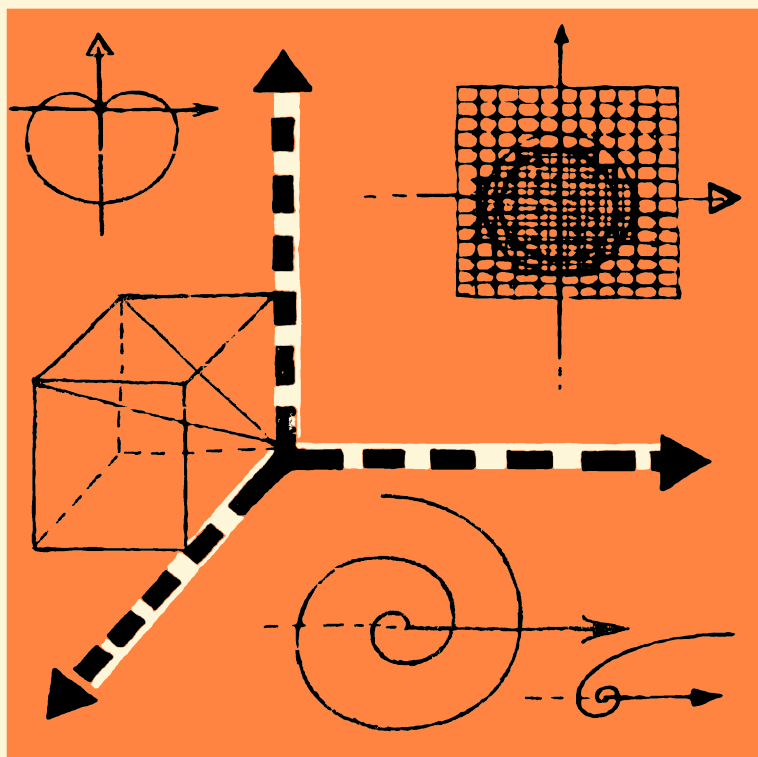


Математика

Библиотечка
физико-математической школы

И.М.Гельфанд
Е.Г.Глазголева
А.А.Нирилов

Метод координат



Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Выпуск 1

И. М. Гельфанд
Е. Г. Глаголева
А. А. Кириллов

Метод координат

Издание пятое,
стереотипное

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1973

517.3

Г 32

УДК 513.012(075.4)

Математика

Библиотечка

физико-математической школы

Редактор серии

И. М. Гельфанд

Г $\frac{0222-1746}{042(02)-73}$ 36-73

Оглавление

Предисловие	5
Вступление	7

I г л а в а

§ 1. Координаты точки на прямой	9
1. Числовая ось	9
2. Абсолютная величина числа	12
3. Расстояние между двумя точками	17
§ 2. Координаты точки на плоскости	21
4. Координатная плоскость	21
5. Соотношения, связывающие координаты	24
6. Расстояние между двумя точками	26
7. Задание фигур	30
8. Прямая	34
9. Алгебра и геометрия	42
10. Другие системы координат	47
§ 3. Координаты точки в пространстве	51
11. Координатные оси и плоскости	51
12. Задание фигур в пространстве	54

II г л а в а

§ 1. Вступление	60
13. Немного общих рассуждений	60
14. Геометрия помогает считать	62
15. Нужно вводить четырехмерное пространство	64

16. Особенности четырехмерного пространства	66
17. Немного физики	67
§ 2. Четырехмерное пространство	68
18. Координатные оси и плоскости . .	69
19. Некоторые задачи	74
§ 3. Четырехмерный куб	76
20. Определения сферы и куба	76
21. Устройство четырехмерного куба .	78
22. Задачи на куб	85

Предисловие

Для чтения и понимания этой книги не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы восьмого класса. И даже более того: многое известное школьникам здесь объясняется еще раз (например, понятие абсолютной величины числа, простейшие примеры решения неравенств и др.).

Однако следует иметь в виду, что книга написана не для легкого чтения, а для серьезного систематического изучения, и поэтому, чтобы понять ее, нужно терпеливо работать над текстом и, главное, над упражнениями, которых в книге много. Все задачи, которые даны непосредственно в тексте (они не имеют номеров), должны быть разобраны, так как их результаты будут использоваться в дальнейшем изложении. Большую роль играют также рисунки. Некоторые из них содержат необходимые пояснения текста, примеры, ответы к упражнениям и т. д.

Чтобы облегчить Ваш путь по книге, мы помещаем на полях «дорожные знаки». При чтении обращайтесь на них внимание.

Знаком «Стоянка разрешена» отмечены места, содержащие сведения, необходимые для понимания дальнейшего: определения, формулы и т. д.

Около такого знака надо остановиться, прочитать это место несколько раз и обязательно запомнить.

Знак «Крутой подъем» стоит там, где содержится более трудный материал. Если это мелкий шрифт, то при первом чтении это место можно пропустить.





Особенно внимательны будьте около знака «Опасный поворот». Часто он стоит на таком месте, где на первый взгляд все кажется легким и простым. Однако если как следует не разобраться, то это может привести к серьезным ошибкам в дальнейшем.

Желаем Вам успешных занятий.

Четвертое издание книги несколько переработано и дополнено. Авторы благодарят учащихся и преподавателей Заочной математической школы за помощь в подготовке этого издания.

И. М. Гельфанд

Е. Г. Глаголева

А. А. Кириллов

Вступление

Когда Вы будете читать в газете сообщение о запуске нового спутника, обратите внимание на слова: «Спутник вышел на орбиту, близкую к расчетной». Подумайте: как можно рассчитывать, т. е. изучать в числах, орбиту спутника — некоторую линию. Ведь для этого надо уметь переводить на язык чисел геометрические понятия и в первую очередь уметь определять положение точки в пространстве (или на плоскости, или на поверхности Земли и т. д.) с помощью чисел.

Метод координат — это способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Числа, с помощью которых определяется положение точки, называются координатами точки.

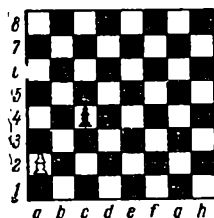
Хорошо известные Вам географические координаты определяют положение точки на поверхности (поверхности Земли) — каждая точка на земной поверхности имеет две координаты: широту и долготу.

Чтобы определить положение точки в пространстве, нужны уже не два числа, а три. Например, чтобы определить положение спутника, можно указать высоту его над поверхностью Земли, а также широту и долготу точки, над которой он находится.

Если же известна траектория спутника, т. е. линия, по которой он движется, то, чтобы определить положение спутника на этой линии, достаточно указать одно число:

например, можно указать расстояние, пройденное спутником от некоторой точки траектории ¹⁾).

Точно так же применяют метод координат для определения положения точки на линии железной дороги: указывают номер километрового столба. Этот номер и является координатой точки на железнодорожной линии. Например, в названии «Платформа 42-й километр» число 42 — это координата ближайшего к станции километрового столба.



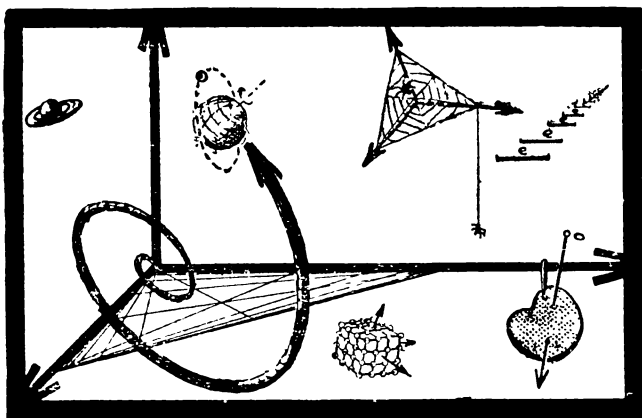
Своеобразные координаты используются в шахматах, где положение фигуры на доске определяется с помощью буквы и числа. Вертикальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавита, горизонтальные ряды — цифрами. Каждой клетке доски соответствует буква, указывающая вертикальный ряд, в котором стоит клетка, и цифра, указывающая горизонтальный ряд. На нашем рисунке белая пешка стоит на клетке a2, черная — на c4. Таким образом, a2 можно считать координатами белой пешки, c4 — координатами черной.

Применение координат в шахматах позволяет играть в шахматы по переписке. Чтобы сообщить ход, нет надобности рисовать доску и расположение фигур. Достаточно, например, сказать: «Гроссмейстер сыграл e2—e4», и всем уже известно, как начата партия.

Координаты, применяемые в математике, позволяют определять с помощью чисел положение любой точки пространства, или плоскости, или линии. Это дает возможность «шифровать» различного рода фигуры, записывать их при помощи чисел. Один из примеров такого рода шифровки Вы найдете в упражнении 4.1.

Метод координат важен также и тем, что он позволяет применять современные вычислительные машины к решению геометрических задач, к исследованию любых геометрических объектов и соотношений.

¹⁾ Иногда говорят, что линия имеет одно измерение, поверхность — два измерения, а пространство — три. При этом под числом измерений линии, поверхности или пространства понимают число координат, определяющих положение точки на них.



1 ГЛАВА

§ 1. Координаты точки на прямой

Знакомство с координатами мы начнем с разбора самого простого случая: с определения положения точки на прямой.

1. Числовая ось

Чтобы задать положение точки на прямой, поступают следующим образом. На прямой выбирают *начало отсчета* (некоторую точку O), *единицу масштаба* (отрезок e) и *направление*, которое будет считаться положительным (на рис. 1 оно указано стрелкой).

Прямая, на которой указаны начало отсчета, единица масштаба и положительное направление, называется *числовой осью*.

Для определения положения точки на числовой оси достаточно назвать одно число, например $+5$. Это будет означать, что точка лежит на расстоянии 5 единиц масштаба от начала отсчета в положительном направлении. Если мы укажем отрицательное число, например $-2,5$, то

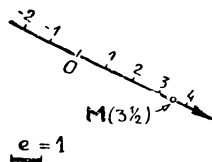


рис 1



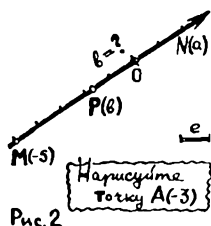


Рис. 2



соответствующая точка будет лежать на расстоянии 2,5 единиц от начала отсчета в отрицательном направлении.

Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется *координатой* точки.

Координата точки на числовой оси равна расстоянию точки от начала отсчета, выраженному в выбранных единицах масштаба и взятому со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от начала, и со знаком минус в противном случае. Начало отсчета часто называют *началом координат*. Координата начала отсчета (точки O) равна нулю.

Употребляют обозначения: $M(-5)$, $N(a)$ и т. д. Первое из них обозначает точку M с координатой минус пять, второе — точку N с координатой a (рис. 2). Часто говорят коротко: «точка минус пять», «точка a » и т. п.

Таким образом, мы установили соответствие между числами и точками прямой линии. При этом получается, что каждой точке прямой соответствует одно определенное число — ее координата, и каждому числу (при том же соответствии) — одна определенная точка прямой; двум разным точкам соответствуют два разных числа. Такое соответствие в математике называется *взаимно однозначным*.

На первый взгляд это кажется совсем простым — установить взаимно однозначное соответствие между точками прямой и числами. Однако когда математики задумались над этим, то оказалось, что для выяснения точного смысла слов, входящих в эту фразу, нужно создать большую и сложную теорию. Так, сразу же возникают два «простых» вопроса, на которые трудно ответить: что такое число и что следует понимать под точкой?

Эти вопросы относятся к так называемым основаниям геометрии и к аксиоматике чисел. Позднее в других наших выпусках мы рассмотрим эти вопросы несколько подробнее.

Несмотря на то, что вопрос об определении положения точки на прямой является крайне простым, необходимо внимательно в нем разобраться, чтобы привыкнуть видеть за числовыми соотношениями геометрические, и обратно.

Проверьте себя.

Если Вы правильно поняли п. 1, то без труда справитесь с упражнениями, которые мы предлагаем. Если же упражнения у Вас не получаются, это значит, что Вы что-то пропустили или не поняли. Тогда вернитесь и перечитайте этот пункт.

1.1. 1) Отметьте на числовой оси точки $A (-2)$, $B (1,3)$, $K (0)$.

2) На числовой оси отметьте точку $M (2)$. Отметьте на числовой оси две точки A и B , каждая из которых находится от точки M на расстоянии трех единиц. Чему равны координаты точек A и B ?

3) Чему равны расстояния между точками:

$A (5)$ и $B (3)$,

$M (-5)$ и $P (-3)$,

$A (5)$ и $P (-3)$,

$B (3)$ и $M (-5)$?

1.2. 1) Известно, что точка $A (a)$ лежит правее ¹⁾ точки $B (b)$. Какое число больше: a или b ?

2) Не рисуя точек на числовой оси, скажите, какая из двух точек правее: $A (-3)$ или $B (-4)$, $A (3)$ или $B (4)$, $A (-3)$ или $B (4)$, $A (3)$ или $B (-4)$?

1.3. Какая из двух точек правее: $A (a)$ или $B (-a)$?

О т в е т. Неизвестно. Если a — положительное число, то A правее, чем B ; если a — отрицательное число, то B правее, чем A ; если же $a = 0$, то точки A и B совпадают.

1.4. Подумайте, какая из двух точек правее:

1) $M (x)$ или $N (2x)$; 2) $A (c)$ или $B (c+2)$; 3) $A (x)$ или $B (x^2)$; 4) $A (x)$ или $B (x-a)$.

О т в е т к у п р. 1.4. 1) Если $x > 0$, то $2x > x$ и точка N правее точки M ; если $x < 0$, то $2x < x$ и точка M правее точки N ; если $x = 0$, то точки M и N совпадают.

1.5. 1) Точка $M (2)$ сдвинулась по оси влево (в отрицательном направлении) на 3 единицы. Какова новая координата точки M ?

2) Точка $P (-5)$ сдвинулась на три единицы по оси в положительном направлении. Какова координата точки P' (рис. 3)?

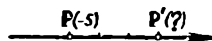


Рис. 3

¹⁾ Здесь и далее предполагается, что ось расположена горизонтально и положительным направлением является направление слева направо.

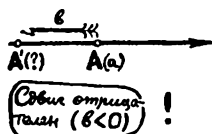
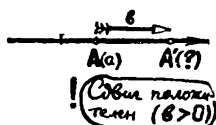


Рис. 4

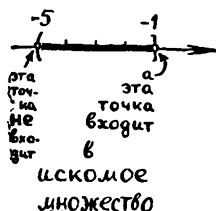


Рис. 5

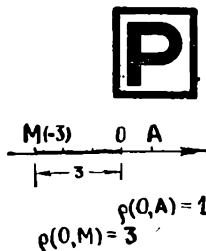


Рис. 6

1.6. Точка $A(a)$ сдвигается на b единиц по оси (рис. 4). Какова координата точки A' ? (Не забудьте, что число b может быть как положительным, так и отрицательным!). Чему равняется расстояние между A и A' ?

1.7. Нарисуйте на числовой оси точки $A(-5)$ и $B(7)$. Найдите координату середины отрезка AB .

1.8. Отметьте на числовой оси множества всех точек x , для которых:

- 1) $x < 2$; 2) $x \geq 5$; 3) $2 < x < 5$;
- 4) $-3 \leq x \leq 0$; 5) $-5 < x \leq -1$;
- 6) $x - 3 < 5$; 7) $x^2 \geq 4$; 8) $x^2 < 1$.

Ответ к упр. 1.8. 5) см. на рис. 5.

2. Абсолютная величина числа

Зная координату точки, можно легко определить расстояние этой точки от начала координат. Например, расстояние точки $A(1)$ от начала координат равно 1; расстояние точки $M(-3)$ от начала координат равно 3 (расстояние точки M от точки O — начала координат, или длина отрезка OM , выражается положительным числом).

Расстояние между какими-либо точками A и B принято обозначать греческой буквой ρ («ро»). Например, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками A и B , $\rho(O, A)$ — расстояние между O и A и т. д. Мы можем написать: (см. рис. 6) $\rho(O, A) = 1$, $\rho(O, M) = 3$.

2.1. Чему равно $\rho(O, A)$, если координата точки A равна 7? $\rho(O, B)$, если координата точки B равна -10 ? $\rho(O, C)$, если координата точки C равна нулю?

З а д а ч а. Чему равно расстояние точки $M(a)$ от начала координат (т. е. чему равно $\rho(O, M)$), если координата точки M равна a ?

Р е ш е н и е. Если a — положительное число, то расстояние точки M от начала координат равно a , т. е. координате этой точки.

Если a — отрицательное число, то расстояние точки $M(a)$ от начала координат равно положительному числу $-a$.



Если $a = 0$, то расстояние точки M от начала координат равно нулю (так как точка M в этом случае совпадает с началом координат O), то есть для точки $M(a)$

$$\rho(O, M) = a, \quad \text{если } a > 0;$$

$$\rho(O, M) = -a, \quad \text{если } a < 0;$$

$$\rho(O, M) = 0, \quad \text{если } a = 0.$$

Это записывают так:

$$\rho = (O, M) \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{» } a < 0, \\ 0 & \text{» } a = 0. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е. Абсолютной величиной числа a , или модулем числа a называется неотрицательное число, равное

$$\begin{aligned} &a, && \text{если } a > 0, \\ &-a, && \text{» } a < 0, \\ &0, && \text{» } a = 0. \end{aligned}$$

Модуль числа a обозначается так:
 $|a|$ — модуль a , например, $|5| = 5$,
 $|-7| = 7$, $|0| = 0$ (рис. 7).

Наше определение можно записать коротко так:

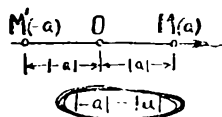
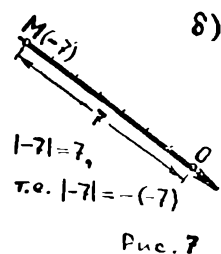
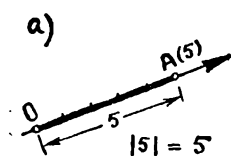
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ -a, & \text{» } a < 0, \\ 0, & \text{» } a = 0. \end{cases}$$

Пользуясь этим определением, мы можем теперь коротко написать, чему равно расстояние точки $M(a)$ от начала координат:

$\rho(O, M) = |a|$, где a — координата точки M .

Ясно, что $|-a| = |a|$ (см. рис. 8).

2.2. Какие значения может принимать выражение $\frac{|x|}{x}$?



Абсолютная величина числа a — это расстояние точки $M(a)$ от начала координат.

Рис 8



2.3. Выпишите соотношения:

- 1) $|x| = x$; 2) $|x| > x$; 3) $|x| < x$;
 4) $|x| \leq x$; 5) $|a + b| = a + b$;
 6) $|a - b| = -(a + b)$

и отметьте значком «+» те из них, которые выполняются при всех значениях входящих в них букв, значком «-» те из них, которые не выполняются ни при каких значениях букв и, наконец, значком «±» те, которые при одних значениях букв выполняются, а при других нет.

2.4. Как записать без знака модуля выражения:

- 1) $|a^2|$;
 2) $|a - b|$, если a меньше b ($a < b$);
 3) $|a - b|$, если a больше b ($a > b$);
 4) $|-a|$, если a — отрицательное число ($a < 0$)?

2.5. Где на числовой оси лежат точки $M(x)$, для которых:

- 1) $|x| = 2$; 2) $|x| > 3$; 3) $|x| \leq 5$;
 4) $3 < |x| \leq 5$; 5) $|x| = 0$;
 6) $|x| = -1$; 7) $|x^2| = 4$?

