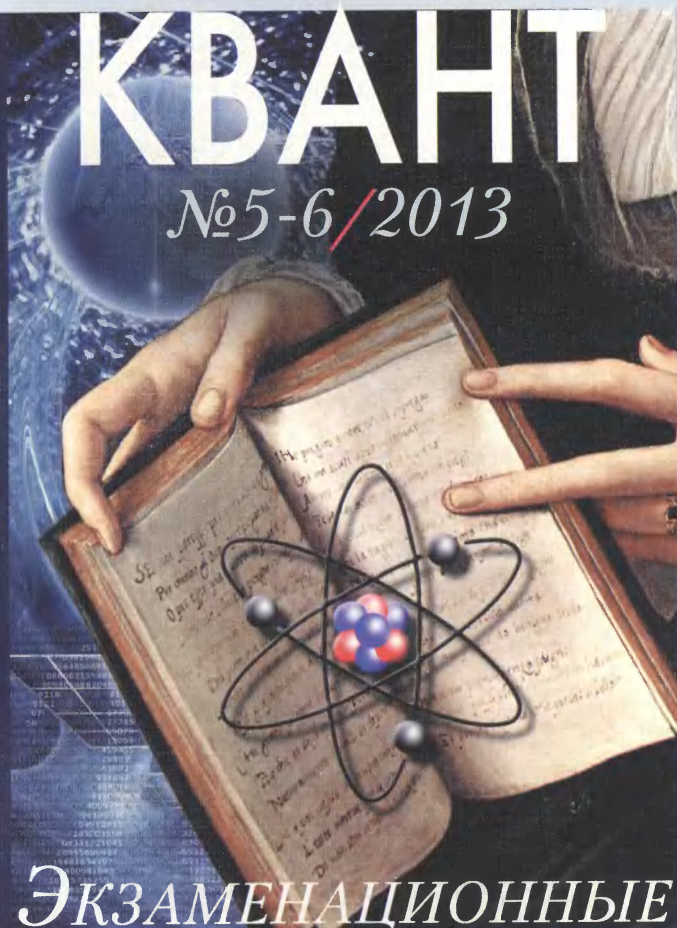




ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ

КВАНТ

№5-6/2013



ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ  
МАТЕРИАЛЫ  
2013 ГОДА

Приложение к журналу

«КВАНТ»

№5-6/2013

---

**ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ  
МАТЕРИАЛЫ  
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ  
2013 ГОДА**

**Составители**

**С.А.Дориченко, А.А.Егоров,**

**В.А.Тихомирова**

Москва

Издательство МЦНМО

2013

УДК 373.167.1:[51+53]  
ББК 22.1я721+22.3я721  
Э36

Приложение  
к журналу «Квант»  
№5-6/2013

**Э36 Экзаменационные материалы по математике и физике 2013 года** / Составители С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М.: Издательство МЦНМО, 2013. – 240 с. (Приложение к журналу «Квант» №5-6/2013.)

ISBN 978-5-4439-0126-8

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике, задачи олимпиад и вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2013 году.

Книга адресована выпускникам средних школ, лицеев и гимназий, слушателям подготовительных отделений и курсов, а также всем тем, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ISBN 978-5-4439-0126-8

ББК 22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-4439-0126-8



9 785443 901268 >



## СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие		4
	Задачи	Ответы
Единый государственный экзамен по физике	5	108
Межрегиональная олимпиада «Высшая проба»	29	116
Олимпиада «Ломоносов-2013»	33	134
Олимпиада «Покори Воробьевы горы»	46	162
Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ России	50	177
Московский государственный технический университет имени Н.Э.Баумана	55	188
Московский физико-технический институт (государственный университет)	66	200
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»	72	209
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»	80	211
Новосибирский государственный университет	83	219
Российский государственный университет нефти и газа имени И.М.Губкина	90	233
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет	94	236

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

В этом приложении к журналу «Квант» традиционно собраны материалы вступительных испытаний по математике и физике в вузы нашей страны за прошедший 2013 год.

Мы предлагаем школьникам и учителям как избранные варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и задачи различных олимпиад, имеющих статус «вступительных». Победители и призеры таких олимпиад, включенных в федеральный список данного года, имеют право быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по конкретному предмету, при поступлении в любой вуз. (Отметим, что это не освобождает учащихся от сдачи ЕГЭ.) Кроме того, в сборнике представлены материалы вступительных испытаний в традиционной форме, в которых, в частности, могут участвовать абитуриенты, по каким-либо причинам освобожденные от сдачи ЕГЭ.

Мы надеемся, что предлагаемые вниманию читателей материалы будут полезны как для самостоятельной подготовки к экзаменам, так и для использования на уроках, факультативах, кружках и подготовительных курсах.

Желаем успехов!

## **ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ**

Структура контрольных измерительных материалов ЕГЭ по физике в 2013 году по сравнению с предыдущим годом была оставлена без изменений.

Каждый вариант экзаменационной работы состоял из трех частей и включал 35 заданий, различающихся формой и уровнем сложности. Часть 1 содержала 21 задание группы А (с выбором ответа, максимум один первичный балл за задание), часть 2 включала 4 задания группы В (требуется дать краткий ответ в виде последовательности цифр, максимум два первичных балла за задание), а часть 3 включала 10 заданий, объединенных общим видом деятельности – решением задач. Часть 3 содержала 4 задания группы А и 6 заданий группы С (требуется дать развернутый ответ, максимум три первичных балла за задание). Максимальный первичный балл за выполнение всех заданий экзаменационной работы (51 балл) и общее время выполнения работы (240 минут) не изменились.

Минимальная граница ЕГЭ по физике 2013 года была установлена, как и в 2012 году, на уровне 36 тестовых баллов (что соответствует 11 первичным баллам).

В 2014 году структура вариантов ЕГЭ по физике не изменится. Останется прежним и минимальный первичный балл, необходимый для достижения положительного результата и получения сертификата ЕГЭ.

Для помощи в подготовке к ЕГЭ и для контроля своего уровня подготовки мы приводим два варианта открытого сегмента ЕГЭ 2013 года с ответами и решением избранных задач, а также несколько дополнительных задач из других вариантов открытого сегмента. Первый вариант дается с полным оформлением (с указаниями и таблицами данных), во втором варианте эти элементы опущены и могут быть взяты из первого варианта.

## Вариант 1

### Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 235 минут. Работа состоит из 3 частей, включающих 35 заданий.

Часть 1 содержит 21 задание (A1–A21). К каждому заданию дается четыре варианта ответа, из которых правильный только один.

Часть 2 содержит 4 задания (B1–B4), в которых ответ необходимо записать в виде набора цифр.

Часть 3 содержит 10 задач: A22–A25 с выбором одного верного ответа и C1–C6, для которых требуется дать развернутые решения.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий вы можете пользоваться черновиком. Обращаем ваше внимание на то, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удастся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у вас останется время, вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться вам при выполнении работы.

### Десятичные приставки

Наименование	Обозначение	Множитель	Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	$10^9$	санتي	с	$10^{-2}$
мега	М	$10^6$	милли	м	$10^{-3}$
кило	к	$10^3$	микро	мк	$10^{-6}$
гекто	г	$10^2$	нано	н	$10^{-9}$
деци	д	$10^{-1}$	пико	п	$10^{-12}$

## Константы

число «пи»	$\pi = 3,14$
ускорение свободного падения на Земле	$g = 10 \text{ м/с}^2$
гравитационная постоянная	$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$
универсальная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
постоянная Авогадро	$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$
модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
постоянная Планка	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$

## Соотношение между различными единицами

температура	$0 \text{ К} = -273 \text{ }^\circ\text{С}$
атомная единица массы	$1 \text{ а.е.м.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
1 атомная единица массы эквивалентна	$931,5 \text{ МэВ}$
1 электронвольт	$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

## Масса частиц

электрона	$9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг} \approx 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.}$
протона	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,007 \text{ а.е.м.}$
нейтрона	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ кг} \approx 1,008 \text{ а.е.м.}$

## Плотность

воды	$1000 \text{ кг/м}^3$	подсолнечного	
древесины		масла	$900 \text{ кг/м}^3$
(сосна)	$400 \text{ кг/м}^3$	алюминия	$2700 \text{ кг/м}^3$
керосина	$800 \text{ кг/м}^3$	железа	$7800 \text{ кг/м}^3$
ртути	$13600 \text{ кг/м}^3$		

## Удельная теплоемкость

воды	$4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	алюминия	$900 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$
льда	$2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	меди	$380 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$



железа	460 Дж/(кг · К)	чугуна	500 Дж/(кг · К)
свинца	130 Дж/(кг · К)		

### Удельная теплота

парообразования воды	$2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг
плавления свинца	$2,5 \cdot 10^4$ Дж/кг
плавления льда	$3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг

**Нормальные условия:** давление  $10^5$  Па, температура  $0^\circ\text{C}$

### Молярная масса

азота	$28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
аргона	$40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	лития	$6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
водорода	$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	молибдена	$96 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

## Часть 1

**При выполнении заданий части 1 в бланке ответов №1 под номером выполняемого вами задания (A1–A21) поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.**

**A1.** Мяч, брошенный вертикально вверх со скоростью  $v$ , через некоторое время упал на поверхность земли. Какой график (рис.1) соответствует зависимости проекции скорости на ось  $x$  от времени движения? Ось  $x$  направлена вертикально вверх.

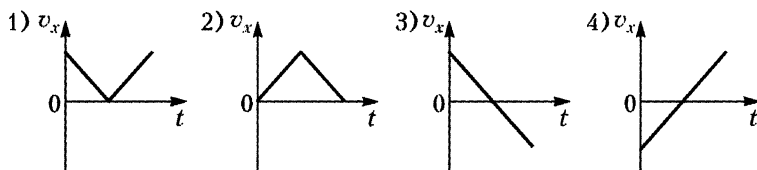


Рис. 1

**A2.** В инерциальной системе отсчета сила  $\vec{F}$  сообщает телу массой  $m$  ускорение  $\vec{a}$ . Ускорение тела массой  $2m$  под действием силы  $\frac{1}{3}\vec{F}$  в этой системе отсчета равно:

- 1)  $\vec{a}$ ; 2)  $\frac{1}{6}\vec{a}$ ; 3)  $\frac{2}{3}\vec{a}$ ; 4)  $\frac{3}{2}\vec{a}$ .

**А3.** Две звезды одинаковой массы  $m$  притягиваются друг к другу с силами, равными по модулю  $F$ . Чему равен модуль сил притяжения между другими двумя звездами, если расстояние между их центрами такое же, как и в первом случае, а массы звезд равны  $3m$  и  $4m$ ?

- 1)  $12F$ ; 2)  $16F$ ; 3)  $9F$ ; 4)  $7F$ .

**А4.** Мальчик массой  $50$  кг находится на тележке массой  $50$  кг, движущейся по гладкой горизонтальной дороге со скоростью  $1$  м/с. Каким станет модуль скорости тележки, если мальчик прыгнет с нее со скоростью  $2$  м/с относительно дороги в направлении, противоположном первоначальному направлению движения тележки?

- 1)  $1$  м/с; 2)  $4$  м/с; 3)  $2$  м/с; 4)  $0$ .

**А5.** Искусственный спутник обращается вокруг Земли по вытянутой эллиптической орбите. Выберите верное утверждение о потенциальной энергии и о полной механической энергии спутника:

1) потенциальная и полная механическая энергия спутника достигают максимальных значений в точке минимального удаления от Земли;

2) потенциальная и полная механическая энергия спутника достигают максимальных значений в точке максимального удаления от Земли;

3) потенциальная энергия достигает максимального значения в точке максимального удаления от Земли, полная механическая энергия спутника неизменна;

4) потенциальная энергия достигает максимального значения в точке минимального удаления от Земли, полная механическая энергия спутника неизменна.

**А6.** При гармонических колебаниях пружинного маятника

координата груза  $x(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right)$  изменяется с течением времени  $t$ , как показано на рисунке 2. Период  $T$  и амплитуда колебаний  $A$  равны соответственно:

1)  $T = 2$  с,  $A = 6$  см;

2)  $T = 4$  с,  $A = 3$  см;

3)  $T = 3$  с,  $A = \sqrt{3}$  см;

4)  $T = 5$  с,  $A = 6$  см.

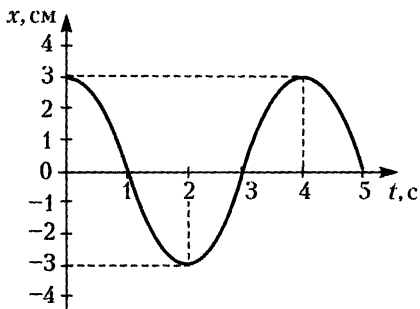


Рис. 2

**A7.** В результате охлаждения и расширения идеального одноатомного газа его давление уменьшилось в 4 раза, а концентрация его молекул уменьшилась в 2 раза. При этом средняя кинетическая энергия теплового движения молекул газа:

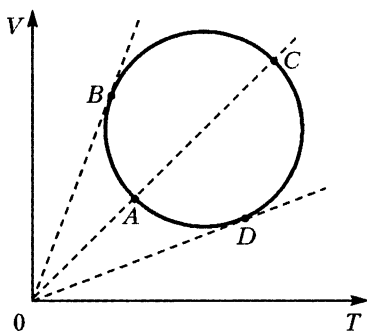


Рис. 3

- 1) уменьшилась в 2 раза;
- 2) уменьшилась в 8 раз;
- 3) не изменилась;
- 4) уменьшилась в 4 раза.

**A8.** Зависимость объема идеального газа от температуры показана на  $VT$ -диаграмме (рис.3). В какой из точек давление газа максимально? Масса газа постоянна.

- 1) A; 2) B; 3) C; 4) D.

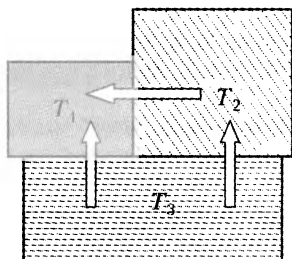


Рис. 4

**A9.** Три металлических бруска привели в соприкосновение, как показано на рисунке 4. Стрелки указывают направление теплопередачи. Сравните температуры брусков перед их соприкосновением.

- 1)  $T_1 > T_2 > T_3$ ; 2)  $T_2 > T_1 > T_3$ ;
- 3)  $T_3 > T_2 > T_1$ ; 4)  $T_3 > T_1 > T_2$ .

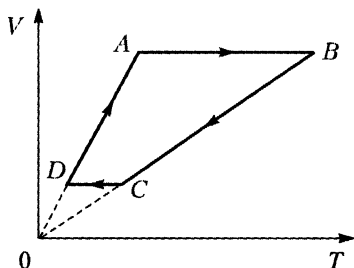


Рис. 5

**A10.** На рисунке 5 приведен цикл, осуществляемый с одним молем идеального газа. Если  $U$  – внутренняя энергия газа,  $A$  – работа, совершаемая газом,  $Q$  – сообщенное газу количество теплоты, то условия  $\Delta U > 0$ ,  $A > 0$ ,  $Q > 0$  выполняются совместно на участке:

- 1) AB; 2) BC; 3) CD; 4) DA.

**A11.** По какой из стрелок 1–4 направлен вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , созданного двумя разноименными неподвижными точечными зарядами в точке O (рис.6,  $q > 0$ )? Точка O равноудалена от зарядов.

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

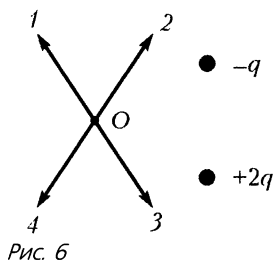


Рис. 6

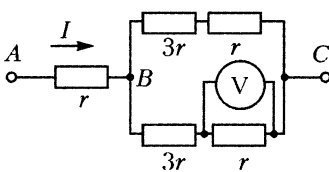


Рис. 7

**A12.** На рисунке 7 показана схема участка электрической цепи. По участку  $AB$  течет постоянный ток  $I = 4$  А. Какое напряжение показывает идеальный вольтметр, если сопротивление  $r = 1$  Ом?

- 1) 1 В; 2) 2 В; 3) 0; 4) 4 В.

**A13.** Какой из перечисленных ниже процессов объясняется явлением электромагнитной индукции?

1) Взаимное отталкивание двух параллельных проводников с током, по которым токи протекают в противоположных направлениях.

2) Самопроизвольный распад ядер.

3) Отклонение магнитной стрелки вблизи проводника с током.

4) Возникновение тока в металлической рамке, находящейся в постоянном магнитном поле, при изменении формы рамки.

**A14.** Как изменится частота свободных электромагнитных колебаний в контуре, если воздушный промежуток между пластинами конденсатора заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 3$ ?

1) Увеличится в 3 раза;

2) уменьшится в 3 раза;

3) уменьшится в  $\sqrt{3}$  раз;

4) увеличится в  $\sqrt{3}$  раз.

**A15.** Предмет находится на расстоянии 60 см от плоского зеркала. Каково будет расстояние между предметом и его изображением, если предмет приблизить к зеркалу на 25 см?

- 1) 70 см; 2) 30 см; 3) 50 см; 4) 10 см.

**A16.** Дифракционная решетка с расстоянием между штрихами  $d$  освещается монохроматическим светом. На экране, установленном за решеткой параллельно ей, возникает дифракционная картина, состоящая из темных и светлых вертикальных полос. В первом опыте решетка освещается красным светом, во втором —

желтым, а в третьем – синим. Используя решетки с различными  $d$ , добиваются того, чтобы расстояние между светлыми полосами во всех опытах стало одинаковым. Значения постоянной решетки  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  в первом, во втором и в третьем опытах соответственно удовлетворяют условиям:

- 1)  $d_1 = d_2 = d_3$ ;
- 2)  $d_1 > d_2 > d_3$ ;
- 3)  $d_1 < d_2 < d_3$ ;
- 4)  $d_2 > d_1 > d_3$ .

**A17.** В опытах по фотоэффекту взяли пластину из металла с работой выхода  $5,4 \cdot 10^{-19}$  Дж и стали освещать ее светом частотой  $3 \cdot 10^{14}$  Гц. Затем частоту света увеличили в 2 раза, одновременно увеличив в 1,5 раза число фотонов, падающих на пластину за 1 с. При этом максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов:

- 1) увеличилась в 1,5 раза;
- 2) увеличилась в 3 раза;
- 3) увеличилась в 2 раза;
- 4) не определена, так как фотоэффекта не будет.

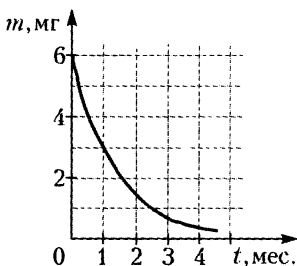


Рис. 8

**A18.** На рисунке 8 показан график изменения массы находящегося в пробирке радиоактивного изотопа с течением времени. Период полураспада этого изотопа равен:

- 1) 1 мес.; 2) 2 мес.;
- 3) 3 мес.; 4) 4 мес.

**A19.** Какое уравнение *противоречит* закону сохранения электрического заряда в ядерных реакциях?

- 1)  ${}^6_3\text{Li} + {}^1_1\text{p} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^3_2\text{He}$ ;
- 2)  ${}^7_4\text{Be} + {}^0_{-1}\text{e} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu_e$ ;
- 3)  ${}^8_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^0_{-1}\text{e} + \bar{\nu}_e$ ;
- 4)  ${}^9_4\text{Be} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{10}_7\text{N} + {}^1_0\text{n}$ .

**A20.** На рисунке 9 точками указаны результаты измерений напряжения на конденсаторе при его разряде через резистор в разные моменты времени. Погрешности измерения этих величин соответственно равнялись 0,3 В и 2 с. Какой из графиков правильно построен по этим точкам?

**A21.** Массивный груз, покоящийся на горизонтальной опоре, привязан к легкой нерастяжимой веревке, перекинутой через

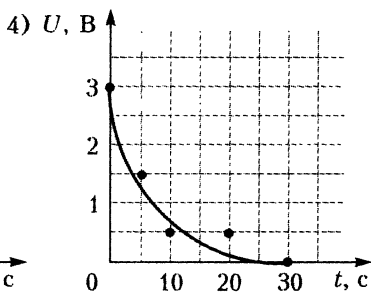
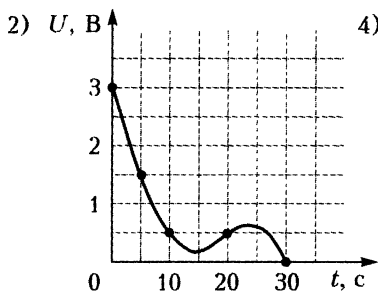
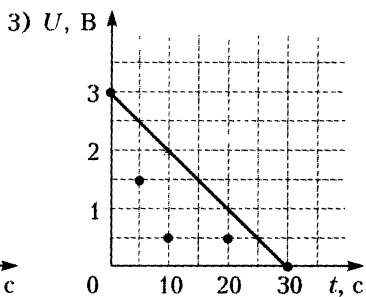
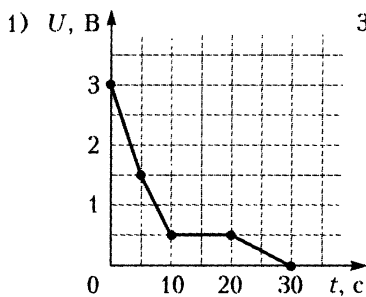


Рис. 9

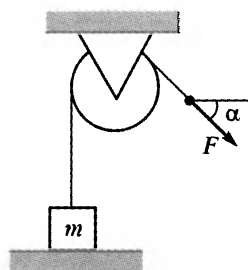


Рис. 10

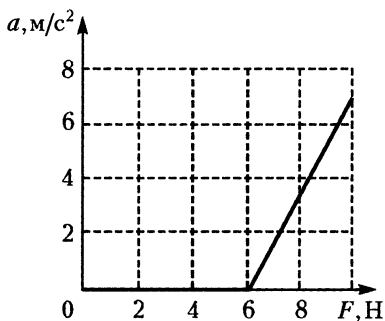


Рис. 11

идеальный блок. К веревке прикладывают постоянную силу  $\vec{F}$ , направленную под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту (рис.10). Зависимость модуля ускорения груза от модуля силы представлена на графике (рис.11). Чему равна масса груза?

- 1) 0,85 кг; 2) 0,42 кг; 3) 0,60 кг; 4) 6,0 кг.

## Часть 2

**Ответом к заданиям этой части (В1–В4) является последовательность цифр. Впишите ответы сначала в текст работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки, без запятых, пробелов и каких-либо дополнительных символов. Каждую цифру пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.**

**В1.** С вершины наклонной плоскости из состояния покоя скользит с ускорением брусок массой  $m$  (рис.12). Как изменятся время движения, ускорение бруска и сила трения, действующая на брусок, если с той же наклонной плоскости будет скользить брусок из того же материала массой  $3m$ ?

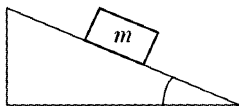


Рис. 12

Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

- 1) увеличится; 2) уменьшится; 3) не изменится.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Время движения	Ускорение	Сила трения

**В2.** На рисунке 13 показан процесс изменения состояния одного моля одноатомного идеального газа ( $U$  – внутренняя энергия газа,  $p$  – его давление). Как изменяются в ходе этого процесса объем, абсолютная температура и теплоемкость газа?

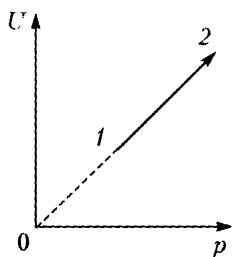


Рис. 13

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Объем газа	Температура газа	Теплоемкость газа

**В3.** Установите соответствие между формулами для вычисления физических величин в схемах постоянного тока и названиями этих величин. В формулах использованы такие обозначения:  $I$  – сила тока,  $U$  – напряжение,  $R$  – сопротивление резистора.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

#### ФОРМУЛЫ

А)  $\frac{U}{I}$

Б)  $\frac{U^2}{R}$

#### ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1) заряд, протекающий через резистор

2) сила тока через резистор

3) мощность тока, выделяющаяся на резисторе

4) сопротивление резистора

Ответ:

А	Б

**В4.** Два пластилиновых шарика массами  $2m$  и  $m$  находятся на горизонтальном гладком столе. Первый из них движется ко второму со скоростью  $\vec{v}$ , а второй покоится относительно стола. Укажите формулы, по которым можно рассчитать модули изменения скоростей шариков в результате их абсолютно неупругого удара.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

#### ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

А) модуль изменения скорости первого шарика

Б) модуль изменения скорости второго шарика

#### ФОРМУЛЫ

1)  $|\Delta \vec{v}| = v$

2)  $|\Delta \vec{v}| = \frac{2}{3}v$

3)  $|\Delta \vec{v}| = 2v$

4)  $|\Delta \vec{v}| = \frac{1}{3}v$

Ответ:

А	Б



### Часть 3

**Задания части 3 представляют собой задачи. Рекомендуется провести их предварительное решение на черновике. При выполнении заданий A22–A25 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого вами задания поставьте знак «х» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.**

**A22.** Мимо остановки по прямой улице с постоянной скоростью проезжает грузовик. Через 5 с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением  $3 \text{ м/с}^2$ , и догоняет грузовик на расстоянии 150 м от остановки. Чему равна скорость грузовика?

- 1) 15 м/с; 2) 10 м/с; 3) 30 м/с; 4) 20 м/с.

**A23.** В стакан калориметра налили 150 г воды. Начальная температура калориметра и воды  $55^\circ\text{C}$ . В эту воду опустили кусок льда, имевшего температуру  $0^\circ\text{C}$ . После того как наступило тепловое равновесие, температура воды в калориметре стала  $5^\circ\text{C}$ . Определите массу льда. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

- 1) 45 г; 2) 90 г; 3) 180 г; 4) 30 г.

**A24.** В однородное электрическое поле со скоростью  $0,5 \cdot 10^7 \text{ м/с}$  влетает электрон и движется по направлению линий напряженности поля. Какое расстояние пролетит электрон до полной потери скорости, если модуль напряженности поля равен  $3600 \text{ В/м}$ ?

- 1) 1 см; 2) 8 см; 3) 5 см; 4) 2 см.

**A25.** Линза с фокусным расстоянием  $F = 1 \text{ м}$  дает на экране изображение предмета, увеличенное в 4 раза. Каково расстояние от предмета до линзы?

- 1) 1,25 м; 2) 1,50 м; 3) 0,50 м; 4) 0,75 м.

**Полное решение задач C1–C6 необходимо записать в бланке ответов № 2. При оформлении решения в бланке ответов № 2 запишите сначала номер задания (C1, C2 и т.д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.**

**C1.** Катушка, обладающая индуктивностью  $L$ , соединена с источником питания с ЭДС  $\mathcal{E}$  и двумя одинаковыми резисторами сопротивлением  $R$  каждый. Электрическая схема соединения показана на рисунке 14. В начальный момент ключ в цепи

разомкнут. В момент времени  $t = 0$  ключ замыкают, что приводит к изменениям силы тока, регистрируемым амперметром, как показано на рисунке 15. Основываясь на известных физических

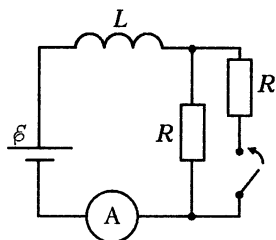


Рис. 14

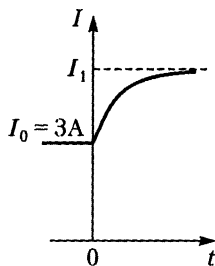


Рис. 15

законах, объясните, почему при замыкании ключа сила тока плавно увеличивается до некоторого нового значения  $I_1$ . Определите значение силы тока  $I_1$ . Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

**Полное правильное решение каждой из задач С2–С6 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.**

**С2.** К одному концу легкой пружины жесткостью  $k = 100$  Н/м прикреплен массивный груз, лежащий на горизонтальной плоскости, другой конец пружины закреплен неподвижно (рис.16). Коэффициент трения груза о плоскость  $\mu = 0,2$ . Груз смещают по горизонтали, растягивая пружину, затем отпускают с начальной скоростью, равной нулю. Груз движется в одном направлении и затем останавливается в положении, в котором пружина уже сжата. Максимальное растяжение пружины, при котором груз движется таким образом, равно  $d = 15$  см. Найдите массу  $m$  груза.

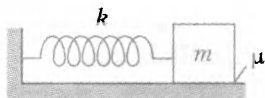


Рис. 16

**С3.** В сосуде объемом  $V = 0,02$  м<sup>3</sup> с жесткими стенками находится одноатомный газ при атмосферном давлении. В крышке сосуда имеется отверстие площадью  $S$ , заткнутое пробкой. Максимальная сила трения покоя  $F$  пробки о края отверстия равна 100 Н. Пробка выскакивает, если газу передать количество теплоты не менее 15 кДж. Определите значение  $S$ , полагая газ идеальным.

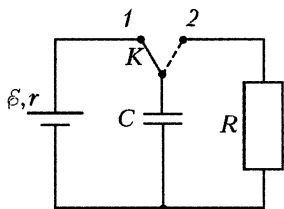


Рис. 17

**C4.** В схеме, показанной на рисунке 17, ключ  $K$  долгое время находился в положении 1. В момент  $t_0 = 0$  ключ перевели в положение 2. К моменту  $t > 0$  на резисторе  $R$  выделилось количество теплоты  $Q = 25$  мкДж. Сила тока в цепи в этот момент равна  $I = 0,1$  мА. Чему равно сопротивление резистора  $R$ ? ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 15$  В,

ее внутреннее сопротивление  $r = 30$  Ом, емкость конденсатора  $C = 0,4$  мкФ. Потерями на электромагнитное излучение пренебречь.

**C5.** В постоянном магнитном поле заряженная частица движется по окружности. Когда индукцию магнитного поля стали медленно увеличивать, обнаружилось, что скорость частицы изменяется так, что кинетическая энергия частицы оказывается пропорциональной частоте ее обращения. Найдите радиус орбиты частицы в поле с индукцией  $B$ , если в поле с индукцией  $B_0$  он равен  $R_0$ .

**C6.** Электрон, имеющий импульс  $p = 2 \cdot 10^{-24}$  кг·м/с, сталкивается с покоящимся протоном, образуя атом водорода в состоянии с энергией  $E_n$  ( $n = 2$ ). В процессе образования атома излучается фотон. Найдите частоту  $\nu$  этого фотона, пренебрегая кинетической энергией атома. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой  $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$  эВ, где  $n = 1, 2, 3, \dots$

### Вариант 2

#### Часть 1

**A1.** Два лыжника движутся по прямой лыжне: один со скоростью  $\vec{v}$ , другой со скоростью  $-0,5\vec{v}$  относительно деревьев. Скорость второго лыжника относительно первого равна:

- 1)  $0,5\vec{v}$ ; 2)  $-0,5\vec{v}$ ; 3)  $-1,5\vec{v}$ ; 4)  $1,5\vec{v}$ .

**A2.** Материальная точка движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v$ . Как нужно изменить скорость ее движения, чтобы при увеличении радиуса окружности в 2 раза центростремительное ускорение точки осталось прежним?

- 1) Увеличить в 2 раза;  
2) уменьшить в 2 раза;  
3) увеличить в  $\sqrt{2}$  раз;  
4) уменьшить в  $\sqrt{2}$  раз.

**А3.** К системе из кубика массой  $M = 1$  кг и двух пружин приложена постоянная горизонтальная сила  $\vec{F}$  (рис.18). Система покоится. Между кубиком и опорой трения нет. Левый край первой пружины прикреплен к стенке. Жесткость первой пружины  $k_1 = 300$  Н/м, жесткость второй пружины  $k_2 = 600$  Н/м. Удлинение второй пружины равно 2 см. Модуль силы  $F$  равен:

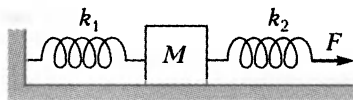


Рис. 18

- 1) 4 Н; 2) 6 Н; 3) 18 Н; 4) 12 Н.

