

Ф и з и к а

Библиотечна
физико-математической школы

А.А.БОРОВОЙ
Л.Н.ЗАХАРОВ
Э.Б.ФИНКЕЛЬШТЕЙН
А.Н.ХЕРУВИМОВ

МЕХАНИКА



Физика Библиотечка физико-математической школы

А. А. БОРОВОЙ
Л. Н. ЗАХАРОВ
Э. Б. ФИНКЕЛЬШТЕЙН
А. Н. ХЕРУВИМОВ

МЕХАНИКА

ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва 1967

530.1

Б-83

УДК 530.10 (075.4)

Физика

Библиотечка

физико-математической школы

Редактор серии

Я. А. Смородинский

*Боровой Александр Александрович, Захаров Лев Николаевич,
Финкельштейн Эдуард Борисович, Херувимов Александр Николаевич*

МЕХАНИКА

«Библиотечка физико-математической школы». Серия физическая.

М., 1967 г., 208 стр. с илл.

Редактор А. В. Чеботарева.

Технический редактор Л. Ю. Плакше.

Корректор Е. А. Белицкая

Сдано в набор 26/XI 1966 г. Подписано к печати 17/III 1967 г.

Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 6,5. Условн. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 10,03. Тираж 100 000 экз. Т-01828. Цена 28 коп. Зак. № 1061.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова

Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.

Москва, Ж-54, Валаевая, 28.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции	4
Предисловие	5
Глава I. Кинематика	7
Краткая теория (7). Примеры (19). Задачи (26). Решения задач (33).	
Глава II. Динамика (масса, сила, импульс)	47
Краткая теория (47). Примеры (62). Задачи (69). Решения задач (74).	
Глава III. Динамика (энергия, работа)	88
Краткая теория (88). Примеры (98). Задачи (106). Решения задач (112).	
Глава IV. Статика	134
Краткая теория (134). Примеры (138). Задачи (142). Решения задач (145).	
Глава V. Тяготение	153
Краткая теория (153). Примеры (157). Задачи (162). Решения задач (164).	
Глава VI. Избранные задачи	174
Решения задач (176)	
Математическое дополнение	191

ОТ РЕДАКЦИИ

Эта книга начинает физическую серию «Библиотечки физико-математической школы». У читателей, естественно, возникают вопросы о том, какие книги войдут в эту серию, для кого они предназначены и т. п. Постараемся на них кратко ответить.

Книги этой серии создаются на основе опыта работы специализированных физико-математических школ, которые работают в ряде городов нашей страны. Цель серии — углубить и расширить знания читателей о современной физике и ее многочисленных приложениях, а также научить их применять эти знания при решении физических задач и, таким образом, в какой-то степени ликвидировать разрыв между физикой, которой занимаются в школе, и вузовским курсом физики.

В книгах планируемой серии будут излагаться отдельные разделы элементарного курса физики и задачи разной степени трудности для самостоятельного решения. Книги будут как совсем простые, так и требующие уже некоторой подготовки.

Авторами книг будут как известные ученые, так и молодые физики. Надеемся, что книги этой серии помогут всем, кто интересуется физикой и хочет ее изучать.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В физической серии «Библиотечки физико-математической школы» выйдет несколько книг, составляющих единый курс физики. В этих книгах авторы попытались с возможной строгостью и последовательностью изложить основные принципы физики и научить применять их при решении задач. Книжки не носят развлекательного характера—это рабочие книжки. Они, как мы очень надеемся, помогут ближе и глубже познакомиться с физикой тем, кто думает выбрать ее своей специальностью.

Кроме того, авторы ставили своей целью все разделы физики, которые могут быть изложены на элементарном уровне (без применения высшей математики), изложить с максимальной полнотой, значительно полнее существующего школьного курса. Краткость изложения позволяет при небольшом объеме отчетливо показать логическую стройность науки, но зато предъявляет требования внимательного и вдумчивого отношения к тексту со стороны читателя.

В задачах и примерах авторы считали необходимым:

- 1) дать некоторые математические методы решения задач, которым не уделяется достаточного внимания в школьных учебниках (например, метод координат, графики, суммирование, предельный переход и т. д.);

- 2) научить пользоваться физическими идеализациями и понимать границы их применимости (материальная точка, твердое тело, идеальные связи, луч света, идеальный газ и т. д.);

- 3) научить способам критической оценки и исследования полученных результатов;

- 4) обратить внимание на характерные ошибки при решении задач;

б) максимально приблизить содержание книги к требованиям физики наших дней. В связи с этим включен ряд задач, базирующихся на последних достижениях физики.

Кроме большого числа оригинальных задач, были использованы задачи физических олимпиад и приемных экзаменов в физические вузы. Подавляющее большинство этих задач подверглось существенной переработке. В книгу включены (в основном в качестве примеров) и широко известные методические задачи.

В первой книге серии изложены основы механики и приведено большое число задач и примеров. Каждая глава начинается с изложения теории, после чего на нескольких примерах разбираются типичные задачи и дается методика их решения. Кроме того, примеры служат дополнением к тексту, иллюстрируя его отдельные положения. Затем идут задачи, расположенные в соответствии с планом изложения материала главы и по возрастающей степени трудности. Заключается глава подробными решениями задач. Авторы старались подбирать задачи так, чтобы они образовывали с текстом и примерами одно целое.

В конце книги (гл. VI) приведен ряд трудных задач, которые несколько выходят за рамки излагаемого материала, в частности, математические задачи, решаемые с помощью механических моделей, и помещено «Математическое дополнение», которое можно не читать тем, кто достаточно хорошо знает операции с векторами, нахождение пределов, суммирование рядов и действия с символом Δ . В противном случае это дополнение значительно облегчит чтение книги.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. В. А. Фоку и проф. Л. А. Вайнштейну за ценные замечания при обсуждении основных идей книги, акад. И. К. Кикоину за критику рукописи, проф. Я. А. Смородинскому, редактору серии, внимательное отношение и замечания которого помогли нам в работе.

Авторы

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Общие понятия

Механика изучает законы движения различных тел. Под механическим движением понимается изменение положения изучаемого тела со временем относительно некоторого тела или системы тел, условно принимаемых за неподвижные. Такую систему тел вместе с часами называют *системой отсчета*. Часами может служить любой периодический процесс: колебание маятника, вращение Земли, электромагнитные колебания и т. д.

Ясно, что о механическом движении тела можно говорить только после того, как указана система отсчета, относительно которой оно рассматривается. Выбор системы отсчета определяется соображениями удобства. Наблюдателю, неподвижному относительно Земли, удобно принять за систему отсчета Землю, а наблюдателю, сидящему в самолете, — самолет.

Для строгого математического описания движения с системой отсчета связывают *систему координат*, например, декартову. Нужно ясно понимать, что между системой отсчета и системой координат имеется существенное различие. Систему отсчета образуют реальные тела, а система координат является математической абстракцией. Выбор системы координат тоже определяется соображениями удобства.

Простейшее тело в механике — *материальная точка*. Так называют тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. Математически это выражается в том, что для задания положения материальной точки достаточно одного радиуса-вектора, конец которого совпадает

с данной точкой *). При этом мы отвлекаемся от внутренней структуры тела, принимаемого за материальную точку, т. е. не рассматриваем движение частей этого тела друг относительно друга. Одно и то же тело в одних условиях можно рассматривать как материальную точку, а в других — нельзя.

Всякое тело, размерами которого нельзя пренебречь, рассматривается в механике как *система материальных точек*. Для такого рассмотрения необходимо мысленно разбить тело на множество маленьких кусочков, каждый из которых можно принять за материальную точку. Именно такой «кусочек» подразумевают, когда говорят о точке тела или частице жидкости.

Важную роль играет в механике понятие *абсолютно твердого тела*. Абсолютно твердым называют тело, не меняющее своей формы при любых воздействиях. Из этого определения следует, что расстояние между любыми точками абсолютно твердого тела остается неизменным. Ясно, что таких тел в природе не существует, и это понятие является удобной идеализацией, применимой тогда, когда можно пренебречь деформациями тела.

В этой книге мы будем изучать движение материальной точки, системы материальных точек и движение твердых тел.

§ 2. Кинематика точки

Кинематика занимается геометрическим описанием движения, не изучая его причин. В дальнейшем мы будем предполагать, что выбрана некоторая система отсчета и связанная с ней система координат. Все системы отсчета в кинематике одинаково пригодны для описания движения.

В этом параграфе под телом всюду понимается материальная точка. Линию, которую описывает при своем движении материальная точка, называют *траекторией*. По форме траектории движения делятся на прямолинейные и криволинейные.

Расстояние, отсчитанное вдоль траектории, называют *путем*. Путь обозначают буквой s . Очевидно, что путь является скаляром, причем $s \geq 0$. Вектор \mathbf{r}_{12} , соединяющий начальную точку 1 и конечную точку 2, называют *пере-*

*) О радиусе-векторе см. «Математическое дополнение».

мещением из точки 1 в точку 2 (рис. 1.1). Перемещения складываются и вычитаются по общим правилам действий над векторами *).

Рассмотрим произвольное движение тела. Каждому моменту времени t соответствует свой радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, проведенный из начала координат в точку, где находится тело. Другими словами, движение точки описывается векторной функцией $\mathbf{r}(t)$ или тремя скалярными функциями

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) называют кинематическими уравнениями.

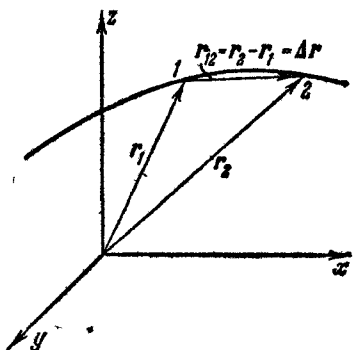


Рис. 1.1.

§ 3. Скорость

Пусть моменту t_1 соответствует радиус-вектор \mathbf{r}_1 , а близкому к нему моменту t_2 — радиус-вектор \mathbf{r}_2 . Тогда за малый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ тело получит перемещение $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Рассмотрим отношение $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. Это отношение есть вектор (так как оно получено делением вектора $\Delta \mathbf{r}$ на скаляр Δt), совпадающий по направлению с $\Delta \mathbf{r}$. По отношению к траектории вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ представляет собой секущую, проходящую через точки 1 и 2 (см. рис. 1.1). Пусть t_2 стремится к t_1 . При этом Δt будет стремиться к нулю, точка 2 к точке 1, а направление секущей, проходящей через фиксированную точку 1 и переменную точку 2, к направлению касательной к траектории в точке 1. Следовательно, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ направление вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ совпадет с направлением касательной к траектории в точке 1.

Скоростью в момент t_1 называют вектор $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$. Из этого определения следует, что скорость в каждой точке траектории направлена по касательной к ней.

*) См. «Математическое дополнение».

Для модуля скорости имеем

$$v = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.2)$$

(так как малый участок кривой мы можем заменить прямой, то $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$).

Часто, когда это не может вызвать недоразумений, модуль скорости называют просто скоростью *).

Для трех проекций скорости получим

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}; \quad v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Зная кинематические уравнения (1.1), можно вычислить вектор и модуль скорости тела в любой момент времени.

§ 4. Вычисление пути и координат

Рассмотрим формулу (1.2). При малых Δt имеем $\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx v$, или $\Delta s \approx v \Delta t$, причем это соотношение выполняется тем точнее, чем меньше Δt . Для приближенного вычисления пути за конечный промежуток времени t необходимо разбить его на большое число n таких малых отрезков времени Δt_i ($i = 1, 2, \dots, n$), чтобы в течение каждого из них выполнялось соотношение

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i.$$

Тогда

$$s = \sum_{i=1}^n \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i.$$

Беря предел этого выражения при $\Delta t \rightarrow 0$ (соответственно $n \rightarrow \infty$), получим точное равенство

$$s = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i. \quad (1.3)$$

Если известен график зависимости модуля скорости v от времени, то путь можно вычислить по этому графику.

*) То же самое относится и к другим векторным величинам.

Из рис. 1.2 и формулы (1.3) следует (см. «Математическое дополнение»), что путь, пройденный за время $t = t_2 - t_1$, численно равен площади фигуры $ABCD$.

Рассуждая аналогично, получим для каждой из декартовых координат:

$$\Delta x \approx v_x \Delta t; \quad \Delta y \approx v_y \Delta t; \\ \Delta z \approx v_z \Delta t$$

и

$$x = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_{x_i} \Delta t_i;$$

$$y = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_{y_i} \Delta t_i;$$

$$z = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_{z_i} \Delta t_i.$$

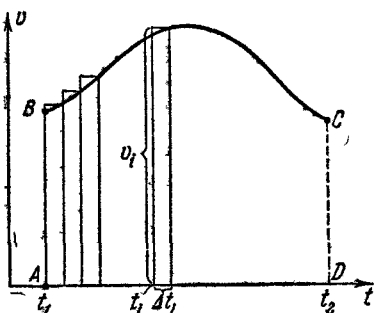


Рис. 1.2.

Точно так же координата x в момент t вычисляется по графику $v_x(t)$, но только часть площади фигуры, лежащая ниже оси t , считается отрицательной (рис. 1.3).

Часто бывает удобно пользоваться понятием средней скорости, характеризующей движение в течение некоторо-

го промежутка времени. Средней скоростью называют отношение пути ко времени, за которое этот путь пройден, $v_{\text{ср}} = \frac{s}{t}$.

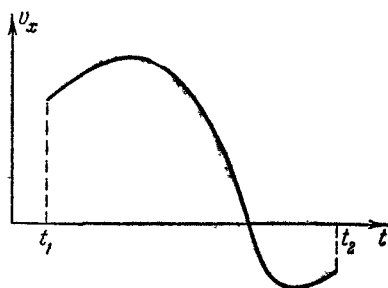


Рис. 1.3.

§ 5. Ускорение

Мы видели, что при произвольном движении вектор скорости меняется произвольным обра-

зом. Пусть в момент времени t_1 тело имело скорость \mathbf{v}_1 , а в близкий момент t_2 — скорость \mathbf{v}_2 . Приращение скорости $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ является вектором, направление которого зависит от векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . В частном случае прямолинейного движения, когда векторы \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 лежат на одной прямой (на траектории), вектор $\Delta \mathbf{v}$ также лежит на этой прямой.

В общем случае криволинейного движения направление вектора $\Delta \mathbf{v}$ вообще не совпадает с направлением \mathbf{v}_1 или \mathbf{v}_2 ($0 < \alpha < \pi$) (рис. 1.4).

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$, совпадающий по направлению с вектором $\Delta \mathbf{v}$, характеризует быстроту изменения скорости за время Δt . Величину $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ называют *ускорением* в данный момент t_1 . Для проекций и модуля ускорения имеем:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}; \quad a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}; \quad a_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что при прямолинейном движении ускорение направлено по скорости, если модуль скорости возрастает, и против скорости, если модуль скорости убывает. В первом случае движение называют *ускоренным*, во втором — *замедленным*.

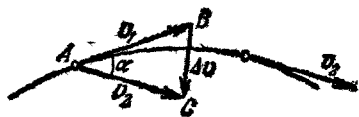


Рис. 1.4.

Как мы уже говорили, при криволинейном движении $0 < \alpha < \pi$. В этом случае вектор ускорения

обычно раскладывают на два направления: на направление, касательное к траектории, и на направление, перпендикулярное к нему. Составляющую ускорения, направленную по касательной, называют *тангенциальным ускорением*, а составляющую, направленную перпендикулярно к касательной, — *нормальным ускорением*.

§ 6. Частные случаи движения

Равномерное движение. Равномерным называют такое движение, при котором $|\mathbf{v}| = \text{const}$. Вычислим путь в этом случае. Для этого в формуле (1.3) положим

$$v_1 = v_2 = \dots = v_i = \dots = v_N = v.$$

Тогда

$$s = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n v_i \Delta t_i = v \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = vt.$$

Если при $t=0$ тело находилось на расстоянии s_0 (по траектории) от точки, принятой за начало отсчета, то эта формула принимает вид

$$s = vt + s_0. \quad (1.4)$$

Так как при равномерном движении $v = \text{const}$, то ускорение может возникнуть только в результате изменения направления вектора скорости, что в свою очередь возможно лишь при криволинейном движении. Определим угол между векторами a и v . Вернемся к рис. 1.4. Так как $|v| = \text{const}$, то $|v_1| = |v_2|$ и $\triangle ABC$ — равнобедренный. При $\Delta t \rightarrow 0$ угол $\alpha = \angle BAC \rightarrow 0$, а сумма углов ABC и BCA стремится к 180° . Следовательно, $\angle ABC = \widehat{av} \rightarrow \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Таким образом, ускорение в каждой точке направлено по нормали к траектории и, как видно из рис. 1.4, в сторону, противоположную выпуклости. При равномерном движении по окружности ускорение направлено по радиусу к центру.

Равномерное прямолинейное движение. В этом случае не только $v = \text{const}$, но и $\boldsymbol{v} = \text{const}$. Следовательно, $a = 0$ и $v_x = \text{const}$, $v_y = \text{const}$, $v_z = \text{const}$.

Для каждой из координат аналогично формуле (1.4) получим:

$$x = v_x t + x_0; \quad y = v_y t + y_0; \quad z = v_z t + z_0.$$

Обычно одну из осей координат, например x , совмещают с вектором \boldsymbol{v} и надобность в остальных двух осях отпадает. Такой выбор системы координат и будет предполагаться в дальнейшем.

Равноускоренное и равнозамедленное движения. Ускоренное (замедленное) движение называют *равноускоренным* (*равнозамедленным*), если $a = \text{const}$.

Следует отметить, что из одного только условия $a = \text{const}$ не следует равноускоренность или равнозамедленность движения. Вектору $a = \text{const}$ может соответствовать как равноускоренное, так и равнозамедленное движение.

Приведем простой пример.

Как показывает опыт, все тела при отсутствии сопротивления воздуха падают на Землю с одним и тем же ускорением*). Его обозначают буквой g . Тело, брошенное

*) Считается, что падение происходит с высоты, много меньшей радиуса Земли на данной широте.

вертикально вверх, в каждой точке траектории имеет ускорение, равное g , но первую половину пути оно движется равнозамедленно, а вторую — равноускоренно.

Применяя рассуждения, аналогичные тем, которые использовали при выводе формул (1.3) и (1.4), получим

$$v_x = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n a_{x_i} \Delta t_i + v_{x_0} = a_x t + v_{x_0}. \quad (1.5)$$

Мы видим, что скорость зависит от времени линейно. Пусть график зависимости $v_x(t)$ имеет вид, изображенный

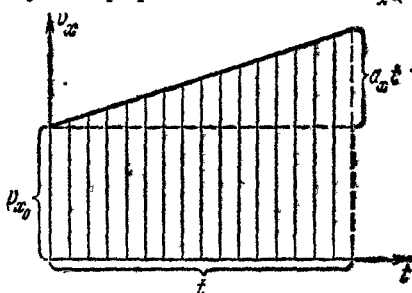


Рис. 1.5.

на рис. 1.5. Вычисляя путь и координату в момент t по общим правилам, как площадь трапеции, получим

$$s = x = v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.6)$$

Необходимо помнить, что эта формула справедлива только для случая, изображенного на рис. 1.5.

Движение по окружности. Важный случай движения — движение точки по окружности. При равномерном движении по окружности радиус-вектор точки за любые равные промежутки времени описывает равные углы (дуги). Отношение $\omega = \varphi/t$ остается постоянным, его называют *угловой скоростью*.

Время, за которое совершается полный оборот, называют *периодом* T . Число оборотов в единицу времени $n = 1/T$. За время T радиус-вектор повернется на угол 2π . Следовательно,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n. \quad (1.7)$$

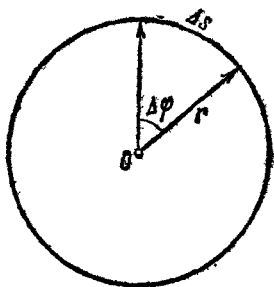


Рис. 1.6.

При неравномерном движении угловая скорость в момент t определяется с помощью предельного перехода

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}.$$

Выразим модуль скорости точки через ее угловую скорость:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

но $\Delta s = r\Delta\varphi$ (рис. 1.6), тогда

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} r \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega. \quad (1.8)$$

Окончательно имеем

$$v = r\omega^*).$$

Аналогично вводится понятие *углового ускорения* β :

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (1.9)$$

Найдем связь модуля ускорения a (линейного) с угловым ускорением. Из формулы (1.8) имеем $\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r}$ (напомним, что $r = \text{const}$). Подставляя $\Delta\omega$ в (1.9), получим

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{a}{r},$$

$$a = \beta r. \quad (1.10)$$

§ 7. Ускорение при равномерном движении по окружности

Как мы уже знаем, ускорение при равномерном движении по окружности направлено к центру. Вычислим его модуль. Для этого разобьем период движения T на n малых равных между собой промежутков Δt_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

В начале каждого из этих промежутков времени точка имела какую-то скорость v_i . Скорости v_i по модулю равны между собой, так как движение равномерно (рис. 1.7, а). По общим правилам действий с векторами мы можем перенести начала этих векторов в одну точку (параллельный перенос). Векторы Δv_i , равные разности векторов v_{i+1} и v_i , образуют многоугольник, число углов которого равно n (рис. 1.7, б).

*) В отличие от угловой скорости, скорость v или v называют *линейной*.

Так как движение равномерное и Δt_i равны между собой, то $\Delta \varphi_i$ тоже равны между собой и, следовательно,

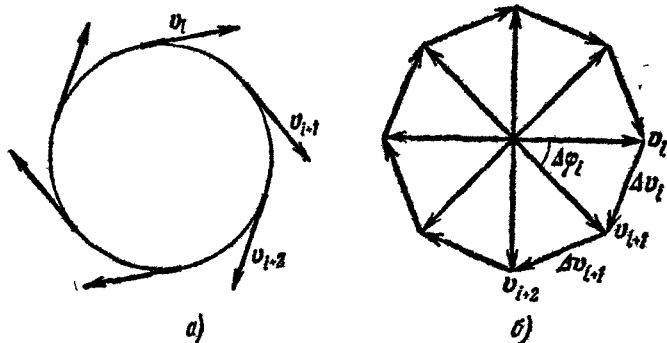


Рис. 1.7.

многоугольник правильный. Вычислим модуль приращения скорости за период:

$$|\Delta v| = \lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n |\Delta v_i| = 2\pi v.$$

Следовательно,

$$a = \frac{2\pi v}{T} = 2\pi v n = \frac{2\pi v n R}{R} = \frac{v^2}{R}.$$

§ 8. Кинематика абсолютно твердого тела

Описание движения абсолютно твердого тела сводится к описанию движения каждой из его точек. Если все точки тела совершают одинаковые перемещения, то движение называют *поступательным*. В этом случае прямая, проведенная через какие-либо две точки тела, остается при движении параллельна сама себе, и все точки тела описывают параллельные траектории. Описание поступательного движения сводится к описанию движения одной точки (любой точки, принадлежащей телу).

Мы будем рассматривать только *плоское движение* твердого тела, т. е. такое движение, при котором все точки тела движутся в параллельных плоскостях. В этом случае произвольное движение можно разложить на два движения: поступательное и вращательное.

Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором имеются две неподвижные точки. Прямую, проходящую через эти точки, называют *осью вращения*.

§ 9. О системах единиц измерения (кинематика)

Измерение физических величин требует введения системы единиц измерения. В дальнейшем мы будем пользоваться двумя системами единиц: СИ (она рекомендуется в качестве основной) и СГС. Каждая система имеет основные и производные, получающиеся из основных, единицы. Основными в любой из указанных систем в механике являются единицы длины, времени и массы (о массе см. ниже). Размерность указанных величин в системе СИ соответственно: метр (сокращенно *м*), секунда (*сек*), килограмм (*кг*) и в системе СГС: сантиметр (*см*), секунда (*сек*), грамм (*г*).

В дальнейшем для удобства вместо слов «размерность величины *F*» мы будем писать $[F]$. Например, в системе СИ [ед. длины] = *м*, а в системе СГС [ед. длины] = *см*. Помимо этого, для вывода размерностей производных величин удобно ввести следующие обозначения: [ед. длины] = *L*, [ед. времени] = *T* и [ед. массы] = *M*. Очевидно, что в системе СИ: $L = \text{м}$, $T = \text{сек}$ и $M = \text{кг}$, а в системе СГС: $L = \text{см}$, $T = \text{сек}$, $M = \text{г}$.

Размерность производных величин получается из формул, связывающих их с основными, при этом с символами *L*, *M* и *T* оперируют как с алгебраическими величинами. Пусть, например, нас интересует размерность скорости. Поскольку $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, то

$$[v] = \left[\frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \frac{[s]}{[t]} = \frac{L}{T}.$$

Тогда в системе СИ $[v] = \frac{L}{T} = \text{м/сек}$ и в системе СГС $[v] = \frac{L}{T} = \text{см/сек}$.

Поступая аналогично при определении размерности ускорения, из формулы $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ получаем

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{L/T}{T} = \frac{L}{T^2}.$$

В системе СИ $[a] = \frac{L}{T^2} = м/сек^2$ и в системе СГС $[a] = \frac{L}{T^2} = см/сек^2$.

Приведем еще один пример. Пусть нам необходимо определить размерность какой-либо величины k , связанной с двумя другими величинами F и x формулой $F = kx$, причем известно, что $[F] = \frac{ML}{T^2}$ и $[x] = L$. Выражая k из формулы, получаем:

$$k = \frac{F}{x}, [k] = \left[\frac{F}{x} \right] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{ML/T^2}{L} = \frac{M}{T^2}.$$

Соответственно в системе СИ $[k] = кг/сек^2$ и в системе СГС $[k] = г/сек^2$.

Таблица 1.1

Физические величины		Размерность в условных обозначениях	Единицы измерения и их сокращенное обозначение в системе	
			СИ	СГС
Основные	Длина	L	Метр (м)	Сантиметр (см)
	Время	T	Секунда (сек)	Секунда (сек)
	Масса	M	Килограмм (кг)	Грамм (г)
Производные	Скорость	LT^{-1}	Метр в секунду (м/сек)	Сантиметр в секунду (см/сек)
	Ускорение	LT^{-2}	Метр на секунду в квадрате (м/сек ²)	Сантиметр на секунду в квадрате (см/сек ²)
	Угол	1	РадIAN (рад)	РадIAN (рад)
	Угловая скорость	T^{-1}	РадIAN в секунду (рад/сек) или (1/сек)	РадIAN в секунду (рад/сек) или (1/сек)
	Угловое ускорение	T^{-2}	РадIAN на секунду в квадрате (рад/сек ²) или (1/сек ²)	РадIAN на секунду в квадрате (рад/сек ²) или (1/сек ²)

Наряду с размерными в физике встречаются и безразмерные величины, например, угол, измеряемый в радианах:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R} \quad (R = \text{const}),$$

$$[\Delta\varphi] = \left[\frac{\Delta s}{R} \right] = \frac{[\Delta s]}{[R]} = \frac{L}{L} = 1.$$

Соответственно для угловой скорости имеем

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}; \quad [\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{1}{T}.$$

Получение размерностей других величин аналогично. В табл. 1.1 приведены размерности физических величин, используемых в кинематике (за исключением массы).

ПРИМЕРЫ

1. Тело движется по прямой линии. Так как движение одномерно, то для его описания достаточно иметь одну координатную ось x . Выберем ось x так, чтобы она совпала с заданной прямой. Проекцию скорости на ось x будем называть в дальнейшем просто скоростью и обозначать буквой v^*). Пусть дан график зависимости скорости тела от времени (рис. 1.8, а). Требуется найти путь, пройденный телом за время t_2 , координату тела в момент времени t_2 ; определить среднюю скорость, с которой оно двигалось; построить график зависимости ускорения тела

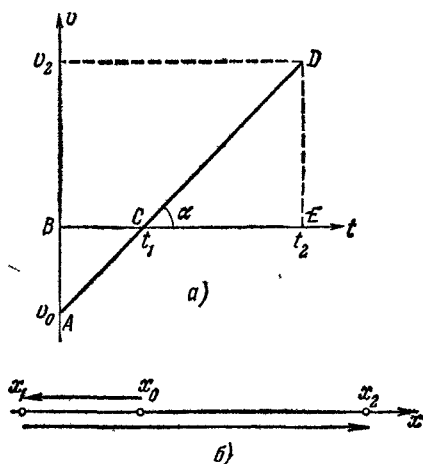


Рис. 1.8.

от времени. Можно ли этим графиком описать зависимость модуля скорости от времени?

*) Такой выбор оси и такое обозначение проекций различных векторов будет использоваться во всех тех задачах, где рассматривается одномерное прямолинейное движение.

Рассмотрим предложенный график и дадим сначала качественное описание движения. В начальный момент времени тело имело некую скорость v_0 и двигалось влево (т. е. в отрицательном направлении) по оси x , так как $v_0 < 0$.

Скорость его по модулю равномерно уменьшалась; в момент времени t_1 тело остановилось и начало двигаться в противоположном направлении, со временем увеличивая скорость. Для большей наглядности можно сделать чертеж движения тела (рис. 1.8, б).

Полный путь, пройденный телом, равен сумме расстояний $|x_1 - x_0| + |x_2 - x_1|$ *) или, согласно тому, что мы доказали на стр. 11, сумме площадей треугольников ABC и CDE (рис. 1.8, а), т. е.

$$s = \frac{-v_0 t_1 + v_2 (t_2 - t_1)}{2}.$$

Знак минус перед v_0 поставлен потому, что $v_0 < 0$, а площади при вычислении пути должны быть положительны.

Конечная координата тела x_2 определяется разностью площадей $\triangle CDE$ и $\triangle ABC$ и равна

$$x_2 = \frac{v_2 (t_2 - t_1) + v_0 t_1}{2}.$$

Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-v_0 t_1 + v_2 (t_2 - t_1)}{2t_2}.$$

Ускорение тела определяется тангенсом угла наклона прямой AD —графика скорости. Оно постоянно и равно

$$a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_2}{t_2 - t_1}.$$

Тангенс угла положителен; это указывает на то, что ускорение всегда направлено по оси x . В начальный момент времени оно противоположно направлению скорости, а после момента времени t_1 совпадает с направлением скорости. График ускорения представлен на рис. 1.9.

*) Индекс внизу указывает на момент времени, которому соответствует данная координата.

Интересно отметить, что до момента t_1 тело двигалось равнозамедленно, а после момента времени t_1 — равноускоренно, хотя знак ускорения не менялся. Очевидно, модуль скорости не может описываться данным графиком, так как модуль скорости не может быть отрицательным.

II. Диск вращается с угловой скоростью, меняющейся по закону $\omega = -At^2 + B$, где A и B — постоянные ($A > 0$ и $B > 0$), t — время, отсчитываемое от начала наблюдения.

Определить, на какой угол φ повернется диск за время от $t = 0$ до остановки. Найти размерность величин A и B , если время измеряется в секундах, а угол в радианах.

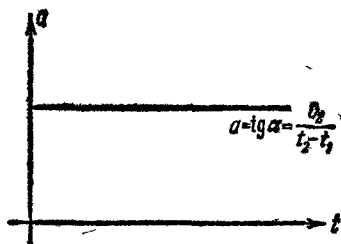


Рис. 1.9.

График зависимости угловой скорости от времени —

парабола (рис. 1.10). В момент $t = 0$ угловая скорость $\omega = B$. Затем угловая скорость уменьшается и при

$t_n = \sqrt{\frac{B}{A}}$ диск перестает вращаться, т. е. $\omega = 0$. Полный угол поворота за время t_n численно равен площади, ограниченной параболой и осью t .

Таким образом, задача сводится к вычислению этой площади.

Разобьем время движения

$t_n = \sqrt{\frac{B}{A}}$ на n равных промежутков, каждый из которых

$\Delta t = \frac{t_n}{n} = \frac{\sqrt{\frac{B}{A}}}{n}$, и будем считать n столь большим, что в течение каждого промежутка времени Δt диск движется с

постоянной угловой скоростью ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Так, от 0 до t_1 тело двигалось с угловой скоростью $\omega_1 = -A(\Delta t)^2 + B$,

от t_1 до t_2 с угловой скоростью $\omega_2 = -A(2\Delta t)^2 + B$ и т. д. При этом за время от 0 до t_1 диск повернется на угол

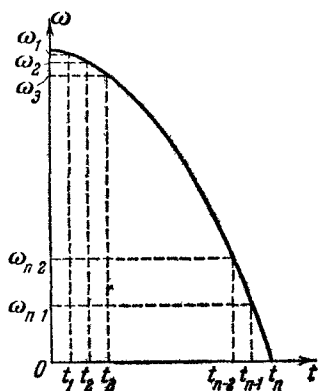


Рис. 1.10.

$\varphi_1 = \omega_1 \Delta t$; за время от t_1 до t_2 — на угол $\varphi_2 = \omega_2 \Delta t$ и т. д.;

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{полн}} &\approx \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n = \\ &= \omega_1 \Delta t + \omega_2 \Delta t + \omega_3 \Delta t + \dots + \omega_n \Delta t = \\ &= \Delta t (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_n) = \\ &= \Delta t \{ [-A(\Delta t)^2 + B] + [-A(2\Delta t)^2 + B] + \\ &+ [-A(3\Delta t)^2 + B] + \dots + [-A(n\Delta t)^2 + B] \} = \\ &= \Delta t [-A(\Delta t)^2 (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + nB] = \\ &= \frac{\sqrt{B/A}}{n} \left[-A \left(\frac{\sqrt{B/A}}{n} \right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + nB \right] = \\ &= \sqrt{\frac{B}{A}} \left[-\frac{B}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + B \right].\end{aligned}$$

Это равенство приближенное; оно тем точнее, чем меньше Δt , т. е. чем больше n .

В пределе при $n \rightarrow \infty$ получаем точное равенство:

$$\begin{aligned}\varphi &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{B}{A}} \left[-\frac{B}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + B \right] \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{\frac{B}{A}} \left[-\frac{B}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + B \right] \right\} = \\ &= \frac{2B}{3} \sqrt{\frac{B}{A}}.\end{aligned}$$

Размерность ω есть $\text{рад} \cdot \text{сек}^{-1}$. Следовательно, $[A t^2] = \text{рад} \cdot \text{сек}^{-1}$ и $[B] = \text{рад} \cdot \text{сек}^{-1}$. Отсюда $[A] = \text{рад} \cdot \text{сек}^{-3}$.

III. В момент времени $t=0$ тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 из точки, находящейся над поверхностью земли на высоте h_0 . Ответить на следующие вопросы: 1) Какова высота наибольшего подъема тела над землей ($h_{\text{макс}}$)? 2) Через какое время тело упадет на землю? 3) Какова будет его скорость в момент падения? Разобрать случай, когда тело падает с высоты h_0 без начальной скорости (свободное падение). Сопротивление воздуха не учитывать.

Движение тела является одномерным. Для его описания достаточно взять одну координатную ось h . За начало отсчета примем точку на поверхности земли; направление оси показано на рис. 1.11. Выбор оси позволяет нам от векторов (скорость, ускорение и т. д.) перейти к их проекциям на эту ось, при этом параллельность или антипараллельность вектора оси h будет указываться знаком плюс или минус его проекции на эту ось.

Координата h тела в момент времени t будет равна

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1)$$

Скорость в тот же момент времени

$$v = v_0 - gt. \quad (2)$$

На высоте $h_{\text{макс}}$ скорость тела будет равна нулю. Из уравнения (2) найдем время, за которое тело поднимется на $h_{\text{макс}}$:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 - gt_{\text{макс}}, \\ t_{\text{макс}} &= \frac{v_0}{g}. \end{aligned} \quad (3)$$

Высоту $h_{\text{макс}}$ определим, подставив $t_{\text{макс}}$ в уравнение (1):

$$h_{\text{макс}} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Если $h_0 = 0$, т. е. тело брошено с начальной скоростью v_0 с поверхности земли,

$$h_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

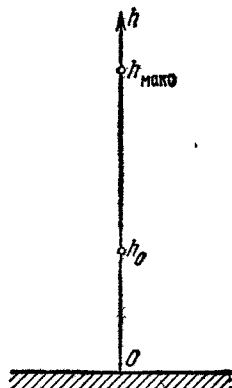


Рис. 1.11.

Ответ на второй вопрос—через какое время t' тело упадет на землю—получим, исходя из того, что в момент падения тела $h = 0$. Тогда из (1)

$$\begin{aligned} 0 &= h_0 + v_0 t' - \frac{gt'^2}{2}, \\ t'_{1,2} &= \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}. \end{aligned}$$

Знак минус в решении отбрасываем из очевидного требования $t' \geq 0$, и тогда

$$t' = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}.$$

В случае свободного падения ($v_0 = 0$)

$$t'_{\text{св}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}, \quad (5)$$

и при бросании тела с поверхности земли ($h_0 = 0$)

$$t' = \frac{2v_0}{g}. \quad (6)$$

Из равенств (3) и (6) следует, что при $h_0 = 0$ время падения равно времени подъема.

Скорость v' , которую имело тело в момент падения, найдем, подставляя t' в (2):

$$v' = v_0 - g \left(\frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g} \right)^2 + \frac{2h_0}{g}} \right) = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

При свободном падении

$$v' = -\sqrt{2gh}.$$

При $h_0 = 0$ скорость $v' = -v_0$, т. е. тело падает с той же по модулю скоростью, с которой его бросили.

IV. В момент времени $t = 0$ снаряд вылетает из орудия под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Найти наибольшую высоту подъема снаряда над землей $h_{\text{макс}}$, время его полета, дальность полета и уравнение траектории, по которой двигался снаряд. При каком угле α дальность полета максимальна? Сопротивление воздуха не учитывать.

Движение снаряда — двумерное, так как для определения положения точки, в которой находится снаряд в данный момент времени, надо задать две координаты.

Выбираем оси координат так, как показано на рис. 1.12. Проецируя начальную скорость v_0 на выбранные оси, мы видим, что движение тела можно описать как совокупность двух независимых движений: по вер-

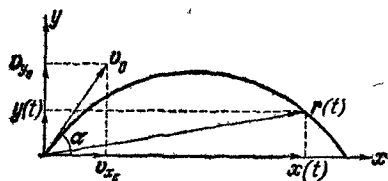


Рис. 1.12.

тикали и по горизонтали (прямое следствие векторного характера скоростей и ускорений).

Вертикальное движение тела с начальной скоростью $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, описываемое уравнением

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

достаточно подробно разбиралось в предыдущем примере.

Вспользовавшись формулами (5) и (6) примера III, получим:

$$h_{\max} = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g}, \quad (1)$$

$$t_{\pi} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (2)$$

Написав зависимость координаты x от времени ($x = v_0 \cos \alpha \cdot t$), найдем расстояние от точки бросания до точки падения (дальность полета):

$$s = xt_{\pi} = v_0 \cos \alpha \cdot t_{\pi} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (3)$$

Для нахождения уравнения траектории из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \\ x &= v_0 \cos \alpha \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

надо исключить время. Подставляя $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ в (4), находим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (5)$$

т. е. уравнение параболы.

Для нахождения угла α , при котором дальность полета максимальна, используем уравнение (3). Очевидно, что $s = s_{\max}$ при $\alpha = 45^\circ$ (кроме того, дальность полета одинакова при углах $45^\circ + \alpha$ и $45^\circ - \alpha$).

V. Диск катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Радиус диска R , угловая скорость ω . Найти скорости v_O , v_A , v_B и v_C точек диска O , A , B , C (рис. 1.13) в данный момент (мгновенные скорости).

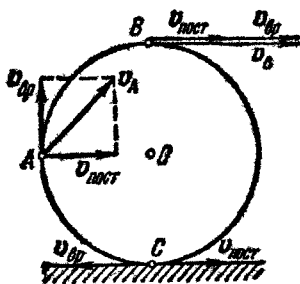


Рис. 1.13.

Все точки катящегося диска, кроме точки O , участвуют в двух движениях — поступательном и вращательном. Точка O движется только поступательно. Вектор скорости поступательного движения одинаков для всех точек диска (по

определению поступательного движения; диск считается абсолютно твердым). Модуль скорости вращательного движения для точек A , B и C тоже одинаков. В точке C вектор скорости поступательного движения направлен противоположно вектору скорости вращательного движения.

Так как мгновенная скорость точки C должна быть равна нулю (это и есть условие непроскальзывания диска), то

$$v_{C\text{вр}} = -v_{C\text{пост}}$$

Для точек A , B , C скорость $v_{\text{вр}} = v_{\text{пост}} = \omega R$. Следовательно,

$$v_O = v_{\text{пост}} = \omega R.$$

В точке B направления скоростей поступательного и вращательного движений совпадают, т. е.

$$v_B = 2\omega R.$$

Из рис. 1.13 видно, что скорость в точке A

$$v_A = \sqrt{2} \omega R.$$

Эта задача может быть решена иначе. Известно, что если одна точка тела неподвижна, то движение тела представляет собой вращение вокруг этой точки. При движении диска точка C в данный момент времени неподвижна ($v_C = 0$). Следовательно, мы можем рассматривать движение диска в тот же момент как вращение вокруг точки C (мгновенный центр вращения) с угловой скоростью ω_1 , причем

$$\omega_1 = \frac{v_O}{OC} = \frac{\omega R}{R} = \omega.$$

Тогда

$$v_B = \omega \cdot CB = 2\omega R,$$

$$v_A = \omega \cdot AC = \sqrt{2} \omega R.$$

ЗАДАЧИ

1.1. По какому закону должно двигаться тело, чтобы для вычисления его средней скорости можно было использовать формулу

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_{\text{нач}} + v_{\text{кон}}}{2}?$$

1.2. Каким является движение кабинок в «Колесе обозрения» — поступательным или вращательным (рис. 1.14)?

1.3. Два человека перекидываются мячом, двигаясь одновременно с этим навстречу друг другу. Найти путь, который пролетел мяч за время, в течение которого расстояние между людьми сократилось от l_1 до l_2 . Скорость первого человека v_1 , скорость второго — v_2 , скорость мяча — v_3 . Времени пребывания мяча в руках можно пренебречь. Считать полет мяча горизонтальным.

1.4. Зависит ли форма траектории движущегося тела от системы отсчета, в которой рассматривается движение?

1.5. Две автомашины едут по взаимно перпендикулярным дорогам. Скорость первой машины 11,1 м/сек, второй — 8,35 м/сек. Найти величину их относительной скорости.

1.6. Катер шел по реке из пункта A в пункт B и затем возвратился в пункт A . На его пути было водохранилище. Скорость течения реки v_0 , скорость течения в водохранилище пренебрежимо мала, скорость катера в стоячей воде v_1 . Больше или меньше затратил бы времени на тот же путь катер, если бы водохранилища не было и река текла бы всюду со скоростью v_0 ?

1.7. Две космические ракеты сближаются со скоростью $v_p = 8 \cdot 10^3$ км/ч. С одной из ракет каждые 20 мин посылаются на другую почтовые контейнеры со скоростью $v_k = 8 \cdot 10^3$ км/ч относительно первой ракеты. Определить, сколько сообщений получит командир второй ракеты в течение часа?

1.8. Скорость ветра возрастает прямо пропорционально высоте подъема, причем на поверхности земли она равна нулю, а на высоте h_0 величине V_0 (рис. 1.15). Под каким углом φ к вертикали необходимо выстрелить из зенитного орудия, чтобы снаряд вернулся в точку вылета, если в результате действия ветра снаряд приобретает дополнительную

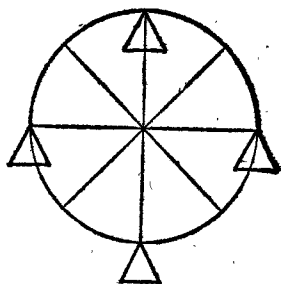


Рис. 1.14.

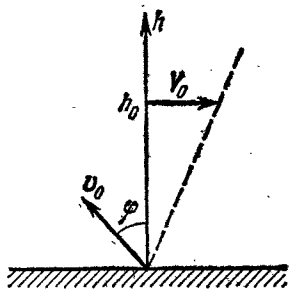


Рис. 1.15.

горизонтальную составляющую скорости $v_{\text{гор}} = kV_{\text{в}}$, где k — постоянное число, $V_{\text{в}}$ — скорость ветра? Начальная скорость снаряда v_0 .

1.9. В бассейне по трем дорожкам плывут пловцы: по второй и третьей дорожкам в одну сторону, а по первой — в противоположную. Скорость первого пловца v_1 , второго — v_2 . Найти скорость третьего пловца, если все время пловцы находятся на одной прямой и плывут по середине дорожек. Расстояние между серединами первой и второй дорожек a , а между серединами второй и третьей — b (рис. 1.16).

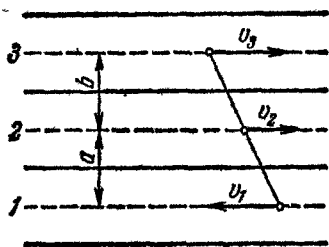


Рис. 1.16.

1.10. Дан вектор скорости тела в некоторый момент времени. Можно ли определить ускорение тела в этот момент?

1.11. Дайте качественное описание движений по графикам, изображенным на рис. 1.17. Найдите принципиальные ошибки, содержащиеся в этих графиках.

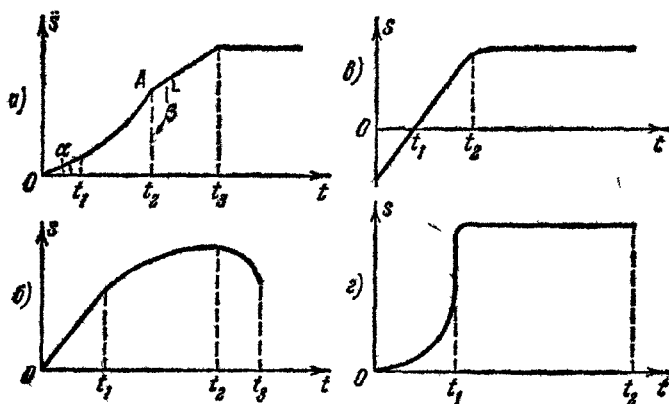


Рис. 1.17.

1.12. Даны два графика: модуля скорости v и проекции v_x скорости на ось x в зависимости от координаты x (рис. 1.18). Какой из этих графиков содержит ошибку?

1.13. Дан график проекции ускорения тела a_x в зависимости от времени (рис. 1.19). Найти проекцию скорости v_x в момент времени t_2 в трех случаях: $R_1 < R_2$, $R_1 = R_2$, $R_1 > R_2$.

1.14. Между точками A и B движется по прямой тело таким образом, что, выходя из точки A с начальной скоростью $v_{\text{нач}} = 0$, оно должно иметь в точке B скорость

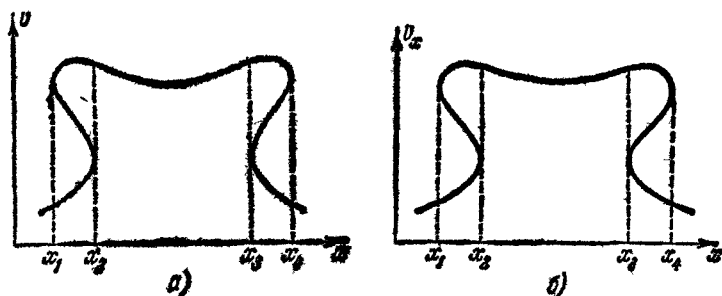


Рис. 1.18.

$v_{\text{кон}} = 0$. При этом тело может двигаться с постоянным по модулю ускорением a и равномерно. Каков должен быть характер движения, чтобы время его было минимальным?

1.15. По прямой, соединяющей точки A и B , расстояние между которыми 50 м, одновременно начинают двигаться три тела: первое тело движется от A к B равномерно со скоростью $v_1 = 10$ м/сек; второе тело движется также от A к B , но равноускоренно с ускорением $a_2 = 4$ м/сек², скорость его в начальный момент времени равна нулю; третье тело движется навстречу первым двум из B в A с ускорением $a_3 = 2$ м/сек² и начальной скоростью $v_3 = 5$ м/сек. Найти координаты точек встреч тел и времена, через которые встретятся эти тела.

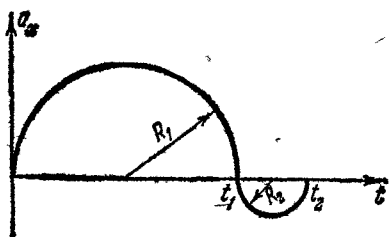


Рис. 1.19.

1.16. Прямой круговой пустотелый конус поставлен вверх основанием так, что оно параллельно земле (рис. 1.20).

Внутри него к центру основания O привязана нить с нанизанной на нее бусинкой. Под каким углом α к вертикали должна быть натянута нить, чтобы бусинка, скользя по ней без трения, достигла боковой поверхности конуса за кратчайшее время? Бусинка падает с начальной скоростью, равной нулю. Угол раствора конуса равен φ .

