записываем 1, 1, 1, 1 — результат значения истинности для всей формулы.

Таблица, в частности, показывает, что две формулы: $a \Rightarrow b$ и $(\neg a) \vee b$ — равносильны.

Упражнения

31. Составить сокращенные таблицы истинности для формул:
 1) $((a \Rightarrow b) \vee (\neg b))$; 2) $((a \Leftrightarrow b) \Rightarrow ((\neg a) \vee b))$; 3) $((\neg a) \wedge b) \Rightarrow ((\neg b) \vee a)$; 4) $((a \Rightarrow (\neg b)) \Rightarrow c) \vee (\neg a)$; 5) $(\neg (a \wedge (\neg b))) \Rightarrow (b \vee \neg c)$; 6) $c \Rightarrow ((\neg (a \vee c) \Rightarrow a) \Leftrightarrow b)$.

32. Записать следующие высказывания в виде формул:

1) Если Андрей согласится дежурить в понедельник, то во вторник может пойти дежурить или Виктор, или Павел.

- 2) Если я выучу уроки, то напишу бабушке письмо и помою посуду.
 3) Если на первый вопрос нужно отвечать утвердительно, то на второй вопрос или на третий вопрос нужно отвечать отрицательно.
 4) Первый и четвертый вопросы требуют одинаковых ответов, а второй и третий — требуют разных ответов.

Тавтология и противоречия. Формула, являющаяся истинной независимо от значений истинности входящих в нее элементарных высказываний, называется *тавтологией*. Очевидно, что результирующий столбец в таблице истинности для тавтологии состоит только из 1. Примерами тавтологий являются высказывания $(a \vee (\neg a))$ (так называемый «закон исключенного третьего»), $((\neg (\neg a)) \equiv a)$ (так называемый «закон отрицание отрицания»), $((a \Rightarrow b) \equiv ((\neg b) \Rightarrow (\neg a)))$ (так называемый «закон контрапозиции») и др. Эффективным средством выяснения, является ли данная формула тавтологией, есть составление таблиц истинности.

Формула, являющаяся ложной при всех значениях истинности входящих в нее элементарных высказываний, называется *противоречием*. Таблица истинности противоречия имеет в соответствующем столбце значения истинности только 0.

Примерами противоречий являются высказывания: $(a \wedge \neg a)$, $(\neg (a \vee (\neg a)))$, $(a \Leftrightarrow (\neg a))$, $(\neg ((\neg (\neg a)) \Leftrightarrow a))$ и др.

Эффективным средством выяснения того, является ли данное высказывание противоречием, есть также составление таблиц истинности.

Между тавтологиями и противоречиями существует очевидная связь: отрицание противоречия является тавтологией и, наоборот, отрицание тавтологии есть противоречие.

Упражнения

33. Являются ли следующие формулы тавтологиями: 1) $(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$; 2) $((a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow b))$; 3) $((\neg a) \vee b) \Leftrightarrow ((\neg b) \vee a)$; 4) $((\neg (\neg a \vee b)) \Leftrightarrow ((\neg a) \wedge (\neg b)))$?

34. Являются ли следующие формулы противоречиями: 1) $(\neg ((a \Rightarrow b) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c))))$; 2) $((a \Rightarrow b) \wedge b \Rightarrow a)$; 3) $((\neg a) \Rightarrow (a \vee \neg b))$; 4) $(\neg ((a \Rightarrow b) \Leftrightarrow ((\neg a) \vee b)))$; 5) $(\neg ((a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg (a \wedge (\neg b))))))$?

Важнейшие тавтологии (законы логики). Составлением таблиц истинности можно определить истинность или ложность при определенных наборах значений истинности входящих элементарных высказываний и для более сложных формул, полученных из высказываний и уже состав-

ленных формул многократным применением логических связок. Порядок их выполнения, как мы знаем, регулируется круглыми скобками (сначала выполняется операция в скобках). Но путь этот громоздок и утомителен, так как с появлением в формуле нового элементарного высказывания удваивается число строк в таблице.

Более выгодным оказывается изучение важнейших тавтологий, позволяющее заменить одну формулу другой, равносильной первой. Мы увидим, что некоторые логические связки могут быть заменены другими логическими связками, а формулы — другими, более простыми и более удобными в работе формулами.

Рассмотрим основные тавтологии, наиболее часто используемые при решении логических задач. Их называют также *законами логики*. В справедливости тавтологий будем убеждаться построением таблиц истинности.

1. Замена импликации через дизъюнкцию и отрицание. Импликация $(a \Rightarrow b)$ равносильна дизъюнкции $((\neg a) \vee b)$. Составим таблицу для формулы:

$$(a \Rightarrow b) \equiv ((\neg a) \vee b)$$

1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0

Таблица показывает равносильность формул. Далее увидим, что при решении логических задач удобнее иметь дело с дизъюнкцией, чем с импликацией, поэтому рассмотренная равносильность формул весьма важна.

2. Распределительное свойство конъюнкции относительно дизъюнкции. Покажем равносильность формул $(a \wedge (b \vee c))$ и $((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$. Для этого составим следующую таблицу истинности:

$$(a \wedge (b \vee c)) \equiv ((a \wedge b) \vee (a \wedge c))$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Таблица показывает равносильность формул, так как столбец в таблице под знаком равносильности состоит из одних только единиц. При решении задач часто будем пользоваться этим распределительным свойством конъюнкции.

3. Распределительное свойство дизъюнкции относительно конъюнкции. Покажем равносильность формул $(a \vee \vee (b \wedge c))$ и $((a \vee b) \wedge (a \vee c))$. Для этого составим таблицу истинности:

$$(a \vee (b \wedge c)) \equiv ((a \vee b) \wedge (a \vee c))$$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Снова таблица убеждает в равносильности формул. При решении задач будем часто пользоваться и распределительным свойством дизъюнкции.

4. Закон де Моргана, позволяющий дизъюнкцию сводить к конъюнкции и отрицанию. Справедлива формула: отрицание дизъюнкции двух высказываний равносильно конъюнкции отрицаний самих высказываний. Для обоснования построим таблицу истинности для формулы

$$(\neg (a \vee b)) \equiv ((\neg a) \wedge (\neg b))$$

0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Таблица показывает справедливость утверждения. Формула позволяет отрицание, стоящее перед дизъюнкцией, относить к самим высказываниям. Очевидно, что закон де Моргана можно распространить и на дизъюнкцию большего числа высказываний. В качестве следствия из закона де Моргана получается равносильность формул $(a \vee b)$ и $(\neg ((\neg a) \wedge (\neg b)))$, позволяющая дизъюнкцию заменять конъюнкцией и отрицанием.

5. Закон де Моргана, позволяющий конъюнкцию сводить к дизъюнкции и отрицанию. Справедлива форму-

ла: отрицание конъюнкции двух высказываний равносильно дизъюнкции отрицаний самих высказываний. Для обоснования построим таблицу истинности для формулы

$$(\neg (a \wedge b)) \equiv ((\neg a) \vee (\neg b))$$

0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

Таблица показывает справедливость утверждения. Эта формула позволяет отрицание, стоящее перед конъюнкцией, относить к самим высказываниям. Очевидно, что закон де Моргана можно распространить и на конъюнкцию большего числа высказываний. В качестве следствия из закона де Моргана можно получить равносильность формул $(a \wedge \wedge b)$ и $(\neg ((\neg a) \vee (\neg b)))$, позволяющую конъюнкцию высказываний заменять дизъюнкцией и отрицанием.

6. Замена связки эквивалентности. Эквивалентность двух высказываний можно заменить равносильной формулой, содержащей связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, а именно, справедливо утверждение о равносильности: $(a \Leftrightarrow b) \equiv ((a \wedge b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b)))$. Для обоснования построим таблицу истинности:

$$(a \Leftrightarrow b) \equiv ((a \wedge b) \vee ((\neg a) \wedge (\neg b)))$$

1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0

При решении логических задач выгоднее иметь формулу с логическими связками конъюнкции и дизъюнкции, чем формулу со связкой эквивалентности.

Следующие четыре равносильности формул известны под общим названием законов поглощения.

7. Закон поглощения. Для любых высказываний a и b справедлива такая равносильность: $(a \wedge (a \vee b)) \equiv a$. Составим таблицу истинности:

$$(a \wedge (a \vee b)) \equiv a$$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	0

Эта равносильность позволяет упрощать формулы и очень часто используется при решении задач.

8. Закон поглощения. Для любых высказываний a и b справедлива равносильность: $(a \vee (a \wedge b)) \equiv a$, которая отличается от рассмотренной в предыдущем пункте тем, что знаки конъюнкции и дизъюнкции поменялись местами. Составим таблицу истинности:

$(a \vee (a \wedge b))$	\equiv	a
1 1 1 1 1 1 1		1
1 1 1 0 0 1 1		1
0 0 0 0 1 1 0		0
0 0 0 0 0 1 0		0

Эта равносильность также позволяет упрощать формулы и очень эффективна в решении задач.

9. Закон поглощения. Для любых высказываний a и b справедлива такая равносильность: $((a \wedge b) \vee (\neg b)) \equiv (a \vee (\neg b))$. Снова для обоснования утверждения составим таблицу истинности:

$((a \wedge b) \vee (\neg b))$	\equiv	$(a \vee (\neg b))$
1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1		1
1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0		1
0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1		0
0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0		0

И эта равносильность находит широкое применение при решении задач.

10. Закон поглощения. Существует еще одна равносильность, аналогичная девятой, которая отличается от нее переменной мест логических связок конъюнкции и дизъюнкции, а именно: $((a \vee b) \wedge (\neg b)) \equiv (a \wedge (\neg b))$. Для обоснования составим таблицу истинности:

$((a \vee b) \wedge (\neg b))$	\equiv	$(a \wedge (\neg b))$
1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1		1
1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0		1
0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1		0
0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0		0

Приведем еще несколько равносильностей, в справедливости которых читатель без труда убедится самостоятельно.

11. $(a \wedge b) \equiv (b \wedge a)$ — коммутативность конъюнкции.

12. $(a \vee b) \equiv (b \vee a)$ — коммутативность дизъюнкции.

13. $((a \wedge b) \wedge c) \equiv (a \wedge (b \wedge c))$ — ассоциативность конъюнкции.

14. $((a \vee b) \vee c) \equiv (a \vee (b \vee c))$ — ассоциативность дизъюнкции.

15. $(a \wedge a) \equiv a$ — идемпотентность конъюнкции.

16. $(a \vee a) \equiv a$ — идемпотентность дизъюнкции.

17. $(a \wedge (\neg a)) \equiv 0^*$ (a и не a всегда ложно).

18. $(a \vee (\neg a)) \equiv 1^{**}$ (a или не a всегда истинно).

19. $(a \wedge 0) \equiv 0$ (a и противоречие есть противоречие).

20. $(a \vee 0) \equiv a$ (a или противоречие равносильно a).

21. $(a \wedge 1) \equiv a$ (a и тавтология равносильно a).

22. $(a \vee 1) \equiv 1$ (a или тавтология равносильно тавтологии).

23. $(\neg(\neg a)) \equiv a$ (двойное отрицание высказывания a равносильно высказыванию a).

Овладев этими основными свойствами высказываний, можно упрощать формулы логики высказываний уже формально, подобно тому, как в алгебре выполняют тождественные преобразования. Рассмотрим несколько таких примеров.

Пример 1. Доказать равносильность: $(x \Rightarrow y) \equiv ((\neg y) \Rightarrow (\neg x))$, используя сначала свойство 1, затем свойство 12, а потом снова свойство 1, получим следующую последовательность равносильных формул, приводящую к доказательству: $(x \Rightarrow y) \equiv ((\neg x) \vee y) \equiv (y \vee (\neg x)) \equiv ((\neg y) \Rightarrow (\neg x))$.

Пример 2. Доказать равносильность формул: $((\neg x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge p) \vee ((\neg x) \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge p)) \equiv (x \Rightarrow (y \vee p))$.

Действительно, $((\neg x) \vee (x \wedge y) \vee (x \wedge p) \vee ((\neg x) \wedge y) \vee ((\neg x) \wedge p)) \equiv (((\neg x) \wedge (1 \vee y \vee p)) \vee (x \wedge (y \vee p))) \equiv ((\neg x) \vee (x \wedge (y \vee p))) \equiv ((\neg x) \vee (y \vee p)) \equiv (x \Rightarrow (y \vee p))$.

Как заметил читатель, мы сначала перегруппировали члены дизъюнкции, объединив в одну группу члены, содержащие $(\neg x)$, а в другую — все остальные. В первой группе, на основании распределительного закона, за скобки вынесено $(\neg x)$, а во второй группе за скобки вынесен x . При вынесении за скобки $(\neg x)$ от первого члена дизъюнкции

* Здесь 0 обозначает противоречие, т. е. всегда ложное высказывание.

** Число 1 обозначает тавтологию, т. е. всегда истинное высказывание.

в скобках осталась тавтология 1 (свойство 21), которая в дизъюнкции с любым высказыванием дает тавтологию (свойство 22). Затем применено свойство 9.

Можно было бы поступить и иначе. Равносильность данных высказываний можно было бы доказать, используя свойство 8. На его основании дизъюнкция, состоящая из первого, четвертого и пятого членов, равносильна $(\neg x)$, так что наша формула сразу приводится к такой: $(\neg x) \vee (x \wedge (y \vee p))$. Затем, применив свойство 9, имеем: $((\neg x) \vee (y \vee p))$, откуда получаем искомую формулу.

Пример 3. Показать равносильность формул: $(\neg (a \vee b \vee c)) \equiv ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))$.

Действительно, применив ассоциативный закон для дизъюнкции и правило де Моргана, получим последовательность равносильных формул, дающую требуемое доказательство: $(\neg (a \vee b \vee c)) \equiv (\neg ((a \vee b) \vee c)) \equiv ((\neg (a \vee b)) \wedge (\neg c)) \equiv ((\neg a) \wedge (\neg b) \wedge (\neg c))$.

Примечание. Для уменьшения числа скобок в формулах мы условимся в дальнейшем писать без скобок отрицание высказывания, скажем, вместо $(\neg x)$ писать просто $\neg x$ и, вообще, для любой формулы A вместо $(\neg A)$ писать $\neg A$.

Упражнения

35. Доказать справедливость следующих равносильностей: 1) $((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)) \equiv (a \Rightarrow b)$; 2) $(a \vee (\neg a \wedge b)) \equiv (a \vee b)$; 3) $(p \vee (p \wedge c)) \equiv p$; 4) $((\neg a \wedge p \wedge c) \vee (c \wedge \neg a \wedge \neg p) \vee (p \wedge c)) \equiv (c \wedge (a \Rightarrow p))$; 5) $((a \wedge p) \vee (c \wedge p) \vee (a \wedge e) \vee (c \wedge e)) \equiv ((a \vee c) \wedge (p \vee e))$; 6) $(a \Rightarrow (c \Rightarrow p)) \equiv ((a \wedge c) \Rightarrow p)$; 7) $(\neg a \vee (c \wedge \neg a)) \equiv \neg a$; 8) $(p \Leftrightarrow a) \equiv (\neg p \Leftrightarrow \neg a)$; 9) $((a \wedge \neg p) \vee (\neg a \wedge \neg p)) \equiv \neg p$; 10) $((\neg a \Rightarrow p) \Rightarrow c) \equiv ((a \vee p) \Rightarrow c)$; 11) $((a \Rightarrow c) \Rightarrow c) \equiv (a \vee c)$; 12) $(\neg a \vee (a \wedge p \wedge c)) \equiv (\neg a \vee (p \wedge c))$; 13) $(\neg a \wedge (a \vee p \vee c)) \equiv (\neg a \wedge (p \vee c))$; 14) $(a \wedge (\neg a \vee (p \wedge c))) \equiv (a \wedge p \wedge c)$; 15) $(a \Rightarrow c) \equiv \neg (a \wedge \neg c)$; 16) $(\neg (a \wedge \neg c) \Rightarrow (\neg c \Rightarrow a)) \equiv (\neg (a \Rightarrow c) \vee c) \equiv (a \vee c)$; 17) $(\neg (p \Rightarrow a) \vee (a \Rightarrow p)) \equiv (\neg a \vee p)$; 18) $((\neg a \vee \neg c) \wedge p) \equiv (\neg ((a \wedge c) \vee \neg p))$; 19) $((a \wedge c) \vee p) \wedge ((a \wedge c) \vee \neg p) \equiv (a \wedge c)$; 20) $(\neg (\neg a \wedge \neg p)) \equiv (\neg \neg p \Rightarrow a)$; 21) $(\neg (a \vee (\neg p \wedge c))) \equiv (\neg a \wedge (p \vee \neg c))$; 22) $(\neg (\neg a \vee c \vee (p \wedge \neg c))) \equiv (a \wedge \neg c \wedge (\neg p \vee c)) \equiv (a \wedge \neg p \wedge \neg c)$.

36. Упростить формулы: 1) $\neg (a \vee p) \vee (a \Rightarrow \neg p)$; 2) $(a \Rightarrow \neg p) \wedge a \wedge p$; 3) $(p \Rightarrow \neg c) \wedge (c \Rightarrow p)$; 4) $(p \Rightarrow a) \wedge (a \Leftrightarrow p)$; 5) $(p \wedge a) \vee (\neg p \wedge a) \vee (p \wedge c) \vee (p \wedge c \wedge \neg a)$; 6) $((a \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow c)) \Rightarrow (c \Rightarrow a)$; 7) $\neg (\neg a \wedge \neg p) \vee (a \wedge (a \Rightarrow p))$; 8) $a \wedge (\neg (a \vee \neg p) \Rightarrow (a \vee p))$; 9) $(\neg a \wedge p \wedge c) \vee (a \wedge \neg p \wedge c) \vee (a \wedge p \wedge \neg c) \vee (a \wedge p \wedge c)$.

37. Записать следующее предложение в виде формулы: «Если будет хорошая погода, мы пойдем на речку и будем купаться или поедем в лес и будем собирать грибы». Записать отрицание полученной формулы и отнести знак отрицания к элементарным высказываниям.

38. Заменить формулы равносильными, отнеся знак отрицания к

элементарным высказываниям: 1) $\neg((a \wedge p) \vee \neg c)$; 2) $\neg((a \vee p) \wedge \neg c)$; 3) $\neg(a \wedge c \wedge (\neg p \vee \neg c))$; 4) $\neg(((a \wedge p) \vee c) \Rightarrow \neg(a \wedge \neg c))$.

39. Заменить формулы равносильными, используя только связки конъюнкции и отрицания: 1) $(x \vee y) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow z)$; 2) $(x \Leftrightarrow y) \vee y \vee \neg x$; 3) $\neg(a \Rightarrow p) \vee (\neg p \Rightarrow \neg a)$; 4) $a \vee p \vee \neg c$; 5) $\neg(a \Leftrightarrow \neg p) \vee (\neg p \Rightarrow \neg a)$.

40. Заменить формулы равносильными, используя только связки дизъюнкции и отрицания: 1) $(x \wedge y) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow z)$; 2) $(x \Leftrightarrow y) \wedge y \wedge \neg x$; 3) $\neg(a \Rightarrow p) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg a)$; 4) $a \wedge p \wedge \neg c$; 5) $(a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \wedge c)$; 6) $(\neg a \wedge p) \Rightarrow (\neg p \wedge a)$.