**А4.** Тело движется по прямой. Начальный импульс тела равен  $60$  кг·м/с. Под действием постоянной силы величиной  $10$  Н, направленной вдоль этой прямой, за  $5$  с импульс тела уменьшился и стал равен:

- 1)  $5$  кг·м/с; 2)  $20$  кг·м/с; 3)  $50$  кг·м/с; 4)  $10$  кг·м/с.

**А5.** Какой из графиков, приведенных на рисунке 19, показывает зависимость полной энергии  $E$  тела, брошенного под углом

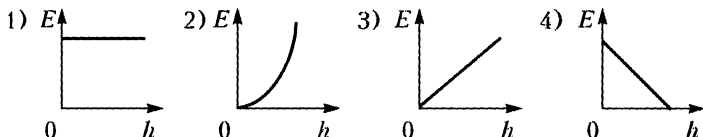


Рис. 19

к горизонту, от его высоты  $h$  над землей? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**А6.** Аквариум, изображенный на рисунке 20, доверху наполнили водой. Найдите силу давления воды на дно аквариума. Плотность воды равна  $\rho$ . Атмосферное давление не учитывать.

- 1)  $4\rho ga^2$ ; 2)  $4\rho ga^3$ ;

- 3)  $\frac{\rho ga^2}{4}$ ; 4)  $\rho ga$ .

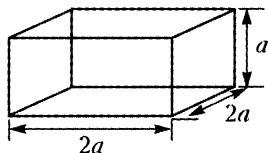


Рис. 20

**А7.** Абсолютная температура идеального газа в сосуде увеличилась в  $1,5$  раза, а давление возросло при этом в  $4,5$  раза. Как изменилась концентрация молекул газа?

- 1) Уменьшилась в  $3$  раза;  
2) уменьшилась в  $6,75$  раза;  
3) увеличилась в  $3$  раза;  
4) увеличилась в  $6,75$  раза.

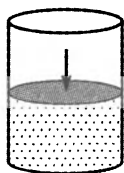


Рис. 21

**A8.** Воздух медленно сжимают в цилиндре под поршнем (рис.21). Стенки цилиндра и поршень изготовлены из тонкого, но прочного металла. Какое из приведенных ниже уравнений точнее всего описывает процесс, происходящий при этом с воздухом под поршнем?

- 1)  $V \cdot p = \text{const}$  ;
- 2)  $T \cdot p = \text{const}$  ;
- 3)  $\frac{Q}{p} = \text{const}$  ;
- 4)  $\frac{Q}{V} = \text{const}$  .

**A9.** В калориметр с холодной водой погрузили алюминиевый цилиндр, нагретый до  $100^\circ\text{C}$ . В результате в калориметре установилась температура  $30^\circ\text{C}$ . Если вместо алюминиевого цилиндра опустить в калориметр медный цилиндр такой же массы при температуре  $100^\circ\text{C}$ , то конечная температура в калориметре будет:

- 1) выше  $30^\circ\text{C}$  ;
- 2) ниже  $30^\circ\text{C}$  ;
- 3)  $30^\circ\text{C}$  ;
- 4) зависеть от отношения массы воды и цилиндров и в данном случае не поддается никакой оценке.

**A10.** Какое(-ие) из приведенных утверждений верно(-ы)?

А. Положительное количество теплоты самопроизвольно переходит от более нагретого тела к более холодному.

Б. Нельзя создать циклический тепловой двигатель, с помощью которого можно энергию, полученную от нагревателя, полностью превратить в механическую работу.

- 1) Только А;
- 2) только Б;
- 3) и А, и Б;
- 4) ни А, ни Б.

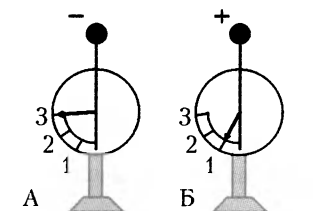


Рис. 22

**A11.** На рисунке 22 изображены два одинаковых электрометра, шары которых имеют заряды противоположных знаков. Если их шары соединить проволокой, то показания обоих электрометров:

- 1) станут равными 2;
- 2) не изменятся;
- 3) станут равными 1;
- 4) станут равными 0.

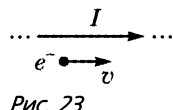
**A12.** Участок цепи состоит из двух последовательно соединенных цилиндрических проводников, сопротивление первого

из которых  $R$ , а второго  $2R$ . Как изменится общее сопротивление этого участка, если и длину, и площадь поперечного сечения первого проводника уменьшить в 2 раза?

- 1) Увеличится в 2 раза;
- 2) уменьшится в 4 раза;
- 3) уменьшится в 2 раза;
- 4) не изменится.

**A13.** Электрон  $e^-$  имеет горизонтальную скорость  $\vec{v}$ , направленную вдоль прямого длинного проводника с током  $I$  (рис.23). Куда направлена действующая на электрон сила Лоренца  $\vec{F}$ ?

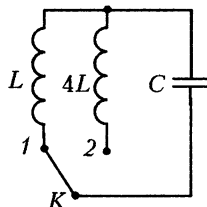
- 1) Вертикально вниз в плоскости рисунка  $\downarrow$ ;
- 2) горизонтально влево в плоскости рисунка  $\leftarrow$ ;



- 3) перпендикулярно плоскости рисунка к нам  $\odot$ ;
- 4) вертикально вверх в плоскости рисунка  $\uparrow$ .

**A14.** Как изменится период собственных электромагнитных колебаний в контуре (рис.24), если ключ  $K$  перевести из положения 1 в положение 2?

- 1) Уменьшится в 2 раза;
- 2) уменьшится в 4 раза;
- 3) увеличится в 2 раза;
- 4) увеличится в 4 раза.



**A15.** На рисунке 25 показан ход светового луча через стеклянную пластину, находящуюся в воздухе. Точка  $O$  – центр окружности. Показатель преломления стекла  $n$  равен отношению:

- 1)  $\frac{AD}{CB}$  ; 2)  $\frac{DO}{OC}$  ; 3)  $\frac{CB}{DO}$  ; 4)  $\frac{DO}{CB}$  .

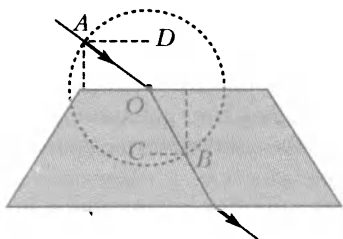


Рис. 25

**A16.** В классическом опыте Юнга по дифракции пучок света, прошедший через узкое отверстие  $A$ , освещает отверстия  $B$  и  $C$ ,

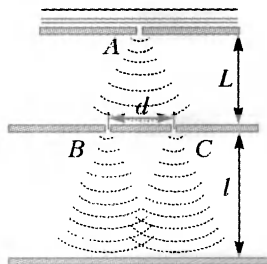




Рис. 26

за которыми на экране возникает интерференционная картина (рис.26). Если увеличить расстояние  $d$  вдвое, то:

- 1) расстояние между интерференционными полосами увеличится;
- 2) расстояние между интерференционными полосами уменьшится;
- 3) интерференционная картина не изменится;
- 4) интерференционная картина сместится по экрану влево, сохранив свой вид.

**A17.** Энергия фотона в рентгеновском дефектоскопе в 2 раза больше энергии фотона в рентгеновском медицинском аппарате. Отношение частоты электромагнитных колебаний в первом пучке рентгеновских лучей к частоте во втором пучке равно:

А  Sr 1) 1; 2) 2; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4)  $\frac{1}{2}$ .

Б  ? **A18.** На фотографиях А, Б и В (рис.27) приведены спектры излучения паров кальция Са, стронция Sr и неизвестного образца. Можно утверждать, что в неизвестном образце:


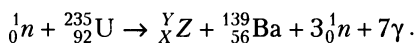
В  Са

Рис. 27

- 1) не содержится стронция;
- 2) содержатся кальций и еще какие-то элементы;
- 3) не содержится кальция;
- 4) содержится только кальций.

**A19.** Деление ядра урана тепловыми нейтронами описывается реакцией



При этом образовалось ядро химического элемента  ${}_X^Y\text{Z}$ . Какое ядро образовалось?

- 1)  ${}_{36}^{88}\text{Kr}$ ; 2)  ${}_{36}^{94}\text{Kr}$ ; 3)  ${}_{42}^{88}\text{Mo}$ ; 4)  ${}_{42}^{94}\text{Mo}$ .

**A20.** Ученик измерял силу тяжести, действующую на груз. Показания динамометра приведены на фотографии (рис.28). Погрешность изменения равна цене деления динамометра. В каком случае показания динамометра записаны верно?

- 1)  $(1,6 \pm 0,2) \text{ Н}$ ;
- 2)  $(1,4 \pm 0,2) \text{ Н}$ ;

Рис. 28

3)  $(2,4 \pm 0,1)$  Н ;

4)  $(1,6 \pm 0,1)$  Н .

**A21.** На рисунке 29 приведены графики зависимости координаты от времени для двух тел: С и В, движущихся по прямой, вдоль которой и направлена ось  $x$ . Выберите верное(-ые) утверждение (-я) о характере движения тел.

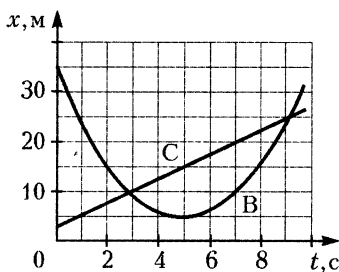


Рис. 29

А. Временной интервал между встречами тел С и В составляет 6 с.

Б. Тело С движется со скоростью 3 м/с.

1) Только С;

2) только В;

3) и С, и В;

4) ни С, ни В.

## Часть 2

**В1.** Массивный груз, подвешенный к потолку на пружине, совершает вертикальные свободные колебания. Пружина все время остается растянутой. Как ведут себя потенциальная энергия пружины, кинетическая энергия груза, его потенциальная энергия в поле тяжести, когда груз движется вниз от положения равновесия?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Потенциальная энергия пружины	Кинетическая энергия груза	Потенциальная энергия груза в поле тяжести

**В2.** Протон в однородном магнитном поле движется по окружности. Чтобы в этом поле двигалась по окружности с той же скоростью  $\alpha$ -частица, радиус окружности, частота обращения и энергия  $\alpha$ -частицы по сравнению с протоном должны:

1) увеличиться; 2) уменьшиться; 3) не измениться.



Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Радиус окружности	Частота обращения	Энергия частицы

**В3.** В начальный момент в сосуде под легким поршнем находится только жидкий эфир. На рисунке 30 показан график зависимости температуры  $t$  эфира от времени  $\tau$  его нагревания и последующего охлаждения.

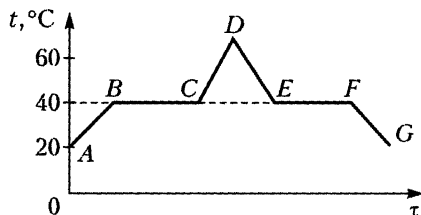


Рис. 30

Установите соответствие между процессами, происходящими с эфиром, и участками графика. К каждой позиции первого

столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

#### ПРОЦЕССЫ

- А) охлаждение паров эфира  
Б) кипение эфира

#### УЧАСТКИ ГРАФИКА

- 1) BC  
2) CD  
3) DE  
4) EF

Ответ:

А	Б

**В4.** Тело, брошенное со скоростью  $v$  под углом  $\alpha$  к горизонту, в течение времени  $t$  поднимается на максимальную высоту  $h$  над горизонтом. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно определить. К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры.

#### ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

- А) время подъема  $t$  на максимальную высоту  
Б) максимальная высота  $h$  над

#### ФОРМУЛЫ

- 1)  $\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$   
2)  $\frac{v \cos^2 \alpha}{g}$

горизонтом

3)  $\frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g}$

4)  $\frac{v \sin \alpha}{g}$

Ответ:

А	Б

### Часть 3

**A22.** Снаряд массой 2 кг, летящий со скоростью 100 м/с, разрывается на два осколка. Один из осколков летит под углом  $90^\circ$  к первоначальному направлению. Под каким углом к этому направлению полетит второй осколок, если его масса 1 кг, а скорость 400 м/с?

- 1)  $30^\circ$ ; 2)  $60^\circ$ ; 3)  $15^\circ$ ; 4)  $45^\circ$ .

**A23.** Температура в холодных облаках межзвездного газа составляет около 10 К, а давление газа достигает  $1,4 \cdot 10^{-12}$  Па. Оцените концентрацию молекул межзвездного газа.

- 1)  $10^{-13} \text{ м}^{-3}$ ; 2)  $10^{12} \text{ м}^{-3}$ ; 3)  $10^{-11} \text{ м}^{-3}$ ; 4)  $10^{10} \text{ м}^{-3}$ .

**A24.** В заштрихованной области на рисунке 31 действует однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости рисунка и равное  $B = 0,1$  Тл. Проволочную квадратную рамку сопротивлением  $R = 10$  Ом и стороной  $l = 10$  см перемещают в плоскости рисунка поступательно со скоростью  $v = 1$  м/с. Чему равен индукционный ток в рамке в состоянии 1?

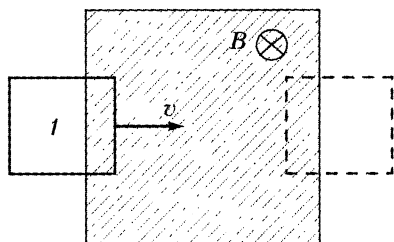


Рис. 31

- 1) 1 мА; 2) 20 мА; 3) 10 мА; 4) 5 мА.

**A25.** В сосуде находится разреженный атомарный водород. Атом водорода в основном состоянии ( $E_1 = -13,6$  эВ) поглощает фотон и ионизируется. Электрон, вылетевший из атома в результате ионизации, движется вдали от ядра со скоростью 1000 км/с. Какова длина волны поглощенного фотона? Энергией теплового движения атомов водорода пренебречь.

- 1) 64 нм; 2) 46 нм; 3) 91 нм; 4) 75 нм.

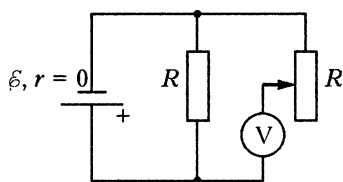


Рис. 32

**C1.** В схеме на рисунке 32 сопротивление резистора и полное сопротивление реостата равны  $R$ , ЭДС батарейки равна  $\varepsilon$ , ее внутреннее сопротивление ничтожно мало ( $r = 0$ ). Как ведут себя (увеличиваются, уменьшаются, остаются постоянными) показания идеального вольтметра при перемещении движка реостата из крайнего верхнего в крайнее нижнее положение? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

**C2.** На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых  $h$  и  $\frac{5}{2}h$  (рис.33). На

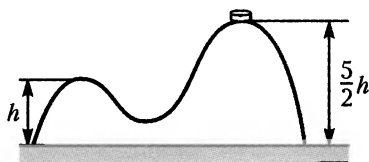


Рис. 33

правой вершине горки находится шайба. От незначительного толчка шайба и горка приходят в движение, причем шайба движется влево, не отрываясь от гладкой поверхности горки, а поступательно движущаяся горка не отрывается от стола.

Скорость шайбы на левой вершине горки оказалась равной  $v$ . Найдите отношение масс шайбы и горки.

**C3.** Один моль аргона, находящийся в цилиндре при температуре  $T_1 = 600$  К и давлении  $p_1 = 4 \cdot 10^5$  Па, расширяется и одновременно охлаждается так, что его температура при расширении обратно пропорциональна объему. Конечное давление

газа  $p_2 = 10^5$  Па. Какое количество теплоты газ отдал при расширении, если при этом он совершил работу  $A = 2493$  Дж?

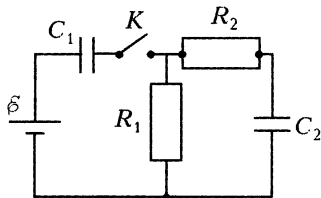


Рис. 34

**C4.** В цепи, изображенной на рисунке 34, ЭДС батареи  $\varepsilon = 100$  В, сопротивления резисторов  $R_1 = 10$  Ом и  $R_2 = 6$  Ом, а емкости конденсаторов  $C_1 = 60$  мкФ и  $C_2 = 100$  мкФ. В начальном состоянии ключ  $K$  разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Через некоторое время после замыкания ключа в системе установится равновесие.

Какое количество теплоты выделится в цепи к моменту установления равновесия?

**С5.** Равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  расположен перед тонкой собирающей линзой с оптической силой  $2,5$  дптр так, что его катет  $AC$  лежит на главной оптической оси линзы (рис.35). Вершина прямого угла  $C$  лежит ближе к центру линзы, чем вершина острого угла  $A$ . Расстояние от центра линзы до точки  $A$  равно удвоенному фокусному расстоянию линзы,  $AC = 4$  см. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.

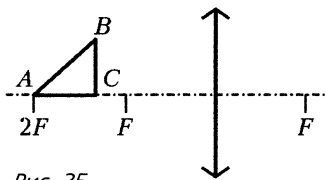


Рис. 35

**С6.** Электроны, вылетевшие в положительном направлении оси  $x$  под действием света с катода фотоэлемента, попадают в электрическое и магнитное поля (рис.36). Какой должна быть частота падающего света  $\nu$ , чтобы в момент попадания самых быстрых электронов в область полей действующая на них сила была направлена против оси  $y$ ? Работа выхода для вещества катода  $2,39$  эВ, напряженность электрического поля  $3 \cdot 10^2$  В/м, индукция магнитного поля  $10^{-3}$  Тл.

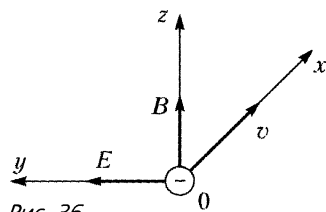


Рис. 36

### Дополнительные задачи из других вариантов

**1(С1).** В установке по наблюдению фотоэффекта свет от точечного источника  $S$ , пройдя через собирающую линзу, падает на фотокатод параллельным пучком (рис.37). В схему внесли изменение: на место первоначальной линзы поставили другую того же диаметра, но с бóльшим фокусным расстоянием. Источник света переместили вдоль главной оптической оси линзы так, что на фотокатод свет снова стал падать параллельным пучком. Как изменился при этом (уменьшился или увеличился) фототок насыщения? Объясните, почему изменяется фототок насыщения, и укажите, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

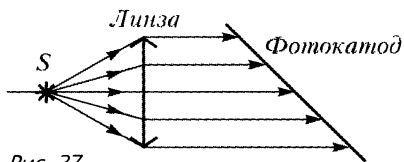


Рис. 37

**2(С2).** В установке, изображенной на рисунке 38, грузик  $A$  соединен перекинутой через блок нитью с бруском  $B$ , лежащим на горизонтальной поверхности трибометра, закрепленного на

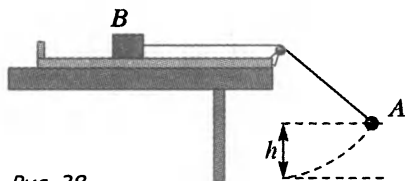


Рис. 38

нулс с места в момент прохождения грузиком нижней точки траектории? Масса бруска  $M$ , коэффициент трения между бруском и поверхностью  $\mu$ . Трением в блоке, а также размерами блока пренебречь.

3(С2). Прибор наблюдения обнаружил летящий снаряд и зафиксировал его горизонтальную координату  $x_1$  и высоту

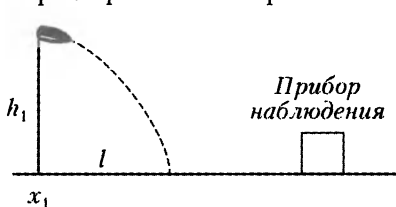


Рис. 39

$h_1 = 1655$  м над землей (рис.39). Через 3 с снаряд упал на землю и взорвался на расстоянии  $l = 1700$  м от места его обнаружения. Известно, что снаряды данного типа вылетают из ствола пушки со скоростью 800 м/с. На каком расстоянии от точки

взрыва снаряда находилась пушка, если считать, что сопротивление воздуха пренебрежимо мало? Пушка и место взрыва находятся на одной горизонтали.

4(С3). Над одноатомным идеальным газом проводится циклический процесс, показанный на рисунке 40. На участке 1–2 газ совершает работу  $A_{12} = 1000$  Дж. На адиабате 3–1 внешние силы сжимают газ, совершая работу  $|A_{31}| = 370$  Дж. Количество вещества газа в ходе процесса не меняется. Найдите количество теплоты  $|Q_x|$ , отданное газом за цикл холодильнику.

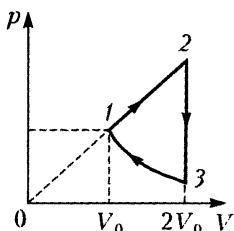


Рис. 40

5(С5). Замкнутый контур из тонкой проволоки помещен в магнитное поле. Плоскость контура перпендикулярна вектору магнитной индукции поля. Площадь контура  $S = 2 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>. В контуре возникают колебания тока с амплитудой  $i_m = 35$  мА, если магнитная индукция поля меняется с течением времени в соответствии с формулой  $B = a \cos bt$ , где  $a = 6 \cdot 10^{-3}$  Тл,  $b = 3500$  с<sup>-1</sup>. Чему равно электрическое сопротивление контура  $R$ ?

публикацию подготовили М.Демидова, А.Черноуцан

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА «ВЫСШАЯ ПРОБА»

### МАТЕМАТИКА

Современная математика – разветвленная и сложная наука, овладение даже основами которой требует долгих лет учебы в университете. В то же время в процессе ее развития естественно возникают и задачи, понять условия и найти решение которых под силу заинтересованным школьникам. Мы стремимся к тому, чтобы в вариантах олимпиады «Высшая проба» появлялись такие задачи, передающие дух исследовательского процесса и красоту математических конструкций. Эти задачи берутся из собственного опыта составителей олимпиады, из опыта окружающих их коллег. Иногда поводом для их возникновения служат совершенно непрофессиональные разговоры или чайные посиделки, как, например, в случае с задачей 6 для 11 класса.

Знаний, выходящих за рамки школьной программы, для решения наших задач не требуется. Как и на других олимпиадах, додуматься до короткого – в две строчки – решения часто бывает сложно, а иногда такое решение неизвестно и самим составителям. Мы стремились в первую очередь к тому, чтобы задачи формулировались естественно, а ответы были красивыми и неожиданными. Надеемся, что кто-то из читателей обнаружит изящные подходы, которые мы просмотрели

#### *Очный тур*

#### *8 класс*

1. Дан прямоугольник с длинами сторон 5 и 6. Разбейте его на семь неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника так, чтобы площади этих семи прямоугольников были попарно различны.

2. Докажите, что число  $10^{\left(10^{(10^{2013})}\right)} + 10^{(10^{2013})} + 10^{2013} - 1$  не простое.

3. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы

одновременно выполнялись два условия: а) центр круга находился на границе каждой из частей; б) из некоторых частей можно было бы составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник?

4. Найдите все целочисленные решения уравнения  $2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$  и докажите, что других нет.

5. Сколько существует различных (т.е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 24? Выпишите длины трех сторон всех этих треугольников и докажите, что других не бывает.

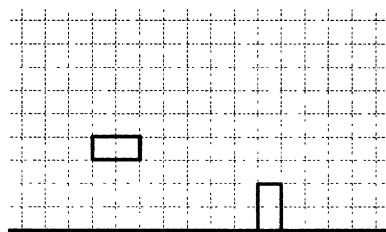


Рис. 1

6. Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки (рис.1). Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в

каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечетное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию, если нет, то докажите, что нельзя.

### 9 класс

1. Дан квадрат с длиной стороны 9. Разбейте его на девять неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам квадрата, так, чтобы площади этих девяти прямоугольников были попарно различны.

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Триномом степени  $p$  называется функция вида  $f(x) = x^p + ax^q + 1$ , где  $p, q$  – натуральные числа,  $q < p$ , и  $a$  – произвольное вещественное число (быть может, равное 0). Найдите все разложения многочлена  $x^{12} + 1$  в произведение пары триномов.

4. Вдоль берега круглого озера периметром 1 км плывут два лосося – один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 750 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 200 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за один час?

5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1, BB_1, CC_1$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $P$  так, что

окружность, описанная около треугольника  $PA_1B_1$ , касается стороны  $AB$ . Найдите  $PC_1$ , если  $PA = 30$ ,  $PB = 10$ .

6. Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделенная бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Бороздки разбивают плитку на  $M$  вертикальных и  $N$  горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдает их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает ее, а другую ломает по бороздке и отдает получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдает, и все повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких  $M$  и  $N$  первый игрок может играть так, чтобы выиграть независимо от действий второго игрока?

10 класс

1. Решите в целых числах уравнение  $x^2 - 2y^2 = 2^{x+y}$ .

2. Вдоль берега круглого озера периметром 1,1 км плывут два лосося – один с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой с постоянной скоростью 600 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 70 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за сутки и одну минуту?

3. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием 1, у которого биссектриса, медиана и заключенный между ними отрезок противоположной стороны также образуют равнобедренный треугольник.

4. Сколько существует различных (т.е. не равных друг другу) тупоугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 33? Обоснуйте свой ответ.

5. Пусть  $x, y, z$  – произвольные действительные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение  $\sqrt{2+x^2} + \sqrt{2+(x-y)^2} + \sqrt{2+(y-z)^2} + \sqrt{2+(2-z)^2}$ ? Обоснуйте свой ответ.

6. См. задачу 6 для 9 класса.

11 класс

1. Решите в целых числах уравнение  $3x^2 - y^2 = 3^{x+y}$ .

2. Триномом степени  $p$  называется функция вида  $f(x) = x^p + ax^q + 1$ , где  $p, q$  – натуральные числа,  $a$  – произвольное вещественное число (быть может, равное 0). Найдите



все пары триномов, которые дают в произведении трином степени 15.

3. Улитка, имеющая постоянную скорость 40 см/ч, начала ползти по цилиндрической колонне из точки  $A$ . Каждые 15 минут она поворачивала поочередно то влево, то вправо на  $90^\circ$ , а все остальное время ползла прямо.

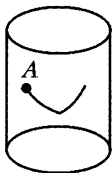
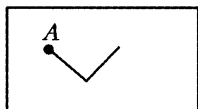


Рис. 2



(Углы и длины измеряются по плоской развертке колонны, рис. 2.) Через 1 час 45 минут после начала путешествия улитка заметила, что снова оказалась в точке  $A$ , а через 12,5 часов после начала путешествия захотела вернуться в точку  $A$  по кратчайшему пути, уже никуда не сворачивая. Какое расстояние ей придется проползти?

4. Вместо крестиков в выражение  $\times \cdot \times + \times \cdot \times + \dots + \times \cdot \times$  (50 слагаемых) расставили числа 1, ..., 100, каждое по одному разу. Какое максимальное и какое минимальное значение может иметь получившееся выражение?

5. Пусть  $x, y, z$  – произвольные действительные числа. Какое наименьшее значение может принимать выражение  $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(x-y)^2} + \sqrt{1+(y-z)^2} + \sqrt{1+(3-z)^2}$ ?

6. Даны два высоких цилиндрических стакана радиусов  $r$  и  $R$ ,  $r < R$ . Широкий поставили на горизонтальный стол, а узкий всеми возможными способами помещают на него так, что он опирается на кромку широкого двумя точками своей кромки и одной точкой боковой поверхности (рис.3). Опишите геометрическое место точек пространства, в которых может при этом оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.



Точки соприкосновения

Рис. 3

Опишите геометрическое место точек пространства, в которых может при этом оказаться верхняя точка кромки узкого стакана, соприкасающейся с широким.

Публикацию подготовили  
С.Ландо, Г.Мутафян, А.Эстеров

## ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2013»

### МАТЕМАТИКА

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов» по математике проводилась в 2012/13 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился с ноября 2012 года по январь 2013 года, задания публиковались на официальном сайте олимпиады <http://lomonosov.msu.ru>. К участию в заключительных (очных) этапах, которые проводились в марте 2013 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа. Отметим, что в 2013/14 учебном году отборочный этап олимпиады будет проводиться в режиме онлайн.

Ниже приведены задания, предлагавшиеся участникам олимпиады в 2012/13 учебном году.

#### *Отборочный этап*

##### *Вариант 1*

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

2. Котенок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок – четверть со своего конца, а щенок – треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

3. Последовательность  $a_1, a_2, \dots$  задана равенствами

$$a_1 = 100, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Найдите целое число, ближайшее к  $a_{2013}$ .

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса. На первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй – 50, на третий – 40, а на четвертый – 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол  $\alpha$ . Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол  $\beta$ . Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих при любом  $t \in \mathbb{R}$  двум неравенствам:

$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4 \sin t - 1) - \cos 2t.$$

Найдите площадь этой фигуры.

7. Вовочка написал на доске равенство  $101 = 11011$ . Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трехчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

9. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$ , причем  $\angle ANM = \angle ALC$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $LMN$ , две стороны которого равны 3 и 4.

10. При каких натуральных  $n$  и  $k$  неравенства  $|x_1| + \dots + |x_k| \leq n$  и  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq k$  имеют одинаковые количества целочисленных решений  $(x_1, \dots, x_k)$  и  $(y_1, \dots, y_n)$ ?

## МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Олимпиада школьников «Ломоносов» по механике и математическому моделированию проводилась в 2012/13 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился с ноября 2012 года по январь 2013 года, задания публиковались на официальном сайте олимпиады <http://lomonosov.msu.ru>. К участию в заключительных (очных) этапах, которые проводились в марте 2013 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры

отборочного этапа. Отметим, что в 2013/14 учебном году отборочный этап олимпиады будет проводиться в режиме онлайн.

Ниже приведены задания, предлагавшиеся участникам олимпиады в 2012/13 учебном году.

### *Отборочный этап*

#### *Вариант 1*

1. Камень подброшен вертикально вверх с начальной скоростью  $V$ . Пренебрегая силой сопротивления воздуха и полагая ускорение свободного падения равным  $10 \text{ м/с}^2$ , определите, при каких значениях  $V$  все моменты достижения высоты 10 м будут лежать между: а) одной и двумя секундами после начала движения; б) двумя и четырьмя секундами после начала движения.

2. Глобус имеет диаметр 20 см. Определите примерную площадь, которую занимает на этом глобусе территория России. Все недостающие для решения задачи данные найдите в справочниках.

3. В дачном поселке, где летом отдыхает Гаврила, есть водопровод с холодной водой. Родители мальчика установили водонагреватель, который имеет фиксированную мощность, если только температура находящейся в нем воды ниже  $100^\circ\text{C}$ . После входа водопроводной трубы в дом установили тройник, так что часть воды идет через нагреватель в горячий кран, а остальная вода – напрямую в холодный. Перед выходом горячая и холодная вода смешиваются. Гаврила полностью открыл холодный кран и узнал, что температура воды  $20^\circ\text{C}$ . Когда он закрыл холодный кран и открыл горячий – пошла вода с тем же расходом с температурой  $40^\circ\text{C}$ . Тогда Гаврила открыл оба крана одинаково так, что расход остался прежним. Какова температура воды в этом случае?

4. В десятилитровое ведро до краев насыпали смородину. Гаврила сразу же сказал, что в ведре 10 кг смородины. Глафира подумала и оценила массу ягод в ведре более точно. Как это сделать, если плотность ягоды смородины можно приблизительно считать равной плотности воды?

5. Две гантели, состоящие из невесомых стержней длины  $2L$  и одинаковых небольших шариков, скользят с одинаковыми скоростями  $V$  навстречу друг другу, как показано на рисунке 1. Опишите движение гантелей после соударения шаров в двух

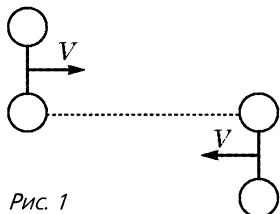


Рис. 1

случаях: а) удар абсолютно упругий; б) удар абсолютно неупругий.

6. Попробуйте максимально продвинуться в аналитическом решении приведенной ниже задачи. В случае необходимости на завершающем этапе может быть использован компьютер.

Пункт  $A$  расположен на лугу, пункт  $B$  – на песчаной пустоши. Расстояние между пунктами равно 24 км. Границей раздела пустоши и луга является прямая линия. Расстояние от пункта  $A$  до границы равно 8 км, расстояние от пункта  $B$  до границы равно 4 км. Найдите минимальное время, за которое пешеход попадет из пункта  $A$  в пункт  $B$ , если его максимальная скорость по пустоши равна 3 км/ч, а по лугу – 6 км/ч.