1.17. Покоящееся тело начинает двигаться по следующему закону: в течение первой секунды оно движется с постоянным ускорением, равным a , в течение второй — с ускорением $-a/2$, в течение третьей $a/4$, четвертой $-a/8$ и т. д. Определить, какой путь тело проходит за n -ю секунду. Какова скорость тела к концу n -й секунды? (В этой задаче мы полагаем, что время, за которое меняется величина и знак ускорения, пренебрежимо мало.)

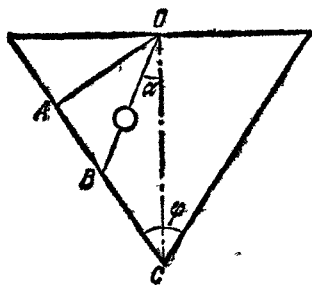


Рис. 1.20.

1.18. В момент времени $t = 0$ с высоты H начинает свободно падать тело. Одновременно с высоты $H/2$ начинает двигаться вертикально вверх с начальной скоростью v_0 другое тело. Найти их относительную скорость через время t после бросания *).

1.19. Два шарика бросают вертикально вверх, причем второй шарик бросают через τ сек после первого. Начальная скорость первого шарика v_0 . С какой скоростью v_1 надо бросить второй шарик, чтобы он: а) упал на 3τ сек позднее первого; б) упал на 3τ сек раньше первого?

1.20. В примере III (см. стр. 23) дана формула зависимости координаты тела, брошенного вертикально вверх с высоты h_0 и с начальной скоростью v_0 , от времени:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Какой физический смысл имеет она при $h_0 + v_0 t < \frac{gt^2}{2}$?

1.21. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . Найти точку, в которой его ускорение максимально.

*) Здесь и в дальнейшем во всех задачах мы пренебрегаем сопротивлением воздуха.

1.22. На первую ступеньку лестницы бросили резиновый мяч с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Перескакивая со ступеньки на ступеньку, мяч поднялся до верха. Размеры лестницы и траектория мяча показаны на рис. 1.21. Считая, что при ударе мяч не теряет скорости и угол падения равен углу отражения, найти время его подъема по лестнице (временем удара пренебречь).

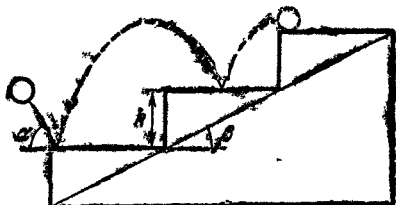


Рис. 1.21.

1.23. В спортивном зале, плоскость потолка которого пересекается с плоскостью пола под углом β , в точке A , находящейся на расстоянии d от линии пересечения плоскостей пола и потолка, спортсмен кидает мяч под углом α к полу. Траектория мяча лежит в плоскости, перпендикулярной плоскостям потолка

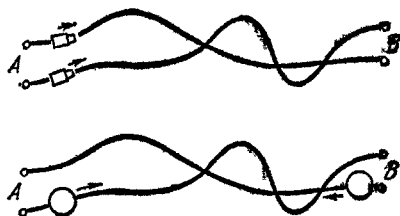


Рис. 1.22.

и пола. С какой скоростью спортсмен должен кинуть мяч, чтобы тот лишь коснулся потолка, не изменив траектории? Считать касание идеальным.

1.24. Из города A в город B ведут две дороги, каждая из которых не имеет самопересечений

ний (рис. 1.22). Доказать, что если два автомобиля могут выехать одновременно из A и проехать по этим дорогам в B так, что расстояние между ними ни в какой момент времени не будет больше 20 м, то две круглые платформы радиусом 11 м каждая, выехавшие одновременно одна из A в B , другая из B в A , не смогут проехать по этим дорогам, не столкнувшись.

1.25. Найти траекторию тела, зная, что модуль его скорости постоянен и равен b , а угол между направлениями вектора скорости в данный момент и в момент времени $t=0$ меняется по закону $\varphi=kt$, где $k=\text{const}$. Определить ускорение тела в момент t .

1.26. Диск радиусом R , насаженный на цилиндрическую ось радиусом r , может катиться по рельсам так, как это показано на рис. 1.23. Отметим на диске и на оси радиус OAB . Через некоторое время этот радиус снова придет в прежнее положение, при этом и ось, и диск совершат, очевидно, полный оборот. Если качение происходит

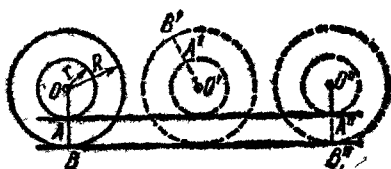


Рис. 1.23.

без проскальзывания, то каждой точке окружности оси можно сопоставить точку на отрезке AA'' , т. е. развернуть ее в этот отрезок. Из тех же соображений получим, что длина окружности диска равна длине отрезка BB'' . Так как AA'' и

BB'' равны, то отсюда легко сделать вывод, что длины этих (а значит, и любых других) окружностей равны. В чем заключается допущенная при рассуждениях ошибка?

1.27. Кольцо радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с угловой скоростью ω . Найти зависимость координат некоторой точки A кольца (рис. 1.24) от времени, если в начальный момент $x_A = 0$, $y_A = 0$, $\alpha = 0$.

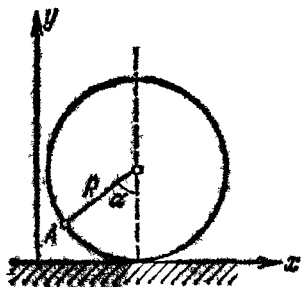


Рис. 1.24.

1.28. Мальчик кидает мяч в цель, находясь на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω . В первом случае он стоит в центре платформы, а мишень расположена на расстоянии R от него, во втором случае мальчик и мишень меняются местами. Ответить на следующие вопросы: 1) Под каким углом к направлению на цель должен кинуть мальчик мяч? 2) Всегда ли он может попасть в мишень?

1.29. Прямой круговой цилиндр катится по горизонтальной поверхности. На торце цилиндра выбрана произвольная точка A . Найти поверхность, являющуюся геометрическим местом точек цилиндра, имеющим в данный момент тот же, что и точка A , модуль скорости. Проскальзывания нет.

1.30. По вращающемуся диску ведут карандаш так, что он перемещается по прямой относительно окружающих предметов от края диска к его центру со скоростью, равной абсолютной скорости точек диска в месте соприкосновения диска с карандашом. Определить, через какое время карандаш коснется центра диска. Радиус диска R .

1.31. Лента перематывается с одной катушки на другую. Скорость подачи ленты постоянна и равна v . Найти угловую скорость вращения мотка через время t после начала перемотки. Начальный радиус мотка r_0 , толщина ленты Δl .

1.32. Человек вращает камень, привязанный к веревке длиной R , в вертикальной плоскости. Скорость вращения постоянна. В некоторой точке камень отрывается и летит вертикально вверх. Найти наибольшую высоту, на которую он поднимется, если известно, что в момент отрыва суммарное ускорение камня было направлено под углом 45° к вертикали.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1.1. Формулой можно пользоваться в том случае, если зависимость скорости движения от времени — линейная функция. Действительно, из рис. 1.25 убеждаемся, что

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{v_{нач} + v_{кон}}{2} (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v_{нач} + v_{кон}}{2}.$$

Линейная функция — это единственная функция, обладающая таким свойством.

1.2. Движение поступательное. Каждая прямая, проведенная внутри кабинки, остается при движении параллельной сама себе.

1.3. Время, за которое расстояние между людьми сократилось от l_1 до l_2 , равно $t = \frac{l_1 - l_2}{v_1 + v_2}$. Это время мяч находился в воздухе, летя со скоростью v_3 . Следовательно, путь, который он проделал, $s = v_3 t = \frac{l_1 - l_2}{v_1 + v_2} v_3$.

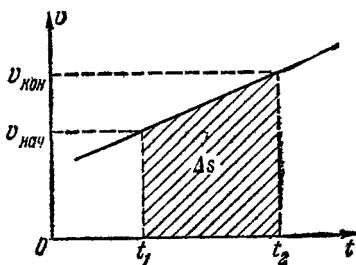


Рис. 1.25.

1.4. Зависит. Покажем это на двух простых примерах.

а) С точки зрения наблюдателя, находящегося в прямолинейно и равномерно движущемся вагоне, траектория свободно падающего мяча—прямая линия. С точки зрения наблюдателя, стоящего на земле, мяч летит по параболе, так как в системе отсчета, связанной с Землей, мяч имеет горизонтальную скорость, равную скорости вагона.

б) Пусть точка движется по радиусу вращающегося относительно Земли диска к его центру (диск расположен горизонтально). Тогда в системе отсчета, связанной с Землей, траектория точки—спираль, а в системе отсчета, связанной с диском,—прямая.

1.5. Величина относительной скорости равна

$$v_{\text{отн}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|,$$

где \mathbf{v}_1 —вектор скорости первой машины, \mathbf{v}_2 —второй. Фактически данное равенство представляет собой определение относительной скорости двух тел. Следовательно, для нахождения

$v_{\text{отн}}$ мы должны найти вектор, равный разности $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, и определить его модуль. Из рис. 1 26 видно, что

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 13,9 \text{ м/сек.}$$

Отметим, что изменение направления как обоих, так и каждого в отдельности векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 на противоположное не изменит результата.

1.6. Пусть отрезок пути, проходимый катером по водохранилищу, равен l . Тогда время, потраченное на этот путь при поездке из A в B и обратно, $t_1 = \frac{2l}{v_1}$. Если бы водохранилища не было и скорость течения реки на отрезке l была бы равна v_0 , то полное время, затраченное на эту часть пути, было бы

$$t_2 = \frac{l}{v_1 + v_0} + \frac{l}{v_1 - v_0}.$$

Сравним времена t_1 и t_2 :

$$t_2 = \frac{v_1 l - v_0 l + v_0 l + v_1 l}{v_1^2 - v_0^2} = \frac{2v_1 l}{v_1^2 - v_0^2} = \frac{v_1^2}{v_1^2 - v_0^2} \cdot \frac{2l}{v_1} = \frac{v_1^2}{v_1^2 - v_0^2} \cdot t_1.$$

Отсюда очевидно, что при любом $v_0 > 0$ (и, конечно, $v_0 < v_1$) $t_2 > t_1$, т. е. катер во втором случае затратил бы на поездку больше времени.

1.7. Расстояние между двумя последовательно выпущенными контейнерами $s = v_k \Delta t$, где Δt — время между пусками. В системе отсчета, в которой вторая ракета покоится, контейнеры летят к ней со скоростью $v = v_p + v_k$. За час она получит все посылки, которые в начале этого отрезка времени находились на расстоянии не большем, чем $(v_p + v_k) t$, где $t = 1$ ч. Тогда число контейнеров, принимаемых второй ракетой в течение часа, равно

$$n = \frac{(v_p + v_k) t}{v_k \Delta t} = \frac{1 + \frac{8000}{8000}}{\frac{1}{3}} = 6 \text{ (штук)},$$

т. е. контейнеры, для отправки которых командиру первой ракеты потребовалось 2 ч, будут получены на второй ракете за 1 ч.

1.8. Для решения задачи введем ось координат, как показано на рис. 1.27. Вертикальная плоскость xy параллельна вектору скорости ветра. Так как ветер не оказывает влияния на движение снаряда в вертикальном направлении, то зависимость вертикальной составляющей скорости v_y и высоты снаряда y от времени есть

$$v_y = v_0 \cos \varphi - gt,$$

$$y = v_0 \cos \varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Время полета снаряда

$$t_n = \frac{2v_0 \cos \varphi}{g}.$$

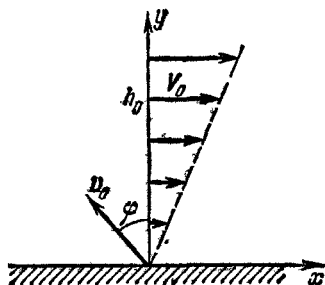


Рис. 1.27.

Горизонтальную составляющую скорости снаряда v_x представим в виде двух членов v_x и v_x'' , первый из которых не зависит от времени, а второй зависит:

$$v_x = v_x' + v_x'',$$

$$v_x' = -v_0 \sin \varphi,$$

$$v_x'' = k \frac{V_0}{h_0} y = \frac{kV_0}{h_0} \left(v_0 \cos \varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2} \right)$$

(здесь $\frac{V_0}{h_0}y$ — скорость ветра на высоте y). Слагающая v'_x обуславливает смещение снаряда за время t_n на $x' = v'_x t_n$ по оси x влево, а слагающая v''_x — вправо по оси x на x'' . Так как v''_x зависит от времени квадратично, то x'' представляет собой площадь под параболой, описываемой функцией $v''_x(t)$ за время от 0 до $t = t_n$. Нахождение площади под параболой уже разбиралось (см. стр. 21), поэтому приведем готовый результат:

$$x'' = \frac{kV_0}{h_0} \cdot \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{3g^2}.$$

Для того чтобы снаряд вернулся в исходную точку, необходимо выполнение условия

$$x' + x'' = 0, \\ -v_0 \sin \varphi \frac{2v_0 \cos \varphi}{g} + \frac{kV_0}{h_0} \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{3g^2} = 0.$$

Решая это уравнение относительно φ , находим

$$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1+4A^2}-1}{2A},$$

где

$$A = \frac{kv_0 V_0}{3gh_0}.$$

Для существования решения необходимо, чтобы $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$,

что выполняется для любых значений A .

1.9. Рассмотрим движение в системе отсчета, связанной с первым пловцом. В этой системе скорость второго пловца $v'_2 = v_1 + v_2$, а скорость третьего $v'_3 = v_1 + v_3$. То условие, что они всегда находятся на одной прямой, сохраняется.

Пусть в момент времени t_0 пловцы находятся в точках A ,

D и E (рис. 1.28). Через единицу времени они будут находиться в точках A , F , K (напомним, что пловец 1 в выбранной системе отсчета неподвижен).

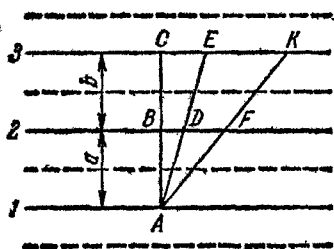


Рис. 1.28.

Расстояние DF численно равно $v_1 + v_2$, а $EK = v_1 + v_3$.
Из подобия треугольников следует

$$\frac{EK}{DF} = \frac{EA}{DA} = \frac{CA}{BA} = \frac{a+b}{a}$$

и

$$\frac{v_1 + v_3}{v_1 + v_2} = \frac{a+b}{a},$$

отсюда

$$v_3 = \frac{a+b}{a} (v_1 + v_2) - v_1 = \frac{b}{a} (v_1 + v_2) + v_2.$$

1.10. Определить ускорение нельзя. Для определения ускорения необходимо задать скорость тела в течение некоторого промежутка времени.

1.11. а) От момента времени $t=0$ до момента t_1 тело двигалось равномерно со скоростью $v_{01} = \operatorname{tg} \alpha$ ед. скорости, от t_1 до t_2 — ускоренно, от t_2 до t_3 — равномерно со скоростью $v_{23} = \operatorname{tg} \beta$ ед. скорости, затем тело остановилось.

В точке, соответствующей моменту времени t_2 , произошло мгновенное изменение скорости тела. На графике это иллюстрируется тем, что моменту времени t_2 соответствуют две касательные к кривой в точке A (рис. 1.17, а). Это невозможно. Скачок скорости означает, что ускорение было бесконечно большим. Поэтому переход от одного участка кривой к другому должен быть плавным. Это замечание справедливо также по отношению к графикам зависимостей любых физических величин от времени. Однако часто для большей наглядности графика этим требованием приходится пренебрегать.

б) От момента $t=0$ до t_1 тело двигалось равномерно, после t_1 — замедленно (тангенс угла наклона касательной убывает). После точки, отвечающей моменту времени t_2 , график не имеет смысла, так как путь не может уменьшаться со временем.

в) График, соответствующий интервалу времени от $t=0$ до t_1 , также противоречит определению пути: путь — существенно положительная величина, и отрезок прямой на графике между моментами $t=0$ и t_1 не имеет физического смысла. От t_1 до t_2 тело двигалось равномерно, затем остановилось.

г) График предполагает в момент времени t_1 бесконечно большую скорость у тела, а это невозможно.

1.12. Неверен график рис. 1.18, б. В точках с координатой x , лежащей между x_1 и x_2 или x_3 и x_4 , тело побывало трижды, имея при этом разные проекции скорости v_x . В то же время проекция скорости v_x оставалась больше нуля, т. е. тело двигалось все время в одну и ту же сторону по оси x . Эти два требования несовместимы.

Второй график (рис. 1.18, а) не содержит ошибки, так как это график модуля скорости и поэтому не исключена

возможность того, что тело в различные моменты времени проходило через точки с одной и той же координатой x , имея различные скорости.

1.13. Проекцию скорости в момент t_2 можно определить как алгебраическую сумму площадей полуокружностей с радиусами

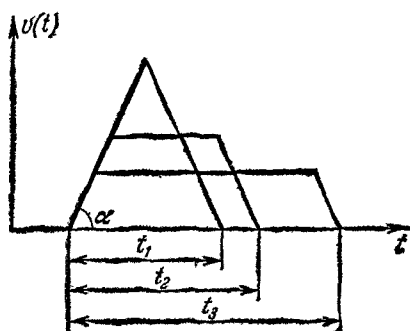


Рис. 1.29.

$$R_1 = \frac{t_1}{2} \text{ и } R_2 = \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

(Напоминаем, что площадь, ограниченная частью кривой, лежащей под осью x , считается отрицательной.)

При $R_1 < R_2$ имеем

$$v_x = \frac{\pi R_2^2}{2} - \frac{\pi R_1^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R_2^2 - R_1^2).$$

При $R_1 = R_2$ проекция $v_x = 0$ и при $R_1 > R_2$

$$v_x = \frac{\pi R_1^2}{2} - \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi}{2} (R_1^2 - R_2^2).$$

1.14. Решим задачу графически (рис. 1.29). График $v(t)$ может представлять собой либо трапецию, что соответствует сначала равноускоренному движению, в середине пути — равномерному и в конце — равнозамедленному, либо треугольник, что соответствует лишь равноускоренному и равнозамедленному движениям. Угол при основании этих фигур определяется ускорением $a = \operatorname{tg} \alpha$ ед. ускорения. Площади фигур одинаковы — это путь из A в B .

Очевидно, что наименьшее основание (т. е. наименьшее время $t_1 < t_2 < t_3$) при данных площади и угле α будет у треугольника. Тело половину пути должно двигаться равноускоренно, а вторую половину — равнозамедленно.

1.15. Решение задачи дано на рис. 1.30.

1.16. Пусть нить натянута по прямой BO , которая составляет угол α с вертикалью CO (см. рис. 1.20).

Проведем $AO \perp AC$. Угол $AOB = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} - \alpha$,

$$BO = \frac{AO}{\cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2} - \alpha\right)} = \frac{AO}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right)}.$$

Бусинка будет скользить по нити с ускорением $a = g \cos \alpha$. Найдем время прохождения пути BO . Так как

$$BO = \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2},$$

то

$$t = \sqrt{\frac{2BO}{g \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2AO}{g} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right) \cos \alpha}}.$$

Время t будет минимальным при максимальном значении произведения $\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right) \cos \alpha$.

Но

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right) \cos \alpha &= \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 2\alpha\right) + \sin \frac{\varphi}{2}}{2}. \end{aligned}$$

При заданном значении φ последнее выражение будет максимальным, если

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 2\alpha\right) = 1 \quad \text{или}$$

$$\frac{\varphi}{2} + 2\alpha = 90^\circ. \quad \text{Отсюда}$$

$$\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{4}.$$

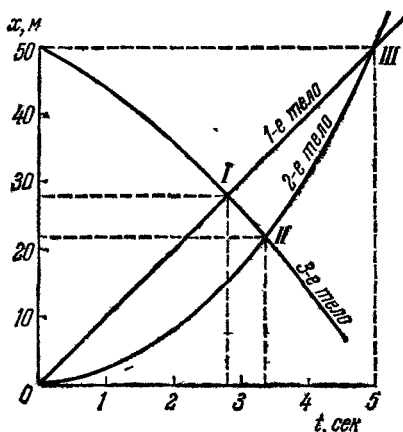


Рис. 1.30.

1.17. Обозначим через v_1, v_2, v_3, \dots скорости тела в конце первой, второй, третьей и т. д. секунд.

Тогда

$$\begin{aligned}v_1 &= at, \\v_2 &= at - \frac{at}{2}, \\v_3 &= at - \frac{at}{2} + \frac{at}{4}, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Скорость в конце n -й секунды

$$\begin{aligned}v_n &= at - \frac{at}{2} + \frac{at}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{at}{2^{n-1}} = \\&= at \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} at = \\&= \frac{2at}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right].\end{aligned}$$

Пути, пройденные телом за первую, вторую и т. д. секунды:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{at^2}{2} = at^2 - \frac{at^2}{2}, \\s_2 &= at^2 - \frac{at^2}{4} = at^2 - \frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{4}, \\s_3 &= at^2 - \frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{4} - \frac{at^2}{8}, \\&\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Путь, пройденный за n -ю секунду,

$$\begin{aligned}s_n &= at^2 - \frac{at^2}{2} + \frac{at^2}{4} + \dots + (-1)^n \frac{at^2}{2^n} = \\&= at^2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} \right] = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} at^2 = \\&= \frac{2at^2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right].\end{aligned}$$

1.18. Тела движутся с одинаковым ускорением, равным g . Очевидно, что их относительная скорость остается постоянной и равной v_0 в течение всего полета.

1.19. а) Пусть первый шарик до наивысшей точки траектории летел t сек. Тогда второй надо бросить с такой начальной скоростью v_1 , чтобы он достиг наивысшей точки

через $(t + \tau)$ сек от момента его бросания. Действительно, при этом он будет в полете на 2τ сек больше, чем первый шарик. Брошен же он был позднее первого на τ сек. Таким образом, он упадет на 3τ сек позднее первого шарика. В наивысшей точке траектории для первого шарика $v_0 - gt = 0$, для второго $v_1 - g(t + \tau) = 0$. Из этих уравнений находим $v_1 = v_0 + g\tau$. Аналогично рассуждая, для случая (б) получим $v_1 = v_0 - 2g\tau$.

1.20. Высота h отсчитывается от поверхности земли. Условие $h_0 + v_0 t < \frac{gt^2}{2}$ означает, что $h < 0$. Это не имеет смысла. Однако если бы в месте падения тела находилась шахта или яма, то формула при этом условии давала бы правильное описание движения.

1.21. Ускорение одинаково во всех точках и равно g .

1.22. Горизонтальная проекция перемещения мяча $x = 2h \operatorname{ctg} \beta$. Горизонтальная проекция скорости v_x постоянна и равна $v_0 \cos \alpha$. Время подъема мяча

$$t = \frac{2h \operatorname{ctg} \beta}{v_0 \cos \alpha}.$$

1.23. Выберем оси координат так, как это показано на рис. 1.31. Тогда уравнение траектории мяча, брошенного под углом α с начальной скоростью v_0 , будет

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

(см. пример IV, формула (5)). Уравнение линии пересечения плоскости потолка с плоскостью, в которой лежит траектория мяча (линия BC на рисунке), запишется как

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где $k = \operatorname{tg} \beta$, $b = d \operatorname{tg} \beta$.

Для того чтобы мяч коснулся потолка, не изменив траектории, надо, чтобы линии, описываемые уравнениями (1) и

(2), имели одну общую точку (касались друг друга). Для нахождения координат точки касания запишем уравнения (1)

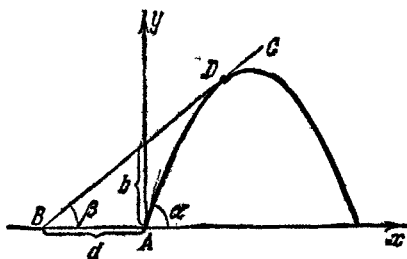


Рис. 1.31.

и (2) совместно в виде системы

$$\left. \begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right), \\ y &= x \operatorname{tg} \beta + d \operatorname{tg} \beta. \end{aligned} \right\}$$

Решая ее, получим уравнение для координаты x :

$$x^2 \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) + x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + d \operatorname{tg} \beta = 0. \quad (3)$$

Требование единственности решения уравнения (3) означает равенство нулю детерминанта

$$(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2 - \frac{2gd \operatorname{tg} \beta}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gd \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha)^2}}.$$

1.24. Выбираем систему координатных осей так, как это показано на рис. 1.32. Отложим на оси y отрезок OB'' , представляющий в некотором масштабе длину первой дороги

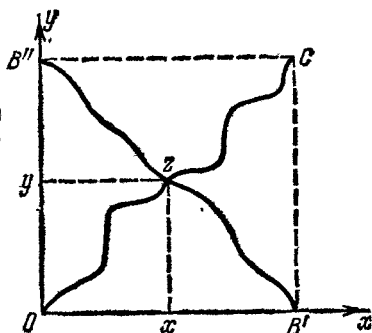


Рис. 1.32.

(городу A соответствует точка O , городу B —точка B''), а на оси x отрезок OB' —длину второй дороги (городу A соответствует точка O , городу B —точка B'). Тогда какому-то положению автомобиля, движущегося по первой дороге, будет соответствовать некоторая точка y на отрезке OB'' , а положению второго автомобиля в тот же момент времени—некоторая точка x на отрезке OB' .

Точка z на плоскости со-

ответствует такому моменту времени, когда второй автомобиль находился в точке x , а первый в точке y . Другими словами, она характеризует положение обоих автомобилей. Одновременное движение автомобилей по первой и второй дорогам можно изобразить некоторой непрерывной кривой OzC , которая должна пройти через точку O (город A) и C (соответствующую приходу автомобилей в B).

1.28. В первом случае путь мяча до цели R . Время полета $t = R/v_0$. Мишень переместится за это время на расстояние $s = \omega R t$. Мальчик должен кинуть мяч с опережением на угол $\alpha = s/R = \omega R/v_0$ (рис. 1.34, а). Во втором случае мальчик, а следовательно, и брошенный им мяч, имеют

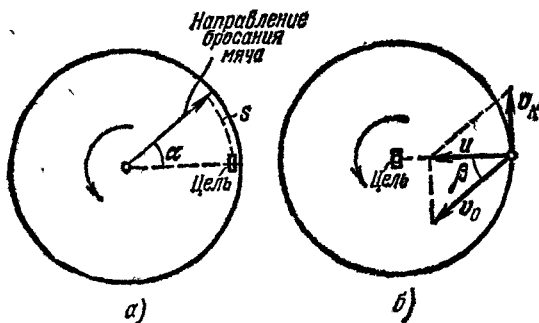


Рис. 1.34.

касательную скорость $v_k = \omega R$. Для того чтобы результирующая скорость была направлена к центру платформы, мяч нужно бросить под некоторым углом β к направлению на центр (рис. 1.34, б):

$$\sin \beta = \frac{\omega R}{v_0}, \quad \beta = \arcsin \frac{\omega R}{v_0}.$$

Результирующая скорость мяча в этом случае равна

$$u = v_0 \cos \beta = v_0 \sqrt{\frac{v_0^2 - \omega^2 R^2}{v_0^2}}$$

и направлена к центру.

Если $v_0 \leq \omega R$, то мальчик никогда не сможет попасть в цель, т. е. не найдется такого угла бросания, при котором результирующая скорость будет направлена к центру.

1.29. В данный момент времени распределение скоростей точек катящегося цилиндра такое же, как если бы он вращался с угловой скоростью ω вокруг отрезка прямой BC (рис. 1.35), по которой происходит в данный момент его касание с горизонтальной поверхностью. Прямую BC называют *мгновенной осью вращения*. Поэтому геометрическое место точек цилиндра, имеющих в данный момент тот же, что и точка A , модуль скорости, есть часть поверхности цилиндра, радиус которого AB , а ось совпадает с BC .

1.30. Скорость движения карандаша v_k равна касательной скорости точки диска в том месте, где карандаш соприкасается с ним, $v_R = \omega r$, r — расстояние точки касания от центра диска (полное расстояние, которое должен пройти карандаш, равно длине радиуса R).

Путь, который карандаш проходит за малый промежуток времени Δt , можно определить, считая скорость v_R постоянной за это время:

$$\Delta r = v_R \Delta t = \omega r \Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{\omega r}.$$

Разбив все расстояние R на n равных малых отрезков Δr , получим время прохождения карандаша от края диска к центру, при условии, что его скорость остается на каждом из отрезков Δr постоянной и равной $v_i = \omega r_i$ (i — номер отрезка Δr , считая от центра). Тогда

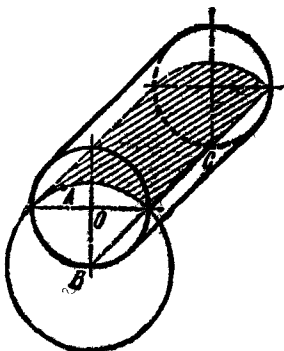


Рис. 1.35.

$$t_n = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta r}{r_i},$$

где $r_1 = \Delta r$, $r_2 = 2 \Delta r$, \dots , $r_i = i \Delta r$. Следовательно,

$$t_n = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta r}{i \Delta r} = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Для нахождения времени t движения при непрерывном изменении скорости необходимо перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$t = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}.$$

Сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ бесконечно велика. В этом можно убедиться следующим образом. Напишем сумму k членов ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k}, \quad (1)$$

она больше суммы ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

при равном числе членов. Последний ряд представим как

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (2)$$

Ясно, что сумма ряда (2) стремится к бесконечности при неограниченно возрастающем числе членов, тем более быстро стремится к бесконечности сумма ряда (1) при том же условии. Карандаш никогда не придет в центр диска.

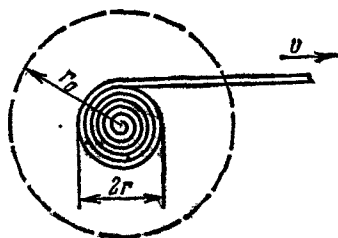


Рис. 1.36.

1.31. Для определения угловой скорости ω необходимо знать радиус мотка по прошествии времени t , так как $\omega = \frac{v}{r}$. Объем ленты, смотанной за время t , равен $V = vt \Delta l h$, где vt — длина, Δl — толщина и h — ширина ленты. С другой стороны, этот же

объем равен $\pi(r_0^2 - r^2)h$ (рис. 1.36) и, следовательно,

$$\pi(r_0^2 - r^2) = vt \Delta l, \quad r = \sqrt{r_0^2 - \frac{vt \Delta l}{\pi}},$$

и отсюда

$$\omega = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 - \frac{vt \Delta l}{\pi}}}.$$

1.32. Результирующее ускорение в момент отрыва камня складывается из тангенциального ускорения, равного g , и нормального, равного v^2/R . Так как результирующее ускорение направлено под углом 45° к вертикали, т. е. к направлению g , то $g = v^2/R$, и начальная скорость камня

$$v = \sqrt{gR}.$$

Используя формулу (4) примера III, найдем, что

$$h_{\text{макс}} = \frac{v^2}{2g} = \frac{gR}{2g} = \frac{R}{2}.$$

ГЛАВА II

ДИНАМИКА (МАССА, СИЛА, ИМПУЛЬС)

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Закон инерции и основные динамические величины

До сих пор, рассматривая движение тела, мы не интересовались тем, при каких условиях осуществляется тот или иной вид движения. Например, в каком-случае тело движется равномерно, а в каком равноускоренно? Кинематика вообще не ставит своей целью ответить на вопрос: почему происходит движение тел?

Ответ на этот вопрос не так прост и очевиден, как это может показаться. Долгое время в науке господствовал взгляд Аристотеля, согласно которому для того, чтобы тело продолжало находиться в движении, необходимо воздействие на него других тел. Эта точка зрения соответствует непосредственному, интуитивному представлению о движении.

Например, тележка движется только тогда, когда мы ее толкаем. Если толкнуть тележку сильнее, она начнет двигаться более быстро и, наконец, если совсем прекратить воздействие, тележка остановится. Наличие у тела скорости связывалось, таким образом, с действием на него других тел, а величина и направление скорости — с характером и интенсивностью этого действия. Эти представления продержались в науке почти две тысячи лет, не подвергаясь проверке опытом. Они были опровергнуты Галилеем, впервые применившим методы научного рассуждения в истолковании поставленных им же экспериментов.

Изучая скатывание гладкого шара с наклонной плоскости, Галилей заметил, что при движении вниз шар движется ускоренно, постепенно увеличивая скорость, а при движении вверх — замедленно. Отсюда он сделал вывод; что,

скатившись на горизонтальную плоскость, где нет наклона ни вверх, ни вниз, шар будет вечно двигаться с одной и той же скоростью, если только плоскость продолжена неограниченно и ничто не мешает движению. Эту же мысль можно проследить и на примере с тележкой. Получив толчок, тележка через некоторое время остановится. Однако уменьшая сопротивление воздуха и трение между тележкой и поверхностью, можно неограниченно увеличивать ее путь.

В пределе (при отсутствии трения и сопротивления воздуха) тележка будет двигаться неограниченно долго с неизменной по величине и направлению скоростью. Это утверждение называют *законом инерции*. Четкая формулировка его впервые была дана Ньютоном. Он гласит:

Тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него не действуют другие тела.

Здесь и в дальнейшем под телом (если не оговаривается противное) мы подразумеваем материальную точку.

Ясно, что фактически проверить этот закон нельзя, так как нельзя реализовать бесконечную плоскость и нельзя поставить тело в такие условия, чтобы на него не действовали другие тела. Однако можно проверить обратное, а именно: во всех тех случаях, когда тело изменяет свою скорость по величине или направлению, т. е. приобретает ускорение, всегда можно указать тела, действие которых вызывает это ускорение. Искривляется траектория тела, брошенного под углом к горизонту; причина — действие Земли. Шар, ударяясь о стенку, меняет свою скорость; причина — действие стенки, и т. д.

Физическая величина, характеризующая действие одних тел на другие, называется *силой*. Таким образом, причиной ускорения тела является действующая на него сила. Поскольку ускорение есть величина векторная, сила — тоже вектор. Опыт показывает, что направления вектора силы и вектора ускорения совпадают, а величина ускорения пропорциональна величине действующей силы.

Мы видим, что состояние тела изменяется под действием других тел. Посмотрим теперь, как влияют на это изменение свойства самого тела. Предположим, что мы подействовали некоторой силой на покоящееся тело. Так как под действием силы тело приобретает не скорость, а ускорение, то для того чтобы оно достигло конечной

скорости, необходимо время. Это время для различных тел будет разным.

Свойство тела изменять свое состояние не сразу, а постепенно, называют *инерцией*. Скалярную величину, характеризующую инерцию тела, называют его *инертной массой* или просто *массой*. Чем медленнее тело меняет свое состояние под действием силы, тем больше его масса. По смыслу определения ясно, что масса любого тела больше нуля. Опыт показывает, что масса — величина аддитивная. Это означает, что если сложить два тела вместе (например, слепить шар из двух восковых шариков), то их общая масса равна сумме масс каждого из тел в отдельности.

Кроме того, масса тела не зависит ни от условий, в которых находится тело, ни от взаимодействий его с другими телами.

§ 2. Второй закон Ньютона. Уравнения движения. Основная задача механики

Обобщая многочисленные опыты, Ньютон установил связь массы и ускорения тела с действующей на него силой в виде следующего соотношения:

$$F = ma, \quad (2.1)$$

где F — векторная сумма всех действующих на тело сил, m — масса тела и a — ускорение. Равенство (2.1) называют *вторым законом Ньютона* для материальной точки (первым законом Ньютона считается закон инерции). Следует отметить, что закон инерции является прямым следствием второго закона Ньютона.

Действительно, предположим, что на тело не действуют никакие силы. При этом левая часть равенства (2.1) обращается в нуль. Так как $m \neq 0$, то в нуль обращается вектор ускорения. Отсюда вытекает, что $v = \text{const}$ ($a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, $\Delta v = 0$, $v = \text{const}$), что и представляет собой математическое выражение закона инерции. Существенным является постоянство вектора скорости, обеспечивающее прямолинейность движения.

Если имеется группа тел или, как говорят, *механическая система*, то равенство (2.1) можно записать для каждого

из тел системы. Соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= m_1 a_1, \\ F_2 &= m_2 a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ F_i &= m_i a_i, \\ &\dots \dots \dots \\ F_n &= m_n a_n, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где n — число тел в системе, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Уравнения (2.2) называют *уравнениями движения механической системы*.

Основная задача механики состоит в том, чтобы по заданному (например, измеренному) состоянию тела) в какой-либо момент времени определить все последующие его состояния, не прибегая к измерениям. При этом действующие на тело силы предполагаются известными.*

Часто ставится обратная задача: зная последовательность состояний, проходимых телом, найти действующие на него силы. Предположим, что координаты тела в некоторый момент времени, его скорость и действующие на него силы известны. Для того чтобы определить состояние тела через малый промежуток времени Δt , необходимо знать ускорение. Ускорение же определяется по известной силе из уравнения (2.1). Повторяя эти вычисления, мы найдем всю последовательность состояний тела. Для системы тел рассуждения аналогичны, и ускорения тел находятся из системы уравнений (2.2). Поэтому уравнения (2.2) и называют *уравнениями движения*.

Мы не будем решать основную задачу механики в такой общей постановке, так как для этого необходимо знание высшей математики, а будем исследовать ее различные частные случаи.

§ 3. Инерциальные системы отсчета

Мы уже говорили о том, что для описания движения тела необходимо указать систему отсчета. Действительно, во второй закон Ньютона входит ускорение, в законе инерции говорится о скорости, а эти величины, если не указана

*) Под состоянием тела в механике понимается его координата и скорость в данный момент.

система отсчета, лишены всякого смысла. Во всех предыдущих рассуждениях молчаливо предполагалось, что в качестве системы отсчета выбрана Земля или какие-либо неподвижные относительно Земли тела. Вместе с тем без ответа остается вопрос: будут ли выполняться физические законы в других системах? Можно ли быть уверенным в том, что опыт, проведенный в движущемся вагоне, даст такой же результат, как если бы он был произведен в неподвижной относительно Земли лаборатории?

Оказывается, существует целый ряд систем, в которых выполняются законы Ньютона и для которых верно основное утверждение: всегда, когда тело приобретает ускорение, можно указать тела, действие которых вызывает это ускорение.

Систему отсчета, в которой это утверждение, вытекающее из закона инерции, выполняется, называют *инерциальной*. Из этого следует, что Земля — инерциальная система *).

Далеко не всякая система отсчета инерциальна. Приведем простой пример. Общеизвестно, что при резком торможении прямолинейно движущегося вагона (т. е. когда система отсчета «вагон» приобретает ускорение относительно Земли) находящийся внутри него человек испытывает толчок в направлении движения (в направлении, противоположном направлению ускорения вагона относительно Земли), т. е. человек приобретает ускорение относительно стенок вагона, но в этом случае нельзя сказать, что ускорение вызвано действием каких-либо тел. Таких тел не существует. В данном случае причина ускорения человека — особые свойства самой системы отсчета, а именно — ускорение ее по отношению к Земле (инерциальной системе).

Таким образом, система отсчета, связанная с вагоном, не будет инерциальной при движении вагона с ускорением относительно Земли. То же самое можно сказать и при равномерном движении вагона, но по закругленному пути. Суммируя, мы можем сказать, что всякая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной системы, будет *неинерциальной*.

В то же время очевидно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью ($v = \text{const}$) относительно

*) Вообще говоря, это утверждение не строгое. Однако в тех случаях, когда мы будем пользоваться инерциальностью системы отсчета, связанной с Землей, оно будет вносить пренебрежимо малую ошибку.

инерциальной системы, сама будет инерциальной. Существует бесконечное множество инерциальных систем, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

В инерциальных системах отсчета физические явления выглядят наиболее просто; например, тело, покоящееся относительно некоторой инерциальной системы, будет оставаться в покое до тех пор, пока на него не подействует другое тело. В неинерциальных же системах (скажем, в корабле, попавшем в шторм) первоначально покоившееся тело в любой момент времени может начать двигаться в произвольном направлении.

Использование таких систем в общем случае неудобно, и поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать все процессы относительно Земли. Только в отдельных случаях нужно уметь пользоваться неинерциальными системами отсчета. Мы подробнее остановимся на этом, рассматривая принцип эквивалентности.

§ 4. Принцип относительности Галилея

Опыт показывает, что во всех инерциальных системах отсчета механические явления протекают одинаково. Другими словами, в механическом отношении все инерциальные системы равноправны — среди них нет выделенных систем. Это утверждение называют *принципом относительности Галилея*. Из принципа относительности, в частности, следует, что никакие механические опыты или наблюдения, производимые внутри системы, движущейся равномерно и прямолинейно относительно Земли, не позволяют установить этого движения.

Во избежание недоразумений отметим, что одно и то же движение в разных инерциальных системах отсчета будет выглядеть по-разному, если начальные условия движения в этих системах неодинаковы.

§ 5. Силы и поля

Мы определили силу как физическую величину, характеризующую взаимодействие тел. Все взаимодействия между телами можно разделить на две большие группы: в первую группу мы будем относить взаимодействия тел на расстоянии, во вторую группу — различные взаимодействия тел при непосредственном соприкосновении.

Рассмотрим сначала взаимодействия первой группы. Взаимодействия тел на расстоянии осуществляются посредством

различного вида полей (электромагнитного, гравитационного и др.). В механике мы познакомимся с гравитационным полем (полем сил тяжести).

Рассмотрим общие свойства физических полей. Поле определяется по своему действию на тела, помещенные в него. Два поля считаются физически тождественными, если они производят одинаковое действие на некоторое тело в произвольный момент времени и в любой точке пространства.

Любое тело служит источником гравитационного поля. На всякое другое тело, находящееся в нем, поле действует с некоторой силой.

Таким образом, данное выше определение силы не совсем точно, поскольку сила характеризует не только взаимодействие тела с телом, но и взаимодействие тела с полем.

Опыт показывает, что *любые два взаимодействующих тела равноправны в том смысле, что сила, с которой первое тело действует на второе, равна по величине силе, с которой второе тело действует на первое. Направления обеих сил противоположны.*

Это утверждение называют *третьим законом Ньютона*.

В классической механике, которую мы изучаем, считается, что силы, действующие в данный момент, зависят от расположения тел в тот же самый момент времени. Этому соответствует предположение о распространении взаимодействия между телами с бесконечно большой скоростью, т. е. если с одним из тел произойдет какое-либо изменение (например, оно сместится), то другое тело «почувствует» это в тот же момент, на каком бы расстоянии друг от друга тела ни находились.

Поскольку сила, действующая между телами, зависит только от их взаимного расположения, это приводит к важному свойству уравнения (2.1)—это уравнение не меняется при изменении знака времени. Физически это означает, что если тело проходит определенную последовательность состояний в соответствии с уравнением (2.1), то всегда возможно обратное движение, при котором тело будет проходить те же самые состояния, но в обратном порядке. Докажем это утверждение.

При замене t на $(-t)$ величины, входящие в уравнение $F = ma$, преобразуются следующим образом: $F \rightarrow F^*$, так как сила, действующая на тело, зависит только от расстояний

*) Значок \rightarrow означает переход одной величины в другую.

между данным телом и действующими на него телами, а расстояние это не меняется при $t \rightarrow -t$. Кроме того, $m \rightarrow m$ по определению массы, так как масса есть характеристика тела и не может зависеть от знака времени. Рассмотрим теперь, как преобразуется ускорение при такой замене. Известно, что

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \quad v = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

При $t \rightarrow -t$ будет осуществлена замена

$$\Delta t \rightarrow -\Delta t; \quad \Delta r \rightarrow \Delta r.$$

Тогда

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow -\frac{\Delta r}{\Delta t}; \quad v \rightarrow -v; \quad \Delta v \rightarrow -\Delta v$$

и

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \frac{-\Delta v}{-\Delta t} = a.$$

Итак, при замене t на $-t$

$$F = ma \rightarrow F = ma.$$

Необходимо отличать физическое поле от способа его математического описания. В математике векторное поле считается заданным, если каждой точке некоторой области пространства соответствует определенный вектор. Физическая природа этого вектора несущественна. Рассмотрим, например, течение жидкости по трубе. Любой точке внутри трубы мы можем сопоставить вектор скорости той частицы жидкости, которая находится в данный момент времени в данной точке. Совокупность всех таких векторов образует векторное поле скоростей жидкости. Точно так же рассматривается в математике поле сил тяжести вблизи земной поверхности. С математической точки зрения между этими полями нет различия (так как оба поля векторные). В действительности поле тягести—физическая реальность, а поле скоростей—математическая абстракция, так как поле скоростей взаимодействия не передает.

Аналогично векторному полю вводится понятие скалярного поля. Скалярное поле считается заданным, если каждой точке некоторой области пространства ставится в соответствие определенный скаляр. Примерами скалярных полей являются поле температур и поле давлений.

§ 6. Силы трения и связи

Перейдем к рассмотрению взаимодействий тел при непосредственном соприкосновении.

Если движущееся тело соприкасается с другими телами, то со стороны этих тел на него действуют некоторые силы. Рассмотрим, для определенности, движение некоторого тела 1 по поверхности другого тела 2 (рис. 2.1), неподвижного относительно выбранной системы отсчета. В общем случае со стороны тела 2 на тело 1 действует сила f , направленная под произвольным углом к поверхности. Разложим эту силу на две составляющие — нормальную f_N и касательную f_T .

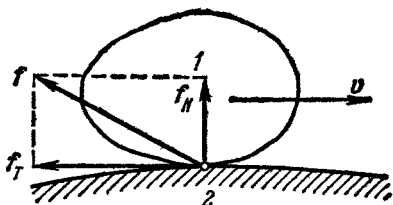


Рис. 2.1.

Как показывает опыт, нормальная составляющая зависит от величины деформации тел и не зависит от свойств поверхностей соприкосновения. Это — так называемая *упругая сила*. Часто деформации соприкасающихся тел бывают весьма малы. В этом случае ими пренебрегают и о телах говорят как об абсолютно твердых.

Касательная составляющая зависит от свойств поверхностей соприкасающихся тел. Ее называют *силой трения*. Силы трения возникают не только при соприкосновении твердых тел, но также и при движении твердого тела в жидкости или газе. Соответственно различают *сухое* и *жидкое трение*.

Существенное отличие жидкого трения от сухого состоит в том, что во втором случае сила трения может возникнуть и между неподвижными телами — так называемая *сила трения покоя*. Если же тело покоится относительно жидкости или газа, то со стороны последних на него может действовать только сила, перпендикулярная к поверхности соприкосновения.

Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению той внешней силе, которая стремится вызвать скольжение. С ростом этой внешней силы она растет до некоторой максимальной величины, при которой начинается скольжение. Эта максимальная величина

определяется законом Кулона

$$f_{\text{макс}} = kN,$$

где k — коэффициент, зависящий от свойств поверхностей соприкосновения и определяемый экспериментально (*коэффициент трения*), N — сила нормального давления. Если внешняя сила достигает $f_{\text{макс}}$, начинается скольжение. Мы будем считать, что и при скольжении сила трения определяется законом Кулона.

Сила жидкого трения существенно зависит от величины относительной скорости тела и среды. При малой скорости эта зависимость линейна, при большой — квадратична.

Не следует думать, что взаимодействие тел при непосредственном соприкосновении принципиально отличается от взаимодействия тел на расстоянии. Понятие силы трения, например, возникает в результате усреднения огромного числа элементарных взаимодействий между молекулами соприкасающихся тел в поверхностном слое. Это взаимодействие осуществляется посредством полей. Важное свойство таких полей — очень быстрое ослабление при увеличении расстояния. Это позволяет результат всех таких взаимодействий представлять как действие силы, возникающей при контакте между телами. Такое представление — очень удобная идеализация.

Тела, с которыми соприкасается при своем движении данное тело (или система тел), называют *связями*. Связи накладывают определенные ограничения на движение тела. Другими словами, при наличии связей координаты или скорости тела уже не могут быть произвольными.

Обычно такими связями служат различные стержни, нити, шарниры, поверхности и т. п. Силы, действующие со стороны связей на данное тело, называют *реакциями связей*. В том случае, когда можно пренебречь силами трения, связи называют идеальными. При этом реакции связей направлены по нормали к поверхности соприкосновения.

§ 7. Импульс тела. Другая формулировка второго закона Ньютона

Второму закону Ньютона можно дать более общую формулировку. Умножим с этой целью равенство (2.1) на малый промежуток времени Δt :

$$F \Delta t = ma \Delta t = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta t = m \Delta v = \Delta (mv). \quad (2.3)$$

Под F , как всегда, понимается векторная сумма действующих на тело сил.

Величину $F \Delta t$ называют *импульсом силы* за время Δt , или *количеством движения*. Вектор $m\mathbf{v}$ называют *импульсом тела*. Импульс тела часто обозначают буквой $p = m\mathbf{v}$.