Решение упр. 2.5. 2). Если x — положительное число, то $|x| = x$ и, следовательно, $x > 3$; если x — отрицательное число, то $|x| = -x$; тогда неравенство $|x| > 3$ превращается в неравенство $-x > 3$, из которого следует, что $x < -3$.

Ответ к упр. 2.5. 2) Все точки, расположенные левее точки -3 , и все точки, расположенные правее точки 3 (см. рис. 9).

Замечание. Этот результат можно получить быстрее, если учесть, что $|x|$ — это расстояние точек x от начала координат. Тогда ясно, что неравенству $|x| > 3$ удовлетворяют координаты всех точек, расстояние которых от начала координат больше трех. Из того же рис. 9 можно получить аналитическую (алгебраическую) запись ответа: $x < -3$ и $x > 3$.

2.6. Отметьте на числовой оси точки, для которых:

- 1) $|x - 2| = x - 2$; 2) $|x + 1| = x + 1$;
 3) $|x + 5| = -5 - x$; 4) $|2 - x| = 2 - x$;
 5) $|2 - x| = x - 2$; 6) $|x + 1| = |x - 1|$.

2.7. Какая из двух точек $A(x)$ и $A'(x + a)$ правее и чему равно расстояние между этими точками?

Ответ. Если $a > 0$, то A' правее A и расстояние между ними равно a ; если $a < 0$, то A правее A' и расстояние между ними равно $-a$; если $a = 0$, то A' совпадает с A и расстояние между ними равно 0. Таким образом, во всех случаях расстояние между $A(x)$ и $A'(x + a)$ равно $|a|$.

Задача. Решить уравнение:

$$|x + 1| + |x + 2| = 2. \quad (1)$$

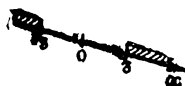


Рис. 9

Решение. Выражения $|x + 1|$ и $|x + 2|$ «раскрываются» по-разному в зависимости от того, какой знак имеют выражения, стоящие под знаком модуля (см. определение на стр. 13). А именно:

$$|x + 1| = x + 1, \text{ если } x + 1 \geq 0,$$

т. е. при $x \geq -1$;

$$|x + 1| = -x - 1, \text{ если } x + 1 < 0,$$

т. е. при $x < -1$;

$$|x + 2| = x + 2, \text{ если } x + 2 > 0,$$

т. е. при $x > -2$;

$$|x + 2| = -x - 2, \text{ если } x + 2 \leq 0,$$

т. е. при $x \leq -2$.

Разобьем поэтому все множество значений x на три участка (рис. 10):

1) $x \geq -1$; 2) $-2 < x < -1$;

3) $x \leq -2$.

Рассмотрим каждый участок¹⁾ отдельно.

1) $x \geq -1$. Для этих значений x имеем:

$$x + 1 \geq 0 \text{ и } x + 2 > 0.$$

Следовательно, $|x + 1| = x + 1$ и $|x + 2| = x + 2$. Уравнение (1) для этих x ($x \geq -1$) приобретает вид:

$$x + 1 + x + 2 = 2, \text{ или } 2x + 3 = 2.$$

Корень этого уравнения $-\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $x \geq -1$, т. е. на этом участке уравнение (1) имеет один корень.

2) $-2 < x < -1$. На этом участке уравнение (1) приобретает вид $1 = 2$ (проверьте!). Это означает, что ни одно число, заключенное между -2 и -1 , не удовлетворяет уравнению (1), т. е. на участке $-2 < x < -1$ уравнение (1) не имеет ни одного корня.

3) $x \leq -2$. Этот случай разберите самостоятельно.

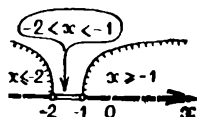


рис. 10

¹⁾ Заметьте, что границы этих участков — это те точки, в которых обращается в нуль один из выражений, стоящих под знаком модуля.

О т в е т. Уравнение (1) имеет два корня: $-\frac{1}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

З а д а ч а. Решить уравнение:

$$|x + 1| + |x + 2| = 1. \quad (2)$$

Р е ш е н и е. Разобьем числовую ось на те же три участка:

- 1) $x \geq -1$, 2) $-2 < x < -1$,
3) $x \leq -2$.

Для первого участка уравнение приобретает вид $2x + 3 = 1$ (объясните, почему). Это уравнение имеет корень -1 , удовлетворяющий условию $x \geq -1$. Значит, на первом участке имеется одна точка, удовлетворяющая уравнению (2), — конец этого участка.

На втором участке ($-2 < x < -1$) имеем:

$$\begin{aligned} |x + 1| &= -x - 1, \\ |x + 2| &= x + 2; \end{aligned}$$

уравнение приобретает вид:

$$-x - 1 + x + 2 = 1, \quad \text{или} \quad 1 = 1,$$

т. е. удовлетворяется тождественно. Значит, любое число из промежутка $-2 < x < -1$ является корнем уравнения (2). (Проверьте это: подставьте несколько чисел из указанного участка в уравнение (2), например, число $-1,5$ или $-1,99$).

Для третьего участка ($x \leq -2$) уравнение (2) превращается в $-2x - 3 = 1$, откуда $x = -2$. Значит, конец третьего участка тоже является корнем уравнения (2).

О т в е т. Уравнение (2) имеет бесконечно много корней: совокупность всех корней заполняет отрезок $-2 \leq x \leq -1$ (рис. 11), т. е. любое число, которое больше или равно -2 и меньше или равно -1 , удовлетворяет уравнению (2).

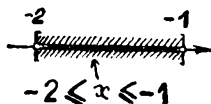


Рис 11

2.8. Решите уравнения:

- 1) $|x + 3| + |x - 1| = 5$;
- 2) $|x + 3| + |x - 1| = 4$;
- 3) $|x + 3| + |x - 1| = 3$;
- 4) $|x + 3| - |x - 1| = 5$;
- 5) $|x + 3| - |x - 1| = 4$;
- 6) $|x + 3| - |x - 1| = 3$;
- 7) $|x^2 - 10x + 9| = 12$.

У к а з а н и е к упр. 2.8, 7). Придется разоб-
ратся (см. рис. 12), для каких x выражение $x^2 -$
 $- 10x + 9$ положительно, а для каких — отрица-
тельно; разбить числовую ось на участки и решать
уравнение для каждого участка отдельно. Вы уви-
дите, что и в этом случае границами участков явля-
ются точки, где обращается в нуль выражение,
стоящее под знаком модуля.

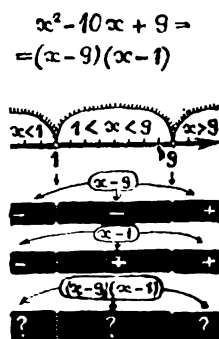


Рис. 12

3. Расстояние между двумя точками

В упражнении 1.1,3) Вы уже вычисли-
ли расстояния между точками числовой
оси по координатам этих точек. Сделайте
еще такие упражнения:

3.1. Найдите расстояния между точками:

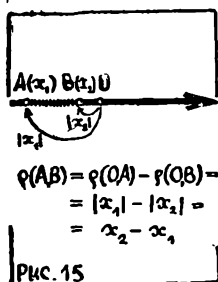
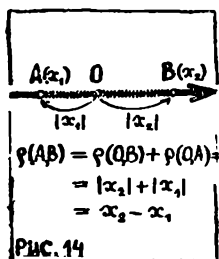
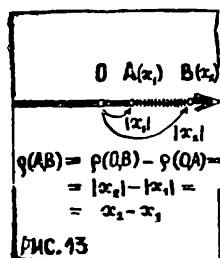
- 1) $A (-1)$ и $B (3)$;
- 2) $P (100)$ и $Q (132)$;
- 3) $M (-2)$ и $N (-87)$.

Решать эти задачи нетрудно, так как,
зная координаты точек, можно разо-
браться, какая точка правее, какая левее,
как они расположены относительно нача-
ла координат и т. д. После этого совсем
легко сообразить, чему равно расстояние
между ними.

Найдем теперь общую формулу для
расстояния между двумя точками на чис-
ловой оси.

З а д а ч а. Даны точки $A (x_1)$ и $B (x_2)$,
определить расстояние $\rho (A, B)$ между
этими точками.

Р е ш е н и е. Так как теперь конкрет-
ные значения координат точек неизвестны,



то надо разобрать все возможные случаи взаимного расположения трех точек: A , B и O — начала координат.

Сначала рассмотрим 3 случая, в которых B правее A (рис. 13—15).

В первом из них (рис. 13) расстояние $\rho(A, B)$ равно разности расстояний точек B и A от начала координат. Так как в этом случае x_1 и x_2 положительны, то

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1.$$

Во втором случае (рис. 14) расстояние равно сумме расстояний точек B и A от начала координат, т. е. по-прежнему

$$\rho(A, B) = x_2 - x_1,$$

поскольку в этом случае x_2 положительно, а x_1 отрицательно.

Покажите, что в третьем случае (рис. 15) расстояние будет определяться той же формулой.

Другие три случая (точка A правее B) отличаются от разобранных тем, что точки A и B поменялись ролями, и, значит, поменялись ролями их координаты x_1 и x_2 . Поэтому теперь

$$\rho(A, B) = x_1 - x_2.$$

Итак, во всех случаях, когда $x_2 > x_1$, расстояние $\rho(A, B)$ равно $x_2 - x_1$, а во всех случаях, когда $x_1 > x_2$, это расстояние равно $x_1 - x_2$. Вспоминая определение абсолютной величины числа, можно записать это единой формулой, пригодной во всех шести случаях:

$$\rho(A, B) = |x_2 - x_1|. \quad (3)$$

При желании эту формулу можно записать и в виде:

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|.$$

Если быть педантичным, то нужно разобрать еще случай, когда $x_2 = x_1$, т. е. когда



точки A и B совпадают. Ясно, что и в этом случае $\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$.

В случае, когда одна из точек A , B совпадает с точкой O , т. е. $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$, эта формула прямо следует из определения абсолютной величины.

Таким образом, поставленная задача решена полностью.

Координату x_2 точки B можно записать как сумму двух чисел $x_1 + (x_2 - x_1) = x_2$ и, воспользовавшись для точек $A(x_1)$ и $B(x_1 + (x_2 - x_1))$ результатом упражнения 2.7, сразу получить нужную формулу $\rho(A, B) = |x_2 - x_1|$.

3.2. Отметьте на числовой оси точки x , для которых:

- 1) $\rho(x, 7) < 3$; 2) $|x - 2| > 1$;
- 3) $|x + 3| = 3$.

3.3. Найдите координаты точек на числовой оси, которые расположены втрое ближе к точке $A(-9)$, чем к точке $B(-3)$.

У к а з а н и е. Обозначьте координату искомой точки M через x . Тогда расстояние от нее до точки $A(-9)$ равно $|x - (-9)| = |x + 9|$, а расстояние до точки $B(-3)$ равно $|x + 3|$. В задаче требуется, чтобы $\rho(M, B) = 3\rho(M, A)$, т. е. задача сводится к решению уравнения $|x + 3| = 3|x + 9|$.

3.4. 1). Найдите точку, делящую отрезок AB пополам, если координаты концов отрезка равны 45 и 51.

О т в е т. Точка $N(48)$ делит отрезок AB пополам, т. е. является его серединой.

2) На числовой оси даны две точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$. Найдите точку, делящую отрезок AB пополам (т. е. найдите координату середины отрезка AB ; рис. 16).

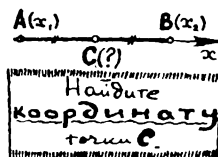


Рис. 16

Даже такая, совсем простая формула (3) — формула расстояния между двумя точками, лежащими на числовой оси, — позволяет в ряде случаев облегчить, сделать более наглядным решение задач.

Вернемся, например, к уравнениям (1) и (2), рассмотренным на стр. 14 и 16:

$$|x + 1| + |x + 2| = 2, \quad (1)$$

$$|x + 1| + |x + 2| = 1. \quad (2)$$



При решении этих уравнений нам пришлось разбивать множество значений неизвестного на различные участки и разбирать уравнение для каждого участка отдельно. Так всегда естественно делать, если уравнение содержит неизвестное под знаком модуля.

Попробуем истолковать эти уравнения геометрически.

Выражение $|x + 1|$, стоящее в левых частях этих уравнений, можно истолковать как расстояние искомой точки $N(x)$ от точки $A(-1)$, а выражение $|x + 2|$ — как расстояние между $N(x)$ и $B(-2)$. Уравнение (1) означает, что нужно найти точку $N(x)$, сумма расстояний от которой до точек $A(-1)$ и $B(-2)$ равна 2. Уравнение (2) означает, что нужно найти точку $N(x)$, сумма расстояний от которой до точек $A(-1)$ и $B(-2)$ равна 1.

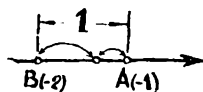


Рис. 17

На рис. 17 легко увидеть, что все точки лежащие на отрезке AB , будут удовлетворять уравнению (2), так как сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине этого отрезка. Ясно также, что вне этого отрезка не будет ни одной точки, удовлетворяющей уравнению (2). Остается только записать этот, результат: решениями уравнения (2) будут все числа, удовлетворяющие соотношению $-1 \leq x \leq -2$.

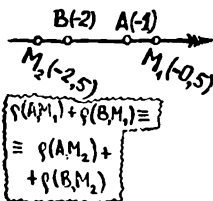


Рис. 18

Легко понять также, что уравнение (1) будет иметь два решения (два корня), расположенные вне отрезка AB симметрично относительно этого отрезка (рис. 18), так что при решении этого уравнения нет смысла рассматривать случай $-1 \leq x \leq -2$.

3.5. На каких участках числовой оси следует искать решение уравнения $|x - 1| + |x| = 2$? уравнения $|x| - |x + 3| = 1$?

3.6. Покажите геометрически, что уравнения

$$|x + 1| + |x - 1| = 1$$

в: имеет корней.

3.7. Решите неравенства:

1) $|x+1| + |x+2| \geq 2$; 2) $|x+1| + |x+2| < 1$.

У к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом решения уравнений (1) и (2).

3.8. 1) При каких значениях параметра a уравнение

$$|x+3| + |x-1| = a$$

не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений?

2) При каких значениях параметра b уравнение

$$|x+3| - |x-1| = b$$

не имеет решений, имеет одно решение, два решения, бесчисленное множество решений?

3.9. Решите уравнение

$$|a-x| = |b-x|.$$

3.10. Докажите, что точки $A(x)$ и $B(a-x)$ симметричны относительно точки $C(a/2)$.

§ 2. Координаты точки на плоскости

4. Координатная плоскость

Чтобы определить координаты точки на плоскости, проведем в этой плоскости две взаимно перпендикулярные числовые оси. Точку пересечения осей берут за начало отсчета для каждой из двух числовых осей Ox и Oy . Эту точку называют *началом координат* и обозначают буквой O .

Направление осей обычно выбирают так, чтобы положительная полуось Ox после ее поворота на 90° против часовой стрелки совмещалась с положительной полуосью Oy (рис. 19). Единицы масштаба на осях выбирают, как правило, одинаковыми. Одну из осей называют *осью абсцисс* или осью x (или Ox), другую — *осью ординат* или осью y (или Oy).

Возьмем на плоскости некоторую точку M и опустим из нее перпендикуляры на ось Ox и ось Oy (рис. 20). Точки пересечения M_1 и M_2 этих перпендикуляров с осями называются *проекциями* точки M на оси координат.

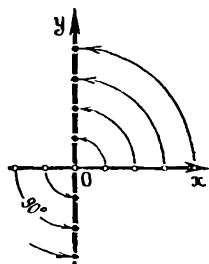


рис 19

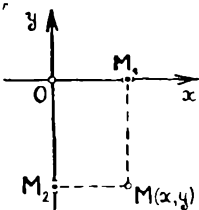


рис. 20



Точка M_1 лежит на числовой оси Ox , поэтому ей соответствует определенное число x — ее координата на этой оси. Точно так же точке M_2 соответствует определенное число y — ее координата на оси Oy .

Таким образом, каждой точке M , лежащей на плоскости, ставится в соответствие упорядоченная пара чисел¹⁾ x и y ; эти числа называются *прямоугольными декартовыми* координатами точки M . Число x называется *абсциссой* точки M , число y — ее *ординатой*.

Обратно, каждой упорядоченной паре чисел x, y можно поставить в соответствие некоторую точку плоскости, для которой x является абсциссой, а y — ординатой.



Теперь установлено взаимно однозначное соответствие²⁾ между точками плоскости и упорядоченными парами чисел x и y .

Координаты точки M записываются обычно так: $M(x, y)$. На первом месте записывается абсцисса, на втором — ордината. Иногда вместо «точка с координатами $(3, -8)$ » говорят «точка $(3, -8)$ ».

Оси координат делят плоскость на четыре *четверти (квадранта)*: Первой четвертью считается четверть между положительной полуосью Ox и положительной полуосью Oy . Далее четверти нумеруются по порядку против часовой стрелки (рис. 21).

Проделайте теперь несколько упражнений. Сначала предлагаем Вам совсем простые.

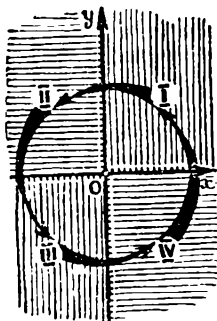


рис. 21

1) Упорядоченная пара чисел — это два числа, про которые известно, какое из них первое, какое второе; например, из двух чисел 2 и 5 можно составить две упорядоченные пары: $(2, 5)$ и $(5, 2)$.

2) Взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами чисел — это такое соответствие, при котором каждой точке соответствует одна определенная пара чисел и каждой паре чисел соответствует одна определенная точка (ср. со стр. 10).

4.1. Какое слово здесь зашифровано:
 (6, 2), (9, 2), (12, 1), (12, 0), (11, -2), (9, -2),
 (4, -2), (2, -1), (1, 1), (-1, 1), (-2, 0),
 (-2, -2), (2, 1), (5, 2), (12, 2), (9, 1), (10, -2),
 (10, 0), (4, 1), (2, 2), (-2, 2), (-2, 1), (-2, -1),
 (0, 0), (2, 0), (2, -2), (4, 0), (4, -1), (12, -1),
 (12, -2), (11, 0), (7, 2), (9, 0), (4, 2).

4.2. Не рисуя точки $A(1, -3)$, скажите, в какой четверти она расположена?

4.3. В каких четвертях может находиться точка, если ее абсцисса положительна?

4.4. Какие знаки будут у координат точек, расположенных во второй четверти, в третьей четверти, в четвертой?

4.5. На оси Ox взята точка с координатой -5 . Каковы ее координаты на плоскости?

О т в е т. Абсцисса точки равна -5 , ордината равна нулю.

4.6. Точки $A(3, 2)$ и $B(a, -1)$ расположены на одной прямой, параллельной оси Oy . Найдите a .

4.7. Точка M является серединой отрезка OA , соединяющего начало координат O с точкой $A(-5, 2)$. Найдите точку M (т. е. найдите ее координаты).

4.8. Точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ лежат на одной прямой, параллельной Ox . Какому соотношению удовлетворяют их координаты?

4.9. Какая точка дальше от оси Ox : $A(2, -5)$ или $B(3, 4)$? Какая из этих точек дальше от оси Oy ?

А вот задачи немного посложнее:

4.10. Нарисуйте точки $A(4, 1)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 4)$ и $D(0, 0)$. Если Вы правильно нарисовали, то у Вас получились вершины квадрата. Какова длина стороны этого квадрата? Какова его площадь ¹⁾? Найдите координаты середин сторон квадрата. Придумайте еще четыре точки (укажите их координаты) так, чтобы они служили вершинами квадрата.