41. Мальчик составил на воскресенье план: если выучит уроки, то уберет в комнате и поиграет с сестричкой и, если будет хорошая погода, пойдет с ребятами на речку и будет купаться или отправится на стадион и поиграет в футбол. Записать этот план формулой. В каком случае следует считать, что план не выполнен? Прочитать словами невыполнение плана.

42. Записать формулой следующие высказывания:

1) «Число a делится на 2 или на 3». 2) «Известно, что число a больше числа b или равно ему». 3) «Белка песенку поет, золотой орех грызет, изумрудец вынимает и в мешочек опускает».

Составить отрицания полученных формул и отнести знак отрицания к элементарным высказываниям.

43. На допросе свидетель A сказал, что B говорит неправду. Следователь рассуждает так: «Свидетель A может говорить правду, и тогда B говорит неправду, или свидетель A говорит неправду, и тогда B говорит правду». Как записать рассуждение следователя в виде формулы?

44. На допросе A сказал, что B говорит неправду, а B сказал, что C говорит неправду. Следователь рассуждает так: «Свидетель A может говорить правду, и тогда B говорит неправду, или свидетель A говорит неправду, и тогда B говорит правду, а C говорит неправду, или свидетель B говорит неправду, и тогда C говорит правду». Как записать рассуждение следователя в виде логической формулы?

45. Составляется график дежурств на три дня для трех лиц. Антон может дежурить или по понедельникам, или по средам; Виктор сможет дежурить только во вторник или в среду; Сергей сказал, что, если Антон не будет дежурить в среду, он сможет подежурить в понедельник. Составить расписание дежурств, приемлемое для всех троих.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИСЧИСЛЕНИЕМ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Рассмотрим задачу, которая в 1972 г. предлагалась в числе конкурсных задач семиклассникам, желавшим поступить в заочную математическую школу МГУ. (Она уже упоминалась в упражнениях под номером 1).

Задача 1. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу.

— Кто испачкал скатерть? — спросила бабушка.

— Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша. — Это сделал Боря.

— Ну, а ты что скажешь? — спросила бабушка Боря.

— Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря. — А Алеша не пачкал скатерть.

— Так я и знала, что вы друг на дружку сваливать будете, — рассердилась бабушка. — Ну, а каков твой ответ? — спросила она Витю.

— Не сердись, бабуля! Я знаю, что Боря не мог это сделать. А я сегодня не готовил уроки, — сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

Р е ш е н и е. Пусть буква a обозначает, что Алеша поставил кляксу, тогда $\neg a$ означает, что Алеша кляксу не ставил. Аналогичный смысл символов w , $\neg w$, b и $\neg b$.

Запишем теперь высказывания мальчиков формулами. Алеша сказал, что Витя не ставил кляксу и что это сделал Боря. Это высказывание запишется формулой

$$A = \neg w \wedge b.$$

Аналогично запишем высказывание Бори, а именно:

$$B = w \wedge \neg a.$$

Витя сказал, что Боря не ставил кляксу и что он не готовил уроки. Но последнее совершенно не значит, что Витя не мог поставить кляксу. Поэтому высказывание Вити запишется так:

$$C = \neg b \wedge (w \vee \neg w) \equiv \neg b$$

(мы формулу C сразу же и упростили, поскольку высказывание $w \vee \neg w$ есть тавтология).

По условию задачи, двое мальчиков оба раза сказали правду, а один мальчик оба раза сказал неправду. Поэтому среди записанных нами трех формул A , B , C две истинны (тавтологии), а одна ложна (противоречие). Мы не знаем, какая именно формула ложна. Но мы утверждаем, что если из этих формул образовать попарные дизъюнкции, то поскольку в каждую дизъюнкцию будет входить по крайней мере одна истинная формула, эти дизъюнкции будут истинными. Образуете их, получив новые формулы:

$$D = A \vee B \equiv (\neg w \wedge b) \vee (w \wedge \neg a),$$

$$H = A \vee C \equiv (\neg w \wedge b) \vee \neg b \equiv \neg w \vee \neg b,$$

$$M = B \vee C \equiv (w \wedge \neg a) \vee \neg b.$$

Найдем конъюнкцию формул D и H . Она, конечно же, истинна:

$$D \wedge H \equiv ((\neg w \wedge b) \vee (w \wedge \neg a)) \wedge (\neg w \vee \neg b) \equiv \\ \equiv (\neg w \wedge b) \vee (w \wedge \neg a \wedge \neg b).$$

Теперь найдем конъюнкцию трех формул D , H и M :

$$D \wedge H \wedge M \equiv ((\neg w \wedge b) \vee (w \wedge \neg a \wedge \neg b)) \wedge \\ \wedge ((w \wedge \neg a) \vee \neg b) \equiv w \wedge \neg a \wedge \neg b.$$

Из этой истинной конъюнкции и заключаем, что кляксу поставил Витя.

Задача 2. Один из пяти братьев разбил окно.

— Это мог сделать только или Витя, или Толя,— сказал Андрей.

— Я окно не разбивал,— возразил Витя,— и Коля тоже.

— Вы оба говорите неправду,— заявил Толя.

— Нет, Толя, один из них сказал правду, а другой сказал неправду,— возразил Дима.

— Ты, Дима, неправ,— вмешался Коля.

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что трое братьев сказали правду. Кто разбил окно?

Решение. Буквой w обозначим утверждение, что Витя разбил окно, а $\neg w$ — что Витя окно не разбивал. Аналогичный смысл букв t и k и их отрицаний.

Высказывания братьев запишем формулами:

Андрей: $A = w \vee t$.

Витя: $B = \neg w \wedge \neg k$.

Толя: $T = \neg A \wedge \neg B = \neg(w \vee t) \wedge \neg(\neg w \wedge \neg k) \equiv \\ \equiv \neg w \wedge \neg t \wedge (w \vee k) \equiv \neg w \wedge \neg t \wedge k.$

Высказывание Толи упрощается отнесением знака отрицания к элементарным высказываниям.

Дима: $D = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv ((w \vee t) \wedge \neg(\neg w \wedge \neg k)) \vee (\neg(w \vee t) \wedge (\neg w \wedge \neg k)) \equiv ((w \vee t) \wedge (w \vee k)) \vee (\neg w \wedge \neg t \wedge \neg k) \equiv w \vee (t \wedge k) \vee (\neg w \wedge \neg t \wedge \neg k) \equiv w \vee (t \wedge k) \vee (\neg t \wedge \neg k) \equiv w \vee (\neg t \wedge \neg k).$

Высказывание Димы упрощено путем отнесения отрицания к элементарным высказываниям, раскрытием скобок, применением свойства 9, а также за счет того, что высказывание $(t \wedge k)$ ложное, так как по условию задачи окно разбил один из братьев.

Коля: $K = \neg D = \neg(w \vee (\neg t \wedge \neg k)) \equiv \neg w \wedge (t \vee k).$

По условию задачи трое братьев сказали правду. Образует из формул A , B , T , D и K конъюнкции, беря в каждую

конъюнкцию по три формулы. Среди этих конъюнкций будет только одна истинной, а остальные ложные, так как только в одну конъюнкцию войдут компонентами формулы с истинностными значениями 1. Найдем эту конъюнкцию.

Всех возможных конъюнкций будет 10 (число сочетаний из 5 по 3). Перечислим эти сочетания: ABT , ABD , ABK , ATD , ATK , ADK , $BTД$, $ВTK$, $ВДK$, $ТДK$.

Так как формулы A и T , B и T , D и T в конъюнкции дают противоречия, то из десяти сочетаний для дальнейшего рассмотрения должны быть оставлены только два: ABD и ABK . Но, как легко видеть, конъюнкция из формул A , B и D дает противоречие. Поэтому единственной истинной конъюнкцией будет конъюнкция из формул A , B и K . Найдем ее.

$$\begin{aligned} A \wedge B \wedge K &= (w \vee t) \wedge \neg w \wedge \neg k \wedge (t \vee k) \equiv \\ &\equiv t \wedge \neg w \wedge \neg k. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что окно разбил Толя.

Задача 3. Для четырех дружинников, фамилии которых начинаются буквами A , E , P , C , составить график дежурств на четыре вечера подряд, учитывая, что:

1) C и P в первый вечер дежурить не могут в связи с командировкой;

2) если выйдет C во второй вечер или P — в третий, то E сможет подежурить в четвертый вечер;

3) если A не будет дежурить в третий вечер, то E согласен дежурить во второй вечер;

4) если A или P будут дежурить во второй вечер, то C сможет пойти в четвертый вечер;

5) если P в четвертый вечер уедет на конференцию, то A придется дежурить в первый, а C — в третий вечер.

Решение. Обозначим символами a_i , e_i , p_i , c_i ($i = 1, 2, 3, 4$) высказывания «дружинник A (или E , P , C) дежурит в i -й вечер». Отрицания таких высказываний обозначим, соответственно, $\neg a_i$, $\neg e_i$, $\neg p_i$, $\neg c_i$.

Все высказывания, данные в условии задачи, представляют собой импликации, которые мы сразу же заменим равносильными формулами:

$$B = \neg c_1 \wedge \neg p_1;$$

$$D = ((c_2 \vee p_3) \Rightarrow e_4) \equiv ((\neg c_2 \wedge \neg p_2) \vee e_4);$$

$$H = (\neg a_3 \Rightarrow e_2) \equiv (a_3 \vee e_2);$$

$$K = ((a_2 \vee p_2) \Rightarrow c_4) \equiv ((\neg a_2 \wedge \neg p_2) \vee c_4);$$

$$M = (\neg p_2 \Rightarrow (a_1 \wedge c_3)) \equiv (p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)).$$

Каждая из формул B, D, H, K, M есть истинное высказывание, поэтому будет истинной и конъюнкция этих формул.

Найдем конъюнкцию формул B и D :

$$B \wedge D = (\neg \varepsilon_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge e_4).$$

Теперь найдем конъюнкцию формул B, D и K , рассчитывая на то, что конъюнкция $(e_4 \wedge c_4)$ ложная, а потому формула не будет громоздкой:

$$\begin{aligned} B \wedge D \wedge K = & (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg a_2) \vee \\ & \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4) \vee \\ & \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge c_4). \end{aligned}$$

Далее выгодно найти конъюнкцию полученного результата с формулой M , так как ложными будут конъюнкции $(p_4 \wedge e_4)$, $(p_4 \wedge c_4)$ и $(c_3 \wedge c_4)$ (в один день не могут дежурить два дружинника и один и тот же дружинник не может дежурить два дня).

$$\begin{aligned} B \wedge D \wedge K \wedge M = & (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg a_2 \wedge \\ & \wedge p_4) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg a_2 \wedge a_1 \wedge c_3) \vee \\ & \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg a_2 \wedge \neg p_2 \wedge e_4 \wedge a_1 \wedge c_3). \end{aligned}$$

Наконец, найдем конъюнкцию с формулой H . Здесь заведомо ложными будут $(a_3 \wedge c_3)$ и $(e_2 \wedge e_4)$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} B \wedge D \wedge K \wedge M \wedge H = & (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \\ & \wedge \neg a_2 \wedge p_4 \wedge a_3) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg a_2 \wedge \\ & \wedge p_4 \wedge e_2) \vee (\neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg a_2 \wedge a_1 \wedge \\ & \wedge c_3 \wedge e_2). \end{aligned}$$

В полученной формуле первый член дизъюнкции ложен, так как если бы A дежурил в третий вечер, а P в четвертый, то C не смог бы дежурить, так как он не может дежурить ни в первый, ни во второй вечер. Поэтому формула упростится следующим образом:

$$\begin{aligned} B \wedge D \wedge K \wedge M \wedge H = & \neg c_1 \wedge \neg p_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \\ & \wedge \neg a_2 \wedge e_2 \wedge (p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)). \end{aligned}$$

Но эта формула истинна, откуда $e_2 = 1$, и $(p_4 \vee (a_1 \wedge c_3)) = 1$. Так как, к тому же, истинны и отрицания $\neg c_1$, $\neg p_1$, $\neg c_2$, $\neg p_2$, $\neg a_2$, то остается единственная возможность: истинными будут p_4, a_1, c_3 . Таким образом, A должен дежурить в первый вечер, E — во второй, C — в третий и P — в четвертый вечер.

Задача 4. Следователь допросил трех лиц A , B и C , подозреваемых в совершении преступления. На допросе A сказал, что показания B неверны. B сказал, что показания C неверны. Наконец, C сказал, что и A говорит неправду, и B говорит неправду. Может ли следователь на основании этих показаний установить, кто из допрошенных говорит правду?

Решение. Обозначим буквами a , b , c , соответственно, что свидетели A , B , C говорят правду, а $(\neg a)$, $(\neg b)$, $(\neg c)$ будут означать, что они говорят неправду. Переведем задачу на язык символов.

Допрошенный A мог сказать правду, а мог сказать и неправду. Поэтому его показания можно записать такой формулой:

$$A = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) = 1$$

(читается так: « A говорит правду, а допрошенный B говорит неправду, или A говорит неправду, и тогда B говорит правду»). Это высказывание, конечно, является истинным.

Эти рассуждения повторимы относительно сказанного свидетелем B , поэтому запись высказывания аналогична:

$$B = (b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c) = 1.$$

О высказывании третьего допрошенного судить несколько труднее. Рассмотрим, что скрывается в его показаниях.

C может говорить правду, в таком случае неправду говорят и A и B . Эту часть высказывания запишем так: $(c \wedge \neg a \wedge \neg b)$. Но C может сказать и неправду, в таком случае, по крайней мере, один из A или B говорит правду.

Это запишем так: $(\neg c \wedge (a \vee b))$. Объединяя знаком дизъюнкции эти высказывания, получим содержание сказанного C :

$$C = (c \wedge \neg a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge (a \vee b)) = 1.$$

Из полученных трех истинных высказываний составляем конъюнкцию, которая будет заведомо истинной:

$$A \wedge B = (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) = 1;$$

$$A \wedge B \wedge C = (\neg a \wedge b \wedge \neg c) = 1.$$

Выходит, что A и C говорили неправду, а B сказал правду.

Задача 5. Четыре друга — Антонов (a), Вехов (b), Соков (c) и Деев (d) — решили провести свой отпуск в четырех различных городах — Москве, Ленинграде, Киеве и Таш-

кенте, а потом обменяться своими впечатлениями. В какой город должен поехать каждый из них, если на их желания наложены такие ограничения:

1) если Антонов не поедет в Москву, то Сомов не должен ехать в Ленинград;

2) если Вехов не поедет ни в Москву, ни в Ташкент, то Антонов поедет в Москву;

3) если Сомов не поедет в Ташкент, то Вехов поедет в Киев;

4) если Деев не поедет в Москву, то в Москву поедет Вехов;

5) если Деев не поедет в Ленинград, то Вехов не поедет в Москву.

Решение. Пусть символ a_M обозначает, что Антонов едет в Москву, а $(\neg a_M)$ — он в Москву не едет. Аналогичны буквенные обозначения и для других товарищей.

Все высказывания, данные в условии задачи, являются импликациями. Их можно записать такими формулами:

$$K = (\neg a_M \Rightarrow \neg c_L) \equiv (a_M \vee \neg c_L);$$

$$M = ((\neg b_M \wedge \neg b_T) \Rightarrow a_M) \equiv (b_M \vee b_T \vee a_M);$$

$$H = (\neg c_T \Rightarrow b_K) \equiv (c_T \vee b_K);$$

$$P = (\neg d_M \Rightarrow b_M) \equiv (d_M \vee b_M);$$

$$E = (d_L \Rightarrow \neg b_M) \equiv (\neg d_L \vee \neg b_M).$$

Все пять высказываний являются истинными, поэтому истинной будет и их конъюнкция. Составляем последовательно конъюнкцию из этих формул. При этом ложными будут те конъюнкции, в которых говорится о том, что одно и то же лицо должно ехать в два города или в один город вынуждены ехать два лица:

$$K \wedge M = ((a_M \wedge b_T) \vee a_M \vee (\neg c_L \wedge b_M) \vee (\neg c_L \wedge b_T) \vee (\neg c_L \wedge a_M)) \equiv (a_M \vee (\neg c_L \wedge b_M) \vee (\neg c_L \wedge b_T);$$

$$K \wedge M \wedge H = (a_M \wedge c_T) \vee (a_M \wedge b_K) \vee (\neg c_L \wedge b_M \wedge c_T);$$

$$K \wedge M \wedge H \wedge P = (\neg c_L \wedge b_M \wedge c_T).$$

Итак, Вехов поедет в Москву, Сомов поедет в Ташкент. Выясним, куда поедет Антонов и куда поедет Деев. Так как по пятому условию Деев не может ехать в Ленинград (дисъюнкция $(\neg d_L \vee \neg b_M)$ истинна, а высказывание $(\neg b_M)$ ложно, значит, должно быть истинным высказывание $(\neg d_L)$), то в Ленинград поедет Антонов, Деев поедет в Киев.

Задача 6. Шесть школьников — Азов, Басов, Сомов, Дымов, Ершов и Мишин — принимали участие в мате-

матической олимпиаде. Задачу решили двое. На вопрос, кто решил задачу, получено пять ответов:

- 1) «Задачу решили Азов и Сомов».
- 2) «Задача решена только в работах Басова и Ершова».
- 3) «С решением задачи справились только Мишин и Басов».
- 4) «Задачу решили Азов и Мишин».
- 5) «Задачу решили Азов и Дымов».

Оказалось, что в четырех ответах правильно названа фамилия только одного ученика, а в одном ответе обе фамилии названы неверно. Кто из участников олимпиады решил задачу?

Решение. Обозначим буквой a , что Азов решил задачу. Аналогичный смысл букв b, c, d, e, m .

Каждое из приведенных высказываний состоит из двух высказываний — называется фамилия одного ученика, решившего задачу, и фамилия другого ученика, тоже решившего задачу. Так как при этом, по крайней мере, одна фамилия называется неверно, то конъюнкция высказываний, входящих в каждое из предложений, занумерованных в условии задачи, будет ложной. Это запишем так:

$$(a \wedge c) = 0, (b \wedge e) = 0, (m \wedge b) = 0, (a \wedge m) = 0, \\ (a \wedge d) = 0. \quad (1)$$

Если из тех же составляющих образовать дизъюнкции, то среди пяти дизъюнкций

$$(a \vee c), (b \vee e), (m \vee b), (a \vee m), (a \vee d) \quad (2)$$

четыре будут истинными (так как в каждую войдет одно высказывание истинное) и одна дизъюнкция будет ложной.