Используя эти новые понятия, мы можем сформулировать *второй закон Ньютона* для материальной точки следующим образом:

*Импульс приложенной к телу силы равен изменению импульса тела *).*

В таком виде второй закон Ньютона удобно использовать тогда, когда известна скорость тела до взаимодействия и необходимо вычислить его скорость после взаимодействия.

Равенство (2.3) является приближенным, так как предполагается, что промежуток Δt настолько мал, что за это время сила не успевает заметно измениться.

Если сила непостоянна и действует в течение конечного промежутка времени t , необходимо произвести предельный переход. Разбивая по общим правилам промежуток времени t на n малых промежутков Δt_i ($i = 1, 2, \dots, n$), перейдем в формуле (2.3) к пределу при $\Delta t_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_i \Delta t_i = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0,$$

где $m\mathbf{v}_1$ — импульс тела в конце промежутка времени t , а $m\mathbf{v}_0$ — импульс тела в начале указанного промежутка. Величину

$$K = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n F_i \Delta t_i$$

называют *импульсом силы* за время t .

§ 8. Закон сохранения импульса

Рассмотрим произвольную систему тел. Каждое из тел системы может взаимодействовать как с телами, принадлежащими системе, так и с телами, не входящими в нее.

*) Такая формулировка является более общей, так как она остается справедливой в теории относительности, а также в случае переменной массы.

Силы, действующие между телами системы, называют *внутренними*, а остальные силы, действующие на систему, называют *внешними*. Если взаимодействием между телами системы и остальными телами можно пренебречь, то систему называют *замкнутой*. В замкнутой системе действуют только внутренние силы.

Пусть нам дана произвольная система, состоящая для простоты из трех тел с импульсами $m_1\mathbf{v}_1$, $m_2\mathbf{v}_2$ и $m_3\mathbf{v}_3$.

На каждое из тел действуют силы со стороны двух остальных тел и, кроме того, внешние силы (рис. 2.2).

Обозначим результирующую всех внешних сил, действующих на тело I, через F_1 , результирующую всех внешних сил, действующих на тело II, через F_2 , и результирующую всех внешних сил, действующих на тело III, через F_3 . Внутренние силы будем обозначать

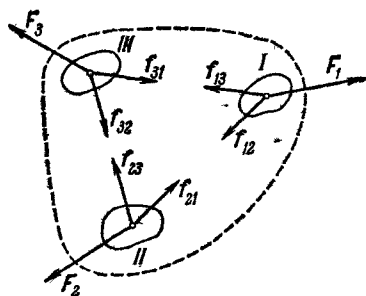


Рис. 2.2.

буквой f с соответствующими индексами, указывающими, к какому телу приложена сила и со стороны какого тела она действует.

Запишем для каждого из тел второй закон Ньютона, используя формулу (2.3):

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) = (f_{13} + f_{12} + F_1) \Delta t,$$

$$\Delta(m_2\mathbf{v}_2) = (f_{23} + f_{21} + F_2) \Delta t,$$

$$\Delta(m_3\mathbf{v}_3) = (f_{31} + f_{32} + F_3) \Delta t.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1) + \Delta(m_2\mathbf{v}_2) + \Delta(m_3\mathbf{v}_3) = (F_1 + F_2 + F_3) \Delta t. \quad (2.4)$$

По третьему закону Ньютона

$$f_{13} = -f_{31}, \quad f_{23} = -f_{32}, \quad f_{12} = -f_{21}.$$

Следовательно, все внутренние силы при сложении уничтожаются, и их можно не учитывать. Используя свойства символа Δ , запишем (2.4) в виде

$$\Delta(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3) = (F_1 + F_2 + F_3) \Delta t. \quad (2.5)$$

Рассмотрим два случая.

1. Система замкнута. Из этого условия вытекает

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta (m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3) = 0,$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = \text{const},$$

так как если изменение величины со временем равно нулю, то величина остается постоянной.

Приведенный вывод полностью сохранится для произвольного числа тел. Считая систему из n тел замкнутой, получим

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const}. \quad (2.6)$$

Вектор $P = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ называют *полным импульсом* системы, состоящей из n тел.

Таким образом, мы доказали следующую важную теорему:

Полный импульс замкнутой системы сохраняется (т. е. не меняется с течением времени).

Векторное равенство (2.6) эквивалентно трем скалярным равенствам для трех проекций вектора импульса P на оси координат:

$$P_x = \sum_{i=1}^n (m_i v_i)_x = \text{const}, \quad P_y = \sum_{i=1}^n (m_i v_i)_y = \text{const},$$

$$P_z = \sum_{i=1}^n (m_i v_i)_z = \text{const}.$$

2. Система не замкнута. В этом случае

$$F_1 + F_2 + F_3 \neq 0.$$

Однако может случиться, что сумма проекций внешних сил на некоторое направление (например, на ось x) будет равна нулю:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0.$$

Отсюда находим

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = \text{const}. \quad (2.7)$$

Для системы из n тел формула (2.7) примет вид

$$P_x = m_1 v_{1x} + \dots + m_n v_{nx} = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = \text{const} \text{ при } \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0.$$

Аналогичные равенства получим для осей y и z :

$$P_y = \sum m_i v_{iy} = \text{const} \text{ при } \sum F_{iy} = 0, \\ P_z = \sum m_i v_{iz} = \text{const} \text{ при } \sum F_{iz} = 0.$$

Таким образом, получаем важное утверждение, справедливое для незамкнутых систем:

Если сумма проекций всех внешних сил на некоторое направление равна нулю, то проекция полного импульса на это же направление сохраняется неизменной.

§ 9. Центр инерции

Рассмотрим движение произвольной системы тел относительно некоторой инерциальной системы отсчета *).

Движение каждого тела описывается как изменение его радиуса-вектора с течением времени. (Напоминаем, что все тела считаются материальными точками.) Центр инерции

такой системы определяется как точка, радиус-вектор которой равен

$$\mathbf{r}_{\text{ц. и}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (2.8)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -го тела (рис. 2.3).

Центр инерции в общем случае не совпадает ни с одним из тел системы. В частном случае системы, со-

стоящей из двух тел, центр инерции лежит на прямой, соединяющей тела, и делит расстояние между ними в отношении, обратном отношению масс. Для выяснения физического смысла центра инерции вычислим его скорость. По определению скорости

$$\mathbf{v}_{\text{ц. и}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_{\text{ц. и}}}{\Delta t}.$$

*) Подразумевается, что с выбранной системой отсчета связана декартова система координат.

Здесь

$$\Delta r_{ц. н} = \frac{\sum m_i \Delta r_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \Delta r_i}{M}.$$

Мы использовали свойства символа Δ и обозначение $M = \sum m_i$ — масса всей системы.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r_{ц. н}}{\Delta t} &= \frac{\sum m_i \frac{\Delta r_i}{\Delta t}}{M}, \\ v_{ц. н} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_{ц. н}}{\Delta t} = \frac{\sum m_i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r_i}{\Delta t}}{M} = \frac{\sum m_i v_i}{M} = \frac{P}{M}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

где $P = \sum m_i v_i$ — полный импульс системы. Следовательно,

$$P = M v_{ц. н}. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) показывает, что связь между полным импульсом системы тел и скоростью центра инерции такая же, какая была бы у материальной точки с массой $M = \sum m_i$, имеющей скорость $v_{ц. н}$. Центр инерции системы приобретает, таким образом, смысл точки, скорость которой равна скорости движения системы как целого. Если $v_{ц. н} = 0$, мы будем говорить, что система как целое покоится. При этом относительно центра инерции тела системы могут двигаться произвольным образом.

С помощью формулы (2.10) закон сохранения импульса для замкнутой системы может быть сформулирован как утверждение о том, что центр инерции замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или покоится. Это есть обобщение закона инерции для системы тел.

Предположим теперь, что система не замкнута. Тогда полный импульс $P \neq \text{const}$ и, так как $\Delta P = F \Delta t$, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = F,$$

где F — результирующая всех внешних сил. Совершая та-
кой предельный переход в формуле (2.10), получим

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} &= M \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{ц. н}}{\Delta t}, \\ F &= M a_{ц. н}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Таким образом, результирующая всех внешних сил определяет ускорение центра инерции системы (но не каждого тела!).

Если рассматривать твердое тело как систему бесконечного числа материальных точек, то все формулы останутся в силе, а суммирование нужно проводить от 1 до ∞ . Так как расстояния между произвольными точками твердого тела, по определению, неизменны, то формула (2.11) определяет движение тела как целого, и именно ее применяют при расчете движений конкретных тел. При этом, однако, не исключается возможность вращения тела вокруг точки или оси.

В табл. 2.1 указаны размерности некоторых физических величин, используемых в динамике.

Таблица 2.1

Физическая величина	Размерность в условных обозначениях	Наименование, сокращенное обозначение и размерность в системе	
		СИ	СГС
Сила	MLT^{-2}	Ньютон (н) (кг·м/сек ²)	Дина (дин) (г·см/сек ²)
Плотность	ML^{-3}	Килограмм на кубический метр (кг/м ³)	Грамм на кубический сантиметр (г/см ³)
Удельный вес	$ML^{-2}T^{-2}$	Ньютон на кубический метр (н/м ³) (кг/м ² сек ²)	Дина на кубический сантиметр (дин/см ³) (г/см ² сек ²)

ПРИМЕРЫ

1. Динамометр лежит на гладкой поверхности стола. К одному концу динамометра приложена сила $F_1 = 5н$, к другому — $F_2 = 8н$ (рис. 2.4). Определить показания динамометра.



Рис. 2.4.

Динамометр *) будет показывать 5н. В этом легко убедиться. Если бы один

конец динамометра был прикреплен к стене, а к другому

*) Динамометр — прибор, показывающий величину приложенной к одному из его концов силы, если второй конец закреплен неподвижно.

концу приложили бы силу, равную 5 н , то динамометр показывал бы 5 н . В этом случае со стороны стены на динамометр действует сила, равная F_1 по величине и противоположная ей по направлению, так как динамометр находится в покое и, согласно второму закону Ньютона, векторная сумма действующих на него сил равна нулю. Таким образом, действие стены на динамометр можно заменить силой 5 н , приложенной противоположно F_1 . Динамометр будет покоиться и показания его будут равны 5 н .

Если теперь одну из сил увеличить на 3 н , то равновесие нарушится и динамометр, показывая 5 н , начнет двигаться с ускорением $a = (F_2 - F_1)/m$ по направлению действия большей силы (m — масса динамометра).

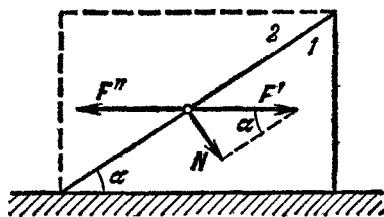


Рис. 2.5.

II. По горизонтальной поверхности под действием силы F движется с ускорением брусок длиной a , высотой b и шириной c . Плотность бруска ρ , коэффициент трения его о поверхность k . Мысленно рассечем брусок на две равные части плоскостью, проходящей через диагонали боковых граней так, как показано на рис. 2.5. Определить силу давления, с которой верхняя часть бруска действует на нижнюю, и среднее давление.

Рассмотрим силы, действующие на каждую из половин бруска. На нижнюю половину 1 действует сила F' со стороны верхней половины 2 и сила трения $F_{\text{тр}}$ со стороны поверхности, по которой движется брусок. Направление силы $F_{\text{тр}}$ противоположно направлению движения.

Почему мы рассматриваем только те силы (в частности, так выбрали направление F'), которые направлены вдоль направления движения? Ведь на нижнюю часть бруска действуют и силы, направленные, скажем, по вертикали (собственный вес, вес верхней половины, сила реакции со стороны поверхности). Дело в том, что сумма этих сил равна нулю, так как иначе нижняя часть бруска одновременно двигалась бы и в вертикальном направлении. В уравнениях движения эти силы взаимно уничтожаются, и мы их записывать не будем.

Уравнение движения части 1 бруска: $F' + F_{\text{тр}} = \frac{m}{2} a_1$,

» » части 2 бруска: $F + F'' = \frac{m}{2} a_2$,

где F'' — сила, действующая со стороны нижней части бруска на верхнюю.

Согласно третьему закону Ньютона $F'' = -F'$. Так как части 1 и 2 бруска составляют одно целое, то $a_1 = a_2$.

Тогда систему векторных уравнений движения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F + F' &= \frac{m}{2} a \quad (\text{уравнение движения части 2 бруска}), \\ F' + F_{\text{тр}} &= \frac{m}{2} a \quad (\text{уравнение движения части 1 бруска}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Выбрав ось (как уже говорилось ранее), совпадающую с направлением движения, мы можем от векторов в уравнениях (1) перейти к их проекциям:

$$\left. \begin{aligned} F - F' &= \frac{m}{2} a, \\ F' - F_{\text{тр}} &= \frac{m}{2} a, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $F_{\text{тр}} = kmg$. Решая систему (2), получим

$$a = \frac{F - F_{\text{тр}}}{m} = \frac{F - kmg}{m} \quad \text{и} \quad F' = \frac{F + F_{\text{тр}}}{2} = \frac{F + kmg}{2}.$$

Нас интересует величина силы N (силы давления части 2 на 1):

$$N = F' \sin \alpha = \frac{(F + kmg)}{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

или, так как $m = \rho V = \rho abc$,

$$N = \frac{(F + k\rho gabc)b}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Среднее давление равно величине силы давления N , деленной на площадь диагонального сечения,

$$p_{\text{ср}} = \frac{N}{S} = \frac{(F + k\rho gabc)b}{2\sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2})c} = \frac{(F + k\rho gabc)b}{2c(a^2 + b^2)}.$$

III. На краю стола установлен блок с неподвижной осью, через который перекинута нить*), связывающая три груза. Два из них лежат на поверхности стола и в свою очередь связаны между собой нитью (рис. 2.6), третий висит, не касаясь стола. Массы грузов, лежащих на столе, равны $\frac{M}{2}$

каждая, масса третьего груза M . Коэффициент трения между столом и грузами k . На висящий груз помещают перегрузок массы m и система приходит в движение. Найти ускорение грузов, силу натяжения нити, связывающей грузы 1 и 2, силу, с которой перегрузок давит на груз 3. При каком коэффициенте трения система вообще не придет в движение? Рассмотреть случай, когда $k=0$, и найти величину ускорения, с которым в этом случае двигалась бы система.

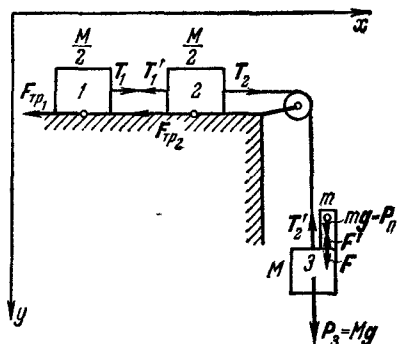


Рис. 2.6.

Рассмотрим уравнения движения для каждого из тел. На тело 1 действуют следующие силы: сила натяжения нити T_1 , сила трения $F_{тр1}$, вес $P = \frac{M}{2}g$ и сила реакции опоры. Последние две силы взаимно уничтожаются в уравнениях движения, и в дальнейшем мы такого типа силы рассматривать не будем.

Таким образом, для тела 1

$$F_{тр1} + T_1 = \frac{M}{2} a_1, \quad (1)$$

для тела 2

$$F_{тр2} + T_2 + T_1' = \frac{M}{2} a_2. \quad (2)$$

На тело 3, движущееся по вертикали, кроме силы натяжения нити T_2' , действуют сила веса $P_3 = Mg$ и сила

*) Здесь и в дальнейшем считаем нити невесомыми (что позволяет не рассматривать уравнения движения для нитей) и нерастяжимыми.

давления перегрузка F . Следовательно,

$$F + P_3 + T'_2 = Ma_3. \quad (3)$$

Уравнение движения для перегрузка

$$P_n + F' = ma_n. \quad (4)$$

Уравнения (1) — (4) составляют систему

$$\left. \begin{aligned} F_{\text{тр}1} + T_1 &= \frac{M}{2} a_1, \\ F_{\text{тр}2} + T_2 + T'_1 &= \frac{M}{2} a_2, \\ F + P_3 + T'_2 &= Ma_3, \\ P_n + F' &= ma_n. \end{aligned} \right\}$$

По третьему закону Ньютона

$$T_1 = T'_1, \quad T_2 = T'_2 \quad \text{и} \quad F = F'.$$

Проецируя векторы сил на оси координат, выбранные так, как это показано на рис. 2.6, мы получим системы алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} (F_{\text{тр}1})_x + (T_1)_x &= \frac{M}{2} (a_1)_x, \\ (F_{\text{тр}2})_x + (T_2)_x + (T'_1)_x &= \frac{M}{2} (a_2)_x, \\ M(a_3)_x &= 0, \\ m(a_n)_x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{M}{2} (a_1)_y, \\ 0 &= \frac{M}{2} (a_2)_y, \\ (F)_y + (P_3)_y + (T_2)_y &= M(a_3)_y, \\ (P_n)_y + (F)_y &= m(a_n)_y. \end{aligned} \right\}$$

Переходя к абсолютным величинам, замечаем, что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ (условие нерастяжимости нити). Выражая силы трения через коэффициент трения и силу нормального

давления груза, получим

$$\left. \begin{aligned} -\frac{kMg}{2} + T_1 &= \frac{Ma}{2}, \\ -T_1 - \frac{kMg}{2} + T_2 &= \frac{Ma}{2}, \\ -T_2 + F + Mg &= Ma, \\ mg - F &= ma. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решая систему (5), получим

$$a = \frac{Mg + mg - kMg}{2M + m}, \quad T_1 = \frac{Mg}{2} \cdot \frac{(M + m + kM + km)}{2M + m}, \quad F = \frac{Mmg(1+k)}{2M + m}.$$

Система вообще не придет в движение, если ее ускорение останется равным нулю, когда на тело 3 будет положен перегрузок. Найдем наименьшее k , отвечающее этому условию:

$$0 = Mg + mg - Mgk, \quad k = \frac{m+M}{M}.$$

Следовательно, при всех $k \geq \frac{m+M}{M}$ система останется в покое.

При отсутствии трения ($k=0$) каждое из тел приобретет ускорение, равное по абсолютной величине $a = \frac{m+M}{m+2M}g$.

IV. Мячик свободно падает с высоты h на гладкую горизонтальную поверхность. Считая удар абсолютно упругим*), а время удара равным Δt , найти среднюю силу F , с которой действовал мяч на поверхность во время удара. Масса мяча m .

Для нахождения силы F необходимо знать величину изменения импульса мяча:

$$F' \Delta t = mv_2 - mv_1, \quad (1)$$

где сила F' — это сила, действующая на мяч со стороны поверхности. Согласно третьему закону Ньютона $F = -F'$.

Выбрав координатную ось так, чтобы направление ее совпадало с направлением скорости мяча после удара, мы можем написать уравнение (1) в проекциях:

$$F' \Delta t = mv_2 + mv_1,$$

*) Абсолютная упругость удара означает, что модуль скорости при ударе не меняется.

где $v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$. Отсюда

$$F = -\frac{2m}{\Delta t} \sqrt{2gh}.$$

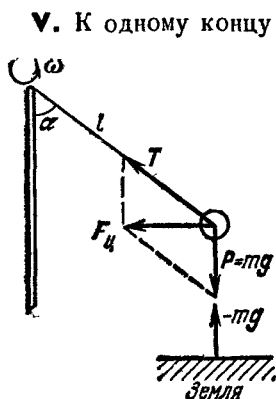


Рис. 2.7.

V. К одному концу нити длиной l привязан шарик, массы m . Другой конец нити закреплен на вертикальном стержне, вращающемся с угловой скоростью ω (рис. 2.7). Найти силу натяжения нити и угол α между осью вращения и направлением нити.

Рассмотрим, под действием каких сил вращается шарик. Таких сил две: вес самого шарика $P = mg$ и сила натяжения нити T . Их сумма $F_{\text{ц}} = P + T$ направлена к оси вращения и вызывает ускорение (центростремительное ускорение), модуль которого равен $a = v^2/r$, где v — линейная скорость и r —

расстояние шарика от оси. Из рис. 2.7 очевидно:

$$T \cos \alpha = mg,$$

$$T \sin \alpha = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = m \omega^2 l \sin \alpha.$$

Отсюда

$$T = m \omega^2 l \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{mg}{m \omega^2 l} = \frac{g}{\omega^2 l}; \quad \alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Иногда при рассмотрении вращательного движения вводят понятие центробежной силы, которую определяют как силу, равную по величине центростремительной и противоположно ей направленную. В соответствии с третьим законом Ньютона она приложена к связи, обеспечивающей вращательное движение тела. Например, при вращении шарика на нити в горизонтальной плоскости сила натяжения нити, приложенная к шарiku, является центростремительной, так как она обеспечивает центростремительное ускорение шарика; сила, действующая со стороны шарика на нить и тоже равная силе натяжения нити, и будет в данном случае центробежной.

Из анализа примера V следует, что понятие центробежной силы далеко не всегда имеет физический смысл. Дей-

ствительно, в данном случае центростремительная сила складывается из силы натяжения нити T и веса шарика mg . Противоположные им силы приложены соответственно к нити и к Земле, т. е. к разным телам. Ясно, что говорить о их результирующей бессмысленно. Учитывая это, мы не будем в дальнейшем пользоваться понятием центробежной силы.

ЗАДАЧИ

2.1. Иногда первый закон Ньютона формулируют следующим образом: «Если сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то оно сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения». Не следует ли ввести в эту формулировку дополнительное уточнение?

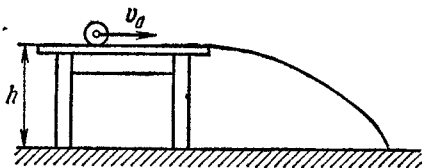


Рис. 2.8.

2.2. Шарик, который первоначально находился на горизонтальном столе высотой h , сообщили скорость v_0 и он скатился по желобу на землю (рис. 2.8). Какую форму должен иметь желоб, чтобы при скатывании шарик все время касался желоба, не оказывая на него давления?

2.3. Имеются два тела, масса одного из них меньше, чем другого. Если бы Земля притягивала все тела с одинаковой силой, какое упало бы быстрее? *) Первоначально они находились на одинаковой высоте.

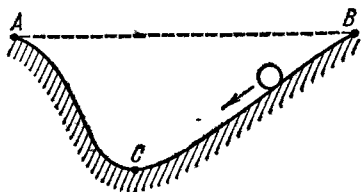


Рис. 2.9.

на рис. 2.9. На весь путь от A до B он затратил время t . В точке C скорость его была равна v_1 . Затем шарик стал скатываться назад, двигаясь от B к A . Чему

*) Напомним, что во всех задачах, где это не оговорено особо, мы пренебрегаем сопротивлением воздуха.

теперь равна его скорость в точке C ? Больше или меньше времени потратит он на обратный путь?

2.5. Показать, что второй закон Ньютона для тел, участвующих в гравитационном взаимодействии, не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся со скоростью v относительно первой.

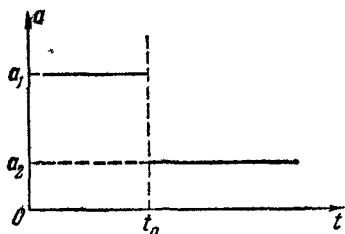


Рис. 2.10.

2.6. Дан график ускорения тела в зависимости от времени (рис. 2.10). Может ли такой график описывать реальный физический процесс?

2.7. Шарик надет на проволоку, согнутую в виде полу-

окружности. На концах полуокружности закреплены упругие нити. Второй конец каждой нити связан с шариком (рис. 2.11). В начальный момент времени шарик скользил с постоянной по величине скоростью вдоль проволоки. Найти характер его последующего движения, если известно, что силы, с которыми нити действуют на шарик, пропорциональны их длине, $F = kl$. Весом шарика и силой трения его о проволоку можно пренебречь.

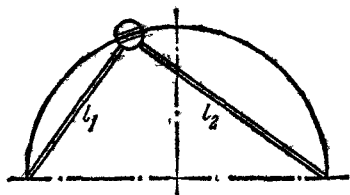


Рис. 2.11.

2.8. Один конец нити, на другом конце которой висит шарик массы m , перемещают с ускорением a под углом α к горизон-

тали. Найти силу натяжения нити и угол φ , на который она отклонится от вертикали. Рассмотреть случаи, когда $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = -\pi/2$.

2.9. Один конец каната удерживают на высоте h от земли, второй его конец касается земли. В момент времени $t = 0$ канат отпускают и он начинает свободно падать на землю. Построить график силы, с которой канат будет давить на землю, в зависимости от времени. Построить график веса части каната, лежащей на земле, в зависимости от времени. Вес единицы длины каната ρ .

2.10. Мальчик, стреляя из рогатки вертикально вверх, попадает камнем в карниз дома, находящийся на высоте

$h = 20$ м, после чего камень падает на землю. Считая удар абсолютно неупругим*), определить силу удара, если известно, что начальная скорость камня $v_0 = 25$ м/сек, его масса $m = 0,01$ кг и падает камень на землю через $t = 3,01$ сек. Ускорение g считать равным 10 м/сек².

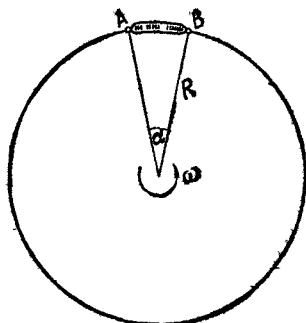


Рис. 2.12.

2.11. Обруч, радиус которого R , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Небольшой кусок обруча массой m вырезан так, как показано на рис. 2.12. К точкам A и B прикреплены концы пружинного динамометра массой m . Каковы показания динамометра? (Угол α мал, так что можно полагать $\sin \alpha \approx \alpha$ и $\cos \alpha \approx 1$.)

2.12. Рассмотреть предыдущую задачу в случае, когда обруч движется с угловым ускорением β и когда после начала движения проходит время t .

2.13. Тело движется по горизонтальной поверхности. Форма траектории — окружность. Как будет изменяться вектор силы трения при движении?

2.14. Перемещая материальную точку по некоторой поверхности, мы можем по закону «сухого трения» каждой точке этой поверхности сопоставить силу трения в этой точке. Получим некоторое поле сил трения. О каком поле здесь может идти речь — векторном или скалярном? Является ли это поле удобной математической абстракцией или физическим полем?

2.15. Начертить график зависимости силы трения от скорости: 1) для сухого трения; 2) для трения в жидкости или газе.

2.16. На горизонтальной плоскости лежит полусфера радиусом R . На нее помещают тело, размеры которого малы по сравнению с R . Найти зависимость абсолютной величины силы трения от местонахождения тела на поверхности полусферы. Коэффициент трения равен k , масса тела m .

*) Абсолютная неупругость удара означает, что камень после удара полностью теряет скорость.

2.17. По горизонтальной поверхности движется брусок с постоянной скоростью v_0 . Коэффициент трения бруска о поверхность равен k . Найти минимальную силу, с которой надо подействовать на брусок, чтобы он сместился в направлении, перпендикулярном к движению.

2.18. Гимнаст висит на канате, перекинутом через блок. К другому концу каната привязан противовес массой m . В начальный момент система поконлась. Затем гимнаст стал скользить по канату вниз. В момент времени t скорость противовеса была больше скорости человека относительно земли на величину v . Найти силу трения, возникающую при спуске гимнаста. Масса человека M , блок невесомый.

2.19. Плита с прикрепленной к ней стойкой с блоком (рис. 2.13) лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между плитой и поверхностью равен k ($k < 1$).

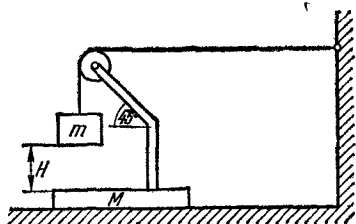


Рис. 2.13

Через блок перекинута нить, к концу которой привязан груз массой m . Другой конец нити прикреплен к стене так, что нить горизонтальна. В начальный момент груз находился на высоте H над плитой. При каких условиях плита и груз придут в движение? Какой путь пройдет плита, если ее масса вместе со стойкой равна M и останавливается она, не доезжая до вертикальной стенки? Угол наклонной части стойки составляет 45° с горизонталью.

2.20. Вывести закон сохранения импульса для замкнутой системы невзаимодействующих тел, используя только первый закон Ньютона.

2.21. Ученик решал следующую задачу: «Вагон с песком движется по рельсам со скоростью v_0 . В некоторый момент времени $t_0 = 0$ на дне вагона отошла доска и песок начал высыпаться. Высыпается он с постоянной скоростью v_n , площадь щели S . Найти скорость вагона v в произвольный момент времени t . Вагон движется без трения, плотность песка ρ , первоначальная масса вагона с песком M »

Решение выглядело так. Проекция импульса на горизонтальную ось координат в данном случае сохраняется. Тогда можно написать $Mv_0 = mv$, где m — масса вагона

в момент времени t . Масса песка, выпавшегося за это время, равна $\rho S v_{\text{п}} t$, отсюда

$$m = M - \rho S v_{\text{п}} t \quad \text{и} \quad v = \frac{M v_0}{M - \rho S v_{\text{п}} t},$$

т. е. скорость вагона со временем увеличивается.

Правильно ли решена задача?

2.22. На горизонтальную поверхность падает мячик под углом α к вертикали. Найти, под каким углом β он отразится от поверхности, если известно, что горизонтальная составляющая и абсолютная величина импульса сохраняются.

2.23. Доска массой M плавает на воде. На одном конце доски в точке A сидит лягушка. С какой наименьшей скоростью должна она прыгнуть, чтобы попасть в точку B на доске? Расстояние между A и B равно l , масса лягушки m , трение между доской и водой мало.

2.24. Человек, сидящий в лодке, бросает камень под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Масса камня $m = 1$ кг, масса человека и лодки $M = 150$ кг, начальная скорость камня $v_0 = 10$ м/сек. Найти расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснулся воды. Трение лодки о воду не учитывать.

2.25. Ядро атома с массой M , летящее со скоростью $v_{\text{я}}$, самопроизвольно (спонтанно) распадается на два осколка равной массы, один из которых вылетает со скоростью v_1 под углом α к первоначальному направлению полета ядра. Определить скорость и угол вылета второго осколка.

2.26. На тележке стоят два бака, соединенные между собой трубкой с краном. Один из них наполнен водой (рис. 2.14). При открывании крана вода переливается в другой бак. Будет ли при этом двигаться тележка? Когда она остановится? Трение между тележкой и горизонтальной поверхностью, на которой она стоит, не учитывать.

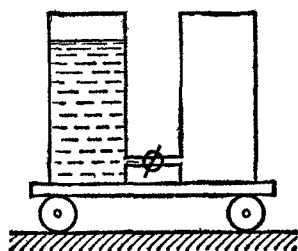


Рис. 2.14.

2.27. Доказать, что центр инерции двух тел лежит на прямой, соединяющей эти тела, и отношение расстояний тел от центра инерции обратно пропорционально их массам. (Под телами мы подразумеваем материальные точки.)

2.28. Сбитый снаряд разбивается на высоте h от земли на большое число осколков, имеющих одинаковую начальную скорость v_0 и равные массы. Найти расстояние между двумя осколками, лежащими на прямой, проходящей через центр инерции всей системы и образующей угол α с вертикалью, через время t после разрыва.

2.29. На нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, подвешены два груза с массами m_1 и m_2 ($m_1 < m_2$). Найти ускорение центра инерции этой системы.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. Под телом надо подразумевать материальную точку (см. стр. 7). Протяженное тело при отсутствии внешних сил может не только двигаться прямолинейно и равномерно, но также и равномерно вращаться.

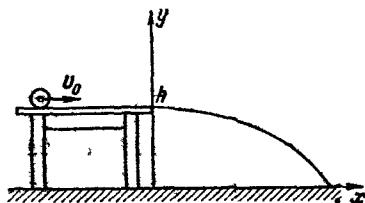


Рис. 2.15.

2.2. Шарик не будет оказывать на желоб давления в том случае, если форма желоба совпадет с формой траектории, по которой двигался бы шарик свободно, падая с высоты h и

имея при этом горизонтальную скорость v_0 . Введя координатные оси так, как это показано на рис. 2.15, найдем зависимость координат шарика от времени:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}; \quad x = v_0 t.$$

Исключая время из этих выражений, получим, что желоб должен иметь формулу параболы, уравнение которой

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

2.3. Тело с меньшей массой упало бы первым, так как оно двигалось бы с большим ускорением.

2.4. Двигаясь от точки B к точке A (см. рис. 2.9), шарик проходит всю последовательность состояний; в которых он находился при движении от A к B , но в обратном порядке. Изменив знак времени в уравнении, описывающем движение шарика от точки A к точке B , получим описание обратного процесса — движения от точки B к точке A . Уравнение при этом не изменится (см. стр. 53). Следова-

тельно, скорость шарика в точке C останется прежней по абсолютной величине, и время, затраченное на обратный путь, будет равно t .

Тот факт, что уравнения движения механической системы не меняются при изменении знака времени, позволяет нам делать некоторые заключения о характере движения (например, в рассмотренной задаче о времени пути из B в A), не составляя самих уравнений.

2.5. Запишем второй закон Ньютона в следующем виде:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Сила взаимодействия F определяется расстоянием между телами, следовательно, при переходе к другой системе отсчета она останется неизменной. Величины m и Δt в правой части равенства также не зависят от скорости. Приращение скорости Δv не связано с величиной самой скорости. Отсюда следует, что второй закон Ньютона для тел, участвующих в гравитационном взаимодействии, одинаков в любой инерциальной системе.

2.6. Так как в момент времени t_0 (см. рис. 2.10) произошло мгновенное изменение ускорения тела, то это означает, что мгновенно изменилась величина силы, действующей на него.

С точки зрения классической механики это возможно. Действительно, классическая механика предполагает, что взаимодействие между телами распространяется с бесконечно большой скоростью, и с этой точки зрения вполне реален мгновенный скачок ускорения. На самом деле скорость распространения взаимодействия ограничена скоростью света c и представленный график является некоей физической идеализацией.

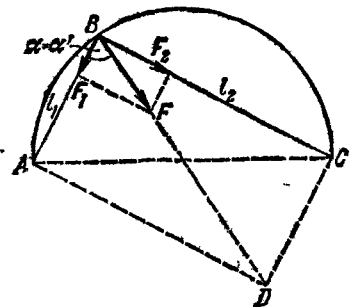


Рис. 2.16.

2.7. Для определения характера движения шарика надо найти равнодействующую сил F_1 и F_2 , с которыми нити действуют на шарик (рис. 2.16). Угол α между первой нитью l_1 и равнодействующей F найдем из равенства

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k l_2}{k l_1} = \frac{l_2}{l_1}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{l_2}{l_1}.$$

Этот угол совпадает с углом α' между l_1 и радиусом, проведенным в точку нахождения шарика:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{AD}{AB} = \frac{l_2}{l_1}; \quad \alpha' = \alpha,$$

т. е. равнодействующая направлена по радиусу перпендикулярно к траектории шарика в каждый момент времени.

Из этого следует, что шарик будет продолжать равномерное движение.

2.8. Введем оси координат так, как это показано на рис. 2.17. Тогда уравнение второго закона Ньютона $P + T = ma$ (где $P = mg$ — вес шарика, T — сила натяжения нити), записанное в проекциях на выбранные оси, будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} P_x + T_x &= ma_x, \\ P_y + T_y &= ma_y \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} T \sin \varphi &= ma \cos \alpha, \\ T \cos \varphi - P &= ma \sin \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Рис. 2.17.

Решая эту систему, получим

$$T = m \sqrt{a^2 + 2ag \sin \alpha + g^2}$$

и

$$\sin \varphi = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 + 2ag \sin \alpha + g^2}}.$$

В случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$T = m(g + a); \quad \varphi = 0.$$

При $\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$T = m(g - a).$$

В первом случае шарик становится «тяжелее» на величину ma , во втором случае — «легче» на ma .

2.9. После того как весь канат упадет на землю, он будет давить на нее с постоянной силой, равной весу каната $P = h\rho$. Падение произойдет за время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Рассмотрим промежуток времени от t до $t + \Delta t < t_1$ (канат еще полностью не упал). Обозначая длину части каната, упавшей на землю к моменту t , через x , определим, с какой силой будет давить часть каната Δx , упавшая за время Δt . Так как она падала с высоты x , то скорость ее в момент касания земли $v = \sqrt{2gx}$ (отрезок времени Δt предполагаем столь малым, что упавшая за это время часть каната Δx двигалась с постоянной скоростью). Скорость части каната Δx после падения, естественно, равна нулю. Тогда сила, с которой эта часть каната, падая, действовала на землю,

$$F = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta x}{g \Delta t} v,$$

а так как $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ есть скорость падения v , то

$$F = \frac{\rho v^2}{g} = \frac{\rho}{g} 2gx = 2\rho x.$$

Полную силу, действовавшую на землю в течение отрезка времени Δt , получим, учитывая вес P_x части каната x :

$$\begin{aligned} F_{\text{полн}} &= F + P_x = \\ &= 2\rho x + \rho x = 3\rho x. \end{aligned}$$

Выразив x через время t ($x = \frac{gt^2}{2}$), найдем зависимость $F_{\text{полн}}$ от времени:

$$F_{\text{полн}} = \frac{3\rho g}{2} t^2.$$

Графики силы давления $F_{\text{полн}}$ и веса P части каната, еще не упавшей на землю, в зависимости от времени даны соответственно на рис. 2.18, а и б.

2.10. Силу удара камня о карниз F можно определить, зная изменение количества движения камня $m(v_2 - v_1)$ и

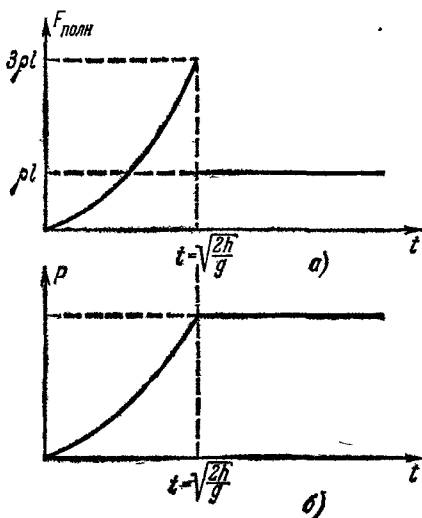


Рис. 2.18.

время удара Δt , согласно уравнению

$$F = \frac{m(v_2 - v_1) *}{\Delta t},$$

где v_1 — скорость камня перед ударом и v_2 — после удара. Переходя от векторов к их проекциям на вертикальную ось (рис. 2.19) и учитывая условие неупругости удара ($v_2 = 0$), получим

$$-F = -\frac{mv_1}{\Delta t}.$$

Время удара найдем как разность времен:

$$\Delta t = t_0 - (t_1 + t_2),$$

где t_0 — общее время полета (3,01 сек), t_1 — время подъема камня до высоты h с начальной скоростью v_0 , t_2 — время падения с высоты h без начальной скорости.

Время t_1 определим из уравнения движения

$$h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}; \quad t_1' = 4 \text{ сек}; \quad t_1'' = 1 \text{ сек}.$$

Решение $t_1'' = 1 \text{ сек}$ определяет время подъема на высоту h . Решение $t_1' = 4 \text{ сек}$ определяет то время, через которое камень, падая (если бы не было карниза), снова оказался бы на высоте h . Поэтому $t_1 = 1 \text{ сек}$. Время падения

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \text{ сек}.$$

Отсюда время удара

$$\Delta t = 3,01 \text{ сек} - (1 \text{ сек} + 2 \text{ сек}) = 0,01 \text{ сек},$$

$$v_1 = v_0 - gt_1 = 15 \text{ м/сек}.$$

Используя полученные результаты, найдем

$$F = \frac{mv_1}{\Delta t} = \frac{0,01 \text{ кг} \cdot 15 \text{ м/сек}}{0,01 \text{ сек}} = 15 \text{ н}.$$

*) Напомним, что сила F — сила, действующая на камень со стороны карниза.

2.11. Каждый кусок (элемент) обруча m движется с ускорением $\omega^2 R$, направленным к центру. Сила, вызывающая это ускорение, действует со стороны остальной части обруча на выделенный элемент и обуславливается возникающими при вращении деформациями.

В точках A и B на динамометр действуют силы F_1 и F_2 (рис. 2.20) со стороны обруча. Их равнодействующая, направленная к центру обруча, равна по абсолютной величине

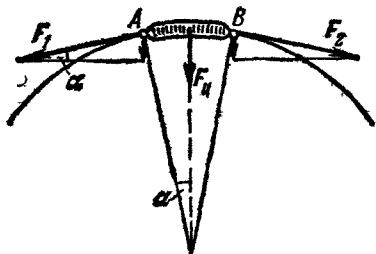


Рис. 2.20.

$$m\omega^2 R = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = F_1 \alpha + F_2 \alpha,$$

где $F_1 = F_2 = F$. Отсюда сила F , величину которой и показывает динамометр, равна

$$F = \frac{m\omega^2 R}{2\alpha}.$$

2.12. В случае движения обруча с угловым ускорением β по второму закону Ньютона

$$ma = F_1 + F_2, \quad (1)$$

где F_1 и F_2 — силы, приложенные в точках A и B динамометра (см. рис. 2.20).

Показания динамометра равны величине силы F_2 ($F_2 < F_1$, так как динамометр движется с ускорением). Для нахождения F_2 запишем уравнение (1) в проекциях на радиальное направление:

$$F_1 \alpha + F_2 \alpha = m\omega^2 R$$

(см. решение предыдущей задачи), причем $\omega = \beta t$.

Проецируя на касательное направление, получим

$$F_1 - F_2 = ma = m\beta R,$$

так как $\cos \alpha = 1$.

Из этих уравнений определяем F_2 :

$$F_2 = \frac{m\beta^2 R t^2 - m\beta R \alpha}{2\alpha}.$$

2.13. Вектор силы трения также будет двигаться по окружности. В этом смысле можно говорить о зависимости вектора силы трения от скорости, точнее, от направления скорости, так как эти векторы антипараллельны во время движения тела.

2.14. Вектор силы трения зависит от направления движения точки. Поэтому о векторном поле имеет смысл говорить, если задано направление скорости в каждой точке поверхности. Поле сил трения не передает взаимодействие на расстоянии. Оно служит удобным математическим описанием (более подробно см. на стр. 54—55).

2.15. Графики для обоих видов трения приведены на рис. 2.21. Обратите внимание на то, что направление вектора

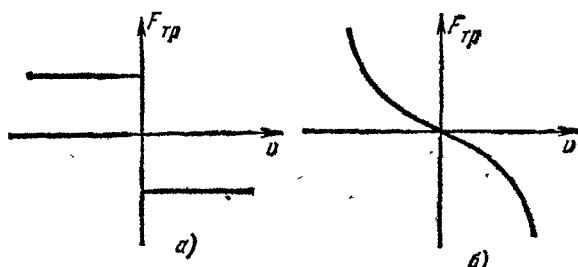


Рис. 2.21.

силы трения всегда противоположно направлению вектора скорости тела.

2.16. Очевидно, что сила трения будет зависеть лишь от

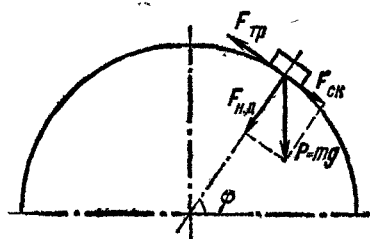


Рис. 2.22.

угла φ между плоскостью и радиусом-вектором, проведенным в точку, в которой находится тело в данный момент (рис. 2.22). До какого-то «критического» угла $\varphi_{кр}$ тело, положенное на сферу, двигаться не будет. В этом случае сила трения покоя, очевидно, уравнивает скатывающую силу (из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на тело) и меняется по закону

$$F_{тр} = mg \cos \varphi \quad \text{при} \quad \varphi \geq \varphi_{кр}$$

При $\varphi < \varphi_{кр}$ тело, положенное на поверхность сферы, начнет двигаться, и в этом случае

$$F_{тр} = kF_{н.д} = kmg \sin \varphi.$$

Критический угол можно найти из условия

$$kmg \sin \varphi = mg \cos \varphi.$$

Тогда

$$\varphi_{кр} = \text{arctg } k.$$

График $F_{тр} = f(\varphi)$ показан на рис. 2.23.

2.17. Предположим, что мы сообщили бруску некоторую скорость v_1 , перпендикулярную к

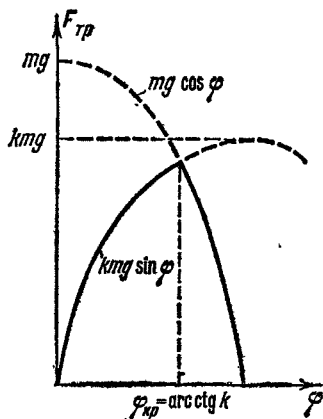


Рис. 2.23.

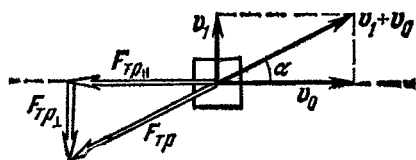


Рис. 2.24.

направлению первоначального движения ($v_1 \ll v_0$). Тогда сила трения бруска о поверхность, равная kmg , будет направлена против результирующей скорости $v = v_1 + v_0$ под углом α к v_0 (рис. 2.24).

Разложим силу трения на две составляющие, одна из которых ($F_{тр\perp}$) перпендикулярна к v_0 , а другая ($F_{тр\parallel}$) параллельна. Составляющая $F_{тр\perp} = F_{тр} \sin \alpha$. Угол α найдем из соотношения между скоростями $\frac{v_1}{v_0} = \text{tg } \alpha$. Так как $v_1 \ll v_0$, то $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$ и тогда

$$F_{тр\perp} = F_{тр} \frac{v_1}{v_0}.$$

Зависимость силы трения в перпендикулярном основному движению направлении от скорости соответствует аналогичной зависимости при движении в жидкости. «Сухое трение» переходит в «жидкое», т. е. сила трения покоя близка к нулю, и любая малая сила вызывает перемещение тела в направлении, перпендикулярном к v_0 .

2.18. Запишем уравнения движения противовеса и человека в проекциях на вертикальную ось (рис. 2.25):

$$ma = -mg + P,$$

$$Ma_1 = -Mg + F_{тр}.$$

По третьему закону Ньютона $T = F_{тр}$. Тогда

$$a = \frac{F_{тр} - mg}{m} \quad \text{и} \quad a_1 = \frac{F_{тр} - Mg}{M}.$$

Скорость противовеса в момент времени t

$$v_m = at = \frac{F_{тр} - mg}{m} t,$$

а человека

$$v_M = a_1 t = \frac{F_{тр} - Mg}{M} t,$$

следовательно,

$$v = v_m - v_M = \frac{(M - m) F_{тр}}{Mm} t$$

$$F_{тр} = \frac{v}{t} \frac{Mm}{M - m}.$$

Рис. 2.25. и

2.19. Если плита придет в движение, то до того момента, когда груз опустится на плиту, она будет двигаться ускоренно и пройдет расстояние $s = H$, затем начнет останавливаться под действием силы трения о поверхность. Рассмотрим последовательно эти два этапа: первый — до падения груза и второй — после падения.

1, Сила F , действующая на ось блока, направлена под углом 45° к горизонтали и по величине равна $T_n \sqrt{2}$ (где T_n — сила натяжения нити).

Разложим ее на вертикальную T_v и горизонтальную T_r составляющие ($T_v = T_r = T_n = T$). Оси координат выберем так, как показано на рис. 2.26.

Проецируя силы, действующие на груз, на ось y , получим

$$mg - T = ma_y.$$

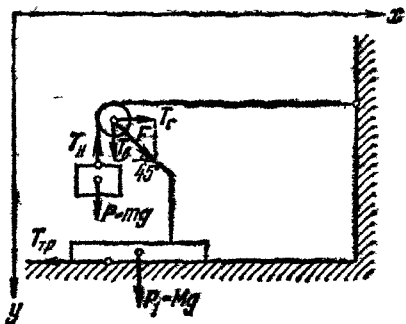


Рис. 2.26.

Силы, действующие на плиту, проецируем на ось x :

$$-F_{\text{тр}} + T = Ma_{\text{г.}},$$

но

$$F_{\text{тр}} = k(P + T) = k(Mg + T),$$

следовательно,

$$-k(Mg + T) + T = Ma_{\text{г.}}$$

Из рисунка очевидно, что $a_{\text{г.}} = a_{\text{п.}} = a$; тогда, решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} mg - T &= ma, \\ T - k(Mg + T) &= Ma, \end{aligned} \right\}$$

получим

$$a = \frac{mg - kMg - kmg}{M - km + m}.$$

Движение становится возможным при $a > 0$, т. е.

$$\frac{mg - kMg - kmg}{M - km + m} > 0.$$

Скорость плиты к моменту времени t , когда груз коснется ее поверхности, $v_0 = at$, где $t = \sqrt{\frac{2H}{a}}$.