4.11. Нарисуйте правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 22). Возьмите точку A за начало координат, ось абсцисс направьте от A к B , за единицу масштаба возьмите отрезок AB . Найдите координаты всех вершин этого шестиугольника.

4.12. На плоскости даны точки $A(0, 0)$, $B(x_1, y_1)$ и $D(x_2, y_2)$ (рис. 23). Какие координаты должна иметь точка C , чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом?

Полученный Вами ответ обоснуйте.

¹⁾ За единицу измерения площади мы выбираем площадь квадрата, сторона которого равна единице масштаба на осях.

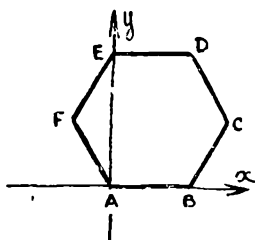


Рис. 22

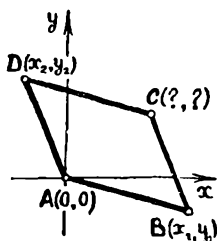


Рис. 23

Примечание

На рис. 23 Вы видите лишь ОДНО из возможных расположений точек

D и B.

При решении Вы должны или рассмотреть все возможные случаи расположения **D и B**, или дать такое решение, которое годилось бы для **любого!** случая!

4.13. 1) Докажите, что точки $A(a, b)$ и $B(-a, b)$ симметричны относительно оси Oy . (Не забудьте, что a и b не обязательно положительные числа.)

2) Какие координаты будут у точки N , симметричной точке $M(a, b)$ относительно оси Ox ? Относительно начала координат? (Получив ответ, проверьте, годится ли он для всех случаев положения точки M относительно координатных осей.)

5. Соотношения, связывающие координаты

Если известны обе координаты точки, то положение ее на плоскости вполне определяется. А что можно сказать о положении точки, если известна только одна из ее координат? Например: где лежат все точки, у которых абсцисса равна 3? Где расположены все точки, у которых одна координата (неизвестно, какая) равна 3?

Задание одной из двух координат на плоскости (или на поверхности) определяет, вообще говоря, некоторую линию. Этот факт даже лег в основу сюжета романа Жюль Верна «Дети капитана Гранта». Герои книги знали только одну из координат места кораблекрушения (широту), поэтому, чтобы осмотреть все возможные точки, они были вынуждены обойти Землю по целой параллели — линии, для каждой из точек которой широта равна $37^{\circ}11'$.

Соотношения между координатами тоже чаще всего определяют не одну точку, а некоторое множество (совокупность) точек. Например, если отметить все точки, у которых абсцисса равна ординате, т. е. точки, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x = y,$$

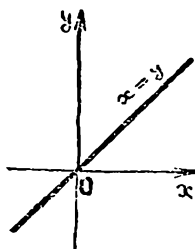


Рис. 24

то получится прямая линия — биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 24), что нетрудно доказать.

Иногда вместо «множество точек» говорят «геометрическое место точек». Например, геометрическое место точек, коор-

динаты которых удовлетворяют соотношению $x = y$, — это,¹ как мы только что говорили, биссектриса первого и третьего координатных углов.

Не следует думать, что всякое соотношение между координатами задает обязательно линию на плоскости. Например, Вы легко можете убедиться, что соотношение $x^2 + y^2 = 0$ определяет одну единственную точку — начало координат (рис. 25). Соотношению $x^2 + y^2 = -1$ не удовлетворяют координаты ни одной точки на плоскости (рис. 26), оно определяет так называемое «пустое» множество точек.

Соотношение

$$x^2 - y^2 = 0$$

задает на плоскости пару взаимно перпендикулярных прямых (рис. 27). Соотношение $x^2 - y^2 > 0$ задает даже некоторую часть плоскости (рис. 28).

5.1. Выясните, какие множества точек определяются соотношениями:

- 1) $|x| = |y|$; $x = |y|$; $y = |x|$; 2) $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$;
- 3) $|x| + x = |y| + y$; 4) $x = [y]^1$;
- $y = [x]$; $[x] = [y]$; 5) $x - [x] = y - [y]$;
- 6) $x - [x] > y - [y]$; 7) $(x - y)(x - 2y) = 0$;
- 8) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$; 9) $x + y > 0$; 10) $x + y > 1$;
- 11) $x - y < 1$; 12) $(x - y)(x - 2y) > 0$;
- 13) $\begin{cases} x - y > 0, \\ x - 2y > 0. \end{cases}$

Попробуйте теперь решать обратные задачи: найти соотношения, которым удовлетворяют координаты некоторой геометрической фигуры, некоторого множества точек.

5.2. Напишите уравнения, которые описывают следующие множества точек:

- 1) прямую, параллельную оси Ox и проходящую через точку $(1, 0)$;

¹) Символом $[x]$ обозначают целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x . Например,

$$\left[3\frac{2}{7}\right] = 3; [5] = 5; \left[-2\frac{1}{3}\right] = -3; [-7] = -7.$$

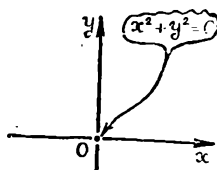


рис. 25

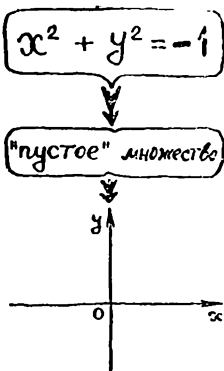


рис. 26

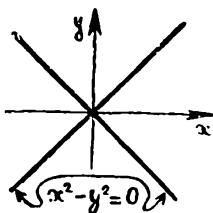


рис. 27

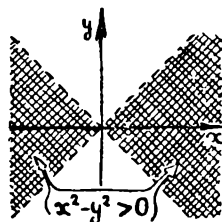


рис. 28

2) прямую, параллельную прямой $y = x$ и проходящую через точку $(-3, 7)$;

3) множество точек, находящихся на расстоянии 2 от оси Oy .

5.3. Придумайте соотношение между x и y , которое задает на плоскости:

1) пару прямых $y = 3x$ и $y = x - 3$;

2) прямую $y = x$ и точку $A(-1, 2)$;

3) всю часть плоскости выше прямой $y = x$ (включая эту прямую);

4) всю полосу между прямыми $y = 0$ и $y = 1$ (без этих прямых);

5) внутренность квадрата с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$.

О т в е т ы. 5.3, 2). $(y - x)[(x + 1)^2 + (y - 2)^2] = 0$.
5.3, 3). $y - x \geq 0$.

6. Расстояние между двумя точками

Вы умеете теперь говорить о точках на языке чисел. Например, нам уже нет необходимости объяснять: возьмите точку, находящуюся на три единицы правее оси y и на пять единиц ниже оси x . Достаточно сказать просто: возьмите точку $(3, -5)$.

Мы говорили, что это создает определенные преимущества. Так, можно рисунок, составленный из точек, передать по телеграфу, сообщить его вычислительной машине.

В п. 5 мы задали при помощи соотношений между числами некоторые множества точек на плоскости. Теперь попробуем последовательно переводить на язык чисел другие геометрические понятия и факты.

Начнем с простой и обычной задачи: найти расстояние между двумя точками плоскости.

Как всегда, мы считаем, что точки заданы своими координатами, и тогда задача состоит в том, чтобы придумать правило, по которому можно вычислить расстояние между точками, зная их координаты. При выводе этого правила, конечно, разрешается



прибегать к чертежу, но само правило не должно содержать никаких ссылок на чертеж, а должно только показывать, какие действия и в каком порядке надо совершать над данными числами — координатами точек, чтобы получить искомое число — расстояние между точками.

Такое освобождение от чертежа позволит решать поставленную задачу и в тех случаях, когда обращение к чертежу затруднено (например, если координаты очень велики). Кроме того, ясно, что аналитическое (числовое) решение всегда будет более точным, чем непосредственное измерение по чертежу.

Поставленную задачу лучше сначала решить для частного случая, когда одна из данных точек лежит в начале координат. Начните с нескольких числовых примеров: найдите расстояние от начала координат до каждой из точек $(12, 5)$, $(-3, 15)$ и $(-4, -7)$, применив теорему Пифагора.

Повторив эти рассуждения в общем виде, Вы получите общую формулу для вычисления расстояния $\rho(O, M)$ любой точки $M(x, y)$ от начала координат $O(0, 0)$ (рис. 29):

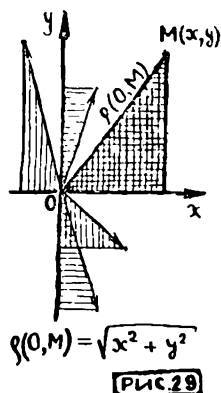
$$\rho(O, M) = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$

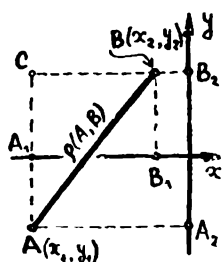
Очевидно, правило, выражаемое этой формулой, удовлетворяет поставленным выше условиям. В частности, им можно пользоваться при вычислении на машинах, которые способны умножать числа, складывать их и извлекать квадратные корни.

Теперь решим общую задачу.

Задача. На плоскости даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$; найти расстояние $\rho(A, B)$ между ними.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 30) проекции точек A и B на оси координат.





$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

рис. 30

Точку пересечения прямых AA_1 и BB_2 обозначим буквой C . Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора получаем ¹⁾

$$\rho^2(A, B) = \rho^2(A, C) + \rho^2(B, C). \quad (5)$$

Но длина отрезка AC равна длине отрезка A_2B_2 . Точки A_2 и B_2 лежат на оси Oy и имеют на этой оси соответственно координаты y_1 и y_2 . Согласно формуле, полученной в п. 3, расстояние между ними равно $|y_1 - y_2|$.

Аналогично рассуждая, получим, что длина отрезка BC равна $|x_1 - x_2|$. Подставляя найденные значения AC и BC в формулу (5), получаем

$$\rho^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Таким образом, $\rho(A, B)$ — расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ — вычисляется по формуле



$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (6)$$

Заметим, что все наши рассуждения годятся не только для такого расположения точек, как на рис. 30, но и для любого другого.

Сделайте другой рисунок (например, возьмите точку A в I четверти, а точку B — во II) и убедитесь, что все рассуждения можно будет дословно повторить, не меняя даже обозначений точек.

Заметим еще, что формулу из п. 3 для расстояния между точками на прямой (см. стр. 18) можно переписать в

¹⁾ Через $\rho^2(A, B)$ мы обозначаем квадрат расстояния $\rho(A, B)$.

аналогичном виде ¹⁾:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

6.1. 1) На плоскости даны три точки $A(3, -6)$, $B(-2, 4)$ и $C(1, -2)$. Докажите, что они лежат на одной прямой.

У к а з а н и е. Покажите, что одна из сторон «треугольника» ABC равна сумме двух других его сторон.

2) Найдите, какие три из точек $A(1, -3)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, 7)$ и $D(3, 1)$ лежат на одной прямой.

6.2. Примените формулу расстояния между двумя точками для доказательства известной Вам теоремы: в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей.

У к а з а н и е. Примите одну из вершин параллелограмма за начало координат (рис. 31) и воспользуйтесь результатами задачи 4.12. Вы увидите, что доказательство теоремы сведется к проверке простого алгебраического тождества. Какого?

6.3. Докажите с помощью метода координат следующую теорему: если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ (рис. 32). Как удобнее расположить оси координат?

Формулу (6) можно получить из формулы (4). Пусть имеются две точки: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Передвинем отрезок AB сначала параллельно оси Ox на $-x_1$ единиц, потом параллельно оси Oy на $-y_1$ единиц. Тогда (см. упр. 1.6) точка $A(x_1, y_1)$ попадет в точку $O(0, 0)$, а точка $B(x_2, y_2)$ — в точку $B'(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Расстояние между

$$\sqrt{x^2} \equiv |x|$$

$$\sqrt{2^2} = 2 = |2|$$

$$\sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|$$

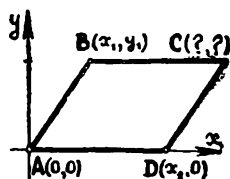


Рис. 31

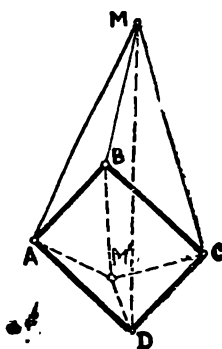


Рис. 32

¹⁾ Мы пользуемся тем, что

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

(имеется в виду арифметическое значение корня). Неаккуратное использование этого правила (иногда ошибочно считают, что $\sqrt{x^2} = x$) может привести к неправильным выводам. Для примера мы приводим цепь заключений, содержащую такого рода неточность, и предлагаем Вам обнаружить ее:

$$\begin{aligned} 1 - 3 &= 4 - 6 \Rightarrow 1 - 3 + 9/4 = 4 - 6 + 9/4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - 3/2)^2 = (2 - 3/2)^2 \Rightarrow \sqrt{(1 - 3/2)^2} = \\ &= \sqrt{(2 - 3/2)^2} \Rightarrow 1 - 3/2 = 2 - 3/2 \Rightarrow 1 = 2 \end{aligned}$$

(знак \Rightarrow заменяет слово «следовательно»).



точками O и B' можно вычислить по формуле (4):

$$\rho(O, B') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Так как расстояние между O и B' равно расстоянию между $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то получим

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с формулой (6).

7. Задание фигур

В п. 5 мы привели несколько примеров соотношений между координатами, которые определяют некоторые фигуры на плоскости. Поучимся еще немного задавать геометрические фигуры при помощи соотношений между числами.

Всякую фигуру мы рассматриваем как совокупность точек, из которых она состоит, и задать фигуру — это значит задать способ, по которому можно было бы узнавать, принадлежит ли та или иная точка рассматриваемой фигуре или нет.

Чтобы найти такой способ, например, для окружности, воспользуемся определением окружности как множества точек, расстояние которых от некоторой точки C (центра окружности) равно числу R (радиусу). Значит, чтобы точка $M(x, y)$ (рис. 33) лежала на окружности с центром $C(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(M, C)$ было равно R .

Вспомним, что расстояние между точками определяется по формуле (6)

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Следовательно, условие того, что точка $M(x, y)$ лежит на окружности с центром $C(a, b)$ и радиусом R , выражается соотношением

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R,$$

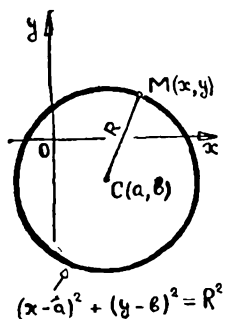


рис 33

которое можно переписать в виде:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (7)$$

Таким образом, чтобы проверить, лежит ли какая-нибудь точка на окружности, нужно проверить, удовлетворяется ли соотношение (7) для этой точки. Для этого нужно подставить в (7) вместо x и y координаты рассматриваемой точки. Если мы получим тождество, то точка лежит на окружности; в противном случае точка не лежит на окружности. Итак, зная уравнение (7), мы можем про любую точку плоскости сказать, лежит она на данной окружности или нет. Поэтому уравнение (7) называют *уравнением окружности* с центром $C(a, b)$ и радиусом R .

Например, если мы хотим проверить, лежит ли точка $M(4, 2)$ на окружности с центром в точке $C(1, -2)$ и радиусом 5, то можно, разумеется, нарисовать эту окружность и точку и увидеть ответ из чертежа (рис. 34). Но можно сделать иначе: написать уравнение этой окружности, подставив в уравнение (7) значения параметров a и b — координат центра и значение радиуса R ; получим:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Теперь, чтобы ответить на вопрос, лежит ли точка $M(4, 2)$ на окружности, достаточно подставить в последнее уравнение координаты этой точки: $x = 4$, $y = 2$ (см. рис. 34).

В преимуществе такого аналитического способа по сравнению с геометрическим легко убедиться, поставив, например, такие вопросы:

7.1. 1) Лежит ли точка $N(4, 1; 1, 9)$ на окружности с центром $C(1, -2)$ и радиусом 5? (Попробуйте воспользоваться рисунком 34!)

2) Лежит ли точка $K(0, 2\sqrt{6} - 2)$ на окружности с центром $C(1, -2)$ и радиусом 5?

3) Лежит ли точка $A(160, -1)$ на окружности с центром $C(147, -6)$ и радиусом 13?

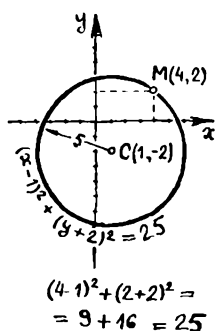


Рис 34

Перейдем к следующим упражнениям:

7.2. Напишите уравнение окружности с центром $C(-2, 3)$ и радиусом 5. Пусть про точку $A(a, -1)$ известно, что она лежит на этой окружности. Найдите a .

7.3. Покажите, что уравнение

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

задает на плоскости некоторую окружность. Найдите ее центр и радиус.

У к а з а н и е. Представьте уравнение в виде

$$(x^2 + 2x + 1) + y^2 = 1, \text{ или } (x + 1)^2 + y^2 = 1.$$

7.4. Какое множество точек задает соотношение $x^2 + y^2 \leq 4x + 4y$?

Р е ш е н и е. Перепишем это неравенство:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq 8,$$

или

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \leq 8.$$

Как теперь ясно, это соотношение показывает, что расстояние точки искомого множества от точки $(2, 2)$ меньше или равно $\sqrt{8}$. Очевидно, что точки, удовлетворяющие этому условию, заполняют круг радиуса $\sqrt{8}$ с центром в $(2, 2)$. Так как в соотношении допускается равенство, то граница круга тоже принадлежит искомому множеству.

7.5. Какие из точек $A(2, 2)$, $B(1, 1)$, $C(-1, -1)$ и $D(-1, 1)$ лежат внутри окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, вне этой окружности или на самой окружности?

Мы убедились в том, что окружность на плоскости можно задать с помощью некоторого уравнения. Таким же образом можно задавать и другие линии, только уравнения, разумеется, будут выглядеть иначе.

Мы уже говорили (см. стр. 25), что уравнение $x^2 - y^2 = 0$ задает пару прямых. Остановимся на этом подробнее. Если $x^2 - y^2 = 0$, то $x^2 = y^2$ и, следовательно, $|x| = |y|$. Обратно, если $|x| = |y|$, то $x^2 - y^2 = 0$; поэтому эти соотношения равносильны. Но абсолютная величина абсциссы точки — это расстояние ее от оси Oy , а абсолютная величина ординаты точки — расстояние ее от оси Ox . Значит, точки, для которых $|x| =$

$= |y|$, одинаково удалены от осей координат, т. е. лежат на двух биссектрисах углов, образованных этими осями. Ясно, что и обратно, — координаты любой точки на каждой из этих двух биссектрис удовлетворяют соотношению $x^2 = y^2$. Поэтому уравнение $x^2 - y^2 = 0$ мы называем уравнением совокупности этих двух биссектрис.

Вам, вероятно, известны и другие примеры задания линий с помощью уравнений. Например, уравнению $y = x^2$ удовлетворяют все точки некоторой кривой (рис. 35), и только точки этой кривой. Указанная кривая называется параболой, а уравнение $y = x^2$ является уравнением этой параболы.

Уравнению вида

$$ax + by + c = 0^1)$$

удовлетворяют все точки некоторой прямой и только точки этой прямой. Всякое уравнение вида $ax + by + c = 0$ является уравнением прямой. При разных конкретных числовых значениях параметров a , b и c получаются разные прямые (см. ниже стр. 38—39).