Из пяти дизъюнкций (2) составим конъюнкцию, которая будет ложной, поскольку содержит ложную компоненту. Работу выполним постепенно, учитывая уже известные нам ложные конъюнкции (1):

$$1. ((a \vee c) \wedge (b \vee e)) \equiv ((a \wedge b) \vee (a \wedge e) \vee (c \wedge b) \vee (c \wedge e)).$$

$$2. ((a \vee c) \wedge (b \vee e) \wedge (m \vee b)) \equiv ((a \wedge b \wedge m) \vee (a \wedge e \wedge m) \vee (c \wedge b \wedge m) \vee (c \wedge e \wedge m) \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge e \wedge b) \vee (c \wedge b) \vee (c \wedge e \wedge b)) \equiv ((c \wedge e \wedge m) \vee (a \wedge b) \vee (c \wedge b)).$$

$$3. ((a \vee c) \wedge (b \vee e) \wedge (m \vee b) \wedge (a \vee m)) \equiv ((a \wedge b) \vee (c \wedge e \wedge m)).$$

$$4. ((a \vee c) \wedge (b \vee e) \wedge (m \vee b) \wedge (a \vee m) \wedge (a \vee d)) \equiv ((a \wedge b) \vee (c \wedge e \wedge m \wedge d)).$$

Получили дизъюнкцию, являющуюся ложной. Отсюда делаем вывод, что $(a \wedge b) = 0$.

Из тех же дизъюнкций (2) образуем конъюнкции, взяв в каждую по четыре компоненты. Таких конъюнкций будет пять, и среди них только одна истинна. Найдем ее. Получаемые при этом формулы будем обозначать большими буквами.

Собственно, одну искомую формулу мы уже имели под номером 3. Запишем ее еще раз и определим значение истинности:

$$K = (a \wedge b) \vee (c \wedge e \wedge m).$$

Эта формула ложна, так как $(a \wedge b) = 0$ (см. выше) и, по условию задачи, не было трех учеников, решивших задачу.

$$\begin{aligned} P &= ((a \vee c) \wedge (b \vee e) \wedge (m \vee b) \wedge (a \vee d)) \equiv \\ &\equiv ((c \wedge e \wedge m \wedge d) \vee (c \wedge b \wedge d)). \end{aligned}$$

Эта формула также ложна, ибо не было не только четырех, но и трех учеников, решивших задачу,

$$H = ((a \vee c) \wedge (m \vee b) \wedge (a \vee m) \wedge (a \vee d)) \equiv (c \wedge m \wedge d).$$

Как видим, и эта формула ложна.

$$T = ((b \vee e) \wedge (m \vee b) \wedge (a \vee m) \wedge (a \vee d)) \equiv (d \wedge m \wedge e).$$

Ложной является и формула T . Последняя пятая формула должна быть истинной. Найдем ее.

$$\begin{aligned} F &= ((a \vee c) \wedge (b \vee e) \wedge (a \vee m) \wedge (a \vee d)) \equiv \\ &\equiv ((a \wedge e) \vee (c \wedge e \wedge m \wedge d)). \end{aligned}$$

Из формулы F приходим к единственному истинному результату: $(a \wedge e) = 1$. Таким образом, задачу решили Азов и Ершов.

Задача 7. Для участия в соревновании по гребле из двух юношеских команд колледжа нужно отобрать по три человека из каждой для состава сборной команды. Первая команда предложила 5 кандидатур: Артура (a), Боба (b), Майка (m), Джона (d) и Гарри (g). Вторая команда выдвинула свою пятерку: Тома (t), Пита (p), Клайва (k), Эдди (e) и Сэма (c).

Выбрать трех из каждой пятерки было довольно трудно, так как первая команда не хотела, чтобы в сборную входили Пит и Эдди вместе, а вторая команда в ответ заявила, что не желает видеть в сборной Артура и Гарри вместе. Тогда первая команда потребовала, чтобы Сэма не включали в сборную, если в нее войдут Том и Пит. Вторая команда выдвинула новое условие: если Пит не войдет в состав сборной, тогда они будут возражать против участия в ней

Майка и Гарри вместе. А если в сборной не будет Сэма, то вторая команда не согласится на включение в нее Джона.

Тогда первая команда заявила, что откажется вводить в состав сборной Боба, если вторая команда включит в ее состав Сэма. А вторая команда в ответ сообщила, что Клайв откажется участвовать в соревнованиях, если в сборной будет Майк.

Как удалось руководителям команд комплектовать сборную, не нарушив ни одного из поставленных условий?

Решение. Состав кандидатур в сборную, выдвинутых первой командой, обозначим так: a_1, b_1, m_1, d_1, g_1 (индексы удобны для быстрого определения, кто из какой команды), а состав кандидатур, выдвинутых второй командой — t_2, p_2, k_2, e_2, c_2 .

Запишем теперь условие задачи при помощи введенных символов. Требование первой команды — не включать в сборную одновременно Пита и Эдди — запишем как отрицание конъюнкции, т. е. следующей формулой:

$$A = \neg (p_2 \wedge e_2) \equiv (\neg p_2 \vee \neg e_2).$$

Требование второй команды — не включать в сборную одновременно Артура и Гарри — запишем аналогичной формулой:

$$B = \neg a_1 \vee \neg g_1.$$

Новое требование первой команды — не включать в сборную Сэма, если в нее войдут одновременно Том и Пит, — запишем в виде импликации:

$$C = ((t_2 \wedge p_2) \Rightarrow \neg c_2) \equiv (\neg t_2 \vee \neg p_2 \vee \neg c_2).$$

Требование второй команды — не включать в сборную Майку и Гарри вместе, если не будет включен Пит, — также запишем в виде импликации:

$$D = (\neg p_2 \Rightarrow \neg (m_1 \wedge g_1)) \equiv (p_2 \vee \neg m_1 \vee \neg g_1).$$

Требование же — не включать в сборную Джона, если в нее не будет включен Сэм, — запишем такой импликацией:

$$E = (\neg c_2 \Rightarrow \neg d_1) \equiv (c_2 \vee \neg d_1).$$

Новое требование первой команды — не вводить в сборную Боба, если в нее будет включен Сэм, — даст нам еще одну импликацию:

$$K = (c_2 \Rightarrow \neg b_1) \equiv (\neg c_2 \vee \neg b_1).$$

Наконец, второе требование второй команды — отказ Клайва входить в сборную, если в нее будет включен Майк —

запишем такой импликацией:

$$H = (m_1 \Rightarrow \neg k_2) \equiv (\neg m_1 \vee \neg k_2).$$

Все семь записанных формул являются истинными, поэтому будет истинной и их конъюнкция. Теперь только нужно избрать экономный путь подсчета.

Найдем сначала конъюнкцию формул E и K , рассчитывая на то, что выражение будет не очень громоздким, поскольку в одном из них есть высказывание c_2 , а в другом $(\neg c_2)$:

$$E \wedge K = ((c_2 \wedge \neg b_1) \vee (\neg d_1 \wedge \neg c_2) \vee (\neg d_1 \wedge \neg b_1)).$$

Теперь найдем конъюнкцию полученного результата с формулой B , рассчитывая на то, что будет довольно простое выражение, поскольку требование — не включать трех гребцов из одной команды в сборную — ложно. Находим эту конъюнкцию:

$$B \wedge E \wedge K = (c_2 \wedge \neg b_1 \wedge \neg a_1) \vee (\neg d_1 \wedge \neg c_2 \wedge \neg a_1) \vee \\ \vee (\neg g_1 \wedge \neg b_1 \wedge c_2) \vee (\neg c_2 \wedge \neg d_1 \wedge \neg g_1).$$

(при вычислении мы опустили высказывания $(\neg a_1 \wedge \neg d_1 \wedge \neg b_1)$ и $(\neg g_1 \wedge \neg d_1 \wedge \neg b_1)$ как заведомо ложные).

Теперь целесообразно найти конъюнкцию полученного результата с формулой H , поскольку снова получим ряд ложных высказываний, а потому выражение будет не очень громоздким:

$$B \wedge E \wedge K \wedge H = (c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \neg a_1) \vee \\ \vee (\neg c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg a_1 \wedge \neg d_1) \vee (c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \\ \wedge \neg g_1) \vee (\neg c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg g_1 \wedge \neg d_1).$$

Далее, составим конъюнкцию с формулой D :

$$B \wedge D \wedge E \wedge K \wedge H = (p_2 \wedge c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg a_1 \wedge \neg b_1) \vee \\ \vee (p_2 \wedge c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg a_1 \wedge \neg d_1) \vee (\neg k_2 \wedge p_2 \wedge c_2 \wedge \\ \wedge \neg b_1 \wedge \neg g_1) \vee (p_2 \wedge \neg c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg g_1 \wedge \neg d_1) \vee \\ \vee (c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \neg g_1) \vee (\neg c_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg g_1 \wedge \neg d_1).$$

Найдем конъюнкцию с формулой A . При подсчете нам встретится требование — включать гребца в сборную и в то же время его не включать. Такое требование, очевидно, ложно.

$$A \wedge B \wedge E \wedge K \wedge H \wedge D = (c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \\ \wedge \neg g_1) \vee (p_2 \wedge c_2 \wedge \neg e_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg a_1 \wedge \neg b_1) \vee \\ \vee (p_2 \wedge c_2 \wedge \neg e_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \neg g_1).$$

Наконец, найдем конъюнкцию с формулой C .

$$\begin{aligned} & A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge K \wedge H = \\ & = (c_2 \wedge \neg p_2 \wedge \neg k_2 \wedge \neg b_1 \wedge \neg g_1). \end{aligned}$$

Полученная формула показывает, что в сборную нельзя включать Боба и Гарри из первой команды и нельзя включать Пита и Клайва из второй команды. Следовательно, в сборную следует включить Артура, Майка и Джона из первой команды и Тома, Эдди и Сэма из второй команды.

Задача 8. Студент пришел сдавать экзамен автомату-экзаменатору. На экране написаны 5 вопросов, на каждый из которых нужно ответить: «да» или «нет». За правильный ответ машина засчитывала один балл.

Студент видит, что он не знает правильного ответа ни на один из поставленных вопросов. Но ему известно:

1) первый и последний вопросы требуют противоположных ответов;

2) второй и четвертый вопросы должны иметь одинаковые ответы;

3) хотя бы один из первых двух вопросов требует утвердительного ответа;

4) если четвертый вопрос требует ответа «да», то пятый вопрос — ответа «нет»;

5) опыт подсказывает студенту, что в машину больше закладывают вопросов, требующих ответов «да», чем вопросов, требующих ответов «нет».

Выполнив некоторые расчеты, студент установил, что он может получить оценку «4», а если повезет, то и «5». Какие вычисления проделал студент? Как он должен был отвечать?

Решение. Обозначим буквами a, b, c, d, e утвердительные ответы, соответственно, на 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й вопросы. Тогда отрицательные ответы на те же вопросы запишем так: $\neg a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg e$.

Высказывания об ответах, данные в задаче, запишем в виде:

1. $(a \wedge \neg e) \vee (\neg a \wedge e)$ (или на первый вопрос отвечать утвердительно, а на последний отрицательно, или наоборот).

2. $(b \wedge d) \vee (\neg b \wedge \neg d)$ (или на второй и четвертый вопросы давать утвердительные ответы, или отрицательные ответы).

3. $a \vee b$ (или на первый вопрос давать утвердительный

ответ, или на второй вопрос давать утвердительный ответ, или на оба вопроса).

4. $(d \Rightarrow \neg e) \equiv (\neg d \vee \neg e)$ (высказывание представляет собой импликацию, сводящуюся к дизъюнкции отрицаний).

Пятое высказывание используем в дальнейшем.

Каждая из четырех формул является истинной, поэтому истинной будет и их конъюнкция. Найдем ее. Сначала найдем конъюнкцию первой и четвертой формул, затем найдем конъюнкцию второй и третьей формул, а затем — конъюнкцию всех четырех формул:

$$1 \wedge 4 = ((a \wedge \neg e \wedge \neg d) \vee (a \wedge \neg e) \vee (\neg a \wedge e \wedge \neg d)) \equiv \\ \equiv ((a \wedge \neg e) \vee (\neg a \wedge e \wedge \neg d)).$$

$$2 \wedge 3 = ((a \wedge b \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (b \wedge d)) \equiv \\ \equiv ((a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (b \wedge d)).$$

$$1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 = ((a \wedge \neg b \wedge \neg d \wedge \neg e) \vee \\ \vee (a \wedge b \wedge d \wedge \neg e) \equiv (a \wedge \neg e \wedge ((\neg b \wedge \neg d) \vee (b \wedge d))).$$

Из последней истинной формулы следует, что $a = 1$, $\neg e = 1$, $((\neg b \wedge \neg d) \vee (b \wedge d)) = 1$, т. е. на первый вопрос нужно давать ответ «да», на последний вопрос нужно отвечать «нет». Так как в машину больше закладывают вопросов, требующих ответа «да», то в истинном высказывании $((\neg b \wedge \neg d) \vee (b \wedge d)) = 1$ будет истинной конъюнкция $b \wedge d$, а конъюнкция $\neg b \wedge \neg d$, естественно, ложной. Таким образом, на второй и на четвертый вопросы нужно давать утвердительные ответы. Этим определены правильные ответы на четыре вопроса. На третий вопрос правильный ответ неизвестен.

Задача 9. Шесть спортсменов — Адамов, Белов, Ветров, Глебов, Дронов и Ершов — в проходившем соревновании заняли шесть первых мест, причем ни одно место не было разделено между ними. О том, кто какое место занял, были получены такие высказывания:

1) «Кажется, первым был Адамов, а вторым — Дронов».

2) «Нет, на первом месте был Ершов, а на втором — Глебов».

3) «Вот так болельщики! Ведь Глебов был на третьем месте, а Белов — на четвертом».

4) «И вовсе было не так: Белов был пятым, а Адамов — вторым».

5) «Вы все перепутали: пятым был Дронов, а перед ним — Ветров».

Известно, что в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а второе ложное. Определить, какое место занял каждый из спортсменов.

Решение. Пусть a_i обозначает, что спортсмен Адамов занял в соревновании i -е место ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Аналогичный смысл символов b_i, v_i, g_i, e_i .

Понятно, что спортсмен не может занимать два места по итогам соревнования и одно место не могут занимать два или более спортсменов. Такие высказывания, если они нам встретятся, будут ложными.

Так как в высказывании каждого болельщика одно утверждение истинное, а второе ложное, то их дизъюнкция будет истинной. Запишем следующие пять истинных высказываний:

$$1) (a_1 \vee d_2) = 1; \quad 2) (e_1 \vee g_2) = 1; \quad 3) (g_3 \vee b_4) = 1;$$

$$4) (b_5 \vee a_2) = 1; \quad 5) (d_5 \vee v_4) = 1.$$

Из этих истинных высказываний образуем конъюнкцию, которая также будет истинной:

$$1 \wedge 2 = ((a_1 \wedge g_2) \vee (d_2 \wedge e_1)) = 1.$$

$$1 \wedge 2 \wedge 3 = ((g_3 \wedge d_2 \wedge e_1) \vee (a_1 \wedge g_2 \wedge b_4) \vee (b_4 \wedge d_2 \wedge e_1)) = 1.$$

$$1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 = ((b_5 \wedge g_3 \wedge d_2 \wedge e_1) = 1.$$

Мы получили истинную конъюнкцию, из которой следует истинность каждого из составляющих элементарных высказываний, т. е. $e_1 = 1, d_2 = 1, g_3 = 1, b_5 = 1$.

Теперь из пятого высказывания, в котором $d_5 = 0$, следует, что $v_4 = 1$.

Итак, первое место занял Ершов, на втором месте был Дронов, на третьем месте — Глебов, на четвертом — Ветров, на пятом — Белов. Последнее место занял Адамов.

Задача 10. После родительского собрания Федин отец сказал классному руководителю:

— Вот Вы не назвали моего сына среди хороших учеников. А ведь мой Федя — отличник и к тому же он лучший лыжник класса.

— Да, Вы правы. Но хорошим мы считаем ученика, который хорошо учится, дисциплинирован, помогает отстающим, а также участвует в работе научного кружка или занимается спортом. А Ваш Федя...

Что еще собирался сказать классный руководитель?

Решение. Обозначим буквой x высказывание «хорошо учиться», буквой d — «быть дисциплинированным»,

буквой p — «помогать отстающим», буквой k — «участвовать в работе научного кружка», буквой c — «заниматься спортом».

Тогда требование быть хорошим учеником запишется формулой, являющейся конъюнкцией следующего содержания:

$$A = (x \wedge d \wedge p \wedge (k \vee c)).$$

Федя не является хорошим учеником. Значит, для него записанная формула — быть хорошим учеником — является ложной. Истинной для Феди будет формула, являющаяся отрицанием формулы A , т. е. $\neg A$. Найдем ее содержание:

$$\neg A = (\neg x \vee \neg d \vee \neg p \vee (\neg k \wedge \neg c)).$$

Так как $(\neg c) = 0$, то и конъюнкция $(\neg k \wedge \neg c) = 0$. Кроме того, Федя отличник, поэтому $(\neg x) = 0$. Формула $(\neg A)$ для Феди упрощается и приобретает вид:

$$\neg A = (\neg d \vee \neg p) = 1.$$

Но дизъюнкция истинна в том случае, когда $(\neg d) = 1$, или $(\neg p) = 1$, или одновременно истинны оба высказывания. Теперь читатель понимает, что сказал классный руководитель.

Упражнения

46. Идет чемпионат школы по гимнастике. Болельщики горячо обсуждают ход борьбы и высказывают немало предположений о будущих победителях.

— Первой будет Наташа, а Майя будет второй, — сказал Сережа.

— Нет, Лида займет второе место, а Рита будет четвертой, — возразил Вова.

— Второй будет Наташа, а Рита третьей, — авторитетно заявил Толя.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из мальчиков ошибся только один раз. Какое место в соревновании заняли Наташа, Майя, Лида и Рита?

47. При составлении расписания уроков на один день учителя математики, истории и литературы высказали свои пожелания. Математик желает иметь уроки или первый, или второй. Историк просит поставить ему уроки или первый, или третий. Учителю литературы удобно провести урок или вторым, или третьим.

— Как составить расписание уроков, чтобы учесть все пожелания?

48. Нужно для четырех дежурных — Антипова, Климова, Маркова и Лебедева — составить график дежурств на агитпункте с соблюдением следующих условий:

1) если Лебедев не будет дежурить в понедельник, то в понедельник согласен дежурить Климов;

2) если Климов не сможет дежурить ни в понедельник, ни в четверг, то Антипов будет дежурить в понедельник;

3) если Марков не может дежурить в четверг, то Климов будет дежурить в среду;

4) если Лебедев придет дежурить во вторник, то Климов не будет дежурить в понедельник;

5) если Антипов не сможет дежурить в понедельник, то Марков не сможет дежурить во вторник.

Каким должен быть график дежурств?

49. Ученики Алик, Витя, Сережа и Дима убирали классные комнаты 7, 8, 9 и 10 классов. Оказалось, что комната 10 класса плохо убрана. На вопрос, кто какой класс убирал, ученики ответили:

— Я убирал 7 класс, а Дима 8,— сказал Алик.

— Я убирал 9 класс, а Алик 8,— возразил Витя.

— Я убирал 8 класс, а Витя 9 класс,— сказал Сережа.

Оказалось, что в ответе каждого ученика половина ответа правильна, а другая половина неправильна. Какой класс убирал каждый из учащихся?

50. Четыре ученицы — Анита, Бригитта, Криста и Дана — закончили между собой соревнование. На вопрос, кто какое место занял, получены такие высказывания:

1) «Анита победила, а Бригитта заняла второе место».

2) «Анита заняла второе место, а Криста третье».