2. Путь, пройденный после момента t ,

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{2Ha}{2a_1} = H \frac{a}{a_1}.$$

Ускорение a_1 определим, зная силу трения на пути s : $F_{\text{тр}} = kg(M + m)$ и в то же время $F_{\text{тр}} = a_1(M + m)$, следовательно, $a_1 = kg$.

Полный путь, пройденный плитой,

$$s_0 = H + s_1 = H + H \frac{mg - kMg - kmg}{(M - km + m) kg} = H \frac{m - k^2 m}{(M - km + m) k}.$$

2.20. Импульс всей системы равен $P(t) = \sum_{i=1}^n m_i v_i(t)$, где

n — число тел системы, m_i — масса, а v_i — скорость i -го тела. Нам надо доказать, что $P(t)$ есть величина постоянная.

Действительно, используя первый закон Ньютона, мы можем утверждать, что если тела не взаимодействуют, то вектор скорости каждого тела не меняется со временем.

Отсюда и сумма $\sum_{i=1}^n m_i v_i(t)$ будет постоянной.

2.21. Нет. Написав условие сохранения горизонтальной проекции импульса, ученик не принял во внимание импульса песка, а ведь очевидно, что высыпавшийся песок имеет ту же горизонтальную скорость, что и вагон в этот момент времени.

Правильно следующее решение. Рассмотрим систему координат, движущуюся со скоростью v_0 . До момента времени t_0 вагон относительно этой системы неподвижен, а начавший высыпаться песок (обладающий горизонтальной скоростью v_0 в неподвижной относительно Земли системе) падает по вертикали. Горизонтальная составляющая импульса, таким образом, не меняется и остается равной нулю, так же как и скорость вагона. Следовательно, в неподвижной системе координат вагон продолжает двигаться со скоростью v_0 .

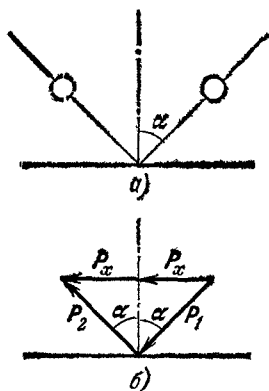


Рис. 2.27.

2.22. Доказательство очевидно из рис. 2.27, а и б.

2.23. Ясно, что лягушке выгодно прыгать под углом 45° к горизонтали: в этом случае достигается наибольшая дальность прыжка или требуется меньшая скорость v_0 при той же дальности.

Напишем закон сохранения горизонтальной составляющей импульса системы:

$$mv_{x_r} + Mv_d = 0,$$

где v_{x_r} — горизонтальная составляющая скорости лягушки и v_d — скорость доски. Отсюда

$$mv_{x_r} = Mv_d \quad \text{и} \quad v_d = \frac{m}{M} v_0 \cos 45^\circ = \frac{m}{M} v_0 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Время пребывания лягушки в воздухе

$$t = \frac{2v_0 \sin 45^\circ}{g} = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g}.$$

Необходимая дальность прыжка лягушки

$$l_1 = l - v_d t = l - \frac{m}{M} \cdot \frac{v_0^2}{g}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$l_1 = v_{л} t = v_0 \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 \frac{\sqrt{2}}{g} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), найдем v_0 :

$$v_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{M+m}}.$$

2.24. Горизонтальная составляющая скорости камня равна

$$v_{\Gamma} = v_0 \cos \alpha = 5 \text{ м/сек.}$$

Так как горизонтальная составляющая импульса системы сохраняется, то

$$v_{л} M = v_{\Gamma} m,$$

где $v_{л}$ — скорость лодки. Следовательно,

$$v_{л} = \frac{m}{M} v_{\Gamma} = 0,033 \text{ м/сек.}$$

Время полета камня

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,73}{10 \cdot 2} \text{ сек} = 1,73 \text{ сек.}$$

Расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент падения складывается из пути, пройденного лодкой, и горизонтального перемещения камня:

$$s = s_{\kappa} + s_{л} = (5 + 0,033) 1,73 \approx 8,71 \text{ м.}$$

2.25. Наиболее просто задача решается в системе отсчета, в которой ядро покоится до деления, т. е. в системе, движущейся относительно Земли со скоростью $v_{я}$ вдоль оси x (ось x совпадает с направлением полета ядра). Тогда в силу закона сохранения импульса образовавшиеся осколки должны лететь в этой системе в противоположных направлениях и с одинаковыми по величине скоростями. Так как система движется вдоль оси x , то составляющие импульса в перпендикулярном к x направлении одинаковы в обеих системах координат (неподвижной относительно Земли и рассматриваемой) и равны между собой по величине.

Составляющую импульса каждого из осколков, направленную по x , найдем, рассматривая движение в неподвижной системе координат. Переходу от движущейся системы координат к неподвижной соответствует изменение составляющей импульса осколков, направленной вдоль x , от 0 до $\frac{M}{2} v_{я}$,

где $v_{\text{я}}$ — скорость движения системы (скорость ядра до деления).

Таким образом, обе составляющие импульса каждого из осколков известны, и можно сказать, что второй осколок полетит под углом α и импульс его по модулю будет равен импульсу первого осколка.

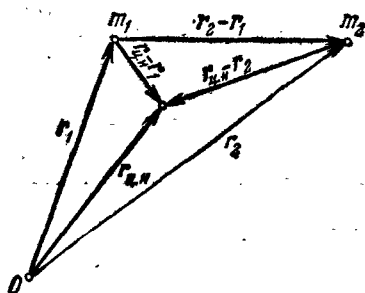


Рис. 2.28.

2.26. Положение центра инерции системы не может измениться под действием только внутренних сил. Поэтому при переливании воды тележка должна начать двигаться в сторону, противоположную движению воды. После того как уровни воды в баках сравняются, движение тележки прекратится.

2.27. Обозначим радиусы-векторы, проведенные из начала выбранной системы координат в точки, где расположены тела, через r_1 и r_2 соответственно (рис. 2.28).

Если массы тел m_1 и m_2 , то координаты центра инерции системы определятся из равенства

$$r_{\text{ц.и}} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Нам надо доказать, что векторы $r_2 - r_1$ и $r_{\text{ц.и}} - r_1$ (аналогично и $r_{\text{ц.и}} - r_2$) совпадают по направлению. Это и будет означать, что центр инерции двух тел лежит на прямой, соединяющей эти тела. Но

$$r_{\text{ц.и}} - r_1 = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} - r_1 = \frac{m_2 (r_2 - r_1)}{m_1 + m_2}.$$

Из этого следует, что направления векторов $r_{\text{ц.и}} - r_1$ и $r_2 - r_1$ совпадают.

Рассмотрим отношение $\frac{|r_{\text{ц.и}} - r_1|}{|r_{\text{ц.и}} - r_2|}$ ($|r_{\text{ц.и}} - r_1|$ — расстояние между первым телом и центром инерции системы, $|r_{\text{ц.и}} - r_2|$ — расстояние между вторым телом и центром инерции). Подставляя $r_{\text{ц.и}}$ из уравнения (1), получим

$$r_{\text{ц.и}} - r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_2 - r_1) \text{ и } r_{\text{ц.и}} - r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (r_1 - r_2).$$

Следовательно,

$$\frac{|r_{ц.и} - r_1|}{|r_{ц.и} - r_2|} = \frac{m_2 |r_2 - r_1|}{m_1 |r_1 - r_2|} = \frac{m_2}{m_1}.$$

2.28. В системе отсчета, связанной с центром инерции системы и движущейся с ускорением, осколки будут разлетаться по всем направлениям со скоростью v_0 каждый, и в момент времени t геометрическим местом точек, в которых находятся осколки, будет сфера радиусом $R = v_0 t$.

Действительно, все осколки падают с одинаковым ускорением g и их относительные скорости целиком определяются начальными условиями. Расстояние между двумя любыми осколками, лежащими на прямой, проходящей через центр инерции системы, в момент t равно диаметру сферы, т. е. $2v_0 t$, и не зависит от угла α .

2.29. Центр инерции грузов будет перемещаться только в вертикальном направлении, так как по горизонтали никакие силы на систему не действуют. Выбрав вертикальную ось, направление которой совпадает с направлением движения первого груза, мы можем написать

$$a_{ц.и} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2},$$

где $a_{ц.и}$ — ускорение центра инерции, a_1 и a_2 — ускорения первого и второго грузов соответственно.

Действительно, приращение $v_{ц.и}$ за малый промежуток времени Δt равно

$$\Delta v_{ц.и} = \frac{m_1 \Delta v_1 + m_2 \Delta v_2}{m_1 + m_2}.$$

Деля обе части равенства на промежуток времени Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$a_{ц.и} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{ц.и}}{\Delta t} = \frac{m_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_1}{\Delta t} + m_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_2}{\Delta t}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2}.$$

Решая обычным методом уравнение движения грузов, найдем, что

$$a_1 = a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Отсюда

$$a_{ц.и} = - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 g.$$

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Понятие энергии

При движении механической системы меняются координаты и скорости входящих в нее тел. Однако во многих случаях существуют характеризующие систему величины, которые с течением времени остаются постоянными. Если известны состояния тел системы до взаимодействия, то знание этих сохраняющихся величин позволяет определить скорости и координаты тел системы после взаимодействия, не прибегая к уравнениям движения.

Одну из таких сохраняющихся величин — полный импульс системы — мы подробно рассмотрели в предыдущей главе. Оказывается, что существует еще одна, не меняющаяся при движении системы величина, называемая *полной энергией* *). В отличие от импульса, энергия — скаляр.

Полную энергию системы можно представить в виде суммы двух существенно различных членов. Первый из них зависит от квадратов скоростей входящих в систему тел. Он определяется как

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_i v_i^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (3.1)$$

*) Вообще говоря, существует еще одна сохраняющаяся векторная величина — момент импульса системы. Рассмотрение момента импульса и физических следствий, вытекающих из закона его сохранения, выходит за рамки этой книги.

(n — число тел системы) и называется *кинетической энергией системы*. Каждое слагаемое этой суммы, равное половине произведения массы i -го тела на квадрат его скорости, определяет *кинетическую энергию этого тела*.

Второй член U характеризует взаимодействие тел, входящих в систему, и зависит от их взаимного расположения (т. е. от их координат). Его называют *потенциальной энергией системы*.

Если в качестве механической системы рассматривается не группа материальных точек, а протяженное тело, то потенциальная энергия характеризует взаимодействие частей этого тела.

Для простейшего случая замкнутой системы, состоящей из не взаимодействующих тел, закон сохранения полной энергии представляет собой следствие закона инерции. Действительно, если тела не взаимодействуют, то $U=0$ (по смыслу U , как величины, характеризующей взаимодейст-

вие) и, следовательно, полная энергия $E = T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$. Из закона инерции вытекает, что $v_i = \text{const}$, значит, полная энергия системы сохраняется.

§ 2. Связь между силой и потенциальной энергией

Ранее мы говорили, что взаимодействие тел характеризуется силой. Поскольку взаимодействие можно характеризовать также потенциальной энергией, то между силой и потенциальной энергией должна существовать связь. Для выяснения этой связи рассмотрим для простоты замкнутую механическую систему, состоящую из двух тел. Обозначим силу, с которой первое тело действует на второе, через F_2 , а силу, с которой второе тело действует на первое, через F_1 . Направим ось x по линии взаимодействия тел. За малый промежуток времени Δt тело 1 получит перемещение Δx_1 , а тело 2 — перемещение Δx_2 . Запишем второй закон Ньютона в форме (2.3) для каждого из тел:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \Delta v_1 &= F_{1x} \Delta t, \\ m_2 \Delta v_2 &= F_{2x} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} \frac{m_1 \Delta v_1}{\Delta t} &= F_{1x}, \\ \frac{m_2 \Delta v_2}{\Delta t} &= F_{2x}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Умножив первое равенство системы (3.2) на Δx_1 , а второе на Δx_2 , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 \Delta v_1 \Delta x_1}{\Delta t} &= F_{1x} \Delta x_1, \\ \frac{m_2 \Delta v_2 \Delta x_2}{\Delta t} &= F_{2x} \Delta x_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Так как $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$, то мы можем переписать систему (3.3) в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 \Delta v_1 &= F_{1x} \Delta x_1, \\ m_2 v_2 \Delta v_2 &= F_{2x} \Delta x_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Складывая эти уравнения, получим

$$m_1 v_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 \Delta v_2 = F_{1x} \Delta x_1 + F_{2x} \Delta x_2. \quad (3.5)$$

Используя третий закон Ньютона, запишем

$$|F_{1x}| = |F_{2x}| = |F_x|.$$

Так как Δx_1 и Δx_2 имеют противоположные знаки, равенство (3.5) принимает вид

$$m_1 v_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 \Delta v_2 = F_x (\Delta x_1 + \Delta x_2) = F_x \Delta x. \quad (3.6)$$

Теперь рассмотрим процесс взаимодействия этих тел с помощью введенного выше понятия энергии. Пусть первоначальному состоянию системы соответствует потенциальная энергия U_1 ; тогда через промежуток времени Δt потенциальная энергия взаимодействия изменится и станет равной некоторому значению U_2 (вследствие того, что расстояние между телами изменилось). Разность потенциальных энергий $\Delta U = U_2 - U_1$ можно найти, используя закон сохранения полной энергии системы:

$$E = U + T; \quad U = E - T; \quad \Delta U = \Delta E - \Delta T.$$

Но $\Delta E = 0$ (поскольку $E = \text{const}$), отсюда $\Delta U = -\Delta T$.

Воспользовавшись свойством символа Δ (см. «Математическое дополнение», стр. 197), вычислим приращение кинетической энергии ΔT :

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

$$\Delta T = m_1 v_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 \Delta v_2. \quad (3.7)$$

Сравнивая равенства (3.6) и (3.7) и учитывая, что $\Delta T = -\Delta U$, получим

$$-\Delta U = F_x \Delta x,$$

откуда

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (3.8)$$

Таким образом, мы получили искомую связь между потенциальной энергией и силой.

3. Нулевой уровень потенциальной энергии

Так как в выражение (3.8) для силы входит приращение потенциальной энергии ΔU , то от прибавления к потенциальной энергии постоянной величины сила, а вместе с ней и уравнения движения не изменятся:

$$F_x = -\frac{\Delta(U + \text{const})}{\Delta x} = -\frac{\Delta U + \Delta(\text{const})}{\Delta x} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Очевидно, что при этом не нарушается и закон сохранения энергии. Действительно,

$$\Delta E_1 = \Delta(U + \text{const} + T) = \Delta(U + T) = \Delta E = 0.$$

Следовательно, потенциальная энергия не определяется однозначно: к ней всегда можно прибавить постоянную величину.

Для однозначного определения потенциальной энергии необходимо указать такое расположение взаимодействующих тел, которому соответствует значение потенциальной энергии, равное нулю. Нулевой уровень можно выбирать произвольно, а именно так, как удобно для решения конкретных задач.

Например, в задачах, где приходится учитывать взаимодействие некоторого тела с Землей, потенциальная энергия системы «Земля—тело» считается равной нулю, когда тело находится на поверхности Земли. Рассмотрим, как меняется потенциальная энергия этой системы *) при изменении положения тела относительно Земли.

*) В дальнейшем, если за нулевой уровень принята поверхность Земли, вместо слов «потенциальная энергия взаимодействия системы Земля—тело или системы, включающей в себя Землю и группу тел», мы для краткости будем говорить «потенциальная энергия тела или системы тел». Если за нулевой уровень принята какая-нибудь другая поверхность, мы будем говорить о потенциальной энергии тела (или системы тел) по отношению к этой поверхности.

Выберем координатную ось, направленную вертикально вверх. Пусть тело поднято на некоторую высоту Δx над поверхностью Земли (рис. 3.1, а). При этом его потенциальная энергия изменится на некоторую величину ΔU и станет равной ΔU (так как на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю). Из формулы (3.8) получим

$$\Delta U = -F_x \Delta x.$$

Так как $F_x < 0$, а $\Delta x > 0$, то $-F_x \Delta x > 0$ и $\Delta U > 0$, т. е. потенциальная энергия тела, поднятого над Землей, положительна.

Если тело находится ниже поверхности Земли, например в шахте (рис. 3.1, б), то $F_x < 0$, $\Delta x < 0$ и, следовательно, $-F_x \Delta x < 0$, т. е. $\Delta U < 0$. Потенциальная энергия тела, находящегося ниже поверхности Земли, отрицательна.

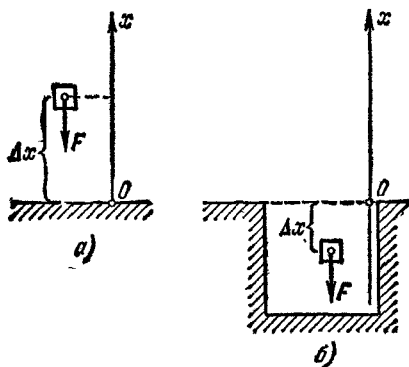


Рис. 3.1.

§ 4. Полная энергия незамкнутых систем

До сих пор мы рассматривали замкнутые системы. Теперь рассмотрим систему, на которую действуют внешние силы. В этом случае полная энергия системы склады-

вается из кинетической энергии входящих в нее тел, потенциальной энергии взаимодействия их между собой и потенциальной энергии взаимодействия тел системы с телами, обуславливающими действие внешних сил.

Если внешние силы постоянны во времени, то полная энергия системы сохраняется.

В том случае, когда поле внешних сил меняется со временем, полная энергия системы, находящейся под действием этих сил, не сохраняется.

Эти утверждения основаны на общих свойствах пространства и времени, подробное рассмотрение которых выходит за рамки данной книги. Однако для уяснения этих важных положений, справедливых не только в механике, но и в других разделах физики, приведем несколько примеров.

Рассмотрим шарик, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный к идеальной пружине*), второй конец которой неподвижно связан с вертикальной стенкой. Силой трения между шариком и поверхностью пренебрежем. Будем рассматривать шарик как некую механическую систему, на которую действует внешняя сила — упругая сила пружины.

Приведем шарик в колебательное движение. Тогда его полная энергия будет складываться из кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия шарика с пружиной. Эта потенциальная энергия зависит от положения шарика, но не зависит от времени в том смысле, что если шарик имел в каком-то положении потенциальную энергию, равную U , то, вернувшись в это положение через некоторый промежуток времени t , он будет обладать той же самой потенциальной энергией U . В этом же смысле постоянна и внешняя сила, действующая на рассматриваемую систему (шарик). В соответствии со сказанным, полная энергия системы сохраняется. Рассмотрим теперь реальную пружину, упругие свойства которой с течением времени меняются, т. е. сила, которая действует на шарик со стороны пружины, при одном и том же расстояний шарика от положения равновесия уменьшается. В этом случае шарик, имевший в каком-то положении потенциальную энергию, равную U , возвратившись в то же самое положение, будет иметь энергию $U_1 < U$. Соответственно полная энергия шарика уменьшается. Этот пример иллюстрирует несохранение полной энергии системы, находящейся под действием внешней силы, зависящей от времени.

Теперь включим в рассмотрение силы трения. Как известно, сила трения зависит только от постоянного коэффициента трения и силы нормального давления тела на поверхность, также не зависящей от времени в данной точке поверхности. Тем не менее, опыт показывает, что брусок, пущенный с некоторой скоростью v вдоль поверхности, останавливается именно вследствие трения. Таким образом, его полная первоначальная энергия, равная $mv^2/2$ (где m — масса бруска), уменьшается до нуля.

Возникающее в этом примере противоречие с законом сохранения энергии для системы, находящейся под действием постоянной внешней силы, является кажущимся. Дело в том, что в рамках механики нельзя учесть энергию взаимодействия

*) Идеальной мы называем такую пружину, свойства которой не изменяются со временем.

тела и поверхности, точнее, энергию взаимодействия между молекулами, из которых они состоят. При этом кинетическая энергия тела как целого переходит в энергию движения молекул тела и поверхности, воспринимаемую как выделение тепла.

§ 5. Работа

В предыдущем параграфе мы ввели важное понятие энергии и раскрыли его физический смысл. Однако для того чтобы можно было пользоваться понятием энергии для решения конкретных задач, необходимо научиться ее вычислять.

Из формулы (3.8) следует, что $\Delta U = -F \Delta x$ и соответственно $\Delta T = F \Delta x$. Таким образом, зная, чему равно произведение $F \Delta x$, мы можем вычислить изменение кинетической и потенциальной энергии тела. Величину

$$A = F \Delta x \quad (3.9)$$

называют *работой* силы F на перемещении Δx .

Если направления силы и перемещения не совпадают, то работа определяется как произведение проекции силы на направление перемещения на величину этого перемещения:

$$A = F_x \Delta x = F \Delta x \cos \alpha, \quad (3.10)$$

где α — угол между направлением силы и направлением перемещения.

Нетрудно показать, что и в этом случае работа характеризует изменение энергии тела. Покажем это на примере движения тела в поле Земли. Выбирая систему координатных осей y и z так, как это показано на рис. 3.2, мы можем произвольное

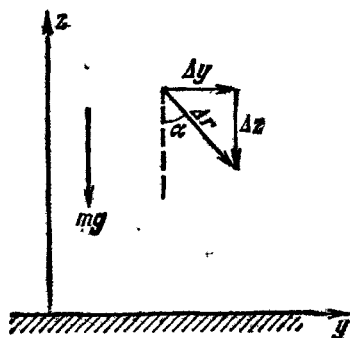


Рис. 3.2.

перемещение Δr в плоскости yz представить в виде суммы двух перемещений: горизонтального Δy и вертикального Δz . Так как потенциальная энергия тела зависит только от расстояния до Земли (считаем, что поверхность Земли принята за нулевой уровень), то при перемещении на Δy потенциальная энергия не изменится, а при перемещении на Δz изменится на

$$\Delta U = -F \Delta z = -F |\Delta r| \cos \alpha = -A.$$

Знак работы определяется знаком косинуса угла α . Если угол α острый, то работа, совершенная данной силой, положительна; если угол α тупой, то работа силы отрицательна. В последнем случае говорят, что работа совершена против данной силы. Когда тела взаимодействуют при непосредственном соприкосновении (при деформации или при трении), то вместо слов «сила совершает работу» иногда говорят: «тело совершает работу», имея в виду тело, со стороны которого действует сила. Если взаимодействие осуществляется посредством поля, говорят о работе сил поля или о работе против сил поля.

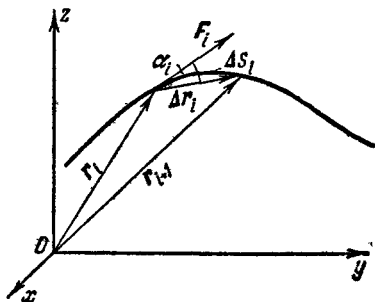


Рис. 3.3.

Покажем теперь, как вычисляется работа в общем случае, когда сила меняется произвольным образом и траектория тела также совершенно произвольна (рис. 3.3).

Разобьем весь путь тела на n малых перемещений $\Delta \mathbf{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), на каждом из которых силу можно считать постоянной. Тогда работа на перемещении $\Delta \mathbf{r}_i$ будет равна

$$\Delta A_i = |\mathbf{F}_i| |\Delta \mathbf{r}_i| \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между направлением вектора силы \mathbf{F}_i и вектора перемещения $\Delta \mathbf{r}_i$. В силу малости $\Delta \mathbf{r}_i$ мы можем заменить $|\Delta \mathbf{r}_i|$ через Δs_i , т. е. через приращение пути. Тогда формула для ΔA_i примет вид

$$\Delta A_i = F_i \Delta s_i \cos \alpha_i.$$

Работа на всем пути

$$A \approx \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n F_i \Delta s_i,$$

где F_{i_s} — проекция силы \mathbf{F}_i на направление перемещения ($F_{i_s} = F_i \cos \alpha_i$). Для получения точного равенства перейдем к пределу:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_{i_s} \Delta s_i. \quad (3.11)$$

Ранее найденное выражение (3.10) для работы удобно использовать в том случае, если дан график зависимости проекции силы на направление перемещения тела от величины пути (рис. 3.4). Тогда работу силы на пути от x_1 до x_2 найдем по формуле (3.11) как площадь, ограниченную кривой CD , осью x и прямыми Cx_1 и Dx_2 , обычными приемами суммирования.

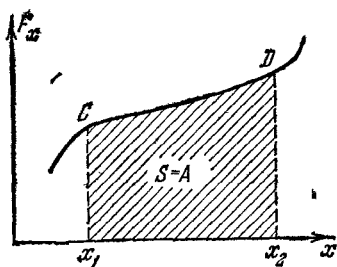


Рис. 3.4.

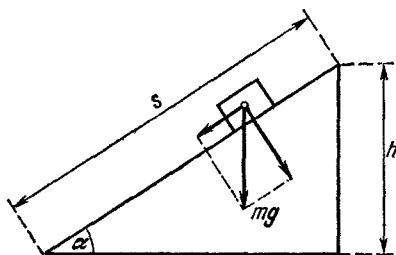


Рис. 3.5.

В качестве примера применения формулы (3.11) найдем работу, совершенную силой тяжести при движении тела по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 3.5). Будем считать, что движение происходит без трения. В этом случае проекция силы F_{ix} остается постоянной на всем пути и

$$A = F_{ix} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = mgs \sin \alpha = mgh.$$

Следовательно, работа силы тяжести не зависит от длины наклонной плоскости, а зависит только от ее высоты.

При движении тела в поле сил тяжести по произвольной траектории величина работы определяется только разностью высот начального и конечного положений тела. Это следует из того, что работа сил тяжести (или против сил тяжести) определяется изменением потенциальной энергии, которое зависит только от расстояния между телом и землей, но не зависит от пути, по которому поднималось тело.

В качестве второго примера вычислим работу, совершаемую против силы упругости при растяжении или сжатии пружины. Будем считать, что пружина подчиняется закону Гука, т. е. сила упругости растет пропорционально сме-

щению пружины из свободного состояния и направлена против этого смещения:

$$F_x = -kx,$$

где k — постоянный коэффициент, характеризующий упругие свойства пружины.

Как мы уже говорили, работу удобнее всего вычислять по графику зависимости F_x от x . Как видно из рис. 3.6, работа, совершаемая при растяжении, равна

$$A = \frac{kx \cdot x}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

Здесь считается, что растяжению соответствует положительное смещение. Соответственно при сжатии

$$A = \frac{(-kx)(-x)}{2} = \frac{kx^2}{2}.$$

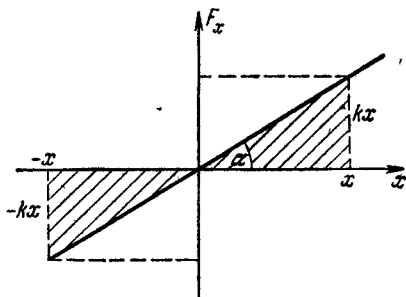


Рис. 3.6.

Считая, что в свободном состоянии потенциальная энергия пружины равна нулю, мы можем сказать, что при растяжении или сжатии пружины на величину x ее потенциальная энергия становится равной $\frac{kx^2}{2}$.

Мы уже говорили о том, что при наличии трения полная энергия системы не сохраняется. Изменение полной энергии можно вычислить, зная работу сил трения. Вернемся к примеру замкнутой системы, состоящей из двух тел (см. § 1), и рассмотрим процесс взаимодействия этих тел с учетом того, что на первое тело действует сила трения $F_{тр1}$, а на второе $F_{тр2}$; тогда уравнение (3.5) изменится следующим образом:

$$m_1 v_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 \Delta v_2 = F_{1x} \Delta x_1 + F_{тр1} \Delta x_1 + F_{2x} \Delta x_2 + F_{тр2} \Delta x_2.$$

Знаки перемещений Δx_1 и Δx_2 противоположны знакам соответствующих сил трения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$. Кроме того, как уже говорилось, Δx_1 имеет знак, обратный знаку Δx_2 . Тогда

$$m_1 v_1 \Delta v_1 + m_2 v_2 \Delta v_2 = F_x (\Delta x_1 + \Delta x_2) + F_{тр2} \Delta x_2 + F_{тр1} \Delta x_1 = F_x \Delta x + F_{тр1} \Delta x_1 + F_{тр2} \Delta x_2.$$

Рассматривая этот процесс с энергетической точки зрения, получим

$$\Delta T = \Delta E - \Delta U = F_x \Delta x + F_{\text{тр}1} \Delta x_1 + F_{\text{тр}2} \Delta x_2,$$

причем

$$-\Delta U = F_x \Delta x.$$

Из этих равенств вытекает, что изменение полной энергии системы происходит за счет работы сил трения:

$$\Delta E = F_{\text{тр}2} \Delta x_2 + F_{\text{тр}1} \Delta x_1 = A_1 + A_2.$$

В табл. 3.1 приведены единицы измерения работы и мощности в системах СИ и СГС.

Таблица 3.1

Физическая величина	Размерность в условных обозначениях	Наименование, сокращенное обозначение и размерность в системе	
		СИ	СГС
Работа, энергия	ML^2T^{-2}	Джоуль (дж) (кг·м ² /сек ²)	Эрг (эрг) (г·см ² /сек ²)
Мощность	ML^2T^{-3}	Ватт (вт) (кг·м ² /сек ³)	Эрг в секунду (эрг/сек) (г·см ² /сек ³)

ПРИМЕРЫ

I. Доказать, что если полная энергия замкнутой системы, состоящей из n тел, сохраняется в какой-то инерциальной системе отсчета, то она сохраняется в любой другой инерциальной системе, движущейся со скоростью V относительно первой.

Через E обозначим полную энергию в первой системе отсчета, через E' — во второй. При переходе ко второй системе отсчета потенциальная энергия системы тел не изменяется, так как она зависит только от их взаимного расположения. Скорость тел системы преобразуется следующим образом:

$$v'_i = v_i + V$$

(для i -го тела).

Тогда полная энергия системы

$$\begin{aligned}
 E' &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i'^2}{2} + U' = \sum_{i=1}^n \frac{m_i (v_i + V)^2}{2} + U' = \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} + V \sum_{i=1}^n m_i v_i + V^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} + U' = \\
 &= E + V \sum_{i=1}^n m_i v_i + V^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2}.
 \end{aligned}$$

Полученное для E' выражение показывает, что энергия E' постоянна. Действительно, $E = \text{const}$ по условию;

$V^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2} = \text{const}$, так как относительная скорость движе-

ния V систем отсчета постоянна; член $V \sum_{i=1}^n m_i v_i$ представ-

ляет собой не что иное, как произведение постоянной скорости V на полный импульс системы тел в первой системе отсчета, но так как в замкнутой системе тел $P = \text{const}$, то

и $V \sum_{i=1}^n m_i v_i = VP = \text{const}$. Следовательно, $E' = \text{const}$.

Пусть в некоторой системе отсчета $P = 0$, т. е. центр инерции системы тел в ней покоится. Энергия E в этой системе отсчета носит название *внутренней энергии*. Следовательно, внутренняя энергия включает в себя потенциальную энергию взаимодействия между телами системы и кинетическую энергию движения тел относительно центра инерции.

Если перейти в систему отсчета, относительно которой центр инерции движется со скоростью V , то полную энергию этой системы мы можем представить как сумму

энергии движения системы как целого, $V^2 \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{2}$ и внутренней энергии системы.

II. На тело массой M , первоначально покоившееся в некоторой системе отсчета, налетает тело массой m со скоростью v_0 . Найти скорости тел после соударения в той же системе отсчета. Определить наибольшую энергию, которую налетающее тело может передать покоящемуся. Удар — центральный и абсолютно упругий.

Так как удар центральный, то движение, разбираемое в задаче, одномерно. Выбрав ось координат так, чтобы ее направление совпадало с направлением v_0 , мы можем написать закон сохранения импульса:

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2, \quad (1)$$

где v_1 — скорость налетающего тела после удара, v_2 — скорость, которую приобрело тело, покоившееся до удара. Записав v_1 и v_2 со знаком плюс, мы предположили, что тела движутся после удара по оси в положительном направлении. Если в результате вычислений мы получим, что значение v_1 или v_2 отрицательно, то это будет означать, что в действительности соответствующее направление скорости обратно выбранному.

По определению, абсолютно упругим называется такой удар, при котором суммарная кинетическая энергия сталкивающихся тел сохраняется. Следовательно,

$$T_0 = T_1 + T_2,$$

где T_0 — первоначальная энергия налетающего тела, T_1 и T_2 — энергии налетающего и покоящегося тела после удара,

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) образуют систему

$$\left. \begin{aligned} mv_0 &= mv_1 + Mv_2, \\ mv_0^2 &= mv_1^2 + Mv_2^2, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} m(v_0 - v_1) &= Mv_2, \\ m(v_0^2 - v_1^2) &= Mv_2^2. \end{aligned} \right\}$$

Разделив первое уравнение на второе почленно, найдем, что

$$v_0 + v_1 = v_2; \quad (3)$$

подставив в (1), получим

$$v_1 = \frac{m-M}{m+M} v_0. \quad (4)$$

Из уравнений (1) и (3) найдем

$$v_2 = \frac{2m}{m+M} v_0, \quad (5)$$

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{m-M}{m+M} \right)^2 = T_0 \left(\frac{m-M}{m+M} \right)^2. \quad (6)$$

Энергия тела массой M (энергия, потерянная налетающим

телом)

$$T_2 = T_0 - T_1 = \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{2} \cdot \frac{4m^2}{(m+M)^2} = T_0 \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (7)$$

Исследуем полученные соотношения (4) — (7).

1. При $M < m$ после удара оба тела будут двигаться в направлении движения налетающего тела.

2. При $M = m$ первое (налетающее) тело после удара остановится, второе же приобретет скорость v_0 и энергию $mv_0^2/2$; тела как бы обмениваются скоростями.

Аналогичное явление наблюдалось бы и в том случае, если бы второе тело тоже двигалось до удара с некоторой скоростью v_2 навстречу первому. Действительно, переходя к системе отсчета, связанной со вторым телом, получим, что скорость налетающего тела в этой системе $v'_0 = v_0 + v_2$, а его скорость после удара $v'_1 = 0$; скорость второго тела после удара $v'_2 = v_0 + v_2$. Совершая обратный переход к первоначальной системе координат, найдем

$$\begin{aligned} v_1 &= v'_1 - v_2 = -v_2, \\ v_2 &= v'_2 - v_2 = v_0 + v_2 - v_2 = v_0, \end{aligned}$$

т. е. после удара произошел обмен скоростями между телами.

3. В случае $M > m$ налетающее тело начнет двигаться назад, отдав второму телу только часть своей энергии. При $M \rightarrow \infty$ происходит упругий удар, эквивалентный удару тела о неподвижную стенку (стенка энергии не получает: $E \rightarrow 0$).

III. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит шар массой M . На него налетает шар массой m , движущийся со скоростью v . Происходит абсолютно неупругий удар. Найти скорость шаров после соударения.

После абсолютно неупругого удара шары будут продолжать движение вместе. При этом по закону сохранения импульса

$$mv = (m + M) v_1,$$

где v_1 — скорость обоих шаров после соударения. Отсюда

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v.$$

Рассмотрим абсолютно неупругий удар с точки зрения сохранения энергии. Начальная энергия системы

$$T_1 = \frac{mv^2}{2},$$

конечная —

$$T_2 = \frac{(m+M)}{2} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v^2 = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{m+M},$$

причем $T_1 > T_2$, так как $M > 0$. Очевидно, что в этом случае механическая энергия движения переходит в тепло.

IV. Тело массой m соскальзывает по наклонной плоскости, переходящей в «мертвую петлю» радиусом R , и в ее нижней точке упруго соударяется с покоящимся телом массой M (рис. 3.7). С какой высоты H начинает двигаться первое

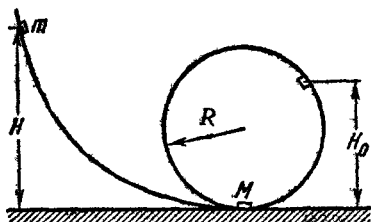


Рис. 3.7.

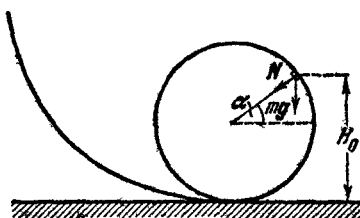


Рис. 3.8.

тело, если после соударения второе тело отрывается от петли на высоте $H_0 = \frac{4}{3}R$, а первое, поднявшись назад по наклонной плоскости и затем вернувшись, отрывается в той же точке, что и второе? Каково отношение масс этих тел?

Рассмотрим движение тела по «мертвой петле». При движении на тело в радиальном направлении действуют две силы: составляющая веса $mg \sin \alpha$ (рис. 3.8) и сила реакции N . Сумма этих сил вызывает центростремительное ускорение v^2/R . В момент, когда тело отрывается от петли, сила реакции N обращается в нуль и тогда

$$mg \sin \alpha = \frac{mv^2}{R}, \quad (1)$$

где

$$\sin \alpha = \frac{H_0 - R}{R}, \quad (2)$$

если тело отрывается на высоте H_0 .

Для нахождения скорости v_{H_0} , которой должно обладать тело в нижней точке петли, чтобы его отрыв произошел на высоте H_0 , используем закон сохранения энергии

$$\frac{mv_{H_0}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgH_0. \quad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) найдем

$$v_{H_0}^2 = 3gH_0 - gR.$$

Подставляя $H_0 = \frac{4}{3}R$, получим

$$v_{H_0} = \sqrt{3gR}.$$

Двигаясь с высоты H (см. рис. 3.7), первое тело перед ударом будет иметь энергию

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} = mgH,$$

равную сумме кинетических энергий первого и второго тел после удара $T_0 = T' + T_2$ (удар упругий). Для выполнения условия отрыва на высоте H_0 скорость второго тела после соударения должна быть равна

$$v_2 = v_{H_0} = \sqrt{3gR},$$

а энергия

$$T_2 = \frac{3gRM}{2}.$$

Первое тело, двигаясь после удара обратно, поднялось на некоторую высоту H' , определяемую из условия $T' = mgH'$, остановилось и начало соскальзывать вниз по наклонной плоскости. Для того чтобы это тело оторвалось на высоте H_0 от петли, оно должно иметь в нижней точке скорость $v_1 = v_{H_0} = \sqrt{3gR}$ и, следовательно, $T' = 3gRm/2$. Отсюда

$$mgH = \frac{(M+m)3gR}{2}.$$

С другой стороны, из условия упругости удара

$$T_2 = T_0 \frac{4mM}{(m+M)^2}$$

(см. пример II). Для определения H и M/m получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{3gRM}{2} &= mgH \frac{4mM}{(m+M)^2}, \\ mgH &= \frac{(M+m)3gR}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Перемножая левые и правые части уравнений между собой, получим

$$1 = \frac{4m}{m+M}.$$

Числитель и знаменатель правой части равенства разделим на M :

$$1 = \frac{4 \left(\frac{m}{M} \right)}{\frac{m}{M} + 1}.$$

Решая это уравнение относительно m/M , получим

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{3},$$

отсюда $H = 6R$.

V. На стороны стержня, изогнутого под прямым углом (рис. 3.9), нанизаны две бусинки пренебрежимо малого веса, связанные нитью длиной l . В первоначальный момент времени система покоится. Затем одну из бусинок начинают перемещать в направлении от вершины угла так, что сила натяжения нити постоянна и равна F_0 . Найти зависимость энергии второй бусинки от пройденного пути, если в первоначальный момент времени она находилась на расстоянии a от вершины. На каком расстоянии от начального положения ее энергия будет максимальной? Чему равно это максимальное значение энергии? Силу трения бусинки о стержень считать постоянной и равной f_0 .

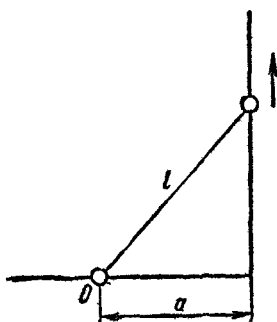


Рис. 3.9.

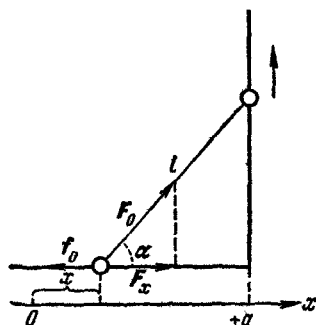


Рис. 3.10.

Для решения задачи введем ось x так, как показано на рис. 3.10; начало координат совместим с первоначальным положением бусинки. Проекция силы F_0 на ось x

$$F_x = F_0 \cos \alpha = F_0 \frac{a-x}{l}.$$

Проекция силы трения на эту ось постоянна и равна по модулю f_0 . Работа силы F_0 на пути x идет на увеличение энергии бусинки и на работу против сил трения. Таким образом, энергия бусинки

$$T_6 = A_{F_0} - A_{\text{тр.}}$$

Вычисление удобно произвести графически. Для этого построим графики зависимости проекций сил на ось x от x (рис. 3.11). Чтобы бусинка начала двигаться,

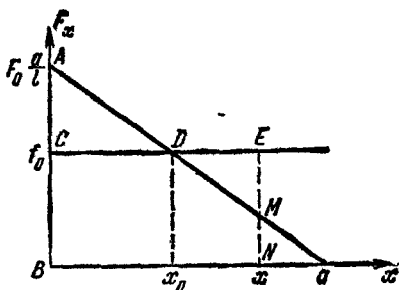


Рис. 3.11.

ся, необходимо, очевидно, выполнение условия $F_0 \frac{a}{l} > f_0$.

Для произвольного значения x работа силы F_0 на пути x численно равна площади фигуры $ABNM$, а работа против сил трения — площади фигуры $CBNE$. Обозначив площади этих фигур через S , получим

$$T_6 = S_{ABNM} - S_{CBNE} = S_{\Delta ACD} - S_{\Delta DME}.$$

Но

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} \left(F_0 \frac{a}{l} - f_0 \right) \left(\frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} \right) = \frac{(F_0 a - f_0 l)^2}{2F_0 l}$$

($CD = x_0$ находим из условия $F_0 \frac{a - x_0}{l} = f_0$) и

$$\begin{aligned} S_{\Delta DME} &= \frac{1}{2} EM \cdot DE = \\ &= \frac{1}{2} \left(f_0 - F_0 \frac{a - x}{l} \right) (x - x_0) = \frac{[f_0 l - F_0 (a - x)]^2}{2F_0 l}, \end{aligned}$$

откуда

$$T_6 = \frac{(F_0 a - f_0 l)^2}{2F_0 l} - \frac{[f_0 l - F_0 (a - x)]^2}{2F_0 l} = \frac{-F_0 x^2 + 2(F_0 a - f_0 l)x}{2l}.$$

Для нахождения максимального значения энергии бусинки $T_{\text{макс}}$ и соответствующего ей пройденного пути $x_{\text{макс}}$ заметим, что график зависимости энергии от пройденного пути есть парабола, обращенная выпуклостью вверх. Максимальное значение энергии соответствует ординате вершины параболы.

Преобразуя выражение для T_6 , получим

$$T_6 = -\frac{F_0}{l} \left[x^2 - 2 \frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} x + \left(\frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} \right)^2 - \left(\frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} \right)^2 \right] = \\ = -\frac{F_0}{2l} \left(x - \frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} \right)^2 + \frac{(F_0 a - f_0 l)^2}{2F_0 l},$$

откуда

$$T_{\text{макс}} = \frac{(F_0 a - f_0 l)^2}{2F_0 l},$$

что осуществляется при

$$x = x_{\text{макс}} = \frac{F_0 a - f_0 l}{F_0} = x_0.$$

Впрочем, эти результаты можно было бы получить другим, более простым способом: при движении бусинки до точки x_0 проекция силы $F_x > f_0$, т. е. результирующая сила направлена в направлении движения, и бусинка движется ускоренно, т. е. ее скорость, а следовательно, и энергия, растет. После точки x_0 проекция силы $F_x < f_0$, и бусинка движется замедленно, т. е. скорость ее уменьшается. Максимальное значение энергии соответствует, очевидно, точке x_0 и равно площади треугольника ACD , нахождение которой значительно проще предыдущих преобразований.

Отметим еще, что бусинка достигнет вершины угла лишь при условии

$$T_6(a) \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad T_6 = \frac{-F_0 a^2 + 2(F_0 a - f_0 l)a}{2l} \geq 0.$$

Данное неравенство выполняется при $\frac{f_0}{F_0} \leq \frac{a}{2l}$.

ЗАДАЧИ

3.1. Может ли величина кинетической энергии тела быть больше его полной энергии?

3.2. Начертить графики зависимости потенциальной и кинетической энергий шарика массой m , брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , от высоты подъема h . Если график такого типа дан, то как найти по нему массу брошенного тела? Как будет выглядеть в тех же координатах график полной энергии шарика?

3.3. Используя условие предыдущей задачи, начертить графики T , U и E шарика в зависимости от времени.

3.4. В физике часто используют понятие *поля центральных сил*, или *центрального поля*. В таком поле силы, действующие на тело, зависят только от расстояния до какой-то определенной точки, обычно выбираемой за начало координат. Потенциальная энергия тела в центральном поле соответственно этому также является функцией только расстояния до этой точки. Исходя из этого определения, доказать, что в центральном поле работа сил поля над телом, движущимся по замкнутому контуру, равна нулю.

3.5. Дан график (рис. 3.12) зависимости потенциальной энергии тела от координаты (одномерное движение). Описать характер движения в зависимости от величины

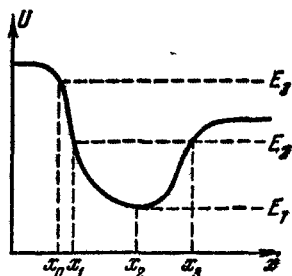


Рис. 3.12.

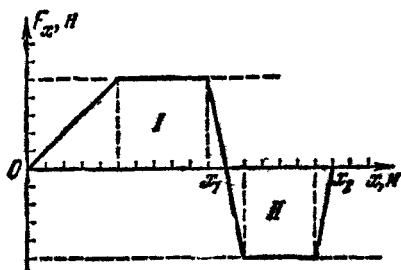


Рис. 3.13.

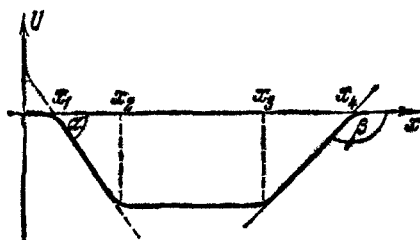


Рис. 3.14.

полной энергии (рассмотреть три случая, указанные на рисунке).

3.6. Тело движется вдоль некоторой выбранной оси x . На него действует внешняя сила F . Дан график зависимости проекции этой силы F_x от координаты тела (рис. 3.13). Найти изменение его кинетической энергии на пути от $x=0$ до $x=x_2=17$ м, если известно, что полная энергия тела сохраняется.

3.7. Найти силу, действующую на тело, как функцию его координаты, если дан график (рис. 3.14) потенциальной энергии тела (движение одномерное).

3.8. Тело брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 . На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной?

3.9. Два тела, массы которых m_1 и m_2 , находятся на высоте h_1 и h_2 соответственно от земной поверхности. Доказать, что потенциальная энергия такой системы равна произведению суммы весов тел на высоту центра инерции системы над земной поверхностью (взаимодействием тел друг с другом пренебречь).

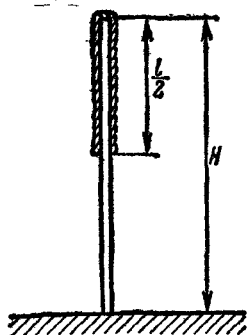


Рис. 3.15.

3.10. Через забор перекинута веревка длиной l так, что свешивающиеся с обеих сторон забора концы ее равны (рис. 3.15) и веревка находится в равновесии. В какой-то момент времени равновесие нарушается и веревка начинает соскальзывать с забора. Определить, через какое время после того как она полностью соскользнет с забора и начнет падать, центр инерции веревки коснется земли. Высота забора H , трение веревки о забор не учитывать.

3.11. Решить предыдущую задачу в том случае, если первоначально половина веревки лежала на горизонтальном гладком столе, а вторая половина свешивалась вниз (рис. 3.16).

3.12. Два бруска, массой m каждый, связаны между собой невесомой пружиной с коэффициентом упругости k . Пружину сжимают силой $F = 3mg$. Определить, как будет двигаться центр инерции системы после прекращения

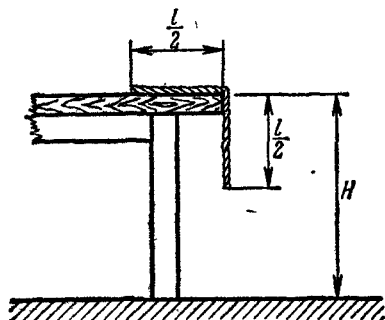


Рис. 3.16.