Вообще *уравнением некоторой линии* называется уравнение, которое обращается в тождество всякий раз, когда вместо x и y подставляют координаты любой точки этой линии, и не удовлетворяется, если подставить координаты точки, не лежащей на этой линии.

Зная уравнение линии, можно, не прибегая к чертежу, изучать ее геометрические свойства (как мы делали это с окружностями в упражнениях 7.1—7.5).

Например, даже не зная, какую линию задает уравнение

$$(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2, \quad (8)$$

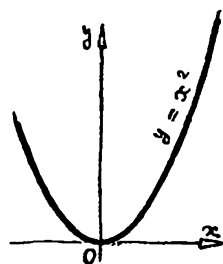


рис. 35



¹⁾ Здесь a , b , c — некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю.

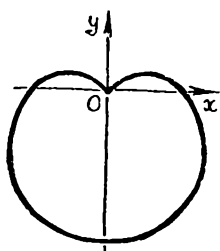


РИС. 36

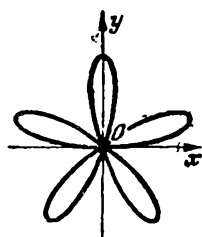


РИС. 37

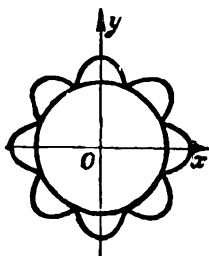


РИС. 38

мы можем сказать, что эта линия проходит через начало координат, потому что числа $(0, 0)$ удовлетворяют уравнению, а точка $(1, 1)$ не лежит на этой кривой, потому что $(1^2 + 1^2 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$.

7.6. Докажите, что кривая, задаваемая уравнением (8), симметрична относительно оси Oy .

У к а з а н и е. Докажите, что если точка $M(a, b)$ лежит на кривой (8), то и точка $M'(-a, b)$ тоже лежит на этой кривой.

Если Вам интересно, как выглядит кривая, задаваемая уравнением (8), посмотрите на рис. 36. Эта кривая называется *кардиоидой*, потому что она имеет форму сердца.

Если бы вычислительная машина могла чувствовать к кому-нибудь симпатию, то, вероятно, она бы передала ему в виде уравнения рисунок сердца, а может быть, преподнесла бы математический «букет» — уравнения кривых, изображенных на рис. 37—38; как видите, эти кривые, действительно, похожи на цветы. Уравнения этих «математических цветов» мы напишем позже, когда Вы познакомитесь с другими координатами, так называемыми полярными.

8. Прямая

Мы уже говорили (стр. 24), что прямую на координатной плоскости тоже можно задавать с помощью уравнения. В отличие от уравнения окружности, которое, как Вы видели, содержит квадраты координат x и y , уравнение прямой может содержать только первые степени x и y , т. е. является линейным уравнением относительно x и y .

Решим несколько задач на составление уравнений прямых.

8.1. Напишите уравнение биссектрисы угла AOB (рис. 39).

З а д а ч а. Прямая отсекает на осях координат отрезки, равные 1 (рис. 40). Найти зависимость между координатами любой точки этой прямой (т. е. составить уравнение этой прямой).

Р е ш е н и е. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на нашей прямой (рис. 41). Тогда $OM_1 = x$, $OM_2 = y$. Так как $\angle OAB = 45^\circ$, то $M_2B = M_2M = x$. Но $OM_2 + M_2B = 1$, откуда видно, что координаты точки $M(x, y)$ удовлетворяют соотношению

$$x + y = 1.$$

Проверим, что это соотношение удовлетворяется и в том случае, когда точка прямой лежит ниже оси Ox (например, точка $M'(x, y)$ на рис. 42). Действительно, для точки M' абсцисса x положительна и равна OM'_1 — длине отрезка OM'_1 , ордината y отрицательна и равна $-OM'_2$, где OM'_2 — длина отрезка OM'_2 . Из рис. 42 видно, что

$$OM'_1 - OM'_2 = BM'_2 - OM'_2 = 1,$$

откуда

$$OM'_1 + (-OM'_2) = 1, \text{ или } x + y = 1.$$

Следовательно, сумма положительного числа x и отрицательного числа y для точки $M'(x, y)$ тоже равна 1.

Проверьте самостоятельно, что соотношение $x + y = 1$ выполняется и для точек прямой AB , лежащих во второй четверти (т. е. для точек, у которых $x < 0$, а $y > 0$).

О т в е т. Координаты любой точки прямой AB , отсекающей на осях координат единичные отрезки, удовлетворяют соотношению $x + y = 1$. Это соотношение и является уравнением прямой AB . Очевидно, что уравнение прямой AB может быть записано и в другом виде, например, $y = -x + 1$.

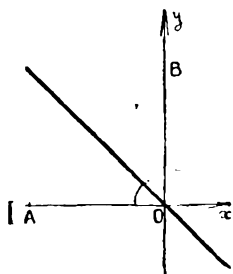


Рис. 39

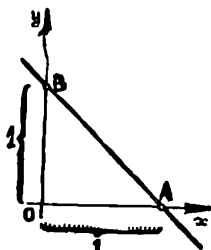


Рис. 40

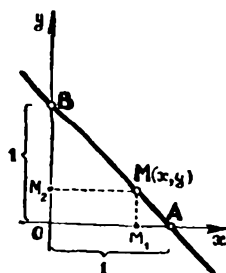


Рис. 41

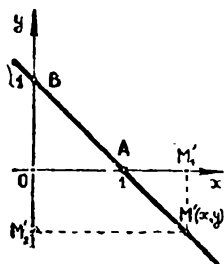


Рис 42

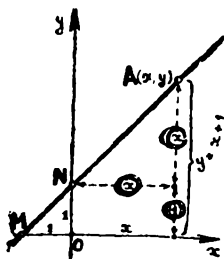


Рис 43

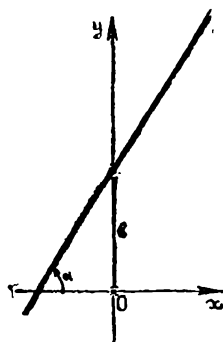


Рис 44

8.2. Найдите соотношение между координатами точек прямой MN (рис. 43), если $OM = ON = 1$.

У к а з а н и е. Из рис. 43 ясно, что для точки $A(x, y)$ ордината y больше абсциссы x на 1, т. е. $y = x + 1$.

Проверьте, что этому соотношению удовлетворяют координаты любой точки прямой MN , лежащей во второй и в третьей четвертях.

8.3. Нарисуйте множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют уравнению

$$|x| + |y| = 1.$$

8.4. Нарисуйте прямую по ее уравнению $y = -x$.

Положение прямой на плоскости определяется уравнением этой прямой. Поэтому мы будем говорить: «прямая $y = 3x + 1$ » или «прямая $x + y = 3$ » (подобно тому, как мы говорим «точка $(5, 3)$ » или «точка $(-1, 2)$ » и т. д.).

8.5. Нарисуйте на одном чертеже прямые: 1) —4), а также прямые 5) —8):

$$1) y = x + 1, \quad 5) +x + y = 1,$$

$$2) y = x - 1, \quad 6) +x - y = 1,$$

$$8) y = -x + 1, \quad 7) -x + y = 1,$$

$$4) y = -x - 1, \quad 8) -x - y = 1.$$

Сравните с упражнением 8.3.

Задача. Положение прямой определено, если задан угол α — угол наклона этой прямой к оси $Ox^1)$, и отрезок b , отсекаемый этой прямой на оси ординат²⁾ (рис. 44). Найдите соотношение, связывающее координаты точек этой прямой, т. е. найдите уравнение прямой, зная угол α и значение b .

Решение. Первый случай: угол α — острый (как на рис. 45). Пусть $M(x, y)$ — точка на прямой. Проведем

¹⁾ Под углом наклона прямой к оси Ox понимается угол, на который нужно повернуть ось Ox против часовой стрелки до совпадения с этой прямой.

²⁾ Точнее, нужно задать координату точки пересечения прямой с осью Oy .

BK параллельно Ox , тогда $\angle MBK = \alpha$ (см. рис. 45).

Из треугольника MBK имеем:

$$\frac{MK}{BK} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{т. е.} \quad \frac{y-b}{x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \alpha = k$. Тогда это соотношение можно переписать в виде:

$$y = kx + b.$$

Проверьте, что полученное соотношение выполняется и для координат точек прямой, расположенных так, как точки P и Q (рис. 46).

Итак, координаты точек прямой, отсекающей на оси Oy отрезок b и наклоненной к оси Ox под острым углом α , удовлетворяют соотношению $y = kx + b$, т. е. уравнение $y = kx + b$ является уравнением этой прямой.

Покажите, что если прямая пересекает ось Oy ниже начала координат, то ее уравнение пишется точно так же, только параметр b будет в этом случае отрицательным.

Второй случай: угол α — тупой (рис. 47). В этом случае для любой точки $M(x, y)$ прямой будет выполняться соотношение

$$\frac{y-b}{-x} = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

где α_1 — острый угол, равный $180^\circ - \alpha$ (см. рис. 47).

На рис. 47 разобран случай, когда $b > 0$ и точка $M(x, y)$ лежит во второй четверти (т. е. $x < 0, y > 0$). Разберите другие случаи самостоятельно.

Если обозначить $\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$, то из соотношения $\frac{y-b}{-x} = k_1$ получится соотношение $y = -k_1x + b$, которое и будет уравнением прямой, наклоненной к Ox под тупым углом.

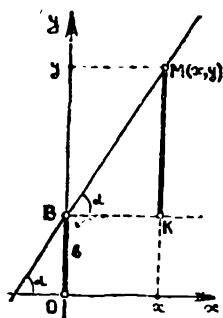


Рис. 45

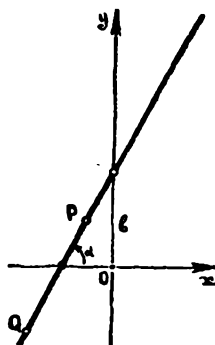


Рис. 46

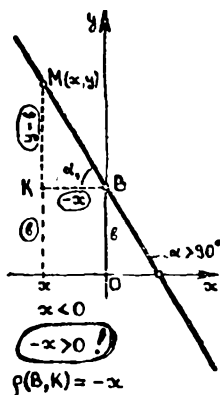


Рис. 47

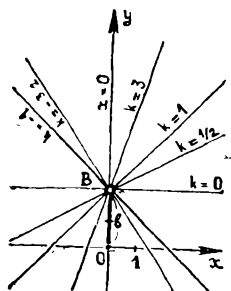


Рис 48

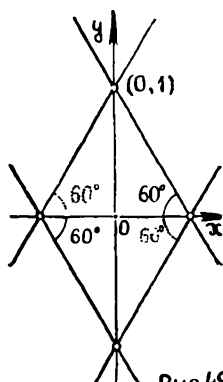


Рис 49

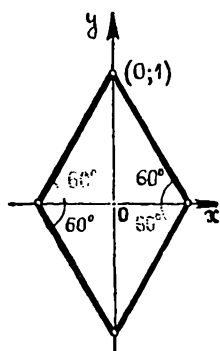


Рис.50

Итак, если известен α — угол наклона прямой к оси Ox и b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy , то можно сразу написать уравнение этой прямой в виде $y = kx + b$; если α — острый угол, то $k = \operatorname{tg} \alpha$, если α — тупой, то $k = -k_1 = -\operatorname{tg} \alpha_1$, где α_1 — острый угол, смежный с углом α . Коэффициент k называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение прямой, записанное в виде $y = kx + b$ — *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Мы не разобрали еще один случай: $\alpha = 90^\circ$ (прямая вертикальна). В этом случае уравнение прямой нельзя написать в виде $y = kx + b$: для точек вертикальной прямой x всегда один и тот же (равен нулю, если прямая проходит через точку $(0, b)$), а y — любой. Значит, уравнением этой прямой является соотношение $x = 0$.

Когда (в IX классе) Вы узнаете, что у тупых углов тоже есть тангенс, то станет понятно, что угловой коэффициент прямой всегда равен тангенсу угла наклона прямой к оси Ox : когда этот угол α острый, то k , его тангенс, положителен, когда α тупой, то его тангенс отрицателен и соответственно отрицателен угловой коэффициент прямой. У прямого угла не существует тангенса; соответственно, для вертикальной прямой нельзя написать уравнение с угловым коэффициентом.

Если в уравнении $y = kx + b$ менять коэффициент k , давая ему различные значения, как положительные, так и отрицательные, то соответствующая прямая будет вращаться как угодно вокруг точки $(0, b)$ — см. рис. 48. Единственное положение, которое она не сможет принять, — это вертикальное.

8.6. Напишите уравнение каждой из четырех прямых, изображенных на рис. 49.

8.7. Напишите соотношение, которому удовлетворяют точки фигуры, изображенной на рис. 50.

8.8. Напишите уравнение прямой, параллельной биссектрисе первого координатного угла и проходящей через точку $(0, -5)$.

8.9. Напишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 2x + 1$, и 1) проходящей через точку $(0, 2)$; 2) проходящей через точку $(1, -1)$.

У к а з а н и е. Учтите, что у параллельных прямых угловые коэффициенты одинаковы. Чтобы найти b во второй задаче, воспользуйтесь тем, что координаты точки $(1, -1)$ должны удовлетворять уравнению искомой прямой.

Напишем теперь уравнение прямой, отсекающей на осях какие-то отрезки a и b (на стр. 35 был разобран пример $a = 1, b = 1$).

Возьмем точку $M(x, y)$ на этой прямой (рис. 51) и посмотрим, какому соотношению будут удовлетворять ее координаты x и y . Из подобия треугольников MM_2B и AOB следует, что

$$\frac{x}{a} = \frac{b-y}{b}, \text{ откуда } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b — отрезки, отсекаемые прямой на осях координат.

Проверьте, что это соотношение удовлетворяется и для точек прямой, не лежащих в первой четверти.

Мы рассматривали случай, когда прямая пересекает положительную полуось Ox и положительную полуось Oy . Однако, оказывается, полученное нами уравнение может быть использовано и в других случаях. При этом если прямая пересекает какую-нибудь ось в отрицательной части, то соответствующий параметр a или b будет отрицательным.

8.10. Покажите, что координаты точек прямых, изображенных на рис. 52 и 53, удовлетворяют соотношениям вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Итак, если прямая AB пересекает ось Ox в точке $A(a, 0)$, а ось Oy в точке $B(0, b)$, то координаты точек этой прямой удовлетворяют соотношению

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

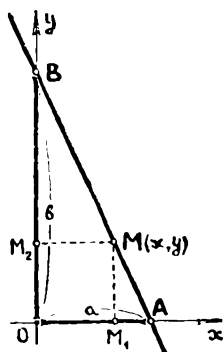


Рис. 51

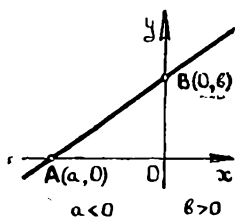


Рис. 52

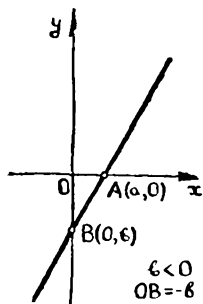


Рис. 53



Это соотношение называется *уравнением прямой в отрезках*. Параметры a и b могут здесь быть как положительными, так и отрицательными.

8.11. Напишите уравнение каждой из прямых, изображенных на рис. 49, используя уравнение прямой в отрезках.

8.12. 1) Найдите координаты точек пересечения прямой

$$y = 2x - 5$$

с осями координат.

Решение. Перепишем уравнение прямой в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, для чего перенесем член с x в правую часть и поделим обе части уравнения на свободный член (на -5):

$$-2x + y = -5, \quad \frac{-2x}{-5} + \frac{y}{-5} = 1,$$

а теперь перепишем окончательно

$$\frac{x}{5/2} + \frac{y}{-5} = 1.$$

О т в е т. Точка пересечения с Ox — это точка $(5/2, 0)$, точка пересечения с Oy — точка $(0, -5)$.

2) Какие отрезки отсекает прямая $y = 2x - 5$ на осях координат?

О т в е т. На оси Ox прямая отсекает отрезок, равный $5/2$, на оси Oy — отрезок, равный 5 единицам.

8.13. Назовите все случаи, когда для прямой нельзя написать уравнение в отрезках.

З а д а ч а. Как можно написать уравнение прямой, проходящей через точку $(2, 5)$?

Решение. Всякую прямую (кроме вертикальной) можно задать уравнением вида

$$y = kx + b.$$

Так как требуется, чтобы прямая проходила через точку $(2, 5)$, то должно выполняться равенство:

$$5 = k \cdot 2 + b.$$

Вычтем это тождество из уравнения $y = kx + b$; получим

$$y - 5 = k(x - 2).$$

Это уравнение при любом k дает некоторую прямую, проходящую через точку $(2, 5)$.

Действительно, если подставить вместо x и y числа 2 и 5, то и слева, и справа получится нуль, каково бы ни было k . Коэффициент k в этой задаче определить нельзя, так как не сказано, в каком направлении идет прямая. Таким образом, уравнение

$$y - 5 = k(x - 2)$$

выражает все множество прямых, проходящих через точку $(2, 5)$, за одним исключением: вертикальная прямая не может быть записана в таком виде ни при каком k . Но ее уравнение легко получить непосредственно: это будет $x = 2$.

Итак, любая прямая, проходящая через точку $(2, 5)$, записывается либо уравнением вида $y - 5 = k(x - 2)$, либо уравнением $x = 2$.



Задача. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $(2, 5)$ и $(-1, 3)$.

Решение. Воспользуемся только что полученным результатом: как всякая прямая, проходящая через точку $(2, 5)$, искомая прямая записывается в виде $y - 5 = k(x - 2)$. Здесь нам пока неизвестен коэффициент k . Но по условию прямая проходит и через точку $(-1, 3)$. Значит, выполняется равенство $3 - 5 = k(-1 - 2)$, откуда мы и найдем коэффициент k :

$$-2 = -3k, \quad k = \frac{2}{3}.$$

Теперь остается подставить найденное значение k в уравнение $y - 5 = k(x - 2)$. Получим:

$$y - 5 = \frac{2}{3}(x - 2).$$

О т в е т. Уравнение прямой, проходящей через точки (2, 5) и (— 1, 3), записывается в виде:

$$2x - 3y + 11 = 0, \text{ или } y = \frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

(а можно $\frac{x}{-11/2} + \frac{y}{11/3} = 1$).

8.14. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

О т в е т. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, можно написать по правилу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

8.15. Напишите уравнения сторон и диагоналей четырехугольника с вершинами в точках $A(1, 1)$, $B(2, -1)$, $C(1, 3)$ и $D(-2, 2)$.

У к а з а н и е. Для всех прямых, кроме одной, можно написать уравнения по правилу, полученному в упр. 8.14.

8.16. Воспользуйтесь правилом, полученным в упр. 8.14, для получения уравнения прямых в отрезках: напишите по этому правилу уравнение прямой, проходящей через точки $(a, 0)$ и $(0, b)$, и преобразуйте его к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

9. Алгебра и геометрия

Переводя геометрические понятия на язык координат, мы получаем возможность вместо геометрических задач рассматривать алгебраические. Оказывается, что после такого перевода большинство задач, связанных с прямыми и окружностями, приводит к уравнениям первой и второй степени, а для решения таких уравнений есть простые общие формулы.

Надо заметить, что к XVII веку, когда был изобретен метод координат, искусство решения алгебраических уравнений достигло высокого уровня. К этому времени, например, математики научились решать любые уравнения третьей и четвертой степени. Поэтому французский ученый Р. Де-

карт, открыв метод координат, сказал: «я решил все задачи», имея в виду геометрические задачи своего времени.