*Заключительный этап*

### *Вариант 2*

1. Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на три минуты быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее чем через две минуты, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже чем через 18 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

2. Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, упавших от точки старта на расстоянии не ближе чем 96% от расстояния, на котором упал дальше всех улетевший шарик, найдите тот, который проведет в полете наибольшее время. Чему равно это время? Ответ выразите в секундах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения

10 м/с<sup>2</sup>.

3. Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами  $r = 2$  см должны быть соединены плоской ремненной передачей (рис.2). Расстояние между осями вращения шкивов  $O_1$  и  $O_2$  равно 12 см, а между осями вращения шкивов  $O_1$  и  $O_3$  равно 10 см. Расстояние от оси  $O_3$

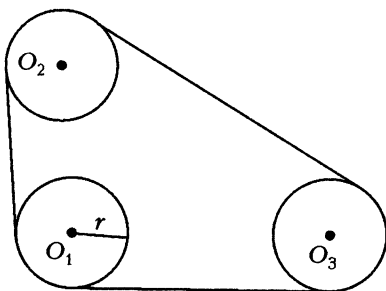


Рис. 2

до плоскости, в которой находятся оси  $O_1$  и  $O_2$ , равно 8 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путем сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 54 см?

4. При изучении работы нового типа теплового двигателя, работающего циклически, было обнаружено, что часть периода он получает тепло, причем абсолютная величина мощности теплоподвода выражается законом

$$P_1(t) = P_0 \frac{\sin \omega t}{100 + \sin^2 t}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{\omega}.$$

Газ совершает работу, развивая механическую мощность

$$P_2(t) = 3P_0 \frac{\sin(2\omega t)}{100 + \sin(2t)^2}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2\omega}.$$

Работа над газом, которую совершают внешние тела, составляет  $2/3$  от величины совершенной газом работы. Определите КПД двигателя.

5. Вся местность разбита на квадраты, обозначенные двумя целыми индексами  $M$  и  $N$  так, что, например, точка с координатами  $x = 12,25$ ,  $y = 20,9$  находится в квадрате номер  $[12; 20]$ , а точка с координатами  $x = -12,34$ ,  $y = 0,1239$  находится в квадрате номер  $[-13; 0]$  и так далее. Загадочный объект движется в плоскости  $Oxy$  по траектории

$$y = \left( \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 \right)^5,$$

а луч радара на местности направлен вдоль линии  $y = x + 2013$ . Укажите номера всех квадратов, в которых радаром будет зарегистрировано появление загадочного объекта.

6. Имеется очень много однородных круглых дисков одинаковой толщины и одинаковой плотности. Эти диски выставляют на горизонтальную доску так, что плоскость дисков вертикальна. Два соседних диска касаются друг друга, причем радиусы двух соседних дисков относятся как  $2:1$ . Диск слева всегда больше диска справа (рис.3). Радиус наибольшего диска равен 2 м. Определите расстояние от центра наибольшего диска до центра масс системы.

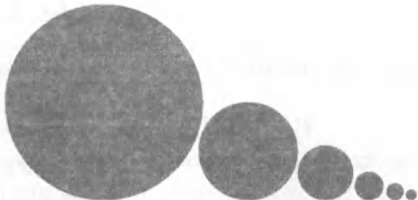


Рис. 3

### Вариант 3

1. Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на пять минут быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее чем через шесть минут, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже чем через 60 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

2. Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, прошедших в полете не менее 80% от времени полета летевшего дольше всех шарика, найдите тот, который упадет от точки старта на наибольшем расстоянии. Чему равно это расстояние? Ответ выразите в метрах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения 10 м/с<sup>2</sup>.

3. Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами  $r = 3$  см должны быть соединены плоской ременной передачей (см. рис.2). Расстояние между осями вращения шкивов  $O_1$  и  $O_2$  равно 10 см, а между осями вращения шкивов  $O_1$  и  $O_3$  равно 13 см. Расстояние от оси  $O_3$  до плоскости, в которой находятся оси  $O_1$  и  $O_2$ , равно 12 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путем сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 60 см?

4. При изучении работы нового типа теплового двигателя, работающего циклически, было обнаружено, что часть периода он получает тепло, причем абсолютная величина мощности теплоподвода выражается законом

$$P_1(t) = P_0 \frac{t}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \frac{1}{150 + \cos\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad 0 < t < \tau.$$

Газ совершает работу, развивая механическую мощность

$$P_2(t) = 2P_0 \frac{3t}{\tau} \left(1 - \frac{3t}{\tau}\right) \frac{1}{150 + \cos\left(\frac{3t}{\tau}\right)^2}, \quad 0 < t < \frac{\tau}{3}.$$

Работа над газом, которую совершают внешние тела, составляет

3/4 от величины совершенной газом работы. Определите КПД двигателя.

5. Загадочный объект движется в плоскости  $Oxy$  по траектории

$$y = \left( \left( \left( x^5 + 2013 \right)^5 + 2013 \right)^5 + 2013 \right)^5,$$

а луч радара на местности направлен вдоль линии  $y = x - 2013$ . Вся местность разбита на квадраты, обозначенные двумя целыми индексами  $M$  и  $N$  так, что, например, точка с координатами  $x = 17,25$ ,  $y = 21,9$  находится в квадрате номер  $[17; 21]$ , а точка с координатами  $x = 0,34$ ,  $y = -10,1239$  находится в квадрате номер  $[0; -11]$  и так далее. Укажите номера всех квадратов, в которых радаром будет зарегистрировано появление загадочного объекта.

6. См. задачу 6 варианта 2.

## ФИЗИКА

В 2012/13 учебном году олимпиада «Ломоносов» по физике проводилась в два этапа – отборочный и заключительный.

### *Отборочный этап*

Отборочный этап проходил в форме заочного испытания. На этом этапе каждый ученик мог участвовать по собственному выбору в одном, двух или трех турах, проводимых по единой форме и с равноценными заданиями. Задания олимпиады были размещены в интернете на сайте <http://distant.phys.msu.ru>. Доступ к условиям заданий был открыт для участников трижды: с 17 по 21 ноября 2012 года (1-й тур), с 1 по 5 декабря 2012 года (2-й тур) и с 11 по 15 января 2013 года (3-й тур). Прием решений и ответов по каждому из туров прекращался одновременно с их завершением. После прохождения всех туров олимпиады каждый участник до 19 января 2013 года должен был самостоятельно определить номер тура, который для него является официальным. Победители и призеры отборочного этапа были приглашены для участия в заключительном этапе олимпиады.

Ниже приводятся примеры заданий для участников отборочного тура олимпиады.

### *7–9 классы*

1. Эскалатор метро поднимает идущего по нему вверх пассажира за время  $t_1 = 2$  мин, а стоящего на нем – за время  $t_2 = 3$  мин. Сколько времени  $t$  спустился бы пассажир по неподвиж-



ному эскалатору, если бы шел с той же по модулю скоростью, с какой он поднимался по движущемуся эскалатору? Ответ приведите в минутах, округлив до целых.

2. В дне цилиндрической открытой банки вместимостью  $V_0 = 100 \text{ см}^3$  проделали отверстие и припаяли к дну трубку, расположив ее перпендикулярно дну. Затем банку поставили

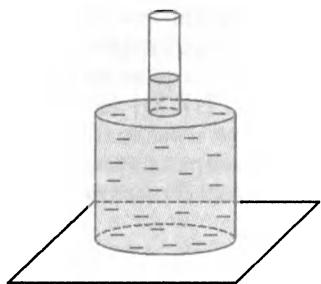


Рис. 4

вверх дном на тонкий лист резины, лежащий на горизонтальном столе, как показано на рисунке 4. Потом через трубку в банку стали медленно наливать воду. Когда объем налитой воды превысил  $V = 110 \text{ см}^3$ , вода начала подтекать из-под края банки на резиновый лист. Найдите массу  $m$  банки с трубкой, если площади поперечного сечения банки и трубки равны  $S = 10 \text{ см}^2$  и  $s = 1 \text{ см}^2$  соответственно. Плот-

ность воды  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ . Ответ приведите в граммах, округлив до целых.

3. Туристы, собираясь в зимний поход, взяли с собой портативный примус и запас бензина. На привале им потребовалась вода для приготовления пищи. Они решили растапливать снег в железном котелке, поставив его на примус. Стояла оттепель, и температура снега была  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , причем снег был мокрым, т.е. его масса состояла на 80% из массы кристалликов льда и на 20% из массы воды. Какую массу  $m_6$  бензина затратили туристы, чтобы получить  $V = 2 \text{ л}$  воды при температуре  $t = 100^\circ\text{C}$ ? Плотность воды  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ , удельная теплоемкость воды  $c_v = 4,2 \text{ кДж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$ , масса котелка  $M = 400 \text{ г}$ , удельная теплоемкость железа  $c_{\text{ж}} = 0,46 \text{ кДж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$ , удельная теплота сгорания бензина  $q = 44 \text{ МДж/кг}$ . Считайте, что на нагрев воды и котелка идет  $\eta = 40\%$  количества теплоты, выделяющегося при сгорании бензина. Ответ приведите в граммах, округлив до целого.

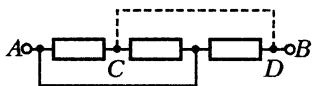


Рис. 5

4. Три одинаковых резистора соединены в цепь, схема которой изображена на рисунке 5, причем сопротивление между точками A и B равно  $R_{AB} = 3 \text{ Ом}$ . Чему станет равным сопротивление  $R'_{AB}$  между

точками  $A$  и  $B$ , если точки  $C$  и  $D$  соединить проводником, как показано на рисунке штриховой линией?

5. Поезд начинает двигаться с постоянным ускорением и проходит начальный отрезок пути разгона, составляющий  $1/9$  часть от полного пути разгона, со средней скоростью  $v_{\text{ср}} = 10$  км/ч. Какова скорость  $v$  поезда в конце пути разгона? Ответ приведите в км/ч и округлите до целых.

### 10–11 классы

1. С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью  $v_0 = 5$  м/с. В тот момент, когда он достиг верхней точки, снизу, с того же места, подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени  $t$ , в течение которого первый шарик находился в полете от момента броска до момента соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ округлите до одного знака после запятой.

2. Шарик массой  $m = 100$  г подвешен на двух одинаковых нитях длиной  $a = 1$  м каждая так, что точки подвеса нитей расположены на одной горизонтали. Расстояние между точками подвеса нитей  $b = 1$  м. Найдите силу натяжения  $T$  правой нити сразу после пережигания левой нити. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Нити считайте нерастяжимыми. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

3. В вертикально расположенном цилиндре находится кислород массой  $m = 64$  г, отделенный от атмосферы поршнем, который соединен с дном цилиндра пружиной жесткостью  $k = 8,3 \cdot 10^2$  Н/м (рис.6). При температуре  $T_1 = 300$  К поршень располагается на расстоянии  $h = 1$  м от дна цилиндра. До какой температуры  $T_2$  надо нагреть кислород, чтобы поршень расположился на высоте  $H = 1,5$  м от дна цилиндра? Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль · К), молярная масса кислорода  $M = 32$  г/моль. Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до одного знака после запятой.

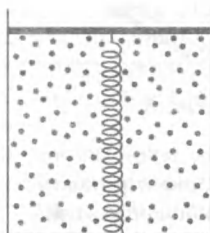


Рис. 6

4. В плоский воздушный конденсатор вставили диэлектрическую пластину так, что она заняла половину пространства

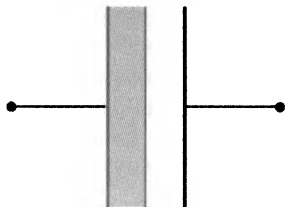


Рис. 7

между обкладками конденсатора (рис.7). При этом емкость конденсатора увеличилась в  $n = 1,6$  раза. Определите диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  пластины. Ответ округлите до целых.

5. На расстоянии  $f = 15$  м от объектива проекционного аппарата расположен экран размером  $2 \times 3$  м. На экране получено четкое изображение диапозитива, имеющего размер  $24 \times 36$  мм. При этом изображение занимает половину площади экрана. Рассчитайте оптическую силу  $D$  тонкой линзы, которую следует вплотную приставить к объективу проекционного аппарата, чтобы четкое изображение точно уложилось в размеры экрана. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ приведите в диоптриях, округлив до одного знака после запятой.

6. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной поверхностью угол  $\vartheta = 30^\circ$ , закреплен желоб, как показано на

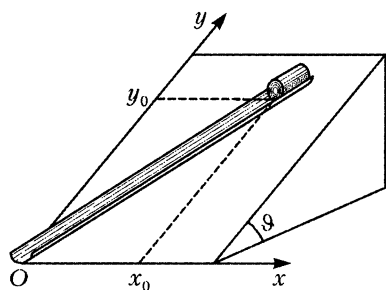


Рис. 8

рисунке 8. С плоскостью связана координатная система  $xu$ , начало которой совмещено с нижней точкой  $O$  желоба. По желобу из состояния покоя начинает соскальзывать маленькая гирька. Найдите скорость  $v$  гирьки в нижней точке желоба, если начальные координаты гирьки равны  $x_0 = 0,5$  м,  $y_0 = 1$  м, а коэффициент трения между

гирькой и желобом  $\mu = 0,3$ . Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ответ округлите до одного знака после запятой.

### Заключительный этап

Заключительный этап олимпиады был назначен на 15 марта 2013 года. Для учащихся 7–9 классов он проходил в дистанционной форме по единому заданию, доступ к которому был открыт в течение 4 часов на сайте <http://distant.phys.msu.ru>. Для учащихся 10–11 классов заключительный этап проводился в очной форме на физическом факультете МГУ и на 12 региональных площадках в городах Барнаул, Брянск, Волгоград, Воро-

неж, Кемерово, Нальчик, Пермь, Саров, Таганрог, Уфа, Чебоксары и Челябинск. Задания были составлены в полном соответствии с Кодификатором элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для единого государственного экзамена 2013 года по физике и охватывали основные разделы Кодификатора, а именно: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику и 4) оптику. Типовое задание состояло из четырех различных разделов, состоящих из кратких вопросов по теории и дополняющих их задач. В первом разделе были помещены задания по механике, во втором разделе – задания по молекулярной физике и термодинамике, в третьем разделе – задания по электродинамике, в четвертом разделе – задания по оптике.

Ниже приводятся примеры заданий заключительного этапа олимпиады.

### *7–9 классы*

**1.** Два автобуса выехали с автостанции друг за другом с интервалом  $\tau_1 = 10$  мин и, набрав за одно и то же время скорость  $v = 60$  км/ч, отправились в другой город. По дороге они обогнали движущегося в том же направлении велосипедиста. Какова скорость велосипедиста  $u$ , если автобусы проехали мимо него с интервалом  $\tau_2 = 15$  мин? Ответ приведите в км/ч, округлив до целых.

**2.** Античные монеты часто чеканились из электра – сплава золота и серебра. Археолог, найдя такую монету, взвесил ее. Оказалось, что вес монеты в воде отличается от ее веса в воздухе на  $k = 8\%$ . Какова массовая доля  $X$  золота в этой монете? Считайте, что плотности золота и серебра больше плотности воды в  $n_1 = 20$  и  $n_2 = 10$  раз соответственно. Ответ приведите в процентах, округлив до целых.

**3.** В калориметр с водой влили одну ложку теплой воды. В результате установившаяся в калориметре температура превысила первоначальную температуру на  $\Delta t_1 = 5^\circ\text{C}$ . После вливания еще одной ложки той же теплой воды установившаяся температура увеличилась еще на  $\Delta t_2 = 3^\circ\text{C}$ . Пренебрегая теплообменом калориметра и его содержимого с окружающими телами, определите, на какую величину  $\Delta t$  температура наливаемой в калориметр теплой воды превышает первоначальную температуру калориметра с водой. Ответ приведите в градусах Цельсия, округлив до целых.

**4.** Отец с сыном стоят напротив плоского зеркала, закрепленного на вертикальной стене, причем нижний край зеркала

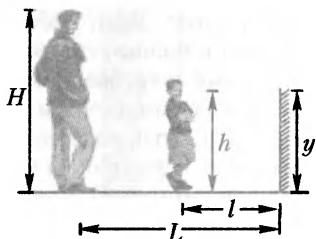


Рис. 9

находится у пола (рис.9). Расстояние от зеркала до сына  $l = 3$  м, а расстояние от зеркала до его отца  $L = 6$  м. На каком минимальном расстоянии  $y$  от пола должен находиться верхний край зеркала, чтобы сын мог видеть в зеркале отца в полный рост? Расстояние от пола до уровня глаз сына  $h = 1,2$  м, рост отца  $H = 1,8$  м. Ответ приведите в метрах, округлив до одного знака после запятой.

## 10–11 классы

### Задание

1. Дайте определение угловой скорости точки при ее равномерном движении по окружности. Запишите формулу для вычисления ускорения точки при таком движении.

**Задача.** Свинцовый шар массой  $m = 1$  кг, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной  $L = 1$  м в камере, из которой откачан воздух, движется по окружности в горизонтальной плоскости, совершая  $n = 60$  оборотов в минуту. При этом нить все время натянута. В некоторый момент времени в камеру впускают воздух. Какую работу  $A$  совершит сила сопротивления воздуха за время, в течение которого угловая скорость движения шара уменьшится в 2 раза? Считайте, что сила сопротивления достаточно мала. Размерами шара можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

2. Какие виды парообразования вы знаете? Что такое удельная теплота парообразования?

**Задача.** В сосуде находится влажный воздух. При изотермическом сжатии его объем уменьшился в 5 раз, а давление увеличилось в 3 раза. При дальнейшем изотермическом сжатии в 3 раза давление в итоге стало в 7 раз больше первоначального. Какую относительную влажность  $\phi$  имел воздух до начала сжатия?

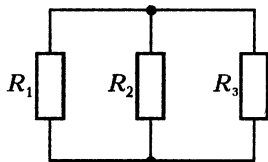


Рис. 10

3. Как определяются модуль и направление вектора магнитной индукции? Что такое линии магнитной индукции?

**Задача.** Изображенный на рисунке 10 электрический контур находится в магнитном поле с индукцией  $B_0 =$

$= 1$  Тл, направленной по нормали к контуру. Площадь каждой половины контура  $S = 0,1 \text{ м}^2$ , сопротивления резисторов равны:  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 2,5 \text{ Ом}$ . Индукция магнитного поля уменьшается до нуля по закону  $B = B_0 - \alpha t$ , где  $\alpha = 1 \text{ Тл/с}$ . Какое количество теплоты выделится при этом на сопротивлении  $R_2$ ?

4. Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы отражения света.

**Задача.** Параллельный пучок света падает на оптическую систему, состоящую из призмы с малым преломляющим углом  $\alpha = 0,05$  рад и линзы с фокусным расстоянием  $F = 20$  см, в фокальной плоскости которой расположен экран (рис.11). Пучок собирается на экране в точке, находящейся на расстоянии  $d = 0,5$  см от главной оптической оси линзы. Определите показатель преломления призмы  $n$ . При вычислениях используйте приближенные равенства  $\sin \vartheta \approx \text{tg } \vartheta \approx \vartheta$ , где  $\vartheta$  – малый угол, выраженный в радианах.

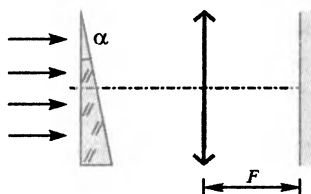


Рис. 11

Публикацию подготовили А.Зеленский, О.Косухин,  
Л.Крицков, Е.Могилевский, В.Панфёров, А.Разборов,  
И.Сергеев, В.Ушаков, С.Чесноков, И.Шейпак, М.Юмашев

## ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

### МАТЕМАТИКА

В соответствии с Порядком проведения олимпиад школьников олимпиада «Покори Воробьевы горы!» по математике проводилась в 2012/13 учебном году в два этапа: отборочный и заключительный. Отборочный этап проводился с ноября 2012 года по январь 2013 года, задания публиковались на официальном сайте олимпиады <http://mk.ru/msu>. К участию в заключительном (очном) этапе, который проводился в марте 2013 года в Москве и ряде городов России, допускались только победители и призеры отборочного этапа. Отметим, что в 2013/14 учебном году отборочный этап олимпиады будет проводиться в режиме онлайн.

Ниже приведены задания, предлагавшиеся учащимся выпускных классов в 2012/13 году.

#### *Отборочный этап*

1. Карлсон заполнил конический фужер лимонадом и отпил половину по высоте (считая от поверхности жидкости до вершины конуса), а вторую половину допил Малыш. Во сколько раз Карлсон выпил лимонаду больше, чем Малыш?

2. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{7}{3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin\left(x + 3^0 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 3^1 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \dots + \sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1.$$

4. Какие значения может принимать угол при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что можно провести ровно три прямые, делящие площадь и периметр этого треугольника пополам?

5. Мальвина и Буратино играют по следующим правилам: Мальвина записывает на доске в ряд шесть различных чисел, а

Буратино придумывает для них свои четыре числа  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и под каждым числом Мальвины пишет соответственно какую-либо из сумм  $x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4, x_2 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_4$  (каждую по разу), после чего за каждую сумму, равную стоящему над ней числу, Буратино получает по 3 яблока, а за бóльшую его – по 1 яблоку. Какое наибольшее количество яблок может гарантированно получить Буратино?

6. Найдите все четырехзначные числа  $\overline{abcd}$  (где  $a, b, c, d$  – цифры десятичной записи), каждое из которых служит делителем хотя бы одного из трех образованных по нему четырехзначных чисел  $\overline{bcda}, \overline{cdab}, \overline{dabc}$ .

7. При каких значениях  $a$  уравнение  $[x]^2 + 2012x + a = 0$  (где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ) имеет наибольшее количество решений? Каково это количество?

8. В координатном пространстве найдите длину кратчайшего пути между точками  $(0; 1; 2)$  и  $(22; 4; 2)$  по поверхности прямоугольного параллелепипеда, ограниченного плоскостями  $x = 22, y = 5, z = 4$  и тремя координатными плоскостями.

9. В классе, состоящем из 21 ученика, любые три ученика ровно один раз делали вместе домашнее задание, причем либо по математике, либо по русскому языку. Можно ли утверждать, что в этом классе существует четверка учеников, любые трое из которых делали вместе домашнее задание по одному и тому же предмету?

### *Заключительный этап*

Варианты, предлагавшиеся участникам заключительного этапа в разных городах России, отличались друг от друга. Здесь приводятся избранные задачи из разных вариантов.

1. Найдите все значения  $x$ , при каждом из которых выражения  $\log_{2013}(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x)$  и  $\log_{2012}(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x)$  равны друг другу.

2. Найдите все пары натуральных  $x, y \in [1; 8]$ , удовлетворяющих равенству

$$\sqrt{xx, xxx\dots} = y, yyy\dots$$

(десятичная запись каждого из чисел  $xx, xxx\dots$  и  $y, yyy\dots$  состоит из бесконечного количества одинаковых цифр).

3. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{2012} 2013 \text{ или } \log_{2013} 2014.$$



4. Выясните, какое из чисел больше:

$$\frac{\lg 2013}{2 \lg 2} \text{ или } 2 \lg \frac{2013}{2}.$$

5. Выясните, какое из чисел больше:

$$\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(3\sqrt{3}-2\sqrt{6}) \text{ или } 4\sqrt{3}-9.$$

6. Выясните, какое из чисел больше:

$$\arctg(1+\sqrt{2}) + \operatorname{arccctg}(1-\sqrt{2}) \text{ или } \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

7. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством  $\sqrt{\arcsin x} \leq \sqrt{\arccos y}$ .

8. Точки  $M$  и  $N$  делят сторону  $AC$  треугольника  $ABC$  на три части, каждая из которых равна 2, причем  $AB \perp BM$ ,  $BC \perp BN$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

9. Высоты остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите угол  $ACB$ , если  $AB : OC = 2$ .

10. Кратчайшее расстояние от вершины  $B$  треугольника  $ABC$  до точек противоположающей стороны равно 12. Найдите стороны

$AB$  и  $BC$  этого треугольника, если  $\sin \angle C = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $AC = 5$ .

11. В окружности проведены диаметр  $AB$  и параллельная ему хорда  $CD$ . Касательная к окружности в точке  $A$  пересекает прямые  $BC$  и  $BD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите  $AQ$ , если  $AP = 2$  и  $AB = 4$ .

12. Определите, сколько корней на промежутке  $[-\pi; \pi]$  имеет уравнение  $\frac{2 \cos 4x + 1}{2 \cos x - \sqrt{3}} = \frac{2 \sin 4x - \sqrt{3}}{2 \sin x - 1}$ , и укажите эти корни.

13. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых для любого значения  $b$  система

$$\begin{cases} (x+1)^2 + |y-1| = 2, \\ y = b|2x+1| + a \end{cases}$$

имеет решения.

14. Выясните, сколько корней имеет уравнение

$$\left(21x - 11 + \frac{\sin x}{100}\right) \sin(6 \arcsin x) \sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0.$$

15. Решите неравенство  $4x + 2 + \sqrt{4-x} > x^2 + \sqrt{x^2 - 5x + 2}$ .

**16.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y| + |y - x| \leq a - |x - 1|, \\ (y - 4)(y + 3) \geq (4 - x)(3 + x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**17.** Какие значения может принимать выражение  $x - y + 1$  при условии  $(x - y)^2 = 2|2y - x| + x + 15$ ?

**18.** Решите уравнение

$$\log_3(x + 1) \log_3(2x - 1) (3 - \log_3(2x^2 + x - 1)) = 1.$$

*Публикацию подготовили П.Бородин, А.Зеленский,  
О.Косухин, Л.Крицков, А.Панкратьев, В.Панфёров,  
А.Разборов, И.Сергеев, В.Ушаков, И.Шейпак, М.Юмашев*

## ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

### МАТЕМАТИКА

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений*

1. Катер по реке и автобус по дороге, идущей вдоль берега реки, отправляются одновременно из пункта  $A$  в находящийся ниже по течению пункт  $B$  и совершают безостановочное движение между  $A$  и  $B$ . Первая их встреча произошла, когда автобус прошел  $5/9$  всего расстояния от  $A$  до  $B$ , а вторая встреча – когда автобус после первого захода в  $B$  проехал  $1/8$  всего расстояния от  $B$  до  $A$ . Первый раз в пункт  $B$  автобус прибыл на 16 минут позже катера. Через сколько часов после начала движения автобус и катер первый раз окажутся одновременно в пункте  $A$ , если скорость катера в неподвижной воде и скорость автобуса постоянны?

2. Последовательность  $u_0, u_1, u_2 \dots$  удовлетворяет следующим соотношениям:  $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ , если  $n$  – четное и  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ , если  $n$  – нечетное. Известно, что  $u_0 = 1, u_1 = 2$ . Найдите  $u_{2013}$ . Ответ обоснуйте.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 2 \cos^3 y, \\ \sin x = 2 \sin^3 y. \end{cases}$$

4. Функция  $f(x)$  определена при всех значениях переменной  $x$ . При этом для всех  $x$  выполняется равенство  $(f(x - 2013) - 1)(f(x + 2013) - 1) = -2$ . Докажите, что функция  $f(x)$  является периодической.

5. В трапеции  $ABCD$  длины оснований  $BC$  и  $AD$  равны, соответственно, 1 и 3. Точка  $E$  – середина  $AD$ . Отрезки  $BE$  и  $CE$  пересекаются с диагоналями  $AC$  и  $BD$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что отрезок  $MN$  параллелен основаниям трапеции. Найдите длину отрезка  $MN$ .

6. Найдите наименьшее натуральное число  $n$  такое, что число  $n + 2012$  делится нацело на 2013, а число  $n + 2013$  делится нацело на 2012. Ответ обоснуйте.

7. Имеется линейка – «рейсшина», с помощью которой можно выполнять следующие элементарные действия: проводить прямую линию через две точки и проводить прямые, параллельные уже имеющимся. На плоскости изображены два треугольника (рис. 1), имеющие одинаковые длины двух сторон, расположенных на одной прямой. С помощью данной линейки постройте



Рис. 1

новый треугольник, имеющий площадь, равную сумме площадей изображенных треугольников. Опишите последовательность элементарных действий для построения фигуры.

8. В некоторой стране имеется  $n$  городов. Города соединяются не пересекающимися между собой дорогами. Из каждого города выходят ровно три дороги, по которым из города можно выехать и, соответственно, въехать. Все дороги в стране пронумерованы цифрами 1, 2 и 3 так, что из каждого города выходят дороги с тремя различными номерами 1, 2, 3. Докажите, что такая конфигурация дорог возможна только при четном числе  $n$ . Для произвольного четного  $n$  постройте пример расположения городов и дорог.

9. Пусть выполнены условия задачи 8. Путешественник выехал из некоторого города  $A$ , избрав себе следующий маршрут движения: из города  $A$  он выезжает по дороге с номером 1, из следующего города – по дороге с номером 2, затем с номером 3, далее – снова по дорогам с номерами 1, 2, 3, 1, 2, ... Докажите, что при таком маршруте движения путешественник обязательно вернется в город  $A$ .

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 10} + x = 0.$$

2. Решите уравнение

$$1 - \sin 2x = 4(\cos x - \sin x).$$

3. Решите неравенство

$$\log_x \log_4 (16^x - 20) \geq 1.$$

4. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагонали перпендикулярны, а длина отрезка, соединяющего середины сторон  $AB$  и  $CD$ , равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего середины сторон  $BC$  и  $AD$ .

5. Два двигателя начали работать одновременно, но первый прекратил работу на 2 часа позже второго. При этом первый израсходовал 300 г топлива, а второй – 192 г. Какое количество топлива в час расходует первый двигатель, если он затрачивает в час на 6 г топлива больше, чем второй?

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + 4y - 2a + 2 = 0, \\ (|x| + x)(y - a) = 2 \end{cases}$$

имеет решения.

## ФИЗИКА

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений*

### Вариант 1

1 (2 балла). Кошка бежит за мышкой по окружности радиусом  $R = 5$  м с постоянной скоростью  $v_k = 40$  км/ч. Когда расстояние по дуге между ними было равно  $1/8$  длины окружности, мышка начала убегать со скоростью  $v_m = 50$  км/ч. Через какое время мышка удалится от кошки на расстояние, равное половине длины окружности?

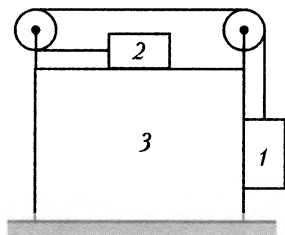


Рис. 2

2 (4 балла). Найдите модуль и направление ускорения груза 1 в системе, изображенной на рисунке 2. Горизонтальная плоскость гладкая, трения между грузами нет, нить и блоки невесомы, нить нерастяжима, массы всех трех грузов одинаковы. В начальный момент все тела покоятся. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

3 (3 балла). Три одинаковые тележки стоят на горизонтальном столе, между тележками находятся две одинаковые пружины, причем они прикреплены только ко второй тележке. Пружины максимально сжаты, т.е. уменьшить расстояние между тележками невозможно. Сначала отпускают пружину между первой и второй тележками, а затем, через некоторое время, – между

второй и третьей тележками. Найдите скорость третьей тележки. Известно, что если вторую тележку пружиной прислонить к вертикальной стене и максимально сжать, а затем отпустить, то тележка приобретет скорость  $v$ . Трение не учитывайте.

4 (3 балла). Три вертикальные тонкие металлические пластинки площадью  $S$  каждая расположили параллельно друг другу на расстояниях  $d_1$  и  $d_2$  друг от друга. Средняя пластинка заряжена зарядом  $Q$ , крайние не заряжены. Затем крайние пластинки соединили проводником. Какой заряд протечет по проводнику? Размеры пластин много больше расстояния между ними.