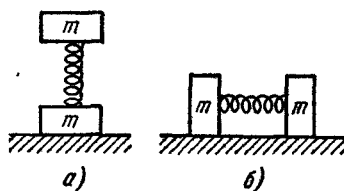


Рис. 3.17.

действия силы F в двух случаях: при вертикальном (рис. 3.17, а) и при горизонтальном (рис. 3.17, б) положениях системы. Как надо изменить условия второго опыта, чтобы результат был таким же, как и в первом?

3.13. С какой наименьшей высоты h_0 должен соскальзывать по наклонной плоскости кубик с ребром $a = 10^{-2}$ м, чтобы преодолеть выступ у основания наклонной плоскости с высотой много меньшей, чем a ? Угол наклона плоскости $\alpha = 5^\circ$, трением при соскальзывании кубика и потерей энергии при ударе о выступ пренебречь.

3.14. Может ли совершать работу сила трения покоя?

3.15. Снаряд массой m попадает в вагонетку с песком массой M , которая первоначально покоилась. Найти наименьшую скорость снаряда, при которой он может вылететь через противоположную стенку вагонетки, если средняя сила трения его о песок равна $F_{\text{тр}}$. Выстрел был произведен в горизонтальном направлении вдоль рельсов, длина вагонетки l . Трением колес вагонетки о рельсы пренебречь, стенки вагонетки считать настолько тонкими, что они не оказывают сопротивления движению снаряда.

3.16. Прямоугольный брусок движется по инерции из одной полуплоскости в другую так, что вектор скорости бруска и сторона его основания длиной $l = 0,2$ м перпендикулярны к линии раздела между полуплоскостями. Коэффициенты трения бруска о полуплоскости $k_1 = 0,2$ и $k_2 = 0,7$ соответственно. Какова должна быть скорость бруска в момент пересечения передней гранью линии раздела, чтобы он проник во вторую полуплоскость только на $4/5$ своей длины?

3.17. На горизонтальной поверхности лежит кубик с ребром a и весом P . Каким образом надо перемещать кубик — кантовать его или двигать по поверхности, чтобы на пути $s = na$, где n — целое число, совершить наименьшую работу? Коэффициент трения между кубиком и поверхностью равен 0,4.

3.18. Обезьяна массой m , висят на невесомом и нерастяжимом канате, равномерно движущемся вверх со скоростью v_0 , поднимается на высоту l . Как изменится работа, совершаемая для подъема обезьяны на ту же высоту, если обезьяна будет двигаться вверх по канату с ускорением a ? (Канат поднимается с той же скоростью v_0 .) Решить задачу для $a = 0,1$ м/сек², $v_0 = 1$ м/сек, $l = 10$ м, $m = 20$ кг.

3.19. По горизонтальной плоскости движется без трения шар массой M со скоростью v_0 . Его догоняет другой шар массой $M/2$. Скорость более легкого шара совпадает по направлению с v_0 и равна $2v_0$ по абсолютной величине. Найти скорости шаров после удара, считая удар абсолютно упругим и центральным.

3.20. Какое вещество лучше замедлит поток нейтронов — содержащее легкие атомы или тяжелые? (Замедление нейтронов происходит посредством упругого удара.)

3.21. Шарик, висящий на нити, отклонили от вертикали на угол φ_0 и затем отпустили. В момент, когда шарик про-

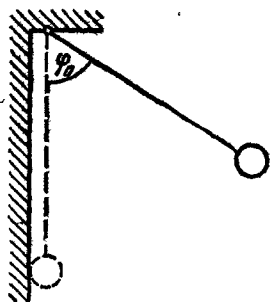


Рис. 3.18.

ходит положение равновесия, он ударяется о вертикальную стенку (рис. 3.18) и теряет часть своей энергии αT , где α — постоянная величина ($0 < \alpha < 1$), а T — кинетическая энергия в момент удара. Затем шарик вновь отклоняется на угол $\varphi_1 < \varphi_0$ и т. д. Найти число ударов n , после которых шарик отклонится на угол $\varphi_n < \varphi'$, где φ' — заданный угол ($\varphi' < \varphi_0$).

3.22. На нити длиной $l = 7,35$ м висит груз. В него стреляют из винтовки, расположенной горизонтально на уровне груза. Груз начинает качаться. Каждый раз, когда он проходит положение равновесия, удаляясь от винтовки, в него попадает пуля. Скорость пули $v = 600$ м/сек. Определить, на какой максимальный угол φ отклонится груз после двадцатого выстрела, если все пули застревают в нем. Масса груза в 1880 раз больше массы пули.

3.23. На гладкой поверхности лежат, касаясь друг друга, два одинаковых ($R_1 = R_2$, $m_1 = m_2$) шара. На них налетает точно такой же третий шар, движущийся со скоростью v_0 . Соударение всех трех шаров происходит одновременно. Определить скорости шаров после удара, считая его абсолютно упругим.

3.24. Мяч начинает соскальзывать (без качения*) из верхней точки неподвижной полусферы радиусом R (рис. 3.19). Как высоко он подскочит после удара о поверхность, на которой находится полусфера, если удар считать абсолютно упругим? Размеры мяча малы по сравнению с R .

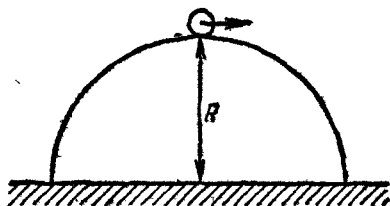


Рис. 3.19.

*) То есть трение его о поверхность ничтожно мало.

3.25. Велосипедист едет по дороге и видит, что на его пути находится препятствие — стена. Что надо сделать велосипедисту, чтобы избежать аварии, — затормозить или повернуть (т. е. в каком случае он пройдет меньшее расстояние по направлению к стене)? (Одновременно тормозить и поворачивать велосипедист по каким-то причинам не может.)

3.26. По горизонтальному абсолютно гладкому желобу пускают с начальной скоростью v_0 три одинаковых стальных шара массой m каждый. На шары действует постоянная сила притяжения F со стороны электромагнита, установленного у начала желоба (рис. 3.20). Второй шар пускают в тот момент, когда первый шар остановился, а третий — в момент столкновения второго шара с первым. Определить время, через которое каждый шар вернется в исходную точку. Удары шаров считать абсолютно упругими.

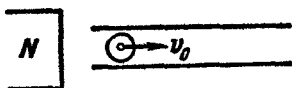


Рис. 3.20.

3.27. Стержень длиной l и массой m вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов, с угловой скоростью ω . Найти кинетическую энергию стержня.

3.28. Решить предыдущую задачу при условии, что стержень вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину.

3.29. Шест высотой h стоит вертикально. В какой-то момент времени его отклоняют на малый угол и он начинает падать. При этом конец шеста, стоящий на земле, не перемещается. Найти скорость второго конца при его ударе о землю.

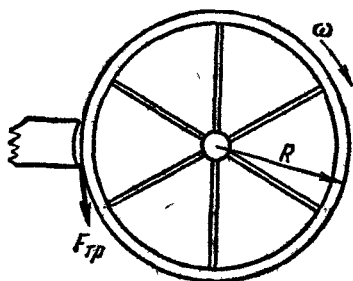


Рис. 3.21.

3.30. Маховик массой m и радиусом R вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр. Для того чтобы затормозить его, к ободу маховика прижимают тормозную колодку. Сила трения между колодкой и ободом постоянна и равна $F_{тр}$. Сколько полных оборотов сделает маховик до остановки,

если можно считать, что его масса равномерно распределена по ободу (рис. 3.21) и ширина обода много меньше R ?

3.31. Найти кинетическую энергию диска, который вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к плоскости диска. Радиус диска R , масса m .

3.32. С высоты h_1 по наклонной плоскости начал катиться диск радиусом R . Катится он без проскальзывания. Найти скорость центра диска на высоте $h_2 < h_1$. Потерями энергии на трение можно пренебречь; h_1 и h_2 — высоты центра диска над поверхностью земли.

3.33. Тонкий обруч катился половину пути по шероховатой поверхности (без проскальзывания) со скоростью v_0 , а вторую половину пути — по абсолютно гладкой поверхности. Найти его среднюю скорость. Потерями энергии на трение пренебречь.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

3.1. Так как нулевой уровень потенциальной энергии выбирается произвольно, а $E = T + U$, то при $U < 0$ полная энергия тела $E < T$.

3.2. Графики даны на рис. 3.22 и 3.23. Потенциальная энергия линейно связана с высотой: $U = mgh$. Так как полная

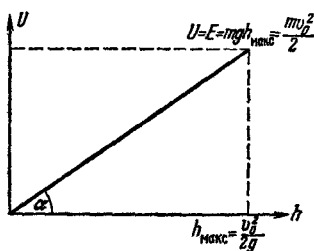


Рис. 3.22.

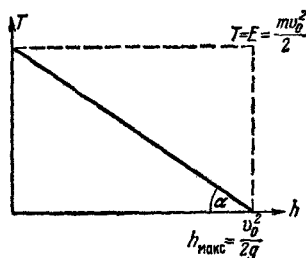


Рис. 3.23.

энергия $E = \text{const}$, то точки графика кинетической энергии для различных высот получаются вычитанием ординат графика U для соответствующей h из постоянной величины $E = mv_0^2/2$.

Масса брошенного тела может быть определена по углу наклона графика $U(h)$ (или $T(h)$), так как численно $\text{tg } \alpha = mg$ и, следовательно, $m = \frac{\text{tg } \alpha}{g}$ ед. массы.

График полной энергии — прямая, параллельная оси абсцисс.

3.3. Зависимость U от времени можно найти, зная, что высота подъема h связана с временем подъема t соотношением

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Следовательно,

$$U = mgh = mg \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right).$$

График (рис. 3.24) представляет собой параболу. Зависимость T от времени легко получить:

$$\begin{aligned} T &= E - U = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} - mg \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Полная энергия $E = U + T = \text{const} = \frac{mv_0^2}{2}$, как уже было сказано выше.

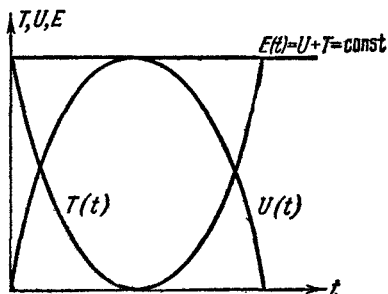


Рис. 3.24.

3.4. Рассмотрим поле центральных сил, в котором потенциальная энергия тела зависит только от расстояния до точки O (рис. 3.25).

Пусть тело двигалось из точки C в точку B по произвольному пути. Работу сил поля на пути из C в B будем вычислять следующим образом: разобьем весь путь тела на большое число отрезков и проведем через их концы концен-

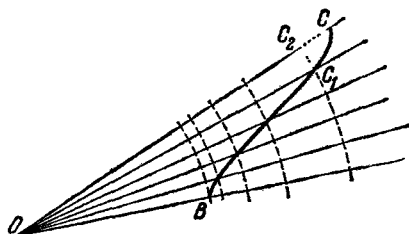


Рис. 3.25.

трические окружности с центром в точке O . При движении тела по одной из таких окружностей его потенциальная энергия будет оставаться постоянной, так как она зависит только от расстояния до точки O .

Переход тела из точки C в точку C_1 можно приближенно представить себе как переход сначала в точку C_2 , а затем в C_1 . Работа, совершенная при этом,

определяется изменением потенциальной энергии тела; и в данном случае равна работе, совершенной при радиальном движении по отрезку CC_2 . Согласно сказанному выше

$$A = -[U(C) - U(C_2)].$$

Таким образом, весь путь из C в B можно представить как сумму радиальных перемещений и перемещений по концентрическим окружностям; последние вклада в работу не дают. Полная работа, совершенная на пути из C в B (по ломаной линии), равна

$$A = -[U(C) - U(B)]. \quad (1)$$

При увеличении числа отрезков n ломаная стремится к кривой и в пределе при $n \rightarrow \infty$ равенство (1) дает работу на пути из C в B при перемещении по заданному пути. Видно, что работа эта не зависит от формы пути и определяется только потенциальной энергией (потенциалом) начальной и конечной точек. Такие поля называют *потенциальными* (например, поле тяготения, электрическое поле и т. д.).

Если тело переместилось по произвольной кривой из C в B , а затем по другой кривой из B в C , то очевидно, что полная работа сил поля на замкнутом пути равна нулю.

3.5. Рассмотрим движение тела, когда его полная энергия равна E_1 (см. рис. 3.12). В этом случае, как следует из графика, $U = E_1$, т. е. $T = 0$. Тело покоится, координата его, $x = x_2$, остается неизменной.

При полной энергии, равной E_2 , область движения тела ограничена координатами x_1 и x_3 . Действительно, в этих точках $E_2 = U$, т. е. тело останавливается. Попастъ в область $x > x_3$ или $x < x_1$ оно не может, так как в этих областях $T < 0$, что физически бессмысленно. Такое движение, когда тело не может выйти из ограниченной области, называют *ограниченным* (или *финитным*). Примером может служить колебательный процесс — движение маятника. Выбирая полярные координаты с полюсом в точке подвеса, мы можем описать движение изменением угла отклонения маятника от положения равновесия — в этом случае движение одномерное.

При полной энергии, равной E_3 , область движения ограничена условием $x \geq x_0$. В точке x_0 тело обладает равной нулю кинетической энергией. Это — точка, в которой тело останавливается. В этом случае движение называют *неограниченным* (или *инфинитным*).

3.6. Изменение кинетической энергии тела равно работе внешних сил ($\Delta T = A$), так как полная энергия сохраняется. Работу мы определим по графику, как разность площадей двух трапеций

$$S_I - S_{II} = \frac{5+11}{2} \cdot 5 - \frac{6+4}{2} \cdot 5 = 15 \text{ н} \cdot \text{м} = 15 \text{ Дж}.$$

Очевидно, что потенциальная энергия тела при этом уменьшилась на $\Delta U = 15 \text{ Дж}$.

3.7. Сила, действующая на тело в данной точке пути x , определяется по графику потенциальной энергии как тангенс угла наклона касательной к кривой в этой точке (так как $F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$, то угол отсчитывается от отрицательного направления оси).

Рассмотрим движение тела в положительном направлении оси x . На отрезке от x_1 до x_2 сила $F = \operatorname{tg} \alpha$, а так как $\alpha < 90^\circ$, то $F > 0$. При движении тела от x_1 до x_2 на него действует сила, направленная по движению. На пути от x_2 до x_3 сила, действующая на тело, $F = 0$. И, наконец, при движении от x_3 до x_4 сила $F < 0$, так как $\beta > 90^\circ$, т. е. сила направлена противоположно движению.

3.8. Полная энергия тела во время полета сохраняется, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgh,$$

где $mv_0^2/2$ — кинетическая энергия тела в момент бросания, $mv^2/2$ и mgh — кинетическая и потенциальная энергии тела на какой-то высоте h .

Для искомой высоты

$$\frac{mv^2}{2} = mgh.$$

Получаем систему уравнений

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} + gh, \quad \frac{v^2}{2} = gh,$$

из которой определяем h :

$$h = v_0^2/4g.$$

3.9. Так как взаимодействием тел между собой мы пренебрегаем, то полная потенциальная энергия такой системы

равна сумме потенциальных энергий, которыми обладают тела во внешнем поле — поле земного тяготения:

$$U = m_1 g h_1 + m_2 g h_2.$$

Найдем высоту центра инерции системы над землей:

$$h_{ц.и} = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2};$$

тогда

$$\begin{aligned} h_{ц.и} (P_1 + P_2) &= (m_1 + m_2) g \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} = \\ &= m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = U. \end{aligned}$$

Этот результат верен для любого числа тел, не взаимодействующих между собой и находящихся над поверхностью Земли,

$$U = h_{ц.и} \sum_{i=1}^n m_i g,$$

где n — число тел, m_i — масса i -го тела.

3.10. Первоначально центр инерции веревки находился на высоте $H - \frac{l}{4}$. После полного соскальзывания, в момент начала ее свободного падения, высота центра инерции над землей стала $H - \frac{l}{2}$. Так как полная энергия веревки неизменна, то уменьшение ее потенциальной энергии на величину

$$\Delta U = mg \left(H - \frac{l}{4} - H + \frac{l}{2} \right) = mg \frac{l}{4}$$

(где m — масса веревки) приведет к тому, что она приобретает кинетическую энергию

$$T = \frac{mv^2}{2} = mg \frac{l}{4}.$$

Отсюда скорость в начальный момент падения

$$v = \sqrt{\frac{gl}{2}}.$$

Центр инерции веревки коснется земли в момент, когда на землю упадет вся веревка. До тех пор, пока любая малая часть ее находится над поверхностью земли, вертикальная

координата центра инерции не равна нулю (начало координат мы совместили с поверхностью земли).

Время падения тела с высоты H с начальной скоростью v найдем из формулы

$$H = vt + \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t_{1,2} = -\frac{v}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}.$$

Решение, имеющее знак минус перед корнем, отбрасываем из-за очевидного соображения, что $t \geq 0$.

Тогда время падения центра инерции на землю

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g} + \frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

3.11. До начала движения центр инерции той части веревки, которая находится на столе, имеет высоту H , а части, свешивающейся со стола, высоту $H - \frac{l}{4}$. Тогда высоту центра инерции всей веревки в первоначальный момент найдем по формуле

$$h_{ц.и.} = \frac{H \frac{m}{2} + \left(H - \frac{l}{4}\right) \frac{m}{2}}{\frac{m}{2} + \frac{m}{2}}.$$

Дальнейшее решение задачи полностью аналогично разобранным нами решению задачи 3.10. Время падения центра инерции

$$t = \sqrt{\frac{l}{4g} + \frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{l}{4g}}.$$

3.12. Рассмотрим первый опыт (пружина находится в вертикальном положении). Под действием силы $F = 3mg$ и веса верхнего бруска $P = mg$ пружина сожмется относительно положения равновесия на величину

$$x = \frac{F + P}{k} = \frac{4mg}{k};$$

при этом ее потенциальная энергия будет равна

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{k \cdot 16m^2g^2}{2k^2} = \frac{8m^2g^2}{k}.$$

Если бы нижний брусок был закреплен на поверхности, то после прекращения действия силы F верхний брусок под действием сил упругости поднялся бы по отношению к первоначальному положению на высоту $h = x + x_1$, где x_1 — растяжение пружины, отсчитанное от положения равновесия (рис. 3.26), а первоначальным положением считается положение бруска при сжатой пружине (все расстояния отсчитывают от нижней грани верхнего бруска). Величину x_1 найдем из закона сохранения энергии:

$$U = \frac{kx_1^2}{2} + mgh = \frac{kx_1^2}{2} + mg(x + x_1)$$

или

$$\frac{8m^2g^2}{k} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{4m^2g^2}{k} + mgx_1;$$

отсюда

$$x_1 = \frac{2mg}{k}.$$

При этом на нижний брусок действовала бы сила

$$F_1 = kx_1 = 2mg.$$

Очевидно, что если нижний брусок не закреплен, то он поднимется (на него действует вертикально вверх сила, большая его веса) и, следовательно, поднимется центр инерции всей системы.

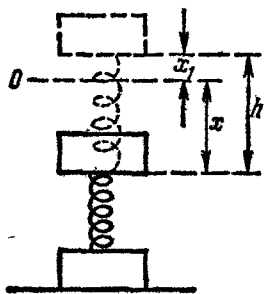


Рис. 3.26.

Во втором опыте оба бруска находятся на горизонтальной поверхности. Очевидно, чтобы сжать пружину, необходимо силу $F = 3mg$ приложить к обоим брускам. После прекращения действия сил оба бруска начнут двигаться в разные стороны. Однако центр инерции системы останется в покое, так как силы упругости, под действием которых

бруски будут двигаться, являются внутренними силами, которые, как известно, не могут изменить положения центра инерции системы.

Существенное отличие первого опыта от второго заключается в том, что в первом опыте вертикальный импульс системы не сохраняется, так как система не замкнута: на нее

действует внешняя сила (сила тяжести). Поэтому центр инерции системы может перемещаться в вертикальном направлении. Во втором опыте горизонтальный импульс сохраняется, так как сумма внешних сил в горизонтальном направлении равна нулю (мы считаем поверхность абсолютно гладкой). Следовательно, система замкнута, и центр инерции под действием внутренних сил перемещаться не будет.

Для того чтобы результат второго опыта был таким же, как и первого, т. е. чтобы центр инерции системы мог перемещаться (но уже в горизонтальном направлении), необходимо сделать систему незамкнутой, тогда горизонтальный импульс будет изменяться. Этого можно добиться, прижав один брусок к вертикальной стене бесконечно большой массы (например, жестко связанной с землей).

3.13. При ударе ρ выступ кубик начинает поворачиваться вокруг ребра и центр инерции его поднимается (рис. 3.27). Преодолеть выступ кубик может, если в положении, при котором центр инерции

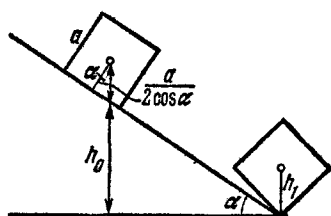


Рис. 3.27.

кубика находится на максимальной высоте $h_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$, его скорость отлична от нуля. Используя закон сохранения энергии, можно записать это условие в следующем виде:

$$mgH > mgh_1 = mg \frac{a}{\sqrt{2}},$$

где m — масса кубика, H — первоначальная высота его центра инерции $\left(H = h_0 + \frac{a}{2 \cos \alpha}\right)$. Отсюда $h_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2 \cos \alpha} \approx 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

3.14. Может. Очевидно это из следующего примера. На столе лежит брусок. Начнем двигать стол с ускорением a . Брусок под действием силы трения, действующей между ним и поверхностью, переместится вместе со столом, не двигаясь относительно него. После того как стол переместится на расстояние s , брусок приобретет энергию $T = mas$ (m — масса бруска). Энергию эту он приобретет за счет работы, произведенной силой трения покоя, так как никакие другие силы на него не действуют.

3.15. Будём искать наибольшую скорость $v_{\text{макс}}$, при которой снаряд еще застревает в песке. Так как горизонтальная проекция импульса системы в данном случае сохраняется, то

$$mv_{\text{макс}} = (M + m)v_1,$$

где v_1 — скорость вагонетки с попавшим в нее снарядом.

Закон сохранения энергии для системы будет иметь вид

$$T_{\text{сн}} = T_{\text{ваг+сн}} + W,$$

где W — энергия, потерянная снарядом внутри вагонетки и равная работе сил трения A , определяемой формулой

$$\begin{aligned} A = F_{\text{тр}}s = F_{\text{тр}}l &= \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} - \frac{(m+M)v_1^2}{2} = \\ &= \frac{mv_{\text{макс}}^2}{2} - \frac{m^2v_{\text{макс}}^2}{2(m+M)} = \frac{mM}{2(M+m)}v_{\text{макс}}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2F_{\text{тр}}l(m+M)}{mM}}.$$

Следовательно, снаряд, обладающий скоростью $v > v_{\text{макс}}$, не останется в вагонетке.

3.16. Пусть брусок после пересечения линии раздела до остановки пройдет расстояние L . Тогда его кинетическая энергия $T = \frac{mv^2}{2}$ (m — масса бруска, v — скорость в момент пересечения линии раздела) полностью расходуется на работу против сил трения $A_{\text{тр}}$.

Для нахождения последней разделим брусок по его длине l на n частей (длина каждой части $\frac{l}{n}$) и будем считать, что первая часть (рис.

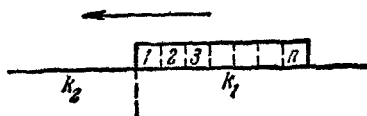


Рис. 3.28.

3.28) до остановки проходит путь L по 2-й полуплоскости, вторая часть проходит путь $\frac{l}{n}$ по 1-й полуплоскости и $L - \frac{l}{n}$ по 2-й и т. д. Масса каждой части бруска $\frac{m}{n}$. Соответству-

ющие значения работы, совершенной против сил трения:

$$\begin{aligned} A_1 &= k_2 \frac{mg}{n} L, \\ A_2 &= k_1 \frac{mg}{n} \frac{l}{n} + k_2 \frac{mg}{n} \left(L - \frac{l}{n} \right), \\ A_3 &= k_1 \frac{mg}{n} \frac{2l}{n} + k_2 \frac{mg}{n} \left(L - \frac{2l}{n} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ A_n &= k_1 \frac{mg}{n} \frac{(n-1)l}{n} + k_2 \frac{mg}{n} \left[L - \frac{(n-1)l}{n} \right]. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим приближенное значение работы, совершенной против сил трения:

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &\approx A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \\ &= k_1 \frac{mg}{n} \frac{l}{n} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] + k_2 \frac{mg}{n} L + \\ &+ k_2 \frac{mg}{n} \left\{ L(n-1) - \frac{l}{n} [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] \right\} = \\ &= k_2 mgL + \frac{(k_1 - k_2) mgl}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n}. \end{aligned}$$

Точное значение $A_{\text{тр}}$ получим, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} A_{\text{тр}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[k_2 mgL + \frac{(k_1 - k_2) mgl}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] = \\ &= k_2 mgL + \frac{(k_1 - k_2) mgl}{2}. \end{aligned}$$

Так как брусок останавливается, то $A_{\text{тр}} = \frac{mv^2}{2}$. Следовательно,

$$k_2 mgL + \frac{(k_1 - k_2) mgl}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

По условию $L = \frac{4}{5} l$; тогда

$$k_2 mg \frac{4}{5} l + \frac{(k_1 - k_2) mgl}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

и

$$v = \sqrt{\frac{gl(3k_2 + 5k_1)}{5}} \approx 1,11 \text{ м/сек.}$$

3.17. При движении кубика по поверхности будет совершена работа $A_1 = kPna$. При кантовании работа,

затраченная на один поворот кубика вокруг ребра, равна

$$A_2 = P \left(\frac{a \sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \right) = Pa \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right).$$

При этом мы считаем, что кубик поворачивается медленно, и его кинетической энергией пренебрегаем, т. е. предполагаем, что работа идет лишь на подъем центра тяжести кубика на высоту

$$h = \frac{a \sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} \quad (\text{рис. 3.29}).$$

$$A_3 = nA_2 = Pna \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right).$$

Сравнивая A_1 и A_3 , мы видим, что $A_1 > A_3$, т. е. $Pnak > Pna \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right)$, так как $k=0,4$ и $\frac{\sqrt{2}-1}{2} < 0,4$.

Следовательно, при коэффициенте трения $k=0,4$ для совершения наименьшей работы кубик надо кантовать.

3.18. Вычислим работу в обоих случаях. В первом случае $A_1 = mgl$. Во втором случае движение обезьяны относительно неподвижной системы отсчета будет сложным: оно складывается из равномерного

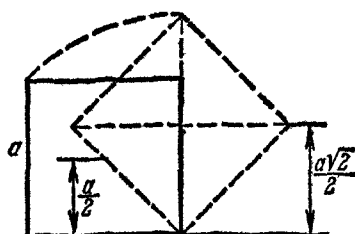


Рис. 3.29.

го движения обезьяны вместе с канатом и ее равноускоренного движения относительно каната. В соответствии с этим

$$l = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Время подъема обезьяны

$$t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2al} - v_0}{a}.$$

При этом канат поднимется на высоту

$$h = v_0 t = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2al} - v_0^2}{a}.$$

Сила натяжения каната в этом случае увеличится и будет равна $m(g+a)$ (см. задачу 2.8). Работа подъема обезьяны равна

$$A_2 = m(g+a)h = m(g+a) \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2al} - v_0^2}{a}.$$

В первом случае

$$A_1 = 20 \cdot 10 \cdot 10 = 2\,000 \text{ дж.}$$

Во втором случае

$$A_2 = 20(10 + 0,1) \frac{1 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot 1} - 1}{0,1} \approx 1\,414 \text{ дж.}$$

Таким образом, работа во втором случае меньше.

3.19. Перейдем к системе координат, связанной с тяжелым шаром. (Эта система движется со скоростью v_0 относительно горизонтальной плоскости.) Тогда в выбранной системе легкий шар налетает на покоящийся тяжелый шар со скоростью $v'_0 = v_0$.

Используя результаты примера II, получим в движущейся системе

$$v'_1 = \frac{\frac{M}{2} - M}{\frac{M}{2} + M} v_0 = -\frac{1}{3} v_0; \quad v'_2 = \frac{2}{3} v_0,$$

где v'_1 и v'_2 — скорости шаров после удара.

Обратный переход к координатам, связанным с плоскостью, дает

$$v_1 = v_0 + v'_1 = \frac{2}{3} v_0; \quad v_2 = v_0 + v'_2 = \frac{5}{3} v_0.$$

3.20. При соударении нейтрона с легким атомом (точнее, ядром легкого атома) он в среднем отдаст большую энергию, чем при соударении с тяжелым (см. пример II). Поэтому для замедления нейтронов часто применяют вещества, содержащие атомы водорода.

3.21. При движении шарика из отклоненного на угол φ_0 положения до положения равновесия ($\varphi = 0$) его потенциальная энергия изменяется на величину

$$\Delta U = -mgl(1 - \cos \varphi_0).$$

Отсюда кинетическая энергия T_0 в момент, когда $\varphi = 0$,

$$T_0 = mgl(1 - \cos \varphi_0);$$

m — масса шарика, l — длина нити.

После первого удара шарик потеряет часть энергии, равную αT_0 , и будет обладать энергией $T_0(1 - \alpha)$.

После второго удара у него останется энергия $T_0(1-\alpha) - \alpha T_0(1-\alpha) = T_0(1-\alpha)^2$, после третьего $T_0(1-\alpha)^3$.

Рассуждая таким образом, найдем, что после n -го удара шарик будет обладать энергией $T_0(1-\alpha)^n$ и сможет отклониться на угол φ' , определяемый из уравнения

$$T_0(1-\alpha)^n = mgl(1 - \cos \varphi').$$

Подставляя значение T_0 , получим

$$mgl(1 - \cos \varphi_0)(1-\alpha)^n = mgl(1 - \cos \varphi'),$$

$$(1-\alpha)^n = \frac{1 - \cos \varphi'}{1 - \cos \varphi_0}; \quad n > \frac{\lg \left(\frac{1 - \cos \varphi'}{1 - \cos \varphi_0} \right)}{\lg (1-\alpha)}.$$

3.22. Для нахождения скорости груза после попадания в него пули используем условие сохранения горизонтальной составляющей импульса. После первого попадания

$$mv = (m + M) v_1$$

и

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v,$$

где M —масса груза, m —масса пули, v —скорость пули и v_1 —скорость груза вместе с попавшей в него пулей.

В момент второго попадания пули скорость груза уже не равна нулю, а равна v_1 . Определим скорость груза после второго выстрела:

$$mv + mv = (M + 2m) v_2; \quad v_2 = \frac{2m}{M+2m} v.$$

После n -го выстрела

$$v_n = \frac{nm}{M+nm} v.$$

После n -го выстрела груз с застрявшими в нем пулями при прохождении положения равновесия будет обладать кинетической энергией

$$T_n = \frac{(M+nm) v_n^2}{2}.$$

Это позволит ему подняться на высоту h , определяемую уравнением

$$(M+nm) gh = T_n,$$

где $h = l(1 - \cos \varphi)$. Отсюда

$$(M + nm)gl(1 - \cos \varphi) = \frac{(M + nm)}{2} \left(\frac{nm}{M + nm} \right)^2 v^2,$$

$$\cos \varphi = 1 - \left(\frac{nm}{M + nm} \right)^2 \frac{v^2}{gl} = 1 - \left(\frac{n}{\frac{M}{m} + n} \right)^2 \frac{v^2}{gl} \approx \frac{1}{2}.$$

Соответственно $\varphi \approx 60^\circ$.

3.23. Прежде всего отметим тот факт, что условие одновременного касания третьим шаром двух первых может осуществиться, только если он движется по перпендикуляру, составленному из середины отрезка, соединяющего центры первого и второго шаров. Так как по условию задачи поверхность гладкая, то шары скользят по ней без качения.

Выбрав систему координат так, чтобы ось x совпадала с направлением скорости налетающего шара (рис. 3.30), запишем закон сохранения импульса в проекциях на выбранные оси:

$$mv_0 = mv_{x_1} + mv_{x_2} + mv_{x_3}, \quad (1)$$

$$0 = mv_{y_1} + mv_{y_2} + mv_{y_3}, \quad (2)$$

(индекс внизу означает номер шара). Вместе с законом сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2}$$

уравнения (1) и (2) составят систему, решая которую мы получим значения скоростей после удара.

Задачу можно решить, не используя никаких упрощающих соображений, однако это ведет к нерациональной потере времени.

Очевидно, что импульсы, полученные первым и вторым шарами при соударении, одинаковы по величине, так как оба эти шара обладают равной массой и размерами и поставлены при ударе в совершенно одинаковые условия. Из этих же соображений ясно, что они разлетаются под одинаковыми углами α к оси x , а так как сумма их проекций импульса

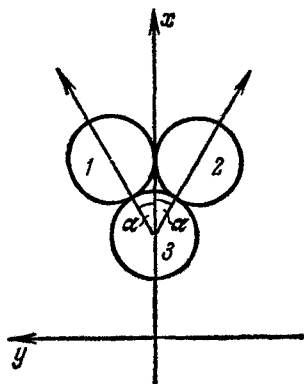


Рис. 3.30.

на ось y в этом случае равна нулю, то из уравнения (2) следует, что и $v_{y_2} = 0$.

Теперь система уравнений будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} v_0^2 &= 2v_1^2 + v_2^2, \\ v_0 &= 2v_1 \cos \alpha + v_2. \end{aligned} \right\}$$

Угол α равен 30° (см. рис. 3.30). Поэтому, решая эту систему, получим

$$v_1 = v_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} v_0; \quad v_3 = -\frac{1}{5} v_0.$$

3.24. Найдем точку, в которой мяч оторвется от полусферы. При движении мяча на него в радиальном направлении действуют две силы — сила реакции опоры N и составляющая веса $mg \cos \alpha$ (рис. 3.31). Сумма их вызывает

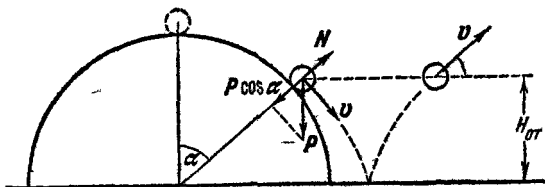


Рис. 3.31.

центростремительное ускорение мяча $\frac{v^2}{R}$. В момент отрыва сила реакции опоры равна нулю (мяч в этот момент перестает давить на поверхность). Отсюда

$$mg \cos \alpha = \frac{mv^2}{R} \quad \text{или} \quad g \cos \alpha = \frac{v^2}{R}. \quad (1)$$

Для нахождения угла α , при котором мяч оторвется, и скорости в этот момент, воспользуемся законом сохранения энергии

$$U_1 - U_2 = \frac{mv^2}{2},$$

где U_1 — потенциальная энергия мяча, находящегося на вершине полусферы ($U_1 = mgR$), U_2 — потенциальная энергия в момент отрыва, $U_2 = mgH_{от} = mgR \cos \alpha$. Отсюда

$$g(R - R \cos \alpha) = \frac{v^2}{2}. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}; \quad v^2 = \frac{2}{3} gR \quad \text{и} \quad H_{\text{от}} = \frac{2}{3} R.$$

После упругого удара о поверхность мяч поднимется на высоту $H = H_{\text{от}}$ и будет иметь скорость $v = \sqrt{\frac{2}{3} gR}$, двигаясь под углом α к горизонту. Отсюда полная высота подъема

$$H = H_{\text{от}} + H_1 = \frac{2}{3} R + \frac{(v \sin \alpha)^2}{2g} = \frac{23}{27} R.$$

3.25. Пусть скорость велосипедиста в момент, когда он заметил препятствие, равна v_0 . Тогда при торможении вся его кинетическая энергия $\frac{mv_0^2}{2}$ (где m — масса велосипедиста) должна пойти на работу, совершаемую против силы трения скольжения:

$$\frac{mv_0^2}{2} = F_{\text{тр1}} l_1.$$

При этом наименьший путь $l_1 = \frac{mv_0^2}{2F_{\text{тр1}}}$ (рис. 3.32).

Если же велосипедист поворачивает, то он едет по окружности наименьшего возможного радиуса l_2 . Величина l_2 определяется из следующих соображений: при движении велосипедиста по окружности с постоянной скоростью v_0 он имеет ускорение $a = \frac{v_0^2}{l_2}$, направленное к центру этой окружности. Сила, вызывающая это ускорение, есть сила трения $F_{\text{тр2}}$, возникающая в перпендикулярном к движению направлении. Остальные силы, действующие на велосипедиста — его вес и сила реакции земли, — взаимно уравновешиваются. Силой трения качения, направленной противоположно движению, можно пренебречь, так как она мала

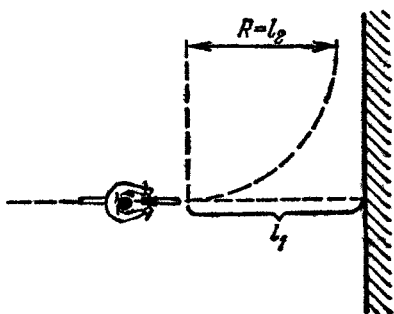


Рис. 3.32.

по сравнению с другими силами. Сила трения

$$F_{\text{тр}_2} = \frac{mv_0^2}{l_2}.$$

Эта сила трения есть максимальная сила трения покоя (велосипедист в радиальном направлении не движется), так как по условию ему необходимо обеспечить наименьший радиус поворота l_2 . Она равна силе трения при движении. Отсюда

$$F_{\text{тр}_2} = F_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}}$$

и

$$l_1 = \frac{mv_0^2}{2F_{\text{тр}}}; \quad l_2 = \frac{mv_0^2}{F_{\text{тр}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{2},$$

т. е. если велосипедист будет поворачивать, он проедет большее расстояние по направлению к стене.

3.26. Удобнее всего решать задачу графически. Выбирая ось x так, как показано на рис. 3.33, построим графики зависимости координаты каждого шара от времени. Если бы шары не сталкивались, то каждый из них двигался бы с постоянным ускорением

$a = \frac{F}{m}$. Соответственно график зависимости координаты от времени для любого шара имел бы вид параболы, удовлетворяющей уравнению

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2} = v_0 t - \frac{Ft^2}{2m}.$$

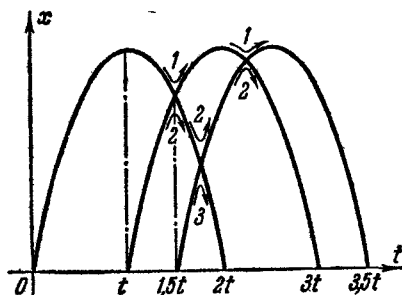


Рис. 3.33.

Пусть первый шар начал двигаться в момент времени $t_1 = 0$. Тогда дви-

жение второго шара началось в момент времени t , определяемый из условия остановки первого шара,

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0 m}{F}.$$

Очевидно (см. рис. 3.33), что третий шар был нушен через время $\frac{3}{2}t$. Эти промежутки (интервалы) времени определяют относительные смещения парабол. Точки пересечения парабол соответствуют столкновениям шаров.

Если бы на шары в момент столкновения не действовала сила притяжения со стороны магнита, то система была бы замкнутой, и по закону сохранения импульса шары обменялись бы скоростями, т. е. движение каждого шара стало бы описываться параболой, соответствующей другому шару. Так как на шары действует внешняя сила, то закон сохранения импульса, строго говоря, не выполняется (система, состоящая из сталкивающихся шаров, не замкнута). Однако поскольку время столкновений мало и в течение этого времени внешняя сила не изменяет существенно скорости шаров, можно пренебречь изменением импульса и считать, что шары обмениваются скоростями. В результате на графике шары «поменяются» параболой, т. е. первый шар после столкновения со вторым начнет двигаться по параболе второго шара, а второй — по параболе первого. Аналогичный «обмен» произойдет и в результате остальных столкновений: второго и третьего шаров и вторичного столкновения первого и второго шаров. Следовательно, третий шар вернется в исходную точку тогда, когда вернулся бы первый шар, не будь столкновений, т. е. через время $2t = 2v_0 m/F$; второй шар вернется через $3t = 3v_0 m/F$ и первый — через $3,5t = 3,5v_0 m/F$.

3.27. Для вычисления кинетической энергии стержня разобьем его по длине на n одинаковых частей. При достаточно большом n мы можем приближенно считать, что линейные скорости точек, принадлежащих, скажем, k -му отрезку, одинаковы и равны

$$v_k = \omega k \frac{l}{n}.$$

Масса каждой из n частей m/n . Тогда кинетическую энергию, которой обладает стержень, можно найти как сумму кинетических энергий всех n частей:

$$T \approx \sum_{k=1}^n T_k,$$

где

$$T_k = \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{m}{2n} \left(\omega \frac{k}{n} l \right)^2.$$

Следовательно,

$$T \approx \frac{m}{2n} \left(\omega \frac{l}{n} \right)^2 + \frac{m}{2n} \left(\omega \frac{2l}{n} \right)^2 + \frac{m}{2n} \left(\omega \frac{3l}{n} \right)^2 + \dots \\ \dots + \frac{m}{2n} \left(\omega \frac{nl}{n} \right)^2 = \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \\ = \frac{m\omega^2 l^2}{2n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

(см. «Математическое дополнение»). Точное значение энергии получим, перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m\omega^2 l^2}{12} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \right] = \\ = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{m\omega^2 l^2}{12} \cdot 2 = \frac{m\omega^2 l^2}{6}.$$

3.28. Кинетическая энергия стержня равна сумме кинетических энергий двух стержней длиной $\frac{l}{2}$ и массой $\frac{m}{2}$, вращающихся вокруг оси, проходящей через их концы. Используя решение предыдущей задачи, найдем, что

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{\omega^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{6} + \frac{m}{2} \cdot \frac{\omega^2 \left(\frac{l}{2} \right)^2}{6} = \frac{m\omega^2 l^2}{24}.$$

3.29. Первоначальная потенциальная энергия шеста $U = mg \frac{h}{2}$ (m — масса шеста) переходит в кинетическую энергию его вращения вокруг конца, стоящего на земле. Эта кинетическая энергия выражается через угловую скорость вращения в данный момент времени следующим образом (см. задачу 3.27):

$$T = \frac{m\omega^2 h^2}{6}.$$

В момент падения $U = T$, т. е.

$$g \frac{h}{2} = \frac{\omega^2 h^2}{6}.$$

Определяя из этого уравнения ω ($\omega = \sqrt{3g/h}$), найдем линейную скорость конца шеста:

$$v = \omega h = \sqrt{3gh}.$$

3.30. Для решения задачи представим вращение маховика как вращение тонкого однородного обруча радиусом R и массой m с угловой скоростью ω и найдем кинетическую энергию такого обруча. Все точки обруча имеют одинаковую линейную скорость $v = \omega R$. Разбив обруч на n малых участков массой $\frac{m}{n}$ каждый, найдем, что кинетическая энергия обруча равна сумме кинетических энергий всех его участков, которые при достаточно большом n можно считать материальными точками:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} = n \frac{m}{n} \frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2}.$$

Маховик остановится тогда, когда вся его кинетическая энергия будет затрачена на работу против сил трения между ободом и тормозной колодкой:

$$T = F_{\text{тр}} s,$$

где s — путь торможения, равный $2\pi R n$ (нас интересует только число полных оборотов n). Тогда

$$n = \frac{T}{2\pi R F_{\text{тр}}} = \frac{m\omega^2 R^2}{2 \cdot 2\pi R F_{\text{тр}}} = \frac{m\omega^2 R}{4\pi F_{\text{тр}}}.$$

3.31. Разобьем диск на n концентрических колец одинаковой ширины. Расстояния середины каждого из колец до центра диска будут равны

$$R_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{n}; \quad R_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{n}; \quad R_3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{n}; \quad \dots; \\ R_k = \frac{(2k-1)}{2} \cdot \frac{R}{n},$$

а массы колец

$$m_1 = \frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{R}{n} \right)^2 = \frac{m}{n^2}, \\ m_2 = \frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{2R}{n} \right)^2 - \frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{R}{n} \right)^2 = \frac{3m}{n^2}, \\ m_3 = \frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{3R}{n} \right)^2 - \frac{m}{\pi R^2} \pi \left(\frac{2R}{n} \right)^2 = \frac{5m}{n^2}, \\ \dots \\ m_k = \frac{(2k-1)m}{n^2}.$$

Если n достаточно велико, то можно считать, что линейные скорости точек какого-либо кольца одинаковы и равны

$$v_k = \omega R_k = \omega \frac{(2k-1)}{2} \cdot \frac{R}{n}.$$

Кинетическую энергию диска запишем как сумму кинетических энергий n колец:

$$\begin{aligned} T &\approx \sum_{k=1}^n \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)m}{2n^2} \omega^2 \frac{(2k-1)^2}{4} \cdot \frac{R^2}{n^2} = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{8n^4} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{m\omega^2 R^2}{8n^4} n^2 (2n^2 - 1) = \\ &= \frac{m\omega^2 R^2}{8} \cdot \frac{2n^2 - 1}{n^2} \end{aligned}$$

(см. «Математическое дополнение»). Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем точное равенство:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{m\omega^2 R^2}{8} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{m\omega^2 R^2}{4}.$$

3.32. Энергию диска можно представить как сумму потенциальной энергии

$$U = mgh,$$

где h — высота центра инерции (центра диска) над поверхностью земли, m — масса диска, кинетической энергии поступательного движения

$$T_1 = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость центра инерции, и кинетической энергии вращения диска вокруг центра инерции, равной (см. предыдущую задачу)

$$T_2 = \frac{m\omega^2 R^2}{4}.$$

Тогда из закона сохранения энергии

$$mgh_1 = mgh_2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{4}.$$

Поступательная скорость катящегося без проскальзывания диска и угловая скорость его вращения связаны

соотношением $v = \omega R$. Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g (h_1 - h_2)}.$$

3.33. При качении обруча его полную кинетическую энергию можно представить как сумму кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}.$$

При этом $T_{\text{пост}} = T_{\text{вр}} = \frac{mv_0^2}{2}$. При переходе на абсолютно гладкую поверхность качения нет, а есть только поступательное движение. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость скольжения обруча по гладкой поверхности ($v = v_0 \sqrt{2}$).

Общее время движения на пути $2s$

$$t_0 = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_0} + \frac{s}{v_0 \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})s}{v_0 \sqrt{2}}.$$

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s}{t_0} = \frac{2v_0}{\sqrt{2}}.$$

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Рассмотрим произвольное движение некоторой механической системы. Будем считать, что тела, принадлежащие системе, соприкасаются при своем движении с другими телами, ограничивающими возможные положения тел системы. Такие тела мы называли *связями*. В этом случае все силы, действующие на рассматриваемую систему, можно разбить на две группы: в первую входят силы, действующие со стороны связей, — реакции связей, во вторую — все остальные силы. Запишем уравнения движения системы:

$$\left. \begin{aligned} F_1 + R_1 &= m_1 a_1, \\ F_2 + R_2 &= m_2 a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ F_i + R_i &= m_i a_i, \\ &\dots \dots \dots \\ F_n + R_n &= m_n a_n. \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Здесь n — число тел в системе, R_i — равнодействующая всех сил реакций, действующих на i -е тело, F_i — равнодействующая всех остальных сил, действующих на i -е тело.

Будем считать все связи идеальными. Напомним, что идеальными мы называли такие связи, реакции которых направлены перпендикулярно к поверхности соприкосновения (этому соответствуют пренебрежимо малые силы трения). Идеальность связей накладывает на силы реакции определенные условия. Для нахождения этих условий рассмотрим, как может сместиться некоторое тело, принадлежащее системе (например i -е), за малый промежуток времени Δt .

Возможная скорость тела \mathbf{v}_i не может иметь составляющей, направленной по нормали к поверхности соприкосновения, так как в этом случае ограничивающее движение тело потеряло бы смысл связи. Следовательно, возможное перемещение тела $\Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i \Delta t$ должно быть также направлено по касательной. Связь позволяет телу совершать в каждый момент времени только касательные перемещения. С другой стороны, в силу идеальности связей сила реакции \mathbf{R}_i всегда направлена по нормали к поверхности соприкосновения. Отсюда скалярное произведение $(\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{r}_i) = 0$ на любом возможном перемещении. Поскольку это справедливо для любого тела системы, то равна нулю сумма

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{r}_i) = (\mathbf{R}_1 \Delta \mathbf{r}_1) + (\mathbf{R}_2 \Delta \mathbf{r}_2) + \dots + (\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{r}_i) + \dots + (\mathbf{R}_n \Delta \mathbf{r}_n) = 0. \quad (4.2)$$

Итак, сумма работ реакций идеальных связей на любых возможных перемещениях равна нулю.