3) «Дана заняла второе место, а Криста четвертое».

Как выяснилось позднее, в каждом из высказываний одно утверждение правильно, а другое ложно. Какое место заняла каждая из девочек?

51. На марафонском беге было высказано два прогноза о местах, которые займут спортсмены Иванов, Петров и Сидоров, реально претендующие на призовые места:

1) «Сидоров будет первым, Иванов — вторым, а Петров — третьим».

2) «Победит Иванов, Петров придет вторым, а Сидоров будет третьим».

После окончания состязания оказалось, что три фаворита действительно заняли три первых места, но оба предсказания оказались ложными. Ни в одном из предсказаний ни одно из мест не было названо правильно. Какое место занял каждый из спортсменов?

52. Четыре команды — «Артек», «Вымпел», «Сокол» и «Метеор» — в спортивных соревнованиях заняли четыре первые места, причем ни одно место не было разделено между командами. О занятых командами местах получены три высказывания:

1) «Второе место занял «Сокол», а «Метеор» третье».

2) «Победителем вышел «Сокол», а «Вымпел» был вторым».

3) «Второе место занял «Артек», а «Метеор» был последним».

В каждом из высказываний одно утверждение верно, а второе ложно. Какое место заняла каждая команда?

53. Перед началом забегов зрители обсуждали скаковые возможности трех лучших лошадей с кличками «Абрек», «Ветер», «Стрелок».

— Победит или «Абрек», или «Стрелок»,— сказал один болельщик.

— Если «Абрек» будет вторым, то победу принесет «Ветер»,— сказал другой болельщик.

— Много вы понимаете в лошадях,— возмутился третий болельщик. — Вторым придет или «Ветер», или «Абрек».

— А я вам скажу,— вмешался четвертый болельщик,— что если «Абрек» придет третьим, то «Стрелок» не победит.

После забега выяснилось, что три лошади — «Абрек», «Ветер»

и «Стрелок» — заняли три первых места, не деля между собой ни одного из мест, и что все четыре предсказания болельщиков были правильны. Как закончился забег?

54. Семья, состоящая из отца, матери и трех дочерей — Ани, Веры и Светы, — купила телевизор. Каждому, конечно, хотелось посмотреть передачу в первый вечер.

— Нам нужно распределить обязанности, чтобы не остаться без ужина, — сказал папа.

— Правильно, — поддержала мама. — Но только когда ты будешь смотреть передачу, я тоже сяду у телевизора.

— Хорошо, — согласился папа. — Кому из нас повезло, так это Свете и Вере, — улыбнулся папа. — По крайней мере одна из них получит удовольствие.

— А нам с тобой, Анечка, придется смотреть передачу только по очереди, — сказала мама.

— Я согласна, — ответила Аня. — Только ты нам разреши с Верой вместе работать на кухне или вместе быть у телевизора.

— Пожалуй, Свету одну нельзя оставлять, — сказал папа. — Если она пожелает смотреть передачу, то придется и мне с Верой посидеть с ней.

Все предложения были приняты. Кто смотрел передачу в первый вечер?

55. Один из четырех мальчиков испортил выключатель. На вопрос, кто это сделал, получены такие ответы: 1) «Это сделал или Миша, или Коля». 2) «Это сделал или Витя, или Коля». 3) «Это не могли сделать ни Толя, ни Миша». 4) «Это сделал или Витя, или Миша». Можно ли по этим данным установить, кто виновен в поломке выключателя, если из четырех высказываний три высказывания истинны?

56. Предстоят спортивные соревнования между четырьмя восьмью классами одной школы. В учительской живо обсуждаются возможные результаты и высказываются прогнозы.

— Первое место займет 8А, а второе — 8Б, — сказал учитель математики.

— Да что вы! — сказал учитель географии. — Я недавно ходил с ними в поход и знаю их возможности. 8А займет второе место, а 8Г — только третье.

— А я думаю, что на втором месте будет 8В, — сказала завуч школы, — а 8Г будет на последнем месте.

Оказалось, что прогнозы их сбылись только наполовину. Какое место занял каждый класс?

57. В спортивных соревнованиях принимали участие пять пионерских команд: «Вымпел», «Метеор», «Нептун», «Старт» и «Чайка». Об итогах соревнования имеется пять высказываний: 1) «Второе место занял «Вымпел», а «Старт» оказался на третьем месте».

2) «Хорошо выступала команда «Нептун», она стала победителем, а «Чайка» вышла на второе место». 3) «Да нет же, «Чайка» заняла только третье место, а «Нептун» был последним». 4) «Первое место по праву завоевал «Старт», а «Метеор» был четвертым». 5) Да, «Метеор» действительно был четвертым, а «Вымпел» был вторым».

Известно, что команды не делили места между собой и что в каждом высказывании одно утверждение правильное, а другое нет.

Как распределились места между командами?

58. Миша, Сережа, Коля и Юра играли во дворе в футбол и разбили окно. Когда выясняли, кто это сделал, они сказали так:

— Я окно не разбивал, — сказал Миша.

— Я тоже окно не разбивал, — сказал Коля.

— Окно разбил или Миша, или Коля, — заявил Сережа.

— Я видел, что это сделал Миша, — сказал Юра.

Их пионервожатый, который хорошо знал ребят, сказал, что трое из них всегда говорят только правду.

Кто разбил окно?

59*. Командант переселял студентов на время ремонта общежития. Дело это не простое. Посудите сами. На очередную комнату было 8 кандидатов, а поселить в нее можно было только четырех. На вопрос коменданта, кто с кем хочет быть в одной комнате, были поставлены такие условия:

Андрей согласен на любых соседей.

Борис без Кости не переселится.

Костя не хочет быть в одной комнате с Василием.

Василий согласен на любых соседей.

Дима не будет переселяться без Юры.

Федя не будет без Гриши в одной комнате с Димой, а без Димы не будет в одной комнате с Костей.

Гриша не хочет, чтобы его соседями были Борис и Костя вместе, а кроме того, он не желает быть в одной комнате ни с Андреем, ни с Василием.

Юра даст согласие переехать в новую комнату, если туда же переберутся либо Борис, либо Федя. Кроме того, Юра не будет в одной комнате с Костей, если туда не переедет Гриша, и не желает быть в комнате ни с Андреем, ни с Василием.

«Задали они мне задачу», — подумал комендант. Но в конце концов сумел учесть все пожелания. Каким образом?

60*. На заводе, выпускающем специальные краски, нужно расширить ассортимент. Сколько видов красок можно образовать из имеющихся веществ *А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К* и какие вещества должны входить в каждый вид краски, если нужно соблюдать следующие условия технологии их изготовления:

1) в окончательный продукт не должны входить вместе с *Б* вещества *А* и *Г*, но в его составе должно быть, по крайней мере, одно из веществ *Б, В*, одно из веществ *Е, Ж* и одно из веществ *А, К*;

2) если в состав входит вещество *А*, то должно входить и вещество *Ж*, а вещества *Г, Д* либо оба входят, либо оба не входят;

3) вещество *В* неприменимо без вещества *Е* и вещество *И* неприменимо без вещества *Ж*;

4) наличие в составе вещества *Е* исключает применение вещества *К*; смесь содержит хотя бы одно из веществ *К, З* и хотя бы одно из веществ *И, Е*, но не более чем одно из веществ *Д, Е*.

61. Обсуждается вопрос о включении в состав сборной команды пяти молодых игроков: Асеева, Валеева, Сватеева, Деева и Евтеева. Выбор обусловлен следующими условиями:

1) в команду необходимо включить не менее чем одного из трех игроков: Асеева, Валеева и Евтеева, но не более чем одного из трех игроков: Асеева, Сватеева и Деева;

2) Сватеева можно включить в сборную без Валеева тогда и только тогда, когда Асеев будет включен, а Деев не будет включен;

3) если Валеев будет включен в сборную, а Сватеев не будет включен, то сборную нужно пополнять и Деевым, и Евтеевым;

4) если Асеев не будет включен в команду, то нужно в нее включить и Сватеева, и Евтеева.

Кого из игроков можно включить в сборную команду?

62. Четыре молодых рабочих — Антонов, Петров, Степанов и Демьянов — работают на одном предприятии и учатся заочно. Как составить для них график свободных от работы дней в первые четыре дня недели, исходя из таких условий производства:

1) если во вторник выходными будут Демьянов или Антонов, то Степанову нужно дать выходной в понедельник;

2) если Демьянова освободить от работы в четверг, то Антонова нужно освободить в понедельник, а Степанова — в среду;

3) если Степанова освободить от работы во вторник или Демьянова освободить в среду, то Петрову нужно давать выходной день в четверг;

4) если Антонов будет освобожден в среду, то у Петрова выходной день будет во вторник, а если Петрову поставить выходной в среду, то Антонов может не приходить на работу во вторник;

5) если Демьянову высвободить понедельник, то у Степанова выходной придется на среду, а если Демьянов получит выходной в среду, то тогда Антонов может не приходить на работу во вторник.

63. Мальчик запланировал на воскресенье выполнить такую работу: выучить уроки, вымыть в комнате пол и, если будет хорошая погода, пойти на пляж или поиграть с ребятами в футбол, а если будет плохая погода, то почитать взятую у товарища книгу.

В каком случае следует считать, что план не выполнен?

64. Есть две группы символов A, B, C, D и $Ж, X, У, Т$. Найти четыре тождества между этими символами, если о них известны следующие высказывания:

1) «Если A не тождественно X , то C не тождественно $У$ ».

2) «Если B тождественно $У$ или B тождественно $Т$, то A тождественно X ».

3) «Если C не тождественно $Ж$, то B тождественно $Т$ ».

4) «Если D тождественно $У$, то B не тождественно X ».

5) «Если D не тождественно X , то B тождественно X ».

65. В соревновании по бегу с препятствиями принимали участие 6 участников: Алик, Боря, Валерий, Гога, Дима и Егорка. О том, кто какое место занял, известны пять высказываний:

1) «Боря был пятым, а Алик занял второе место».

2) «Вторым пришел Валера, а Дима был третьим».

3) «Победил Гога, а Егорка пришел последним».

4) «Алик был третьим, а Боря победил».

5) «Валера был третьим, а Егорка — четвертым».

В каждом из высказываний одно утверждение истинно, а второе ложно. Какое место занял каждый из ребят?

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ

Для решения многих логических задач с успехом можно применять составление таблиц.

Предположим, что в задаче идет речь о двух множествах и некоторых парах, в каждой из которых один элемент взят из одного множества, а другой — из другого. Если составить таблицу, поместив у одного входа элементы одного множества, а у другого входа — элементы второго

множества, то поле таблицы представит декартово произведение этих множеств.

Если теперь, в соответствии с условием задачи, из таблицы вычеркивать заведомо невозможные пары элементов, можно прийти к решению задачи.

Иногда приходится составлять таблицы с большим числом входов или рассматривать несколько таблиц.

Подробнее разъясним это на примерах задач, решаемых составлением таблиц.

Задача 1. В купе вагона ехали шесть пассажиров. Оказалось, что они жители разных городов: Москвы, Ленинграда, Киева, Тулы, Харькова и Одессы и имеют фамилии: Антонов, Беляков, Васильев, Гуров, Дымов и Ермаков. В дороге выяснилось:

1) Антонов и москвич — врачи, Дымов и ленинградец — учителя, а Васильев и туляк — инженеры;

2) Беляков, Ермаков и киевлянин — участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил;

3) харьковчанин старше Антонова, одессит старше Васильева, и Ермаков самый молодой;

4) Беляков и москвич едут до Киева, а Васильев и харьковчанин — до Винницы.

Определить, в каком городе живет каждый из пассажиров и какая у каждого из них специальность.

Решение. Очевидно, достаточно установить, кто из пассажиров в каком городе живет, чтобы затем определить, какая у каждого из них специальность.

Составим таблицу с двумя входами. Напишем у одного входа (горизонтального) начальные буквы фамилий пассажиров, а у другого входа — начальные буквы названий городов (рис. 1). Таблица размером 6×6 охватывает все возможные варианты сочетаний фамилии пассажира и места жительства, т. е. представляет собой декартово произведение множеств $H = \{\text{Антонов, Беляков, Васильев, Гуров, Дымов, Ермаков}\}$ и $P = \{\text{Москва, Ленинград, Киев, Тула, Харьков, Одесса}\}$ или множеств начальных букв фамилий и названий городов $\{A, B, V, G, D, E\}$ и $\{M, L, K, T, X, O\}$.

В условии задачи сказано, что Антонов и москвич — врачи. Из этого следует, что Антонов не из Москвы, поэтому в таблице клеточка (A, M) должна быть вычеркнута, поскольку сочетание (A, M) невозможно. В знак вычеркивания мы в клеточку (A, M) впишем цифру 1 (рис. 1), которая, кстати, будет напоминать о том, что к выводу о ее вычерки-

вании мы пришли, размышляя над первым пунктом условия задачи.

Далее, в первом условии сказано, что ленинградец — учитель, а туляк — инженер. Поскольку Антонов — врач,

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1		
Б						
В	1	1		1		
Г						
Д	1	1		1		
Е						

Рис. 1

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1		
Б			2	2		
В	1	1		1		
Г						
Д	1	1		1		
Е			2	2		

Рис. 2

то он не может быть ни ленинградцем, ни туляком, поэтому в таблице следует вычеркнуть клеточки (А, Л) и (А, Т). В знак вычеркивания мы и в этих клеточках поставим цифру 1.

Совершенно аналогичным рассуждением устанавливаем, что Дымов не является ни ленинградцем, ни москвичом, ни туляком, а также то, что и Васильев не является ни туляком, ни москвичом, ни ленинградцем. В таблице клеточки (Д, М), (Д, Л), (Д, Т), (В, М), (В, Л), (В, Т) помечены цифрой 1.

Переходим ко второму условию задачи.

Так как Беляков и Ермаков — участники Великой Отечественной войны, а туляк в армии совсем не служил, то ни Беляков, ни Ермаков не могут быть жителями Тулы. Поэтому в таблице вычеркнуты клеточки (Б, Т) и (Е, Т) (в этих клеточках поставлена цифра 2 (рис. 2)). Кроме того, участником Отечественной войны является еще и киевлянин. Значит, ни Беляков, ни Ермаков не могут быть жителями Киева, поэтому в таблице вычеркнуты и клеточки (Б, К) и (Е, К) (в них поставлена цифра 2).

Теперь замечаем, что в столбце с пометкой Т (Тула) остается свободной только одна клеточка (Г, Т). Значит, пассажир Гуров из Тулы. В таком случае Гуров ни из какого другого города быть не может, поэтому в строке Г вычеркиваем все оставшиеся клеточки (Г, М), (Г, Л), (Г, К), (Г, Х), (Г, О) (вычеркивание выполнено прямыми горизонтальными линиями (рис. 3)).

В условии 3) сказано, что харьковчанин старше Антонова, а Ермаков самый молодой, поэтому ни Антонов, ни Ермаков не харьковчане. В таблице вычеркиваем клеточки

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1		
Б			2	2		
В	1	1		1		
Г						
Д	1	1		1		
Е			2	2		

Рис. 3

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1	3	
Б			2	2		
В	1	1		1		3
Г						
Д	1	1		1		
Е			2	2	3	3

Рис. 4

(А, Х) и (Е, Х), проставляя в них цифру 3 (рис. 4). Аналогично устанавливаем, что ни Васильев, ни Ермаков не являются жителями Одессы, поэтому и в клеточках (В, О) и (Е, О) проставляем цифру 3.

Из четвертого условия, в котором говорится, что Беляков и москвич едут до Киева, следует, что Беляков не мос-

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1	3	
Б	4		2	2	4	
В	1	1		1	4	3
Г						
Д	1	1		1		
Е			2	2	3	3

Рис. 5

Имя	Город					
	М	Л	К	Т	Х	О
А	1	1		1	3	
Б	4		2	2	4	
В	1	1		1	4	3
Г						
Д	1	1		1		
Е			2	2	3	3

Рис. 6

квич. Поскольку харьковчанин едет до Винницы, то Беляков не может быть и харьковчанином. Совершенно аналогичные заключения делаем и о Васильеве. В клеточках (Б, М), (Б, Х), (В, М), (В, Х) в знак их вычеркивания пишем цифру 4 (если они не вычеркнуты ранее) (рис. 5).

В строке В (Васильев) и в столбцах М и Х осталось по одной свободной клеточке. Значит, Васильев из Киева, Ермаков из Москвы, Дымов из Харькова. Поскольку ни-

кто другой не может быть из Киева, а также Дымов и Ермаков не могут быть жителями других городов, то в таблице вычеркнуты клеточки (A, K) , (D, K) , (\bar{D}, O) и (E, L) (отмечено вертикальными прямыми линиями (рис. 6)).

Теперь решение задачи легко завершается. В строке A (Антонов) осталась свободной только клеточка (A, O) , поэтому заключаем, что Антонов из Одессы и вычеркиваем клеточку (B, O) .

Определить профессии пассажиров теперь нетрудно: Антонов и Ермаков — врачи, Дымов и Беляков — учителя, Васильев и Гуров — инженеры.

Окончательный ответ таков: врач Антонов из Одессы, учитель Беляков из Ленинграда, инженер Васильев из Киева, инженер Гуров из Тулы, учитель Дымов из Харькова и врач Ермаков из Москвы.

Следует заметить, что при решении логических задач путем составления таблиц весьма ощутимый эффект дает использование цветных карандашей, паст, мелков. Таблица в этом случае делается яркой и легко обозримой.

Рассмотрим задачу, для решения которой нужно или составлять несколько таблиц, или делать таблицу с большим числом входов.

Задача 2. В одном из ленинградских вузов на разных курсах учатся четыре студента. Определить фамилию, имя и курс, на котором учится каждый студент, если известно:

- 1) Борис был персональным стипендиатом;
- 2) Василий должен был летом ехать на практику в Омск, и Иванов собирался поехать домой в Донбасс;
- 3) Николай был курсом старше Петра;
- 4) Борис и Орлов — коренные ленинградцы;
- 5) Крылов в прошлом учебном году окончил школу и поступил на тот же факультет, на котором учился Зуев;
- 6) Борис иногда пользовался прошлогодними конспектами Василия.

Решение. Заготовим таблицу с четырьмя входами, написав у одного входа начальные буквы имен студентов $B, V, H, П$, у другого — начальные буквы их фамилий $O, K, З, И$, а у третьего и четвертого входов — номера курсов I, II, III, IV (рис. 7).

Такая таблица охватывает возможные соотношения между именем и фамилией, между именем и курсом и между курсом и фамилией. (Очевидно, можно было бы составить три различные таблицы, на полях которых были бы распо-

ложены попарные декартовы произведения указанных множеств. При желании читатель может это сделать).

Заполним таблицу.

Поскольку персональная стипендия первокурсникам не назначается, то из условия 1) приходим к выводу, что

		Фамилия				Курс			
		О	К	З	И	I	II	III	IV
Имя	Б					1			
	В								
	Н								
	П								
Курс	I								
	II								
	III								
	IV								

Рис. 7

		Фамилия				Курс			
		О	К	З	И	I	II	III	IV
Имя	Б					1			
	В					2			
	Н								
	П								
Курс	I								
	II								
	III								
	IV								

Рис. 8

Борис учился не на первом курсе — в таблице в строке *Б* (Борис) вычеркнута клеточка (*Б*, *I*) (в ней поставлена цифра 1 (рис. 7)).