Проиллюстрируем простым примером сведение геометрических задач к алгебраическим.

Задача. Дан треугольник ABC ; найти центр окружности, описанной около этого треугольника.

Решение. Примем точку A за начало координат, ось абсцисс направим от A к B . Тогда точка B будет иметь координаты $(c, 0)$, где c — длина отрезка AB . Пусть точка C имеет координаты (q, h) , а центр искомой окружности — координаты (a, b) . Радиус этой окружности обозначим через R . Запишем в координатах, что точки $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ и $C(q, h)$ лежат на искомой окружности:

$$a^2 + b^2 = R^2,$$

$$(c - a)^2 + b^2 = R^2,$$

$$(q - a)^2 + (h - b)^2 = R^2.$$

Каждое из этих условий выражает тот факт, что расстояние точек $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ и $C(q, h)$ от центра окружности (a, b) равно радиусу. Эти условия легко получить также, если записать уравнение искомой окружности (окружности с центром в (a, b) и радиусом R), т. е.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

а затем в это уравнение вместо x и y подставить координаты точек A , B и C , лежащих на этой окружности.

Эта система трех уравнений с тремя неизвестными легко решается, и мы получаем:

$$a = \frac{c}{2}, \quad b = \frac{q^2 + h^2 - cq}{2h},$$

$$R = \frac{\sqrt{(q^2 + h^2)[(q - c)^2 + h^2]}}{2h}.$$

Задача решена, так как мы нашли координаты центра ¹⁾).

Отметим, что заодно мы получили формулу для вычисления радиуса окружности, описанной около треугольника. Эту формулу можно упростить, заметив, что

$$\sqrt{q^2 + h^2} = \rho(A, C),$$
$$\sqrt{(q - c)^2 + h^2} = \rho(B, C),$$

а число h равно высоте треугольника ABC , опущенной из вершины C . Если обозначить длины сторон BC и AC треугольника соответственно через a и b , то формула для радиуса примет красивый и удобный вид:

$$R = \frac{ab}{2h}.$$

Можно еще заметить, что $hc = 2S$, где S — площадь треугольника ABC , и тогда переписать нашу формулу в виде:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Сейчас мы хотим показать Вам задачу, которая интересна тем, что геометрическое решение ее довольно сложно; если же перевести ее на язык координат, решение становится совсем простым.

Задача. На плоскости даны точки A и B ; найти геометрическое место точек M , удаленных от A вдвое больше, чем от B .

Решение. Выберем систему координат на плоскости так, чтобы начало координат попало в точку A , а положительная полуось абсцисс пошла по AB . За единицу масштаба возьмем отрезок AB . Тогда точка A будет иметь координаты $(0,0)$, точка B — координаты $(1,0)$. Координаты точки M обозначим через (x, y) . Условие

¹⁾ Заметьте, что при решении этой задачи мы не прибегали к чертежу.

$\rho(A, M) = 2\rho(B, M)$ записывается в координатах так:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Мы получили уравнение искомого геометрического места точек. Чтобы понять, какое множество описывается этим уравнением, преобразуем его так, чтобы оно приняло знакомый Вам вид. Возведя обе части в квадрат, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем равенство

$$3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0.$$

Это равенство можно переписать так:

$$x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9} + y^2 = \frac{4}{9},$$

или так:

$$(x - \frac{4}{3})^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2.$$

Вы уже знаете, что это уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(\frac{4}{3}, 0)$ и радиусом равным $\frac{2}{3}$. Это значит, что искомое геометрическое место точек является окружностью (или ее частью ¹⁾).

Для нашего решения несущественно, что $\rho(A, M)$ именно в 2 раза больше $\rho(B, M)$, поэтому на самом деле решена более общая задача. Именно, доказано, что *геометрическое место точек M, отношение расстояний которых до данных точек A и B, постоянно*:

$$\frac{\rho(A, M)}{\rho(B, M)} = k \quad (9)$$

1) Чтобы доказать, что все точки окружности принадлежат нашему геометрическому месту, достаточно убедиться, что из справедливости каждого следующего равенства следует справедливость предшествующего, так что, в конце концов, если $(x - \frac{4}{3})^2 + y^2 = (\frac{2}{3})^2$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. Это и означает, что всякая точка полученной окружности действительно принадлежит нашему геометрическому месту.



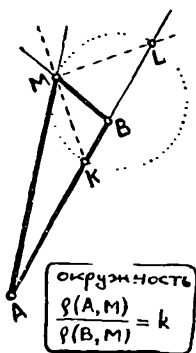


Рис 54

(k — заданное положительное число, не равное 1), является окружностью (рис. 54)¹⁾.

Чтобы убедиться в силе метода координат, попробуйте решить последнюю задачу геометрически.

У к а з а н и е. Проведите из точки M биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника AMB . Пусть K и L — точки пересечения этих биссектрис с прямой AB . Докажите, что положение этих точек не зависит от выбора точки M на искомом геометрическом месте точек. Докажите, что угол KML равен 90° .

Надо заметить, что с такими задачами умели справляться еще древние греки. Геометрическое решение этой задачи помещено в тракте «О кругах» древнегреческого математика Аполлония (II век до н. э.).

9.1. Найдите геометрическое место точек M , разность квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B равна данной величине c . При каких c задача имеет решение?

Предыдущие примеры показывают, как метод координат позволяет применять алгебру к решению геометрических задач. Мы уже немного показывали (стр. 19), что и обратно, с помощью метода координат иногда можно облегчить решение алгебраических задач, истолковав их геометрически. Приведем еще один пример такой задачи:

З а д а ч а. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

не имеет решений, имеет единственное решение, имеет бесчисленное множество решений? Какие еще случаи возможны?

¹⁾ Мы исключили случай $k = 1$. Вы, конечно, знаете, что в этом случае геометрическим местом (9) является прямая (точка M равноудалена от A и B). Докажите это аналитически.

Решение. Первое уравнение системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Второе уравнение — это уравнение прямой, отсекающей на осях отрезки, равные a (чтобы это увидеть, достаточно переписать уравнение в виде $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$). Решить систему — значит найти точки, координаты которых удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т. е. найти точки пересечения прямой $x + y = a$ и окружности. Из рис. 55 ясно, что при $a > \sqrt{2}$ и при $a < -\sqrt{2}$ прямая не пересекает окружности, т. е. система не имеет решений; при $a = \pm \sqrt{2}$ получаются касательные к окружности, т. е. система имеет единственное (двойное) решение; при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ прямая пересекает окружность, т. е. система имеет два решения. Других случаев не может быть.

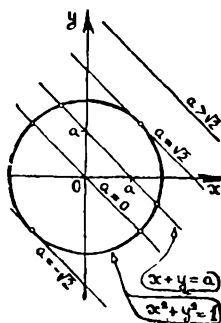


Рис. 55

10. Другие системы координат

Наряду с декартовой прямоугольной системой координат употребляются и другие системы координат на плоскости. На рис. 56 изображена декартова косоугольная система координат. Как определяются координаты точки в такой системе, ясно из рисунка; в некоторых случаях оказывается необходимым брать по осям координат разные единицы масштаба.

Есть координаты, более существенным образом отличающиеся от декартовых. Примером таких координат являются полярные координаты, о которых мы уже упоминали.

Полярные координаты точки на плоскости определяются следующим образом.

На плоскости берется числовая ось (рис. 57). Начало координат этой оси (точка O) называется *полюсом*, а сама ось — *полярной осью*. Для определения положения точки M достаточно указать два числа: ρ — *полярный радиус* (расстояние этой точки от полюса) и φ — *полярный угол*.¹⁾ (угол поворота от полярной оси до луча OM). На нашем рисунке

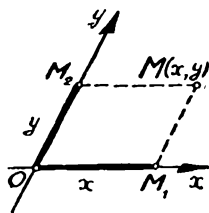


РИС. 56

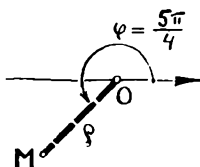


РИС.57

¹⁾ φ — это греческая буква, читается «фи».

полярный радиус $\rho = 3,5$, а полярный угол φ равен 225° , или $1) 5\pi/4$.

Итак, в полярной системе координат положение точки на плоскости задается двумя числами, указывающими направление, в котором находится точка, и расстояние до этой точки. Такой способ указания места очень прост и часто употребляется. Например, чтобы объяснить дорогу заблудившемуся в лесу человеку, ему говорят: «от горелой сосны (полюс) сверните на восток (направление), пройдете километра два (расстояние) и будет сторожка (точка)».

Кто занимался в туристических секциях, легко поймет, что хождение по азимуту основано на том же принципе, что и полярные координаты.

С помощью полярных координат можно тоже задавать на плоскости различные множества точек. Очень простым, например, будет уравнение окружности с центром в полюсе (рис. 58, а). Если радиус окружности равен R , то и полярный радиус любой точки окружности (и только точек на рассматриваемой окружности) тоже равен R , значит, уравнение этой окружности имеет вид

$$\rho = R,$$

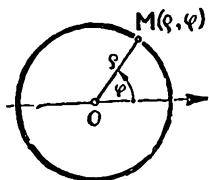
где R — некоторая постоянная величина (это иногда записывается так: $\rho = \text{const}$).

Какое множество получится, если рассмотреть уравнение

$$\varphi = \alpha,$$

где α — некоторое постоянное число (например, $1/2$, или $3\pi/2$)? Ответ ясен: точки, для которых φ постоянно и равно α , заполняют луч, выходящий из полюса под углом α к полярной оси (рис. 58, б).

а $\rho = \text{const}$



б $\varphi = \text{const}$

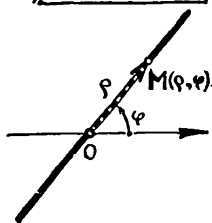


РИС.58



2) Для измерения углов φ в полярной системе координат мы наряду с градусной мерой будем применять так называемую *радианную*. В этом случае за единицу измерения углов принимается 1 *радиан* — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна 1 радиусу окружности. Полный угол 360° , опирающийся на всю окружность (радиуса 1), получает радианную меру 2π , угол в 180° — меру π ,

прямой угол — меру $\frac{\pi}{2}$, угол в 45° — меру $\pi/4$

и т. д. Радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3,14} \approx 57^\circ 17' 45''$.

Оказывается, что во многих вопросах (о некоторых из них пойдет речь в дальнейших наших выпусках) радианная мера значительно удобнее градусной.

Например, если $\alpha = 1/2$, то этот луч проходит под углом, равным примерно 28° к оси ¹⁾, а если $\alpha = 3\pi/2$, то луч направлен вертикально вниз, т. е. угол между положительным направлением оси и лучом равен 270° .

Разберем еще два примера. Уравнение

$$\rho = \varphi$$

изображает некоторую спираль (рис. 59). В самом деле, при $\varphi = 0$ имеем $\rho = 0$ (полюс), а с ростом φ величина ρ тоже растет, так что точка, поворачиваясь вокруг полюса (против часовой стрелки), в то же время удаляется от него.

Другую спираль изображает уравнение

$$\rho = 1/\varphi$$

(рис. 60). Здесь при φ , близком к 0, величина ρ велика, а при возрастании φ величина ρ убывает и мала при больших φ . Поэтому спираль при неограниченном возрастании φ «навертывается» на точку O .

Уравнения кривых в полярной системе Вам пока труднее понять, главным образом потому, что Вы не изучали тригонометрии. Если же Вы с ней немного знакомы, попробуйте понять, какие множества задают такие соотношения:

$$\rho = \sin \varphi, \rho (\cos \varphi + \sin \varphi) + 1 = 0^2).$$

Полярная система координат в некоторых случаях удобнее декартовой. Вот как, например, выглядит для полярных координат уравнение кардионды (см. рис. 36):

$$\rho = 1 - \sin \varphi.$$

Если Вы знаете немного тригонометрию, то по этому уравнению Вы гораздо легче представите себе кривую, чем по ее уравнению в декартовых координатах. И те красивые «цветы», которые изображены на рис. 37 и 38, задаются простыми уравнениями:

$$\rho = \sin 5\varphi \text{ (рис. 37),}$$

$$(\rho - 2)(\rho - 2 - |\cos 3\varphi|) = 0 \text{ (рис. 38).}$$

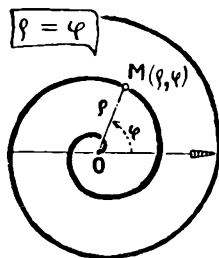


РИС. 59

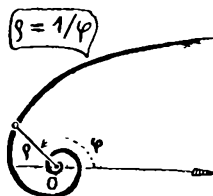


РИС. 60

¹⁾ Напоминаем, что число, служащее координатной φ , нужно истолковывать как радианную меру угла (см. сноску на стр. 48). Угол в $1/2$ радиана равен примерно 28° , угол в $3\pi/2$ радиана равен точно 270° .

²⁾ Так как под ρ мы понимаем расстояние точки от начала координат, то кривая будет существовать только для тех φ , для которых $\rho \geq 0$.

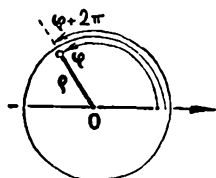


РИС. 61

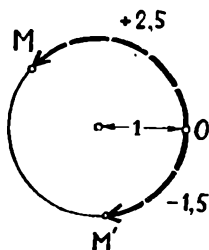


РИС. 62

Мы ничего не говорили о взаимной однозначности соответствия между точками плоскости и полярными координатами. Это объясняется тем, что такой взаимной однозначности просто нет. В самом деле, если Вы прибавите к углу φ любое целое кратное 2π (т. е. целое кратное 360°), то направление луча, очевидно, не изменится. Иными словами, точки с полярными координатами ρ, φ и $\rho, \varphi + 2k\pi$, где $\rho > 0$ и k — любое целое число, совпадают (рис. 61). Мы хотим привести еще один пример, где тоже нет однозначности соответствия.

Во вступлении мы говорили о том, что можно определять координаты на линиях и в § 1 рассмотрели координаты на самой простой линии — прямой. Сейчас мы покажем, как можно придумать координаты еще для одной линии — окружности. Для этого, как и в § 1, выберем на окружности некоторую точку — начало координат (точка O на рис. 62). Положительным направлением движения по окружности будем считать, как обычно, вращение против часовой стрелки. Единицу масштаба на окружности тоже можно выбрать естественным образом: выберем за единицу радиус этой окружности. Тогда координатой точки M на окружности будет длина дуги OM , взятая со знаком плюс, если вращение от O к M идет в положительном направлении, и со знаком минус в противном случае.

Сразу же бросается в глаза важное отличие этих координат от координат точек на прямой: здесь нет взаимной однозначности соответствия между числами (координатами) и точками. Ясно, что каждому числу соответствует одна определенная точка окружности. Однако пусть задано число a ; чтобы найти соответствующую ему точку на окружности (т. е. точку с координатой a), нужно отложить по окружности дугу длиной в a в положительном направлении, если число a положительное, и в отрицательном направлении, если a отрицательное. При этом, например, точка с координатой 2π совпадет с началом координат. В нашем примере точка O получилась, когда координата была равна нулю и когда координата была равна 2π . Таким образом, в другую сторону соответствие не является однозначным, т. е. одной и той же точке соответствует несколько разных чисел. Легко видеть, что каждой точке окружности соответствует бесконечное множество чисел¹⁾.

¹⁾ Вы можете заметить, что введенные координаты точки на окружности совпадают с углами φ полярной системы координат, если последние мерить в радианах. Поэтому здесь еще раз иллюстрируется неоднозначность полярных координат.

§ 3. Координаты точки в пространстве

11. Координатные оси и плоскости

Положение точки в пространстве можно тоже определить с помощью прямоугольных декартовых координат, только нужно взять уже не две числовые оси (как в случае плоскости), а три: ось x — ось абсцисс, ось y — ось ординат, ось z — ось аппликат. Эти оси проводят через одну и ту же точку — начало координат O — так, чтобы каждые две из них были взаимно перпендикулярны.

Точка O принимается за начало отсчета по каждой из трех осей. Направления осей выбирают обычно так, чтобы положительная полуось x совмещалась с положительной полуосью y вращением на 90° против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси z (рис. 63).

В пространстве, кроме координатных осей, удобно рассматривать еще координатные плоскости, т. е. плоскости, проходящие через две какие-либо координатные оси. Таких плоскостей три (рис. 64):

плоскость xy (проходящая через оси x и y) — множество точек вида $(x, y, 0)$, где x и y — любые числа;

плоскость xz (проходящая через оси x и z) — множество точек вида $(x, 0, z)$, где x и z — любые числа;

плоскость yz (проходящая через оси y и z) — множество точек вида $(0, y, z)$, где y и z — любые числа.

Теперь для каждой точки M пространства можно найти три числа x , y и z , которые будут служить ее координатами.

Чтобы найти первое число x , проведем через точку M плоскость, параллельную координатной плоскости yz (проведенная плоскость будет одновременно перпендикулярна к оси x). Точка пересечения этой

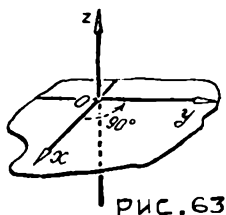


рис. 63

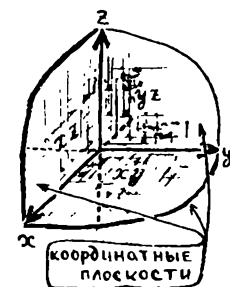


рис. 64

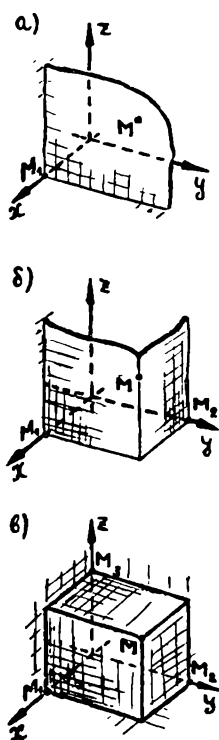


Рис. 65



плоскости с осью x (точка M_1 на рис. 65, а) имеет на этой оси координату x . Это число x — координата точки M_1 на оси x — называется *абсциссой* точки M .

Чтобы найти вторую координату, через точку M проводят плоскость, параллельную плоскости xz (перпендикулярную к оси y), находят на оси y точку M_2 (рис. 65, б). Число y — координата точки M_2 на оси y — называется *ординатой* точки M .

Аналогично, проведя через точку M плоскость, параллельную плоскости xy (перпендикулярную к оси z), находят число z — координату точки M_3 (рис. 65, в) на оси z . Это число z называется *аппликатой* точки M .

Таким образом, мы каждой точке пространства поставили в соответствие определенную тройку чисел — ее координаты: абсциссу, ординату и аппликату.

Обратно, каждой тройке чисел (x, y, z) , заданных в определенном порядке (сначала x , затем y , потом z), можно поставить в соответствие определенную точку M пространства. Для этого надо воспользоваться описанным построением, проделав его с конца: отметить на осях точки M_1 , M_2 и M_3 , имеющие на этих осях соответственно координаты x , y и z , а затем провести через эти точки плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точка пересечения этих трех плоскостей и будет искомой точкой M . Очевидно, что числа (x, y, z) будут служить ее координатами.

Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие¹⁾ между точками пространства и упорядоченными тройками чисел (координат этих точек).

Освоиться с координатами в пространстве Вам будет труднее, чем с координатами

¹⁾ Определение взаимно однозначного соответствия см. на стр. 10.

на плоскости: для изучения координат в пространстве нужно немного знать геометрию в пространстве — стереометрию. Необходимые для понимания координат в пространстве сведения, которые Вы легко поймете в силу их простоты и наглядности, получают в курсе стереометрии несколько более строгое обоснование.