Определим силы реакции из системы уравнений (4.1):

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i. \quad (4.3)$$

Умножая (4.3) скалярно на $\Delta \mathbf{r}_i$ и суммируя от 1 до n , получим

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{R}_i \Delta \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \Delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (4.4)$$

Предположим, что наша система находится в *положении равновесия*. (Под положением равновесия понимается такое положение механической системы, в котором она может находиться неограниченно долго, если только в начальный момент она находилась в этом положении и скорости всех ее тел были равны нулю.) Так как в положении равновесия должны выполняться уравнения (4.4) и, кроме того, по определению равновесия, $\mathbf{a}_i = 0$, то сумма $\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i)$ должна быть равна нулю.

Равенство

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i \Delta \mathbf{r}_i) = 0 \quad (4.5)$$

называется *принципом возможных перемещений* и является самым общим принципом статики. Применим принцип возможных перемещений к некоторым важным частным случаям.

Блоки и рычаги. Рассмотрим произвольный рычаг (или блок), на концах которого находятся в равновесии два груза. Массой рычага (блока) и трением пренебрегаем. Обозначим величины возможных перемещений грузов через Δl_1 и Δl_2 . Составляющую внешней силы, действующую на первый груз и направленную по касательной к возможному перемещению, обозначим через F_1 . Такую же составляющую внешней силы, действующую на второй груз, обозначим через F_2 . Из равенства (4.4) имеем

$$F_1 \Delta l_1 = F_2 \Delta l_2^*)$$

или

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Мы получили так называемое «золотое правило» механики: выигрыш в силе «компенсируется» проигрышем в пути.

Равновесие твердого тела, имеющего ось вращения. Рассмотрим твердое тело, способное свободно вращаться вокруг оси O (рис. 4.1), перпендикулярной к плоскости рисунка. Для простоты предположим, что к телу приложено всего

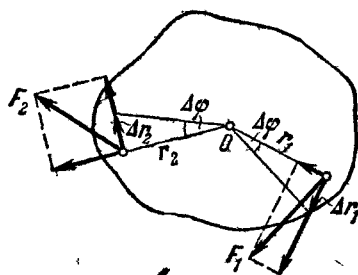


Рис. 4.1.

две силы: F_1 и F_2 . Направления, численные значения и точки приложения этих сил совершенно произвольны. В соответствии с принципом возможных перемещений сумма работ сил F_1 и F_2 на возможных перемещениях Δr_1 и Δr_2 должна быть равна нулю (см. (4.5)):

$$F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 = 0.$$

Учитывая, что при малых Δr абсолютная величина $|\Delta r_1| = \Delta s_1$ и $|\Delta r_2| = \Delta s_2$, и обозначая через F'_1 проекцию силы F_1 на направление Δr_1 , а через F'_2 — проекцию силы F_2 на направление Δr_2 , получим

$$F'_1 \Delta s_1 + F'_2 \Delta s_2 = 0. \quad (4.6)$$

Выражая Δs_1 и Δs_2 через угловые перемещения ($\Delta s_1 = r_1 \Delta \varphi_1$, $\Delta s_2 = r_2 \Delta \varphi_2$) и учитывая, что для твердого тела

*) Знак в этом равенстве несуществен.

$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$, перепишем (4.6) в виде

$$F'_1 r_1 \Delta\varphi + F'_2 r_2 \Delta\varphi = (F'_1 r_1 + F'_2 r_2) \Delta\varphi = 0.$$

Из произвольности $\Delta\varphi$ вытекает

$$F'_1 r_1 + F'_2 r_2 = 0.$$

Величину $M = F'r$ называют *моментом силы F относительно оси O* . Знак M определяется знаком F' , так как $r > 0$. Ясно, что в выводе ничего бы не изменилось, если бы к телу было приложено любое число сил.

Условием равновесия твердого тела, имеющего ось вращения, является равенство нулю алгебраической суммы моментов всех действующих на тело сил относительно оси.

В дальнейшем мы будем рассматривать только *плоское движение* твердого тела, т. е. такое движение, при котором все его точки могут двигаться в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Соответственно все силы, приложенные к такой системе, будем считать лежащими в одной плоскости. В этом случае вместо слов «момент силы относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения» мы будем просто говорить о моменте силы относительно точки, имея в виду точку пересечения этой оси с плоскостью.

Общим условием равновесия системы будет равенство нулю суммы всех внешних сил и равенство нулю суммы моментов внешних сил относительно центра инерции (первоначально тело покоилось).

Первое условие сразу же следует из уравнения движения для центра инерции. Если же первое условие выполнено, то у системы еще остается возможность вращаться вокруг неподвижного центра инерции. Второе условие исключает такую возможность.

Равновесие механической системы можно рассмотреть и с энергетической точки зрения. Так как по определению в положении равновесия скорости всех тел системы равны

нулю, то и кинетическая энергия системы $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$

(n — число тел) в этом положении равна нулю. Покажем, что положению устойчивого равновесия системы соответствует минимальная (по сравнению с соседними положениями) потенциальная энергия.

Рассмотрим, например, систему, находящуюся в поле постоянных внешних сил (как известно, энергия такой системы сохраняется). В положении с минимальной потенциальной энергией эти силы не могут вызвать изменения состояния системы, так как это противоречит закону сохранения энергии. При всяком изменении потенциальная энергия системы может только возрасти и, следовательно, кинетическая уменьшиться, но это невозможно, так как кинетическая энергия не может быть отрицательной. В любом другом положении потенциальная энергия может уменьшиться, а следовательно, кинетическая возрасти, чему будет соответствовать выход системы из этого положения.

Поскольку любая механическая система, не находящаяся в положении равновесия, в соответствии с законами механики стремится попасть в это положение, то, будучи предоставленной самой себе, она будет двигаться таким образом, чтобы ее потенциальная энергия уменьшалась до тех пор, пока не достигнет минимального значения.

ПРИМЕРЫ

1. Дан график (рис. 4.2) зависимости потенциальной энергии тела от его координаты (движение одномерное). Указать точки на графике, которые соответствуют положению равновесия тела в случае равенства нулю его кинетической энергии. Каков характер этого равновесия?

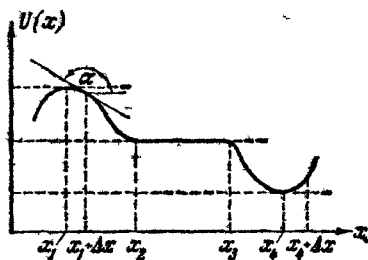


Рис. 4.2.

Если сумма действующих на тело сил в какой-то точке равна нулю и скорость его в начальный момент времени также равна нулю, то тело может неограниченно долго пребывать в этой точке, т. е. находиться в состоянии равновесия.

По графику потенциальной энергии мы можем отыскать координаты точек, в которых $F=0$. Действительно, $F = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -\operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной к кривой потенциальной энергии. Для тех точек, в которых $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, $F=0$. На данном графике это

точки с координатами $x = x_1$, $x = x_4$ и $x_2 < x < x_3$. Рассмотрим характер равновесия в этих точках.

Пусть тело сместили из положения равновесия на малую величину Δx ; тогда, если оно через некоторое время под действием возникших сил вновь вернется в первоначальное положение, равновесие будет устойчивым. При безразличном равновесии тело будет находиться неограниченно долго в той точке, куда его сместили. И, наконец, при неустойчивом равновесии возникающие при смещении силы приведут тело в движение, и оно будет все дальше уходить от первоначального положения.

В точке с координатой x_1 равновесие тела будет неустойчивым. Для примера рассмотрим, какие силы будут действовать на него, если мы сместим его на Δx вправо. В этом случае $F > 0$, т. е. направлена по оси x , так как $F = -\operatorname{tg} \alpha$, а $\alpha > \frac{\pi}{2}$. (Напомним, что угол отсчитывается от положи-

тельного направления оси x .) Следовательно, на тело будет действовать сила, стремящаяся сместить его вправо по оси x . Под действием этой силы оно будет уходить все дальше от первоначального положения. При смещении тела влево от x_1 оно будет двигаться влево, так как в этом случае $F < 0$.

На отрезке $x_2 < x < x_3$ равновесие безразлично. При смещении внутри этого отрезка $F = 0$.

Наконец, в точке с координатой x_4 равновесие устойчиво, так как, смещая тело на Δx в окрестностях этой точки, мы убедимся, что возникают силы, стремящиеся вернуть его в первоначальное положение. (Переходим от x_4 в точку с координатой $x_4 + \Delta x$, тогда $\alpha < \frac{\pi}{2}$ и $F < 0$, т. е. сила действует в противоположном смещению направлении.)

Модель такой зависимости потенциальной энергии тела от координаты дает потенциальная энергия шарика, движущегося в поле сил тяжести по желобу, имеющему профиль, изображенный на рис. 4.2. Эта модель наглядно показывает все три возможных вида равновесия шарика.

II. На невесомом стержне через равные расстояния Δl надеты n шариков, имеющих массы m_1, m_2, \dots, m_n соответственно. Определить координату центра тяжести системы шариков. Показать, что она совпадает с координатой центра инерции. Шарик считать материальными точками.

Центр тяжести системы (или тела) по определению есть точка, относительно которой сумма моментов сил

тяжести, приложенных к частям данной системы (тела), равна нулю.

Введем ось x так, чтобы ее начало совпало с одним из концов стержня (рис. 4.3). Тогда координату центра тяжести

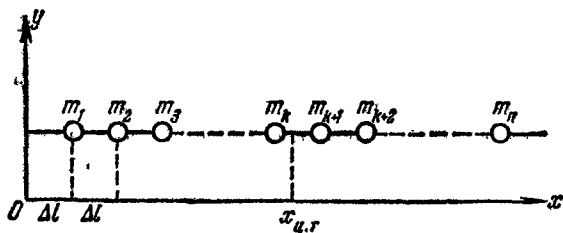


Рис. 4.3

$x_{ц.т.}$ мы определим из уравнения

$$\begin{aligned} m_1 g (x_{ц.т.} - \Delta l) + m_2 g (x_{ц.т.} - 2\Delta l) + \dots + m_k g (x_{ц.т.} - k\Delta l) = \\ = m_{k+1} g [\Delta l (k+1) - x_{ц.т.}] + m_{k+2} g [\Delta l (k+2) - x_{ц.т.}] + \dots \\ \dots + m_n g [\Delta l n - x_{ц.т.}] \end{aligned}$$

(считаем, что центр тяжести расположен между k -м и $(k+1)$ -м грузами). Отсюда

$$\begin{aligned} x_{ц.т.} &= \frac{m_1 g \Delta l + m_2 g 2\Delta l + \dots + m_n g n \Delta l}{m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g} = \\ &= \frac{\Delta l (m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + nm_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что координата центра инерции системы определяется той же формулой

$$x_{ц.и.} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i i \Delta l}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Если шарики расположены в точках с координатами x_1, x_2, \dots, x_n (расстояния между шариками произвольные), то, рассуждая аналогичным образом, мы получим

$$x_{ц.т.} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g x_i}{\sum_{i=1}^n m_i g} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = x_{ц.и.}$$

То же, очевидно, верно для любой из координат y и z , если у нас пространственная система стержней с шариками.

В общем случае для тела, размерами которого по сравнению с размерами Земли, мы можем пренебречь, центр инерции и центр тяжести совпадают. Однако понятие центра инерции значительно более общее: если тело достаточно велико, так что мы не можем считать направления сил тяжести, приложенных к отдельным его участкам, параллельными, то понятие центра тяжести теряет смысл.

III. Доска длиной l опирается одним из своих концов на горизонтальную плоскость и касается прямоугольного

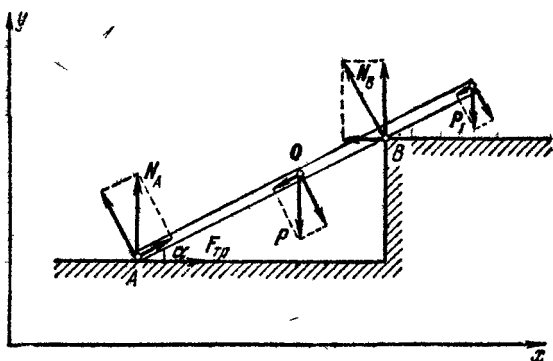


Рис. 4.4.

выступа точкой, отстоящей от свободного конца на $\frac{l}{4}$ (рис. 4.4). Вес доски P , коэффициент трения между плоскостью и доской k , угол наклона доски к горизонту α . Найти наибольшую величину груза P_1 , который можно повесить на свободный конец доски, чтобы ее равновесие не нарушилось. Считать силу трения между доской и выступом пренебрежимо малой.

Сила P_1 , приложенная к свободному концу доски, стремится вызвать ее перемещение влево и вращение вокруг точки B . Условие сохранения равновесия доски — равенство нулю суммы всех действующих на нее сил и равенство нулю суммы моментов этих сил относительно любой точки (в данном случае относительно точки B).

Рассмотрим силы, действующие на доску. Кроме веса P , приложенного в точке O посередине доски, и силы давления груза P_1 , на нее действуют реакции опор в точках A и B .

В точке A реакцию опоры (не показанную на рисунке) мы можем разложить на две составляющие — нормальную к горизонтальной поверхности N_A и касательную $F_{тр}$. Так как мы ищем максимальную силу P_1 , при которой доска еще останется в равновесии, $F_{тр}$ будет равна максимальной силе трения покоя $F = kN$. В точке B силу трения мы не учитываем, поэтому N_B направлена перпендикулярно к доске.

Выбрав оси координат так, как показано на рис. 4.4, мы можем написать уравнения равновесия для доски:

$$\left. \begin{aligned} N_A - P + N_B \cos \alpha - P_1 &= 0, \\ F_{тр} - N_B \sin \alpha &= 0, \\ N_A \cos \alpha \cdot \frac{3}{4}l - P \cos \alpha \cdot \frac{1}{4}l + P_1 \cos \alpha \cdot \frac{1}{4}l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} N_A - P + N_B \cos \alpha - P_1 &= 0, \\ N_A k - N_B \sin \alpha &= 0, \\ 3N_A - P + P_1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, получим

$$P_1 = \frac{kP \operatorname{ctg} \alpha - 2P}{4 + k \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Так как $P_1 > 0$ и $\alpha < 90^\circ$, то это налагает дополнительное условие на k и α :

$$kP \operatorname{ctg} \alpha > 2P.$$

ЗАДАЧИ

4.1. Описать характер движения тела, имеющего форму квадрата, по гладкой горизонтальной поверхности под действием сил, приложенных в точках A и B (рис. 4.5). Рассмотреть случаи, когда: 1) $F_1 = F_2$ и 2) $F_1 \neq F_2$.

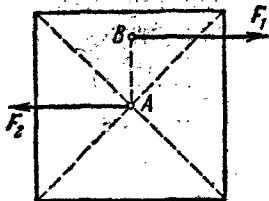


Рис. 4.5.

4.2. Шарик массой M подвешен на нити, перекинутой через блок (рис. 4.6). К другому концу нити прикреплен груз массой m . Шарик находится сначала на внутренней (рис. 4.6, а), а потом на внешней (рис. 4.6, б) стороне гладкой цилиндрической поверхности. Определить условия равновесия шарика и вид равновесия в обоих случаях, если направление

нити совпадает с направлением касательной к поверхности в точке, где поверхность соприкасается с шариком.

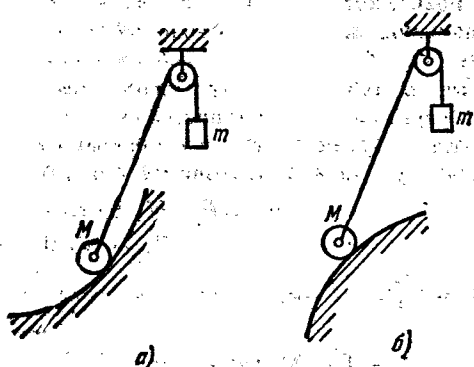


Рис. 4.6.

4.3. Стол снабжен выдвигающейся доской, размеры и форма которой указаны на рис. 4.7. Для того чтобы выдвинуть доску из пазов, к ней в некоторой точке C , находящейся от края доски на расстоянии x , прикладывают силу F . При каком коэффициенте трения доску нельзя вытащить, приложив любую по величине силу?

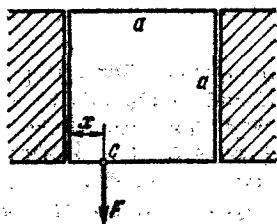


Рис. 4.7.

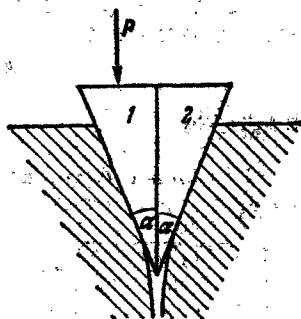


Рис. 4.8.

4.4. В щель забиты два клина (рис. 4.8). На один из них давят с силой P . При каком коэффициенте трения k между клиньями и поверхностью щели второй клин начнет двигаться вверх? Весом самих клиньев и трением между ними пренебречь. Угол каждого из клиньев α .

4.5. Плотность стержня AB длиной l описывается законом $\rho = \rho_0 \left(\frac{l-x}{l} \right)^*$, где x — расстояние от точки A . Определить, на каком расстоянии от точки A расположен центр тяжести стержня.

4.6. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, изображенной на рис. 4.9.

4.7. Три одинаковых бруска сколочены в виде перевернутой буквы Π (рис. 4.10). К торцу одного из них прикреплена спица, весом которой можно пренебречь. Ее острое

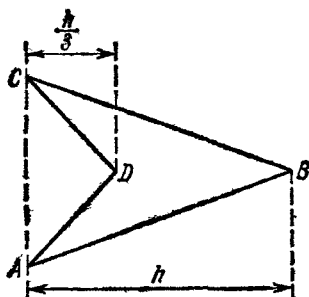


Рис. 4.9.

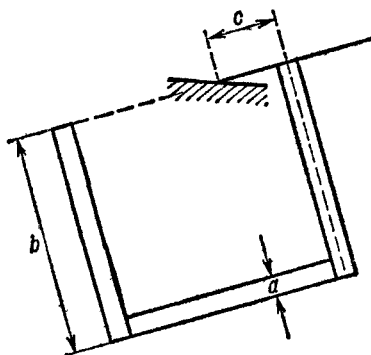


Рис. 4.10.

воткнуто в край стола, при этом рамка находится в равновесии. Определить угол, образованный спицей и поверхностью стола, если

$$a = 0,04 \text{ м}, \quad b = 0,25 \text{ м} \quad \text{и} \quad c = 0,08 \text{ м}.$$

4.8. Полушар с вырезанной в нем сферической полостью (рис. 4.11) лежит на горизонтальном столе. Найти угол наклона α плоской поверхности полушара к горизонтالي, если известно, что центр тяжести сплошного полушара расположен на расстоянии $\frac{5}{8} R$ от его вершины (R — радиус полушара).

*) Плотность — это масса единицы объема. В случае однородного распределения вещества плотность какого-либо тела определяется отношением его массы к объему. Для неоднородного распределения вещества вводится понятие *плотности в точке*. В этом случае

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

4.9. На некотором расстоянии r от горизонтально поддерживаемой балки с грузами m_1 и m_2 (рис. 4.12) находится нижний конец пружины, другой конец которой закреплен.

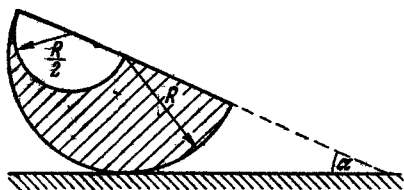


Рис. 4.11.

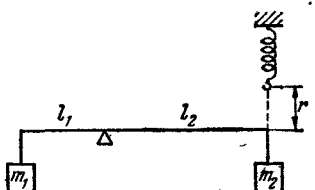


Рис. 4.12.

Пружину растянули и прикрепили к концу балки с грузом m_2 , при этом балка осталась в горизонтальном положении после того, как ее отпустили. Используя принцип возможных перемещений, найти расстояние r , если жесткость пружины k и плечи рычага l_1 и l_2 .

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.1. 1) При равных силах F_1 и F_2 центр инерции квадрата — точка A — находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, так как сумма сил, действующих на систему, равна нулю. Одновременно с этим тело вращается вокруг центра инерции под действием пары сил F_1 и F_2 .

2) При разных силах (например, $F_1 > F_2$) система будет вращаться вокруг центра инерции под действием пары сил, каждая из которых равна по величине F_2 , а центр инерции будет двигаться поступательно с ускорением $a = \frac{F_1 - F_2}{m}$, где m — масса квадрата.

4.2. Сначала рассмотрим условия, при которых возможно равновесие шарика на поверхности. На шарик действуют три силы: вес P , сила реакции со стороны нити T и сила реакции со стороны поверхности N , которая в силу отсутствия трения направлена по нормали к поверхности. Условие равновесия шарика:

$$P + T + N = 0.$$

Раскладывая вес на две составляющие — одну, направленную по нормали, другую — по касательной к поверхности,

получим

$$N = Mg \sin \alpha; \quad T = Mg \cos \alpha,$$

где $T = mg$, т. е. $mg = Mg \cos \alpha$ (здесь α — угол между нитью и вертикалью).

Определим вид равновесия в случае вогнутой и выпуклой поверхности. Для этого рассмотрим малые отклонения от положения равновесия в том и другом случае. Так как смещения малы, можно считать, что направление нити продолжает совпадать с направлением касательной к поверхности.

В первом случае при смещении шарика вниз угол α увеличивается, $\cos \alpha$ уменьшается и $Mg \cos \alpha$ становится меньше mg , т. е. равнодействующая этих сил направлена вверх и стремится вернуть шарик в первоначальное положение. При отклонении шарика вверх α уменьшается и $Mg \cos \alpha > mg$, равнодействующая направлена вниз, противоположно направлению смещения. Равновесие на вогнутой поверхности устойчиво.

В случае выпуклой поверхности любое смещение шарика из положения равновесия приводит к появлению силы, направленной в сторону смещения. Равновесие неустойчиво.

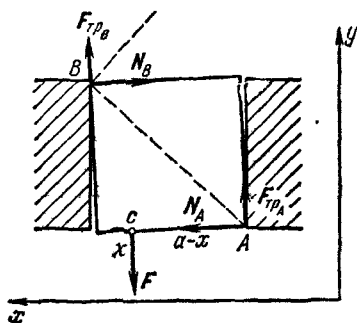


Рис. 4.13.

4.3. Под действием нецентрально приложенной силы F доска перекосится и в точках A и B (рис. 4.13) будет давить на стол. Соответственно со стороны стола в этих точках возникнут силы реакции, действующие на доску. Каждую из сил реакций можно представить как сумму нормальной N_A (и N_B) и касательной $F_{трA}$ (и $F_{трB}$) составляющих. Равно-

весие доски будет выполняться при условии равенства нулю суммы сил, действующих на нее, и равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки, например точки A . (Обычно точку, относительно которой рассматривают сумму моментов, выбирают из соображения простоты записи уравнений.) Тогда

$$\left. \begin{aligned} -N_B + N_A &= 0, \\ F_{трA} + F_{трB} - F &= 0, \\ F(a-x) - aF_{трB} - aN_B &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Так как $N_B = N_A = N$, то $F_{\text{тр}A} = F_{\text{тр}B} = kN$, и тогда полученные уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} 2Nk &= F, \\ Fa - Fx - a(1+k)N &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,

$$Fa - Fx - a(1+k)\frac{F}{2k} = 0, \quad a - x - \frac{a}{2k} - \frac{a}{2} = 0$$

и

$$k = \frac{a}{2\left(\frac{a}{2} - x\right)}.$$

Отсюда при $k > \frac{a}{2\left(\frac{a}{2} - x\right)}$ при любой силе F вытащить

доску невозможно.

4.4. Сила P приводит к появлению некоторой силы F_1 , действующей перпендикулярно к плоскости соприкосновения клиньев (рис. 4.14). С силой F_1 клин 1 давит на клин 2.

Эта сила заставляет клин 2 давить на поверхность щели с силой N_2 , а другая ее составляющая (сила F_2), направленная по касательной к поверхности, выталкивает клин. Условие равновесия второго клина

$$F_2 - F_{\text{тр}} = 0.$$

Но $F_{\text{тр}} = kN_2$, следовательно,

$$F_1 \sin \alpha - kF_1 \cos \alpha = 0,$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

При $k < \operatorname{tg} \alpha$ клин начнет двигаться вверх.

4.5. Пусть масса стержня m и площадь поперечного сечения S . Разобьем его длину на n частей. Тогда совокупность таких частей длиной $\Delta l = l/n$ и массой

m_1, m_2, \dots, m_n можем представить в виде шариков, подвешенных к невесомому стержню (см. пример II). Применяя ранее полученное выражение для центра тяжести, найдем

$$x_{\text{ц.т.}} \approx \frac{\sum_{i=1}^n m_i (i\Delta l)}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

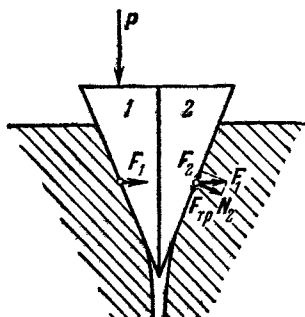


Рис. 4.14.

Точное равенство получим, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$:

$$x_{ц.т} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n m_i (i \Delta l)}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Найдем массу каждой части, учитывая, что $\rho = \rho_0 \left(\frac{l-x}{l} \right)$. Для первой части $x=0$, для остальных $x_i = \Delta l (i-1) = \frac{l}{n} (i-1)$;

$$\begin{aligned} m_1 &= S \Delta l \rho_1 = \frac{S l \rho_0}{n}, \\ m_2 &= \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right), \\ m_3 &= \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{2}{n} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ m_n &= \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i &= m = \frac{S l \rho_0}{n} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \right] = \frac{S l \rho_0}{n} \left[n - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) \right] = \\ &= \frac{S l \rho_0}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i (i \Delta l) &= \frac{S l \rho_0}{n} \Delta l + \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right) 2 \Delta l + \\ &\quad + \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{2}{n} \right) 3 \Delta l + \dots + \frac{S l \rho_0}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) n \Delta l = \\ &= \frac{S l^2 \rho_0}{n^2} \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) + 3 \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots + n \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \right] = \\ &= \frac{S l^2 \rho_0}{n^2} \left[(1 + 2 + 3 + \dots + n) - \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n}{n} \right] = \\ &= \frac{S l^2 \rho_0}{n^2} \left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n+1)(n+2)}{3} \right] = \frac{S l^2 \rho_0}{6} \cdot \frac{(n-4)(n+1)}{n^2} *); \end{aligned}$$

*) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ Эту формулу можно вывести, применяя метод математической индукции.

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i (i \Delta l)}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\frac{Sl^2 \rho_0}{6} \cdot \frac{(n-4)(n+1)}{n^2}}{\frac{Sl \rho_0}{2} \cdot \frac{n+1}{n}} = \frac{l}{3} \cdot \frac{n-4}{n}.$$

Таким образом,

$$x_{ц.г} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{l}{3} \cdot \frac{n-4}{n} \right) = \frac{l}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n} \right) = \frac{l}{3}.$$

4.6. Рассмотрим сначала, как найти центр тяжести однородного треугольника. Для этого произвольный треугольник разобьем на большое число полосок так, как показано на рис. 4.15.

Каждую из полосок приближенно можно считать однородным стержнем, тогда центр тяжести такого стержня будет лежать по середине его длины, а центр тяжести треугольника — на медиане, проходящей через середину стороны AC . Таким же образом, разбивая треугольник на полоски, параллельные BC , получим, что центр тяжести его должен находиться на медиане, проведенной через середину стороны BC . Ясно, что этим двум условиям удовлетворяет только точка пересечения медиан, делящая каждую медиану в отношении 1:2.

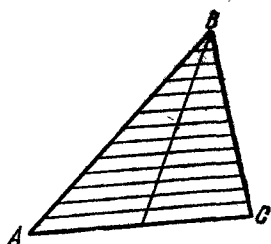


Рис. 4.15.

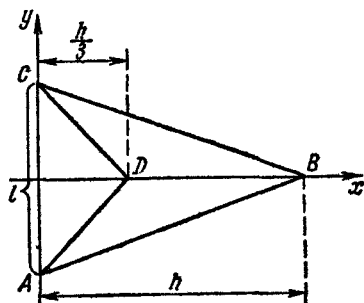


Рис. 4.16.

Для определения центра тяжести фигуры, изображенной на рис. 4.16, прибегаем к так называемому *методу отрицательных масс*. Будем считать, что на треугольник ABC положен однородный треугольник CDA , масса которого отрицательна и по абсолютной величине равна массе вырезанной части. Тогда, найдя общий центр

тяжести этих фигур, мы определим центр тяжести $ABCD$.

Введем систему координат так, как это показано на рис. 4.16. Координата $y_{ц.г}$ фигуры $ABCD$ равна нулю из

соображений симметрии. Для определения координаты $x_{ц.т}$ найдем положение центра тяжести $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$. Это $y=0$, $x=\frac{h}{9}$ и $y=0$, $x=\frac{h}{3}$ соответственно.

Теперь, заменяя эти фигуры материальными точками, положение которых совпадает с положениями центров тяжести фигур, а массы равны соответственно $\rho S_{\triangle ABC}$ и $(-\rho) S_{\triangle ADC}$ (где ρ —масса, приходящаяся на единицу площади), получим

$$x_{ц.т} = \frac{\rho \left(S_{\triangle ABC} \frac{h}{3} - S_{\triangle ADC} \frac{h}{9} \right)}{\rho (S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADC})} = \frac{\frac{hl}{2} \cdot \frac{h}{3} - \frac{h}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{h}{9}}{\frac{hl}{2} - \frac{h}{3} \cdot \frac{l}{2}} = \frac{4h}{9}.$$

При нахождении центра тяжести плоских однородных фигур ρ в конечный результат не входит, и можно рассчитывать координаты центра тяжести по формуле

$$x_{ц.т} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta S_i x_i}{\sum_{i=1}^n \Delta S_i},$$

где ΔS_i —площади участков фигуры, x_i —координаты центра тяжести этих участков по оси x .

4.7. Рамка займет положение, соответствующее минимуму потенциальной энергии. В этом положении

центр тяжести находится на одной вертикали с точкой касания стола и спицы. (Легко показать, что в противном случае центр тяжести будет расположен выше по вертикали.)

Для нахождения центра тяжести рамки можно принять, что вся масса брусков сосредоточена в их центрах симметрии (точки M , N и P ; рис. 4.17). Центр тяжести одинаковых масс, находящихся в вершинах треугольника, расположен на пересечении медиан. Так как $\triangle MNP$ —равнобедренный, то точка пересечения медиан A находится от стороны MP на

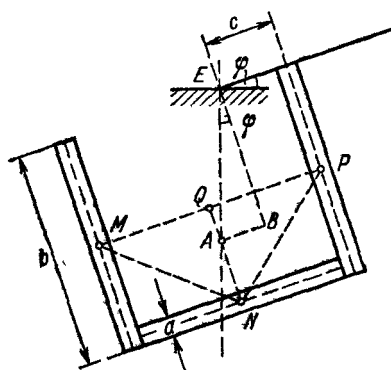


Рис. 4.17.

расстоянии

$$AQ = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right).$$

Из очевидных геометрических преобразований, рассматривая треугольник ABE , находим искомый угол φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AB}{BE} = \frac{(b-a-2c) \cdot 6}{2(4b-a)} = \frac{3(b-a-2c)}{4b-a} \approx 0,156$$

и

$$\varphi = 8^{\circ}52'.$$

4.8. Полушар займет положение, соответствующее минимуму его потенциальной энергии; при этом центр тяжести должен находиться на наименьшем возможном расстоянии от поверхности стола. Отсюда следует, что точка M (центр тяжести рассматриваемого полушара) и точка, в которой он касается стола, будут лежать на одной вертикали (рис. 4.18).

В силу симметрии мы можем считать задачу плоской. Воспользуемся методом отрицательных масс для нахождения центра тяжести полушара с полостью.

Центр тяжести целого полушара находится в точке D , а малого полушара с отрицательной массой — в точке C . При этом

$$AC = \frac{3}{8} \left(\frac{R}{2} \right) = \frac{3R}{16} \quad \text{и} \quad BD = \frac{3R}{8}.$$

Очевидно, что центр тяжести полушара с полостью должен находиться на прямой CD ; обозначим его через M . Тогда, рассматривая моменты сил тяжести, приложенных в точках C и D (в точке C масса считается отрицательной), относительно M , получим согласно определению центра тяжести

$$-m_1 g \cdot CM + m_2 g \cdot DM = 0, \quad (1)$$

где $m_1 = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^3 \rho$ — масса вырезанной части, $m_2 = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho$ — масса целого полушара и $CM = CD + DM = \frac{R\sqrt{73}}{16} + DM$.

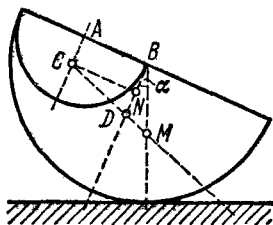


Рис. 4.18.

Решая уравнение (1), находим

$$DM = \frac{R\sqrt{73}}{112}.$$

Угол α находим, рассматривая треугольник BDM :

$$\sin \angle CDN = \frac{CN}{CD} = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R\sqrt{73}}{16}} = \frac{8}{\sqrt{73}},$$

$$\angle BDM = 180^\circ - \angle CDN = 180^\circ - \arcsin \frac{8}{\sqrt{73}},$$

$$\angle DMB = 180^\circ - \left(180^\circ - \arcsin \frac{8}{\sqrt{73}}\right) - \alpha = \arcsin \frac{8}{\sqrt{73}} - \alpha.$$

По теореме синусов

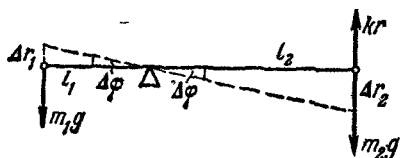
$$\frac{BD}{\sin \angle DMB} = \frac{DM}{\sin \alpha}.$$

Подставляя значения величин, входящих в уравнение, получим

$$\frac{3}{8} \sin \alpha = \frac{\sqrt{73}}{112} \sin \left(\arcsin \frac{8}{\sqrt{73}} - \alpha \right),$$

$$45 \sin \alpha = 8 \cos \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{45}; \quad \alpha \approx 10^\circ 3'.$$

4.9. Рассмотрим работу сил на возможных перемещениях. Пусть балка повернута относительно положения равновесия на малый угол $\Delta\varphi$ (рис. 4.19). Тогда концы балки переместятся на расстояния



$$\Delta r_1 = l_1 \Delta\varphi,$$

$$\Delta r_2 = l_2 \Delta\varphi.$$

Рис. 4.19.

Сумма работ сил на этих перемещениях равна ну-

лю. Знак работы определяется знаком проекции силы на направление перемещения.

$$-m_1 g \Delta r_1 + m_2 g \Delta r_2 - kr \Delta r_2 = 0,$$

$$-m_1 g l_1 \Delta\varphi + m_2 g l_2 \Delta\varphi - kr l_2 \Delta\varphi = 0,$$

откуда

$$r = \frac{m_2 l_2 - m_1 l_1}{k l_2} g.$$

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Закон всемирного тяготения

Как мы уже говорили, взаимодействие между телами на расстоянии осуществляется посредством создаваемого ими гравитационного поля. Физическую величину, характеризующую свойства тела по отношению к гравитационному полю, называют его *тяжелой*, или *гравитационной, массой*. Обобщая целый ряд опытных фактов, Ньютон установил количественную зависимость силы притяжения двух материальных точек от расстояния между ними. Эта зависимость имеет вид

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

где F —сила притяжения, направленная по линии, соединяющей тела, m_1, m_2 —тяжелые массы взаимодействующих тел, r —расстояние между телами, γ —коэффициент пропорциональности, называемый *гравитационной постоянной*. В системе СИ $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$.

Для нахождения силы притяжения между протяженными телами необходимо мысленно разбить эти тела на малые элементы, каждый из которых можно считать материальной точкой. Полную силу получим как векторную сумму сил, действующих между каждой парой таких точек. Можно показать*), что если тела имеют сферическую форму, то они взаимодействуют как материальные точки, расположенные в их центрах и имеющие массы соответствующих тел.

*) Доказательство выходит за рамки этой книги.

§ 2. Энергия тяготения

Найдем потенциальную энергию взаимодействия двух тел, притягивающихся по закону Ньютона. Пусть тяжелые массы этих тел равны m_1 и m_2 соответственно, а первоначальное расстояние между ними r_1 . Тогда сила тяготения, действующая на каждое из тел, определится как $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2}$.

Рассмотрим малое перемещение $\Delta r = r_1 - r_2$ этих тел под действием силы. Тогда

$$\Delta U = U_1 - U_2 = F \Delta r,$$

где U_1 — первоначальная потенциальная энергия тел, а U_2 — их потенциальная энергия после сближения на Δr .

Смещение тел будем считать столь малым, что сила, действующая на них, почти не меняется и равна $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{\text{ср}}^2}$,

где $r_2 < r_{\text{ср}} < r_1$. В силу малости Δr среднее расстояние между телами $r_{\text{ср}} \approx r_1 \approx r_2$ и $r_{\text{ср}}^2 = r_1 r_2$. Отсюда

$$U_1 - U_2 = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1 r_2} (r_1 - r_2) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}.$$

Очевидно, что

$$U_1 = U(r_1) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}; \quad U_2 = U(r_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2}$$

и в общем случае

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (5.2)$$

Как видно из этой формулы, при $r \rightarrow \infty$ энергия $U(r) \rightarrow 0$. Таким образом, мы получаем естественное начало отсчета для потенциальной энергии (нулевой уровень).

Когда расстояние между телами неограниченно возрастает, потенциальная энергия взаимодействия стремится к нулю, что соответствует отсутствию взаимодействия между телами на достаточно большом расстоянии.

Как видно из формулы (5.2), потенциальная энергия тела, находящегося на поверхности Земли,

$$U(R_3) = -\gamma \frac{M_3 m}{R_3},$$

где M_3 — масса Земли и R_3 — ее радиус, m — масса тела (размеры тела много меньше размеров Земли, так что можно считать

его материальной точкой). Сила, действующая на тело,

$$F = \gamma \frac{M_3 m}{R_3^2} = mg,$$

отсюда

$$g = \frac{\gamma M_3}{R_3^2}. \quad (5.3)$$

Если тело поднято на высоту h от поверхности Земли, то

$$U(R_3 + h) = -\gamma \frac{M_3 m}{R_3 + h}.$$

Найдем ΔU :

$$\begin{aligned} \Delta U &= U(R_3 + h) - U(R_3), \\ \Delta U &= -\gamma \frac{M_3 m}{R_3 + h} + \gamma \frac{M_3 m}{R_3} = \gamma \frac{M_3 m h}{R_3(R_3 + h)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если высота подъема тела h много меньше радиуса Земли, то, пренебрегая h по сравнению с R_3 в формуле (5.4), получим

$$\Delta U = \frac{\gamma M_3}{R_3^2} m h$$

или, используя (5.3),

$$\Delta U = mgh. \quad (5.5)$$

Мы вернулись к известному нам результату. Из приведенного вывода очевидно, что выражение (5.5) справедливо для $h \ll R_3$. Таким образом, для потенциальной энергии тела, поднятого на высоту h над поверхностью Земли, получаем

$$U(R_3 + h) = U(R_3) + \Delta U = -\gamma \frac{M_3 m}{R_3} + mgh. \quad (5.6)$$

Напомним, что за нуль потенциальной энергии принята взаимная потенциальная энергия тела и Земли, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга. При решении задач о движении тела вблизи поверхности Земли постоянную величину $-\gamma \frac{M_3 m}{R_3}$ опускают, что соответствует выбору нулевого уровня на поверхности Земли. На описании движения тела это не отразится, так как физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий.

§ 3. Связь гравитационной и инертной масс

Рассмотрим важный вопрос о связи гравитационной и инертной масс. С первого взгляда кажется странным говорить о такой связи, так как гравитационная*) и инертная массы характеризуют различные свойства тела. Из рассмотренных нами до сих пор физических принципов наличие такой связи никак не следует.

В то же время опыт показывает, что такая связь существует. Действительно, как уже говорилось, все тела в поле тяжести независимо от величины их массы приобретают одно и то же ускорение. В соответствии со вторым законом Ньютона на тело, падающее на Землю, действует сила $F = m_{\text{и}}g$ ($m_{\text{и}}$ — инертная масса). С другой стороны, $F = \gamma \frac{M_{\text{Зг}} m_{\text{г}}}{R_{\text{З}}^2}$ (буква «г» в индексе означает гравитационную массу). Отсюда

$$m_{\text{и}}g = \gamma \frac{M_{\text{Зг}} m_{\text{г}}}{R_{\text{З}}^2}. \quad (5.7)$$

Так как γ , $M_{\text{Зг}}$, $R_{\text{З}}$ и g — постоянные величины, то из (5.7) следует, что

$$\frac{m_{\text{г}}}{m_{\text{и}}} = \text{const},$$

т. е. отношение гравитационной и инертной масс одинаково для всех тел, и при соответствующем выборе единиц эти массы будут равны. В дальнейшем мы будем говорить просто о массе, так как мы пользуемся такой системой единиц (СИ), что $m_{\text{и}} = m_{\text{г}}$. Читатель, очевидно, заметил, что мы воспользовались этим в предыдущем параграфе (формула (5.3)).

§ 4. Принцип эквивалентности

Тот факт, что в гравитационном поле все тела движутся с одинаковым ускорением, позволяет установить аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в поле, когда движение этих тел рас-

*) Гравитационная масса в некотором смысле аналогична электрическому заряду частицы. Так же, как заряд характеризует свойства частицы по отношению к электромагнитному полю, так и гравитационная масса характеризует ее свойства в гравитационном поле. Вместе с тем связь между электрическим зарядом частицы и ее инертной массой не известна.

смаатривается в неинерциальной системе отсчета. Для того чтобы проследить это соответствие, рассмотрим сначала движение свободных тел (т. е. тел, не подверженных действию внешних сил) относительно инерциальной системы. По закону инерции тела будут двигаться одинаково независимо от их массы. Другими словами, если скорости этих тел в начальный момент времени были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время.

Если рассматривать это движение с точки зрения неинерциальной системы отсчета, то ясно, что и относительно нее тела будут двигаться одинаковым образом: с ускорением, равным по величине и противоположным по направлению ускорению неинерциальной системы относительно инерциальной.

Наблюдатель, неподвижный в неинерциальной системе, может объяснить характер движения тел наличием гравитационного поля, сообщающего всем телам одинаковое ускорение, а свою систему при этом считать инерциальной. Ни один физический эксперимент, проведенный им, не может решить вопрос о том, какое из двух описаний движения является верным: предположение о том, что его система инерциальна, но в ней действует гравитационное поле, или предположение о том, что система неинерциальна.

Эквивалентность неинерциальной системы отсчета гравитационному полю называют в физике *принципом эквивалентности*. Существенно то, что принцип эквивалентности выполняется в небольших участках пространства. Действительно, в достаточно большом объеме пространства ускорения тел, вызванные наличием гравитационного поля, уже нельзя считать параллельными. Принцип эквивалентности дает мощный метод для решения ряда трудных динамических задач. Этот метод состоит в том, что, переходя к неинерциальной системе отсчета (например, к системе, связанной с телом, движущимся с ускорением), эту систему считают инерциальной, но вводят дополнительное поле тяжести. Таким образом динамическая задача приводится к статической.

ПРИМЕРЫ

1. Построить график зависимости силы, действующей на тело массой m , от его расстояния до центра Земли. (Предполагается, что тело переносят из бесконечности к поверхности Земли и затем внутрь Земли по шахте (рис. 5.1), доходящей до центра.)

При движении тела из бесконечности к поверхности Земли на него действовала сила $F = \gamma \frac{mM_3}{r^2}$, где M_3 —

масса Земли и r — расстояние тела до центра Земли.

Для нахождения величины силы, действующей на тело во время его движения в шахте, докажем предварительно, что на тело, помещенное

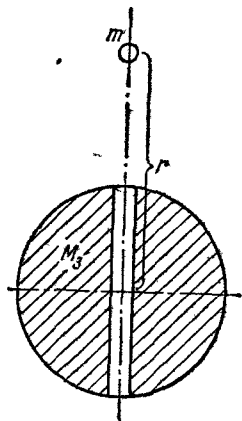


Рис. 5.1.

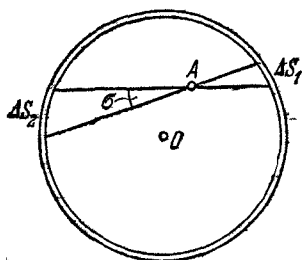


Рис. 5.2.

внутри однородной тонкой сферы из гравитирующего вещества*), никакие силы не действуют.

Пусть тело находится в точке A внутри сферы (рис. 5.2). Вырежем узким конусом, вершина которого совпадает с точкой нахождения тела, участки поверхности сферы ΔS_1 и ΔS_2 . Из точки A эти участки видны под одинаковым телесным углом**)

$$\sigma = \frac{\Delta S_1}{r_1^2} = \frac{\Delta S_2}{r_2^2}.$$

Сила, действующая на тело со стороны первой площадки,

$$F_1 = \frac{\rho \Delta S_1 m}{r_1^2},$$

где $\rho \Delta S_1$ — масса участка сферы ΔS_1 (ρ — масса, приходящаяся на единицу площади).

*) Гравитирующим называют такое вещество, между частицами которого действуют силы гравитационного притяжения много большие, чем сила тяжести со стороны Земли. Фактически в земных условиях такого вещества не существует.

**) Предполагаем, что ΔS_1 и ΔS_2 достаточно малы.

Со стороны второго участка действует сила

$$F_2 = \frac{\rho \Delta S_2 m}{r_2^2}.$$

Заменяя ΔS_1 на σr_1^2 и ΔS_2 на σr_2^2 , получим

$$F_1 = \frac{\rho \sigma r_1^2}{r_1^2} = \sigma \rho, \quad F_2 = \frac{\rho \sigma r_2^2}{r_2^2} = \sigma \rho.$$

Следовательно, $F_1 = -F_2$, т. е. силы, действующие на тело со стороны участков сферы ΔS_1 и ΔS_2 , компенсируют друг друга.

Таким же образом, разбивая сферу на малые участки, мы найдем, что сумма действующих на тело сил равна нулю. Ясно, что этот вывод будет верен и для сферы любой толщины, так как мы можем его провести, разбив сферу на n тонких сферических оболочек. Очевидно поэтому, что на тело, находящееся в шахте на глубине r_1 , будет действовать сила только со стороны части земного шара массой

$\frac{4}{3} \pi r_3^3 (\rho_3 - r_1^3 (\rho_3 - \text{плотность Земли}^*))$, равная $\rho_3 = \frac{M_3}{\frac{4}{3} \pi R_3^3}$, R_3 —

радиус Земли), так как сила, действующая со стороны сферической оболочки толщиной r_1 , равна нулю.

Теперь мы можем построить график зависимости силы, действующей

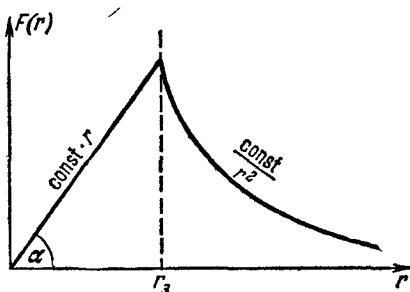


Рис. 5.3.

на тело, от его расстояния до центра Земли (рис. 5.3). При движении тела из бесконечности к поверхности Земли

$$F_1 = \gamma \frac{m M_3}{r^2},$$

при движении внутри шахты

$$F_2 = \gamma \frac{m}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_3 = \gamma \frac{m M_3}{R_3^2} r = \text{const} \cdot r,$$

в точке $r = R_3$

$$F_1 = F_2 = \gamma \frac{m M_3}{R_3^2},$$

*) Землю считаем полностью однородной.

в центре Земли $r=0$, и на тело никакие силы действовать не будут.

II. Космический корабль, находящийся достаточно далеко от всех притягивающих тел, движется с выключенным двигателем. Определить, будет ли система отсчета, связанная со стенками кабины, инерциальной; найти направление вертикали внутри кабины; описать, как будут вести себя тела внутри корабля, если включить двигатель; найти направление вертикали в этом случае.

Для описания движения космического корабля выберем инерциальную систему отсчета, связанную с «неподвижными» звездами.

При выключенном двигателе корабль будет двигаться равномерно и прямолинейно, так как на него не действуют никакие силы (по условию действие притягивающих тел пренебрежимо мало). Система отсчета, связанная со стенками кабины, будет почти инерциальной. (Мы говорим «почти» потому, что кабина ограничена: любое тело внутри кабины будет двигаться равномерно и прямолинейно до тех пор, пока не ударится о стенку кабины.)

Ясно, что внутри корабля не имеет смысла говорить о вертикали, так как вертикалью называется линия, совпадающая по направлению с вектором силы тяжести, а гравитационное поле отсутствует. Отсутствие выделенного направления не позволяет также говорить о «верхе» или «ниже».