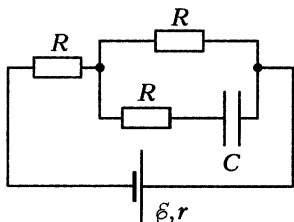


Рис. 3

5 (2 балла). В схеме изображенной на рисунке 3, найдите заряд конденсатора. Известно, что  $R = 2 \text{ Ом}$ ,  $C = 1 \text{ мкФ}$ ,  $\varepsilon = 10 \text{ В}$ ,  $r = 1 \text{ Ом}$ .

6 (3 балла). Не дожидаясь автобуса, пешеход пошел пешком к следующей автобусной остановке, павильон которой был виден вдали. Через некоторое время он обнаружил, что кажущаяся высота этого павильона в  $k = 1,5$  раза меньше кажущейся высоты павильона, от которого он отошел. Пройдя еще  $L = 100 \text{ м}$ , пешеход заметил, что теперь павильон впереди, наоборот, кажется ему в  $k = 1,5$  раза выше павильона позади. Найдите расстояние между остановками. Считайте, что кажущийся размер предмета обратно пропорционален расстоянию до него. Остановочные павильоны одинаковые, пешеход идет по соединяющей их прямой.

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Тело падает вертикально вниз с высоты  $h = 20 \text{ м}$  без начальной скорости. Определите модуль средней скорости падения  $v_{\text{ср}}$ .

2. Определите работу одного моля газа в процессе  $1-2-3-1$ , изображенном на рисунке 4. В состояниях 2 и 3 давление вдвое больше, чем в состоянии 1. В состоянии 3 объем втрое больше, чем в состоянии 1. Температура в состоянии 1 равна  $T$ .

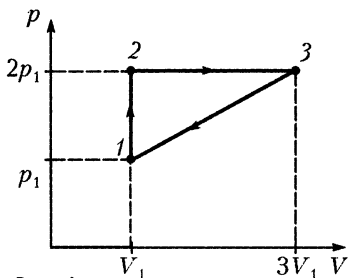


Рис. 4

3. Одинаковые одноименные точечные заряды  $q = 4 \cdot 10^{-7}$  Кл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a = 1$  м. Определите значение напряженности в третьей вершине треугольника.

4. Протон движется со скоростью  $v = 10^6$  м/с перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией  $B = 1$  Тл. Найдите радиус окружности, по которой он движется.

5. На экран с круглым отверстием радиусом  $r = 10$  см падает сходящийся пучок света. Угол между крайним лучом и осью симметрии  $\alpha = 30^\circ$ . Определите точку, в которой сходятся лучи, если в отверстие вставляется собирающая линза с оптической силой  $D = 10$  дптр.

*Публикацию подготовили М.Алексеев, С.Мотылев*

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА**

ФИЗИКА

Олимпиада-2013

I тур

Вариант 1

1. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно – вертикально вверх, другое – под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Начальная скорость каждого тела  $v_0 = 20$  м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через  $t = 0,5$  с.

2. Два пружинных маятника имеют одинаковые массы грузов. На графике (рис.1) показана зависимость сил упругости пружин этих маятников  $F_{\text{упр}}$  от растяжения  $\Delta L$ . Частота колебаний какого маятника больше?

Объясните, почему.

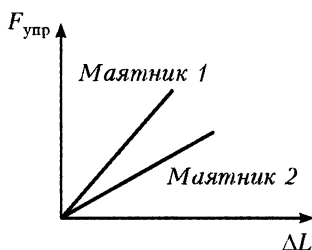


Рис. 1

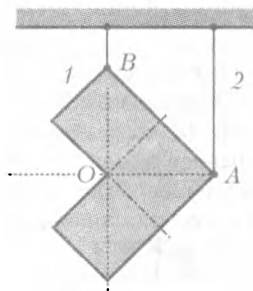


Рис. 2

3. В сплошной однородной тонкой пластине, имеющей форму квадрата со стороной  $L$  и первоначальную массу  $M$ , вырезали квадрат со стороной  $L/2$ , как показано на рисунке 2. Пластину подвесили за углы  $A$  и  $B$  на двух невесомых нитях 1 и 2. Определите силу натяжения нити 2.



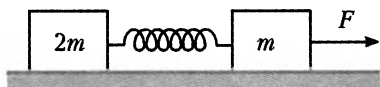


Рис. 3

4. На горизонтальной плоскости лежат два бруска массами  $m$  и  $2m$ , соединенные ненапряженной пружиной (рис.3). Какую наименьшую

постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой  $m$ , чтобы сдвинулся и второй брусок?

Коэффициент трения брусков о плоскость равен  $\mu$ .

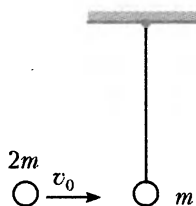


Рис. 4

5. На шарик массой  $m$ , подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной  $L$ , налетает и прилипает к нему пластилиновый шарик массой  $2m$ , двигавшийся до удара по горизонтали со скоростью  $v_0$  (рис.4). Определите натяжение нити сразу после удара.

6. Определите количество теплоты, сообщенное идеальному одноатомному газу в процессе  $abc$  (рис.5), если  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 2$  л,  $p_1 = 4 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 10^6$  Па.

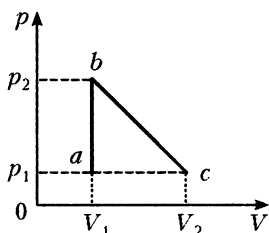


Рис. 5

7. В вершинах равностороннего треугольника  $ABC$  со стороной  $a$  расположены точечные заряды:  $-2q$  в вершине  $A$ ,  $-q$  в вершине  $B$  и  $+q$  в вершине  $C$ . Определите работу сил электрического поля при перемещении заряда  $-q$  из вершины  $B$  в точку  $D$ , расположенную в середине стороны  $AC$ .

8. Положительно заряженная частица движется с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  в стационарном однородном электромагнитном поле (рис.6). Определите модуль и направление вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ , если вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $z$ .

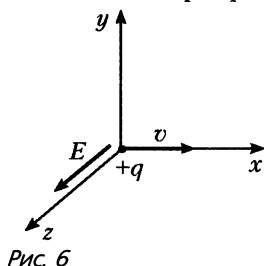


Рис. 6

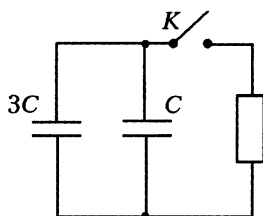


Рис. 7

9. В электрической схеме, показанной на рисунке 7, емкости плоских конденсаторов равны  $C$  и  $3C$ . Расстояние между обклад-

ками конденсатора емкостью  $3C$  равно  $d$ , а сила притяжения между его обкладками равна  $F$ . Определите количество теплоты  $Q$ , выделившееся на сопротивлении после замыкания ключа  $K$ .

10. Тонкое проволочное кольцо площадью  $S = 100 \text{ см}^2$ , имеющее сопротивление  $R = 0,01 \text{ Ом}$ , помещено в однородное магнитное поле.

Изменение проекции ( $B_x$ ) вектора магнитной индукции этого поля на ось  $x$ , перпендикулярную плоскости кольца, от времени представлено на графике (рис.8). Найдите заряд  $q$ , прошедший через поперечное сечение кольца за интервал времени от  $t = 2 \text{ с}$  до  $t = 8 \text{ с}$ . Индуктивностью кольца пренебречь.

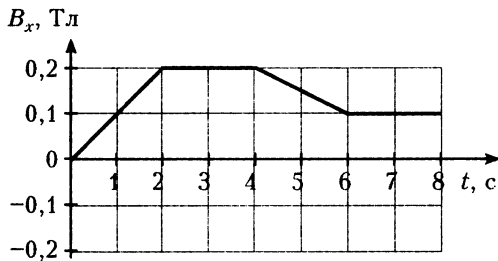


Рис. 8

### Вариант 2

1. Движение материальной точки описывается уравнениями  $x = 10 \cos 3t$  (см),  $y = 10 \sin 3t$  (см). Определите скорость и ускорение точки.

2. Кусок железа весит в воде  $9,8 \text{ Н}$ . Определите его объем. Плотность железа  $\rho_{\text{ж}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

3. Какую минимальную горизонтальную силу  $F$  (рис.9) нужно приложить к однородному кубику со стороной  $b$  и массой  $m = 1 \text{ кг}$ , чтобы его опрокинуть? При каком коэффициенте трения  $\mu$  между кубиком и столом это возможно?

4. Две пружины, жесткости которых  $k$  и  $2k$ , соединены вместе и стоят вертикально на столе (рис.10).

Их общая длина  $L$ . С высоты  $H$  над столом на них падает с начальной скоростью, равной нулю, небольшой шарик массой  $m$ . Какую максимальную скорость

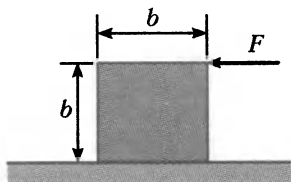


Рис. 9

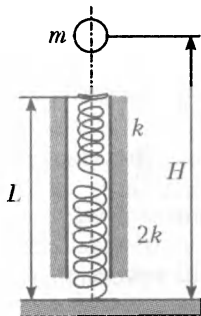


Рис. 10

будет иметь шарик при своем движении вниз? Массой пружин и трением пренебречь.

5. Максимальная кинетическая энергия материальной точки массой  $m = 10$  г, совершающей гармонические колебания с периодом  $T = 2$  с, равна  $W = 1 \cdot 10^{-4}$  Дж. Определите амплитуду  $A$  колебаний этой точки.

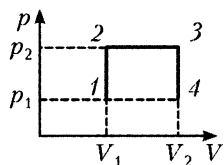


Рис. 11

6. Найдите количество теплоты, которое сообщено идеальному одноатомному газу в процессе 1-2-3-4 (рис.11), если  $V_1 = 1$  л,  $V_2 = 2$  л,  $p_1 = 9 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 2 \cdot 10^6$  Па.

7. Два равномерно заряженных тонких кольца расположены в одной плоскости и имеют общий центр, в котором находится положительный точечный заряд  $q$ . Линейная плотность зарядов одного кольца  $+\tau$ , а радиус  $R$ . Линейная плотность зарядов второго кольца  $-\tau$ , а радиус  $2R$ . Найдите работу сил электрического поля при перемещении заряда  $q$  из центра колец в бесконечность, где потенциал поля можно считать равным нулю.

8. Две частицы, имеющие отношение зарядов  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{4}$  и отношение масс  $\frac{m_1}{m_2} = 2$ , влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям индукции и движутся по окружностям. Определите отношение радиусов траекторий  $\frac{r_1}{r_2}$  частиц, если отношение их скоростей  $\frac{v_1}{v_2} = 2$ .

9. Найдите силу притяжения между пластинами плоского конденсатора емкостью  $C_1$  в схеме, изображенной на рисунке 12, если  $C_1 = 2C_0$ ,  $C_2 = C_0$ ,  $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0$ , а расстояние между пластинами конденсатора емкостью  $C_1$  равно  $d$ .

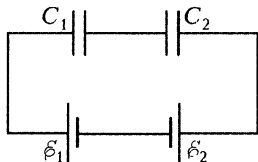


Рис. 12

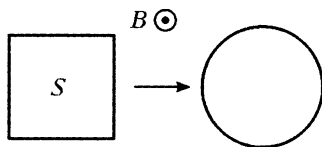


Рис. 13

10. Проводящий контур в виде квадрата площадью  $S$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $B$ , деформируют в кольцо без изменения длины провода (рис.13). Какой заряд

протекает при этом через поперечное сечение провода, если при деформации все элементы контура находятся в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля? Сопротивление провода  $R$ . Индуктивностью контура пренебречь.

### Вариант 3

1. Тело движется прямолинейно вдоль оси  $x$ . График зависимости проекции скорости тела от времени имеет вид полуокружности и  $1/4$  части окружности (рис.14). Максимальная скорость тела  $v_0$ , время движения  $3t_0$ . Определите перемещение тела  $\Delta r_x$  к моменту времени  $3t_0$ .

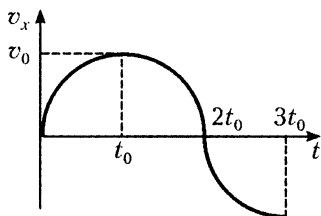


Рис. 14

2. Постройте изображение предмета  $ABC$  в собирающей линзе (рис.15).

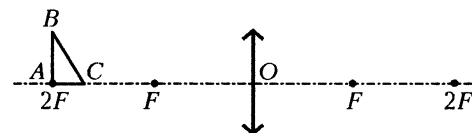


Рис. 15

3. Точка подвеса конического маятника движется вверх с постоянным ускорением  $a$  (рис.16). Определите период обращения маятника, если нить отклонилась от вертикали на угол  $\alpha$ , а ее длина равна  $L$ .

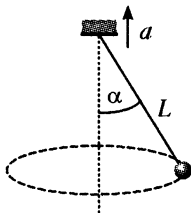


Рис. 16

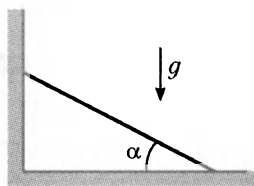


Рис. 17

4. Однородный стержень опирается о вертикальную плоскость, образуя с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис.17). Коэффициент трения между стержнем и горизонтальной плоскостью  $\mu_1 = 0,5$ . Чему равна минимальная величина коэффициента трения  $\mu_2$  между стержнем и вертикальной плоскостью, при которой стержень будет находиться в равновесии?

5. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний конец ее погружен в воду. Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно подняли на высоту  $H = 15$  м. Какую работу пришлось при этом совершить? Площадь поршня  $S = 100 \text{ см}^2$ . Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ . Массой поршня пренебречь. Плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

6. Определите абсолютную влажность воздуха, если парциальное давление пара в нем  $p = 14 \text{ кПа}$ , а температура  $t = 60^\circ \text{C}$  ( $T = 333 \text{ K}$ ).

7. На рисунке 18 изображены два точечных заряда  $+2q$  и  $-q$ , соединенные изолирующим стержнем длиной  $L$ , находящиеся в

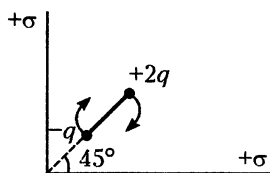


Рис. 18

электрическом поле, созданном двумя бесконечными взаимно перпендикулярными равномерно заряженными плоскостями. Поверхностные плотности зарядов плоскостей одинаковы и равны  $+\sigma$ . Какую работу совершат силы поля при повороте стержня с зарядами вокруг середины стержня на  $180^\circ$  в плоскости рисунка?

8. Какая масса меди выделилась из раствора  $\text{CuSO}_4$  за время  $t = 100$  с, если ток, протекавший через электролит, менялся по закону  $I = (5 - 0,02t) \text{ (A)}$ , где  $t$  — время в секундах?

9. Два однородных бруска одинакового размера расположены так, что их края совпадают (рис. 19). Бруски движутся по первой

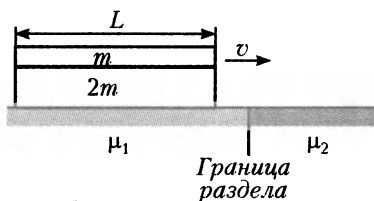


Рис. 19

горизонтальной полуплоскости, при этом вектор скорости брусков направлен вдоль их продольной оси и перпендикулярен линии раздела полуплоскостей. Масса нижнего бруска  $2m$ , верхнего  $m$ , коэффициент трения нижнего бруска о первую полуплоскость  $\mu_1 = 0,2$ , а

о вторую  $\mu_2 = 0,7$ . Величина кинетической энергии брусков достаточна для преодоления границы раздела полуплоскостей. Определите величину коэффициента трения  $\mu$  между брусками, при которой верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего в момент времени, когда бруски въедут на вторую полуплоскость на  $1/5$  своей длины.

10. Электромотор питается от батареи с ЭДС  $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ . Какую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке

тока  $I = 2\text{ А}$ , если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток  $I_0 = 3\text{ А}$ ?

II тур

### Вариант 1

1. Циклическая частота свободных малых колебаний материальной точки равна  $\omega$ . Найдите наименьшее время, через которое кинетическая энергия точки уменьшится вдвое по сравнению с ее наибольшим значением.

2. На находящуюся в воздухе стеклянную пластинку, показатель преломления которой  $n = 1,5$ , падает луч света. Найдите угол падения луча, если угол между отраженным и преломленным лучами равен  $90^\circ$ .

3. Маленький шарик массой  $m$  подвешен к неподвижной точке  $A$  посредством нити  $AB$  и опирается на поверхность гладкой сферы радиусом  $r$  (рис.20). Расстояние от точки  $A$  до поверхности сферы  $AC = d$ , длина нити  $L$ . Центр сферы  $O$  расположен на одной вертикали с точкой подвеса  $A$ . Определите натяжение  $T$  нити. Массой нити и силами трения пренебречь.

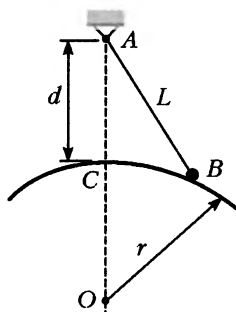


Рис. 20

4. Сосуд вместимостью  $V = 30\text{ дм}^3$  разделен на три равные части неподвижными полупроницаемыми тонкими перегородками (рис.21). В левую часть сосуда впускают водород массой  $m_{\text{в}} = 30\text{ г}$ ,

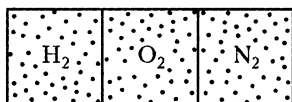


Рис. 21

в среднюю – кислород массой  $m_{\text{к}} = 128\text{ г}$  и в правую – азот массой  $m_{\text{а}} = 112\text{ г}$ . Через левую перегородку может диффундировать только водород, через правую – водород и азот. Чему будет равно давление в средней части сосуда после установления равновесия, если температура газа в сосуда поддерживается постоянной и равной  $T = 300\text{ К}$ ?

5. Найдите молярную массу идеального газа, если при нагревании  $m = 0,5\text{ кг}$  этого газа на  $\Delta T = 10\text{ К}$  изобарически требуется на  $\Delta Q = 1,48\text{ кДж}$  тепла больше, чем при изохорическом нагревании.

6. По кольцу радиусом  $R$  равномерно распределен заряд  $q$ .

Определите потенциал  $\phi$  в точке, находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на  $h = 0,5R$ .

7. Определите заряд на конденсаторе емкостью  $C$  (рис.22). Параметры элементов схемы, указанные на рисунке, считать известными. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

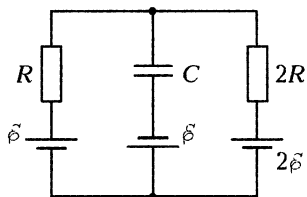


Рис. 22

9. Небольшая шайба массой  $m$  без начальной скорости соскальзывает с гладкой горки высотой  $h = 5$  м и попадает на доску массой  $M = 3m$ , лежащую у основания горки на гладкой горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 23. Вследствие трения между шайбой и доской шайба останавливается, не достигнув края доски. Определите время скольжения шайбы вдоль доски, если коэффициент трения между



Рис. 23

шайбой и доской  $\mu = 0,3$ . Принять ускорение свободного падения равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

10. Энергия атома водорода в основном состоянии равна  $E_1 = -13,53$  эВ. Найдите длину волны излучения, поглощенного электроном при переходе его со второго энергетического уровня на четвертый.

### Вариант 2

1. При освещении дифракционной решетки белым светом спектры второго и третьего порядков накладываются друг на друга. Найдите длину волны в спектре второго порядка, на которую накладывается фиолетовая линия,  $\lambda_{\text{ф}} = 400$  нм, спектра третьего порядка.

2. Идеальный колебательный контур состоит из двух конденсаторов емкостями  $C_1 = 2$  пФ и  $C_2 = 4$  пФ, соединенных параллельно, и катушки индуктивности. При скорости изменения силы тока в катушке, равной 2 А/с, в ней возникает ЭДС

самоиндукции  $\mathcal{E} = 0,02$  В. Определите длину волны электромагнитного излучения контура.

3. Однородную тонкую пластину  $ABDK$  массой  $m$  подвесили за углы  $A$  и  $B$  на двух невесомых нитях  $AM$  и  $BN$  так, что ее ось симметрии  $AF$  расположена горизонтально (рис.24). Пренебрегая массой нитей, найдите силу натяжения нити  $BN$ , если  $h = 6h_1$ .

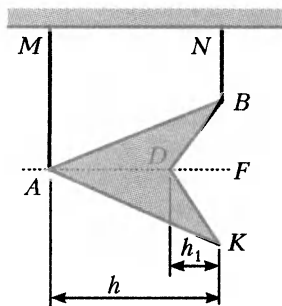


Рис. 24

4. В стенке открытого бака с водой просверлены одно под другим два небольших отверстия. Одно отверстие расположено на глубине  $h$  от поверхности воды, второе – на глубине  $2h$ . Уровень воды в баке поддерживается постоянным. Найдите расстояние от стенки бака до точки пересечения струй, вытекающих из отверстий.

5. Один моль гелия и три моля аргона находятся в левой половине цилиндра, показанного на рисунке 25. Справа от поршня вакуум. В отсутствие газов поршень расположен вплотную к левому торцу цилиндра и пружина в этом положении не деформирована. Боковые стенки цилиндра и поршень адиабатные (нетеплопроводные). Газ нагревают через левый торец цилиндра. Пренебрегая трением, найдите теплоемкость газовой смеси.

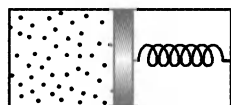


Рис. 25

6. Две частицы, имеющие массу  $m$  и заряд  $q$  каждая, летят из бесконечности навстречу друг другу со скоростями  $v_1 = 2v$  и  $v_2 = 3v$ . Определите, без учета гравитационного взаимодействия, минимальное расстояние  $r$ , на которое эти частицы могут сблизиться.

7. Определите заряд конденсатора емкостью  $C$  в схеме, представленной на рисунке 26. Параметры элементов схемы указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

8. Жесткое тонкое однородное проводящее кольцо радиусом  $R$  и массой  $m$  лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны. Индукция магнитного поля

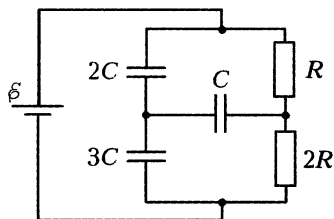


Рис. 26



равна  $B$ . Найдите силу тока  $I$ , который нужно пропустить по кольцу, чтобы оно начало подниматься.

9. Через блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены грузы массами  $2m$  и  $m$ . Пренебрегая силами трения, массами нити и блока, найдите ускорение центра масс этой системы.

10. Фокусное расстояние тонкой плосковыпуклой линзы равно  $F$ . На плоскую поверхность этой линзы нанесли абсолютно отражающее покрытие и направили на выпуклую поверхность узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией  $E = 4$  Дж и длительностью импульса  $\tau = 10^{-4}$  с. Падающий пучок распространяется параллельно главной оптической оси линзы на расстоянии  $h = F/2$  от оси. Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхности линзы без покрытия пренебречь.

### Вариант 3

1. На краю покоящейся тележки стоит человек. Масса тележки с человеком в 1,1 раза больше массы самой тележки. Пренебрегая трением при движении тележки, определите скорость тележки после того, как человек спрыгнет с нее и при этом его горизонтальная скорость относительно движущейся тележки будет равна  $v_0$ .

2. Положительно заряженная частица, двигаясь в плоскости  $xy$  с некоторой скоростью под углом  $\alpha$  к оси  $x$ , влетает в область  $x > 0$ , где создано электрическое поле, вектор напряженности которого задан координатами  $E_x = -\beta x$ ,  $E_y = 0$  ( $\beta$  – положительная постоянная). Частица проникает на глубину  $L$  вдоль оси  $x$ , после чего спустя время  $t$  она вылетает обратно в область  $x < 0$ . Найдите скорость движения частицы в области  $x < 0$ . Излучением пренебречь.

3. Тонкое кольцо радиусом  $R$  и массой  $m$  вращается вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. При каком числе оборотов в секунду  $n$  кольцо разорвется, если разрыв происходит, когда упругая сила в поперечном сечении кольца достигает значения, равного  $F_m$ . Изменением размеров кольца при вращении можно пренебречь.

4. Тонкая собирающая линза дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях линзы между предметом и экраном. Расстояние между предметом и экраном неизменно. Высота первого изображения  $H_1$ , второго  $H_2$ . Чему равна высота предмета?

5. В точках  $A$  и  $B$  на расстоянии  $L$  друг от друга закреплены заряды  $+4q$  и  $-q$  (рис.27). Вдоль прямой  $AB$  к ним движется частица массой  $m$ , имеющая заряд  $+q$ . Какую наименьшую скорость должна иметь эта частица на очень большом расстоянии, чтобы достигнуть точки  $B$ ?

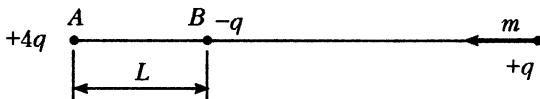


Рис. 27

6. Два плоских воздушных конденсатора с круглыми пластинами соединены параллельно друг другу. Емкости конденсаторов одинаковы. Зазор между обкладками первого конденсатора заполняют стеклом с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найдите энергию второго конденсатора при их включении в цепь постоянного тока, если мощность тепловыделения между обкладками первого равна  $P$ . Тепловым расширением наполнителя пренебречь.

7. На горизонтальной плоскости лежит брусок массой  $m$ , соединенный горизонтальной недеформированной невесомой пружиной жесткостью  $k$  с вертикальной стенкой (рис.28). Брусок сместили так, что пружина растянулась на  $x_0$ , а затем отпустили. Определите коэффициент трения между бруском и поверхностью, если известно число колебаний  $N$ , которое совершил брусок до остановки.

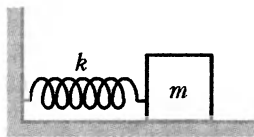


Рис. 28

8. Определите длину волны де Бройля для нерелятивистского электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U = 100$  В. Электрон первоначально покоился.

9. Рабочим веществом идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, является один моль идеального одноатомного газа. КПД цикла известен и равен  $\eta$ . Определите температуру нагревателя, если работа, которую совершает газ при адиабатическом расширении, равна  $A$ .

10. Электрон в атоме водорода движется по стационарной орбите радиусом  $r_1$ . Определите радиус орбиты, на которую переходит электрон, если при этом атом испускает излучение с частотой  $\nu$ . Движение ядра атома можно не учитывать.

Публикацию подготовил Ю.Струков

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

*Олимпиада «Физтех-2013»*

*Заключительный этап*

**МАТЕМАТИКА**

*Вариант 1*

**1. Решите уравнение**

$$\log_{(3^{x-1})}(x^2 - 11x + 19) + \log_{(27^{x-1})}(x^3) = \frac{2}{x-1}.$$

**2. Решите неравенство**  $\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}} \leq \frac{1}{9+x}.$

**3. Решите уравнение**  $\sqrt{3+4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x.$

**4.** Число 72350 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 72350723507235072350723507235072350. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

**5.** В параллелограмме  $ABCD$  угол  $ADC$  равен  $\arcsin \frac{\sqrt{24}}{5}$ . Окружность  $\Omega$ , проходящая через точки  $A$ ,  $C$  и  $D$ , пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $N$  и  $L$  соответственно, причем  $AN = 11$ ,  $BL = 6$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$  и радиус окружности  $\Omega$ .

**6.** При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(x^2 - 36) \geq 0, \\ |x - 2 + y| + |x - 2 - y| \leq a? \end{cases}$$

**7.** В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $BC = 2\sqrt{3}$ . Сфера  $\omega$

касается плоскости основания пирамиды и касается всех трех ее боковых ребер в их серединах. Пусть  $\Omega$  – сфера, описанная около пирамиды  $SABC$ .

а) Найдите расстояние между центрами сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .

б) Найдите отношение радиусов сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .

в) Пусть дополнительно известно, что  $\angle SAB = \arccos \frac{1}{4}$ . Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

8. Дан правильный 18-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен  $40^\circ$ . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

### Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_{(5^x)}(x^2 + 9x + 15) + \log_{(125^x)}(x^3) = \frac{2}{x}.$$

2. Решите неравенство  $\frac{1}{\sqrt{|x-3|}-1} \leq \frac{1}{6-x}$ .

3. Решите уравнение  $\sqrt{1+7\sin^2 x} = 2\cos x - \sqrt{3}\sin x$ .

4. Число 84605 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 846058460584605846058460584605. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

5. В параллелограмме  $ABCD$  угол  $BCD$  равен  $\arctg \sqrt{15}$ . Окружность  $\Omega$ , проходящая через точки  $B$ ,  $C$  и  $D$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $T$  и  $E$  соответственно, причем  $BT = 10$ ,  $AE = 7$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$  и радиус окружности  $\Omega$ .

6. При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - xy + 3y^2)(y^2 - 25) \geq 0, \\ |x + 2 + y| + |y + 2 - x| \leq a? \end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $BC = 4$ . Сфера  $\omega$  касается плоскости основания пирамиды и касается всех трех ее боковых ребер в их серединах. Пусть  $\Omega$  – сфера, описанная около пирамиды  $SABC$ .

- а) Найдите расстояние между центрами сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .  
 б) Найдите отношение радиусов сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .  
 в) Пусть дополнительно известно, что угол между гранями  $SAB$  и  $ABC$  равен  $\arctg 2$ . Найдите объем пирамиды  $SABC$ .  
 8. Дан правильный 24-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен  $45^\circ$ . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

### Вариант 3

1. Решите уравнение  $\log_{(2^x)}(x^2 - 6x - 15) + \log_{(8^x)}(x^3) = \frac{3}{x}$ .  
 2. Решите неравенство  $\frac{1}{\sqrt{|x+2|}-1} \leq \frac{1}{5+x}$ .  
 3. Решите уравнение  $\sqrt{6 + \frac{22}{3} \sin^2 x} = 3 \cos x + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin x$ .  
 4. Число 94850 написали 7 раз подряд, при этом получилось 35-значное число 94850948509485094850948509485094850. Из этого 35-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 33-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?  
 5. В параллелограмме  $ABCD$  угол  $ABC$  равен  $\arcsin \frac{\sqrt{15}}{4}$ . Окружность  $\Omega$ , проходящая через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , пересекает стороны  $AD$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $M$  соответственно, причем  $AP = 3$ ,  $CM = 6$ . Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$  и радиус окружности  $\Omega$ .  
 6. При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} (2x^2 + 3xy + 2y^2)(49 - x^2) \leq 0, \\ |x + 3 + y| + |x + 3 - y| \leq a? \end{cases}$$

7. В основании треугольной пирамиды  $SABC$  лежит прямоугольный треугольник  $ABC$  с гипотенузой  $BC = 2$ . Сфера  $\omega$  касается плоскости основания пирамиды и касается всех трех ее боковых ребер в их серединах. Пусть  $\Omega$  – сфера, описанная около пирамиды  $SABC$ .

- а) Найдите расстояние между центрами сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .  
 б) Найдите отношение радиусов сфер  $\omega$  и  $\Omega$ .

в) Пусть дополнительно известно, что  $\angle SAB = \arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

8. Дан правильный 30-угольник. Найдите количество троек его вершин, являющихся вершинами треугольника, в котором хотя бы один угол равен  $30^\circ$ . (Две тройки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

#### Вариант 4

1. Решите уравнение

$$\log_{(6^x-2)}(x^2) + \log_{(36^x-2)}((x-5)^4) = \frac{2}{x-2}.$$

2. Решите уравнение  $2\sqrt{7} \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{27 + \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)}$ .

3. Решите неравенство  $\left(\frac{6|x-2|}{x^2+21}\right)^{x+\sqrt{x^2-6}} > 1$ .