Далее, так как Николай курсом старше Петра и у Василия уже есть прошлогодние конспекты (условие 6), то первокурсником может быть только Петр (на правой половине таблицы клеточку (*П*, *I*) обводим рамкой). Так как Николай курсом старше Петра, то Николай — студент второго курса (обводим рамочкой клеточку (*Н*, *II*)).

Для Бориса и Василия остаются старшие курсы: *III* и *IV*. Так как Борис пользовался прошлогодними конспектами Василия, то это возможно только в том случае, если Борис учится на *III* курсе, а Василий — на *IV*. Обводим рамкой клетки (*Б*, *III*) и (*В*, *IV*). Первая половина таблицы уже заполнена.

В пятом условии сказано, что Крылов первокурсник, поэтому обведем клеточку (*I*, *К*). Мы уже знаем, что Петр учится на первом курсе. Из этого следует, что Петр имеет фамилию Крылов, в таблице обводим клеточку (*П*, *К*).

В центральной части таблицы вычеркиваем все клеточки в строке и в столбце, содержащих в пересечении клеточку (*П*, *К*) (рис. 8) (вычеркивание выполнено горизонтальными прямыми линиями).

Из условия 2) приходим к выводу, что Василий не Иванов, поэтому в знак вычеркивания клеточки (*В*, *И*) поставим в ней цифру 2.

Четвертое условие позволяет утверждать, что Борис не Орлов, поэтому в клеточке (Б, О) поставим цифру 4 (рис. 9), а объединяя условия 2) и 4), приходим к выводу, что Борис и не Иванов, так как Борис живет в Ленинграде, а Иванов — житель Донбасса. В клеточку (Б, И) также впишем цифру 4.

Замечаем теперь, что в строке Б свободной осталась только одна клеточка (Б, З). Значит, Борис — это Зуев.

		Фамилия				Курс			
		О	К	З	И	I	II	III	IV
Имя	Б	4			4	1			
	В				2				
	Н								
	П								
Курс	I								
	II								
	III								
	IV								

Рис. 9

		Фамилия				Курс			
		О	К	З	И	I	II	III	IV
Имя	Б	4			4	1			
	В				2				
	Н								
	П								
Курс	I								
	II								
	III								
	IV								

Рис. 10

В столбце И также осталась одна свободная клеточка (Н, И), значит, Николай — это Иванов.

Теперь уже решение задачи легко завершается: нужно вычеркнуть клеточки (В, З), (Н, О) и (Н, З) (рис. 10). Получаем, что Василий — это Орлов. Можно заполнить и нижнюю часть таблицы, а можно без нее и обойтись.

Итак, ответ в задаче таков: Борис Зуев учится на третьем курсе, Василий Орлов — на четвертом, Николай Иванов — на втором и Петр Крылов — на первом курсе.

Задача 3. В финальном шахматном турнире воинского соединения встретились восемь шахматистов, имевших воинские звания: полковник, майор, капитан, лейтенант, прапорщик, сержант, ефрейтор и рядовой. Среди них были пехотинец, летчик, ракетчик, десантник, танкист, артиллерист, минометчик и связист.

В первом туре полковник играл с летчиком, майор — с танкистом, сержант — с пехотинцем, прапорщик — со связистом.

После первого тура капитан был отозван. Из-за этого выходными оказались: во втором туре — минометчик, в третьем туре — рядовой, в четвертом туре — десантник, в пятом туре — лейтенант, в шестом туре — танкист, в седьмом туре — ракетчик.

Во втором туре полковник играл с артиллеристом, лейтенант — с сержантом, пехотинец — с танкистом.

В третьем туре ефрейтор выиграл у связиста, а партии полковника с десантником и майора с минометчиком закончились вничью.

Какую воинскую специальность и какое звание имел каждый участник турнира?

Решение. Составим таблицу размером 8×8 с двумя входами. У одного входа (горизонтального) напомним

Воинское звание	Род войск							
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артиллерист	Минометчик	Связист
Полковник	1	1			1			1
Майор	1	1			1			1
Капитан								
Лейтенант								
Прапорщик	1	1			1			1
Сержант	1	1			1			1
Ефрейтор								
Рядовой								

Рис. 11

Воинское звание	Род войск							
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артилле-рист	Миномет-чик	Связист
Полковник	1	1			1			1
Майор	1	1			1			1
Капитан	2		2	2	2	2	2	2
Лейтенант								
Прапорщик	1	1			1			1
Сержант	1	1			1			1
Ефрейтор								
Рядовой								

Рис. 12

воинские звания, а у другого — названия родов войск (рис. 11).

Из сказанного в условии задачи о первом туре делаем вывод, что полковник не может быть ни летчиком, ни танкистом, ни пехотинцем, ни связистом, так как с летчиком он сам играл, а с остальными в этом туре играли другие участники турнира. То же самое нужно сказать о майоре, о сержанте и о прапорщике. Поэтому в таблице вычеркиваем соответствующие клеточки, вписав в них цифру 1.

Так как после первого тура капитан был отозван, то капитаном не может быть ни один из участников турнира, продолжавших соревнование. Таким образом, капитаном не может быть ни пехотинец, ни ракетчик, ни десантник, ни танкист, ни артиллерист, ни минометчик, ни связист. В таблице в строке «капитан» вычеркиваем соответствующие клеточки, проставляя в них цифру 2 (рис. 12).

В строке «капитан» остается свободной только одна клеточка, следовательно, капитан был летчиком. Обведем эту клеточку рамкой и в столбце «летчик» вычеркнем все остав-

шиеся клеточки (вычеркивание выполнено вертикальными прямыми линиями).

Свободными от игры в разных турах были разные участники турнира, поэтому заключаем, что минометчик не рядовой и не лейтенант. То же самое нужно сказать и о десантнике,

Воинское звание	Род войск						
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артиллерист	Минометчик
Полковник	1	1			1		1
Майор	1	1			1		1
Капитан	2		2	2	2	2	2
Лейтенант			3	3	3		3
Прапорщик	1	1			1		1
Сержант	1	1			1		1
Ефрейтор							
Рядовой			3	3	3		3

Рис. 13

Воинское звание	Род войск						
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артиллерист	Минометчик
Полковник	1	1			1	4	4
Майор	1	1			1		1
Капитан	2		2	2	2	2	2
Лейтенант	4		3	3	3	4	3
Прапорщик	1	1			1		1
Сержант	1	1			1	4	4
Ефрейтор							
Рядовой			3	3	3		3

Рис. 14

танкисте и ракетчике. В таблице вычеркиваем соответствующие клеточки, вписав в них цифру 3 (рис. 13).

Замечаем, что в столбце «танкист» свободной осталась только одна клеточка. Значит ефрейтор был танкистом, поэтому в строке «ефрейтор» вычеркиваем оставшиеся еще не вычеркнутыми клеточки (вычеркивание выполнено горизонтальными прямыми линиями).

Из сказанного в условии задачи о втором туре, в котором выходным был минометчик, следует, что минометчик не был ни полковником, ни лейтенантом, ни сержантом, которые в этом туре вели игру. То же самое следует сказать об артиллеристе, о танкисте и о пехотинце. Соответствующие клеточки в таблице подлежат вычеркиванию (если они не были вычеркнуты ранее). В знак вычеркивания впишем цифру 4 (рис. 14). Оказывается, что в столбце «пехотинец» свободной осталась только одна клеточка, следовательно, рядовой был пехотинцем, и мы в строке «рядовой» вычеркиваем еще две оставшиеся клеточки. Кроме того, лейтенант, оказывается, был связистом.

Из сказанного о третьем туре, в котором полковник с десантником, а майор с минометчиком свели партии вничью, приходим к выводу, что полковник не был десантником и майор не был ни минометчиком, ни десантником.

В соответствующие клеточки таблицы в знак их вычеркивания вписываем цифру 5 (рис. 15). В строке «полковник» осталась только одна свободная клеточка — полковник был ракетчиком. Тогда в столбце «ракетчик» вычеркиваем еще

Воинское звание	Род войск						
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артиллерист	Минометчик
Полковник	1	1		5	1	4	4
Майор	1	1		5	1		5
Капитан	2		2	2	2	2	2
Лейтенант	4		3	3	3	4	3
Прапорщик	1	1			1		1
Сержант	1	1			1	4	4
Ефрейтор							
Рядовой			3	3	3		3

Рис. 15

Воинское звание	Род войск						
	Пехотинец	Летчик	Ракетчик	Десантник	Танкист	Артиллерист	Минометчик
Полковник	1	1		5	1	4	4
Майор	1	1		5	1		5
Капитан	2		2	2	2	2	2
Лейтенант	4		3	3	3	4	3
Прапорщик	1	1			1		1
Сержант	1	1			1	4	4
Ефрейтор							
Рядовой			3	3	3		3

Рис. 16

три свободные клеточки (вычеркнуто вертикальными волнистыми линиями).

Завершение решения задачи очевидно: в строках «майор» и «сержант» осталось по одной свободной клеточке (рис. 16); наконец, устанавливаем, что прапорщик был минометчиком.

Упражнения

66. Три девочки — Рая, Майя и Галя — летом были в пионерском лагере. Каждая из них увлекается одним из видов спорта: теннисом, плаванием, волейболом. В первый же день Галя и волейболистка ходили любоваться водопадом. Майя старше теннисистки, а волейболистка ровесница одной из девочек. Каким видом спорта занималась каждая?

67. В пионерском лагере встретились три мальчика, приехавшие из Минска, Киева и Свердловска. При знакомстве оказалось, что они разного возраста и увлекаются спортом. В теннис играют только Коля и минчанин. В футбол — только Сережа и киевлянин. Олег играет в шахматы, и он старше киевлянина. Теннисисты в шахматы не играют. Шахматист не самый старший. В каком городе живет каждый из мальчиков и каким видом спорта увлекается? Каковы они по возрасту?

68. Три брата живут в городах Киеве, Харькове и Донецке и имеют профессии учителя, врача и инженера. Игорь часто бывает в Киеве в командировке. Павел в прошлом году приезжал в Харьков на конференцию. Инженер работает на Харьковском тракторном заводе. В школе все пророчили Павлу быть учителем, но ошиблись. Врача часто приглашают в Киев на семинары. В каком городе живет старший брат Степан?

69. Три ученицы — Аня, Валя и Катя — принимали участие в конкурсе. Их фамилии Морева, Розова и Наумова. О них известно следующее. Наумова участвовала в конкурсе впервые. Аня выступила хуже

всех. Валя в прошлом году заняла второе место. Работы двух лучших участниц выполнены в тетрадях в клеточку. Морева писала на отдельных листках. Найти фамилию и имя двух лучших участниц конкурса.

70. Поезд идет из Москвы в Ленинград. В поезде едут пассажиры Иванов, Петров, Сидоров. Такие же фамилии у начальника поезда, машиниста и проводника. Известно, что пассажир Иванов живет в Москве, Проводник живет на полпути между Москвой и Ленинградом. Пассажир, однофамилец проводника, живет в Ленинграде. Ближайший сосед проводника (из пассажиров) зарабатывает в месяц ровно втрое больше проводника. Пассажир Петров имеет месячную зарплату 200 рублей. Сидоров (из бригады) выиграл у начальника поезда партию в шахматы. Как фамилия машиниста?

71. Десять мальчиков: Александр, Борис, Василий, Георгий, Дмитрий, Евгений, Зиновий, Иван, Кирилл и Леонид учатся в разных классах одной средней школы. В каком классе учится каждый из них, если известно:

1) старший брат Дмитрия оканчивает 7 класс, а младший брат Евгений учится в 5 классе;

2) Александр старше Кирилла на один класс, а Леонид старше Евгения на два класса;

3) Василий не оканчивает школу в этом году;

4) Иван при окончании третьего класса получил награду;

5) Борис — пионервожатый в 5 классе, а Василий — в четвертом;

6) Александр, Кирилл и шестиклассник начали сдавать нормы на значок ГТО, а Евгений, Борис и восьмиклассник уже получили его;

7) Кирилл, Георгий и пятиклассник живут на улице Куйбышева, а Дмитрий, первоклассник и восьмиклассник — на Садовой;

8) Борис помогает отстающему Евгению, Дмитрий помогает Ивану, а Александру помогает Георгий.

72. Восемь учащихся — Аркадий, Борис, Вадим, Григорий, Дмитрий, Евгений, Константин и Леонид — учатся в разных классах одной восьмилетней школы. Известно:

1) Аркадий на класс старше Григория, Дмитрий на три класса старше Вадима;

2) Константин окончил четвертый класс с наградой;

3) Леонид учится в этой школе с пятого класса;

4) Евгений обещал помогать в учебе Вадиму и в будущем году;

5) родители Евгения и шестиклассника в воскресенье выезжали за город;

6) Аркадий и восьмиклассник живут на улице Октябрьской, Борис и шестиклассник — на Первомайской, Григорий и третьеклассник — на улице Ленина, а Леонид и семиклассник — на Советской.

В каком классе учится каждый из них?

73. В забеге шести спортсменов Адам отстал от Богдана и еще от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опередил Богдана, но все же пришел после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен?

74. Спортсмены Викулов, Кулаков, Потапов и Сомов являются членами добровольных спортивных обществ «Авангард», «Динамо», «Локомотив» и «Спартак». Спартаковец — чемпион по шахматам, а Потапов в шахматы совсем не играет. Хотя динамовец и занимается плаванием, однако Викулов и теннисист мало ему уступают. Потапов и футболист живут в одном доме, а Кулаков живет совсем на другой улице. Шахматист и теннисист дружат с авангардовцем. Кулаков и динамовец — ровесники, а Потапов моложе их.

В каком добровольном спортивном обществе состоит каждый из спортсменов и каким видом спорта занимается?

75. Алик, Боря, Витя, Толя и Гриша купили в магазине пять предметов: тетрадь, авторучку, готовальню, книгу и карандаш. Алик и Витя сказали, что они купили лучшие авторучки, чем те, что сейчас имеются в магазине. Боре папа подарил и готовальню, и карандаш. Толя не купил ни тетради, ни карандаша. И у Вити, и у Гриши не хватило денег ни на книгу, ни на готовальню. Боря решил авторучку еще не покупать. Какой предмет купил каждый из мальчиков?

76. В пионерском лагере в одной палатке жили Алеша, Боря, Витя и Жора. Оказалось, что все они учатся в разных классах (с четвертого по седьмой) и каждый занимается в одном из кружков: юного натуралиста, конструкторском, шахматном и в фотокружке.

Известно, что Алеша и пятиклассник учатся в одной школе, а ученик четвертого класса приехал из другого города. Борис и фотолюбитель приехали в лагерь с небольшим опозданием. Витя и семиклассник уже ходили в поход. Витя и шестиклассник выиграли партию в городки у Бори и конструктора. Фотограф старше Жоры, Алеша старше Вити, а шахматист старше Алеши. В воскресенье фотограф «охотился» с фотоаппаратом за бабочками, семиклассник катался на лодке, а конструктор и Алеша играли в теннис.

В каком классе учится и в каком кружке принимает участие каждый из пионеров?

77. Десять мальчиков — Артур, Борис, Виктор, Геннадий, Давид, Евгений, Клим, Леонид, Максим и Николай — учатся в разных классах одной и той же школы. Известно:

1) Максим первый класс окончил в другой школе;

2) Евгений в седьмом классе был награжден грамотой за победу в шахматном турнире;

3) Артур старше Бориса на один класс, Виктор старше Клима на два класса, а Давид моложе Геннадия на три класса;

4) за сбор макулатуры Николай и шестиклассник премированы книгами, а восьмикласснику и девятикласснику объявлена благодарность;

5) Николай и десятиклассник в воскресенье были на рыбалке, а Максим и девятиклассник ходили в лес за грибами;

6) Евгений, Борис и семиклассник признаны лучшими футболистами школы и включены в одну команду, а десятиклассник — чемпион города по настольному теннису;

7) Геннадий и пятиклассник живут в новом микрорайоне, Максим и восьмиклассник — на улице Гагарина, Артур и шестиклассник — на проспекте Космонавтов, а Борис и третьеклассник — на улице Садовой;

8) родители Николая, первоклассника и семиклассника работают на заводе, а родители Давида и Леонида — в пригородном совхозе.

В каком классе учится каждый из мальчиков?

78. Витя, Коля, Павлик и Сережа учатся в 5, 6, 7 и 8 классах. В воскресенье они отправились в лес за грибами. Шестикласснику не повезло — он не нашел ни одного белого гриба, а Павлик с пятиклассником нашли по десять грибов. Витя и семиклассник нашли ежа и позвали Колю показать, какой «гриб» им попался. Восьмиклассник, шестиклассник и Коля объясняли Сереже, как ориентироваться на местности.

В каком классе учатся Витя, Коля, Павлик и Сережа?

79. Пятеро студентов поехали за город на велосипедах. Студентов звали Сергей, Борис, Леонид, Григорий и Виктор. Они были уроженцами из разных городов: Риги, Пензы, Львова, Харькова и Москвы.

Велосипеды, на которых они ехали, были сделаны на заводах в этих же городах, но ни один из студентов не ехал на велосипеде, сделанном в его городе.

Сергей ехал на велосипеде, сделанном в Риге, откуда родом Борис. У Бориса был велосипед Пензенского завода, у Виктора — Московского завода, а у Григория — Харьковского завода. Пенза — родина владельца велосипеда, изготовленного в том городе, где родился Леонид. Виктор родом из Львова. Как зовут студента-москвича?

80. Наряды дружинников, командирами которых были Антонов, Быков, Ветров, Гусев и Дымов, в течение пяти воскресных дней дежурили на пяти участках города: в парке, на бульваре, на автовокзале, на стадионе и у кинотеатра. Каждый раз команды дежурили в разных местах, обеспечивая дежурством указанные участки.

В первое воскресенье группа Антонова дежурила на стадионе, Ветрова — на автовокзале, а Дымова — в парке. Во второе дежурство Антонов повел свой отряд в парк, а Гусев — на стадион. В третье воскресенье Антонов организовал дежурство своей группы на автовокзале, а Ветров — на бульваре. В четвертый день команда Гусева следила за порядком в парке, а Дымова — у кинотеатра.

На каких участках и в какие дни дежурила группа Быкова?

81. В авиационном подразделении служат Потапов, Щедрин, Семенов, Коновалов и Самойлов. Их специальности: пилот, штурман, бортмеханик, радист и синоптик. Определить, какую специальность имеет каждый из них, если известно: 1) Щедрин и Коновалов не знакомы с управлением самолетом; 2) Потапов и Коновалов готовятся стать штурманами; 3) квартиры Щедрина и Самойлова находятся рядом с квартирой радиста; 4) Семенов, находясь в доме отдыха, встретил Щедрина и сестру синоптика; 5) Потапов и Щедрин в свободное от работы время играют в шахматы с бортмехаником и пилотом; 6) Коновалов, Семенов и синоптик увлекаются боксом, а радист боксом не увлекается.