В этом курсе можно будет доказать, что точки M_1 , M_2 и M_3 , построенные как точки пересечения осей координат с плоскостями, проведенными через точку M параллельно плоскостям координат, являются проекциями точки M на оси координат, т. е. служат основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на оси координат. Так что для координат в пространстве можно дать определение, аналогичное определению координат точки на плоскости, а именно:

Координатами точки M в пространстве называются координаты проекций этой точки на координатные оси на этих осях. Абсциссой точки M называется координата x точки M_1 (см. рис. 65, а) — проекции точки M на ось x . Ординатой точки M называется координата y точки M_2 (см. рис. 65, б) — проекции точки M на ось y . Аппликатой точки M называется координата z точки M_3 (см. рис. 65, в) — проекции точки M на ось z .

Можно показать, что многие формулы, выведенные для плоскости, нужно только немного видоизменить для случая пространства.

Так, например, расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(Вывод этой формулы очень похож на вывод аналогичной формулы для плоскости. Попробуйте сделать его самостоятельно.)



В частности, расстояние точки $A(x, y, z)$ от начала координат $O(0, 0, 0)$ выражается формулой

$$\rho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

11.1. Возьмем восемь точек: $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, -1, -1)$.

1) Какая из точек наиболее удалена от точки $(1, 1, 1)$? Найдите расстояние от этой точки до точки $(1, 1, 1)$.

2) Какие точки лежат ближе всего к точке $(1, 1, 1)$? Каково расстояние от этих точек до точки $(1, 1, 1)$?

11.2. Нарисуйте куб. Оси координат направьте по трем ребрам, выходящим из одной какой-либо вершины. За единицу масштаба возьмите ребро куба. Обозначьте вершины куба буквами $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$, как на рис. 66.

1) Найдите координаты всех вершин куба.

2) Найдите координаты середины ребра CC_1 .

3) Найдите координаты точки пересечения диагоналей грани AA_1B_1B .

11.3. Чему равно расстояние от вершины $(0, 0, 0)$ куба задачи 11.2 до точки пересечения диагоналей грани BB_1C_1C ?

11.4. Как Вы думаете, какие из перечисленных точек

$A(1, 0, 5)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1/3, 3/4, 2/5)$,

$D(7/5, 1/2, 3/2)$, $E(2/5, -1/2, 0)$,

$F(1, 1/2, 1/3)$

лежат внутри куба задачи 11.2, а какие вне его?

11.5. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри куба задачи 11.2 и на его границе.

О т в е т. Координаты x, y, z точек, лежащих внутри рассматриваемого куба и на его границе, могут принимать числовые значения от нуля до единицы включительно, т. е. удовлетворяют соотношениям:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1.$$

12. Задание фигур в пространстве

Так же как на плоскости, координаты в пространстве дают возможность задавать с помощью чисел и числовых соотношений не только точки, но и линии, поверхности

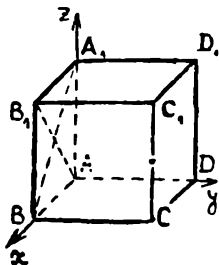


РИС. 66

и другие множества точек. Посмотрим, например, какое множество точек получится, если задать только две координаты, а третью считать произвольной. Условия

$$x = a, y = b,$$

где a и b — заданные числа (например, $a = 5, b = 4$), задают в пространстве прямую, параллельную оси z (рис. 67). Все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу и одну и ту же ординату. Координата z может принимать любые значения.

Точно так же условия

$$y = b,$$

$$z = c$$

определяют прямую, параллельную оси x (рис. 68); условия

$$z = c,$$

$$x = a$$

— прямую, параллельную оси y (рис. 69).

Посмотрим, какое множество точек получится, если задать только одну координату, например

$$z = 1.$$

Ответ ясен из рис. 70: это плоскость, параллельная координатной плоскости xy (т. е. плоскости, проходящей через ось x и ось y) и отстоящая от нее на расстоянии 1 в направлении положительной полуоси z .

Разберем еще несколько примеров, показывающих, как можно задавать в пространстве различные множества с помощью уравнений и других соотношений между координатами.

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (10)$$

Поскольку расстояние точки (x, y, z) от начала координат задается выражением $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то ясно, что в переводе на геометрический язык соотношение (10) означает, что точка с координатами (x, y, z) , удовлетворяющими этому соотношению,

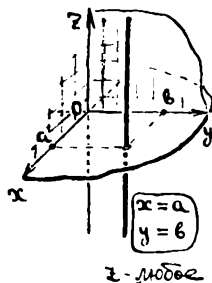


РИС. 67

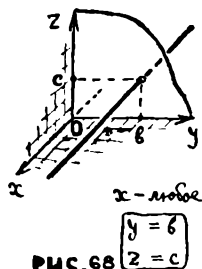


РИС. 68

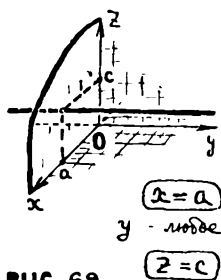


РИС. 69

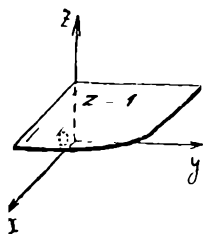


рис 70

находится на расстоянии R от начала координат. Значит, множество всех точек, для которых выполняется соотношение (10), это поверхность шара — сфера с центром в начале координат и радиусом R .

2. Рассмотрим, где расположены точки, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1?$$

Так как это соотношение означает, что расстояние точки (x, y, z) от начала координат меньше единицы, то искомое множество — это множество точек, лежащих внутри шара с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

3. Какое множество точек задается уравнением

$$x^2 + y^2 = 1? \quad (11)$$

Рассмотрим сначала только точки плоскости xy , удовлетворяющие этому соотношению, т. е. точки, для которых $z = 0$. Тогда уравнение (11), как мы видели раньше (стр. 31), задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. У каждой точки этой окружности координата z равна нулю, а координаты x и y удовлетворяют соотношению (11). Например, точка

$$P\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

удовлетворяет этому уравнению (рис. 71). Однако, зная эту одну точку, мы можем найти сразу много других точек, удовлетворяющих тому же уравнению. Действительно, так как в уравнение (11) не входит z , то и точка $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 10\right)$ удовлетворяет уравнению, и точка $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -5\right)$, и вообще все точки

$$Q\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, z\right),$$

где значение координаты z совершенно произвольно. Все эти точки лежат на прямой,

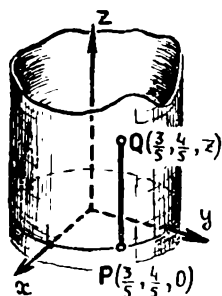


Рис. 71

проходящей через точку $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ параллельно оси z .

Таким же образом из каждой точки

$$(x^*, y^*, 0)$$



нашей окружности, лежащей на плоскости xy , мы можем получить много точек, удовлетворяющих уравнению (11). Для этого проведем через эту точку окружности прямую, параллельную оси z . Все точки этой прямой будут иметь x и y такие же, как и у точки окружности, а z может быть любым числом, т. е. это будут точки вида

$$(x^*, y^*, z).$$

Но поскольку z в уравнение (11) не входит, а числа $(x^*, y^*, 0)$ уравнению удовлетворяют, то и числа (x^*, y^*, z) тоже удовлетворяют уравнению (11). Ясно, что таким образом можно получить всякую точку, удовлетворяющую уравнению (11).

Итак, множество точек, определяемое уравнением (11), получается следующим образом: берем на плоскости xy окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 1, и через каждую точку этой окружности проводим прямую, параллельную оси z . Мы получаем так называемую *цилиндрическую поверхность* (рис. 71).

4. Мы видели, что одно уравнение задает в пространстве, вообще говоря, некоторую поверхность. Но это не всегда так.

Например, уравнению

$$x^2 + y^2 = 0$$

удовлетворяют только точки линии — оси z , так как из уравнения следует, что x и y равны нулю, а все точки, для которых эти координаты равны нулю, расположены на оси z .

Уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

изображает точку (начало координат),
а уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1$$

соответствует пустое множество.

5. Что будет, если рассмотреть точки, координаты которых удовлетворяют не одному уравнению, а системе уравнений?

Рассмотрим, например, такую систему:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 4, \\ z &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Точки, удовлетворяющие первому уравнению, заполняют поверхность сферы радиуса 2 с центром в начале координат. Точки, удовлетворяющие второму уравнению, заполняют плоскость, параллельную плоскости xy и расположенную от нее на расстоянии 1 в положительную сторону оси z . Точки, удовлетворяющие и первому, и второму уравнению, должны лежать и на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

и на плоскости

$$z = 1,$$

т. е. лежать на их линии пересечения. Таким образом, эта система задает окружность, являющуюся линией пересечения сферы и плоскости (рис. 72).

Мы видим, что каждое из уравнений системы задает поверхность, а оба уравнения вместе, т. е. система, задают линию.

Вопрос. Какие из указанных ниже точек лежат на первой поверхности, какие на второй, а какие на линии их пересечения:

$$\begin{aligned} A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), & \quad B(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1), \\ C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), & \quad D(1, \sqrt{3}, 0), \\ E(0, \sqrt{3}, 1), & \quad F(-1, -\sqrt{2}, 1)? \end{aligned}$$

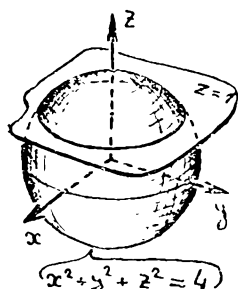


Рис. 72

6. Как задать в пространстве окружность, расположенную в плоскости xz с центром в начале координат и радиусом 1?
Уравнение

$$x^2 + z^2 = 1$$

определяет в пространстве, как Вы уже видели, цилиндрическую поверхность. Чтобы получить только точки нужной нам окружности, к этому уравнению надо добавить условие

$$y = 0,$$

выделив тем самым из всех точек цилиндра точки, лежащие на плоскости xz (рис. 73). Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

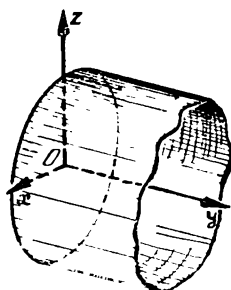


Рис. 73

12.1. Какие множества точек задают в пространстве соотношения:

- 1) $z^2 = 1$;
- 2) $y^2 + z^2 = 1$;
- 3) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$?

12.2. Имеются три системы уравнений:

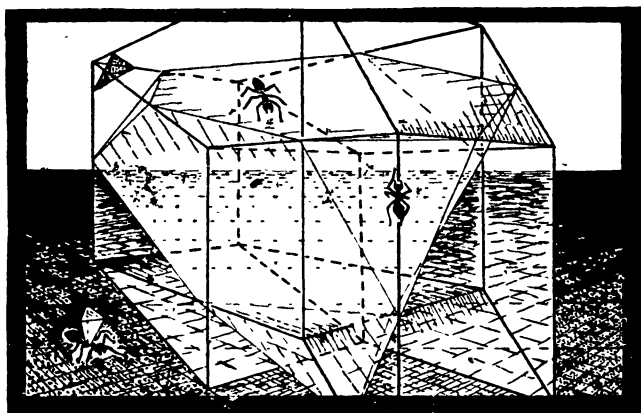
$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ y^2 + z^2 &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ x &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} y^2 + z^2 &= 1, \\ x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Какие из этих систем определяют одну и ту же линию, а какие разные?

12.3. Как задать в пространстве биссектрису угла xOy ? Какое множество будет задавать в пространстве одно уравнение $x = y$?



II ГЛАВА

§ 1. Вступление

Теперь Вы уже знаете кое-что о методе координат и мы можем поговорить с Вами об интересных вещах, больше связанных с современной математикой.

13. Немного общих рассуждений

Алгебра и геометрия, которые сейчас большинство школьников воспринимают как совершенно разные науки, на самом деле очень близки. С помощью метода координат можно было бы изложить весь школьный курс геометрии без единого чертежа, используя только числа и алгебраические операции. Курс планиметрии начинался бы словами: «Назовем точкой пару чисел (x, y) ...». Далее можно было бы определить окружность как совокупность точек, удовлетворяющих уравнению вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Прямой ли-

нией называлась бы совокупность точек, удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$. Многие другие фигуры можно было бы также охарактеризовать системами уравнений и неравенств. Все геометрические теоремы превратились бы при этом в некоторые алгебраические соотношения. В наших следующих выпусках мы расскажем подробнее, как это делается.

Установление связи между алгеброй, с одной стороны, и геометрией, с другой, было, по существу, революцией в математике. Оно восстановило математику как единую науку, в которой нет «китайской стены» между отдельными ее частями. Создателем метода координат считают французского философа и математика Рене Декарта (1596—1650). В последней части большого философского трактата Декарта, вышедшей в 1637 году, давались описание метода координат и его применение к решению геометрических задач. Развитие идей Декарта привело к возникновению особой ветви математики, которую теперь называют аналитической геометрией.

Само это название выражает основную идею теории. Аналитическая геометрия — это та часть математики, которая решает геометрические задачи аналитическими (т. е. алгебраическими) средствами. Хотя аналитическая геометрия является сейчас уже вполне развившимся и законченным разделом математики, идеи, лежащие в ее основе, породили новые отрасли математики. Возникла и развивается алгебраическая геометрия, которая изучает свойства линий и поверхностей, заданных алгебраическими уравнениями. Эту часть математики никак нельзя считать законченной. Как раз в последние годы в ней получены новые фундаментальные результаты, оказавшие большое влияние и на другие разделы математики.

14. Геометрия помогает считать

При решении геометрических задач на первый план выступает одна сторона метода координат — аналитическое истолкование геометрических понятий, перевод геометрических образов и соотношений на язык чисел. Однако другая сторона метода координат — геометрическая интерпретация чисел и числовых соотношений — приобрела не менее важное значение. Знаменитый математик Герман Минковский (1864—1909) использовал геометрический подход для решения уравнений в целых числах, и математики его времени были поражены тем, насколько простыми и ясными оказались при этом некоторые, казавшиеся раньше очень трудными вопросы теории чисел.

Разберем один совсем простой пример, показывающий, как геометрия помогает решать алгебраические задачи.

Задача. Рассмотрим неравенство

$$x^2 + y^2 \leq n,$$

где n — некоторое целое положительное число. Спрашивается, сколько решений в целых числах (N) имеет это неравенство?

Решение. Для небольших значений n на этот вопрос легко ответить. Например, при $n = 0$ есть только одно решение: $x = 0, y = 0$. При $n = 1$ к этому решению прибавляется еще четыре: $x = 0, y = 1$; $x = 1, y = 0$; $x = 0, y = -1$ и $x = -1, y = 0$. Значит, при $n = 1$ всего будет пять решений.

При $n = 2$ кроме уже перечисленных, имеется еще четыре решения: $x = 1, y = 1$; $x = -1, y = 1$; $x = 1, y = -1$; $x = -1, y = -1$. Всего при $n = 2$ имеется 9 решений. Продолжая таким образом, мы можем составить таблицу.

Таблица

n	N	N/n
0	1	—
1	5	5
2	9	4,5
3	9	3
4	13	3,25
5	21	4,2
10	37	3,7
20	69	3,45
50	161	3,22
100	317	3,17

Мы видим, что число решений N растет с возрастанием n , но угадать точный закон изменения N довольно трудно. Можно предположить, глядя на правую колонку таблицы, что отношение N/n с возрастанием n стремится к некоторому числу.

С помощью геометрической интерпретации мы сейчас покажем, что это действительно так и что отношение N/n стремится к известному Вам числу $\pi = 3,14159265\dots$

Будем рассматривать пару чисел (x, y) как точку на плоскости (с абсциссой x и ординатой y). Неравенство $x^2 + y^2 \leq n$ означает, что точка (x, y) принадлежит кругу K_n радиуса \sqrt{n} с центром в начале координат (см. рис. 74, на котором взято $n = 31$). Таким образом, наше неравенство имеет столько решений в целых числах, сколько точек с целыми координатами попадает внутрь круга K_n или на его границу.

Геометрически очевидно, что точки с целыми координатами «равномерно» распределены на плоскости и что на единицу площади приходится одна точка. Поэтому ясно, что число решений должно быть примерно равно площади круга. Таким образом, мы получаем приближенную формулу:

$$N \approx \pi n.$$

Приведем краткое доказательство этой формулы. Разобьем плоскость на единичные квадратики прямыми, параллельными осям координат; пусть целочисленные точки будут вершинами этих квадратиков. Пусть внутри круга K_n оказалось N целочисленных точек. Каждой из этих точек поставим в соответствие единичный квадратик, для которого она служит правой верхней вершиной. Фигуру, образованную этими квадратиками, обозначим через A_n (рис. 75). Очевидно, что площадь A_n равна N (т. е. числу составляющих эту фигуру квадратиков).

Сравним площадь этой фигуры с площадью круга K_n . Вместе с кругом K_n рассмотрим еще два круга с центром в начале координат: круг K'_n радиуса $\sqrt{n} - \sqrt{2}$ и круг K''_n радиуса $\sqrt{n} + \sqrt{2}$.

$$x^2 + y^2 \leq n$$

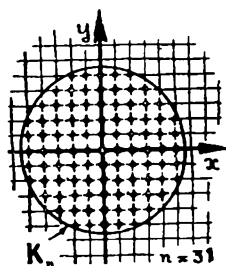


РИС. 74

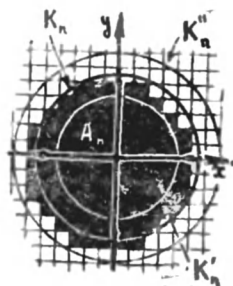


РИС. 75

Фигура A_n целиком лежит в круге K_n'' и содержит внутри себя круг K_n' . (Докажите это самостоятельно, используя теорему о том, что в треугольнике сторона меньше суммы двух других сторон.) Поэтому площадь A_n больше площади K_n' и меньше площади K_n'' , т. е.

$$\pi(\sqrt{n} - \sqrt{2})^2 < N < \pi(\sqrt{n} + \sqrt{2})^2.$$

Отсюда получаем нашу приближенную формулу $N \approx \pi n$ вместе с оценкой ее погрешности:

$$|N - \pi n| < 2\pi(\sqrt{2n} + 1).$$

Теперь поставим аналогичную задачу для трех неизвестных: сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq n?$$

Ответ получается очень быстро, если опять использовать геометрическую интерпретацию. Число решений задачи приблизительно равно объему шара радиуса \sqrt{n} , т. е. $\frac{4}{3} \pi n \sqrt{n}$. Получить такой результат чисто алгебраически было бы трудно.

15. Нужно вводить четырехмерное пространство

Но как быть, если нам требуется найти число целочисленных решений неравенства

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n,$$

в котором четыре неизвестных? При решении этой задачи для двух и трех неизвестных мы использовали геометрическую интерпретацию. Решение неравенства с двумя неизвестными, т. е. пару чисел, мы рассматривали как точку на плоскости; решение неравенства с тремя неизвестными, т. е. тройку чисел, — как точку в пространстве. Нельзя ли и дальше использовать, этот прием? Тогда четверку чисел (x, y, z, t) нужно считать точкой некоторого простран-

ства, которое имеет четыре измерения (*четырёхмерного пространства*). Неравенство $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq n$ можно тогда рассматривать как условие того, что точка (x, y, z, t) лежит внутри четырёхмерного шара радиуса \sqrt{n} с центром в начале координат. Далее нужно будет разбить четырёхмерное пространство на четырёхмерные кубики. Наконец, нам понадобится вычисление объема четырёхмерного шара ¹⁾. Иными словами, мы должны начать развивать геометрию четырёхмерного пространства.