4. Число 58964 написали 8 раз подряд, при этом получилось 40-значное число 5896458964589645896458964589645896458964. Из этого 40-значного числа требуется вычеркнуть две цифры так, чтобы полученное после вычеркивания 38-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

5. Дана прямоугольная трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$ , причем  $BC < AD$ ,  $\angle BCD = 90^\circ$ . Точка  $M$  – середина отрезка  $CD$ . Известно, что окружность радиуса 5 проходит через точки  $A$  и  $B$  и касается стороны  $CD$  в точке  $M$ , а  $\cos \angle BMC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . Найдите длины отрезков  $AB$  и  $BC$ , а также площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра  $a$  существует единственная пара чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} (x^2 - xy + y^2)(|x - y| - 6) \geq 0, \\ x(x + 2) + y(y - 2) = a? \end{cases}$$

7. Правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$  вписана в цилиндр (основания призмы вписаны в окружности оснований цилиндра). Плоскость  $\alpha$  имеет ровно одну общую точку с каждым из оснований цилиндра и пересекает ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  в точках  $K$ ,  $N$ ,  $P$  соответственно. Найдите отношения  $AK : KA_1$  и  $CP : PC_1$ , если  $BN : NB_1 = 3 : 4$ .

8. Дан правильный 16-угольник. Найдите количество четверок его вершин, являющихся вершинами выпуклого четырехугольника, в котором хотя бы один угол равен  $90^\circ$ . (Две четверки вершин, отличающиеся порядком вершин, считаются одинаковыми.)

## ФИЗИКА

### Вариант 1

1. На горизонтальной поверхности стола находится тележка (рис.1). На шероховатой горизонтальной поверхности тележки

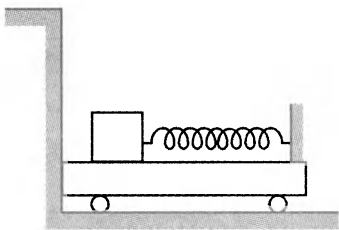


Рис. 1

лежит брусок, прикрепленный к тележке легкой упругой пружиной. Масса тележки в 3 раза больше массы бруска. Брусок отклоняют влево так, что удлинение пружины равно  $x$ , а тележка прижата к упору. Затем брусок отпускают.

1) Найдите деформацию пружины в момент отрыва тележки от упора.

2) Найдите скорость бруска в момент отрыва тележки от упора.

3) Найдите скорость тележки после прекращения движения по ней бруска.

Известно следующее. Если брусок подвесить на пружине, то деформация пружины равна  $2x$ . Если брусок тащить по неподвижной тележке с постоянной скоростью, прикладывая горизонтальную силу к прикрепленной к бруску пружине, то деформация пружины равна  $2x/3$ . Деформация  $x$  пружины меньше длины пружины в ненапряженном состоянии. Массой колес тележки и трением в их осях пренебречь.

2. Тяжелый подвижный поршень площадью  $S = 10 \text{ см}^2$  делит объем вертикально расположенного цилиндра на 2 равные части объемом  $V_0 = 1 \text{ л}$  каждая. Над поршнем находятся вода и водяной пар общей массой  $m = 2 \text{ г}$ , под поршнем находится  $m_1 = 2 \text{ г}$  азота. Температура в цилиндре  $t = 100^\circ \text{C}$ . Принять ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , молярные массы азота и воды  $M_a = 28 \text{ г/моль}$  и  $M_v = 18 \text{ г/моль}$  соответственно, плотность воды  $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ .

1) Найдите массу  $M$  поршня.

2) Какую часть объема  $V_0$  занимает жидкая вода?

3. Для подзарядки аккумулятора используется динамомашина (генератор) с сопротивлением обмотки ротора  $R = 1 \text{ Ом}$ , Человек вращает ручку динамомашины с частотой  $n = 1 \text{ об/с}$ , прикладывая к ней силу  $F = 20 \text{ Н}$  на расстоянии  $r = 8 \text{ см}$  от оси вращения вдоль направления движения ручки. Через аккумулятор идет ток  $I = 1 \text{ А}$ , Из-за трения в механизмах динамомашины теряется 20% затрачиваемой человеком мощности. Считайте, что ротор вращается между полюсами постоянного магнита.

1) Какую мощность затрачивает человек?

2) Найдите напряжение на зажимах динамомашины.

4. В схеме, показанной на рисунке 2, все элементы можно считать идеальными, известные параметры элементов указаны на рисунке, неизвестная ЭДС меньше  $\mathcal{E}$ . Ключ замыкают и ждут установления стационарного режима. Затем ключ размыкают, после чего в схеме выделяется количество теплоты, равное  $\frac{1}{18} C \mathcal{E}^2$ .

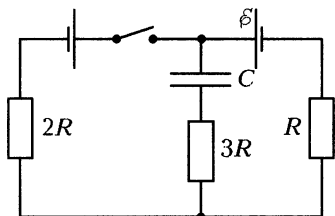


Рис. 2

1) Какое количество теплоты выделилось в резисторе сопротивлением  $3R$  после размыкания ключа?

2) Найдите силу тока, протекавшего в схеме в стационарном режиме.

5. Для определения показателя преломления неизвестной прозрачной жидкости экспериментатор Глюк положил на дно мензурки монету и налил в нее исследуемую жидкость. Толщина слоя жидкости  $H = 27 \text{ см}$ . Далее он сфотографировал монету с высоты  $h = 37 \text{ см}$  над поверхностью жидкости и получил резкое изображение, диаметр которого в  $k = 10$  раз меньше диаметра монеты. Фокусное расстояние объектива  $F = 50 \text{ мм}$ . Оптическая ось объектива перпендикулярна поверхности жидкости.

1) Какое расстояние  $d$  было установлено на шкале дальности объектива?

2) Найдите показатель преломления  $n$  жидкости.

*Публикацию подготовили Д.Александров, С.Городецкий,  
В.Чивилёв, М.Шабунин*



## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

### ФИЗИКА

#### *Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»*

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике и физике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, начиная с 2010 года олимпиады проводятся в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада по физике, проходит под названием «Поверь в себя!» Она не содержит сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи олимпиады допускают простые решения без громоздкой математики на основе знаний обычной школьной программы. Однако наряду с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны.

Подробности об олимпиаде по физике «Поверь в себя!» можно узнать на сайте: <http://www.abiturient.ru/> и по телефонам: (499) 734-02-42, (499) 720-89-58.

Ниже приводятся задачи олимпиады 2013 года.

#### *Задачи первого тура*

##### *10 класс*

1. Автомобилю требуется изменить направление движения на противоположное, оставив величину скорости неизменной. Если автомобиль будет двигаться с постоянной скоростью по дуге окружности, то на разворот будет затрачено время  $t_1 = 31,4$  с. Какое время потребуется для смены направления движения, если автомобиль, затормозив, остановится, «мгновенно» развернется, а затем разгонится до первоначальной скорости, двигаясь все время прямолинейно? Считайте ускорение автомобиля во всех случаях одним и тем же.

2. Стержень  $AB$ , ориентированный вдоль оси  $x$ , в момент времени  $t = 0$  начинает двигаться с постоянным ускорением  $a = 0,2 \text{ м/с}^2$  в положительном направлении оси  $x$ . Передним концом стержня является точка  $A$ , задним – точка  $B$ . Найдите длину стержня, если в момент времени  $t_A = 1 \text{ с}$  координата точки  $A$  равна  $x_A = 50 \text{ см}$ , а в момент  $t_B = 2 \text{ с}$  координата точки  $B$  равна  $x_B = 30 \text{ см}$ .

3. С какой силой  $F$  гладкий шар массой  $m = 1 \text{ кг}$  давит на тележку, если она движется по горизонтальной поверхности с ускорением  $a = 3,5 \text{ м/с}^2$ , а нить составляет угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтальной поверхностью (рис.1)? Шар неподвижен относительно тележки. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

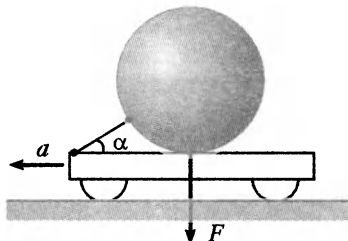


Рис. 1

4. Массивная бусинка нанизана на невесомую нерастяжимую нить длиной  $L = 10 \text{ см}$ , по которой она может скользить без трения. Концы нити прикреплены к невесомым кольцам, которые могут без трения скользить по горизонтальному и вертикальному стержням. Первоначально бусинку удерживают в положении, в котором нить и стержни составляют квадрат (рис.2). Затем бусинку отпускают. Через сколько секунд после этого она коснется вертикального стержня? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

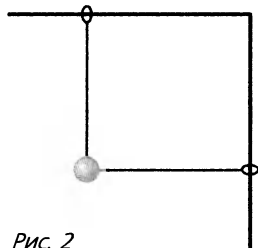


Рис. 2

5. Два автомобиля имеют одинаковую мощность двигателей. Максимальная скорость первого автомобиля  $v_1 = 120 \text{ км/ч}$ , второго  $v_2 = 160 \text{ км/ч}$ . Какую максимальную скорость смогут развить автомобили, если один возьмет на буксир другой автомобиль с выключенным двигателем. Считать, что сила сопротивления движению автомобилей пропорциональна скорости, а буксировочный трос настолько длинный, что передний автомобиль не влияет на силу сопротивления, которая действует на задний.

6. На горизонтальном столе лежит брусок массой  $m = 2 \text{ кг}$ , к которому прикреплена легкая пружина жесткостью  $k = 50 \text{ Н/м}$ . Брусок начинают тянуть вдоль стола, прикладывая к свободному концу пружины горизонтальную силу. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы сдвинуть таким обра-

зом брусок с места? Коэффициент трения между бруском и столом  $\mu = 0,5$ . Ось пружины совпадает с горизонтальной осью симметрии бруска. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

7. В закрытом сосуде имеются равные количества молекул водорода ( $M_1 = 2 \text{ г/моль}$ ) и гелия ( $M_2 = 4 \text{ г/моль}$ ). В стенке сосуда на малое время открыли отверстие, через которое успело вылететь  $N_1 = 14100$  молекул водорода. Сколько молекул  $N_2$  гелия вылетело при этом из сосуда?

8. Вода массой  $m = 3,6 \text{ кг}$ , оставленная в пустом холодильнике, за время  $T = 1 \text{ ч}$  охладилась от температуры  $t_1 = 10^\circ \text{C}$  до температуры  $t_2 = 0^\circ \text{C}$ . Холодильник при этом отдавал в окружающее пространство тепло с мощностью  $P = 300 \text{ Вт}$ . Какую мощность потреблял при этом холодильник от сети? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$ .

9. Цилиндрический проводник изготовлен так, что удельное сопротивление материала линейно изменяется вдоль цилиндра:  $\rho = \rho_0 (x/l)$ , где  $l$  – длина проводника. Проводник подключили к источнику постоянного напряжения  $U_0 = 12 \text{ В}$  (рис.3). Найдите напряжение между сечениями  $x = 0$  и  $x = l/2$  проводника.

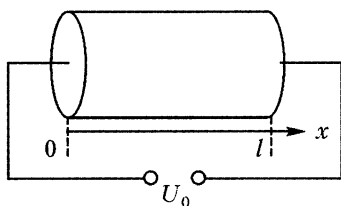


Рис. 3

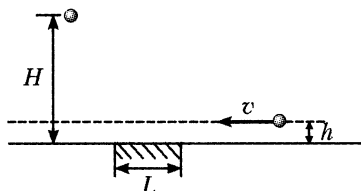


Рис. 4

10. Человек движется со скоростью  $v = 1 \text{ м/с}$  вдоль зеркальной витрины на расстоянии  $h = 2 \text{ м}$  от нее (рис.4). Сколько секунд он сможет видеть в зеркале своего приятеля, остановившегося на расстоянии  $H = 10 \text{ м}$  от витрины? Длина витрины  $L = 5 \text{ м}$ .

### 11 класс

1. Студент и школьница бегут в одном направлении по окружности радиусом  $R = 50 \text{ м}$  с постоянными скоростями, причем скорость студента на 40% больше скорости школьницы. Студент обогнал школьницу сначала в точке A, а в следующий раз – в точке B. Определите расстояние AB между этими точками.

2. Две разноименно заряженные бусинки с одинаковыми массами одновременно отпускают: одну с высоты  $h_1 = 25 \text{ см}$ , а

другую с высоты  $h_2 = 15$  см (рис.5). Определите время движения бусинок, если упали они на стол одновременно. Электрическим взаимодействием бусинок со столом пренебречь. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

3. См. задачу 6 для 10 класса.

4. Нерастяжимую нить математического маятника заменили на легкую пружинку, длина которой в недеформированном состоянии равна длине нити математического маятника. Период малых колебаний математического маятника  $T_1 = 1,2$  с (рис.6,а), а период вертикальных колебаний пружинного маятника

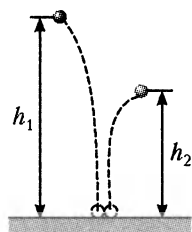


Рис. 5

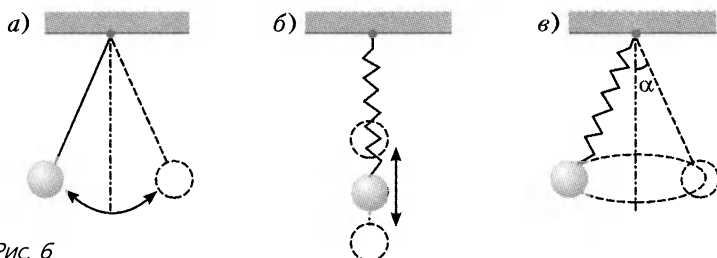


Рис. 6

$T_2 = 1,6$  с (рис.6,б). Груз полученного пружинного маятника привели в движение по окружности, расположенной в горизонтальной плоскости (рис.6,в). Определите период обращения  $T$  такого конического маятника при малом угле  $\alpha$  отклонения оси пружины от вертикали.

5. Изотерма кислорода при температуре  $t_1 = 47$  °С совпадает с изотермой азота при температуре  $t_2 = 7$  °С. Во сколько раз отличаются массы этих газов? Газы считать идеальными. Молярные массы кислорода и азота равны  $M_1 = 32$  г/моль и  $M_2 = 28$  г/моль соответственно.

6. См. задачу 8 для 10 класса.

7. Три тонкие одинаковые металлические пластины, зарядом  $q = 4$  нКл каждая, сложили в стопку. Одну из крайних пластин, перемещая, как показано на рисунке 7, унесли на большое расстояние, затем таким же образом разъединили две оставшиеся пластины. Какой заряд будет на второй (средней) пластине?

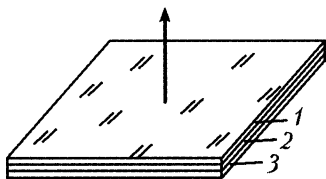


Рис. 7

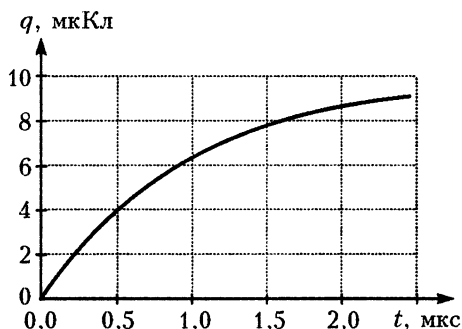


Рис. 8

8. На рисунке 8 приведен график зависимости заряда конденсатора от времени после подключения конденсатора к источнику напряжения в момент времени  $t = 0$ . Найдите максимальное значение силы тока в цепи.

9. Постоянный ток течет по проводу, содержащему два длинных прямолинейных участка и дугу окружности, как показано на рисунке 9, а.

В центре окружности этот ток создает магнитное поле с индукцией  $B_1 = 100$  мкТл. После того как один из прямолинейных участков провода развернули на  $90^\circ$ , как пока-

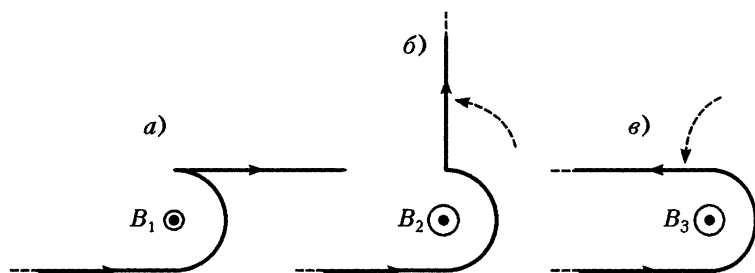


Рис. 9

зано на рисунке 9, б, магнитное поле в центре окружности стало равным  $B_2 = 132$  мкТл. Определите индукцию магнитного поля в той же точке для случая, когда этот проводник развернут еще на  $90^\circ$  (рис. 9, в).

10. Квадратная проволочная рамка помещена в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки (рис. 10). По рамке с постоянной скоростью скользит перемычка, сделанная из той же проволоки. Найдите ток в перемычке в момент времени, когда она находится посередине рамки. Сторона рамки  $l = 10$  см, индукция магнитного поля  $B = 0,002$  Тл, скорость перемычки  $v = 1$  м/с, сопротивление одной стороны рамки  $R = 0,01$  Ом.

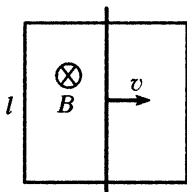


Рис. 10

## Задачи второго тура

### 10 класс

1. В стальной плите сделали вертикальную щель шириной  $l = 2$  см и глубиной  $h = 40$  см (рис.11). К щели подкатывается со скоростью  $v = 1$  м/с в перпендикулярном к ней направлении гладкий шарик и проваливается в щель, ударяясь раз за разом о стенки и падая на дно. Диаметр шарика  $d = 0,6$  см. Сколько раз ударится шарик о стенки, перед тем как упасть на дно? Считайте удары шарика абсолютно упругими.

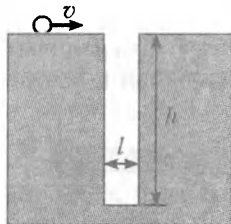


Рис. 11

2. Гантелька, состоящая из невесомой прямой спицы и двух одинаковых шариков на ее концах, первоначально покоится на гладкой горизонтальной поверхности в вертикальном положении (рис.12). Предоставленная самой себе, она начинает падать. Найдите, во сколько раз кинетическая энергия верхнего шарика больше кинетической энергии нижнего в момент времени, когда ось гантельки составляет угол  $\alpha = 45^\circ$  с вертикалью.

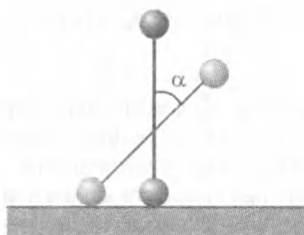


Рис. 12

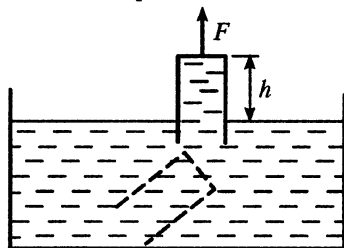


Рис. 13

3. Из воды медленно вынимают вверх дном легкий пластиковый стаканчик, целиком наполненный водой (рис.13). Какую силу  $F$  необходимо приложить к стаканчику в момент, когда его дно находится на высоте  $h = 4$  см над поверхностью воды? Какую работу пришлось совершить для этого? Стаканчик считать круговым цилиндром с площадью основания  $S = 20$  см<sup>2</sup>.

4. Раздвижная лестница-стремянка состоит из двух одинаковых секций, соединенных шарниром без трения (рис.14). Было замечено, что если угол при вершине лестницы превосходит  $\alpha = 60^\circ$ , то секции начинают скользить по поверхности стола. Определите коэффициент трения ножек лестницы о поверхность стола.

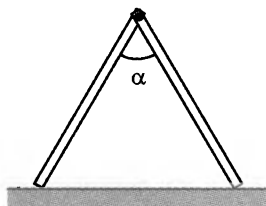


Рис. 14

5. Электрический кипятильник мощностью  $P = 350$  Вт не смог нагреть  $m = 600$  г воды до температуры кипения. Убедившись в том, что вода перестала нагреваться, его выключают. На сколько понизится температура воды через  $\tau = 10$  с после выключения кипятильника? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К).

6. Два длинных прямых провода, по которым текут одинаковые токи в противоположных направлениях, расположены параллельно на расстоянии  $a = 2$  см друг от друга (рис.15). Во сколько раз изменится модуль вектора индукции магнитного поля в точке A, удаленной от каждого провода на расстояние  $l = 6$  см, если ток в одном из проводов выключить?

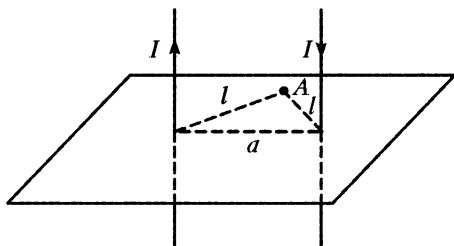


Рис. 15

11 класс

1. Камень брошен со скоростью  $v = 5$  м/с вверх под углом к горизонту с большой высоты. За время  $\Delta t$  свободного полета вектор скорости камня повернулся на угол  $90^\circ$  и уменьшился по величине в 2 раза. Найдите модуль вектора скорости камня через время  $2\Delta t$  после броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Лента движущегося со скоростью  $v_0 = 1$  м/с транспортера наклонена под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, как показано на рисунке 16. Вместе с транспортером движется шайба, которая упирается (не отскакивая) в неподвижный бортик и начинает скользить вдоль него по транспортеру вниз. Найдите установившуюся скорость  $v$  движения шайбы, если трение о бортик пренебрежимо мало, а коэффициент трения шайбы о ленту транспортера  $\mu = 0,7$ .

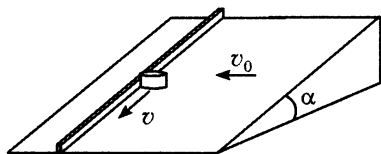


Рис. 16

3. Покоящуюся на горизонтальной поверхности цистерну с открытым верхом начинают заполнять водой из неподвижного относительно

земли крана. Струя воды бьет из крана вертикально вниз и в начальный момент попадает в точку, удаленную на расстояние  $l$  от середины цистерны (рис.17). Найдите перемещение цистерны после ее заполнения водой. Масса пустой цистерны  $M$ , масса заливной воды  $m$ . Трением качения пренебречь.

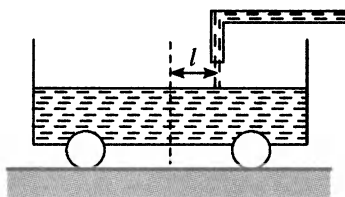


Рис. 17

4. Прямоугольную массивную пластину со сторонами  $a = 40$  см и  $b = 30$  см подвесили за два угла на легких нерастяжимых параллельных нитях длиной  $l = 40$  см каждая. Перемещая пластину в вертикальной плоскости, нити отклонили от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ , как показано на рисунке 18, и отпустили. Определите максимальную скорость пластины при дальнейшем ее движении, считая, что нити остаются все время натянутыми. При каком максимальном угле  $\alpha_{\max}$  возможно такое поступательное движение?

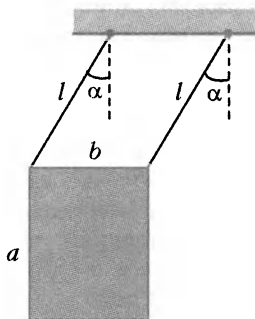


Рис. 18

5. За окном поздняя осень – уже несколько дней идет холодный дождь и температура на улице  $t_1 = 1^\circ\text{C}$ . Но в комнате тепло, термометр показывает  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  (топят!), и окно слегка приоткрыто для притока свежего воздуха. Определите относительную влажность воздуха в комнате. Необходимые данные возьмите в справочнике.

6. В постоянном однородном магнитном поле с индукцией  $B$  расположен прямоугольный проводящий контур, плоскость которого перпендикулярна вектору магнитной индукции (рис.19). Контур находится в электрическом контакте с проводящей перемычкой. Расстояние между скользящими контактами равно  $l$ . Перемычку оставляют неподвижной, а контур поступательно перемещают со скоростью  $v$ , как показано на рисунке. Сопротивление  $R$  известно, оно значительно превышает сопротивление проводов. Определите ток  $I$  в перемычке.

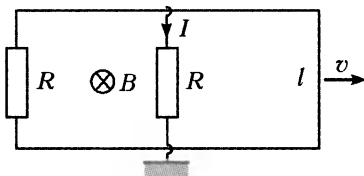


Рис. 19

*Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый*



## **НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»**

### *Олимпиада «Росатом-2013»*

Более 20 лет в Московском инженерно-физическом институте (ныне – Национальном исследовательском ядерном университете «МИФИ») проводится отраслевая физико-математическая олимпиада школьников «Росатом». Олимпиада проводится для школьников 7–11 классов и проходит в несколько туров (с ноября по март). В 2012/13 учебном году олимпиада «Росатом» входила в Перечень олимпиад Российского совета олимпиад школьников, что позволяло победителям и призерам олимпиады получить значительные льготы при поступлении в вузы.

В олимпиаде «Росатом-2013» участвовали более 22 тысяч школьников из различных регионов нашей страны. Многие города (а таковых было более 30) стали выездными площадками проведения олимпиады. Это – Байконур, Балаково (Саратовская обл.), Волгодонск (Ростовская обл.), Димитровград (Ульяновская обл.), Екатеринбург, Железнодорожск и Зеленогорск (Красноярский кр.), Иркутск, Калининград, Калуга, Курск, Курчатова (Курская обл.), Лесной (Свердловская обл.), Липецк, Нижний Новгород, Нововоронеж (Воронежская обл.), Новосибирск, Новоуральск (Свердловская обл.), Обнинск (Калужская обл.), Озерск (Челябинская обл.), Омск, Ростов-на-Дону, Рязань, Самара, Санкт-Петербург, Саратов, Саров (Нижегородская обл.), Северск (Томская обл.), Сергиев Посад (Московская обл.), Смоленск, Снежинск (Челябинская обл.), Тамбов, Хабаровск.

Ниже приводятся варианты задач заключительного тура олимпиады «Росатома-2013» по математике и физике для учащихся 11 класса.

## Заключительный тур

### МАТЕМАТИКА

1. Найдите все числа  $x$ , являющиеся решениями неравенства  $\frac{(x-2a)(x-a)}{\log_2(x+a)} \leq 0$  для хотя бы одного целого  $a$  – решения неравенства  $3^a + 3^{6-a} \leq 90$ .

2. Обозначим через  $X$  множество решений уравнения  $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$ . Найдите такое  $x \in X$ , для которого выражение  $x^2 + \frac{\pi^4}{x^2}$  принимает наименьшее возможное значение.

3. Три неравных между собой числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  в указанном порядке являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Известно, что их можно переставить так, что они станут последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа, если  $3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 324$ .

4. Найдите все целые числа на отрезке  $[500; 5000]$ , остатки от деления которых на 3, 5 и 7 равны 2, 4 и 6 соответственно.

5. При каких значениях  $a$  неравенство  $x^2 - 2ax + y^2 + (8-2a)y + a^2 - 8a + 16 \leq 0$  выполняется для всех пар  $(x; y)$ , для которых  $1 \leq x \leq 3$ ,  $1 \leq y \leq 3$ ?

6. Поле для гольфа имеет форму, изображенную на рисунке 1,  $ABCD$  – прямоугольник. Криволинейная часть границы представляет полуокружность. Периметр поля равен  $L$ . Найдите размеры поля, если его площадь имеет наибольшее возможное при этих условиях значение.

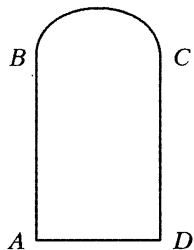


Рис. 1

### ФИЗИКА

1. Горизонтальный цилиндрический сосуд с идеальным газом разделен подвижным поршнем на две части. Газ в левой части имеет температуру  $T_1$ , в правой – температуру  $T_2$ . При этом отношение объемов оказывается равным  $V_1/V_2 = 3/2$ . После того как температуры выровнялись, соотношение объемов изменилось:  $V'_1/V'_2 = 2/3$ . Найдите отношение температур  $T_1/T_2$ .

2. Три одинаковых точечных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между двумя зарядами, равна  $E$ . Найдите потенциал электрического поля в этой точке.

3. Ширина реки равна  $l$ . Если лодка плывет против течения реки, то ее скорость относительно земли равна  $v$  (и направлена против течения), если по течению – то  $3v$ . За какое минимальное время лодка может пересечь реку?

4 (Л.Эйлер, статья «Об ударе пуль при стрельбе по доске», 1771 г.). В центр квадратной свободно висящей доски попадает пуля. Пуля пробивает доску насквозь, если ее скорость до удара больше  $v_0$ . С какой скоростью будет двигаться доска, если скорость пули до удара равна  $2v_0$ ? Масса пули  $m$ , масса доски  $M$ , силу сопротивления считать независимой от скорости.

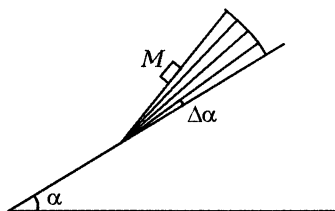


Рис. 2

5. На наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, лежит стопка из 10 одинаковых по форме клиньев с небольшим углом при вершине  $\Delta\alpha$  (рис.2; клинья нарисованы не все). По поверхности верхнего клина скользит тело массой  $M$ . Найдите силу, действующую на наклонную плоскость со стороны

стопки клиньев, если известно, что все они покоятся, а трение между всеми поверхностями отсутствует.

*Публикацию подготовили С.Гришин, С.Муравьев*

# НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## ФИЗИКА

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Первоначально покоящееся тело начинают двигать ускоренно. Зависимость ускорения  $a$  от времени  $t$  показана на графике (рис.1). Найдите путь, который пройдет тело к моменту времени  $4\tau$ .

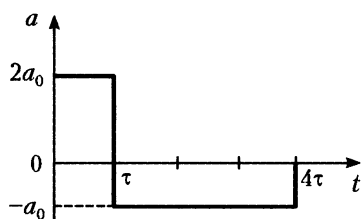


Рис. 1

2. К одному концу невесомой веревки длиной  $4L$  привязан маленький грузик, а второй конец веревки в точке  $A$  привязан к ребру закрепленного бруска, сечение которого — квадрат  $ABCD$  со стороной  $L$ . Веревку распрямили в продолжение отрезка  $DA$  и придали грузику скорость  $v$  параллельно отрезку  $AB$ , как показано на рисунке 2. Через какое время грузик ударится об брусок? Считайте, что силы тяжести нет.

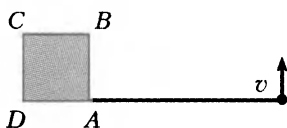


Рис. 2

3. С помощью маленьких невесомых шарниров один конец нерастянутой пружины длиной  $2l$  прикреплен к стене, а второй — к концу левого плеча равноплечих качелей (рис.3,а). Качели и пружина горизонтальны. После того как к концу

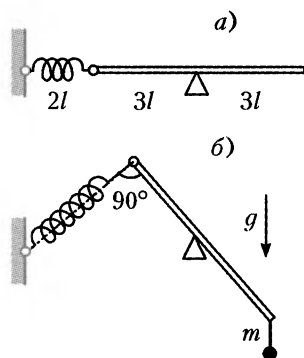


Рис. 3

правого плеча качелей подвесили груз массой  $m$ , в новом положении равновесия угол между пружиной и качелями стал равен  $90^\circ$  (рис.3,б). Длина каждого плеча качелей равна  $3l$ . Найдите жесткость пружины. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

4. В подключенный к идеальной батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$  плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и расстоянием между ними  $h_1$  вставили другой плоский незаряженный конденсатор с соответствующими параметрами  $S$  и  $h_2$ , как показано на рисунке 4. Ко второму конденсатору через ключ подсоединили резистор. Какое количество теплоты выделится на этом резисторе после замыкания

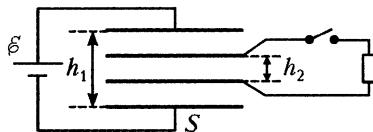


Рис. 4

ключа?

5. Оцените количество атомов, из которых состоит Земля. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

**Внимание!** Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

### Олимпиада школьников «Будущее Сибири»

#### II (заключительный) этап

##### 8 класс

1. Юный физик Петя заметил, что один из его игрушечных шариков тонет в воде, а другой плавает, несмотря на то что шарики одинаковые по размеру. Петя решил определить плотность материала, из которого сделан более легкий шарик. Он по очереди осторожно отпускал шарики в полностью наполненный водой мерный стакан объемом  $200 \text{ см}^3$ , и затем осторожно извлекал шарики из стакана. Результаты измерений показаны на

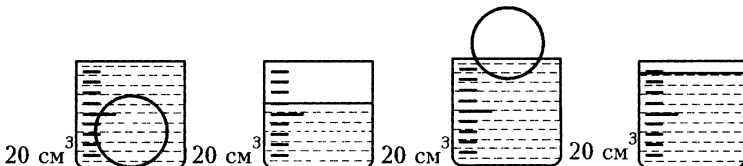


Рис. 5

рисунке 5. Помогите Пете определить плотность материала легкого шарика. Плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ .

2. Мальчик прошел первые 25% пути со скоростью  $1 \text{ м/с}$ , а остальной путь проехал на велосипеде. Определите скорость, с которой он ехал на велосипеде, если известно, что средняя скорость оказалась равной  $3 \text{ м/с}$ .

3. В калориметре находятся два сосуда, разделенные теплопроводящей стенкой. В первый сосуд наливают жидкость массой  $m_1$  и удельной теплоемкостью  $c_1$ , а во второй – жидкость удельной теплоемкостью  $c_2$ . Найдите массу  $m_2$  жидкости, налитой во второй сосуд, если известно, что после установления теплового равновесия первая жидкость нагрелась на  $1/3$  от начальной разницы температур.

4. Два стакана с различным количеством воды уравновешены на разноплечих рычажных весах (рис.6). Расстояние между центрами стаканов равно  $L$ . Часть воды массой  $m$  перелили из одного стакана в другой. Оказалось, что если при этом опору весов сдвинуть на расстояние  $l$ , то весы снова придут в равновесие. Найдите массу  $M$  всей воды в обоих стаканах. Массой самих весов и стаканов пренебречь.

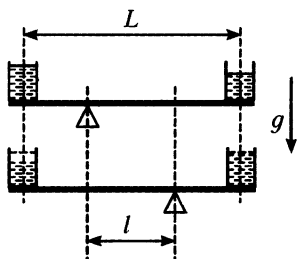


Рис. 6

### 9 класс

1. Два резистора соединили параллельно и измерили результирующее сопротивление. Затем эти же резисторы соединили последовательно и снова измерили сопротивление. В первом случае измерительный прибор показал  $1,2 \text{ Ом}$ , во втором случае  $3,4 \text{ МОм}$ . Чему равны сопротивления резисторов?

2. Два одинаковых шарика плотностью  $\rho$  подвешены на нитях один над другим (рис.7). При этом нижний шарик полностью погружен в жидкость. Чему равна плотность жидкости  $\rho_{\text{ж}}$ , если натяжение верхней нити  $T_1$ , а нижней  $T_2$ ?

3. Лиса Алиса и кот Базилио решили вдвоем унести лист железа, имеющий форму правильного треугольника, подняв его за вершину треугольника и середину противоположной стороны

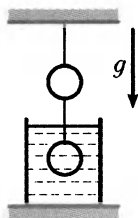


Рис. 7

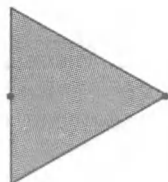


Рис. 8

(рис.8). Найдите максимальную массу листа, который они смогут унести, если лиса Алиса способна нести груз, не превышающий 5 кг, а кот Базилио может нести груз любой массы.

4. Трамплин имеет прямой угол при вершине и угол  $\alpha = 60^\circ$  справа при основании (рис.9). Какую минимальную скорость на вершине трамплина нужно иметь мотоциклисту, чтобы он после отрыва не опустился на его правый склон? Основание трамплина имеет размер  $a$ . Влиянием воздуха пренебречь.

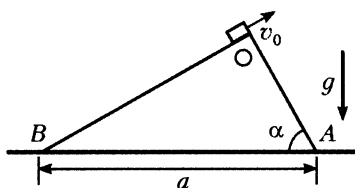


Рис. 9

отрыва не опустился на его правый склон? Основание трамплина имеет размер  $a$ . Влиянием воздуха пренебречь.



Рис. 10

5. Длинный брусок лежит на горизонтальном столе (рис.10). Поверх него слева кладут маленький брусок и протаскивают его вправо с постоянной скоростью  $v_1$  относительно стола. После того как он проскальзывает по всей поверхности длинного бруска, последний приобретает скорость  $u_1$ . С какой скоростью относительно стола нужно перемещать маленький брусок, чтобы после проскальзывания по всей поверхности длинного бруска он сообщил ему скорость  $u_2$  ( $u_2 < u_1$ )? Трения между длинным бруском и столом нет.

### 10 класс

1. В момент времени, когда поезд метро отправляется со станции налево, на станцию въезжает другой поезд, движущийся в противоположном направлении (рис.11). Определите, на каком расстоянии от левого края станции встретятся хвост отправляющегося поезда и голова прибывающего, считая, что вдоль станции поезда двигаются равноускоренно с равными по модулю ускорениями, а длина поездов одинакова и равна длине станции  $L$ .

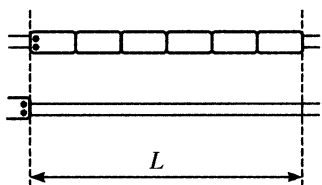


Рис. 11

ком расстоянии от левого края станции встретятся хвост отправляющегося поезда и голова прибывающего, считая, что вдоль станции поезда двигаются равноускоренно с равными по модулю ускорениями, а длина поездов одинакова и равна длине станции  $L$ .

2. Скользящий по горизонтальной поверхности маленький шарик упруго соударяется с закрепленным препятствием, сечение которого представляет собой равнобедренный треугольник с основанием  $L$  и углом при основании  $\alpha = 30^\circ$  (рис.12). При какой минимальной скорости шарик перелетит через препятствие, больше не соударяясь с ним? Ускорение свободного

падения равно  $g$ . Влиянием воздуха пренебречь.

3. Шарик соскальзывает по склону левого клина высотой  $h$ , затем поднимается по склону правого клина (рис.13). На какую максимальную

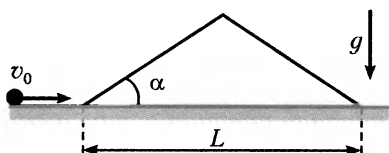


Рис. 12

высоту он в результате подпрыгнет, если клинья движутся навстречу друг другу с одинаковыми по величине постоянными скоростями  $v$ ?

Боковые поверхности клиньев представляют собой в сечении четверти окружностей одинакового радиуса. Клинья не успевают столкнуться, пока шарик движется по ним.



Рис. 13

4. Чернильница представляет собой фигуру вращения, сечение которой изображено на рисунке 14. Какой объем чернил можно в нее налить? Радиусы внешней и внутренней цилиндрических поверхностей равны  $R$  и  $r$  соответственно. Чернильница стоит вертикально, наполняют ее медленно. Плотность чернил  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , атмосферное давление  $p_0$ , высота чернильницы  $H$ . Зазор снизу между дном и внутренним цилиндром незначительный. Толщиной стенок можно пренебречь.

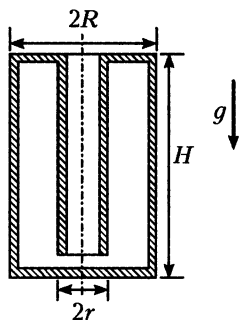


Рис. 14

5. Два бруска массами  $m$  и  $5m$ , связанные тонкой легкой нитью, покоятся на столе. Нить слегка натянута и перекинута через легкий блок, закрепленный сзади у игрушечного трактора массой  $M$  (рис.15, вид сверху). Трактор снабжен колесами, поэтому силой трения между ним и полом можно пренебречь. Коэффициент трения между брусками и полом равен  $\mu$ . Какую минимальную горизонтальную силу  $F_1$  надо приложить к трактору, чтобы он мог двигаться? При какой минимальной горизонтальной силе  $F_2$  будут двигаться оба бруска? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

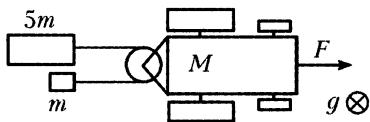


Рис. 15



1. Два резистора соединили параллельно и измерили результирующее сопротивление. Затем эти же резисторы соединили последовательно и снова измерили сопротивление. В первом случае измерительный прибор показал 1,23 Ом, во втором случае 4,56 МОм. Чему равны сопротивления резисторов?

2. Трубка площадью сечения  $S$ , имеющая форму сообщающихся сосудов, частично заполнена водой плотностью  $\rho$  (рис.16).

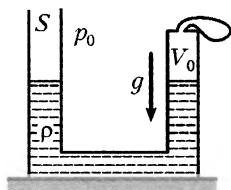


Рис. 16

На правое колено трубки надет сдутый резиновый шарик. Объем воздуха между шариком и поверхностью жидкости в правом колене равен  $V_0$ . В левое колено трубки долили воды так, что шарик надулся до объема  $V_0/2$ , при этом давление в шарике достигло значения  $2p_0$ , где  $p_0$  — атмосферное давление. Определите объем воды, долитой в левое колено трубки.

Ускорение свободного падения равно  $g$ . Капиллярными явлениями пренебречь. Температуру считать постоянной.

3. Юпитер совершает оборот вокруг Солнца за 4300 суток. Ганимед (спутник Юпитера) совершает оборот вокруг Юпитера за 7,2 суток. Максимальный угол Юпитер—Солнце—Ганимед ( $\alpha_{\max}$ ) равен 0,0014 радиан (рис.17). Определите по этим данным, во сколько раз масса Солнца больше массы Юпитера. Все орбиты считать круговыми.

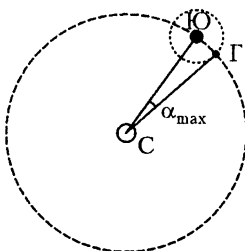


Рис. 17

4. На двух бесконечных параллельных спицах покоятся разноименно заряженные маленькие бусинки массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис.18). Энергия их электростатического взаимодействия равна  $-U_0$ . Бусинке массой  $m_1$  сообщают такую начальную скорость, что она уходит от второй бусинки на бесконечность. Какую максимальную скорость при этом может приобрести вторая бусинка? Трения нет.

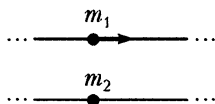


Рис. 18

5. Оцените количество электроэнергии в киловатт-часах, которую должен использовать подъемный кран, чтобы построить кирпичный пятиэтажный дом.

6. **Задача-демонстрация.** Маятник Ньютона состоит из трех одинаковых металлических шариков, подвешенных на нитях

так, что шарики могут отклоняться в одной плоскости. В положении равновесия нити вертикальны, а шарики касаются друг друга. Если отвести правый шарик в сторону и отпустить, то после удара средний и правый шарики останутся на месте, а левый отклонится влево (рис.19,а). Установим легкую пружину

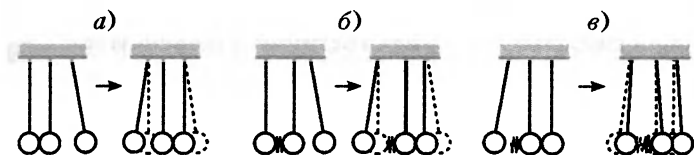


Рис. 19

между левым и средним шариками, прикрепив ее к среднему шарiku. Отведем правый шарик в сторону и отпустим. После первого удара средний шарик остается на месте, а левый отклоняется (рис.19,б). Иными словами, поведение системы такое же, как и в отсутствие пружины. Теперь отведем левый шарик в сторону и отпустим. После удара поведение системы резко изменилось: левый шарик отклонился влево, а средний и правый шарики вместе отклонились вправо (рис.19,в). Объясните наблюдаемое явление.

*Публикацию подготовили Е.Жданов, А.Погосов*

## РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

### ФИЗИКА

#### *Письменный экзамен*

Вступительный экзамен проводился для тех абитуриентов, которые имели право не сдавать ЕГЭ: для выпускников техникумов, выпускников школ прежних лет, иностранцев и освобожденных от ЕГЭ по состоянию здоровья. Экзамен оценивался по 100-балльной шкале. Задачи В1–В12 в каждом варианте оценивались максимум в 5 баллов, задачи С1–С4 – максимум в 10 баллов каждая.

#### *Вариант 1*

**В1.** Вертолет летел на север со скоростью  $48 \text{ м/с}$  относительно земли. С какой скоростью относительно земли будет лететь вертолет, если подует восточный ветер со скоростью  $20 \text{ м/с}$ ?

**В2.** Под действием некоторой постоянной силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь  $40 \text{ см}$ . Когда на тележку положили груз массой  $2 \text{ кг}$ , то под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь  $30 \text{ см}$ . Какова масса тележки?

**В3.** Конькобежец катил груженные санки по льду со скоростью  $3 \text{ м/с}$ , а затем толкнул их вперед и отпустил. С какой скоростью покатится конькобежец непосредственно после толчка, если скорость санок возросла до  $6 \text{ м/с}$ ? Масса санок  $60 \text{ кг}$ , масса человека  $80 \text{ кг}$ . В ответе укажите модуль скорости.

**В4.** Тело брошено с некоторой высоты горизонтально со скоростью  $20 \text{ м/с}$ . Через сколько секунд кинетическая энергия тела возрастет вдвое?

**В5.** Два человека несут металлическую трубу, положив ее себе на плечи. Первый человек поддерживает трубу на расстоянии  $1,5 \text{ м}$  от ее конца, второй держит противоположный конец трубы. Во сколько раз нагрузка, приходящаяся на первого человека, больше, чем на второго, если длина трубы  $3,5 \text{ м}$ ?

**В6.** Какова разница в массе воздуха, заполняющего комнату объемом  $124,5 \text{ м}^3$  зимой и летом, если летом температура в комнате достигает  $27^\circ\text{C}$ , а зимой падает до  $17^\circ\text{C}$ ? Давление зимой и летом равно  $10^5 \text{ Па}$ . Универсальная газовая постоянная  $8300 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ , молярная масса воздуха  $29 \text{ кг}/\text{кмоль}$ .

**В7.** Какую работу совершат 4 моля некоторого газа при изобарном повышении температуры на  $15 \text{ К}$ ? Универсальная газовая постоянная  $8300 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$ .

**В8.** Какую работу надо совершить, чтобы переместить заряд  $50 \text{ мКл}$  в однородном поле с напряженностью  $2 \text{ кВ}/\text{м}$  на расстояние  $0,7 \text{ м}$ , если перемещение происходит под углом  $60^\circ$  к силовым линиям поля? В ответе укажите модуль полученной величины.

**В9.** Три одинаковых источника постоянного тока с ЭДС  $6 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $3 \text{ Ом}$  каждый соединили параллельно одинаковыми полюсами и замкнули на сопротивление  $1 \text{ Ом}$ . Определите силу тока, текущего через сопротивление.

**В10.** В горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией  $10 \text{ Тл}$  подвешен на двух легких нитях горизонтальный прямой проводник длиной  $15 \text{ см}$ , перпендикулярный магнитному полю. На сколько изменится по абсолютной величине сила натяжения каждой из нитей, если по проводнику пропустить ток  $20 \text{ А}$ ?

**В11.** Скорость звука в воде  $1400 \text{ м}/\text{с}$ . На каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний  $100 \text{ Гц}$ ?

**В12.** Изображение предмета в собирающей линзе получено в натуральную величину. Во сколько раз уменьшится размер изображения, если расстояние от предмета до линзы увеличить в 4 раза?

**С1.** Два шара с массами  $400 \text{ г}$  каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, проходящей через точку касания неподвижных шаров и перпендикулярно линии, соединяющей их центры. Чему равна масса третьего шара, если после абсолютно упругого удара с неподвижными шарами он остановился? Все шары – гладкие и имеют одинаковые радиусы.

**С2.** Вертикальная труба с поршнем опущена нижним концом в ртуть. Вначале поршень находится на уровне ртути в сосуде, а затем его медленно поднимают на высоту  $87,5 \text{ см}$ . Пренебрегая массой поршня и трением, найдите совершенную при этом работу. Площадь поршня  $10 \text{ см}^2$ . Воздуха под поршнем нет,

давлением паров ртути пренебречь. Плотность ртути  $13600 \text{ кг/м}^3$ , атмосферное давление  $750 \text{ мм рт.ст.}$

**С3.** Плоский воздушный конденсатор заполнили жидким диэлектриком (с диэлектрической проницаемостью 3), зарядили, сообщив ему энергию  $6 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$ , и отключили от источника тока. Определите, какая энергия будет запасена в конденсаторе, если из него слить диэлектрик.

**С4.** Шарик, подвешенный на пружине, отвели из положения равновесия вертикально вниз на  $3 \text{ см}$  и сообщили ему начальную скорость  $1 \text{ м/с}$ , после чего шарик стал совершать вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $5 \text{ см}$ . Найдите циклическую частоту этих колебаний.

### *Вариант 2*

**В1.** С какой скоростью (в  $\text{км/ч}$ ) двигался поезд до начала торможения, если тормозной путь он прошел за  $25 \text{ с}$  с ускорением  $0,5 \text{ м/с}^2$ ?

**В2.** На нити, выдерживающей натяжение  $6 \text{ Н}$ , поднимают груз массой  $0,2 \text{ кг}$  из состояния покоя вертикально вверх. Считая движение равноускоренным, найдите предельную высоту (в  $\text{см}$ ), на которую можно поднять груз за время  $0,2 \text{ с}$  так, чтобы нить не оборвалась.

**В3.** На подножку вагонетки, которая движется по рельсам со скоростью  $1 \text{ м/с}$ , прыгает человек массой  $80 \text{ кг}$  в направлении, перпендикулярном ходу вагонетки. Масса вагонетки  $120 \text{ кг}$ . Определите скорость (в  $\text{см/с}$ ) вагонетки вместе с человеком.

**В4.** Летящая с некоторой скоростью пуля попадает в мешок с песком и углубляется в него на  $10 \text{ см}$ . На какую глубину (в  $\text{см}$ ) войдет в песок пуля той же массы, если скорость ее движения будет вдвое больше? Считайте, что сила сопротивления движению пули в песке не зависит от ее скорости.

**В5.** На одной чашке равноплечных рычажных весов находится груз весом  $2,2 \text{ Н}$ , на другой – весом  $2,4 \text{ Н}$ . На каком расстоянии (в  $\text{мм}$ ) от центра коромысла весов надо подвесить гирьку весом  $1,2 \text{ Н}$ , чтобы весы были в равновесии? Длина коромысла  $30 \text{ см}$ .

**В6.** В сосуде находится газ под давлением  $40 \text{ атм}$ . Какое установится давление (в  $\text{атм}$ ), если из сосуда выпустить  $15\%$  содержащегося там газа? Температуру считать постоянной.

**В7.** При изобарном нагревании газу было сообщено  $26 \text{ Дж}$  энергии, в результате чего внутренняя энергия газа увеличилась на  $12 \text{ Дж}$ , а его объем возрос на  $2 \text{ л}$ . Найдите давление газа (в  $\text{кПа}$ ).

**В8.** Работа по переносу заряда 260 нКл из бесконечности в некоторую точку электрического поля равна 65 мкДж. Найдите потенциал этой точки. Потенциал в бесконечности примите равным нулю.

**В9.** При подключении источника тока с ЭДС 13 В к некоторому сопротивлению напряжение на полюсах источника оказывается 7 В, а сила тока в цепи 1,5 А. Найдите внутреннее сопротивление источника.

**В10.** Во сколько раз электрическая сила, действующая на электрон, больше магнитной силы, если напряженность электрического поля 3,5 кВ/м, а индукция магнитного поля 0,1 Тл? Скорость электрона равна 200 м/с и направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

**В11.** Радиолокатор работает на длине волны 5 см и дает импульсы длительностью 0,04 мкс. Сколько колебаний содержит один импульс? Скорость света  $3 \cdot 10^8$  м/с.

**В12.** Расстояние между предметом и его увеличенным в 3 раза мнимым изображением равно 40 см. Найдите фокусное расстояние линзы (в см).

**С1.** Два упругих шарика, массы которых относятся как 2:3, подвешены на одинаковых нитях длиной 75 см. Нить с более легким шариком отклонили от положения равновесия на  $90^\circ$  и отпустили. На сколько сантиметров поднимется второй шарик после удара?

**С2.** В сообщающихся сосудах находится ртуть. В один из сосудов площадью  $100 \text{ см}^2$  наливают 1 кг воды и опускают в нее деревянный брусок массой 360 г. На сколько миллиметров поднимется ртуть в другом сосуде площадью  $25 \text{ см}^2$ ? Плотность ртути  $13600 \text{ кг/м}^3$ .

**С3.** Два плоских воздушных конденсатора, первый заряженный до напряжения 42 В, а второй незаряженный, соединили параллельно, после чего напряжение на конденсаторах стало 7 В. Во сколько раз расстояние между пластинами второго конденсатора меньше, чем у первого, если площади их пластин одинаковы?

**С4.** При смещении точки от положения равновесия, равном 4 см, скорость точки равна 6 см/с, а при смещении, равном 3 см, скорость точки равна 8 см/с. Найдите амплитуду колебаний (в см).

*Публикацию подготовил А.Чернуцан*

## САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

### *Политехническая олимпиада школьников*

Политехническая олимпиада школьников в 2012/13 учебном году проводилась по трем предметам: математике, физике и информатике. Отборочный тур проходил заочно с применением интернет-технологии. Задания и правила выполнения были вывешены на официальном сайте олимпиады. Победители и призеры отборочного тура были приглашены к участию в заключительном туре, который прошел в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете в форме очного письменного испытания.

Информацию об олимпиаде 2013/14 учебного года можно получить на сайте СПбГПУ: [www.spbstu.ru](http://www.spbstu.ru)

Ниже приводятся задания олимпиады 2012/13 учебного года.

### МАТЕМАТИКА

#### *Отборочный тур*

#### *Задачи с ответами на выбор*

1. Упростите выражение  $\frac{3x+3}{x^2+4x+3} + \frac{x}{x+3}$ .

1) 2; 2) 1; 3)  $x$ ; 4)  $x+3$ .

2. Найдите наименьшее натуральное  $k$ , для которого  $81^n + 13k$  делится на 100 хотя бы при одном натуральном  $n$ .

1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 5.

3. Укажите середину промежутка, являющегося множеством решений неравенства  $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2x}$ .

1) 1; 2)  $\frac{3}{2}$ ; 3) 2; 4)  $\frac{5}{2}$ .

4. Какое наибольшее значение принимает величина  $2x + y$ , если  $(x; y)$  — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -4y, \\ \sqrt{x-2} - 2y = 4? \end{cases}$$

1) 0; 2) 2; 3) 1; 4) 4.

5. Клиент взял кредит на 100000 руб. Каждый месяц банк взимает 1% от текущей задолженности. Клиент гасит кредит ежемесячными взносами по 5000 руб. Сколько взносов должен произвести клиент (включая последний неполный платеж)?

1) 20; 2) 22; 3) 21; 4) 23.

6. Из дачного поселка на озеро купаться пошла Маша. Через некоторое время на озеро поехал на велосипеде Гриша. Его скорость была в 3 раза больше, чем у Маши. Гриша обогнал Машу, доехал до озера, искупался за 10 минут и направился назад. Он встретил Машу через 45 минут после их первой встречи. Гриша вернулся домой тогда же, когда Маша дошла до озера. Сколько времени Гриша догонял Машу?

1) 30 мин; 2) 15 мин; 3) 45 мин; 4) 60 мин.

7. Какое наименьшее положительное значение может принимать сумма  $x + y$ , если  $\operatorname{tg} x, \operatorname{tg} y$  — различные корни уравнения  $t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 = 0$ ?

1)  $\pi$ ; 2)  $\frac{\pi}{3}$ ; 3)  $\frac{\pi}{2}$ ; 4)  $\frac{\pi}{6}$ .

8. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник с основанием 30 и боковой стороной 25, касается сторон треугольника в точках  $M, N, P$ . Найдите площадь треугольника  $MNP$ .

1)  $5\sqrt{2}$ ; 2)  $3\sqrt{15}$ ; 3) 72; 4) 90.

9. Конус вписан в шар радиуса 6. На каком расстоянии от центра шара следует расположить основание конуса, чтобы конус имел наибольший объем?

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 4.

10. При каком наибольшем значении параметра  $a$  уравнение  $\frac{x^2 - 2x}{|x - 2|} + \frac{x^2 + 2x}{|x + 2|} = a - x^2$  не имеет решений?

1) 8; 2) 2; 3) 1; 4) 4.



### Заключительный тур

1. Найдите общие корни уравнений

$\sin 5x - \sqrt{2} \sin 3x = \sin x + \cos 3x - 1$  и  $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$ , лежащие в интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$ .

2. В трех емкостях хранятся растворы кислоты: в первой — 10%-й, во второй — 20%-й, в третьей — 30%-й. Смешав содержимое емкостей, получили 10 литров 18%-го раствора. На сколько литров количество кислоты в первой емкости больше, чем в третьей?

3. Пусть  $f(x) = \max_{t \leq x} (3 - |t - 2|)$ ,  $g(x) = \min_{t \leq x} (|t - 3| - 3)$ . Найдите координаты  $(x_0; y_0)$  центра симметрии графика функции  $h(x) = f(x) + g(x)$ .

4. В Санкт-Петербург для тренировки перед шахматным турниром приехала группа шахматистов из Нижнего Новгорода. Каждый петербуржец сыграл ровно одну партию с каждым нижегородцем, хотя численный состав команд хозяев и гостей мог различаться. Количество партий между представителями разных городов было на 18 больше, чем удвоенное количество участников. Какое минимальное количество таких партий могло быть сыграно?

5. В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 11$ ,  $BC = 22$  проведена биссектриса  $BL$ . Точка  $M$  на биссектрисе делит ее в отношении  $BM : ML = 2 : 3$ . Прямая  $AM$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $N$ . Найдите длину отрезка  $BN$ .

6. Найдите функцию  $f$ , определенную на  $(-\infty; +\infty)$  и удовлетворяющую уравнению  $f(3+x) + 2f(4-x) = 45 - 3x$ .

### ФИЗИКА

#### Отборочный тур

1. Два спутника движутся по круговым орбитам в *противоположных* направлениях вокруг планеты Шелезяка с линейными скоростями  $v_1 = 5$  км/с и  $v_2 = 8$  км/с. Радиус планеты  $R = 17,4$  тыс. км, ускорение свободного падения на ее поверхности  $g = 14$  м/с<sup>2</sup>. Найдите интервал времени, через который спутники периодически сближаются друг с другом на минимальное расстояние. Результат выразите в *часах* и запишите в виде десятичной дроби с точностью до десятых долей. (10 баллов)

2. Массивный шарик, привязанный упругой нитью к потолку, вращается по окружности в горизонтальной плоскости так, что нить подвеса описывает в пространстве конус (рис.1). Угол

между вертикалью и нитью подвеса  $\theta = 40^\circ$ . Кинетическая энергия шарика  $E_{\text{кин}} = 1,8$  Дж. При вращении относительное увеличение длины нити подвеса составляет  $\delta = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100\% = 10\%$  ( $l_0$  – длина нити в нерастянутом состоянии). Найдите потенциальную энергию растянутой нити. Ответ представьте

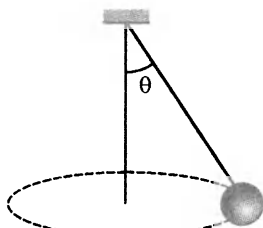


Рис. 1

в джоулях и запишите с точностью до десятых долей. (12 баллов)

3. Деревянное однородное полено диаметром  $d = 27$  см и длиной  $L = 0,5$  м плавает в воде, находясь в вертикальном положении (рис.2). Под поверхностью воды находится  $5/9$  от общей длины бревна. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить полено в воду? Ответ выразите в джоулях и запишите с точностью до сотых долей. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. (10 баллов)



Рис. 2

4. В пробирку налили некоторое количество воды при температуре  $t_1 = 31^\circ\text{C}$  и герметично закрыли пробкой. Затем пробирку охладили до температуры  $t_2 = -28^\circ\text{C}$ . При этом оказалось, что давление воздуха над льдом осталось прежним. Давлением паров воды и изменением объема колбы в процессе охлаждения можно пренебречь. Плотность воды  $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, образовавшегося льда  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>. Какую долю объема пробирки занимала вода до ее охлаждения? Ответ запишите в виде десятичной дроби с точностью до сотых долей. (10 баллов)

5. Тепловая машина, работающая по термодинамическому циклу Карно, в качестве нагревателя использует кипящую при нормальном атмосферном давлении воду, а в качестве холодильника – сосуд со льдом при температуре его плавления. Какая масса льда растает при совершении тепловой машиной работы  $A = 2,1$  МДж? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 334$  кДж/кг. Ответ запишите в килограммах с точностью до десятых долей. (10 баллов)

6. С  $\nu = 7$  моль идеального газа совершают циклический термодинамический процесс, который на  $pV$ -диаграмме в относительных координатах изображается в виде окружности (рис.3). Значения параметров:  $p_0 = 170$  кПа,  $V_0 = 0,02$  м<sup>3</sup>. Определите разность между максимальной и минимальной температурами

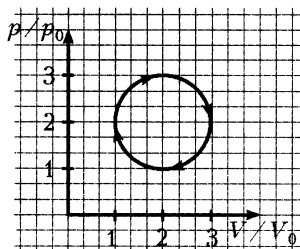


Рис. 3

(центр квадрата) и  $B$  (четвертая вершина). Результат запишите в виде десятичной дроби с точностью до сотых долей. (12 баллов)

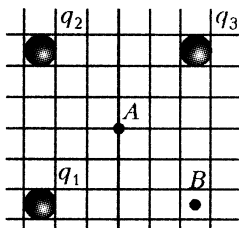


Рис. 4

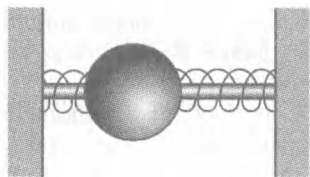


Рис. 5

8. Массивный шарик, надетый на гладкий горизонтальный стержень, прикреплен к концам двух невесомых пружин (рис.5). Противоположные концы пружин закреплены в неподвижных стенках так, что в положении равновесия шарика пружины не деформированы. Каков период колебаний шарика, если известно, что при поочередном подвешивании шарика к каждой из пружин по отдельности их удлинения составили  $\delta_1 = 6$  см и  $\delta_2 = 8$  см? Ответ представьте в секундах и запишите с точностью до сотых долей. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. (8 баллов)

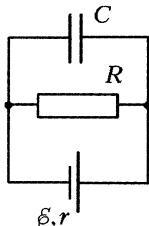


Рис. 6

9. В плоском конденсаторе (рис.6) напряженность электрического поля  $E = 6,6$  кВ/м. Электродвижущая сила источника  $\mathcal{E} = 33$  В, внутреннее сопротивление  $r = 7$  Ом, нагрузочное сопротивление  $R = 23$  Ом. Определите расстояние (в миллиметрах) между обкладками конденсатора. Результат запишите в виде десятичной дроби с точностью до десятых долей. (8 баллов)

10. Проводящий однородный стержень дли-

ной  $L = 84$  см вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = 400$  рад/с вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей на расстоянии  $d = 19$  см от одного из его концов (рис.7). Однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл направлено параллельно оси вращения. Определите разность потенциалов между концами стержня. Ответ представьте в вольтах с точностью до десятых долей. (12 баллов)

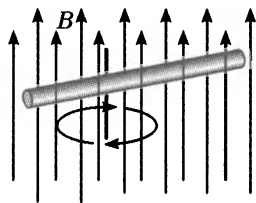


Рис. 7

### Заключительный тур

1. Два тела бросают из одной точки с одинаковыми скоростями  $v_0 = 60$  м/с под одинаковым углом к горизонту  $\alpha = 30^\circ$  с интервалом времени  $\tau = 2$  с. Через какое время (считая от момента бросания первого тела) данные тела в полете будут находиться на минимальном расстоянии друг от друга? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. (15 баллов)

2. Тонкий обруч массой  $M$  и радиусом  $R$  может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр обруча (рис.8). На обруче закреплен небольшой груз массой  $m$ . Найдите период малых колебаний обруча. (30 баллов)

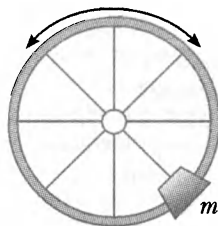


Рис. 8

3. Теплоизолированный сосуд объемом  $V = 2$  м<sup>3</sup> разделен тонкой мембраной на две равные части. Первоначально в одной части сосуда находится 2 моль гелия при температуре  $T_{\text{He}} = 300$  К, а в другой – 1 моль аргона при температуре  $T_{\text{Ar}} = 600$  К. Атомы гелия могут свободно проникать через микропоры в мембране, а атомы аргона – нет. Найдите давление в той части сосуда, где находился гелий, после установления равновесного состояния. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь. (10 баллов)

4. Две концентрические изолированные проводящие сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) несут на себе электрические заряды  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно. Найдите потенциал внутренней сферы после соединения сфер проводником. (10 баллов)

5. Сопротивление галогеновой лампы накаливания зависит от приложенного к ней напряжения по закону  $R = \alpha\sqrt{U}$ , где  $\alpha$  – некоторый постоянный коэффициент. Если три такие лампы соединить последовательно и подключить к источнику напряже-

ния, то сила тока в цепи будет равна  $I_1$ . Найдите силу тока через источник, если эти же лампы подключить к источнику, соединив их параллельно. Внутреннее сопротивление источника считать равным нулю. (15 баллов)

6. В бетатроне (ускорителе заряженных частиц) электроны движутся по круговой орбите постоянного радиуса  $r = 50$  см. Поток магнитной индукции через площадь орбиты равномерно изменяется со скоростью  $\Delta\Phi/\Delta t = 10$  Вб/с. Какое время необходимо для ускорения электронов до энергии  $W = 20$  кэВ? Начальную энергию электронов считать пренебрежимо малой, отношение заряда к массе для электрона равно  $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг. (20 баллов)

## ИНФОРМАТИКА

### Отборочный тур

1. Вот 4 алгоритма, описанных на псевдокоде:

Алг Алг1

Нач

Ввод A, B

C := 0

Для K От A До B НЦ

Если K mod 7 = 0 То C := C + 1

КЦ

Вывод C

Кон

Алг Алг2

Нач

Ввод A, B

C := 0

Для K От 1 До A НЦ

Если A mod K = 0 И B mod K = 0 То C := C + 1

КЦ

Вывод C

Кон

Алг Алг3

Нач

Ввод A, B

C := 1

Пока B > 0 НЦ

C := C \* A

$B := B - 1$

**КЦ**

**Вывод** C

**Кон**

**Алг** Алг4

**Нач**

**Ввод** A, B

C := 0

**Для** K **От** A **До** B **НЦ**

C := C + K

**КЦ**

**Вывод** C

**Кон**

Определите, какой из алгоритмов при вводе заданных A и B выведет указанное значение C.