82. Антонов, Малеев и Марков живут в разных городах и имеют разные профессии. Один живет в Москве, другой в Минске, третий в Астрахани. Один работает механиком, другой агрономом, третий артистом. Определить место жительства каждого и их профессию, если известно: 1) Марков бывает в Москве лишь во время отпуска, хотя все его родственники постоянно живут в столице; 2) жена артиста приходится Маркову младшей сестрой; 3) у двух из этих людей название профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их фамилии.

83. Дружные ребята живут в нашем дворе. Все они учатся в одной школе, но в разных классах, с четвертого по десятый.

Галя старше Володи на один класс, но моложе Ефима на два класса; Дима на два класса моложе Жени, но на два класса старше Володи.

Жене, девятикласснику и восьмикласснику была поручена подготовка математической викторины.

Боря подарил Алику свои прошлогодние учебники

В каком классе учится каждый из ребят нашего двора?

§ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ

Некоторые логические задачи удобно решать при помощи построения графов. Иногда граф может играть вспомогательную роль в сочетании с другими методами решения.

Графом называют схему (сетку, карту), составленную из нескольких точек, называемых вершинами графа, и нескольких отрезков (или дуг), соединяющих эти точки и называемых *ребрами* графа.

Применяя граф к решению логических задач, обычно вершинам и ребрам графа придают определенный смысл.

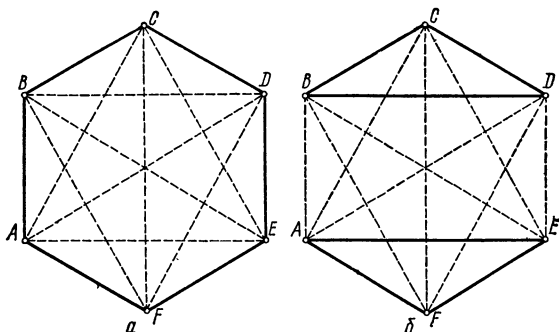


Рис. 17

Часто решение задачи получается наглядным и эффективным.

Уяснение решения логических задач путем построения графов начнем с разбора нескольких примеров.

Задача 1. На острове есть несколько населенных пунктов. Из каждого пункта выходят две проезжие дороги и три пешеходные тропы. Каждая проезжая дорога и каждая пешеходная тропа приводят к некоторому населенному пункту. Любые два населенных пункта связаны чем-то одним — или дорогой, или тропой. Сколько на острове населенных пунктов, проезжих дорог и пешеходных троп?

Решение. Условимся населенный пункт изображать точкой, проезжую дорогу — сплошной линией, а пешеходную тропу — пунктирной линией. Так как каждая дорога и каждая тропа приводят к некоторому населенному пункту, то в конце проведенных линий тоже поставим точки (рис. 17). Таким образом, населенных пунктов должно быть не менее шести.

Наше рассуждение привело нас к построению графа, состоящего из шести вершин. Бóльшего числа вершин не существует, поскольку тогда из исходного пункта должно выходить более пяти путей сообщения, чего быть не может. Теперь нужно рационально провести дороги и тропы. Различные случаи показаны на рис. 17 а, б. Проведем подсчет.

Значит, на острове шесть населенных пунктов, они со-

должно быть четыре остановки; каждая остановка должна быть общей для двух маршрутов; от каждой остановки до каждой другой остановки можно проехать, делая не более чем одну пересадку.

Сколько должно быть маршрутов и остановок?

Решение. Изобразим один маршрут и отметим точками на нем четыре остановки. Условие, чтобы каждая остановка была общей для двух маршрутов, налагает жесткое

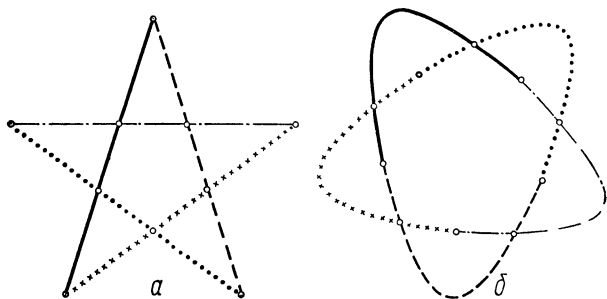


Рис. 19

требование на число маршрутов: их должно быть, кроме рассматриваемого маршрута, еще четыре. Итак, схема автобусных маршрутов может быть такой, какая представлена на рис. 19 а, б.

Всего маршрутов должно быть пять, а остановок — десять.

Требование, чтобы от каждой остановки до каждой другой остановки можно было проехать не более чем с одной пересадкой, также выполнено.

Задача 4. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание были приглашены по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает.

Сколько в городе поликлиник? Сколько врачей принимало участие в совещании?

Решение. Построим граф, условившись поликлинику изображать точкой (вершиной графа), а приглашенного от нее врача изобразим ребром графа, выходящим из этой точки.

От поликлиники A приглашено пять врачей. Значит, из вершины A графа выходит пять ребер (рис. 20).

Но, по условию, каждый из приглашенных работает в двух поликлиниках и представляет на совещании обе, поэтому в конце каждого из проведенных из A ребер нужно поставить по вершине графа. Кроме того, каждые две вершины должны быть соединены ребром.

Построили граф в виде многоугольника, у которого вершины обозначают поликлиники, а стороны и диагонали — приглашенных на совещание врачей.

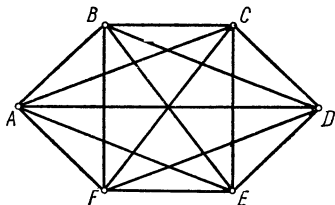


Рис. 20

Граф имеет 6 вершин и 15 (различных) ребер. Значит, в городе было 6 поликлиник, а на совещание было приглашено 15 врачей.

К полученному графу невозможно добавить больше ни вершин, ни ребер, не изменяя при этом условие задачи.

Задача 5. Пять учеников одной школы (назовем их для краткости только начальными буквами A, B, C, D, E) участвовали в конкурсе. Учитель истории, хорошо знавший учеников, предсказал итог конкурса следующим образом: A_1, B_2, C_3, D_4, E_5 (индекс обозначает, какое место в конкурсе занял ученик).

Учитель математики предсказал иной итог конкурса: D_1, A_2, E_3, C_4, B_5 . Оказалось, что оба они ошиблись, причем учитель истории не назвал правильно ни одного места и ни одной пары учеников, которые по итогам конкурса следовали друг за другом. Учитель математики указал правильно места двух учеников, а также правильно назвал две пары учеников, следующих по итогам конкурса друг за другом.

Каковы итоги конкурса?

Решение. Из условия задачи нам известны некоторые неправильные высказывания, например, высказывания учителя истории о занятых учениками местах: $A_1 = 0, B_2 = 0, C_3 = 0, D_4 = 0, E_5 = 0$, а также высказывания о парах учеников, следующих друг за другом по итогам конкурса, которые вытекают из высказывания о занятых местах, а именно: $(AB) = 0, (BC) = 0, (CD) = 0, (DE) = 0$.

Среди высказываний учителя математики о занятых учениками местах (D_1, A_2, E_3, C_4, B_5) два места названы

правильно, а также среди пар учеников, следующих по итогам конкурса друг за другом, а именно: (DA) , (AE) , (EC) , (CB) — две пары названы правильно. Всем этим мы и будем руководствоваться при построении графов.

В отличие от графов, построенных при решении предыдущих задач, граф, к построению которого мы присту-

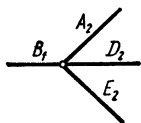


Рис. 21

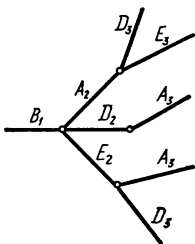


Рис. 22

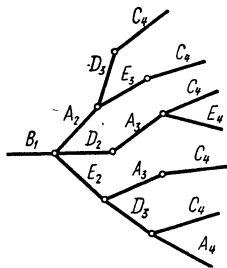


Рис. 23

паем, называется древовидным графом — из-за его сходства с веткой дерева.

Начальную букву фамилии ученика и номер занятого им места будем изображать ребром графа, а вершина будет символизировать возможные разветвления от предыдущего места к последующему месту по итогам конкурса.

Так как ученик A не занял первого места, то граф не может начинаться с ребра A_1 , но может начинаться с ребра B_1 , C_1 , D_1 , E_1 . Чтобы иметь полное решение задачи, рассмотрим построение четырех графов. Напомним, что при построении графа нужно следить, чтобы не получались места и пары, отмеченные нами выше как невозможные, потому что они неправильны.

П о с т р о е н и е.

I. Начинаем строить граф с ребра B_1 .

Так как порядок следования (BC) невозможен, то на второе место нельзя поставить ученика C , но можно поставить ученика A , или ученика D , или ученика E . Граф в первой вершине разветвляется на три ветки (рис. 21).

На третьем месте не может быть ученик C , а также невозможен порядок следования (DE) . Поэтому после ребра A_2 возможно разветвление графа в ребра D_3 и E_3 ; после D_2 возможно только продолжение ветки ребром A_3 , а после ребра E_2 также возможно разветвление ребрами A_3 и D_3 , что и показано на рис. 22.

На четвертом месте не может быть ученик D , а также

невозможен порядок следования (DE). Поэтому ветка $B_1A_2D_3$ графа даст только один росток — ребро C_4 . Точно так же ветки $B_1A_2E_3$, $B_1E_2A_3$ дадут по одному ростку — ребро C_4 . Ветки же $B_1D_2A_3$ и $B_1E_2D_3$ дадут по два разветвления: соответственно в ребра C_4 , E_4 и ребра C_4 , A_4 (рис. 23).

На пятом месте не может быть ученик E , а также невозможен порядок (CD). Поэтому четыре ветки графа из семи

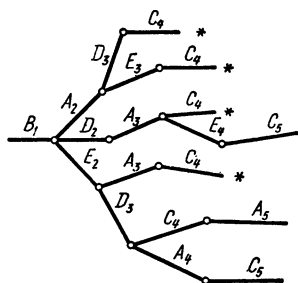


Рис. 24

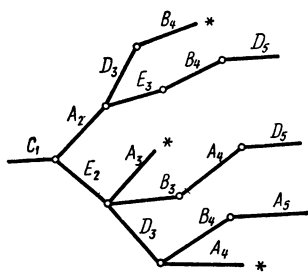


Рис. 25

полученных не могут быть продолжены (в конце этих веток поставлены звездочки (рис. 24)).

Каждая из оставшихся веток дает по единственному продолжению.

Построенный нами граф дает три возможных распределения мест среди участников конкурса, удовлетворяющие предсказаниям учителя истории, но они еще не проверены на выполнение предсказаний учителя математики. Выпишем эти распределения мест. Они таковы: а) B_1 , D_2 , A_3 , E_4 , C_5 ; б) B_1 , E_2 , D_3 , C_4 , A_5 ; в) B_1 , E_2 , D_3 , A_4 , C_5 . Но ни одно из этих распределений мест не проходит через испытания предсказанием учителя математики, так как ни в одном из этих распределений нет двух мест, угаданных учителем математики. Следовательно, это построение графа решение задачи не дает.

II. В полной аналогии с тем, как было выполнено первое построение графа, строим граф, начинающийся с ребра C_1 , т. е. граф, построенный при предположении, что ученик C занял в конкурсе первое место.

Граф этот имеет только три завершенные ветки: а) C_1 , A_2 , E_3 , B_4 , D_5 ; б) C_1 , E_2 , B_3 , A_4 , D_5 ; в) C_1 , E_2 , D_3 , B_4 , A_5 (рис. 25). Но снова ни одно из этих распределений мест не проходит через испытания предсказаниями учителя математики.

III. Построение графа начинаем с ребра D_1 , т. е. исходим из предположения, что ученик D занял в конкурсе первое место.

Как видим (рис. 26), полное развитие получили четыре ветки графа, а три другие ветки развитыми быть не могли. Этим построением графа мы нашли четыре распределения мест в итоге конкурса, согласующиеся с предсказанием

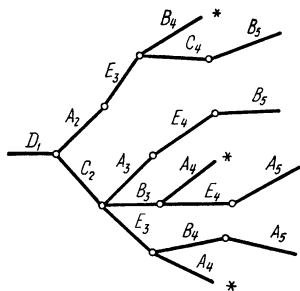


Рис. 26

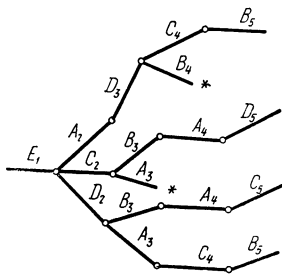


Рис. 27

учителя истории. Вот они: а) D_1, A_2, E_3, C_4, B_5 ; б) D_1, C_2, A_3, E_4, B_5 ; в) D_1, C_2, B_3, E_4, A_5 ; г) D_1, C_2, E_3, B_4, A_5 .

Но и тут мы не получили решения задачи, так как ни одно из распределений мест не выдерживает испытания на распределение мест, предсказанное учителем математики. Решение задачи еще не найдено.

IV. Последнее возможное построение графа начинаем с E_1 , т. е. с предположения, что ученик E занял в конкурсе первое место. В этом графе (рис. 27) полное развитие получили четыре ветки. Но только одна из этих веток удовлетворяет всем условиям задачи. Это ветка, дающая распределение мест E_1, D_2, A_3, C_4, B_5 . Угаданные учителем математики являются места C_4 и B_5 , а угаданные расположения пар являются пары (DA) и (CB) .

Таким образом, итоги конкурса таковы: на первом месте был ученик E , на втором — D , на третьем — A , на четвертом — C и на пятом — B .

Упражнения

84. Пять учеников — Алик, Витя, Степа, Дима и Леня — приехали из пяти различных городов: Москвы, Риги, Горького, Киева и Ярославля. О том, кто откуда приехал, получено четыре ответа, в каждом из которых одна половина ответа верна, а другая — нет: Алик приехал из Риги, а Дима — из Горького; Витя приехал из Риги, а Степа — из Киева; Степа приехал из Риги, а Дима — из Москвы; Леня приехал из Ярославля, а Алик — из Москвы.

Назвать город, из которого приехал каждый из учеников?

85. В группе из трех мальчиков и трех девочек каждый мальчик знаком только с двумя девочками и каждая девочка знакома только с двумя мальчиками. Доказать возможность составления таких трех пар, чтобы попавшие в одну пару мальчик и девочка были знакомы между собой.

86. В учительской зашел разговор о журналах. Оказалось, что каждый из собеседников выписывает два журнала. На каждый из выписываемых журналов подписывается только три человека. Для любой комбинации двух журналов можно указать учителя, который их выписывает одновременно. Сколько учителей принимало участие в беседе? Сколько журналов они выписывают?

87. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники были приглашены на совещание по четыре врача. Каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает.

Сколько в городе поликлиник? Сколько врачей принимало участие в совещании?

88. В соревновании участвовало 6 команд: «Алтай», «Восток», «Сокол», «Орел», «Чайка», «Ракета». Относительно возможных участников финальной встречи были высказаны такие предсказания: 1) «В финале выступят «Алтай» и «Сокол». 2) «В финальной игре встретятся команды «Восток» и «Орел». 3) «В финал выйдут «Чайка» и «Алтай». 4) «Финал будет за командами «Чайка» и «Восток». 5) «В финале встретятся «Ракета» и «Алтай».

Оказалось, что в одном из предсказаний обе команды названы неверно, а в остальных предсказаниях неверно названа одна команда. Какие команды выступили в финальной игре?

89. Директор, завуч и завхоз школы имеют фамилии Антонов, Борисов и Гриднев. Такие же фамилии и у учителей истории, физики и иностранного языка.

Учитель Гриднев живет на улице Докучаева. Завуч и учитель физики живут в новом доме на улице Победы. Учитель Борисов просил своего коллегу сделать для него перевод небольшой научной статьи. Однофамилец завуча — учитель иностранного языка — недавно получил квартиру в том же доме по улице Первомайской, в котором живет завхоз.

Оказалось так, что в каждом доме живут коллеги с разными сочетаниями фамилий.

Как фамилия директора школы?

90. В команду нужно включить возможно большее количество из имеющихся игроков *А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З*. Кого следует включить в команду, если при этом нужно соблюдать такие условия:

1) в команду нельзя включать игрока *А*, если будут включены или игрок *Б*, или *В*, или если будут одновременно включены игроки *Г* и *Д*;
2) игроки *Б* и *В* не возражают против каких бы то ни было включений;

3) игрок *Г* согласен выступать только в том случае, если будет включен и игрок *Д*;

4) игрок *Д* не согласен выступать за команду, если в команде будет игрок *Б*;

5) игрока *Е* можно включить только вместе с игроком *Ж*;

6) игрок *З* не будет возражать против игрока *Е* только в том случае, если будет включен игрок *А*, но если игрок *Е* не будет включен, то игрок *З* будет против включения и игрока *Д*;

7) чтобы согласился выступить игрок Ж, нужно в команду включить либо игрока З, либо игрока Г, кроме того, игрок Ж откажется от приглашения, если в команду будет включен игрок Д без игрока А;

8) игрок Ж не будет играть за команду, если в нее будет включен или игрок Б, или игрок В.

91. Наконец-то долгожданный звонок.

— Преступники задержаны! — доложил начальник опергруппы. — Их трое. Двое из них легко ранены, каждый в руку. Я и двое моих ребят невредимы.

— Очень хорошо! — с-нескрываемой радостью ответил комиссар. — Нужно доставить их в отделение.

— Мы в Заречье. На берегу есть лодка, способная удержать двух человек. Попробуем переправиться.

— Действуйте! Только примите максимальные меры безопасности, противник коварен, — приказал комиссар.

Начальник опергруппы уже обеспечил условия, при которых никто из преступников не сможет убежать, даже оставаясь без охраны. Но для обеспечения безопасности он решил так организовать переправу, чтобы преступники никогда не находились в большинстве. Как это сделать, если учесть еще, что раненые не могут править лодкой?

92. В магазине работают товаровед, кассир, бухгалтер, продавец и директор. Их фамилии — Соловьева, Буланова, Кондратьев, Демидов и Васильчиков.

Когда кассир и директор учились в торговом техникуме, они жили в одной комнате общежития. Товаровед пока еще семей не обзавелся. Васильчиков и Соловьева недолюбливают друг друга. Жена Кондратьева очень обрадовалась, когда узнала, что директор разрешил ее мужу взять очередной отпуск в июне. Демидов очень огорчился, узнав от директора, что бухгалтер и кассир решили пожениться. Соловьева и Буланова пока еще замуж не вышли. Назвать фамилию каждого работника магазина.

93. На математической олимпиаде за три первые места вручены призы победителям. На вопрос, кто оказался призером, получены такие ответы: 1) «Константин, Дмитрий и Светлана»; 2) «Элиза, Владимир и Дмитрий»; 3) «Григорий, Максим и Богдан»; 4) «Светлана, Жанна и Дмитрий»; 5) «Григорий, Жанна и Богдан»; 6) «Элиза, Максим и Павел»; 7) «Владимир, Павел и Элиза».

Известно, что в одном ответе все три имени названы правильно; в одном ответе правильно названо только одно имя; в двух ответах правильно названы два имени; в остальных трех ответах все три имени названы неправильно.

Найти имена трех призеров математической олимпиады.