Если включить двигатель, то корабль начнет двигаться с ускорением (по отношению к любой инерциальной системе отсчета). В этом случае все тела внутри кабины приобретут ускорение по отношению к ее стенкам. Очевидно, что это ускорение будет равно по величине и противоположно по направлению ускорению корабля. Внутренний наблюдатель может объяснить поведение тел, считая свою систему отсчета инерциальной, но предположив, что возникло поле тяжести, сообщающее всем телам одинаковое ускорение *).

Внутри кабины появится выделенное направление (направление вектора ускорения). Это направление естественно называть вертикалью и движение тел рассматривать как свободное падение вниз под действием поля тяжести.

В полном соответствии с принципом эквивалентности ни один опыт, проведенный внутри кабины, не позволит уста-

*) В частном случае, если ускорение ракеты будет равно g , поведение тел будет таким же, как если бы космический корабль покоился на Земле.

новить, что происходит в действительности: движется ли корабль с ускорением или покоится, но находится в поле тяжести. Существенно то, что принцип эквивалентности выполняется лишь в объеме кабины.

III. Какова должна быть скорость мотоциклиста, чтобы он мог ехать по вертикальной стене, имеющей форму цилиндра радиусом R , если известно, что при движении по горизонтальной поверхности с тем же коэффициентом трения со скоростью v минимальный радиус поворота мотоциклиста равен r ?

Рассмотрим сначала движение мотоциклиста по горизонтальной поверхности. Это рассмотрение удобно провести в системе отсчета, связанной с мотоциклистом. В этой системе отсчета согласно принципу эквивалентности на мотоциклиста действует сила $F = mv^2/r$ (соответствующая дополнительному полю тяжести), направленная противоположно его ускорению. Кроме того, на него действует сила тяжести со стороны Земли, равная mg (рис. 5.4). Результирующая этих сил определит для мотоциклиста направление вертикали.

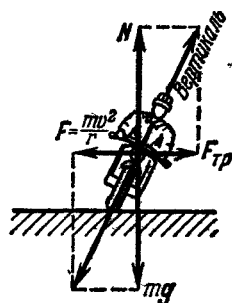


Рис. 5.4.

Ясно, что для того, чтобы не упасть, мотоциклист должен наклониться, совместив положение тела с вертикалью. Поскольку в выбранной нами системе отсчета мотоциклист покоится, то сумма всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Как видно из рис. 5.4, вес mg уравнивается реакцией N со стороны поверхности, а сила F — силой трения покоя $F_{тр}$. Минимальность r соответствует максимальной возможной силе трения покоя $F_{тр} = kmg$, где k — коэффициент трения. Отсюда

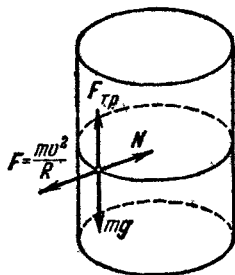


Рис. 5.5.

$$\frac{mv^2}{r} = kmg; \quad k = \frac{v^2}{rg}.$$

Вообще говоря, в выбранной системе отсчета поверхность Земли движется по отношению к мотоциклисту и, следовательно, на него действует еще сила трения качения, возникающая вследствие такого движения, но она мала и ею можно пренебречь.

Теперь рассмотрим движение мотоциклиста по вертикальной стене. Снова перейдем к неподвижной относительно него системе отсчета. На мотоциклиста будут действовать: сила тяжести mg , сила F , равная mv^2/R , реакция стены N и сила трения покоя $F_{тр}$ (рис. 5.5). Составляя, как и в предыдущем случае, уравнения равновесия и пренебрегая силой трения качения, найдем искомую скорость v_1 :

$$mg = F_{тр} = kN; \quad \frac{mv_1^2}{R} = N, \quad mg = k \frac{mv_1^2}{R};$$

$$v_1^2 = \frac{gR}{k} = \frac{gR \cdot rg}{v^2} \quad \text{и} \quad v_1 = \sqrt{\frac{g^2 R r}{v^2}} = \frac{g}{v} \sqrt{Rr}.$$

ЗАДАЧИ

5.1. Один из экспериментов по определению величины постоянной тяготения γ^*) состоял в следующем. На одно из плеч рычажных весов были помещены две чашки (рис. 5.6). Между ними находился свинцовый шар большой массы M (чашки были соединены тросиком, проходящим через вертикальный канал в свинцовом шаре). На верхнюю чашку весов положили некоторый груз массой m и уравновесили его разновесом, положенным на чашку, прикрепленную к другому плечу весов. Затем этот же груз уравновесили, когда он находился на нижней чашке. Зная вес разновеса в обоих случаях, определите постоянную тяготения. (Расстояние от центра шара до каждой из парных чашек равно R .)

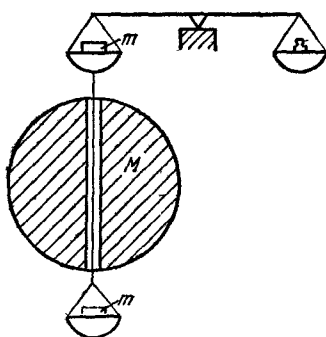


Рис. 5.6.

Зная вес разновеса в обоих случаях, определите постоянную тяготения. (Расстояние от центра шара до каждой из парных чашек равно R .)

5.2. Шарик массой m перемещают вдоль оси, проходящей через центр однородного кольца массой M и радиусом R и перпендикулярной к плоскости кольца. Найти зависимость силы взаимодействия этих тел от расстояния r шарика до плоскости кольца. Размеры шарика и толщина кольца малы по сравнению с R . Исследовать случай, когда $r \gg R$.

*) Описание эксперимента значительно упрощено.

5.3. Найти первую космическую скорость, т. е. скорость, с которой надо запустить ракету с Земли, чтобы она стала ее спутником. Масса Земли $6 \cdot 10^{24}$ кг, радиус $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, постоянная тяготения $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}$.

5.4. Определить вторую космическую скорость — наименьшую скорость, при которой ракета, пущенная с Земли, выйдет из сферы ее притяжения и станет спутником Солнца. Одновременно рассмотреть случай, когда ракета запускается не с поверхности Земли, а с высоты H над Землей.

5.5. Вычислить наименьшую скорость, которую необходимо сообщить ракете, запускаемой с Земли, чтобы она смогла покинуть Солнечную систему (третью космическую скорость). Скорость орбитального движения Земли принять равной $3 \cdot 10^4$ м/сек.

5.6. В однородной гравитирующей жидкости плотностью ρ находятся два шарика, плотности которых ρ_1 и ρ_2 соответственно. Каков будет характер их относительного движения? Рассмотреть случаи: 1) $\rho_1 = \rho_2 > \rho$, 2) $\rho_1 < \rho < \rho_2$, 3) $\rho_1 = \rho_2 < \rho$.

5.7. На треугольной призме, боковые грани которой образуют с основанием углы α и β , лежит массивный однородный канат (рис. 5.7). Середина каната находится на верхнем ребре призмы. Призма движется с некоторым ускорением a по горизонтальной плоскости. Каково должно быть это ускорение, чтобы канат не перемещался относительно призмы?

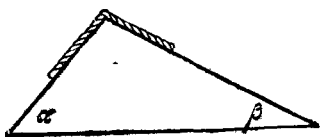


Рис. 5.7.

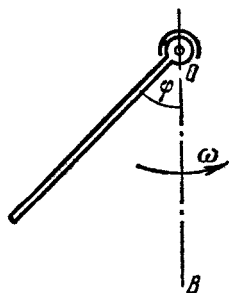


Рис. 5.8.

5.8. Тонкий однородный стержень длиной l , шарнирно закрепленный в точке O (шаровой шарнир), вращается вокруг этой точки с постоянной угловой скоростью ω (рис. 5.8). Вычислить угол φ отклонения стержня от вертикального положения и величину реакции шарнира N . Вес стержня P .

5.9. На проволоочное кольцо радиусом R нанизана маленькая бусинка. Кольцо вращается вокруг вертикальной

оси, совпадающей с его диаметром (рис. 5.9). Угловая скорость вращения кольца постоянна и равна ω . Найти условие равновесия бусинки и определить вид равновесия.

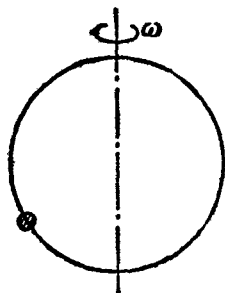


Рис. 5.9.

5.10. Горизонтальный вал вращается с постоянной угловой скоростью ω .

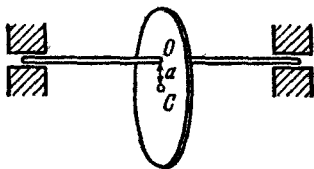


Рис. 5.10.

На равных расстояниях от подшипников на вал эксцентрично насажен однородный диск (рис. 5.10). Вес вала P_v , диска P_d , расстояние от центра диска C до оси вала a . Определить давление вала на подшипники.

5.11. Вывести уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. В первом случае сила, действующая на массу m , равна

$$mg + \gamma \frac{mM}{R^2} = P_1,$$

во втором случае

$$mg - \gamma \frac{mM}{R^2} = P_2.$$

Зная P_1 и P_2 (вес разновеса при первом и втором взвешивании), определим γ :

$$\gamma = \frac{P_1 - P_2}{2mM} R^2.$$

5.2. Выделим малый элемент кольца массой Δm и диаметрально противоположный ему элемент массой $\Delta m' = \Delta m$ (рис. 5.11). Тогда на шарик со стороны этих элементов действует суммарная сила

$$\Delta F = \gamma \frac{2\Delta m m}{r^2 + R^2} \cos \alpha,$$

направленная по r , так как составляющие сил, действующие перпендикулярно к r , взаимно уничтожаются.

Со стороны всего кольца действует сила $F = \sum \Delta F$, где сумма берется по всем элементам одной половины кольца,

$$F = \gamma \frac{2m}{r^2 + R^2} \cos \alpha \cdot \sum \Delta \mu = \frac{\gamma m M}{r^2 + R^2} \cos \alpha.$$

Но $\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}$, поэтому

$$F = \frac{\gamma M m r}{\sqrt{(r^2 + R^2)^3}}.$$

При $r \gg R$

$$F = \frac{\gamma M m}{r^2},$$

т. е. кольцо можно рассматривать как материальную точку.

5.3. Нас интересует минимальная возможная скорость v_1 . В этом случае ракета должна быть пущена горизонтально на некотором расстоянии h от Земли, которым мы в дальнейшем будем пренебрегать по сравнению с радиусом Земли.

Роль силы, обеспечивающей необходимое центростремительное ускорение, будет играть сила притяжения ракеты к Земле.

$$\frac{m_p v_1^2}{R_3} = \gamma \frac{m_p M_3}{R_3^2},$$

где m_p — масса ракеты.

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_3}{R_3}} = 7900 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Естественно, что такой запуск не может быть осуществлен реально. Однако если бы Земля не имела атмосферы, любое тело, которому сообщили горизонтальную скорость 7,9 км/сек, стало бы ее искусственным спутником.

5.4. Для решения задачи построим график потенциальной энергии ракеты в поле притяжения Земли в зависимости от ее расстояния до центра Земли. С учетом того, что при движении ракета не проинкает в область $r < R_3$,

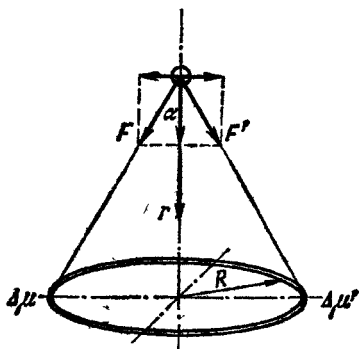


Рис. 5.11.

график $U = -\gamma \frac{M_3 m_p}{r}$, где m_p — масса ракеты, будет иметь вид, указанный на рис. 5.12.

Из графика очевидно, что уйти из сферы притяжения Земли ракета может лишь тогда, когда ее полная энергия

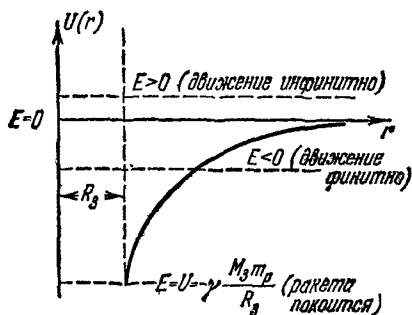


Рис. 5.12.

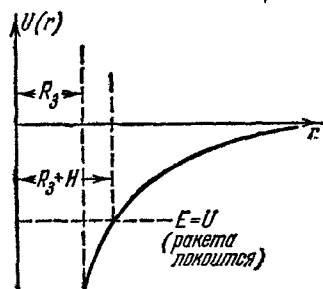


Рис. 5.13.

$E \geq 0$. В этом случае движение ракеты инфинитно (см. решение задачи 3.4).

При $E = 0$

$$-U = T \text{ или } \gamma \frac{M_3 m_p}{R_3} = \frac{m_p v_2^2}{2}.$$

Искомая космическая скорость

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R_3}}. \quad (1)$$

Если ракета пущена с высоты H над Землей, то, используя график рис. 5.13, получим, что для приобретения второй космической скорости необходимо, чтобы

$$T \geq -U = \frac{\gamma m_p M_3}{R_3 + H}$$

и

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R_3 + H}}.$$

Из формулы (1) видно, что вторая космическая скорость связана с первой космической скоростью соотношением

$$v_2 = v_1 \sqrt{2},$$

следовательно, $v_2 = 11\,000$ м/сек.

Легко показать, что это соотношение выполняется для запуска ракеты с любой высоты над поверхностью Земли. Первой космической скоростью мы будем называть минимальную скорость, необходимую для того, чтобы ракета, оставаясь на той же высоте, вращалась вокруг Земли, не падая на нее. Второй же космической скоростью будем называть скорость, необходимую для того, чтобы ракета, запущенная с этой высоты, вышла из сферы земного притяжения.

5.5. Определим сначала, с какой скоростью v нужно было бы запустить ракету с Земли, если бы поле тяготения Земли было «выключено». В этом случае ракете надо было бы преодолеть только силу притяжения со стороны Солнца. Как известно (см. задачу 5.4), минимальная скорость тела, необходимая для выхода тела из сферы земного притяжения, в $\sqrt{2}$ раз больше, чем минимальная скорость, необходимая для того, чтобы это тело стало спутником Земли. Этот же вывод относится и к Солнцу.

Следовательно, скорость v' , необходимая для выхода из сферы солнечного притяжения, в $\sqrt{2}$ раз больше, чем скорость спутника Солнца. Так как Земля—спутник Солнца и скорость ее орбитального движения $v_3 = 3 \cdot 10^4$ м/сек, то вторая космическая скорость для ракеты, запущенной с орбиты Земли, равна (см. предыдущую задачу)

$$v' = \sqrt{2} \cdot 3 \cdot 10^4 = 4,2 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Для запуска ракеты с Земли необходимо, конечно, использовать скорость самой Земли. Поэтому

$$v = v' - v_3 = 1,2 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

Теперь учтем поле тяжести Земли. Как известно (см. задачу 5.4), для преодоления только поля тяжести Земли телу необходимо сообщить кинетическую энергию, равную $\frac{mv_2^2}{2}$, где v_2 —вторая космическая скорость. Так как мы хотим, чтобы ракета, выйдя из сферы земного притяжения, двигалась потом со скоростью v , необходимой для преодоления притяжения Солнца, то нам нужно сообщить ей дополнительную кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$. Таким образом,

суммарная энергия ракеты равна:

$$\frac{mv_3^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

где v_3 — искомая третья космическая скорость. Отсюда имеем

$$v_3^2 = v_2^2 + v^2, \\ v_3 = \sqrt{(1,1 \cdot 10^4)^2 + (1,2 \cdot 10^4)^2} = 1,6 \cdot 10^4 \frac{\text{м}}{\text{сек}}.$$

5.6. Шарикн взаимодействуют по закону Ньютона

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где m_1 и m_2 — их массы и r — расстояние между ними.

Вводя понятие массы, мы указывали, что масса — существенно положительная величина. Однако, когда говорят о значении какой-либо физической величины, подразумевают, что ее сравнивают с другой величиной, значение которой часто принимают за нуль. Что же играет роль нулевой массы? Очевидно, масса «пустоты», масса того «фона», который окружает тела. В рассматриваемом случае роль «фона» выполняет гравитирующая жидкость. При $\rho < \rho_1$ масса тела положительна, при $\rho > \rho_1$ мы формально всегда можем говорить об отрицательной массе тела по отношению к окружающей среде.

Используя понятие отрицательной массы, легко описать относительное движение шариков: 1) при $\rho_1 = \rho_2 > \rho$ сила взаимодействия их положительна — шарики сближаются; 2) при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ масса первого шарика отрицательна, произведение масс также отрицательно, $F < 0$ и шарики отталкиваются; 3) при $\rho_1 = \rho_2 < \rho$ массы обоих шариков отрицательны, $F > 0$ — шарики притягиваются.

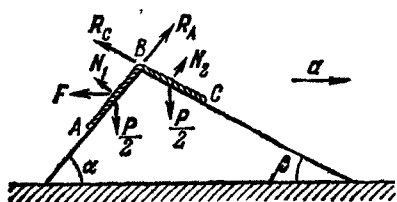


Рис. 5.14.

5.7. Перейдем к системе отсчета, движущейся с ускорением a . Рассмотрим условие равновесия каната в этой системе. На половину каната AB (рис. 5.14) действуют ее вес $\frac{P}{2}$, реакция призмы N_1 , направленная перпендикулярно

к поверхности, и сила натяжения каната R_A , приложенная в точке B . Кроме того, в соответствии с принципом эквивалентности, должна быть приложена сила $F = -\frac{P}{2g}a$.

Составляя уравнение равновесия для проекций сил на направление AB , найдем

$$\frac{P}{2} \sin \alpha + \frac{P}{2g} a \cos \alpha - R_A = 0. \quad (1)$$

Рассуждая аналогично, получим для половины каната BC

$$\frac{P}{2} \sin \beta - \frac{P}{2g} a \cos \beta - R_C = 0. \quad (2)$$

По третьему закону Ньютона $R_A = R_C$, тогда, вычитая (2) из (1), найдем

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta + \frac{a}{g} (\cos \alpha + \cos \beta) &= 0, \\ a &= g \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} = g \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

В частном случае равнобедренного треугольника, когда $\alpha = \beta$, $a = 0$, т. е. условие задачи выполнить нельзя.

5.8. Перейдем к системе отсчета, равномерно вращающейся вместе со стержнем с угловой скоростью ω , и выберем оси координат так, как показано на рис. 5.15.

В этой системе согласно принципу эквивалентности на каждый i -й элемент стержня, имеющий массу Δm_i и находящийся на расстоянии s_i от точки O , действует сила

$$F_i = \Delta m_i \omega^2 r_i,$$

где r_i — расстояние от элемента Δm_i до оси y . Так как $\Delta m_i = \frac{P}{gl} \Delta s_i$ и $r_i = s_i \sin \varphi$, то выражение для силы F_i принимает вид

$$F_i = \frac{P}{gl} \omega^2 s_i \Delta s_i \sin \varphi.$$

Учитывая то, что все силы F_i лежат в одной плоскости, проходящей через ось y , запишем уравнение равновесия

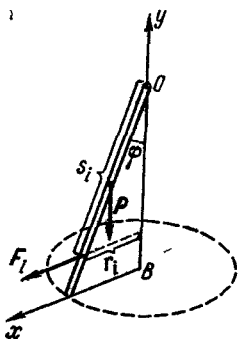


Рис. 5.15.

для моментов сил, действующих на стержень, относительно точки O :

$$M_O(P) + \sum_{i=1}^{\infty} M_O(F_i) = 0, \\ -\frac{P}{2} l \sin \varphi + \frac{P}{gl} \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 \Delta s_i = 0. \quad (1)$$

Величина $\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 \Delta s_i$ вычисляется по графику как площадь, ограниченная параболой $f(s) = s^2$, причем s изменяется от нуля до l :

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i^2 \Delta s_i = \frac{l^3}{3}.$$

Используя это значение, перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{\sin \varphi}{2} = \frac{\omega^2 l}{3g} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Это уравнение имеет два решения:

$\sin \varphi = 0$; $\varphi = 0$ — решение тривиально;

$\cos \varphi = \frac{3g}{2\omega^2 l}$ — это решение возможно при условии $3g < 2\omega^2 l$.

Для нахождения силы реакции N запишем уравнение равновесия сил в проекциях на оси x и y :

$$\left. \begin{aligned} N_x + \sum_{i=1}^{\infty} F_{ix} &= 0, \\ N_y - P &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} N_y &= P, \\ N_x &= \frac{P\omega^2 \sin \varphi}{gl} \sum_{i=1}^{\infty} s_i \Delta s_i. \end{aligned} \right\}$$

Вычисляя величину $\sum_{i=1}^{\infty} s_i \Delta s_i$ по графику как площадь, ограниченную прямой $f(s) = s$ (где s изменяется от нуля до l), получим $\sum_{i=1}^{\infty} s_i \Delta s_i = \frac{l^2}{2}$. Подставим это значение в формулу для N_x :

$$N_x = \frac{Pl}{2g} \omega^2 \sin \varphi.$$

Теперь мы можем найти полную силу реакции N :

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{P^2 + P^2 \frac{l^2 \omega^4}{4g^2} \sin^2 \varphi} = \\ = \frac{P \omega^2 l}{2g} \sqrt{1 + 7 \left(\frac{g}{2 \omega^2 l} \right)^2}.$$

5.9. Перейдем к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью ω . В этой системе на бусинку будут действовать следующие силы: вес бусинки $P = mg$, сила $F = m \omega^2 r$, направленная противоположно ускорению выбранной системы отсчета, и сила реакции кольца N (рис. 5.16). При равновесии сумма проекций этих сил на оси координат, выбранные так, как показано на рис. 5.16, равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} N - m \omega^2 r \sin \alpha - mg \cos \alpha &= 0, \\ m \omega^2 r \cos \alpha - mg \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Второе из этих уравнений позволяет определить значения угла α , при которых бусинка находится в равновесии:

$$m \omega^2 R \sin \alpha \cos \alpha - mg \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sin \alpha \left(\cos \alpha - \frac{g}{\omega^2 R} \right) = 0. \quad (2)$$

Первое равновесное состояние бусинки:

$$\sin \alpha = 0; \quad \alpha = 0.$$

При этом никаких ограничений на ω не накладывается.

Второе равновесное состояние бусинки осуществляется тогда, когда

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}.$$

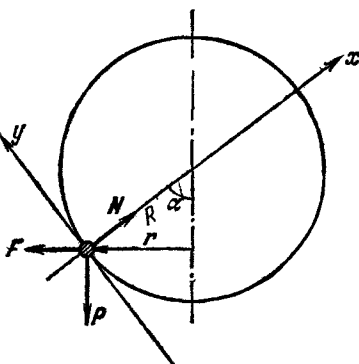


Рис 5.16.

Так как $\cos \alpha < 1^*$, то $\frac{g}{\omega^2 R} < 1$, и для того, чтобы бусинка находилась в этом состоянии, необходимо, чтобы $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$.

*) При $\cos \alpha = 1$ угол $\alpha = 0$ и второе равновесное состояние совпадает с первым.

Следовательно, при выполнении условия (2) существуют два равновесных состояния бусинки. Каков же характер равновесия тела в этих состояниях?

Рассмотрим случай $\alpha = 0$. При малом изменении угла результирующая сила, определяемая формулой (1), будет иметь знак, противоположный знаку смещения, если $\cos \alpha < \frac{g}{\omega^2 R}$. При этом равновесие устойчиво. Отметим, что неравенство $\cos \alpha < \frac{g}{\omega^2 R}$ противоположно условию существования второго положения равновесия.

При $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$ появляется другое равновесное состояние; при этом нижнее положение бусинки ($\alpha = 0$) становится неустойчивым. Это второе состояние, как легко показать, устойчиво. Действительно, любое увеличение угла α соответствует уменьшению $\cos \alpha$ и появлению отрицательной равнодействующей, которая стремится возвратить тело в исходное положение.

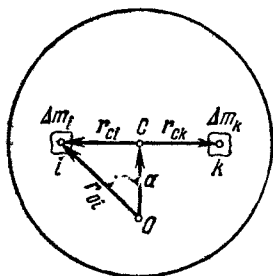


Рис 5.17.

5.10. Перейдем к системе отсчета, связанной с диском. На каждый его малый элемент, имеющий массу Δm_i , согласно принципу эквивалентности, действует в этой системе сила

$$F_i = \Delta m_i \omega^2 r_{Oi} = \Delta m_i \omega^2 (r_{Ci} + a),$$

где r_{Oi} — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку i, а r_{Ci} и a — векторы, проведенные из точки C в точку i и из точки O в точку C соответственно.

Сумма всех сил, которые действуют на диск,

$$F_{\text{полн}} = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \omega^2 r_{Ci} + \sum \Delta m_i \omega^2 a.$$

Поскольку мы проводим суммирование по всем элементам диска, то для каждого i-го элемента найдется такой k-й элемент, что $\Delta m_i = \Delta m_k$, а $r_{Ci} = -r_{Ck}$ (рис. 5.17). Поэтому сумма $\sum_{i=1}^n \Delta m_i \omega^2 r_{Ci}$ обращается в нуль и

$$F_{\text{полн}} = \frac{P_d}{g} \omega^2 a.$$

К оси вала в нашей системе приложены три силы: вес вала P_v , вес диска P_d и сила $F_{\text{полн}}$. Давление на каждый подшипник N определяется формулой

$$N = \frac{1}{2} (P_v + P_d) + \frac{1}{2} \frac{P_d}{g} \omega^2 a.$$

5.11. Перейдем к системе отсчета, связанной с телом. В этой системе к каждому элементу тела массой Δm_i приложена сила

$$F_i = -\Delta m_i a_i + \Delta m_i \omega^2 r_i,$$

где a_i — линейное ускорение тела, r_i — вектор, перпендикулярный к оси вращения и проведенный в точку i , ω — угловая скорость тела в данный момент.

Результирующий момент всех сил F_i относительно оси равен

$$M = -\sum_i \Delta m_i r_i a_i.$$

Вторая составляющая сил F_i , равная $\Delta m_i \omega^2 r_i$, направлена по r_i и вклада в момент не дает. Вводя угловое ускорение $\beta = \frac{a_i}{r_i}$, получим

$$M = -\sum_i \Delta m_i r_i^2 \beta = -\beta \sum_i \Delta m_i r_i^2 = -\beta J.$$

Величину J , равную $\sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2$ (при $n \rightarrow \infty$) и характеризующую инертиные свойства тела по отношению к вращательному движению, называют *моментом инерции** тела.

Так как в выбранной нами системе отсчета тело покоится, то сумма моментов сил относительно его оси равна нулю. Обозначая через $M_{\text{вн}}$ сумму моментов внешних сил, получим

$$M_{\text{вн}} - J\beta = 0; \quad M_{\text{вн}} = J\beta.$$

Последняя формула дает уравнение вращения твердого тела относительно оси.

*) Вычисление моментов инерции твердых тел проводится с помощью обычных приемов суммирования или интегрирования.

6.1. Определить энергию, расходуемую насосом на выкачивание жидкости из доверху наполненной конической воронки, при условии, что к.п.д. насоса $\eta\%$. Размеры воронки указаны на рис. 6.1, удельный вес жидкости d .

6.2. Истребитель (*И*) заметил цель — самолет (*С*) — в тот момент, когда направление *ИС* составляло 90° с курсом самолета-цели. Истребитель пытается догнать цель, при этом его скорость всегда направлена на *С*. Каково наименьшее возмож-

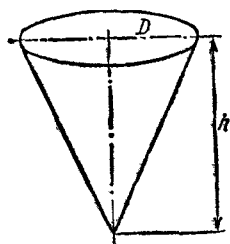


Рис. 6.1.

ное расстояние между истребителем и самолетом-целью, если их скорости одинаковы, цель не меняет курса и первоначальное расстояние между ними 2 км?

6.3. С лодки *L* заметили катер *K* в тот момент, когда направление L_1K_1 составляло 90° с курсом катера и расстояние L_1K_1 было равно l . Лодка стремится как можно ближе подойти к катеру. Какое направление должна выбрать лодка, если ее скорость v_1 , скорость катера $v_2 = kv_1$ ($k > 1$) и катер не меняет своего курса? Каково наименьшее возможное расстояние между лодкой и катером?

6.4. Определить форму области, которая простреливается из зенитного орудия, если начальная скорость снаряда v . Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.5. С помощью механической модели доказать, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

6.6. Дан некоторый выпуклый многоугольник. Надо доказать, что внутри него нельзя найти такой точки, для

которой все перпендикуляры, опущенные из нее на стороны многоугольника, попали бы на их продолжения.

6.7. Дан невесомый стержень AB . На расстоянии $x_1 = 1$ м от точки A помещен груз $P_1 = 1$ н, на расстоянии $x_2 = 2$ м от точки A помещен груз $P_2 = 2$ н, . . ., на расстоянии $x_n = n$ — груз $P_n = n$ н. Найти точку, где надо закрепить стержень, чтобы он находился в равновесии.

6.8. С помощью механической модели доказать теорему: отрезки, соединяющие середины противоположных сторон любого (в общем случае не плоского) четырехугольника, пересекаются и делят друг друга пополам.

6.9. Доказать, что кратчайшая линия, соединяющая две гладкие (т. е. без изломов) кривые, является нормалью к обеим кривым. Использовать механическую модель.

6.10. Дан произвольный треугольник ABC (рис. 6.2). Как с помощью механической модели найти точку O такую, чтобы сумма $OA + OB + OC$ была наименьшей?

6.11. В городе есть три школы, A , B и C , расположенные не на одной прямой. В школе A учится n_1 учеников, в школе B — n_2 и в школе C — n_3 . Как найти место, где надо построить стадион, чтобы общее время, затрачиваемое всеми учениками на путь до стадиона от своих школ, было наименьшим? Скорости передвижения всех учеников считать одинаковыми и постоянными. При решении использовать механическую модель.

6.12. По горизонтальной поверхности катится тонкий обруч радиусом R . Как зависит отношение полной скорости произвольной точки обруча к ее горизонтальной составляющей от высоты h точки над поверхностью?

6.13. Человек идет из поселка A в поселок B . При этом первую часть пути он движется по лесу, где его скорость u , а вторую — по болоту, где его скорость v . Найти условия, накладываемые на направление перемещения человека, чтобы время, затраченное на дорогу, было наименьшим. Граница раздела леса и болота — прямая линия.

6.14. Найти такую форму желоба, соединяющего две произвольные точки A и B (не лежащие на одной горизонтали или вертикали), чтобы время соскальзывания шарика из верхней точки в нижнюю было наименьшим.

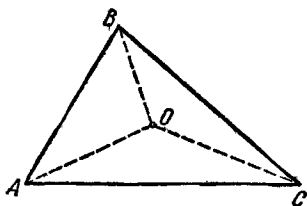


Рис. 6.2.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

6.1. Вычислим полезную работу по выкачиванию жидкости из воронки. С этой целью мысленно разобьем высоту конуса на n отрезков и через конец каждого отрезка проведем плоскость, параллельную основанию конуса. Две соседние плоскости выделяют слой жидкости, который, строго

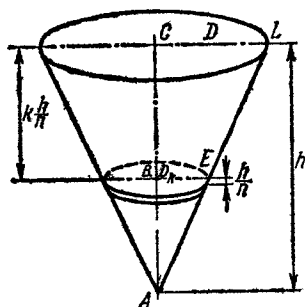


Рис 6.3.

говоря, имеет форму усеченного конуса. Однако если толщина слоя мала (т. е. если n велико), мы можем считать, что он имеет форму цилиндра. Это предположение тем более верно, чем тоньше слой, т. е. чем больше n . Вся работа по выкачиванию жидкости из воронки будет равна сумме работ по подъему каждого слоя на соответствующую высоту.

Рассмотрим k -й слой. Работа по его подъему равна произведению веса слоя на расстояние до основания конуса. Вес элементарного слоя равен его объему, умноженному на удельный вес жидкости d . Объем элементарного цилиндрического слоя равен

$$V_k = \frac{\pi D_k^2}{4} \cdot \frac{h}{n},$$

где D_k — диаметр основания слоя, а $\frac{h}{n}$ — его высота. D_k найдем из соотношения

$$\frac{D}{D_k} = \frac{h}{\frac{(n-k)h}{n}},$$

которое следует из подобия треугольников ACL и ABE (рис. 6.3). Вес k -го слоя

$$P_k = \frac{\pi D^2 (n-k)^2}{4n^2} \frac{h}{n} d.$$

Работа по его подъему

$$A_k = P_k \frac{h}{n} = \frac{\pi D^2 (n-k)^2}{4n^2} \frac{h^2}{n^2} kd = \frac{\pi D^2 h^2}{4} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2} d.$$

Полная работа равна сумме элементарных работ

$$\begin{aligned}
 A &\approx \sum_{k=1}^n A_k = \sum_{k=1}^n \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2} = \\
 &= \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2} = \\
 &= \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 \right].
 \end{aligned}$$

Используя формулы

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \\
 \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4},
 \end{aligned}$$

получим выражение для работы:

$$A \approx \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right]. \quad (1)$$

Истинное значение A найдем, взяв предел правой части формулы (1) при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] \right\} = \frac{\pi D^2 h^2 d}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \\
 &= \frac{\pi D^2 h^2 d}{48}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Выражение (2) можно упростить. Действительно, объем конуса равен $V = \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} h$. Следовательно, выражение для работы можно представить в виде

$$A = \frac{hVd}{4}.$$

Энергия, расходуемая насосом на выкачивание жидкости из конической воронки, численно равна затраченной работе,

т. е.

$$W = \frac{A \cdot 100}{\eta} = \frac{100hVd}{4\eta}.$$

6.2. Очевидно, что истребитель будет двигаться по некоторой кривой, асимптотически приближающейся к прямой, по которой движется самолет-цель. Рассмотрим произвольное положение истребителя I_1 и самолета-цели C_1 (рис. 6.4). В этот момент скорость истребителя, направленная, как всегда, на цель, составляет угол β с направлением движения цели. Скорость сближения истребителя и цели равна

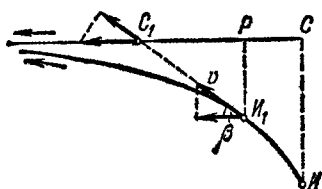


Рис. 6.4.

$v - v \cos \beta = v(1 - \cos \beta)$, так как по прямой I_1C_1 направлена скорость v истребителя и составляющая скорости цели, равная $v \cos \beta$.

Точка P — проекция истребителя на направление движения цели — перемещается со скоростью $v \cos \beta$; следовательно, расстояние между точкой

P и целью увеличивается, так как скорость цели v , а относительная скорость истребителя и цели $v(1 - \cos \beta)$. Так как расстояние I_1C_1 убывает со скоростью $v(1 - \cos \beta)$, а расстояние PC_1 возрастает с той же скоростью, то их сумма должна оставаться постоянной, т. е. равной 2 км, как в первоначальный момент. Расстояние будет наименьшим тогда, когда траектория истребителя практически совпадет с траекторией самолета-цели, т. е. точка I_1 совпадет с точкой P ; тогда $I_1C_1 + PC_1 = 2I_1C_1 = 2 \text{ км}$. Отсюда $(I_1C_1)_{\min} = 1 \text{ км}$.

6.3. Пусть в начальный момент лодка и катер находились в точках L_1 и K_1 , а в момент наибольшего сближения — в точках L_2 и K_2 (рис. 6.5), т. е. лодка плыла по прямой L_1K_2 . В конечный момент компоненты скоростей лодки и катера вдоль L_2K_2 должны быть равны

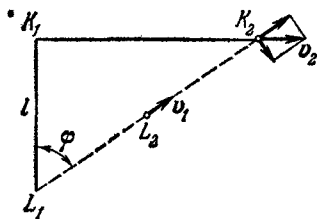


Рис. 6.5.

$$v_1 = v_2 \sin \varphi = v_1 k \sin \varphi, \text{ т. е. } \sin \varphi = \frac{1}{k}.$$

Так как лодка и катер шли одинаковое время, то

$$\frac{L_1 L_2}{K_1 K_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{k} = \sin \varphi.$$

Очевидно, что $K_1 K_2 = l \operatorname{tg} \varphi$, а $L_1 K_2 = \frac{l}{\cos \varphi}$; отсюда искомое наименьшее расстояние равно

$$\begin{aligned} L_2 K_2 &= L_1 K_2 - L_1 L_2 = \frac{l}{\cos \varphi} - l \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi = \\ &= \frac{l}{\cos \varphi} (1 - \sin^2 \varphi) = l \cos \varphi = l \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{l \sqrt{k^2 - 1}}{k}. \end{aligned}$$

6.4. Рассмотрим движение снаряда, если выстрел произведен под произвольным углом α к горизонту. Введем систему координат, начало которой помещено в точку нахождения орудия, и будем откладывать по оси абсцисс дальность полета снаряда по горизонтали, а по оси ординат — его высоту подъема. Разложим скорость снаряда на вертикальную и горизонтальную составляющие v_x и v_y :

$$v_x = v \cos \alpha; \quad v_y = v \sin \alpha.$$

Наибольшая высота подъема

$$h_{\max} = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Очевидно, что h_{\max} достигает максимального значения H при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При этом $H = \frac{v^2}{2g}$ (выстрел производится вертикально вверх).

Время полета равно

$$t_{\pi} = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v \sin \alpha}{g}.$$

Следовательно, дальность выстрела

$$l = v_x t_{\pi} = \frac{v \cos \alpha \cdot 2v \sin \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Как видно из формулы, дальность наибольшая при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; при этом $l_{\max} = \frac{v^2}{g}$.

Для простоты предположим, что траектории снарядов лежат в одной плоскости. Мы получим три точки, лежащие

на границе искомой области (рис.6.6): наивысшую точку A с координатами $x=0, y=\frac{v^2}{2g}$ и наиболее удаленные от орудия точки по горизонтали B и C с координатами $x=-\frac{v^2}{g}, y=0$ и $x=\frac{v^2}{g}, y=0$ соответственно.

Траектория снаряда — парабола. Действительно, координата снаряда по оси y в любой момент времени t находится из уравнения

$$y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

а его координата по оси x — из уравнения

$$x = v \cos \alpha \cdot t.$$

Исключим из обоих уравнений время; тогда получим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha}$$

— это уравнение параболы. Для нахождения искомой области необходимо найти огибающую всех парабол, получающихся при стрельбе под

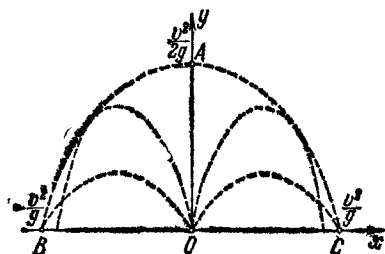


Рис. 6.6.

углами от нуля до π . Ввиду очевидной симметрии области, простреливаемой из орудия, относительно оси y , найдем огибающую лишь для парабол, полученных при стрельбе в интервале углов от нуля до $\frac{\pi}{2}$. Для

этого вычислим скорость u , которую должен иметь сна-

ряд, чтобы при выстреле из точки A в горизонтальном направлении он попал бы в точку C , и определим его траекторию. Так как у снаряда в первый момент скорость в вертикальном направлении равна нулю, то время полета вычислим по формуле $H = \frac{gt^2}{2}$. Отсюда

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2v^2}{2g \cdot g}} = \frac{v}{g}.$$

Следовательно,

$$l_{\text{макс}} = ut \quad \text{или} \quad \frac{v^2}{g} = u \frac{v}{g} \quad \text{и} \quad u = v.$$

Уравнения для координат снаряда будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x &= vt, \\ y &= H - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} x &= vt, \\ y &= \frac{v^2}{2g} - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

Исключая t , получим

$$y = \frac{v^2}{2g} - x^2 \frac{g}{2v^2}.$$

Таким образом, траектория снаряда представляет собой параболу с вершиной в точке A , пересекающую ось x в точке C . Докажем, что эта параболы и есть искомая огибающая.

Можно показать, что траектория любого снаряда, вылетевшего из начала координат, ни при каком α не пересечет данную параболу, а лишь коснется ее в одной точке. Пусть в некоторой фиксированной точке $x_0 \leq \frac{v^2}{g}$ координата снаряда равна

$$y_1 = x_0 \operatorname{tg} \alpha - x_0^2 \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha},$$

а координата предполагаемой огибающей кривой

$$y_2 = \frac{v^2}{2g} - x_0^2 \frac{g}{2v^2}.$$

Рассмотрим разность $y_2 - y_1$:

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{v}{\sqrt{2g}} - x_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{v} \sqrt{\frac{g}{2}} \right)^2 \geq 0,$$

т. е. при любом x_0 найденная нами параболы лежит выше траектории снаряда и лишь в точке $x = \frac{v^2}{g \operatorname{tg} \alpha}$ ($\alpha \neq 0$) они касаются друг друга, что и требовалось доказать.

Для траекторий снарядов, летящих под углами α от $\frac{\pi}{2}$ до π , огибающей будет левая ветвь параболы $y = \frac{v^2}{2g} - x^2 \frac{g}{2v^2}$ (см. рис. 6.6).

В общем случае область, которая простреливается из орудия (зона попадания), будет иметь форму тела,

получаемого вращением параболы $y = \frac{v^2}{2g} - x^2 \frac{g}{2v^2}$ вокруг оси y (параболоид вращения).

6.5. Рассмотрим произвольную окружность с центром в точке O и прямую l , которая касается ее в точке P (рис.

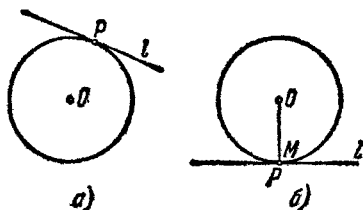


Рис. 6.7.

6.7, а). Повернем окружность и касательную вокруг точки O так, чтобы прямая l стала горизонтальной, и, кроме того, поместим окружность в вертикальной плоскости. При этом точка P станет самой нижней точкой окружности. Теперь возьмем материальную точку M , подвешенную на нити,

длина которой равна радиусу окружности, и поместим другой конец нити в точку O . Точка M будет стремиться занять положение, которому соответствует минимум потенциальной энергии. Если на нее действует только сила тяжести и реакция нити, то она займет наинизшее из всех возможных положений, такое, при котором прямая OM станет вертикальной. При этом точка M совпадет с точкой P (поскольку M находится на окружности и в ее нижней точке). Так как радиус OM вертикален, а касательная l горизонтальна, то прямая l перпендикулярна к OM .

6.6. Докажем это утверждение методом от противного с помощью механической модели. Пусть существует некоторая точка O внутри многоугольника, такая, что все перпендикуляры, опущенные из нее на стороны многоугольника, попадают на их продолжения. Теперь предположим, что рассматриваемый многоугольник — это пластинка с центром тяжести в точке O (рис. 6.8). Если пластинку поставить на боковую грань (на сторону многоугольника), то она начнет катиться по горизонтальной поверхности, причем неограниченно долго, так как у пластинки не будет положения устойчивого равновесия.

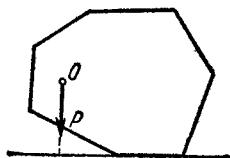


Рис. 6.8.

Действительно, если поверхность, на которой находится пластинка, горизонтальна, то на какую бы грань (сторону многоугольника) пластинка ни опиралась, вертикаль, про-

веденная из центра тяжести, будет проходить вне площади опоры, так как вертикаль перпендикулярна к горизонтальному основанию. Таким образом, на пластинку постоянно будет действовать вращательный момент и она будет вечно катиться; при этом будет совершаться работа. Так как вечный двигатель невозможен, то, следовательно, наше предположение неверно. Первоначальное утверждение доказано. Эту задачу нетрудно обобщить и для произвольного многогранника.

6.7. Для того чтобы стержень находился в равновесии, его надо закрепить в центре тяжести. Для нахождения центра тяжести стержня с грузами введем числовую ось x , направление которой совпадает с направлением от A к B , а начало находится в точке A . Тогда координаты грузов P_1, P_2, \dots, P_n будут x_1, x_2, \dots, x_n . Координата центра тяжести стержня с грузами находится по общей формуле

$$x_{ц. т} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k P_k}{\sum_{k=1}^n P_k} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3} \text{ м.}$$

6.8. Поместим в каждую вершину четырехугольника одинаковые грузы (рис. 6.9) весом P . Центр тяжести грузов A и B находится в точке a (в середине отрезка AB). Центр тяжести грузов C и D находится на середине отрезка CD в точке c . Центр тяжести всей системы находится на середине отрезка ac .

Теперь найдем тот же центр тяжести, рассуждая иначе. Центр тяжести грузов A и D находится на середине отрезка AD в точке d , а центр тяжести грузов B и C — на середине отрезка BC в точке b . Центр тяжести всей системы, следовательно, находится на середине отрезка bd . Так как положение центра тяжести не может меняться в зависимости от метода его нахождения, то середины отрезков ac и bd совпадают, что и требовалось доказать.

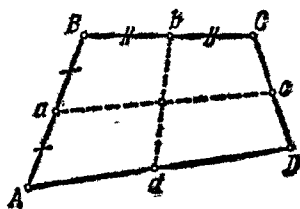


Рис. 6.9.

6.9. Предварительно выясним условия равновесия материальной точки, находящейся на кривой, в том случае, если на нее действует некоторая сила. Рассмотрим бусинку M (материальная точка) на жесткой проволоке, имеющей форму кривой l , по которой бусинка может скользить без трения (рис. 6.10, а). Пусть на бусинку действует сила F , направление которой указано на рисунке. В точке A эту силу можно разложить на две составляющие: F_n , действующую по нормали к кривой (эта сила не может вызвать перемещение бусинки), и на F_t , направленную по касательной к l , под действием которой M движется по кривой.

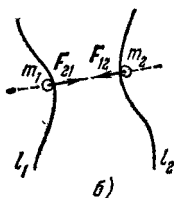
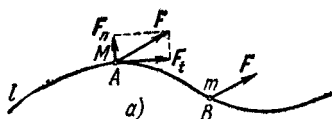


Рис. 6.10.

Очевидно, что бусинка будет находиться в равновесии, если $F_t = 0$, что возможно лишь тогда, когда F действует по нормали к кривой.

Теперь проведем требуемое доказательство. Пусть даны две гладкие кривые l_1 и l_2 (рис. 6.10, б). Поместим на каждую из них по шарик — бусинке — массами m_1 и m_2 , которые притягиваются по закону Ньютона и скользят по кривым без трения. Никакие внешние силы на шарики не

действуют. Шарики будут стремиться к такому положению, при котором потенциальная энергия их взаимодействия минимальна, и в конце концов придут в положение равновесия. При этом расстояние r между ними, а следовательно, и между кривыми, будет наименьшим. Действительно, потенциальная энергия взаимодействия, равная $U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$, будет мини-

мальна при наименьшем возможном r . Но в положении равновесия, как мы уже выяснили, на тело действуют лишь силы, направленные по нормали к кривой, на которой оно находится. Следовательно, прямая, соединяющая шарики, является кратчайшей линией между кривыми, а так как силы взаимодействия шариков направлены по этой прямой, она нормальна к обеим кривым.

6.10. Пусть треугольник лежит в вертикальной плоскости. Поместим в его вершинах блоки и перекинем через них нити, связанные в одной точке O . К концам нитей подве-

шены грузы A' , B' и C' одинакового веса P (рис. 6.11). Система грузов придет в положение равновесия, чему соответствует максимальная сумма расстояний $AA' + BB' + CC'$. Действительно, каждый груз расположится таким образом, чтобы сумма потенциальных энергий всех грузов была наименьшей (условие равновесия системы), что достигается при наибольшей сумме $AA' \cdot P + BB' \cdot P + CC' \cdot P$. Следовательно, сумма остатков длин нитей, равная $OA + OB + OC$, будет минимальной, т. е. точка O расположится в искомой точке треугольника.

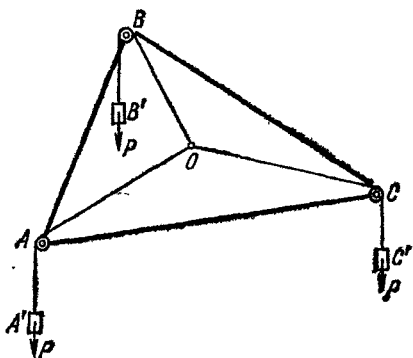


Рис. 6.11.