Не будем делать всего этого в данном выпуске. Мы сможем лишь немножко приоткрыть дверь в четырёхмерное пространство и познакомить Вас с простейшей фигурой в нем — с четырёхмерным кубом.

Вас наверное интересуют вопросы: насколько серьезно можно говорить об этом воображаемом четырёхмерном пространстве, насколько можно строить геометрию этого пространства по аналогии с обычной геометрией, в чем будет сходство и в чем различие между трехмерной и четырёхмерной геометрией. Изучая эти вопросы, математики получили такой ответ:

Да, такую геометрию развивать можно, она во многом похожа на обычную. Более того, она содержит в себе обычную геометрию как составную часть, подобно тому как стереометрия (геометрия в пространстве) содержит в себе планиметрию. Но, конечно, геометрия четырёхмерного простран-

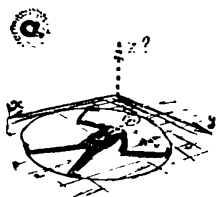
¹⁾ В наших выпусках мы не будем заниматься выводом формулы для вычисления объема четырёхмерного шара. Однако мы ее здесь приведем.

Объем четырёхмерного шара равен $\frac{\pi^2 R^4}{2}$.

Для сравнения укажем еще, что объем пятимерного шара равен $\frac{8\pi^3 R^5}{15}$, шестимерного $\frac{\pi^3 R^6}{6}$, семимерного $\frac{16\pi^3 R^7}{105}$.

ства будет иметь и очень существенные отличия от обычной геометрии. Очень интересно об этих особенностях четырехмерного мира рассказал писатель-фантаст Герберт Уэллс в одном из своих рассказов.

Но мы покажем сейчас, что эти особенности по существу очень похожи на те особенности, которыми отличается геометрия трехмерного пространства от геометрии двумерной плоскости.

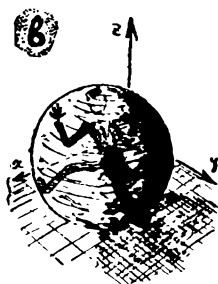


16. Особенности четырехмерного пространства

Нарисуйте на плоскости круг и представьте себя в виде воображаемого существа двумерного мира, которое может двигаться по плоскости, но не имеет права выходить в пространство. (Вы даже не знаете, что пространство существует, и не можете его вообразить.) Тогда граница круга — окружность — будет для Вас непреодолимой преградой: Вы не сможете выйти из круга, ибо окружность будет всюду преграждать Вам путь (рис. 76, а).



Теперь представьте, что эта плоскость с нарисованным кругом помещена в трехмерное пространство и что Вы догадались о существовании третьего измерения. Теперь Вы, конечно, без труда выйдете за пределы круга, например, просто перешагнете через окружность (рис. 76, б).



Пусть теперь Вы — существо трехмерного мира. Пусть Вы находитесь внутри шара, граница которого (сфера) для Вас непроходима. Тогда Вы не сможете выйти за пределы этого шара (рис. 76, в). Но если шар помещен в четырехмерное пространство и Вы догадались о существовании четвертого измерения, то Вы без всяких усилий сможете выйти за пределы шара.

Ничего особенно мистического в этом нет — просто граница трехмерного шара

РИС.76

(сфера) не разбивает четырехмерного пространства на две части, хотя трехмерное пространство она разбивает. Это вполне аналогично тому, что граница круга (окружность) не разбивает трехмерного пространства на две части, хотя плоскость (в которой она лежит) эта окружность разбивает.

Еще один пример: ясно, что две симметричные друг другу фигуры на плоскости нельзя совместить, если их разрешается лишь перемещать, не выводя из плоскости. Однако сидящая бабочка может сложить крылья, выводя их из горизонтальной плоскости в вертикальную (см. рисунок на последней странице обложки). Так же и в пространстве трех измерений нельзя совместить симметричные пространственные фигуры. Например, как ни верти, левую перчатку нельзя превратить в правую, хотя они являются равными геометрическими фигурами. А в пространстве четырех измерений трехмерные симметричные фигуры можно совместить подобно тому, как плоские симметричные фигуры совмещаются, если их вывести в трехмерное пространство.

Поэтому нет ничего удивительного в том, что герой вышеупомянутого рассказа Уэллса после своего путешествия в четырехмерное пространство оказался перевернутым, симметричным самому себе: сердце у него, например, оказалось справа. Это произошло потому, что выйдя в четырехмерное пространство, он вывернулся в нем на другую сторону (подобно тому, как левая перчатка, вывертываясь наизнанку, превращается в правую).

17. Немного физики

Четырехмерная геометрия оказалась чрезвычайно полезным и просто незаменимым аппаратом для современной физики. Без аппарата многомерной воображаемой

геометрии было бы очень трудно изложить и использовать такой важный раздел современной физики, как теория относительности Альберта Эйнштейна.

Любой математик может позавидовать Минковскому, который после того, как он очень удачно использовал геометрию в теории чисел, сумел еще раз с помощью наглядных геометрических соображений внести ясность в трудные математические вопросы — на этот раз касающиеся теории относительности. В основе теории относительности лежит идея о неразрывной связи пространства и времени. Поэтому, естественно считать момент времени, в который происходит какое-либо событие, четвертой координатой этого события наряду с первыми тремя, определяющими точку пространства, в которой происходит это событие.

Получаемое так четырехмерное пространство называется *пространством Минковского*. С описания этого пространства начинается сейчас любой курс теории относительности. Открытие Минковского состоит в том, что основные формулы теории относительности — формулы Лоренца, записанные на языке координат для этого специального четырехмерного пространства, являются чрезвычайно простыми.

Таким образом, для современной физики оказалось большой удачей, что ко времени открытия теории относительности математики подготовили удобный, компактный и красивый аппарат многомерной геометрии, который в ряде случаев значительно упрощает решение задач.

§ 2. Четырехмерное пространство

В заключение мы, как и обещали, расскажем Вам немного о геометрии четырехмерного пространства.

При построении геометрии на прямой, на плоскости и в трехмерном пространстве

у нас есть две возможности: либо излагать материал с помощью наглядных представлений (этот способ характерен для школьного курса, поэтому трудно себе представить учебник геометрии без чертежей), либо — и эту возможность дает нам метод координат — излагать его чисто аналитически, назвав, например, точкой плоскости в курсе планиметрии пару чисел (координаты этой точки), а точкой пространства — тройку чисел.

При введении четырехмерного пространства первая возможность у нас отсутствует. Мы не можем непосредственно пользоваться наглядными геометрическими представлениями — ведь окружающее нас пространство имеет всего три измерения. Однако вторая дорога для нас не закрыта. В самом деле, мы определяем точку прямой как число, точку плоскости как пару чисел, точку трехмерного пространства как тройку чисел. Поэтому совершенно естественно построить геометрию четырехмерного пространства, определив точку этого воображаемого пространства как четверку чисел. Под геометрическими фигурами в таком пространстве нужно будет понимать некоторые множества точек (как, впрочем, и в случае обычной геометрии). Перейдем теперь к точным определениям.

18. Координатные оси и плоскости

О п р е д е л е н и е. *Точкой* четырехмерного пространства называется упорядоченная ¹⁾ четверка чисел (x, y, z, t) .

Что считать в пространстве четырех измерений координатными осями и сколько их?



¹⁾ Мы говорим «упорядоченная», так как при разном расположении одних и тех же чисел в четверке получаются разные точки: например, точка $(1, -2, 3, 8)$ отлична от точки $(3, 1, 8, -2)$.

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся на время к плоскости и трехмерному пространству.

На плоскости (т. е. в пространстве двух измерений) координатные оси — это множества точек, у которых одна из координат может иметь любое числовое значение, а вторая равна нулю. Так, ось абсцисс — это множество точек вида $(x, 0)$, где x — любое число.

Например, на оси абсцисс лежат точки $(1, 0)$, $(-3, 0)$, $(\frac{5}{3}, 0)$, а точка $(\frac{1}{5}, 2)$ не лежит на оси абсцисс. Ось ординат плоскости — это множество точек вида $(0, y)$, где y — любое число.

В трехмерном пространстве есть три оси:

ось x — это множество точек вида $(x, 0, 0)$, где x — любое число;

ось y — множество точек вида $(0, y, 0)$, где y — любое число;

ось z — множество точек вида $(0, 0, z)$, где z — любое число.

В четырехмерном пространстве, состоящем из всех точек вида (x, y, z, t) , где x, y, z, t — любые числа, естественно считать *координатными осями* такие множества точек, у которых одна из координат принимает любые числовые значения, а остальные равны нулю. Тогда ясно, что в четырехмерном пространстве есть четыре координатные оси:

ось x — это множество точек вида $(x, 0, 0, 0)$, где x — любое число;

ось y — это множество точек вида $(0, y, 0, 0)$, где y — любое число;

ось z — это множество точек вида $(0, 0, z, 0)$, где z — любое число, и

ось t — это множество точек вида $(0, 0, 0, t)$, где t — любое число.

В трехмерном пространстве, кроме координатных осей, имеются еще *координатные плоскости*. Это — плоскости, проходящие через две какие-либо координатные оси.

натные оси. Например, плоскость yz — это плоскость, проходящая через ось y и ось z .

Всего в трехмерном пространстве есть три координатные плоскости:

плоскость xu — множество точек вида $(x, y, 0)$, где x и y — любые числа;

плоскость yz — множество точек вида $(0, y, z)$, где y и z — любые числа;

плоскость xz — множество точек вида $(x, 0, z)$, где x и z — любые числа.

Естественно и в четырехмерном пространстве называть *координатными плоскостями* множества точек, у которых какие-либо две из четырех координат принимают любые числовые значения, а остальные две равны нулю. Например, множество точек вида $(x, 0, z, 0)$ мы будем называть координатной плоскостью xz четырехмерного пространства. Сколько же всего таких плоскостей?

Это нетрудно сообразить. Мы сейчас просто выпишем их все:

плоскость xu — множество точек вида $(x, y, 0, 0)$,

плоскость xz — множество точек вида $(x, 0, z, 0)$,

плоскость xt — множество точек вида $(x, 0, 0, t)$,

плоскость yz — множество точек вида $(0, y, z, 0)$,

плоскость yt — множество точек вида $(0, y, 0, t)$,

плоскость zt — множество точек вида $(0, 0, z, t)$.

Для каждой из этих плоскостей переменные координаты могут принимать любые числовые значения, в том числе и нулевое. Например, точки $(5, 0, 0, 0)$ заведомо принадлежат плоскости xu и плоскости xt (а еще какой?). Тогда легко видеть, что, например, плоскость yz «проходит» через ось y в том смысле, что каждая точка этой оси принадлежит этой плоскости.

Действительно, любая точка на оси y , т. е. точка вида $(0, y, 0, 0)$, принадлежит множеству точек вида $(0, y, z, 0)$, т. е. плоскости yz .

Вопрос. Какое множество образуют точки, принадлежащие одновременно и плоскости yz и плоскости xz ?

Ответ. Это множество состоит из всех точек вида $(0, 0, z, 0)$, т. е. является просто осью z .

Итак, в четырехмерном пространстве существуют множества точек, аналогичные координатным плоскостям трехмерного пространства. Их шесть. Каждое из них состоит из точек, у которых, как и у точек координатных плоскостей трехмерного пространства, две какие-либо координаты могут принимать любые числовые значения, а остальные две равны нулю. Каждая из этих координатных плоскостей «проходит» через две координатные оси: например, плоскость yz проходит через ось y и ось z . С другой стороны, через каждую ось проходят три координатные плоскости. Так, через ось x проходят плоскости xy , xz и xt . Мы будем говорить, что ось x является пересечением этих плоскостей. Все шесть координатных плоскостей содержат одну общую точку. Это точка $(0, 0, 0, 0)$ — начало координат.

Вопрос. Какое множество точек является пересечением плоскостей xy и yz ? xy и zt ?

Мы видим, что картина получается вполне аналогичная той, которая имеется в трехмерном пространстве. Мы даже сейчас попытаемся сделать схематический рисунок, который поможет создать некоторый наглядный образ расположения координатных плоскостей и осей четырехмерного пространства.

На рис. 77 оси координат изображены прямыми, показаны координатные плоскости; все точно так же, как это



Двумерные
координатные
плоскости

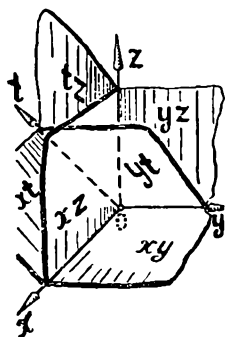


РИС. 77

было сделано на рис. 64 для трехмерного пространства.

Однако в четырехмерном пространстве есть еще множества точек, которые можно называть координатными «плоскостями». Этого, кстати сказать, следовало ожидать: на прямой имеется только начало координат; на плоскости есть и начало координат, и оси; в трехмерном пространстве, кроме начала и осей, появляются еще координатные плоскости. Естественно, что в четырехмерном пространстве появляются новые множества, которые мы будем называть *трехмерными координатными плоскостями*.

Это — множества, состоящие из всех точек, у которых какие-либо три из четырех координат принимают всевозможные числовые значения, а четвертая равна нулю. Таково, например, множество точек вида $(x, 0, z, t)$, где x, z, t принимают всевозможные значения. Это множество будем называть *трехмерной координатной плоскостью xzt* . Легко понять, что в четырехмерном пространстве существуют четыре координатные трехмерные плоскости:

плоскость xyz — множество точек вида $(x, y, z, 0)$,

плоскость xyt — множество точек вида $(x, y, 0, t)$,

плоскость xzt — множество точек вида $(x, 0, z, t)$,

плоскость yzt — множество точек вида $(0, y, z, t)$.

Можно также сказать, что каждая из трехмерных координатных плоскостей «проходит» через начало координат и что каждая из этих плоскостей «проходит» через три координатные оси (слово «проходит» мы здесь употребляем в том смысле, что начало координат и каждая из точек осей принадлежат плоскости). Например, трехмерная плоскость xyt проходит через оси x, y и t .

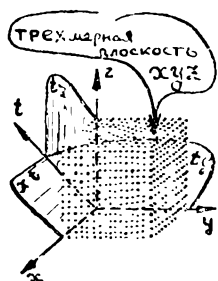


РИС. 78

Аналогично можно сказать, что каждая из двумерных плоскостей является пересечением двух трехмерных плоскостей. Например, плоскость xu является пересечением трехмерных плоскостей xuz и xut , т. е. состоит из всех точек, принадлежащих и тому и другому множеству.

Посмотрите на рис. 78. Он отличается от рис. 77 тем, что мы дорисовали на нем трехмерную координатную плоскость xuz . Она изображена параллелепипедом. Видно, что эта плоскость содержит оси x , y и z и плоскости xu , xz и yz .

19. Некоторые задачи

Попробуем теперь разобраться в том, в каком смысле можно говорить о расстоянии между точками четырехмерного пространства.

В пп. 3, 6 и 10 мы показали, что метод координат дает возможность определять расстояние между точками, не опираясь на геометрические представления. Действительно, расстояние вычисляется для точек $A(x_1)$ и $B(x_2)$ прямой по формуле

$$\rho(A, B) = |x_1 - x_2|,$$

или

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2};$$

для точек $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости — по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

и для точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ трехмерного пространства по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Естественно и для четырехмерного пространства определить расстояние аналогичным образом, а именно ввести следующее

О п р е д е л е н и е. *Расстоянием* между двумя точками $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ четырехмерного пространства называется число $\rho(A, B)$, вычисляемое по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

В частности, расстояние точки $A(x, y, z, t)$ от начала координат $O(0, 0, 0, 0)$ дается формулой

$$\rho(O, A) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Пользуясь этим определением, можно уже решать задачи из геометрии четырехмерного пространства, совсем похожие на те, которые Вы решаете по школьным задачникам.

19.1. Докажите, что треугольник с вершинами $A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$ и $C(-1, 7, -3, 0)$ равнобедренный.

19.2. Имеются четыре точки четырехмерного пространства: $A(1, 1, 1, 1)$, $B(-1, -1, 1, 1)$, $C(-1, 1, 1, -1)$, $D(1, -1, 1, -1)$.

Докажите, что эти четыре точки равноудалены друг от друга.

19.3. Пусть A, B и C — точки четырехмерного пространства. Мы можем определить угол ABC следующим образом. Поскольку мы умеем вычислять расстояния в четырехмерном пространстве, найдем $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ и $\rho(A, C)$, т. е. «длины сторон» треугольника ABC . Построим теперь на обычной двумерной плоскости треугольник $A'B'C'$ такой, чтобы его стороны AB, BC и CA равнялись бы соответственно $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ и $\rho(A, C)$. Тогда угол $A'B'C'$ этого треугольника и будем называть *углом ABC* в четырехмерном пространстве ¹⁾.

¹⁾ Чтобы это определение, как говорят математики, было корректным (имело бы смысл, было бы правомерным), необходимо доказать, что треугольник со сторонами $\rho(A, B)$, $\rho(B, C)$ и $\rho(A, C)$ может быть построен на плоскости. Для этого нужно убедиться, что каждое из этих расстояний меньше суммы двух других, т. е. доказать некоторые довольно сложные неравенства.

Докажите, что треугольник с вершинами

$A(4, 7, -3, 5)$, $B(3, 0, -3, 1)$

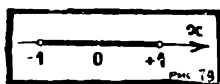
и

$C(1, 3, -2, 0)$

— прямоугольный.

19.4. Возьмем точки A , B и C из упражнения 19.1. Вычислите углы A , B и C треугольника ABC .

1-мерный шар (отрезок):
 $x^2 \leq 1$



§ 3. Четырехмерный куб

20. Определения сферы и куба

Перейдем теперь к рассмотрению геометрических фигур в четырехмерном пространстве. Под геометрической фигурой (как и в случае обычной геометрии) будем понимать некоторое множество точек.

Возьмем, например, определение сферы: сфера есть множество точек, удаленных от некоторой точки на одно и то же расстояние (рис. 79). Это определение уже можно использовать, чтобы по аналогии определить сферу в четырехмерном пространстве: что такое точка, мы знаем; что такое расстояние между точками, тоже знаем. Мы и примем это определение, переведя его на язык чисел (для простоты, как и в случае трехмерного пространства, возьмем сферу с центром в начале координат).

О п р е д е л е н и е. Множество точек (x, y, z, t) , удовлетворяющих соотношению

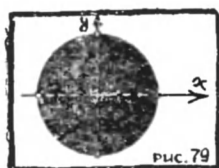
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

называется *четырёхмерной сферой* с центром в начале координат и радиусом R .

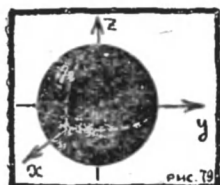
Если рассматривать не сферу, а шар, то указанное равенство надо заменить неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq R^2.$$

2-мерный шар (круг):
 $x^2 + y^2 \leq 1$



3-мерный шар
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



4-мерный шар
 $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 1$



Это замечание относится также к двумерному и трехмерному случаям.

Расскажем теперь немного о четырехмерном кубе. Судя по названию, это фигура, аналогичная обыкновенному, хорошо Вам знакомому трехмерному кубу (рис. 80). На плоскости тоже есть фигура, аналогичная кубу, — это квадрат. Аналогично между ними можно особенно легко увидеть, если рассмотреть аналитические определения куба и квадрата.