94. В одной школе уроки по истории, математике, биологии, географии, английскому и французскому языку вели три учителя — Морозов, Васильев и Токарев. Каждый из них преподавал два предмета.

Географ и учитель французского языка — соседи по дому.

Учитель биологии старше учителя математики. Морозов — самый молодой.

В понедельник первый урок по расписанию у Токарева, у биолога и у учителя французского языка.

В воскресенье Морозов, математик и учитель английского языка были на рыбалке.

Какие предметы преподает каждый учитель?

95. На острове живут два племени: «правдолюбые» и «шутники». «Правдолюбые» всегда говорят только правду, а «шутники» всегда лгут.

Путешественник подошел к развилке дороги. Ему известно, что одна из них ведет в населенный пункт, а другая туда не ведет, но указателя нет. Вскоре он заметил, что навстречу ему идет туземец, но неизвестно, из какого племени тот. Подумав, путешественник решил спросить.

— Скажите, пожалуйста,— обратился он к встречному,— равносильны ли высказывания: «Вы из племени «правдолюбов» и «Правая дорога ведет в населенный пункт»?

Доказать, что по ответу на поставленный вопрос путешественник правильно выберет нужную ему дорогу.

96. Учитель проверил работы трех учеников — Андрея, Виталия и Сергея, но работ с собой не взял. Ученикам же он сказал так: «Все вы, ребята, написали работы на разные оценки: 3, 4, 5. У Сергея оценка не 5, у Виталия оценка не 4, а вот у Андрея — 4». Оказалось, что учитель ошибся и только одному ученику назвал оценку правильно. Какую оценку получил каждый из учеников за контрольную работу?

97. Учитель физкультуры сказал ребятам, что на следующем уроке он проведет в классе соревнование в беге на лыжах.

По дороге домой ребята обсуждали предстоящее событие и высказывали предположения о первой шестерке спортсменов класса. Лучшими лыжниками класса еще с прошлого года считались Алешин, Иванов, Комаров, Соколов, Малик и Токарев.

— Я думаю, что победа достанется Комарову, а Иванов будет только четвертым,— сказал один из мальчиков.

— Я тоже думаю, что Иванов будет только четвертым,— сказала девочка,— но победит Токарев.

— Токареву первого места не видать. Он будет пятым, а Малик выйдет, пожалуй, на второе место,— авторитетно заявил третий ученик.

На некоторое время спор утих, чтобы затем разгореться с новой силой. Свое мнение высказали еще трое ребят.

— Первое место я отдаю Соколову, а пятое — Комарову,— сказал один.

— Нет, Комаров займет второе место, а третье — Малик,— возразил другой.

— А я думаю, что на втором месте будет Алешин, а Комаров займет четвертое место,— завершил спор шестой ученик.

Оказалось, что шесть названных фаворитов в самом деле заняли в соревновании шесть первых мест, не разделив между собой ни одно из них. Но в остальном предсказания у каждого сбылись только наполовину: каждый из споривших правильно назвал место только одного спортсмена.

Определить итоги соревнования.

98. Во время сбора металлолома Дима, Боря и Костик отправились на поиски в посадку, почти вплотную подступавшую к школьному двору. Там они нашли увесистую деталь, погрузили на тележку и повезли в школьный двор.

— Вот нам повезло,— сказал Дима по дороге в школу.— Эта штука из чистой меди, да и весит килограммов 30.

Все его действия выражали явную радость по поводу выпавшей им удачи.

— Какая там медь,— возразил Боря.— Это обыкновенное заржавевшее железо. Но ты не унывай, Дима. Оно знаешь какое тяжелое. В нем 100 килограммов будет.

— Да, это явно не медь,— вмешался Костик,— а весу 50 килограммов, я думаю, наберется.

В школьном дворе сразу все и выяснилось. Пионервожатая, которая вела учет собранного металлолома, сказала ребятам:

— Не расстраивайтесь, ребята. Каждый из вас оказался прав в одном из своих предположений.

Можно ли по этим данным установить, какова была находка ребят?

99. Четыре лучших спортсмена — Миша, Игорь, Олег и Николай — участвовали в забеге. «Знатоки» спорта предсказывали итоги соревнования.

— Олег победит, а Игорь будет вторым, — сказал один из них.

— Нет, друзья мои, Олег придет вторым, а сразу за ним финиширует Николай, — сказал другой.

— Ну, что вы говорите! — возразил третий. — Вторым будет Миша, а Николай придет четвертым.

Как всегда, предсказания «знатоков» не оправдались. Но названные спортсмены действительно заняли четыре первых места, не разделив ни одно из них между собой. В остальном каждый «знаток» оказался прав только в одном из своих предсказаний.

Как распределились места между этими четырьмя спортсменами?

100. Один ученик, хорошо знающий математическую логику, сказал своему другу.

— Хочешь, я покажу тебе фокус? Вот эту монету возьми в какую хочешь руку. Тебе разрешается говорить мне правду или неправду — это твоя воля. Но я поставлю тебе один вопрос. Когда я получу на него от тебя ответ, я скажу, в какой руке ты держишь монету.

Этого быть не может! — изумился друг. — Но я согласен увидеть твой фокус и, уверен, проучу тебя, хвастунишку.

— Слушай внимательно, что я тебе скажу: «То, что ты решил мне говорить неправду, равносильно тому, что ты в настоящий момент держишь монету в левой руке». Ответь мне: «да» или «нет»?

— Да, — ответил друг, ожидая поражения своего талантливового товарища.

Можете ли вы определить, в какой руке он держит монету?

101. Восемь учеников: Антон, Борис, Вера, Галина, Дмитрий, Евгений, Жанна и Зоя учатся в разных классах одной восьмилетней школы.

Галина моложе Зои на один класс, но старше Бориса на один класс; Дмитрий на класс старше Антона.

Вера показывала Зое свою тетрадь первоклассницы и ужасалась, какие она писала каракули.

Евгений и Жанна учатся в этой школе не с первого класса, и Жанна старше Евгения.

Борис и Галина живут на Заречной улице, Дмитрий и шестиклассник — на улице Космонавтов, Вера и пятиклассник — в переулке Подгорном, а восьмиклассник и Антон — на Садовой.

Евгений помог семикласснику повесить во дворе скворечник.

В каком классе учится каждый из этих учеников?

102. Пяти ученикам — Андрееву, Блинову, Васильеву, Герасимову и Дмитриеву — поручили уборку в классных комнатах 5, 6, 7, 8 и 9 классов.

При проверке дежурные санитары обнаружили, что 7-й класс плохо убран, а ребята, выполнявшие уборку, уже ушли домой. Стали вспоминать, кто из них какой класс убирал. Получилась такая картина.

— Андреев убирал 5-й класс, а Блинов — 9-й, — сказал один.

— Нет, Бликов убирал 8-й класс, а Васильев — 7-й, — возразил другой.

— Блинов убирал 6-й класс, а Герасимов — 5-й, — вспомнил один из членов санитарной комиссии.

— Нет, Герасимов убирал 8-й класс, а Дмитриев — 7-й, — сказала уборщица тетя Даша.

— Ну, и напутали же вы, — вмешался в разговор сторож дедушка Максим. — Дмитриев убирал 9-й класс, а Васильев — 6-й.

Оказалось, что каждый правильно вспомнил фамилию только одного ученика, а вторую назвал неверно.

Кто из учеников убирал седьмой класс?

103. Пять пионеров — Алик, Боря, Витя, Лена и Даша — приехали в пионерский лагерь из пяти разных городов: Харькова, Умани, Полтавы, Славянска и Краматорска.

О том, кто из них из какого города прибыл, были получены такие истинные высказывания:

1) «Если Алик не из Умани, то Боря из Краматорска».

2) «Или Боря, или Витя приехали из Харькова».

3) «Если Витя не из Славянска, то Лена приехала из Харькова».

4) «Или Даша приехала из Умани, или Лена — из Краматорска».

Установить, кто из пионеров из какого города приехал.

104. В финальном шахматном турнире одного военного округа встретились восемь шахматистов, имевших воинские звания: полковник, майор, капитан, лейтенант, прапорщик, сержант, ефрейтор и рядовой. Среди них были пехотинец, танкист, артиллерист, ракетчик, разведчик, летчик, зенитчик и связист.

В первом туре полковник играл с летчиком, артиллерист — с разведчиком, лейтенант — с сержантом.

Во втором туре майор выиграл у разведчика, ракетчик победил артиллериста, а лейтенант с ефрейтором сыграли вничью.

В третьем туре рядовой играл с прапорщиком, сержант — с пехотинцем, а летчик — с артиллеристом.

После третьего тура майор был отозван. Из-за этого свободными от игры оказались в четвертом туре — зенитчик, в пятом туре — прапорщик, в шестом туре — танкист, в седьмом туре — ефрейтор.

В четвертом туре ракетчик красивой жертвой коня поставил в безвыходное положение связиста, а рядовой с танкистом пришли к мирному исходу.

В пятом туре полковник играл с танкистом, зенитчик — с артиллеристом, рядовой — с пехотинцем.

В шестом туре полковник играл с пехотинцем, капитан — со связистом.

В седьмом туре лейтенант просмотрел красивую победу над связистом и согласился на ничью, а капитан победил танкиста.

Определить воинское звание и род войск каждого участника турнира.

105. Максим, Эдик, Андрей и Дима играли во дворе в футбол. Случилось так, что неудачный пас одного из мальчиков угодил прямо в окно.

Расспросы виновников дали такую картину.

— Я в окно не ударял, Андрей тоже в этом не виновен, — сказал Эдик.

— Окно разбил не я, это сделал Дима, — возразил Максим.

— Мячом в окно попал не я, это Андрей буцнул в окно, — заявил Дима.

— Мяч попал в окно не от меня, это Эдик разбил окно, — сказал Андрей.

Можно ли по этим данным установить, кто из мальчиков разбил окно, если это сделал один из них и если в каждом из показаний мальчиков по крайней мере одна половина высказывания истинна?

106. Три жокея — Рыжов, Белов и Воронов — выступали на скачках на лошадях белой, вороной и рыжей масти.

— Чудесное совпадение, — сказал Воронов. — Масти наших лошадей сходны с нашими фамилиями, но ни у одного из нас «дубль» не получился.

— Ты здорово подметил, — улыбнулся жокей, седлавший белую лошадь.

Кто из жокеев выступал на вороном скакуне?

107. В соревнованиях по гимнастике на первенство школы среди старшеклассниц участвовали Оля, Вера, Рита и Зина. Мальчишк-болельщики обсуждали возможности каждой спортсменки и строили предположения об ожидаемых результатах.

— Первой будет Оля, а Вера будет второй, — сказал Коля.

— Я думаю, что сегодня Оля будет второй, а Зина — третьей, — сказал Петя.

— А по-моему, второй будет Рита, а Зина займет только четвертое место, — возразил Лёня.

Соревнования показали, что каждый из болельщиков ошибся только в одном из своих предсказаний.

Как распределились места между Олей, Верой, Ритой и Зиной, если они действительно заняли четыре первых места, не разделив ни одно из них между собой?

108. Среди тридцати трех внешне одинаковых монет имеется одна фальшивая монета, но неизвестно, легче или тяжелее она нормальной. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах (без гирь) установить, легче или тяжелее фальшивая монета нормальной?

109. Три друга, три отважных путешественника Амино, Бипино и Ликино поздно вечером добрались до гостиницы. Получив отдельный номер, они тут же уснули, даже не закрыв как следует дверь.

Рано утром любимица хозяина и всех постояльцев маленькая обезьянка Чита обходила гостиницу в поисках забавы. Вдруг она заметила неприкрытую дверь к нашим путешественникам.

Чита нашла коробку ваксы, открыла ее и погрузила всю лапу в черную массу. Затем она испачканной лапой прикоснулась сначала к лицу Амино, а потом Бипино и Ликино.

Видя, что спящие не пробуждаются, Чита ушла искать себе новые развлечения.

Наши путешественники так же дружно проснулись, как и уснули, и, взглянув друг на друга, тут же разразились гомерическим смехом. Каждый, конечно, считал, что он смеется над своими товарищами.

Но вот Амино подумал:

— И как это Бипино не догадывается, что Ликино смеется над ним? Вдруг Амино и вовсе перестал смеяться.

— Да ведь они смеются надо мной! — с ужасом подумал он и стал искать зеркало.

Как Амино догадался, что и у него испачкано лицо?

110. Заспорили три мудреца: кто из них самый мудрый?

Долго спорили, но все без толку. Наконец, решили они обратиться к судьбе, славившемуся своей мудростью и справедливостью.

— Скажи нам, справедливейший из судей, — обратились мудрецы к судьбе, — кто из нас самый мудрый?

Посмотрел судья на седобородых старцев и задумался. Как опреде-

лить самого мудрого? Ничего не придумал судья и велел мудрецам придти через три дня.

Пришли мудрецы в назначенный срок и услышали такую речь.

— Вот перед вами лежат пять тюбетеек: три шитые из красного бархата, а две — из черного. Мой помощник завяжет вам глаза и наденет каждому на голову по одной из этих тюбетеек. Когда он снимет с ваших глаз повязки, самый мудрый из вас и скажет, какая тюбетейка у него на голове.

Так и сделали.

Снял помощник повязки с глаз. Посмотрели мудрецы друг на друга, покосили глазом на стол — а на столе-то ничего уж нет. Видит каждый перед собой красные тюбетейки на головах у товарищей, а какая на своей голове — не знает.

Наконец, один из них сказал:

— О справедливейший и мудрейший из судей! Ты велел надеть на меня красную тюбетейку.

— Вот ты и есть самый мудрый из вас троих, — сказал судья.

Как мудрец догадался, что на нем красная тюбетейка?

111. а) Заспорили четыре мудреца — кто из них самый мудрый. Долго спорили, а толку никакого. Наконец, решили они обратиться к судье, славившемуся своей мудростью и справедливостью.

— Скажи нам, о справедливейший из судей, кто из нас четверых мудрее других.

Посмотрел судья на седобородых старцев и призадумался. Как узнать, кто из них самый мудрый?

Велел судья прийти за ответом через три дня.

Пришли мудрецы в назначенный срок. А вот что сказал им судья.

— Вот перед вами восемь шапочек: четыре из красного бархата и четыре — из белого. Мой помощник завяжет вам повязками глаза и каждому наденет на голову по одной из этих шапочек. Затем я прикажу снять повязки. Тот, кто увидит больше красных шапочек, чем белых, пусть встанет и стоит до тех пор, пока кто-нибудь из вас не скажет, какая шапочка у него на голове.

Так и сделали.

Когда повязки были сняты и мудрецы посмотрели друг на друга — они все встали и стали размышлять.

Наконец, один из них сказал:

— О мудрейший из судей! Ты велел надеть на меня красную шапочку.

— Вот ты и будешь мудрейшим из вас четверых, если объяснишь, как ты додумался, что на тебе красная шапочка.

Какие шапочки надел судья на головы мудрецов? Как рассуждал мудрейший из них?

б) Развить задачу на случай пяти мудрецов и решить ее.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1. Кляксу поставил Витя. Сказанное Витей «Я сегодня не готовил уроки» — правда. Тогда правдиво и первое высказывание Вити. Из этого следует, что Алеша сказал неправду. 2. Сначала переезжают слуги, затем слуга Строгого возвращает лодку, остается со своим генералом, а Грозный и Лихой переезжают на другой берег. Лодку может вернуть только генерал Лихой. 5. Если исходные числа разные, то начинающий обеспечивает себе выигрыш, если своим ходом уравнивает числа. Если исходные числа равны — начинающий выиграть не может. 6. Очевидно, что если после некоторого хода начинающего остаются числа 1, 2 и 3, то каким бы ни был ход противника, выигрыш начинающему обеспечен. Возвращаясь назад, к исходным числам, приходим к выводу, что начинающий обеспечивает себе выигрыш, если после своего хода оставляет единицу, а два других числа разной четности, причем нечетное на единицу больше четного числа. Нужно также помнить (см. предыдущую задачу), что если противник после своего хода оставляет два каких-нибудь равных числа, то для выигрыша нужно своим ходом третье число заменить нулем. 7. Сначала рассмотреть случай, когда первым трем надеты белые шляпы. Постепенно число белых шляп уменьшается. 8. Нужно монеты разложить на три кучки — по 8, 9 и 9 монет. Первое взвешивание определяет, в какой кучке находится фальшивая монета. 9. Так как химик получил назначение в Лисичанск, а математику не было места в Донецке, то географ Олег получил назначение в Донецк. Математик Павел направлен в Артемовск. 10. Решение сводится к выяснению, кто из мальчиков говорил неправду. Если Сережа говорил неправду, то из этого следует, что ни Миша, ни Юра окно не разбивали. Но тогда выходит, что Юра сказал правду, а Игорь сказал неправду, но это невозможно. Если Юра сказал неправду, то он разбил окно, но тогда Игорь сказал неправду, что невозможно. Если Игорь сказал неправду, то в этом случае Юра и Миша сказали правду, но Сережа — неправду, что снова невозможно. Наконец, если Миша сказал неправду, то и Игорь, и Юра, и Сережа сказали правду. Итак, окно разбил Миша. С ним дядя Вася мало знаком. 12. Высказываниями являются предложения 1), 2), 3), 5). 13. 2) $a =$ выучить уроки, $b =$ поиграть с сестричкой, $c =$ почитать книгу, $d =$ поиграть в футбол. 14. 1) $a = 144$; 2, $b = 144$; 3, $c = 144$; 5. Имеем: $(144 : 2) \wedge (144 : 3) \wedge \neg (144 : 5)$ или $a \wedge b \wedge \neg c$. 15. $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. 17. 1) $a =$ пойду в кино, $b =$ поиграю в футбол, $c =$ буду помогать папе ремонтировать машину; $A = a \vee b \vee c$. 3) $a =$ я поеду в Москву, $b =$ я поеду в Ленинград, $c =$ мой товарищ поедет в пионерский лагерь, $d =$ мой товарищ поедет к бабушке; $(a \vee b) \wedge (c \vee d)$. 18. $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$. 25. $a =$ завтра будет дождь,