6.11. Пусть время, необходимое на путь до стадиона ученику школы A , равно t_1 , ученику школы B — t_2 , и ученику школы C — t_3 . Общее время, затрачиваемое всеми учениками на путь от своих школ до стадиона и равное $n_1 t_1 + n_2 t_2 + n_3 t_3$, должно быть наименьшим. Если пути от школ A , B и C до стадиона равны L_1 , L_2 , L_3 соответственно, то условие задачи можно переписать в виде

$$n_1 \frac{L_1}{v} + n_2 \frac{L_2}{v} + n_3 \frac{L_3}{v} = \min$$

или

$$n_1 L_1 + n_2 L_2 + n_3 L_3 = \min. \quad (1)$$

Нам надо найти способ определения L_1 , L_2 и L_3 , удовлетворяющих условию (1), так как, зная расстояния, мы найдем место для стадиона.

Рассмотрим треугольник $A_1 B_1 C_1$ (рис. 6.12), подобный треугольнику ABC , в вершинах которого расположены школы. Так как в подобных треугольниках все соответствующие расстояния пропорциональны (с некоторым коэффициентом пропорциональности k), то в $\triangle A_1 B_1 C_1$ надо найти точку O' такую, чтобы

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3 = \min,$$

где s_1 , s_2 и s_3 — расстояния от точки O' до вершин A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Тогда искомые расстояния L_1 , L_2 и L_3

будут равны

$$L_1 = ks_1; \quad L_2 = ks_2; \quad L_3 = ks_3.$$

Расположим $\triangle A_1 B_1 C_1$ в вертикальной плоскости и в его

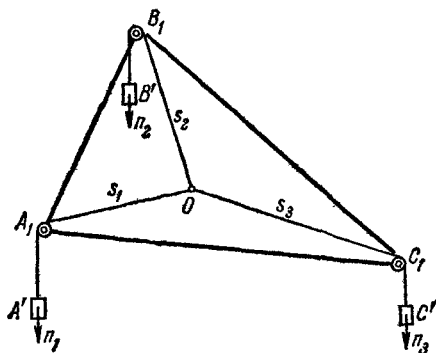


Рис. 6.12.

вершинах поместим блоки, через которые перекинута нить, связанные в одной точке O . К концам нитей, перекинутых через блоки A_1 , B_1 и C_1 , подвесим грузы A' , B' и C' , вес которых численно равен n_1 , n_2 и n_3 соответственно (см. рис. 6.12). Система грузов придет в равновесие, при этом ее потенциальная энергия в поле тяжести Земли будет минимальной.

Этому соответствует (см. предыдущую задачу) такое положение точки O , при котором

$$A_1 A' n_1 + B_1 B' n_2 + C_1 C' n_3 = \max. \quad (1)$$

Пусть длина первой нити l_1 , второй l_2 и третьей l_3 ; тогда

$$A_1 A' = l_1 - OA_1 = l_1 - s_1;$$

$$B_1 B' = l_2 - OB_1 = l_2 - s_2;$$

$$C_1 C' = l_3 - OC_1 = l_3 - s_3.$$

Подставив эти соотношения в выражение (1) и сгруппировав члены, получим

$$(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3) - (s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3) = \max.$$

Выражение в первой скобке постоянно по величине. Чтобы разность была наибольшей, выражение во второй скобке должно быть минимальным:

$$s_1 n_1 + s_2 n_2 + s_3 n_3 = \min.$$

Таким образом, точка O при равновесии системы даст положение искомой точки O' . Измерив s_1 , s_2 и s_3 и увеличив их в k раз, мы получим расстояния L_1 , L_2 и L_3 от школ до стадиона, при которых $L_1 n_1 + L_2 n_2 + L_3 n_3 = \min$, и, следовательно, место, где надо построить стадион.

6.12. Введем систему координат так, чтобы ось x была направлена по движению обруча, и поместим начало координат на поверхность. Пусть произвольная точка A обруча имеет координату y . Полная скорость этой точки v , являющаяся суммой скорости v_0 поступательного движения всего обруча и линейной скорости v_x вращения точки A вокруг центра обруча C , составляет угол α с осью x (рис. 6.13). Угол между радиусом AC и радиусом, проведенным в точку касания обруча и поверхности, равен β . Из рисунка видно, что $\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \beta)$, так как линейная скорость точек обруча равна поступательной скорости всего обруча ($v_x = v_0$). Отсюда ясно, что $\cos \alpha = \sin \frac{\beta}{2}$. Так как $y = R(1 - \cos \beta)$ или

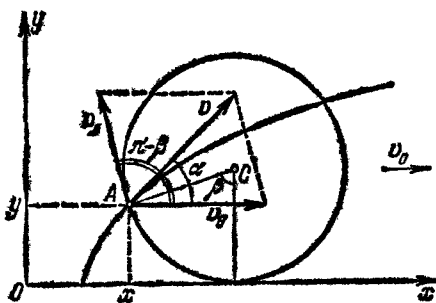


Рис. 6.13.

как $y = R(1 - \cos \beta)$ или

$$y = 2R \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

то $\cos \alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}$ или

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\frac{y}{2R}}} = \frac{1}{\sqrt{2R}} = \text{const.} \quad (1)$$

Соотношение (1) справедливо для любой точки траектории. Кривые, удовлетворяющие такому условию, называются *циклоидами*.

Разложим полную скорость точки A на вертикальную и горизонтальную составляющие v_y и v_x (рис. 6.14). Очевидно, что $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$. Подставляя это выражение в формулу (1), получим

$$\frac{v_x}{v \sqrt{\frac{y}{2R}}} = \frac{1}{\sqrt{2R}} \quad \text{или} \quad \frac{v}{v_x} = \sqrt{\frac{2R}{y}}.$$

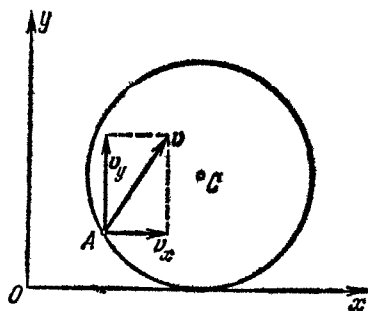


Рис. 6.14.

Так как в выбранной системе координат y представляет собой высоту h точки над поверхностью, то эта формула выражает искомую зависимость отношения полной скорости точки A к ее горизонтальной составляющей:

$$\frac{v}{v_x} = \sqrt{\frac{2R}{h}}.$$

6.13. Пусть человек пересекает границу раздела леса и болота в точке x (рис. 6.15). Направление отрезков Ax и xB определяется углами α и β между этими отрезками и перпендикуляром, проведенным к границе раздела через точку x . Необходимо найти условия, накладываемые на эти углы, чтобы время движения человека от A к B было минимальным, т. е.

$$t = \frac{Ax}{u} + \frac{xB}{v} = \min. \quad (1)$$

Для решения этой задачи удобно воспользоваться механической моделью (рис. 6.16): по гладкому стержню скользит кольцо, к нему привязаны две нити, перекинутые через блоки, находящиеся в точках A (ниже стержня) и B (выше стержня); к концам нитей (в точках N

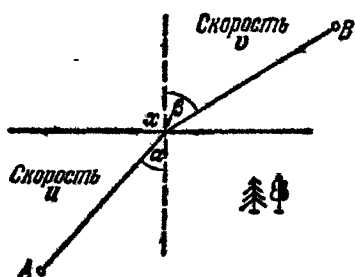


Рис. 6.15.

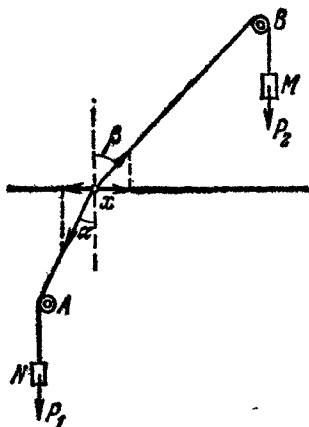


Рис. 6.16.

и M) подвешены грузы P_1 и P_2 . Когда система придет в равновесие, сумма $AN \cdot P_1 + BM \cdot P_2$ будет максимальной и, следовательно, сумма $Ax \cdot P_1 + Bx \cdot P_2$ — минимальной (см. задачи 6.10, 6.11). Это соотношение верно при любых грузах P_1 и P_2 .

Взяв груз P_1 численно равным $\frac{1}{u}$, а груз P_2 равным $\frac{1}{v}$, мы получим

$$\frac{Ax}{u} + \frac{Bx}{v} = \min.$$

Это выражение совпадает с условием (1). Следовательно, с помощью этой модели можно найти условия, накладываемые на углы α и β . На кольцо действуют две силы, $\frac{1}{u}$ и $\frac{1}{v}$; так как кольцо находится в равновесии (не перемещается по стержню), то сумма сил, действующих вдоль стержня, равна нулю:

$$\frac{1}{u} \sin \alpha = \frac{1}{v} \sin \beta,$$

откуда получаем, что углы α и β связаны соотношением

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u}{v}.$$

6.14. Введем систему координат, как показано на рис. 6.17. Пусть желоб имеет форму кривой AB . Проведем n горизонтальных прямых, которые разобьют кривую AB на такие участки AA_1 , A_1A_2 , ..., $A_{n-1}A_n$, что скорость шарика на каждом из них можно приближенно считать постоянной, а сами участки — отрезками прямых (n достаточно велико). Для того чтобы полное время скатывания шарика было минимальным, необходимо, чтобы время движения на участках AA_2 , A_1A_3 , ..., $A_{n-2}A_n$ было наименьшим. В соответствии с результатом предыдущей задачи, при этом должно выполняться условие

$$\frac{\sin \beta_0}{v_0} = \frac{\sin \beta_1}{v_1}; \quad \frac{\sin \beta_1}{v_1} = \frac{\sin \beta_2}{v_2}; \quad \dots; \quad \frac{\sin \beta_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\sin \beta_n}{v_n}$$

или

$$\frac{\sin \beta_0}{v_0} = \frac{\sin \beta_1}{v_1} = \dots = \frac{\sin \beta_n}{v_n} = \text{const}, \quad (1)$$

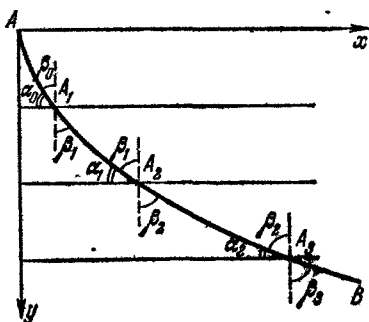


Рис. 6.17.

где v_0 —средняя скорость на участке AA_1 , v_1 —средняя скорость на участке A_1A_2 , ..., v_n —средняя скорость на участке $A_{n-1}A_n$, а $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ —углы, образованные соответствующими отрезками с вертикалью. Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$; при этом ломаная $AA_1A_2\dots A_n$ перейдет в кривую AB , средние скорости v_0, v_1, \dots, v_n приобретут смысл скоростей в точках A, A_1, A_2, \dots, A_n , а углы $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ станут углами между касательными к кривой в этих точках и вертикалью. Так как соотношение (1) останется в силе, то для любой точки искомой кривой получим

$$\frac{\sin \beta}{v} = \text{const.} \quad (2)$$

Переходя к углу α между касательной и горизонталью и учитывая, что $v = \sqrt{2gy}$, из соотношения (2) получим

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{y}} = \text{const},$$

т. е. уравнение циклоиды (см. задачу 6.12). Таким образом для того, чтобы время скатывания шарика из точки A в точку B было наименьшим, желоб должен иметь форму циклоиды.

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Для определения положения точки в пространстве, на плоскости или на прямой, необходимо ввести *систему координат*. Числа, с помощью которых определяют положение точки, называют ее *координатами*.

Чтобы задать положение точки на прямой, надо на этой прямой выбрать начало отсчета (некоторую точку O), единицу масштаба и направление, которое будет считаться положительным. Такую прямую называют *числовой осью*. Координатой точки, находящейся на числовой оси, называют расстояние точки от начала отсчета, выраженное в выбранных единицах масштаба и взятое со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении, и со знаком минус в противном случае.

Для определения координат точки на плоскости проведем две взаимно перпендикулярные числовые оси, одну из них обычно называют осью x (или *осью абсцисс*), а другую — осью y (или *осью ординат*). Точку их пересечения (точку O) называют *началом координат*. Эта система координат носит название *прямоугольной*, или *декартовой*. Найдём координаты произвольной точки M в этой системе (рис. 1). Пусть проекция точки M на ось x есть точка M_1 , а на ось y — точка M_2 . Точка M_1 имеет координату x , а точка M_2 — координату y , эти числа (x и y) и называют *прямоугольными*, или *декартовыми*, *координатами точки* на плоскости.

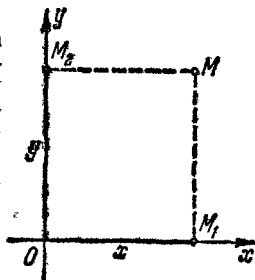


Рис. 1.

Кроме декартовой системы координат, часто используют *полярные координаты*. Полярные координаты точки определяются следующим образом: на плоскости выбирают числовую ось, которую называют *полярной*, с началом отсчета, называемым *полюсом*.

Полярными координатами точки M (рис. 2) служат расстояние ρ (*полярный радиус*) от точки M до полюса O и угол φ (*полярный угол*) между отрезком OM и полярной осью, отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси.

Между декартовыми и полярными координатами точки легко установить связь. Из рис. 3 видно, что

$$x_M = \rho \cos \varphi; \quad y_M = \rho \sin \varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_M}{x_M}.$$

Для описания положения точки в пространстве используют прямоугольную, или декартову, систему координат, представляющую собой три взаимно перпендикулярные числовые оси, пересекающиеся в одной точке (начало координат): ось x (ось абсцисс), ось y (ось ординат) и ось z (ось аппликат). Координаты произвольной точки M находятся так же, как и на плоскости, т. е. координатой x точки M (ее абсциссой) служит координата проекции этой точки на ось x , и т. д.

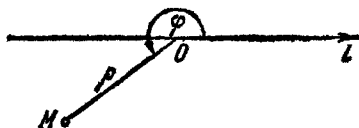


Рис. 2.

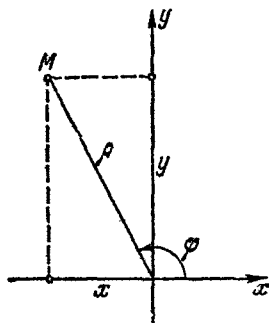


Рис. 3

Если у точки изменяется с течением времени хотя бы одна координата, то говорят, что точка движется. В том случае, когда изменяется только одна координата, движение называют *одномерным*; если меняются две координаты, движение называют *двумерным*; и, наконец, если с течением времени меняются все три координаты, то движение называют *трехмерным*. Мерность движения может быть различной в разных системах координат. Например, рассмотрим движение точки по окружности радиусом R . В декартовых координатах у точки меняются и ее абсцисса, и ордината, т. е. движение двумерно. В полярной системе координат, в которой полюс совмещен с центром окружности, полярный радиус, равный R , не меняется, а меняется лишь полярный угол φ ; т. е. движение одномерно. Вообще при решении задач выбирают ту систему координат, в которой решение задачи или описание процесса наиболее просто.

ВЕКТОРЫ И СКАЛЯРЫ

Все физические величины делятся на две группы — на векторы и скаляры.

Скаляром называют величину, характеризующуюся одним действительным числом. Например, масса, энергия, плотность и т. д. —

скаляры. **Вектором** называют величину, характеризующуюся действительным числом (положительным) и направлением в пространстве. В качестве примеров векторных величин можно привести силу, скорость, напряженность электрического поля и т. д. Числовое значение вектора называют его *длиной*, или *модулем**).

Векторы, имеющие одинаковые направления, называют *параллельными* (рис. 4: $a \uparrow b$),

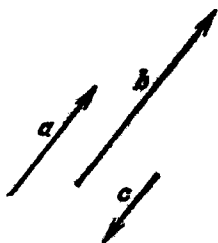


Рис. 4.

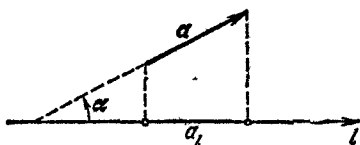


Рис. 5.

а векторы, имеющие противоположные направления, — *антипараллельными* (рис. 4: $b \nmid c$). Векторы называют равными, если они параллельны и имеют одинаковые модули. Из этого определения следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, так как при этом не меняются ни направление, ни модуль вектора.

Проекция вектора на ось. Если в пространстве или на плоскости задана некоторая ось l , то проекцией произвольного вектора a на эту ось называют число $a_l = |a| \cos \alpha$, где α — угол между вектором a и осью l . Знак проекции определяется знаком $\cos \alpha$. При этом α отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления ося. На рис. 5 показана проекция a_l вектора a на ось l в плоском случае.

Радиус-вектор. В физике часто используют понятие радиуса-вектора — вектора, начало которого совпадает с началом некоторой системы координат (рис. 6). Каждой точке на плоскости или в пространстве соответствует единственный радиус-вектор, проведенный в данную точку, и наоборот, каждому радиусу-вектору соответствует лишь одна точка, с которой совпадает его конец. Проекции радиуса-вектора некоторой точки A на координатные оси служат одновременно координатами этой точки. Таким образом, мы можем определять

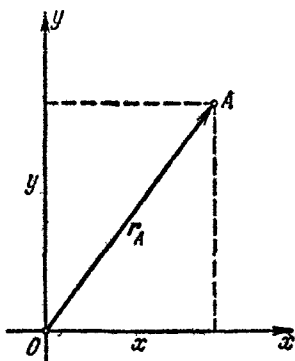


Рис. 6.

*) Вектор обозначают или одной жирной буквой или двумя буквами со стрелкой, а их модули — теми же буквами, но обычного шрифта или же знаком модуля, например, векторы \vec{AB} , \vec{a} , а их модули AB , a или $|\vec{AB}|$, $|a|$.

положение точки, задавая ее радиус-вектор, и описывать движение точки как изменение ее радиуса-вектора со временем.

Действия над векторами. 1) *Сложение и вычитание.* Рассмотрим физический пример. Тело движется из точки A по некоторой кривой (рис. 7) и попадает в точку

B . Вектор \vec{AB} называется перемещением тела из точки A в точку B . Двигаясь дальше, тело попало в

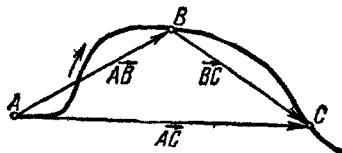


Рис. 7.

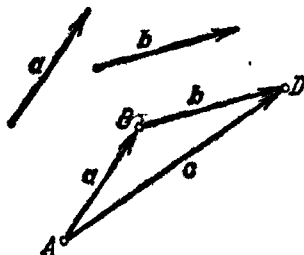


Рис. 8.

точку C . Перемещение из точки B в точку C есть вектор \vec{BC} . Результирующее перемещение из точки A в точку C представляет собой вектор \vec{AC} , т. е. \vec{AC} есть сумма \vec{AB} и \vec{BC} .

Аналогичным образом складываются векторы любой другой физической природы

Суммой двух векторов a и b (рис. 8) называют вектор c , полученный следующим образом: к концу вектора a (точка B на рис. 8) прикладывают начало вектора b и соединяют начало вектора a (точка A) с концом вектора b (точка D). Вектор $\vec{AD} = c$ и будет искомой суммой векторов a и b .

Вектор c называют еще *результатирующим* вектором, а векторы a и b — *составляющими*. Правило сложения двух векторов распространяется на сложение любого числа векторов: к концу первого вектора прикладывают начало второго, к концу второго —

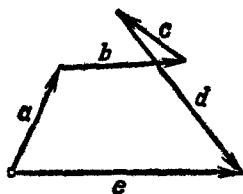


Рис. 9.

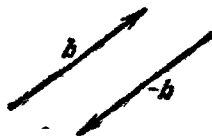


Рис. 10.

начало третьего и т. д. и соединяют начало первого вектора с концом последнего. Например, $a + b + c + d = e$ (рис. 9).

Вычитание двух векторов, например, вектора b из вектора a , удобнее всего определить как сложение вектора a с вектором $-b$. Под вектором $-b$ понимают вектор, по модулю равный b , но противоположный ему по направлению (рис. 10). Следовательно, $a - b = a + (-b)$ (рис. 11).

Вычитание — не единственное действие, обратное сложению. Обратным сложению является также действие разложения вектора на составляющие, заключающееся в том, что данный вектор заменяют равной ему суммой нескольких векторов. Примером служит разложение силы тяжести тела, находящегося на наклонной плоскости, на силу нормального давления и скатывающую силу (рис. 12).

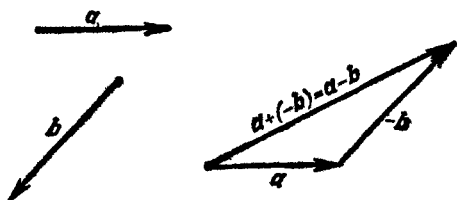


Рис. 11.

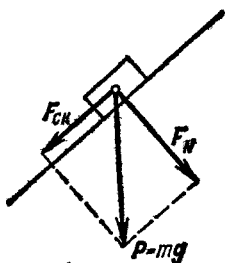


Рис. 12.

Часто бывает необходимо разложить вектор на составляющие, направленные по осям координат. В этом случае $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$, где \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y и \mathbf{a}_z — составляющие вектора \mathbf{a} , направленные по соответствующим осям. Их модули равны модулям проекций вектора \mathbf{a} на те же самые оси:

$$|\mathbf{a}_x| = |\mathbf{a}_x|; \quad |\mathbf{a}_y| = |\mathbf{a}_y|; \quad |\mathbf{a}_z| = |\mathbf{a}_z|$$

(напомним: $\mathbf{a}_x = |\mathbf{a}| \cos(\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{Ox}})$). Очевидно (рис. 13), что

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|\mathbf{a}_x|^2 + |\mathbf{a}_y|^2 + |\mathbf{a}_z|^2}.$$

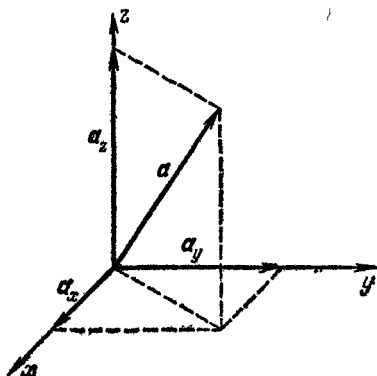


Рис. 13.

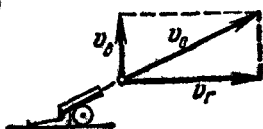


Рис. 14.

В качестве примера приведено разложение вектора скорости \mathbf{v}_0 тела, брошенного под углом к горизонту, на горизонтальную и вертикальную составляющие (рис. 14).

Отметим два важных свойства суммы векторов:

1. Проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

2. Составляющая суммы векторов, направленная вдоль данной оси, равна сумме составляющих складываемых векторов, направленных вдоль этой же оси.

Эти утверждения очевидны из рис. 15.

2) *Умножение.* Умножение вектора на скаляр. Произведением вектора a на скаляр k называют вектор c , модуль которого равен $|c| = |k||a|$. Вектор c параллелен вектору a , если $k > 0$, и антипараллелен, если $k < 0$ (рис. 16).

Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением вектора a на вектор b называют произведение модулей этих векторов, умноженное на косинус угла между ними, т. е.

$$(ab) = |a| \cdot |b| \cos(\widehat{a, b}).$$

Как видно из определения, результатом скалярного произведения двух векторов является число (скаляр). Знак скалярного

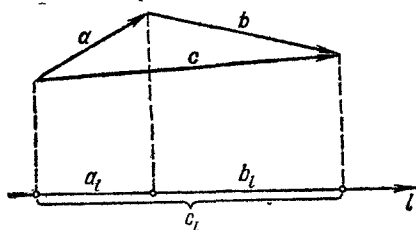


Рис. 15.

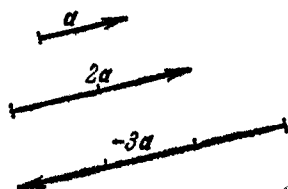


Рис. 16.

произведения определяется знаком косинуса угла между векторами. Примерами использования скалярного произведения служат формулы для работы и мощности:

$$A = Fs \cos \varphi = (Fs),$$

где под s понимают вектор перемещения, и

$$N = Fv \cos \alpha = (Fv).$$

СИМВОЛИКА (МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ)

Символ Σ (сигма). Если имеется ряд слагаемых, обозначенных одной и той же буквой, например a , но каким-то образом пронумерованных для отличия друг от друга: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, то сумму таких слагаемых обозначают символом $\sum_{i=1}^n a_i$; при этом a_i называют общим членом суммы, а надписи выше и ниже знака суммирования означают, что значок i (скользящий индекс) пробегает все значения от 1 до n .

Например, с помощью знака Σ формулу бинома Ньютона можно записать так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} b^i.$$

Первый член суммы получится при $i=0$, второй—при $i=1$ и т. д., последний—при $i=n$; общий член $C_n^i a^{n-i} b^i$.

Если число членов в сумме неограничено, то сверху знака \sum ставится значок ∞ («бесконечность»). Например, сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n \dots$

можно записать: $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i$.

Отметим некоторые свойства символа \sum :

$$1) \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i;$$

$$2) \sum_{i=1}^n k b_i = k \sum_{i=1}^n b_i, \text{ если } k \text{ — постоянное число;}$$

$$3) \sum_{i=1}^n a_i = n a \text{ при } a_1 = a_2 = \dots = a_i = \dots = a_n.$$

Символ Δ (дельта). Символом Δ обозначают приращение какой-либо величины. Например, температура тела была t_1° , затем его стали нагревать и его температура повысилась до t_2° ; приращение температуры $t_2^\circ - t_1^\circ$ обозначают Δt° , т. е. $\Delta t^\circ = t_2^\circ - t_1^\circ$. Приращение может быть и отрицательным, например при охлаждении $\Delta t^\circ = t_2^\circ - t_1^\circ < 0$.

Символ Δ применяют и к векторным величинам. Например, скорость тела была \mathbf{v}_1 , а через некоторое время стала \mathbf{v}_2 ; приращение скорости $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — тоже вектор (рис. 17). В качестве примера предлагаем читателям доказать, что в общем случае $\Delta |\mathbf{a}| \neq |\Delta \mathbf{a}|$.

Очевидно, что $\Delta(x \pm y) = \Delta x \pm \Delta y$ и $\Delta(kx) = k\Delta x$, где k — постоянное число.

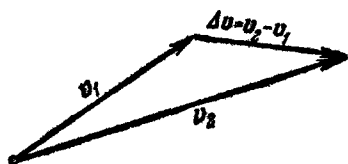


Рис. 17.

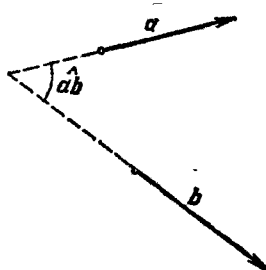


Рис. 18.

Найдем приращение величины x^2 :

$$\Delta x^2 = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Если величина $|\Delta x| \ll 1$ и, кроме того, $|\Delta x| \ll |x|$, то величиной $(\Delta x)^2$ можно пренебречь по сравнению с $2x \Delta x$ и в этом случае $\Delta x^2 \approx 2x \Delta x$.

Символ \hat{ab} означает угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} (рис. 18).

ФУНКЦИИ

Законы физики устанавливают зависимость одних физических величин от других. При этом некоторые из законов имеют качественный характер, большинство же устанавливает количественную зависимость (примером, иллюстрирующим это утверждение, может служить первый и второй законы Ньютона). Одни из этих величин считаются независимыми (*аргумент*), а другие — зависимыми (*функция*), при этом зависимая переменная может быть функцией как одного аргумента, так и нескольких. Математическое определение функции можно дать следующим образом:

Переменная величина y называется функцией переменной величины x (запись: $y = f(x)$), если указана область возможных значений x и каждому допустимому значению x по какому-либо закону поставлено в соответствие одно или несколько значений y . В первом случае функция называется однозначной, во втором — многозначной. Область возможных значений аргумента называется областью определения функции.

Закон соответствия можно устанавливать различными способами, но чаще это делают с помощью формул или графиков. Если функция задана при помощи формулы, то ее естественной областью определения является совокупность всех значений аргумента, для которых выполнимы действия, указанные формулой. Так, для функции $y = 2x$ областью определения служит вся числовая ось ($-\infty < x < +\infty$), а для функции $y = \frac{5}{t}$ — вся числовая ось за исключением точки $t = 0$ ($-\infty < t < 0, 0 < t < +\infty$).

В физических примерах область определения часто задается еще условием и смыслом задачи. Например, при растяжении тонкого и длинного резинового шнура сила натяжения F представляет собой функцию его длины l :

$$F = k(l - l_0).$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности ($k = \text{const} > 0$), l_0 — длина шнура в нерастянутом состоянии.

С математической точки зрения областью определения функции F может быть вся числовая ось, т. е. $-\infty < l < +\infty$. Между тем ясно, что при длине $l < l_0$ приведенная выше формула лишена смысла, поэтому $l \geq l_0$. Кроме того, существует предельная длина $l_{\text{пр}}$, при которой шнур обрывается. Следовательно, областью определения функции F является $l_0 \leq l < l_{\text{пр}}$.

Последовательности. *Последовательностью называют функцию натурального аргумента $y = f(n)$, т. е. в случае последовательности каждому натуральному числу (1, 2, ..., n , ...) поставлено в соответствие какое-либо действительное число. Члены последовательности обозначают буквами с индексами внизу, показывающими, какому натуральному числу данный член соответствует. Например, $f(5) = u_5$. Иногда последовательности обозначают символом $\{u_n\}$.*

Если число членов последовательности конечно, то последовательность называют *конечной*; если число членов неограничено, то последовательность называют *бесконечной*. Задают последовательности, либо задавая общий член ее в зависимости от n или

выражая k -й член через члены с меньшим номером. Например, $u_n = \frac{1}{n}; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{k}; \dots$ или $u_n = u_{n-1} + d$, что справедливо, если в качестве последовательности рассматривается арифметическая прогрессия.

Рассмотрим суммирование последовательностей. Пусть задана некоторая последовательность $\{x_n\}$: $x_1, x_2; \dots; x_n; \dots$. Частной суммой S_k последовательности называют сумму ее первых k членов

$$S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Сами частные суммы образуют последовательность $\{S_n\}$:

$$S_1 = x_1; S_2 = x_1 + x_2, S_3 = x_1 + x_2 + x_3, \dots$$

Суммированием конечного ряда $\{x_n\}$ называют нахождение общего члена последовательности его частных сумм $\{S_n\}$, т. е. суммы первых n членов последовательности $\{x_n\}$. Вопрос о суммировании бесконечных последовательностей и методы суммирования мы рассмотрим позже.

Пределы функций. Многие физические величины определяют с помощью *предельного перехода**), при этом существование предела следует из физических соображений.

Рассмотрим, например, физические величины, определенные в некоторой области пространства: температуру тела, давление в некотором объеме жидкости или газа, плотность и т. д. В том случае, когда данная величина неодинакова в разных точках пространства (тело нагрето неравномерно и т. п.), вводят понятие значения величины в точке. С этой целью рассматривают малую область пространства, выделенную вокруг данной точки. Если размеры выделенной области достаточно малы, можно считать, что в этой области интересующая нас физическая величина практически не меняется. Ясно, что чем меньше размеры выбранной области, тем точнее это утверждение. Если размеры области приближаются к нулю, то получаем значение данной величины в точке.

Рассмотрим еще некоторые примеры предельных переходов.

1) Закон всемирного тяготения утверждает, что сила, с которой притягиваются два тела, равна $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}$, где m_1 и m_2 — массы тел, а R — расстояние между ними. Из формулы следует, что, неограниченно увеличивая R , можно сделать силу F сколь угодно малой. В этом случае говорят, что предел величины F при R , стремящемся к бесконечности, равен нулю, и записывают: $\lim_{R \rightarrow \infty} F = 0$.

Физически это означает, что при достаточно большом расстоянии между телами их можно считать невзаимодействующими.

2) Если один конец нити закрепить, а к другому приложить силу F , то ее длина l станет функцией приложенной силы: при

*) Фактически все физические величины определяются путем предельного перехода, так как определение физической величины предполагает возможность ее измерения, а любое измерение включает в себе предельный переход.

увеличении силы длина нити будет увеличиваться; однако вследствие ограниченной прочности нити длина ее не может стать больше некоторого предельного значения $l_{\text{пр}}$, так как нить разорвется. Этому значению $l_{\text{пр}}$ соответствует сила $F_{\text{пр}}$. В этом случае говорят, что величина l при значении F , стремящемся к $F_{\text{пр}}$, имеет предел, равный $l_{\text{пр}}$, и записывают:

$$l_{\text{пр}} = \lim_{F \rightarrow F_{\text{пр}}} l(F).$$

3) Рассмотрим закон Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{R^2}.$$

Из формулы следует, что, неограниченно уменьшая расстояние между зарядами, можно получить бесконечно большую силу взаимодействия между ними, т. е. предел F при R , стремящемся к нулю, равен бесконечности:

$$\lim_{R \rightarrow 0} F = \infty.$$

В природе, однако, никогда не встречаются бесконечно большие силы. В действительности расстояние между зарядами ограничено размерами тел, несущих электрические заряды.

4) Вполне реальному процессу — разрыву электрической цепи — соответствует предельный переход в законе Ома для всей цепи:

$$I = \frac{E}{R+r}; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{E}{R+r} = \lim_{R \rightarrow \infty} I = 0,$$

т. е. при неограниченном увеличении сопротивления цепи (в пределе — при разрыве) ток неограниченно уменьшается (в пределе — становится равным нулю).

Во всех приведенных примерах мы рассматривали предельные переходы трех типов:

1. Аргумент стремится к бесконечности, а функция имеет конечный предел (в частности, нуль) — примеры 1 и 4.

2. Аргумент стремится к некоторому фиксированному значению, функция имеет конечный предел (пример 2).

3. Аргумент стремится к некоторому фиксированному значению, а функция стремится к бесконечности (пример 3).

Вообще говоря, типов предельных переходов существует больше, но мы использовали лишь эти три.

Приведем без доказательства некоторые свойства пределов.

Если предел функции $f_1(x)$ при x , стремящемся к x_0 , равен a , а предел функции $f_2(x)$ при x , стремящемся к x_0 , равен b , т. е.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = a$, а $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = b$ (где под x_0 , a и b мы будем понимать любые значения, в том числе и бесконечные), то:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} k f_1(x) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = ka$ (k — постоянное число).
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = a \pm b.$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = ab.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0.$$

Эти свойства справедливы для предельных переходов всех типов.

К последовательности применим предельный переход лишь первого типа, т. е. при n , стремящемся к бесконечности. При этом для каждой последовательности можно рассматривать предел в обычном смысле и предел последовательности ее частных сумм. В последнем случае предельный переход называют суммированием бесконечной последовательности. Например:

1) $u_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, т. е. общий член последовательности стремится к нулю;

2) $a; aq; aq^2; \dots; aq^n; \dots$ ($|q| < 1$) — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q},$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, поскольку $|q| < 1$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} k^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = 0$ при $k > 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^{-n}} = 0$ при $k < 1$).

Приемы суммирования. Нахождение суммы конечной последовательности представляет известную трудность, и решить эту задачу элементарными методами удастся в редких случаях. Рассмотрим некоторые из них.

1) Сумма арифметической и геометрической прогрессий.

а) Если члены последовательности

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots \quad (1)$$

связаны соотношением $a_{k+1} = a_k + d$, где d — постоянное для данной последовательности число и $k = 1, 2, 3, \dots$, то такую последовательность называют *арифметической прогрессией*. Сумма ее n членов

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2}.$$

б) Если члены последовательности (1) связаны соотношением $a_{k+1} = a_k q$, где q — постоянное для данной последовательности число, то такую последовательность называют *геометрической прогрессией*. Сумма ее n членов

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(d и q могут быть как положительными, так и отрицательными).

2) Удастся суммировать еще некоторые последовательности, общий член которых имеет вид $f(x + kh)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ и h —

какое-либо постоянное для данной последовательности число. Для нахождения

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x+kh) \quad (2)$$

необходимо подобрать такую функцию $\varphi(x)$, чтобы

$$f(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

Если это удалось, то остальные члены последовательности можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \varphi(x+2h) - \varphi(x+h), \\ f(x+2h) &= \varphi(x+3h) - \varphi(x+2h), \\ &\dots \dots \dots \\ f(x+kh) &= \varphi(x+(k+1)h) - \varphi(x+kh), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+kh) &= f(x) + f(x+h) + f(x+2h) + \dots + f(x+(n-1)h) = \\ &= \{\varphi(x+h) - \varphi(x)\} + \{\varphi(x+2h) - \varphi(x+h)\} + \\ &+ \{\varphi(x+3h) - \varphi(x+2h)\} + \dots + \{\varphi(x+nh) - \varphi(x+(n-1)h)\} = \\ &= \varphi(x+nh) - \varphi(x). \quad (3) \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление суммы (2) сводится к нахождению функции $\varphi(x)$ (она носит название суммирующей) и вычислениям по формуле (3). Отметим, что готового рецепта подбора суммирующей функции нет.

В качестве примера найдем $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+kh)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+kh) &= \sin x + \sin(x+h) + \sin(x+2h) + \dots + \\ &+ \sin(x+(n-1)h). \end{aligned}$$

Обозначим $\sin x$ через $f(x)$. Тогда

$$\sin(x+h) = f(x+h), \quad \sin(x+2h) = f(x+2h) \text{ и т. д.}$$

Для нахождения суммы необходимо найти такую функцию $\varphi(x)$, чтобы $\sin x = \varphi(x+h) - \varphi(x)$. Из равенства

$$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cos\left(x-\frac{h}{2}\right) = 2 \sin x \sin\left(-\frac{h}{2}\right)$$

выразим $\sin x$:

$$\sin x = \frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{-2 \sin \frac{h}{2}} - \frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{-2 \sin \frac{h}{2}}.$$

Если $\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\frac{h}{2}}$ обозначить через $\varphi(x)$, то $\frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\frac{h}{2}} =$
 $= \varphi(x+h)$ (так как аргументы отличаются на h). Таким образом,
 нам удалось найти вид суммирующей функции:

$$\varphi(x) = \frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\frac{h}{2}}.$$

Искомая сумма есть

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+kh) &= \varphi(x+nh) - \varphi(x) = \\ &= \frac{\cos\left(x - \frac{h}{2} + nh\right)}{-2\sin\frac{h}{2}} - \frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{-2\sin\frac{h}{2}} = \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}h\right) \sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, при $h=x$ получим

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Аналогичным методом вычисляется сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+kh)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+kh) = \frac{\cos\left(x + \frac{n-1}{2}h\right) \sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}. \quad (5)$$

Для решения задач нам еще понадобится вычисление сумм вида

$$\sum \sin^2(x+kh) \text{ и } \sum \cos^2(x+kh).$$

Последние находятся понижением степени (так, например, $\sin^2(x+kh) = \frac{1 - \cos 2(x+kh)}{2}$), что приводит к сумме вида (5).

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(x+kh) &= \frac{n}{2} - \frac{\cos[2x + (n-1)h] \sin nh}{2\sin h}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(x+kh) &= \frac{n}{2} + \frac{\cos[2x + (n-1)h] \sin nh}{2\sin h}. \end{aligned}$$

3) Отметим некоторые широко используемые формулы, которые приводим без доказательства:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Для нахождения суммы S бесконечной последовательности находят общий член последовательности частных сумм S_n , т. е. сумму n первых членов, и затем переходят к пределу, устремляя n к бесконечности:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

При этом пользуются известными пределами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^\alpha + a_2 n^{\alpha-1} + \dots + a_n}{b_1 n^\beta + b_2 n^{\beta-1} + \dots + b_\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta > \alpha, \\ \frac{a_1}{b_1} & \text{при } \beta = \alpha^*, \\ \infty & \text{при } \beta < \alpha, \end{cases}$$

и свойствами пределов.

Рассмотрим несколько примеров и задач.

- 1) Найти силу давления на вертикальный щит треугольной формы, целиком погруженный в воду. Разобьем щит на n очень узких горизонтальных полосок (элементарных полосок) шириной $\frac{h}{n}$ каждая

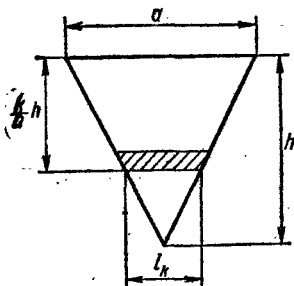


Рис. 19.

(рис. 19) и определим всю силу давления как сумму сил давления на каждую полоску. Рассмотрим k -ю полоску сверху и подсчитаем давление на нее. Так как ширина полоски мала, то можно считать, что все ее точки находятся на одинаковой глубине. Кроме того, узкую полоску можно считать прямоугольником, а не трапецией. Эти предположения тем правильнее, чем меньше ширина

полосок. Вообще, всегда в таких случаях важно обращать главное внимание на простоту выражения элементарного слагаемого, лишь

*) Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 n^\alpha + a_2 n^{\alpha-1} + \dots + a_n}{b_1 n^\beta + b_2 n^{\beta-1} + \dots + b_\beta} = \frac{a_1}{b_1}$ при $\beta = \alpha$.

Разделим числитель и знаменатель дроби на n^α ; получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 \frac{1}{n} + a_3 \frac{1}{n^2} + \dots + a_n \frac{1}{n^\alpha}}{b_1 + b_2 \frac{1}{n} + b_3 \frac{1}{n^2} + \dots + b_n \frac{1}{n^\alpha}} = \frac{a_1}{b_1},$$

так как все последующие члены в числителе и знаменателе обращаются в нуль при $n \rightarrow \infty$. Таким же образом доказываются оба других случая.

бы погрешности были ничтожно малы по сравнению с основным выражением.

Площадь полоски есть произведение ее длины на ширину. Ширина равна $\frac{h}{n}$, длина l_k находится из подобия треугольников

$l_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) a$. Таким образом, площадь $S_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) a \frac{h}{n}$ и давление на нее в воде равно глубине погружения, умноженной на удельный вес воды $d = 1 \text{ Г/см}^3$. Сила давления равна произведению давления на площадь полоски:

$$F_{kA} = \frac{ah^2}{n^2} \left(1 - \frac{k}{n}\right) k,$$

так как глубина равна $\frac{k}{n} h$. Всю силу давления находим как сумму

$$\begin{aligned} F_A &\approx \sum_{k=1}^n F_{kA} = \sum_{k=1}^n \frac{ah^2}{n^2} \left(1 - \frac{k}{n}\right) k = \frac{ah^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{ah^2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \\ &= \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

или

$$F_A \approx \frac{ah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Это выражение приближенное; оно тем точнее, чем уже полоски, т. е. чем больше n . Перейдем к пределу при n , стремящемся к бесконечности:

$$\begin{aligned} F_A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{ah^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = \\ &= \frac{ah^2}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{6} \cdot 2 = \frac{ah^2}{6}. \end{aligned}$$

Такую же задачу, но с перевернутым щитом, предлагается решить читателям.

Рассмотрим некоторые геометрические приложения пределов.

1) Касательная к кривой. Пусть необходимо провести касательную к кривой l в точке M (рис. 20). Проведем секущую MN . Если приближать точку N по кривой l к точке M , то секущая будет поворачиваться вокруг точки M , все более приближаясь к некоторой прямой, которая и называется касательной. Следовательно, касательная к кривой в точке M — это предельное положение секущей MN при стремлении N вдоль кривой к точке M .

2) Площадь фигуры, ограниченной некоторой кривой $y=f(x)$ и вертикальными отрезками. Надо найти площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$ (кривая CD на

рис. 21) и прямыми $x=a$ (линия aC) и $x=b$ (линия bD). Разобьем отрезок ab на n равных частей и построим n прямоугольников

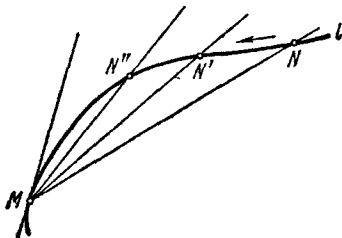


Рис. 20.

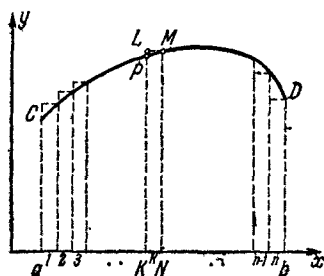


Рис. 21.

с основанием $\frac{b-a}{n}$ каждый и высотой k -го прямоугольника, равной

$$h_k = f(x_k) = f\left[\frac{(n-k)a + kb}{n}\right].$$

Если n велико, т. е. величина отрезка мала, то площадь прямоугольника $KLMN$ будет мало отличаться от площади фигуры $KPMN$. Разница между ними будет уменьшаться при увеличении n .

Площадь элементарного прямоугольника равна

$$S_k = \frac{b-a}{n} h_k = \frac{b-a}{n} f\left[\frac{(n-k)a + kb}{n}\right].$$

Площадь всей фигуры

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left[\frac{(n-k)a + kb}{n}\right] = \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left[\frac{(n-k)a + kb}{n}\right] = \\ &= (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left[\frac{(n-k)a + kb}{n}\right] \right]. \end{aligned}$$

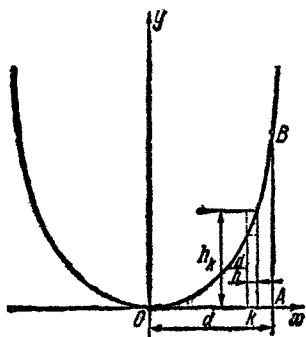


Рис. 22.

В качестве примера найдем площадь фигуры OAB (рис. 22), ограниченной параболой $y=ax^2$. Разделим отрезок OA на n частей и восставим из концов отрезков перпендикуляры до пересечения с кривой $y=ax^2$. Таким образом получим n узких вертикальных полосок. Высота k -й полоски $h_k = \left(\frac{k}{n}d\right)^2 a$, а ширина $\frac{d}{n}$. Сле-

довательно, площадь ее $S_k = \frac{ad^3 k^2}{n^3}$ и площадь всей фигуры

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ad^3 \frac{k^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ad^3 \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{ad^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right] = \frac{ad^3}{3}. \end{aligned}$$

3) Скорость изменения произвольной величины. Пусть $y=f(t)$ и график функции — некоторая кривая, изображенная на рис. 23. Пусть в момент времени t_1 значение функции $y_1=f(t_1)$, а в момент времени t_2 — значение $y_2=f(t_2)$, т. е. за время $\Delta t = t_2 - t_1$ величина y получила приращение $\Delta y = y_2 - y_1$. Скоростью изменения любой физической величины называют предел отношения $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$ при Δt , стремящемся к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}.$$

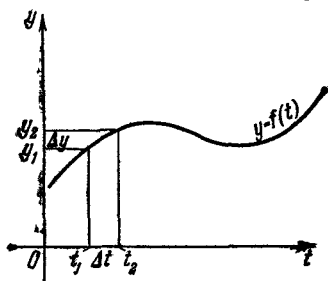


Рис. 23.

Под это определение попадают и векторные величины. В этом случае $\Delta f(t)$ и v — векторы.

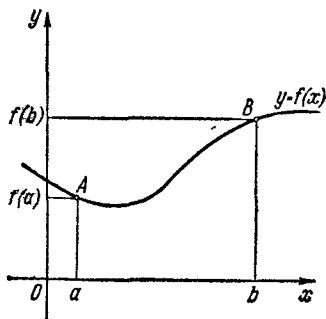


Рис. 24.

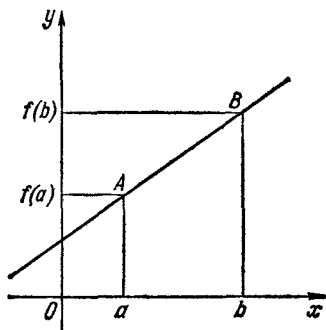


Рис. 25.

Среднее значение функции. Пусть имеется произвольная физическая величина, являющаяся функцией другой величины, и в общем виде

$$y=f(x).$$

Пусть при $x=a$ значение функции $f(a)=A$, а при $x=b$ значение $f(b)=B$ (рис. 24). Средним значением функции $y=f(x)$ на промежутке от a до b называют отношение площади, ограниченной

кривой $y=f(x)$, вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ и осью x (площади фигуры $aABb$), к величине $(b-a)$:

$$\begin{aligned} f_{\text{ср}}(x) = \bar{f}(x) &= \frac{S_{aABb}}{b-a} = \frac{(b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left[\frac{(n-k)a+kb}{n}\right]}{b-a} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left[\frac{(n-k)a+kb}{n}\right] = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left[\frac{(n-k)a+kb}{n}\right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} n}. \end{aligned}$$

Отметим, что если функция линейна, то ее среднее значение на промежутке $[a, b]$ равно среднему арифметическому для $y_1=f(a)$ и $y_2=f(b)$. В этом случае площадь фигуры $aABb$ (рис. 25) равна

$$(b-a)f(a) + \frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{2} = \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$$

и

$$f_{\text{ср}}(x) = \bar{f}(x) = \frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2(b-a)} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Цена 28 коп.

025