а) A=1000, B=1010, C=2; б) A=10, B=50, C=6; в) A=15, B=16, C=1; г) A=1001, B=91, C=4;

д) A=5, B=500, C=0; е) A=100, B=200, C=15150; ж) A=2, B=9, C=512; з) A=12, B=12, C=6.

2. Алгоритм, описанный в виде блок-схемы, представлен на рисунке 9. Найдите наименьшее натуральное значение A, при котором в результате выполнения алгоритма будет выведено «Ox!Bay!Ax!Ух!Bay!Ух!Bay!»

3. Если вы уже начали подготовку к ЕГЭ по информатике, то, наверное, уже знаете трагическую историю про разорванный на кусочки IP-адрес... Здесь история другая.

В 16-разрядных ячейках памяти лежали 4 одинаковых числа (естественно, двоичных, из ноликов-единичек). В результате падения метеорита каждая ячейка разбилась на 2 кусочка, кусочки перемешались. Их собрали: это были двоичные записи чисел 8, 9, 33, 41, 271, 937, 1961, 2170. Каким было исходное число? Результат представьте в десятичной системе счисления.

4. Установите соответствие между типами файлов и их описаниями:

Архив      DLL

Ярлык      SWF

Сжатое растровое изображение      CPP

Исполняемый файл      PPTX

Динамически подключаемая библиотека      AVI

Текст программы на языке C++      ISO

Образ диска      EXE

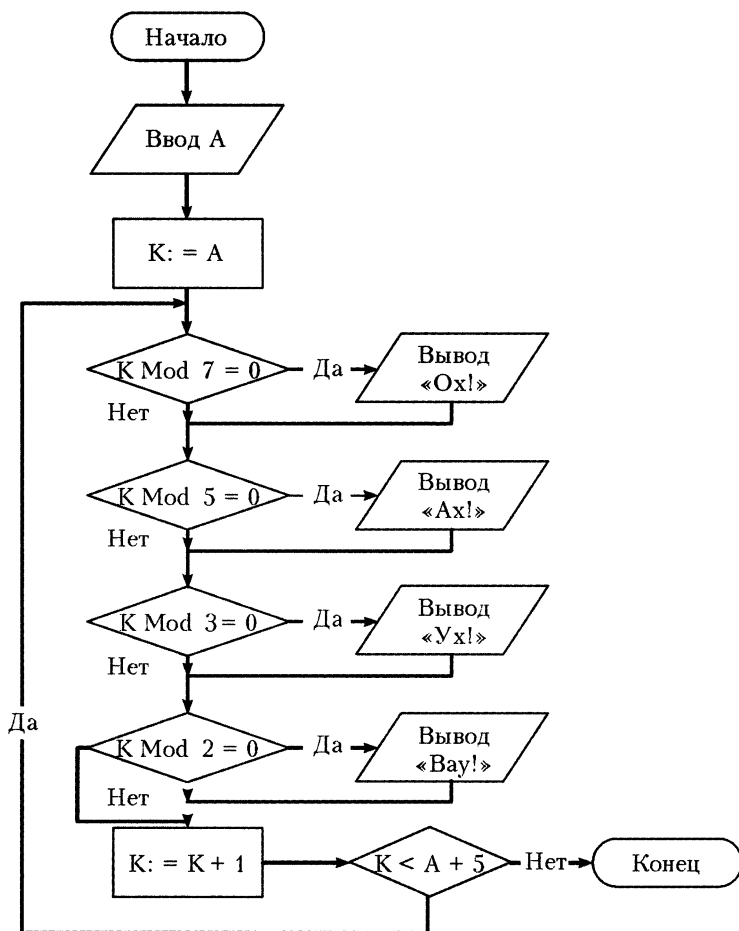


Рис. 9

Презентация Power Point RAR  
 Видеоклип JPG  
 Флэш-анимация LNK

5. Братья Гриша и Гоша – школьники. Ежедневно им выставляют оценки за поведение: 5, 4, 3 или 2. Известно, что у Гриши всех оценок примерно поровну. А вот Гоша получает двоек столько же, сколько остальных оценок вместе взятых, троек – столько, сколько четверок и пятерок, вместе взятых, а

четверок и пятерок – поровну. Папа каждый вечер спрашивает у каждого из мальчиков, что ему поставили. При этом ответ старшего брата несет в себе меньше информации, чем ответ младшего. На сколько бит ответ младшего информативнее? Ответ введите с точностью до сотых.

6. Делфтский яблокоед, переживший 2 тура Политехнической олимпиады 2012 года, по-прежнему живет на стеллажах фирмы IKEA и питается яблоками. За одну итерацию яблокоед может съесть 0, 1 или 2 яблока из имеющихся на полке, а также положить в карман 0 или 1 яблоко. Если яблокоед не съел ни одного яблока и не взял с собой – он не сможет совершить прыжок на другую полку и уснет. Если он яблок есть не будет, но положит одно яблоко в карман, он прыгнет на 1 полку вниз; 1 съест, 1 в карман – прыгнет на 1 полку вверх; 1 съест, 0 в карман – на 2 полки вверх; 2 съест, 0 в карман – на 4 полки вверх; 2 съест, 1 в карман – на 3 полки вверх. В начальный момент на полке с номером 0 сидит яблокоед. Рядом с ним 2 яблока. На полках с номерами -1 и 1 лежит по 1 яблоку, остальные полки бесконечного стеллажа пусты. На каких из перечисленных полок яблокоед не сможет оказаться ровно за 2 прыжка? Выберите один или несколько ответов.

а) На полке с номером 4; б) на полке с номером 5; с) на полке с номером 0; d) на полке с номером -2; e) на полке с номером 2; f) на полке с номером 1; g) на полке с номером -1; h) на полке с номером 3.

7. Пользуясь приведенными ниже таблицами базы данных (рис.10), определите, сколько килограммов гречи-ядрицы продано 14.02.11 в Псковскую область клиентам менеджера Абрамовича.

8. Кристофер Робин провел в лес Интернет, и Винни-Пух с друзьями и соседями впервые воспользовались продуктовым Интернет-магазином. Кролик закупил все, в чем содержался витамин С. Сова – все, в чем были витамин С, витамин А и было не более 100 калорий. Пятачок – все, где был хотя бы один из витаминов А или С. Винни-Пух же закупил все, содержащее хоть какой-нибудь витамин. Упорядочите героев этой истории по возрастанию количества приобретенных продуктов.

9. На газоперекачивающей станции стояли 2 датчика, фиксирующих давление газа на входе и на выходе. Сигнал с каждого датчика измеряется каждую секунду, кодируется минимальным возможным количеством битов и сохраняется. По истечении суток собранные данные записываются в файл. В целях повышения безопасности добавили еще 2 датчика. В результате объем



Товары: таблица

Актуаль	Наименование	Вес	Единица	Цена	Единица	Единица	Упаковка
* K21101	Мыло хозяйственное	0,2		2,2			100
* M16701	Греча ядрица	1		32,5			20
* M16702	Греча пшеница	1		27,8			20
* M16703	Греча ядрица	0,5		17,5			50
* M16705	Греча ядрица	2		64			10
* P24423	Горючий порошок	0,2		12,9			50
* T14501	Сахар песок	1		24,3			25
* T14502	Сахар песок	0,5		13,5			40
* T14503	Сахар рафинад	0,5		19,9			50
* T14504	Сахар песок	1,22		122			10
* W35701	Чай "Совхоз" с ромашкой	0,1		35			30
* W35702	Чай "Совхоз" с мятой	0,1		35			20
		0					0

Менеджеры: таблица

Код	ФИО
*	1 Охотников С.С.
*	2 Павлов П.П.
*	3 Абрамов А.А.
*	4 Морозов М.М.

Запись: 1 4 1 1 2 3 4

из 4

Регионы: таблица

Код	Наименование
*	1 СПб
*	2 Ленинградская обл.
*	3 Псковская обл.
*	4 Новгородская обл.
*	5 Вологодская обл.

Запись: 1 4 1 1 2 3 4

из 5

Покупатели: таблица

Код	Наименование	Регион	Менеджер	Продажи
1	ООО "Прибой"	2		1
2	ЧП "Колос"	1		1
3	ЧП "Успех"	4		3
4	ООО "Искра"	2		2
5	ООО "Трест №14"	3		3
6	ООО "Бис"	1		4
7	ЧП "Лесница"	3		2
8	ЧП "Аура"	2		1
9	ООО "Таромок"	3		3
10	ЧП "Балла"	3		4
11	ООО "Яг"	2		4
12	ЧП "Мироза"	2		2
		0		0

Запись: 1 4 1 1 2 3 4

из 12

Продажи: таблица

Код	Товар	Покупатель	Количество	Дата
1	W35701	2	3	13.02.2011
2	T14501	8	10	13.02.2011
3	K21101	4	2	13.02.2011
4	M16703	5	6	13.02.2011
5	T14503	1	3	14.02.2011
6	W35702	3	1	14.02.2011
7	M16702	9	5	14.02.2011
8	P24423	7	3	14.02.2011
9	T14504	9	4	14.02.2011
10	M16705	5	5	14.02.2011
11	M16703	2	10	14.02.2011
12	T14501	2	10	14.02.2011
13	T14502	1	2	14.02.2011
14	M16701	9	2	14.02.2011
15	W35701	9	1	14.02.2011
16	P24423	8	2	14.02.2011
17	M16703	5	5	15.02.2011
18	T14501	8	2	15.02.2011
		0	0	

Запись: 1 4 1 1 2 3 4

из 19

Рис. 10

суточного файла увеличился на 172,8 килобайта. Определите количество уровней дискретизации сигнала с датчика.

10. Формула из ячейки A10 с помощью автозаполнения скопирована в ячейки B10:E10, затем на основе ячеек A10:E10 построена диаграмма (рис.11). В ячейке F9 – сумма значений ячеек A9:E9. У части ячеек, как видите, цвет текста совпадает с цветом заливки. Однако это не мешает вам определить значение в ячейке F9.

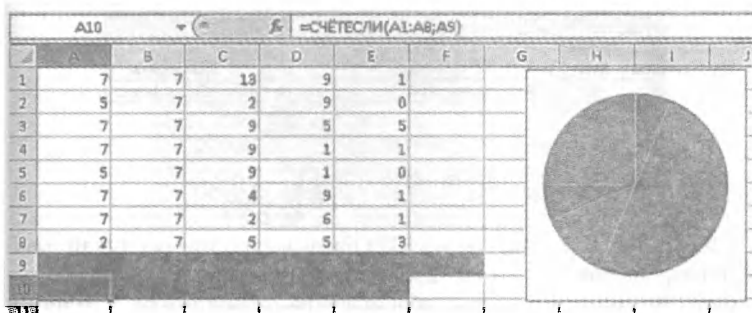


Рис. 11

### Заключительный тур

1 (20 баллов). В ходе разработки программы, имитирующей игру в «Морской бой», встал вопрос о способе представления данных о расстановке кораблей. Были предложены следующие варианты:

А. Координаты (номер строки и номер столбца) всех непустых клеток игрового поля, каждая координата представляет собой число – байт.

В. Двумерный массив символов в ASCII-коде, где «#» обозначает элемент корабля, пробел – пустую клетку.

С. Для каждого из кораблей хранятся по 2 координаты его начала и конца в виде чисел-байтов.

Д. Массив двухбайтовых переменных по числу строк, принадлежность клеток строки поля кораблям отражается битами, лишние биты не используются.

Известно, что игровое поле имеет размер 10 на 10, на нем размещаются 1 4-клеточный, 2 3-клеточных, 3 2-клеточных и 4 1-клеточных корабля.

1) Определите объем памяти, необходимой для кодирования расстановки кораблей при каждом из способов.

2) Требуется разработать функцию, которая получает на вход 2 целых числа – координаты выстрела – и возвращает булевское значение «попал/мимо». Упорядочите способы по возрастанию времени работы такой функции при оптимальном программировании.

2 (15 баллов). Перехвачена шифровка о месте встречи двух агентов вражеской разведки, а также обрывок бумаги со странной табличкой (рис.12). Где встречаются агенты?

№	A	B	C	D
1	№	Исходная буква	Ключ	Буква-результат
2	1	A	=ЕСЛИ(ОСТАТ(A2;2)=1;ОСТАТ(A2+14;32);ОСТАТ(A2+10;32))	=ИНДЕКС(\$B\$2:\$B\$33;C2)

Рис. 12

Шифровка: X K P Ц Ч Е У Ъ Ъ Ы А

**3 (15 баллов).** Массив из 1024 байтов заполнили случайными числами из интервала  $[0; 255]$ , затем скопировали в еще один такой же массив, потом оба массива объединили в один и перемешали. Но случилось страшное: один из элементов массива нечаянно заменили на число 4. Какое число было заменено, если известно, что элемент №1 XOR элемент №2 XOR...XOR элемент №2048 = 128?

**4 (15 баллов).** У делфтского яблокоеда началась весенняя линька – он в начале каждой минуты сбрасывает 2 или 3 колючки. К началу следующей

Если	$X \bmod 7 = 0$	То
	$X := X / 7$	
ИначеЕсли	$X \bmod 5 = 0$	То
	$X := X * 2$	
ИначеЕсли	$X \bmod 3 = 0$	То
	$X := X + 5$	
ИначеЕсли	$X \bmod 2 = 0$	То
	$X := X + 1$	
Всё		

Рис. 13

минуты количество колючек яблокоеда  $X$  самопроизвольно меняется по алгоритму, представленному на рисунке 13. Если после очередного сброса колючек их количество стало равным 0 – линька успешно завершилась. Если яблокоед остался с одной колючкой, он не сможет завершить линьку и ему придется в одиночестве ждать следующей весны, когда он вновь обрстет. За какое наименьшее время завершит линьку яблокоед с 27 колючками? По сколько иголок он должен для этого сбрасывать на каждой минуте процесса линьки (если возможны несколько одинаковых по времени вариантов, приведите любой)?

**5 (15 баллов).** Имеется диаграмма, отражающая результаты контрольной работы (рис.14). Даны 4 высказывания:

- 1) Ни одна из девочек не получила «Отлично».
- 2) Возможно, что среди написавших работу на 3 девочек вдвое меньше, чем мальчиков.
- 3) Наверняка есть хотя бы одна девочка, которая написала контрольную на оценку ниже 4.



Рис. 14

4) Возможно, что есть девочки, написавшие контрольную на 2 или же не писавшие ее.

Какие 2 высказывания не могут быть истинными одновременно? В классе мальчиков не меньше, чем девочек.

**6 (20 баллов).** Описание алгоритма функции представлено на рисунке 15. Были выведены на экран значения функции для всех целых чисел от 60 до 70. Какими были наибольшее и наименьшее из выведенных чисел?

*Примечание:* в задачах 4 и 6 «mod» – остаток от деления левого операнда на правый, «div» – результат целочисленного деления левого операнда на правый.

Алг	Цел	FFF	(Цел N)
<u>Нач</u>			
M := 0			
<u>Пока</u> N > 0 <u>НЦ</u>			
M := M * 2			
M := M + (N mod 2)			
N := N div 2			
<u>КЦ</u>			
<u>Знач</u> := M			
<u>Кон</u>			

Рис. 15

Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов, М.Коробков,  
Е.Крылова, А.Моисеев, С.Преображенский,  
В.Родионов, А.Щукин

**ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО ФИЗИКЕ***Вариант 1***Ответы к задачам групп А и В**

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
3	2	1	2	3	2	1	4	3	4	1	2	4	3	1
A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25					
2	4	1	4	3	3	2	2	4	1					
B1	B2	B3	B4											
331	313	43	42											

**Указания и решения к избранным задачам**

**A21.** Сила натяжения нити, действующая на груз, равна  $F$  независимо от угла  $\alpha$ .

**A22.** Время движения мотоциклиста от места старта до встречи с грузовиком найдем из уравнения

$$s = \frac{at^2}{2}, \text{ откуда } t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = 10 \text{ с.}$$

Поскольку время движения грузовика на  $\Delta t = 5$  с больше, скорость грузовика равна

$$v = \frac{s}{t + \Delta t} = 10 \text{ м/с.}$$

**C1.** После замыкания ключа сопротивление цепи уменьшается от  $R$  до  $R/2$ , поэтому конечное (установившееся) значение силы тока равно

$$I_1 = 2I_0 = 6 \text{ А}$$

(если пренебречь сопротивлением источника и активным сопротивлением катушки). При возрастании тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_{\text{сам}} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

пропорциональная скорости изменения тока и действующая,

согласно правилу Ленца, против тока. Поскольку  $\mathcal{E}_{\text{сам}}$  не может превышать ЭДС источника, то возрастание тока происходит плавно, за конечный промежуток времени. По мере приближения силы тока к установившемуся значению  $I_1$  ЭДС самоиндукции стремится к нулю.

**С2.** Найдем максимальное сжатие пружины  $x$ , при котором груз после остановки не начнет двигаться в обратном направлении:

$$F_{\text{тр пок}} - kx = 0 ,$$

$$F_{\text{тр пок}} = \mu N = \mu mg ,$$

откуда

$$x = \frac{\mu mg}{k} .$$

Запишем для движения груза закон сохранения энергии с учетом перехода части энергии в тепло, т.е. с учетом работы силы трения:

$$\frac{kd^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \mu mg(d + x) .$$

Сокращая на  $(d + x)$ , получим

$$\frac{k(d - x)}{2} = \mu mg .$$

Подставляя сюда  $x = \mu mg/k$ , находим

$$m = \frac{kd}{3\mu g} = 2,5 \text{ кг} .$$

**С3.** Пробка придет в движение, когда дополнительная сила давления со стороны газа станет больше атмосферного давления на величину, равную максимальной силе трения покоя:

$$\Delta p s = F .$$

Внутренняя энергия одноатомного газа равна

$$U = \frac{3}{2} pV .$$

Поскольку объем газа при нагревании не меняется, то работа газа равна нулю, и из первого закона термодинамики получаем

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2} V \Delta p = \frac{3}{2} V \frac{F}{s} .$$

Отсюда находим

$$s = \frac{3}{2} \frac{VF}{Q} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

**С4.** Когда ключ находится в положении 1, ток в цепи не течет, конденсатор заряжен до напряжения  $\mathcal{E}$ . После перевода ключа в положение 2 конденсатор разряжается через резистор, и запасенная в конденсаторе энергия переходит во внутреннюю тепловую энергию. Разность потенциалов на конденсаторе к тому моменту, когда в сопротивлении выделилась тепловая энергия  $Q$ , можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{C\mathcal{E}^2}{2} = Q + \frac{CU^2}{2}.$$

Такая же разность потенциалов приложена к сопротивлению, и из закона Ома находим

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{I} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \frac{2Q}{C}} = 100 \text{ кОм}.$$

**С5.** Из второго закона Ньютона для движения частицы по окружности в магнитном поле:

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

можно любую интересующую нас меняющуюся величину выразить через  $R$  и  $B$ . В частности, для кинетической энергии и частоты вращения получаем

$$v = \frac{qBR}{m}, \quad E = \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m}, \quad \nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Поскольку по условию кинетическая энергия при медленном изменении  $B$  меняется пропорционально частоте  $\nu$  (этот факт, доказываемый в теоретической физике, дается школьникам без объяснений, как некое «священное знание»), то их отношение остается постоянным:

$$\frac{E}{\nu} = \pi q B R^2 = \text{const}, \text{ или } B_0 R_0^2 = B R^2.$$

Отсюда получаем

$$R = R_0 \sqrt{\frac{B_0}{B}}.$$

**С6.** Поскольку кинетической энергией образовавшегося атома можно пренебречь, закон сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{p^2}{2m} = E_n + h\nu.$$

После вычислений получаем

$$\nu = 4,12 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

## Вариант 2

### Ответы к задачам групп А и В

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
3	3	4	4	1	2	3	1	2	3	3	4	1	3	1
A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25					
2	2	3	2	4	1	2	4	1	4					
B1	B2	B3	B4											
122	121	31	41											

### Указания и решения к избранным задачам

**A22.** Из закона сохранения импульса в проекции на ось  $x$ , направленную вдоль первоначальной скорости снаряда, найдем

$$p_{2x} = mv.$$

Зная модуль импульса второго осколка, найдем угол, который его скорость составляет с осью  $x$ :

$$\cos \alpha = \frac{p_x}{m_2 v_2} = \frac{mv}{m_2 v_2} = \frac{1}{2}, \text{ и } \alpha = 60^\circ.$$

**A25.** Закон сохранения энергии имеет вид

$$E_1 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2}.$$

**C1.** Идеальный вольтметр имеет бесконечно большое сопротивление, поэтому ток по участку цепи с вольтметром равен нулю. Следовательно, разность потенциалов на реостате равна нулю, а разность потенциалов на вольтметре равна разности потенциалов на зажимах идеального (с нулевым сопротивлением) источника, т.е. его ЭДС  $\mathcal{E}$ :

$$U = \mathcal{E} - IR = \mathcal{E}.$$

Показания вольтметра при перемещении движка реостата не меняются.

**C2.** Так как трение в системе отсутствует, механическая энергия системы сохраняется:

$$mg \cdot \frac{5}{2} h = mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}.$$

Кроме того, в отсутствие трения между горкой и полом сохраняется горизонтальная составляющая импульса системы:

$$0 = mv - MV.$$

Выразив отсюда  $V$  и подставив в закон сохранения энергии,



получим

$$\frac{m}{M} = \frac{3gh}{v^2} - 1.$$

**С3.** Первый закон термодинамики для одноатомного газа имеет вид

$$Q = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + A.$$

Конечную температуру найдем из уравнения состояния

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

и уравнения процесса

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_1}{T_2},$$

откуда

$$T_2 = T_1 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}.$$

В итоге получим

$$Q = \frac{3}{2} \nu R T_1 \left( \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} - 1 \right) + A \approx -1,25 \text{ кДж}.$$

**С4.** В конечном состоянии, после установления равновесия, токи в цепи равны нулю, разность потенциалов на конденсаторе емкостью  $C_2$  равна нулю, а разность потенциалов на конденсаторе емкостью  $C_1$  равна  $\mathcal{E}$ . Закон сохранения энергии можно записать следующим образом:

$$A_{\text{ист}} = (W_2 - W_1) + Q, \text{ или } A_{\text{ист}} = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2} + Q,$$

т.е. работа сторонних сил источника равна сумме изменения электростатической энергии системы и изменения внутренней (тепловой) энергии. Работа источника равна

$$A_{\text{ист}} = \Delta q \mathcal{E} = (C_1 \mathcal{E} - 0) \mathcal{E} = C_1 \mathcal{E}^2.$$

Отсюда получаем

$$Q = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2} = 0,3 \text{ Дж}.$$

**С5.** Точка  $A'$  – изображение вершины  $A$  – находится на расстоянии  $2F$  от линзы (рис.1), а длину  $x$  отрезка  $A'C'$  найдем из формулы линзы

$$\frac{1}{2F - a} + \frac{1}{2F + x} = \frac{1}{F},$$

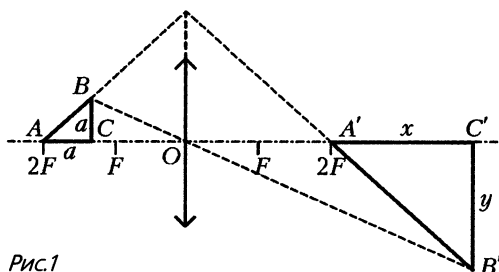


Рис.1

откуда

$$x = \frac{aF}{F - a} = \frac{a}{1 - aD}.$$

Длину  $y$  катета  $B'C'$  найдем из подобия треугольников  $OC'B'$  и  $OCB$ :

$$y = a \frac{2F + x}{2F - a} = \frac{aF}{F - a} = \frac{a}{1 - aD}.$$

Площадь равнобедренного ( $y = x$ ) прямоугольного треугольника  $A'B'C'$  равна

$$S = \frac{1}{2} xy = \frac{a^2}{2(1 - aD)^2} \approx 9,9 \text{ см}^2.$$

**С6.** Действующая на электрон со стороны электрического поля сила

$$\vec{F}_{\text{эл}} = -e\vec{E}$$

направлена против оси  $y$ , а сила Лоренца, равная

$$F_{\text{Л}} = evB,$$

направлена вдоль оси  $y$ . Чтобы ускорение самых быстрых электронов было направлено против оси  $y$ , для них должно выполняться неравенство

$$ev_{\text{max}} B < eE, \text{ или } v_{\text{max}} < \frac{E}{B}.$$

В соответствии с уравнением Эйнштейна

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$$

получаем

$$\nu < \frac{1}{h} \left( A_{\text{вых}} + \frac{mE^2}{2B^2} \right) = 6,4 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

### Дополнительные задачи из других вариантов

**1.** Фототок насыщения пропорционален числу электронов, вылетающих с поверхности катода в единицу времени, а это число пропорционально световому потоку, падающему на катод. Источник находится в фокусе линзы, поэтому во втором случае линза отстоит дальше от источника, чем в первом. Поскольку диаметр линзы не меняется, во втором случае она видна от источника под меньшим углом, чем в первом. Следовательно, на линзу во втором случае попадает меньшая часть фотонов, вылетающих из источника. Так как все фотоны, попавшие на линзу, достигают катода, то падающий на катод световой поток уменьшается, т.е. фототок насыщения уменьшается.

**2.** Чтобы брусок сдвинулся с места, сила натяжения нити в тот момент, когда грузик находится в нижней точке, должна превышать максимальное значение силы трения покоя:

$$T > \mu N = \mu Mg.$$

Силу натяжения найдем из второго закона Ньютона для движения по окружности

$$T - mg = m \frac{v^2}{L},$$

а квадрат скорости – из закона сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

Получаем

$$T = mg \left( 1 + \frac{2h}{L} \right) > \mu Mg,$$

откуда

$$m > \frac{\mu M}{1 + 2h/L}.$$

**3.** Если записать движение снаряда на видеокамеру, а затем пустить запись наоборот (этот прием называют «обращение времени»), то точка падения снаряда становится точкой старта. В обратном движении снаряд вылетает с такой же начальной скоростью  $v_0$  под таким же углом  $\alpha$ , через время  $t$  он окажется на высоте  $h_1$ , пролетев расстояние  $l$  по горизонтали. Записав законы движения по осям  $x$  и  $y$ :

$$l = v_x t, \quad h_1 = v_{0y} t - \frac{gt^2}{2},$$

найдем проекции начальной скорости:

$$v_{0x} = \frac{l}{t}, \quad v_{0y} = \frac{h_1 + gt^2/2}{t}.$$

Дальность полета снаряда, т.е. расстояние от пушки до места взрыва, равна

$$s = v_{0x} t_{\text{полета}} = v_{0x} \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2l(h_1 + gt^2/2)}{gt^2} \approx 64 \text{ км}.$$

Отметим, что начальную скорость задавать не нужно – это лишнее условие. Хорошо, однако, что данная в условии скорость совпадает с той, которую можно вычислить из остальных данных.

4. Из первого закона термодинамики для циклического процесса

$$Q_n - |Q_x| = A,$$

где  $Q_n$  – количество теплоты, полученное от нагревателя,  $A$  – работа газа за цикл, получаем

$$|Q_x| = Q_n - A.$$

Работа газа за цикл равна

$$A = A_{12} - |A_{31}|.$$

Для процесса 1–2, где объем изменяется от  $V_0$  до  $2V_0$ , а давление изменяется от  $p_0$  до  $2p_0$ , получим

$$A_{12} = \frac{p_0 + 2p_0}{2} (2V_0 - V_0) = \frac{3}{2} p_0 V_0,$$

$$Q_n = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} =$$

$$= \left( \frac{3}{2} (2p_0) (2V_0) - \frac{3}{2} p_0 V_0 \right) + \frac{3}{2} p_0 V_0 = 6p_0 V_0 = 4A_{12}.$$

Таким образом,

$$Q_x = Q_n - (A_{12} - |A_{31}|) = 3A_{12} + |A_{31}| = 3370 \text{ Дж}.$$

5. Магнитный поток через площадь контура равен

$$\Phi(t) = B(t)S = aS \cos bt.$$

ЭДС индукции находим из закона электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E} = -\Phi'(t) = abS \sin bt,$$

а силу тока – из закона Ома для полной цепи:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{abS}{R} \sin bt.$$

Амплитуда колебаний силы тока имеет вид

$$i_M = \frac{abS}{R},$$

откуда получаем

$$R = \frac{abS}{i_M} = 1,2 \text{ Ом}.$$

## МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА «ВЫСШАЯ ПРОБА»

### МАТЕМАТИКА

Очный тур

8 класс

1. См. рис. 2.

2. Делится на 11.

Представим число в виде

$$10^{\left(10^{(10^{2013})}\right)} + 10^{(10^{2013})} + 10^{2013} - 1 = 100^a - 1 + 10^{2013}(10^b + 1),$$

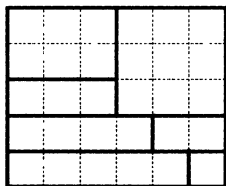


Рис. 2

где  $a = 10^{(10^{2013})}/2$  и  $b = (10^{2013} - 2013)$  – натуральные числа. Используя разложение на множители выражений вида  $a^n \pm b^n$ , получаем

$$100^a - 1 = (100 - 1)(100^{a-1} + 100^{a-2} + \dots + 100 + 1) - \text{делится на } 11,$$

$$10^b + 1 = (10 + 1)(10^{b-1} - 10^{b-2} + \dots \pm 1) - \text{делится на } 11.$$

3. Можно.