b = мы пойдем на реку, c = мы пойдем в лес; $\neg a \Rightarrow (b \vee c)$. 28. 1) a = число делится на 6, b = число делится на 2, c = число делится на 3; $A = (a \Leftrightarrow (b \wedge c))$ или $A = ((n : 6) \Leftrightarrow ((n : 2) \wedge (n : 3)))$. 32. 1) a = Андрей будет дежурить в понедельник, b = Виктор будет дежурить во вторник, c = Павел будет дежурить во вторник; $a \Rightarrow (b \vee c)$. 2) a = я выучу уроки, b = я напишу бабушке письмо, c = я помою посуду; $B = a \Rightarrow (b \wedge c)$. 3) a = на первый вопрос отвечать «да», b = на второй вопрос отвечать «да», c = на третий вопрос отвечать «да»; $a \Rightarrow (\neg b \vee \neg c)$. 4) a = ответ «да» на первый вопрос, b = ответ «да» на второй вопрос, c = ответ «да» на третий вопрос, d = ответ «да» на четвертый вопрос; $A = ((a \wedge d) \wedge (\neg a \wedge \neg d)) \wedge ((b \wedge \neg c) \wedge (\neg b \wedge c))$. 35. 1) Вынести за скобку $(\neg a)$ и к формуле $(a \wedge b) \vee \neg a$ применить свойство 9. 4) Первую компоненту дизъюнкции следует опустить (свойство 8), затем вывести за скобку c , а к формуле $p \vee (\neg a \wedge \neg p)$ применить свойство 9. 11) Заменить импликацию дизъюнкцией и применить свойства 4 и 9. 16) Замена импликации дизъюнкцией дает формулу $(a \wedge \neg c) \vee c \vee a$, равносильную (по свойству 8) формуле $a \vee c$. 36. 1) $\neg a \vee \neg p$; 3) $\neg c$; 4) $a \Leftrightarrow p$; 5) $a \vee (p \wedge c)$; 6) $a \vee \neg c$; 9) к формуле дважды добавится $a \wedge p \wedge c$ в качестве дизъюнктивного члена и сгруппировать так, чтобы в каждую группу входила добавленная формула; в итоге можно получить $(p \wedge c) \vee (a \wedge c) \vee (a \wedge p)$. 37. a = будет хорошая погода, b = мы пойдем на речку, c = мы будем купаться, d = мы пойдем в лес, p = мы будем собирать грибы; $A = (a \Rightarrow ((b \wedge c) \vee (d \wedge p))) \equiv (\neg a \vee (b \wedge c) \vee (d \wedge p))$; отрицание $\neg A = (a \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee \neg p))$. 38. 1) $(\neg a \vee \neg p) \wedge c$; 2) $(\neg a \wedge \neg p) \vee c$; 3) $\neg a \vee \neg c \vee (p \wedge c)$; 4) $((a \wedge p) \vee c) \wedge a \wedge c$. 39. 1) $(\neg(x \vee y) \vee x \vee z) \equiv (\neg y \vee x \vee z)$; 4) $\neg(\neg a \wedge \neg p \wedge c)$. 40. 1) $\neg y \vee \neg z$; 4) $\neg(\neg a \vee \neg p \vee c)$. 41. y = выучит уроки, k = уберет в комнате, c = поиграет с сестричкой, x = будет хорошая погода, p = пойдет на речку, a = будет купаться, s = пойдет на стадион, f = поиграет в футбол; план запишется формулой: $A = (y \Rightarrow (k \wedge c)) \wedge (x \Rightarrow ((p \wedge a) \vee (s \wedge f))) \equiv (\neg y \vee (k \wedge c)) \wedge (\neg x \vee (p \wedge a) \vee (s \wedge f))$. Невыполнение плана: $\neg A = (y \wedge (\neg k \vee \neg c)) \vee (x \wedge (\neg p \vee \neg a) \wedge (\neg s \vee \neg f))$. 44. a = свидетель А говорит правду, b = свидетель В говорит правду, c = свидетель С говорит правду. Рассуждения следователя: $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge c)$. 45. Сергей — в понедельник, Виктор — во вторник, Антон — в среду. 46. Наташа — первое, Лида — второе, Рита — третье, Майя — четвертое. 47. Есть две возможности составления расписания: а) математика, литература, история; б) история, математика, литература. 49. Алик убирал седьмой класс, Сережа — восьмой, Витя — девятый, Дима — десятый. 50. Анята — первое, Криста — второе, Дана — третье, Бригитта — четвертое. 51. Петров — первое, Сидоров — второе, Иванов — третье. 52. «Сокол» — первое, «Артек» — второе, «Метеор» — третье, «Вымпел» — четвертое. 53. «Абрек» — первое, «Ветер» — второе, «Стрелок» — третье. 54. Передачу смотрели Аня и Вера. 55. Нет. Виновен в поломке или Витя, или Коля. 56. Первое место занял 8А, второе — 8В, третье — 8Г, четвертое — 8Б. 57. «Нептун» — на первом, «Вымпел» — на втором, «Чайка» — на третьем, «Метеор» — на четвертом, «Старт» — на пятом. 58. Миша. 59. Диму, Федю, Гришу и Юру следует поселить в эту комнату. 60. Завод может выпускать еще два вида красок с веществами: А В Е Ж З и Б Ж З К. 61. Можно включить Валеева, Сватеева и Евтеева. 62. Две возможности: Степанов — понедельник, Демьянов — вторник, Петров — среду, Антонов — четверг или Степанов — понедельник, Антонов — вторник, Демьянов — среду, Петров — четверг.

63. a = выучить уроки, b = вымыть пол, x = будет хорошая погода, p = пойти на пляж, d = поиграть в футбол, k = почитать книгу. План $A = a \wedge b \wedge (x \Rightarrow (p \vee d)) \wedge ((\neg x) \Rightarrow k)$. Невыполнение плана $(\neg A) = (\neg a) \vee (\neg b) \vee (x \wedge (\neg p) \wedge (\neg d)) \vee ((\neg x) \wedge (\neg k))$.
 64. $A = Y$, $B = X$, $C = Ж$, $D = T$. 65. Гога — первое, Валерий — второе, Алик — третье, Егорка — четвертое, Боря — пятое, Дима — шестое. 66. Рая — волейболистка, Майя — пловчиха, Галя — теннисистка. 67. Коля из Киева, Сережа из Минска, Олег из Свердловска,

Имя	Класс									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
А	2	///	□	///	///	6	///	6	///	///
Б	5	5	5	5	5	6	///	6	///	□
В	5	5	5	5	///	///	///	□	///	3
Г	7	8	8	□	7	///	///	7	///	///
Д	7	8	8	8	7	□	1	1	1	1
Е	1	1	1	1	1	6	□	6	2	2
З	□	///	///	///	///	///	///	///	///	///
И	4	4	4	///	□	8	///	8	///	///
К	7	□	///	///	///	6	///	6	///	2
Л	2	2	2	2	2	2	2	///	□	///

Рис. 28

Имя	Город					Марка велосипеда
	Р	П	Л	Х	М	
С	///	///	///	///	□	РВЗ
Б	□	///	///	///	///	ПВЗ
Л	///	///	///	///	□	ЛВЗ
Г	///	///	///	///	///	ХВЗ
В	///	///	///	///	///	МВЗ

Рис. 29

в теннис играют Коля и Сережа, в футбол играют Коля и Сережа, Олег играет в шахматы. Сережа старше Олега, а Коля — самый молодой. 68. В Киеве. 69. Валя Розова и Катя Наумова. 70. Пассажир Петров не является ближайшим соседом проводника, следовательно, он живет в Ленинграде, поэтому фамилия проводника — Петров. Так как Сидоров не начальник поезда, то Сидоров является машинистом. 71. Заполняем таблицу размером 10×10 со входами А, Б, В, Г, Д, Е, З, И; К, Л и 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (рис. 28). 1) Дмитрий не может учиться в 7—10 классах, а Евгений — в 1—5 классах, отмечаем эти клетки цифрой 1. 2) Александр не может учиться в первом классе, а Кирилл — в десятом, кроме того, Леонид не может учиться в 1—7 классах, а Евгений — 9 и 10 классах. Отмечаем в таблице эти клетки цифрой 2. 3) Василий не учится в 10 классе, ставим в соответствующую клетку цифру 3. 4) Иван не учится в 1—3 классах, ставим в клетки цифру 4. 5) Борис заведомо не учится в 1—5 классах, а Василий — в 1—4 классах. Ставим в этих клетках цифру 5. 6) Александр и Кирилл не учатся ни в 6, ни в 8 классах. То же самое нужно сказать о Евгении и Борисе. Ставим в этих клетках цифру 6. Замечаем, что в строке (Е) свободна одна клетка (Е, 7). Значит, Евгений учится в 7 классе, и в столбце (7) вычеркиваем оставшиеся еще клетки (таких клеток оказалось семь). Но поскольку Леонид старше Евгения на два класса, то Леонид учится в 9 классе. Выделяем эту клетку, а остальные в столбце и в строке, ее содержащих, вычеркиваем. Замечаем, что Борис учится в 10 классе. Учитывая теперь, что Александр не учится в 6 классе, приходим к выводу, что Кирилл не учится в 5 классе. 7) Кирилл и Георгий не могут учиться ни в 5, ни в 1, ни в 8 классах. То же самое нужно сказать и о Дмитрие. В этих клетках ставим цифру 7. Попутно отмечаем, что Александр (условие 2) не может учиться во 2 классе. Видим, что в столбце (1) свободна только одна клеточка: Зиновий

учится в 1 классе. Оставшиеся клеточки в строке (3) вычеркиваем. 8) Так как Дмитрий помогает Ивану, то Иван не может учиться в 8 и 6 классах. Вписываем в эти клетки цифру 8. Замечаем, что в столбце (8) свободна только одна клетка: Василий учится в 8 классе. К тому же, Дмитрий не может учиться ниво 2, ни в 3, ни в 4 классах. Вписываем в эти клетки цифру 8 и замечаем, что Дмитрий учится в 6 классе. Георгий не может учиться ни во 2, ни в 3 классах — впишем в эти клетки цифру 8. Одновременно получаем по одной свободной клетке в столбце (2) и в строке (7). Значит, Георгий учится в 4, а Кирилл — во 2 классах. Теперь уже таблица сама собой завершается: Александр учится в 3, и Иван — в 5 классах. Ответ хорошо виден на рис. 28.

72. Григорий учится в 1 классе, Аркадий — во 2, Вадим — в 3, Борис — в 4, Леонид — в 5, Дмитрий — в 6, Евгений — в 7, Константин — в 8 классах.

73. Евгений занял первое место, Дмитрий — второе, Богдан — третье, Адам — четвертое, Виктор — пятое, Геннадий — шестое.

74. Футболист Викулов из «Авангарда», шахматист Кулаков из «Спартака», теннисист Потапов из «Локомотива», пловец Сомов из «Динамо».

75. Алик купил готовальню, Боря — книгу, Витя — карандаш, Гриша — тетрадь, Толя — авторучку.

76. Витя учится в пятом классе и занимается в кружке фотолубителей, Алеша учится в шестом классе и занимается в кружке юных натуралистов, Боря учится в седьмом классе и занимается в шахматном кружке, Жора учится в четвертом классе и занимается в конструкторском кружке.

77. Артур — в десятом, Борис — в девятом, Виктор — в третьем, Геннадий — в седьмом, Давид — в четвертом, Евгений — в восьмом, Клим — в первом; Леонид — в шестом, Максим — во втором, Николай — в пятом.

78. Коля учится в пятом классе, Витя — в шестом, Сережа — в седьмом, Павлик — в восьмом.

79. Составим таблицу размером 5×5 с первыми буквами имен и первыми буквами названий городов у входов. Так как Борис из Риги, а Виктор из Львова, то в таблице будут вычеркнуты столбцы и строки, содержащие в пересечении клетки (Б, Р) и (В, Л) (рис. 29). Так как Григорий ехал на велосипеде Харьковского завода, то Григорий не из Харькова. Легко устанавливаем, что Леонид не из Пензы. Поэтому в таблице вычеркиваем еще клетки (Г, Х) и (Л, П). Как показывает таблица, Леонид может быть или из Харькова, или из Москвы. Поскольку на велосипеде Московского завода ехал Виктор — житель Львова (а не Пензы), то Леонид может быть только жителем Харькова. На велосипеде Харьковского завода ехал Григорий, поэтому Григорий из Пензы. Студента-москвича зовут Сергеем.

80. Группа Выкова дежурила у кинотеатра, на бульваре, в парке, на автовокзале, на стадионе. Задача решается составлением таблицы.

81. Потапов — радист, Щедрин — штурман, Семенов — пилот, Коновалов — бортмеханик, Самойлов — синоптик. Задача решается составлением таблицы.

82. Антонов живет в Астрахани и работает агрономом, Малеев живет в Москве и работает артистом, Марков живет в Минске и работает механиком. Ключом к решению задачи является утверждение, что все родственники Маркова постоянно живут в Москве. Так как жена артиста — младшая сестра Маркова, то она живет в Москве. Значит, артист живет в Москве. Далее легко устанавливается, что Антонов работает агрономом и живет в Астрахани, а Марков живет в Минске и работает механиком.

84. Алик из Риги, Витя из Горького, Степа из Киева, Дима из Москвы, Леня из Ярославля.

86. Четыре журнала, шесть учителей. Удобно журнал изобразить вершиной графа, а подписавшегося на этот журнал учителя — выходящим из вершины ребром графа.

87. В городе пять поликлиник, на совещании присутствовало десять врачей.

88. В финальной игре выступили «Алтай» и «Орел». Удобно по

очереди считать, что ложными были высказывания в первом предсказании, затем во втором и т. д. 89. Легко устанавливается, что историю преподает Гриднев, физику — Борисов, а иностранный язык — Антонов. В таком случае завуч Антонов живет в одном доме с Борисовым, а учитель Антонов — в одном доме с завхозом Гридневым. Фамилия директора школы — Борисов. 90. В команду следует включить игроков А, Д, Е, Ж, З. 91. Сначала преступник двумя рейсами перевезет двух раненых и возвратит лодку. Затем поедут двое из опергруппы, один из них останется на том берегу, а другой возьмет одного преступника и переедет с ним на этот берег, высадит его и возьмет здорового преступника. Снова на первый берег увезет раненого преступника, высадит его и вместе с товарищем из опергруппы уедут на тот берег. Теперь здоровый преступник перевезет раненых. 94. Морозов преподает историю и французский язык, Васильев — биологию и английский язык, Токарев — математику и географию. 96. У Андрея — 5, у Виталия — 4, у Сергея — 3. 97. Спортсмены заняли первые места в таком порядке: Соколов, Алешин, Малик, Иванов, Токарев, Комаров. 98. Ребята нашли железную деталь весом в 30 кг. Следует рассмотреть истинные высказывания $m \vee 30$, $g \vee 100$, $\neg m \vee 50$ и составить из них конъюнкцию. 99. Итоги забега: Олег, Миша, Николай, Игорь. 100. В правой. Рассуждение таково. Если товарищ держит монету в левой руке и он решил говорить неправду, то мы имеем равносильные высказывания (с точки зрения значения их истинности), но так как товарищ говорит неправду, то он ответит «нет». Если он держит монету в левой руке и решил говорить правду, то мы имеем высказывания различного значения истинности, и так как товарищ говорит правду, то он ответит «нет». Из этого и из условия задачи следует, что монета лежит в правой руке. Можно было бы проанализировать характер ответа в предположении, что монета лежит в правой руке, а товарищ говорит правду или неправду. 101. Антон учится в первом классе, Дмитрий — во втором, Борис — в третьем, Галина — в четвертом, Зоя — в пятом, Евгений — в шестом, Вера — в седьмом, Жанна — в восьмом. 102. Васильев. 103. Алик из Умани, Боря из Харькова, Витя из Славянска, Лена из Краматорска, Даша из Полтавы. 104. Полковник — ракетчик, майор — летчик, капитан — артиллерист, лейтенант — зенитчик, прапорщик — связист, сержант — танкист, ефрейтор — пехотинец, рядовой — разведчик. 105. Окно разбил Эдик. 106. Белов. 107. Оля — первое, Рита — второе, Зина — третье, Вера — четвертое. 108. Разбить монеты на три кучки, по 11 в каждой. 109. Если бы лицо было испачкано только у одного путешественника, то у него не было бы повода для смеха. Если бы лица были испачканы только у Бипино и Ликино, то Бипино, видя чистое лицо у Амино и запачканное у Ликино, догадался бы, что Ликино смеется над ним. В нашем случае Бипино не догадывается, а значит, у Амино тоже испачкано лицо. 110. Если двум мудрецам надеть на головы черные тюбетейки, то третий мудрец моментально скажет, что на нем красная тюбетейка. Если одному мудрецу надеть черную тюбетейку, то один из двух других мудрецов догадается, что на нем красная тюбетейка. Его рассуждение будет таково: «Я вижу одну черную и одну красную тюбетейку. Если бы и на мне была черная тюбетейка, то мудрец в красной тюбетейке видел бы ее и немедленно заявил бы, что на нем красная тюбетейка. Но он молчит. Значит, он не видит на мне черную тюбетейку». Если всем троим надеть красные тюбетейки, то мудрейший рассуждает так: «Я вижу две красные тюбетейки. Если бы на мне была черная тюбетейка, то кто-нибудь из моих соперников уже догадался бы, что на нем красная тюбетейка (предыдущий случай). Но противники молчат. Значит, на мне

красная тюбетейка». 111. а) Если бы двум мудрецам были одеты белые шапочки, а двум другим — красные, то мудрецы в красных шапочках сидели бы. Если одному мудрецу одеть белую шапочку, а остальным — красные, то все мудрецы встали бы. При этом мудрец в красной шапочке рассуждал бы так: «Я вижу белую шапочку. Если бы и на мне была белая шапочка, то двое других мудрецов в красных шапочках сидели бы. Но они встали. Значит, на мне красная шапочка». Если всем мудрецам надеть красные шапочки, то мудрейшему легко сообразить, что на нем красная шапочка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика (85 логических задач), пер. с венгерского Данилова Ю. А., М., Мир, 1975.
2. Болховитинов В. Н., Колтовой Б. И., Лаговский И. К. Твое свободное время (занимательные задачи, опыты, игры). М., Детская литература, 1975.
3. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру. К., Радянська школа, 1972.
4. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения, М., ГИФМЛ, 1961.
5. Рупасов К. А. 100 логических задач, Тамбов, 1963.
6. Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой, Л., 1965.
7. Колъман Э., Зих О. Занимательная логика. М., Наука, 1966.
8. Малинин В. В. Элементы математической логики во внеклассной работе.— «Математика в школе», 1962, № 5, с. 60—66.
9. Щеглов Г. Н. О матричном методе решения логических задач.— «Математика в школе», 1966, № 1, с. 81—83.
10. Шедивы Ярослав. Решение логических задач при помощи графов.— «Математика в школе», 1967, № 6, с. 56—60.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
§ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ СПОСОБОМ ЗДРАВОВОГО РАС- СУЖДЕНИЯ	5
Упражнения	9
§ 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКА- ЗЫВАНИЙ	10
Упражнения	12
Упражнения	14
Упражнения	15
Упражнения	17
Упражнения	18
Упражнения	19
Упражнения	20
Упражнения	26
§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИСЧИСЛЕНИЕМ ВЫСКАЗЫ- ВАНИЙ	27
Упражнения	41
§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ	45
Упражнения	54
§ 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ . . .	57
Упражнения	64
Ответы и указания	72
Список литературы	78

Библиотечка физико-математической школы
М а т е м а т и к а

Шевченко Владимир Егорович

**НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ
ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Редактор О. С. Д з ю б а
Литредактор А. П. К о в а л ь ч у к
Художественный редактор Е. В. Ч у р и й
Технический редактор С. Л. С в е т л о в а
Корректор Н. В. В о л к о в а

Информ. бланк № 4118

Сдано в набор 5.12.78. Подп. в печать 1.03.79. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс печать. 4,2 усл. печ. л. 4,99
уч.-изд. л. Тираж 23 000 экз. Изд № 3909. Зак. № 8—3243.
Цена 15 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа»,
252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского
производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата
УССР, г. Киев, Довженко, 3, в Харьковской городской типогра-
фии № 16, Харьков-3, Университетская, 16, Зак. 790.

15 к.