Действительно (как Вы уже знаете из упражнения 11.5) можно дать такое определение:

Кубом называется множество точек (x, y, z) , удовлетворяющих соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

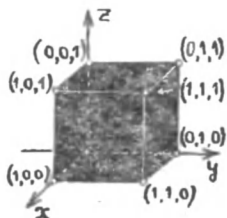
Это «арифметическое» определение куба не нуждается уже ни в каком чертеже. Однако оно полностью соответствует геометрическому определению куба¹⁾.

Для квадрата тоже можно дать арифметическое определение:

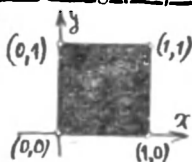
Квадратом на плоскости xy называется множество точек (x, y) , удовлетворяющих соотношениям:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

3-мерный куб



2-мерный куб (квадрат)



1-мерный куб (отрезок)



РИС. 80

¹⁾ Конечно, в пространстве есть и другие кубы. Например, множество точек, определяемых соотношениями $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, тоже является кубом. Этот куб очень хорошо расположен относительно координатных осей: начало координат является его центром, координатные оси и координатные плоскости — осями и плоскостями симметрии. Однако для наших целей удобен именно куб, определяемый соотношениями (13). Такой куб мы будем иногда называть единичным, чтобы отличить его от других кубов.

Сравнивая эти два определения, легко понять, что квадрат действительно является, как говорят, двумерным аналогом куба. Мы будем называть иногда квадрат «двумерным кубом».

Можно также рассмотреть аналог этих фигур и в пространстве одного измерения — на прямой. Мы получим множество точек x прямой, удовлетворяющих соотношениям:

$$0 \leq x \leq 1.$$

Ясно, что таким «одномерным кубом» является отрезок.

Надеемся, что теперь для Вас совершенно естественно выглядит следующее



Определение. *Четырехмерным кубом* называется множество точек (x, y, z, t) , удовлетворяющих соотношениям

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \\ 0 \leq t \leq 1.$$

Не надо огорчаться, что мы не привели пока рисунок четырехмерного куба — мы это сделаем потом (не удивляйтесь, что можно нарисовать четырехмерный куб: ведь рисуем же мы трехмерный куб на плоском листе бумаги). Для этого сначала надо разобраться, как этот куб «устроен», какие элементы в нем можно различать.

21. Устройство четырёхмерного куба

Рассмотрим по порядку «кубы» различных размерностей, т. е. отрезок, квадрат и обычный куб.

Отрезок, определяемый соотношениями $0 \leq x \leq 1$, является очень простой фигурой. Про него, пожалуй, можно лишь сказать, что его граница состоит из двух точек: 0 и 1. Остальные точки отрезка мы будем называть внутренними.

Граница квадрата состоит из четырех точек (вершин) и четырех отрезков. Таким образом, квадрат имеет на границе элементы двух типов: точки и отрезки. Граница трехмерного куба содержит элементы трех типов: вершины — их 8, ребра (отрезки) — их 12 и грани (квадраты) — их 6.

Запишем эти данные в виде таблицы:

Состав границы (фигура)	Точек (вершин)	Отрезков (сторон, ребер)	Квадра- тов (гра- ней)
Отрезок	2	—	—
Квадрат	4	4	—
Куб	8	12	6

Эту таблицу можно переписать короче, если условиться писать вместо названия фигуры число n , равное ее размерности:

для отрезка $n = 1$,
для квадрата $n = 2$,
для куба $n = 3$.

Вместо названия элемента границы тоже можно писать размерность этого элемента:

для грани $n = 2$,
для ребра $n = 1$.

При этом точку (вершину) удобно считать элементом нулевой размерности ($n = 0$). Тогда предыдущая таблица примет такой вид:

Размерность границы	0	1	2
Размерность куба			
1	2	—	—
2	4	4	—
3	8	12	6
4	?	?	?

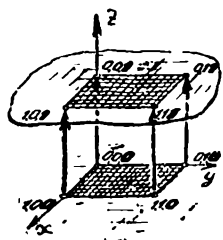


рис. 81

Наша цель — заполнить четвертую строку этой таблицы. Для этого мы еще раз, но теперь уже аналитически¹⁾ посмотрим границы отрезка, квадрата и куба (рис. 81) и по аналогии попробуем сообразить, как устроена граница четырехмерного куба.

Граница отрезка

$$0 \leq x \leq 1$$

состоит из двух точек:

$$x = 0 \text{ и } x = 1.$$

Граница квадрата

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

содержит четыре вершины:

$$x = 0, y = 0;$$

$$x = 0, y = 1;$$

$$x = 1, y = 0$$

и

$$x = 1, y = 1,$$

т. е. точки

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0) \text{ и } (1, 1).$$

Куб

$$0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq 1,$$

$$0 \leq z \leq 1$$

содержит восемь вершин. Каждая из этих вершин есть точка

$$(x, y, z),$$

¹⁾ То есть чисто арифметически.

в которой x , y и z заменяются либо нулем, либо единицей. Получаются следующие восемь точек:

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0), (0, 0, 1), \\ &(0, 1, 0), (0, 1, 1), \\ &(1, 0, 0), (1, 0, 1), \\ &(1, 1, 0), (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Вершинами четырехмерного куба:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

называются точки (x, y, z, t) , у которых x, y, z и t заменяются либо нулем, либо единицей.

Таких вершин 16, потому что можно составить 16 различных четверок из нулей и единиц. В самом деле, возьмем тройки, составленные из координат вершин трехмерного куба (их 8), и к каждой такой тройке припишем сначала 0, потом 1 (рис. 82). Таким образом, из каждой такой тройки получится две четверки, всего четверок будет $8 \cdot 2 = 16$.

Итак, вершины четырехмерного куба мы сосчитали.

Подумаем теперь, что следует называть ребром четырехмерного куба. Снова воспользуемся аналогией. У квадрата ребра (стороны) определяются следующими соотношениями (см. рис. 83 и 80):

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, y = 0 & \text{ (ребро } AB); \\ x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1 & \text{ (ребро } BC); \\ 0 \leq x \leq 1, y = 1 & \text{ (ребро } CD); \\ x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1 & \text{ (ребро } DA). \end{aligned}$$

Как мы видим, для ребер квадрата характерно, что у всех точек данного ребра какая-нибудь из координат имеет определенное числовое значение: 0 или 1, а вторая

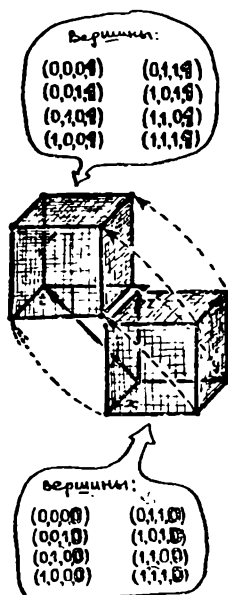


рис. 82

координата принимает все значения между 0 и 1.

Далее рассмотрим ребра (трехмерного) куба. Мы имеем (см. рис. 83):

$$x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq 1 \text{ (ребро } AA_1);$$

$$0 \leq x \leq 1, y = 0, z = 1 \text{ (ребро } A_1B_1);$$

$$x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1 \text{ (ребро } B_1C_1)$$

и т. д.

По аналогии дадим

О п р е д е л е н и е. Ребрами четырехмерного куба называются множества точек, для которых все координаты, кроме одной, постоянны (равны либо 0, либо 1), а четвертая принимает все возможные значения от 0 до 1.

Примеры ребер:

$$1) x = 0, y = 0, z = 1, 0 \leq t \leq 1;$$

$$2) 0 \leq x \leq 1, y = 1, z = 0, t = 1;$$

$$3) x = 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0, t = 0$$

и т. д.

Попробуем посчитать, сколько ребер у четырехмерного куба, т. е. сколько можно написать таких строчек. Чтобы не запутаться, будем считать их в определенном порядке. Прежде всего будем различать четыре группы ребер: для первой пусть переменной координатой является x (причем $0 \leq x \leq 1$), а y, z и t принимают постоянные значения 0 и 1 во всех возможных комбинациях. Но мы уже знаем, что существует 8 различных троек из нуля и единицы (вспомните, сколько вершин у трехмерного куба). Поэтому существует 8 ребер первой группы (для которых переменной координатой является x). Легко понять, что и ребер второй группы, для которых переменной является не x , а y , тоже 8. Таким образом, ясно, что всего у четырехмерного куба $4 \cdot 8 = 32$ ребра.

Вот теперь легко выписать соотношения, определяющие каждое из этих ребер, не боясь пропустить какое-нибудь:

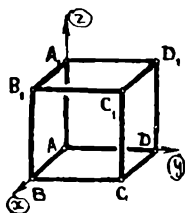
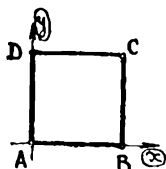


Рис. 83

Первая
группа:
 $0 \leq x \leq 1$

y	z	t
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Вторая
группа:
 $0 \leq y \leq 1$

x	z	t
0	0	0
0	0	1
0	1	0
...

Третья
группа:
 $0 \leq z \leq 1$

x	y	t
0	0	0
0	0	1
...

Четвертая
группа:
 $0 \leq t \leq 1$

x	y	z
0	0	0
0	0	1
...

У трехмерного куба, кроме вершин и ребер, имеются еще грани. На каждой из граней две координаты меняются (принимая всевозможные значения от 0 до 1), а одна координата постоянна (равна 0 или 1). Например, грань ABB_1A_1 (рис. 83) определяется соотношениями:

$$0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1.$$

По аналогии дадим такое

О п р е д е л е н и е. *Двумерной гранью*¹⁾ четырехмерного куба называется множество точек, для которых две какие-нибудь координаты могут принимать всевозможные значения между 0 и 1, а две другие постоянны (равны либо 0, либо 1).

Пример грани:

$$x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1, 0 \leq t \leq 1.$$

¹⁾ Необходимость уточнения названия грани (двумерная) будет выяснена несколько позже.



21.1. Сосчитайте число граней четырехмерного куба.

У к а з а н и е. Мы советуем сначала, не прибегая к чертежу, а используя только аналитические (арифметические) определения, выписать все шесть строчек соотношений, определяющих шесть граней обычного трехмерного куба.

О т в е т. У четырехмерного куба 24 двумерные грани.

Теперь мы можем заполнить четвертую строку нашей таблицы:

Размерность куба \ Размерность границы	0	1	2	3
1	2	—	—	—
2	4	4	—	—
3	8	12	6	—
4	16	32	24	?

Ясно, что эта таблица пока еще не закончена: в ней не хватает правого нижнего элемента. Дело в том, что вероятно для четырехмерного куба нужно добавлять еще один столбец. Действительно, у отрезка был только один тип границы — вершины, у квадрата прибавились ребра, у куба прибавились квадраты — двумерные грани. Надо ожидать, что у четырехмерного куба, кроме уже знакомых элементов границы, появится еще новый вид элементов, размерность которых будет равна трем.

Попробуем дать

О п р е д е л е н и е. Трехмерной гранью четырехмерного куба называется множество точек, у которых три координаты принимают всевозможные значения от 0 до 1, а одна постоянна (равна либо 0, либо 1).

Число трехмерных граней легко сосчитать. Их восемь, так как для каждой



из четырех их координат есть два возможных значения: 0 и 1, и мы имеем $2 \cdot 4 = 8$.

А теперь посмотрите на рис. 84. На нем нарисован четырехмерный куб. На рисунке видны все 16 вершин, 32 ребра, 24 двумерные грани (они изображены параллелограммами), 8 трехмерных граней (они изображены параллелепипедами). На рисунке хорошо видно, какая грань содержит какое ребро, и т. д.

Наглядное представление о четырехмерном кубе можно получить и другим способом. Представьте себе, что мы попросили Вас прислать модель обычного трехмерного куба. Конечно, Вы можете воспользоваться «трехмерной» почтой. Но трехмерные фигуры почта принимает в виде посылок, а это сложно. Поэтому лучше сделать так: расклеить куб из бумаги, потом его опять склеить и послать нам выкройку или, как говорят математики, *развертку* куба. Такая развертка куба изображена на рис. 85.

Так как на рисунке проставлены координаты вершин, то легко понять, как надо склеить эту развертку, чтобы получился сам куб.

21.2. Запишите соотношения, определяющие каждую трехмерную грань четырехмерного куба.

21.3. Можно сделать развертку четырехмерного куба. Это будет некоторая трехмерная фигура. Очевидно, она будет состоять из 8 кубиков. Если Вам удастся сделать или представить себе эту развертку, зарисуйте ее и на рисунке укажите координаты каждой вершины.

4-мерный куб

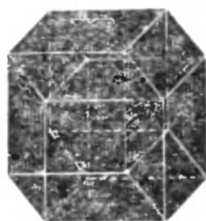


рис. 84

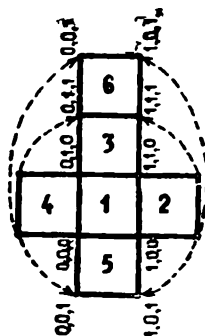


рис. 85

22. Задачи на куб

Итак, мы немного разобрались в том, как устроен четырехмерный куб. Попробуем теперь представить себе его размеры. Длина каждого из ребер четырехмерного куба, как и квадрата, как и обычного куба, равна единице (под длиной ребра мы пони-

маем расстояние между вершинами, лежащими на этом ребре). Недаром мы называли наши «кубы» единичными.

22.1. Посчитайте расстояния между другими вершинами куба, не лежащими на одном ребре. (Для этого выберите одну из вершин, лучше всего вершину $(0, 0, 0, 0)$, и считайте расстояния от этой вершины до всех остальных. Формула для вычисления расстояния между точками у Вас есть, координаты вершин Вы знаете, остается произвести несложные вычисления.)

22.2. Решив задачу 22.1, Вы увидите, что все вершины можно разбить на 4 группы. Вершины первой группы находятся от $(0, 0, 0, 0)$ на расстоянии 1; вершины второй группы — на расстоянии $\sqrt{2}$; вершины третьей — на расстоянии $\sqrt{3}$ и четвертой — на расстоянии $\sqrt{4} = 2$. Сколько у четырехмерного куба вершин каждой группы?

22.3. Вершина $(1, 1, 1, 1)$ удалена от $(0, 0, 0, 0)$ на самое большое расстояние, равное 2. Эту вершину мы будем называть *противоположной* вершине $(0, 0, 0, 0)$, а отрезок, их соединяющий, — *главной диагональю* четырехмерного куба. Что называть главной диагональю для кубов других размерностей и чему равны длины их главных диагоналей?

22.4. Теперь представьте себе, что трехмерный куб сделан из проволоки и в вершине $(0, 0, 0)$ сидит муравей. Тогда из одной вершины в другую муравью придется ползти по ребрам. По скольким ребрам ему придется проползти, чтобы попасть в вершину $(1, 1, 1)$ из вершины $(0, 0, 0)$? По трем ребрам. Поэтому вершину $(1, 1, 1)$ мы будем называть вершиной третьего порядка. Из вершины $(0, 0, 0)$ в вершину $(0, 1, 1)$ путь по ребрам состоит из двух звеньев. Такую вершину будем называть вершиной второго порядка. В кубе есть еще вершины первого порядка — это те, в которые муравей может попасть, пройдя по одному ребру. Таких вершин три: $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ и $(1, 0, 0)$. Вершин второго порядка у куба тоже три. Запишите их координаты (задача 4а). Из $(0, 0, 0)$ в каждую из вершин второго порядка существуют два пути, состоящих из двух звеньев. Например, в вершину $(0, 1, 1)$ можно попасть через вершину $(0, 0, 1)$, а можно через вершину $(0, 1, 0)$. Сколькими трехзвенными путями можно попасть из вершины в противоположную (задача 4б)?

22.5. Возьмите четырехмерный куб с центром в начале координат, т.е. множество точек, удовлетворяющих соотношениям:

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

$$-1 \leq y \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Найдите расстояния от вершины $(1, 1, 1, 1)$ до всех остальных вершин этого куба.}

Какие вершины будут вершинами первого порядка относительно вершины $(1, 1, 1, 1)$ (т. е. в какие вершины можно попасть из вершины $(1, 1, 1, 1)$, пройдя по одному ребру)? Какие вершины будут вершинами второго порядка? третьего? четвертого?

22.6. Этот вопрос может служить для Вас контрольным вопросом по четырехмерному кубу: сколько существует четырехзвенных путей, ведущих из вершины $(0, 0, 0, 0)$ четырехмерного куба в противоположную вершину $(1, 1, 1, 1)$, если идти по ребрам этого куба? Запишите подробно маршруты для каждого пути, указывая по порядку, через какие вершины нужно проходить.

22.7. Если обычный трехмерный куб пересечь некоторой плоскостью, то в пересечении, естественно, получится некоторая плоская фигура — сечение куба. На рис. 86 показано, какие сечения получаются, если куб пересекать плоскостями, перпендикулярными к главной диагонали. Можно представить себе эту картину иначе: куб движется «сквозь» плоскость, вырезая в плоскости последовательно разные сечения.

Аналогично, если квадрат («двумерный куб») двигать через прямую («одномерную плоскость»), перпендикулярную к главной диагонали, то сначала он вырежет на прямой одну только точку, потом эта точка превратится в отрезок, который при движении квадрата будет сначала увеличиваться (до какой длины?), а потом опять сожмется в точку (рис. 87).

Продолжим аналогию в другую сторону: пусть четырехмерный куб проходит через трехмерное пространство. Тогда в трехмерном пространстве должны возникать трехмерные фигуры-сечения четырехмерного куба.

Очевидно, это будут некоторые многогранники. Попробуйте сообразить, какие фигуры будут получаться, если четырехмерный куб будет проходить через трехмерное пространство, перпендикулярное к его главной диагонали.

У к а з а н и е. Мы не ждем от Вас обязательно строгого решения этой задачи. Ее нужно попробовать решить прежде всего по аналогии с трехмерным и двумерным случаями. Однако можно попробовать дать и точное доказательство, для чего придется, конечно, уточнить формулировку (например, придется подумать, что значит: «трехмерное пространство перпендикулярно к главной диагонали»).

сечения
3-мерного куба
2-мерной плоскостью

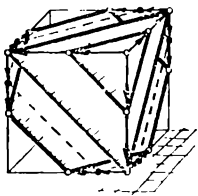
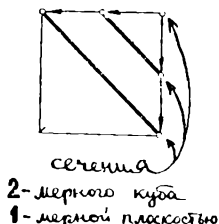


РИС. 86



сечения
2-мерного куба
1-мерной плоскостью

РИС. 87

Израиль
Моисеевич
Гельфанд

Елена
Георгиевна
Глаголева

Александр
Александрович
Кириллов

Метод координат

М., 1973 г., 88 стр. с илл.

Редактор	И. М. Овчинникова
Художник серии	В. В. Смолянинов
Техн. редактор	К. Ф. Брудно
Корректоры	О. А. Бутусова, Н. Б. Румянцева

Печать с матриц	3/IV 1973 г.
Подп. к печати	84×108 ^{1/32}
Бумага	2,75
Физ. печ. л.	4,62
Усл. печ. л.	4,43
Уч.-изд. л.	225 000 экз. Т-05717
Тираж	12 коп.
Цена книги	
Заказ № 1940	

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука».
Москва, Шубинский пер., 10.

Математика

**Библиотечка
физико-математической школы**

Серия основная

- Выпуск 1** И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат.
- Выпуск 2** И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3** С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко. Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы).
- Выпуск 4** Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые.
- Выпуск 5** М. И. Башмаков. Уравнения и неравенства.

Серия дополнительная

- Выпуск 1*** Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго. Математические задачи.
- Выпуск 2*** А. А. Кириллов. Пределы.
- Выпуск 3*** Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь. Математические соревнования (арифметика и алгебра).