На рисунке 3 точки  $A, B, C, D, E, F$  делят окружность на 6 равных дуг. Поскольку  $BA = BO = r$ , можно построить дугу  $AXO$  с центром в точке  $B$  и концами в точках  $A, O$ . Остальные дуги

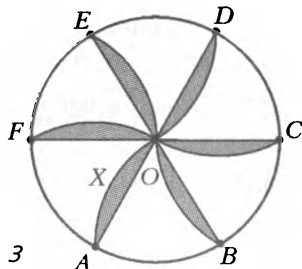
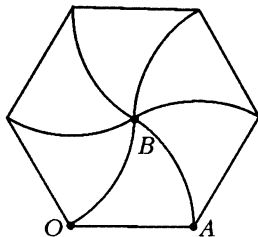


Рис. 3



с концами в точке  $O$  строятся аналогично. Эти дуги равны дугам, на которые окружность делится точками  $A, B, C, D, E, F$ . Удалим теперь затемненные части и повернем криволинейный треугольник  $AOB$  на  $120^\circ$  вокруг центра треугольника  $AOB$  так, чтобы его вершина  $B$  перешла в центр круга. Аналогично повернем остальные криволинейные треугольники. В результате получим правильный шестиугольник на рисунке 3 справа.

4.  $(1;0), (-1;1), (1;-1), (-3;4)$ .

Поскольку левая часть уравнения – целое число, то и правая – целое число, т.е.  $x + y \geq 0$ . Если  $x + y > 0$ , то правая часть уравнения – четное число, значит, и левая часть четное число, т.е.  $y$  делится на 2. Пусть  $y = 2y_1$ , где  $y_1$  – целое число. Подставляя, получаем

$$2x^2 - 4y_1^2 = 2^{x+2y_1} \Rightarrow x^2 - 2y_1^2 = 2^{x+2y_1-1}.$$

Если справа показатель степени опять больше нуля, то правая (а значит, и левая) часть – снова четное число, откуда  $x = 2x_1$ . После подстановки и сокращения получаем  $2x_1^2 - y_1^2 = 2^{2x_1+2y_1-2}$ . Повторяя это рассуждение, будем делить уравнение на 2 до тех пор, пока в правой части показатель степени не станет равным 0. Рассмотрим два случая.

1) Показатель стал равным 0 через четное количество сокращений. Пусть всего было сделано  $2k$  сокращений. Тогда  $x = 2^k r$ ,  $y = 2^k s$ , и получаем уравнение  $2r^2 - s^2 = 2^{2k r + 2^k s - 2k}$ . Поскольку в показателе стоит 0, уравнение распадается в систему

$$\begin{cases} 2r^2 - s^2 = 1, \\ 2^k(r + s) - 2k = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение. Из него следует, что  $\frac{k}{2^{k-1}} = r + s$  – целое число. Это возможно лишь при  $k = 0$ ,  $k = 1$  и  $k = 2$ . (Если  $k > 2$ , то  $0 < \frac{k}{2^{k-1}} < 1$ . Это можно доказать по индукции: при  $k = 3$  это верно, и если  $\frac{k}{2^{k-1}} < 1$ , то  $0 < \frac{k+1}{2^k} = \frac{k}{2^{k-1}} \cdot \frac{k+1}{2k} < \frac{k}{2^{k-1}} < 1$ .)

При  $k = 0$  (т.е. если в исходном уравнении  $x + y = 0$ ) имеем

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем два решения исходного уравнения:  $(-1;1)$  и  $(1;-1)$ .

При  $k = 1$  имеем

$$\begin{cases} 2r^2 - s^2 = 1, \\ r + s = 1. \end{cases}$$

У этой системы нет решений.

При  $k = 2$  получаем такую же систему, у которой тоже нет решений.

2) Показатель стал равным 0 через нечетное количество сокращений. Пусть всего было сделано  $2k - 1$  сокращений. Тогда  $x = 2^{k-1}r$ ,  $y = 2^k s$ , и получаем уравнение  $r^2 - 2s^2 = 2^{2^{k-1}r + 2^k s - 2k + 1}$ . Поскольку в показателе стоит 0, уравнение распадается в систему

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1, \\ 2^{k-1}r + 2^k s - 2k + 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $\frac{2k-1}{2^{k-1}} = r + 2s$  — целое число.

Это возможно только при  $k = 1$ , так как при  $k > 1$  в числителе дроби — нечетное число, а в знаменателе — четное. При  $k = 1$  получаем

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1, \\ r + 2s = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему и учитывая, что  $x = r$ ,  $y = 2s$ , получаем два решения исходного уравнения:  $(1, 0)$  и  $(-3, 4)$ .

5. Шесть различных треугольников со следующими наборами сторон:  $(8, 8, 8)$ ,  $(9, 8, 7)$ ,  $(9, 9, 6)$ ,  $(10, 9, 5)$ ,  $(10, 10, 4)$ ,  $(11, 11, 2)$ .

Три числа  $a \geq b \geq c > 0$  являются сторонами остроугольного треугольника тогда и только тогда, когда  $a^2 < b^2 + c^2$ . Докажем это.

Если  $a \geq b \geq c$  — стороны остроугольного треугольника, то, опуская высоту на сторону  $b$  (рис. 4, а), имеем  $h < c$ ,  $x < b$ , откуда

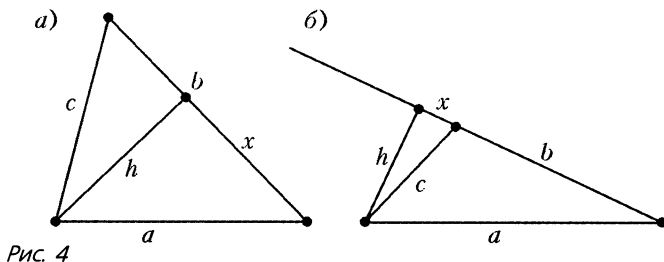


Рис. 4

$a^2 = h^2 + x^2 < c^2 + b^2$ . Обратно, пусть  $a \geq b \geq c > 0$  и  $a^2 < b^2 + c^2$ . Тогда  $a^2 < (b+c)^2 \Rightarrow a < b+c$ , т.е.  $a, b, c$  – стороны треугольника. Если угол против стороны  $a$  тупой или прямой, то, опуская высоту на продолжение стороны  $b$  (рис.4,б), получаем

$$a^2 = h^2 + (b+x)^2 = h^2 + x^2 + b^2 + 2bx = c^2 + b^2 + 2bx \geq b^2 + c^2$$

– противоречие. Значит, угол против стороны  $a$  острый.

Вернемся к условию задачи. Пусть  $a \geq b \geq c$  – целочисленные стороны остроугольного треугольника с периметром 24. Тогда  $3a \geq a+b+c = 24 \Rightarrow a \geq 8$ . Из неравенства треугольника  $a < b+c \Rightarrow 2a < a+b+c = 24 \Rightarrow a < 12$ . Значит,  $a$  может равняться одному из чисел 8, 9, 10, 11. Далее, при фиксированном  $a$  из неравенства  $b \geq c$  получаем  $2b \geq b+c = 24-a \Rightarrow b \geq \frac{24-a}{2}$ .

Для каждого  $a = 8, 9, 10, 11$  выпишем все пары  $(b, c)$  с условием  $a \geq b \geq \frac{24-a}{2}$  и отберем из них те, для которых треугольник остроугольный.

Если  $a = 8$ , то  $b = c = 8$ , и соответствующий треугольник равносторонний.

Если  $a = 9$ , то  $9 \geq b \geq 8$ , т.е. имеем две пары  $(b, c)$ :  $(9, 6)$  и  $(8, 7)$ . Проверяя, получаем, что в обоих случаях выполнено неравенство  $b^2 + c^2 > a^2$ .

Если  $a = 10$ , то  $10 \geq b \geq 7$ , т.е. имеем четыре пары  $(b, c)$ :  $(10, 4)$ ,  $(9, 5)$ ,  $(8, 6)$ ,  $(7, 7)$ . Проверяя, получаем, что только в первых двух выполнено неравенство  $b^2 + c^2 > a^2$ .

Если  $a = 11$ , то  $11 \geq b \geq 7$ , т.е. имеем пять пар  $(b, c)$ :  $(11, 2)$ ,  $(10, 3)$ ,  $(9, 4)$ ,  $(8, 5)$ ,  $(7, 6)$ . Проверяя, получаем, что только в первой выполнено неравенство  $b^2 + c^2 > a^2$ .

## 6. Можно.

Это можно сделать разными способами. Покажем, с помощью какого рассуждения можно найти искомое расположение. Будем называть костяшку домино горизонтальной, если ее наибольшая сторона параллельна границе полуплоскости, и вертикальной в ином случае. Условие задачи эквивалентно следующему: каждая прямая, перпендикулярная границе полуплоскости, пересекает нечетное количество горизонтальных костяшек, а каждая прямая, параллельная границе полуплоскости, пересекает нечетное число вертикальных костяшек.



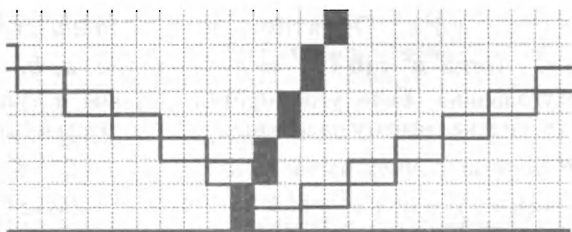


Рис. 5

Теперь несложно построить требуемое расположение. Расположим вначале вертикальные костяшки так, чтобы каждая горизонтальная прямая пересекала ровно одну из них (на рисунке 5 эти костяшки затемнены). Затем добавим горизонтальные костяшки так, чтобы каждая вертикальная прямая пересекала ровно одну из них. Требуемое расположение построено.

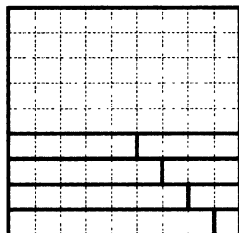


Рис. 6

9 класс

1. См. рис. 6.

2. Можно.

См. решение задачи 3 для 8 класса.

$$3. (x^8 - x^4 + 1)(x^4 + 1), (x^6 + \sqrt{2}x^3 + 1)(x^6 - \sqrt{2}x^3 + 1).$$

Пусть

$$(x^p + ax^q + 1)(x^r + bx^s + 1) = x^{12} + 1. \quad (1)$$

Ясно, что при раскрытии скобок в левой части  $x^{p+r}$  — моном наибольшей степени, поэтому  $p + r = 12$ . Рассмотрим три случая.

1)  $a = b = 0$ . После раскрытия скобок и сокращения получаем  $x^p + x^r = 0$ , что неверно. Значит, равенство (1) в этом случае не выполняется.

2) Одно из чисел  $a, b$  равно 0. Пусть  $b = 0$ . Тогда, раскрывая скобки в (1), получаем

$$ax^{q+r} + x^r + x^p + ax^q = 0. \quad (2)$$

Поскольку  $q + r > r$  и  $q + r > q$ , равенство (2) возможно только если  $q + r = p$ ,  $r = q \Rightarrow p = 8, r = q = 4$  и  $a = -1$ .

Получаем первый ответ:

$$(x^8 - x^4 + 1)(x^4 + 1) = x^{12} + 1.$$

3)  $a \neq 0, b \neq 0$ . Раскроем скобки в (1):

$$bx^{p+s} + ax^{q+r} + x^p + abx^{q+s} + x^r + ax^q + bx^s = 0. \quad (3)$$

В левой части семь ненулевых мономов. Если степени хотя бы четырех из них попарно различны, то равенство не может быть выполнено, так как один из мономов останется несокращенным. Значит, в левой части не более трех мономов разной степени. В силу двойных неравенств  $p + s > p > q$ ,  $q + r > r > s$  и  $q + r > q + s > q$  из сказанного следует, что  $p + s = q + r$ ,  $p = r = q + s$ ,  $q = s$ . С учетом  $p + r = 12$  отсюда получаем  $p = r = 2q = 2s = 6$ . Подставляя в (3), получаем

$$(b + a)x^9 + (2 + ab)x^6 + (b + a)x^3 = 0,$$

откуда  $a = -b = \pm\sqrt{2}$ .

Получаем второй ответ:

$$(x^6 + \sqrt{2}x^3 + 1)(x^6 - \sqrt{2}x^3 + 1) = x^{12} + 1.$$

#### 4. 7.

Пусть  $L_1$  и  $L_2$  – положения лососей в некоторый момент времени,  $M$  – положение медведя. Введем вспомогательные точки  $A$  и  $B$  – середины дуг, на которые берег озера разбивается лососями. Точки  $A$  и  $B$  диаметрально противоположны и разбивают окружность на две полуокружности. Назовем одну из них красной, другую – синей. Покажем, что если медведь в начальный момент находился в красной полуокружности, то он будет находиться в ней все время.

Точки  $A$  и  $B$  движутся против часовой стрелки со скоростью  $(750 - 500)/2 = 125$  м/мин. Их скорость меньше, чем скорость медведя. Таким образом, если медведь бежит от точки  $A$ , точка  $A$  не сможет догнать его. Чтобы попасть в синюю полуокружность, медведь должен бежать по направлению к точке  $A$  (или к точке  $B$ ) и добежать до этой точки.

На рисунке 7 медведь бежит от точки  $A$  по направлению к  $L_1$ , т.е. к  $B$ . Если  $L_1$  плывет навстречу медведю, то медведь, встретившись с  $L_1$ , изменит направление, не добежав до точки  $B$ . Если же  $L_1$  плывет от медведя, то  $L_1$  окажется в точке  $B$  раньше, чем медведь, так как скорость  $L_1$  больше, чем скорость медведя. В этот момент от  $B$  навстречу медведю поплывет  $L_2$ , и когда медведь встретится с  $L_2$ , он изменит направление. Таким образом, медведь в любом случае изменит направление, не добежав до  $B$ . Дальше с помощью тех же рассуждений получаем, что он изменит направление, не добежав до  $A$ .

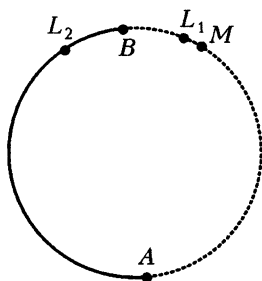


Рис. 7

Таким образом, медведь никогда не добегит до границы красной полуокружности, а значит, будет все время находиться внутри нее. За час каждая из точек  $A$  и  $B$  пробежит  $125 \cdot 60$  метров, т.е. сделает  $125 \cdot 60 / 1000 = 7,5$  оборотов вокруг озера. Следовательно, медведь сделает строго больше 7, но строго меньше 8 оборотов, т.е. сделает 7 полных оборотов.

5. 6.

*Первое решение.* Продолжим  $A_1B_1$  до пересечения с прямой  $AB$  в точке  $X$  (рис.8). Тогда  $XP^2 = XA_1 \cdot XB_1 = XA \cdot XB$

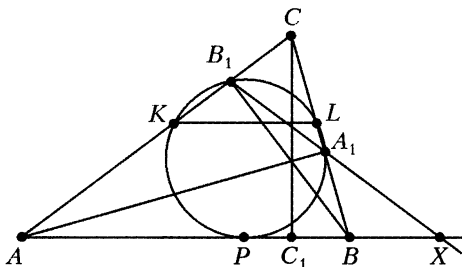


Рис. 8

(четырёхугольник  $AB_1A_1B$  вписанный). Пусть  $XB = t$ . Получаем уравнение  $(t + 10)^2 = t(t + 40)$ , откуда  $t = 5$ .

Из того же условия вписанности четырёхугольника  $AB_1A_1B$  находим

$$\frac{\cos \angle A}{\cos \angle B} = \frac{AB_1}{BA_1} = \frac{B_1X}{BX} \quad (\triangle AB_1X \sim \triangle A_1BX),$$

$$\frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AX}{B_1X} \quad (\triangle AA_1X \sim \triangle B_1BX).$$

Перемножая, получаем

$$\frac{\operatorname{tg} \angle B}{\operatorname{tg} \angle A} = \frac{AX}{BX} = 9 = \frac{AC_1}{C_1B} \Rightarrow C_1B = 4.$$

*Второе решение* (предложено участником олимпиады).

Так же, как в первом способе, продолжим прямую  $A_1B_1$  до точки  $X$  и найдем  $XB = 5$ ,  $XP = 15$ ,  $XA = 45$ . Далее, пусть  $M$  – середина  $AB$ . Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $M$  лежат на одной окружности (окружность 9 точек). Отсюда

$$XM \cdot XC_1 = XA_1 \cdot XB_1 = XA \cdot XB \Rightarrow XC_1 = \frac{5 \cdot 45}{25} = 9 \Rightarrow PC_1 = 6.$$

*Третье решение* (предложено участником олимпиады).

Пусть  $K, L$  – вторые точки пересечения окружности со сторонами  $AC, BC$ . Тогда

$$\angle CAB = \angle CA_1B_1 = \angle CKL \Rightarrow KL \parallel AB \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AK}{BL}.$$

Отсюда и из вписанности четырехугольников  $CB_1C_1B, CA_1C_1A$  получаем

$$\frac{30 + PC_1}{10 - PC_1} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_1 \cdot AB}{BC_1 \cdot AB} = \frac{AB_1 \cdot AC}{BA_1 \cdot BC} = \frac{AB_1 \cdot AK}{BA_1 \cdot BL} = \frac{AB^2}{BP^2} =$$

$$= 9 \Rightarrow PC_1 = 6.$$

**6.** Максимальная степень числа 2, на которую делится  $M$ , не совпадает с таковой для  $N$ .

Назовем плитку проигрышной, если максимальная степень числа 2, на которую делится ее длина, совпадает с максимальной степенью числа 2, на которую делится ее ширина. Заметим, что проигрышную плитку нельзя разломить на две проигрышных: действительно, если плитка состоит из двух проигрышных частей, то их общая сторона имеет длину  $2^s(2k+1)$ , а оставшиеся стороны равны  $2^s(2m+1)$  и  $2^s(2n+1)$ , поэтому вся плитка имеет размеры  $2^s(2k+1)$  и  $2^{s+1}(m+n+1)$  и не является проигрышной. Если игрок получил проигрышную плитку (в начале игры) или две проигрышные плитки (от соперника), то, какую бы из них он ни съел, при разламывании оставшейся проигрышной хотя бы один из кусков, которые он отдаст сопернику, выйдет непроигрышным (см. замечание выше). Если же игрок получил хотя бы одну непроигрышную плитку (в начале игры или от соперника), т.е. плитку размера  $2^s(2k+1)$  на  $2^t(2m+1)$  при  $s > t$ , то всегда сможет разломить ее на две проигрышных, отделив от нее кусок размера  $2^t$  на  $2^t(2m+1)$ . Назовем это правило деления плитки выигрышным. Таким образом, если исходная плитка не проигрышная, то первый игрок каждый ход сможет поступать согласно выигрышному правилу, так что второй игрок всегда будет получать от него только проигрышные плитки, и поэтому будет вынужден отдавать первому игроку хотя бы одну выигрышную. Менее чем через  $M + N$  ходов размер максимальной из отдаваемых плиток упадет до 1 на 1, и пара плиток такого размера достанется второму игроку, потому что обе они проигрышные. В этот момент второй игрок проиграет. Аналогично, если исходная плитка была проигрышной, то первый игрок каждый ход будет отдавать второму хотя бы одну непроигрышную плитку, а второй каждый ход сможет приме-

нять выигрышное правило, в результате чего менее чем через  $M + N$  ходов пару плиток размера 1 на 1 получит первый игрок и проиграет.

10 класс

1.  $(2; 0)$ ,  $(2; -1)$ ,  $(6; -4)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(12; -8)$ .

Рассуждая аналогично решению задачи 4 для 8 класса, приходим к рассмотрению двух систем уравнений.

1)  $x = 2^k r$ ,  $y = 2^k s$ ,

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1, \\ 2^k(r + s) = 2k. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $k = 0$ ,  $k = 1$  или  $k = 2$ .

При  $k = 0$  система не имеет решений.

При  $k = 1$  и при  $k = 2$  получаем одну и ту же систему относительно  $r$ ,  $s$ :

$$\begin{cases} r^2 - 2s^2 = 1, \\ r + s = 1. \end{cases}$$

У этой системы два решения:  $(r; s) = (1; 0)$ ,  $(3; -2)$ . Это дает четыре решения исходного уравнения:  $(x; y) = (2; 0)$ ,  $(6; -4)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(12; -8)$ .

2)  $x = 2^k r$ ,  $y = 2^{k-1} s$ ,

$$\begin{cases} 2r^2 - s^2 = 1, \\ 2^{k-1}(2r + s) = 2k - 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $k = 1$ . Тогда у системы единственное решение:  $(r; s) = (1; -1) \Rightarrow (x; y) = (2; -1)$ .

2. 65.

См. решение задачи 4 для 9 класса.

3. 4.

Так как биссектриса и медиана, опущенные на основание, совпадают, речь идет о биссектрисе и медиане, опущенных на боковую сторону.

Докажем вначале, что в любом остроугольном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой. Пусть в треугольнике  $ABC$   $AC > CB$ ,  $CL$  – биссектриса,  $CM$  – медиана,  $CH$  – высота,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Тогда

$$\beta > \alpha \Rightarrow 180^\circ - \gamma = \alpha + \beta < 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180^\circ - 2\beta < \gamma \Rightarrow \angle BCH = 90^\circ - \beta < \frac{\gamma}{2} = \angle BCL.$$

Значит,  $H$  лежит между  $B$  и  $L$ . В то же время  $AL/LB = AC/CB > 1$ ,  $AM/MB = 1 \Rightarrow AL > AM$ , т.е.  $M$  лежит между  $L$  и  $A$ . В итоге получаем, что  $L$  лежит между  $H$  и  $M$ . Случай  $AC < CB$  сводится к разобранному сменой обозначений.

Отсюда следует, что треугольник  $CLM$  всегда тупоугольный с тупым углом при вершине  $L$ . А значит, если он равнобедренный, то  $CL = LM$ .

Пусть теперь  $ABC$  – равнобедренный треугольник из условия задачи, так что  $AC = AB$ . Если  $AC < CB$ , то  $CL > CA - AL > > CA - AM = \frac{1}{2} AB > ML$  (во втором неравенстве использовано, что точка  $L$  лежит между  $A$  и  $M$ ). Следовательно, треугольник  $CML$  в этом случае не может быть равнобедренным.

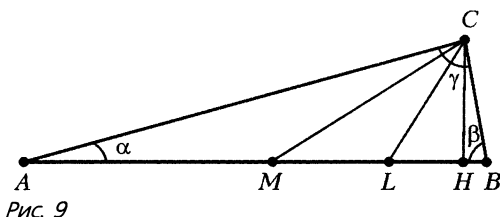


Рис. 9

Если  $AC > CB$  (рис.9), обозначим  $AC = AB = a$ ,  $BL = x$ . Из свойства биссектрисы

$$AL/LB = AC/CB \Rightarrow (a - x)/x = a/1 \Rightarrow x = \frac{a}{a + 1} \Rightarrow ML = \frac{1}{2} - x = \frac{a^2 - a}{2(a + 1)}.$$

Из равнобедренности  $\triangle ABC$  находим  $\cos \beta = \frac{\frac{1}{2}BC}{AB} = \frac{1}{2a}$ , откуда

$$CL^2 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \frac{1}{2a} = 1 + x^2 - \frac{x}{a}.$$

Подставляя сюда  $x = \frac{a}{a + 1}$  и учитывая, что по условию  $CL = ML$ , получаем уравнение

$$1 + \frac{a^2}{(a + 1)^2} - \frac{1}{a + 1} = \frac{(a^2 - a)^2}{4(a + 1)^2},$$

которое после упрощения сводится к уравнению  $a^3 - 2a^2 - 7a - 4 = 0$ . Так как  $a^3 - 2a^2 - 7a - 4 = (a - 4)(a + 1)^2$ , единственным положительным решением будет  $a = 4$ .

4. 16.

Пусть  $a \geq b \geq c$  – целочисленные стороны треугольника с периметром 33. Тогда  $3a \geq a + b + c = 33 \Rightarrow a \geq 11$ . В то же время

из неравенства треугольника

$$a < b + c \Rightarrow 2a < a + b + c = 33 \Rightarrow a \leq 16.$$

При фиксированном  $a$  для  $b$  получаем

$$2b \geq b + c = 33 - a \Rightarrow a \geq b \geq \frac{33 - a}{2}.$$

Треугольник со сторонами  $a \geq b \geq c$  тупоугольный тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $a^2 > b^2 + c^2$ . (Это следует из теоремы косинусов  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .) Заметим, что если это условие выполнено для пары  $(b, c)$ , причем  $b - c \geq 2$ , то оно выполнено и для пары  $(b - 1, c + 1)$ , так как  $(b - 1)^2 + (c + 1)^2 < b^2 + c^2$ .

Теперь для каждого  $a = 11, \dots, 16$  выпишем все пары  $(b, c)$  такие, что  $a \geq b \geq \frac{33 - a}{2}$ , а затем отберем те, которые соответствуют тупоугольному треугольнику.

При  $a = 16$  пары  $(b, c) = (16, 1), (15, 2), \dots, (9, 8)$ . Условие  $a^2 > b^2 + c^2$  выполняется для пары  $(15, 2)$ , а значит, и для всех последующих, т.е. получаем 7 пар.

При  $a = 15$ :  $(b, c) = (15, 3), (14, 4), \dots, (9, 9)$ . Условие  $a^2 > b^2 + c^2$  выполняется для пары  $(14, 4)$ , а значит, и для всех последующих, т.е. получаем 6 пар.

При  $a = 14$ :  $(b, c) = (14, 5), (13, 6), (12, 7), (11, 8), (10, 9)$ . Условие  $a^2 > b^2 + c^2$  выполняется для пары  $(12, 7)$  и всех последующих и не выполняется для первых двух. Получаем 3 пары.

При  $a = 13$ :  $(b, c) = (13, 7), (12, 8), (11, 9), (10, 10)$ .

При  $a = 12$ :  $(b, c) = (12, 9), (11, 10)$ .

При  $a = 11$ :  $(b, c) = (11, 11)$ .

Ни одна из пар  $(b, c)$ , соответствующих  $a = 13, 12, 11$ , не удовлетворяет условию  $a^2 > b^2 + c^2$ . В итоге получаем  $7 + 6 + 3 = 16$  искомых троек чисел  $(a, b, c)$ .

5. 6.

См. решение задачи 6 для 9 класса.

6. Максимальная степень числа 2, на которую делится  $M$ , не совпадает с таковой для  $N$ .

См. решение задачи 4 для 9 класса.

11 класс

1.  $(1; 0)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(-2; 3)$ ,  $(-6; 9)$ .

Рассуждая аналогично решению задачи 4 для 8 класса, приходим к рассмотрению двух систем уравнений.

$$1) \quad x = 3^k r, \quad y = 3^k s,$$

$$\begin{cases} 3r^2 - s^2 = 1, \\ 3^k(r + s) = 2k. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $\frac{2k}{3^k} = r + s$  — целое число, откуда  $k = 0$ . Тогда  $r = -s$ , и из первого уравнения получаем  $2r^2 = 1$ . Это уравнение не имеет целочисленных решений.

$$2) \quad x = 3^{k-1} r, \quad y = 3^k s,$$

$$\begin{cases} r^2 - 3s^2 = 1, \\ 3^{k-1}(r + 3s) = 2k - 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что  $\frac{2k-1}{3^{k-1}}$  — целое число, откуда  $k = 1$  или  $k = 2$ . В обоих случаях получаем одну и ту же систему относительно  $r, s$ :

$$\begin{cases} r^2 - 3s^2 = 1, \\ r + 3s = 1. \end{cases}$$

У этой системы два решения:  $(r; s) = (1; 0)$ ,  $(-2; 1)$ , что дает четыре решения исходного уравнения:  $(x; y) = (1; 0)$ ,  $(-2; 3)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(-6; 9)$ .

$$2. \quad (x^{10} - x^5 + 1)(x^5 + 1), \quad (x^9 - x^6 + 1)(x^6 + x^3 + 1), \\ (x^9 - x^3 + 1)(x^6 + x^3 + 1).$$

Пусть

$$(x^p + ax^q + 1)(x^r + bx^s + 1) = x^{15} + cx^t + 1. \quad (1)$$

Ясно, что при раскрытии скобок в левой части  $x^{p+r}$  — моном наибольшей степени, поэтому  $p + r = 15 \Rightarrow p \neq r$ . Рассмотрим три случая.

1)  $a = b = 0$ . Раскрывая скобки в левой части, получаем  $x^{15} + x^p + x^r + 1$ . Так как  $p \neq r$ , это выражение не является триномом.

2) Одно из чисел  $a, b$  равно 0. Пусть  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ . Тогда, раскрывая скобки в (1), получаем

$$ax^{q+r} + x^r + x^p + ax^q = cx^t. \quad (2)$$

Если  $r \neq q$ , то в левой части присутствуют три слагаемых с попарно разными степенями:  $x^{q+r}$ ,  $x^r$ ,  $x^q$ , только одно из



которых может сократиться с  $x^p$ . Значит, в этом случае равенство (2) невозможно. Поэтому  $r = q$ . Аналогично рассматривая слагаемые  $ax^{q+r}$ ,  $x^r$ ,  $x^q$ , получаем  $p = q + r$ . Тогда  $p = 2r$ ,  $p + r = 3r = 15 \Rightarrow r = 5 = q$ ,  $p = 10$ . Левая часть принимает вид

$$x^{15} + (a+1)x^{10} + (a+1)x^5 + 1.$$

Это выражение может быть триномом только если  $a = -1$ .

Получаем первый ответ:

$$(x^{10} - x^5 + 1)(x^5 + 1) = x^{15} + 1.$$

3)  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Раскроем скобки в (1):

$$bx^{p+s} + ax^{q+r} + x^p + abx^{q+s} + x^r + ax^q + bx^s = cx^t.$$

В левой части наибольшую степень имеет одно из первых двух слагаемых (либо они оба, если их степени равны), а наименьшую степень — одно из последних двух слагаемых (либо оба). Значит, либо первые два слагаемых сокращают друг друга, либо последние два слагаемых сокращают друг друга. Разберем оба случая.

• Если  $bx^{p+s} + ax^{q+r} = 0$ , то  $b = -a$ ,  $p + s = q + r$ . Поскольку  $p \neq r$ , то и  $q \neq s$ . Без ограничения общности можно считать, что  $q > s$ ,  $p > r$ . Тогда слагаемое  $bx^s$  в левой части не сокращается ни с одним из оставшихся, и, следовательно, все остальные слагаемые должны сокращать друг друга, т.е.

$$bx^{p+s} + ax^{q+r} = 0, \quad x^p + abx^{q+s} = 0, \quad x^r + ax^q = 0.$$

Отсюда  $b = -a = 1$ , а для показателей степени получаем систему  $p + s = q + r$ ,  $p = q + s$ ,  $r = q$ ,  $p + r = 15$ , решая которую, находим  $p = 9$ ,  $q = r = 6$ ,  $s = 3$ .

В итоге получаем второй ответ:

$$(x^9 - x^6 + 1)(x^6 + x^3 + 1) = x^{15} + x^3 + 1.$$

• Наконец, если  $ax^q + bx^s = 0$ , то  $b = -a$ ,  $q = s$ . Без ограничения общности можно считать, что  $p > r$ . Тогда слагаемое  $bx^{p+s}$  не сокращается ни с одним из оставшихся, следовательно, остальные слагаемые должны сокращать друг друга, т.е.

$$ax^{q+r} + x^p = 0, \quad abx^{q+s} + x^r = 0, \quad ax^q + bx^s = 0.$$

Отсюда  $b = -a = 1$ , а для показателей степени получаем систему  $q + r = p$ ,  $q + s = r$ ,  $q = s$ ,  $p + r = 15$ , откуда  $p = 9$ ,  $r = 6$ ,  $q = s = 3$ .

Получаем третий ответ:

$$(x^9 - x^3 + 1)(x^6 + x^3 + 1) = x^{15} + x^{12} + 1.$$

3. 50 см.

*Первое решение.* На развертке, оборачивающей цилиндр некоторое число раз (рис.10), путь улитки изобразится ломаной, соседние звенья которой равны и перпендикулярны друг другу.

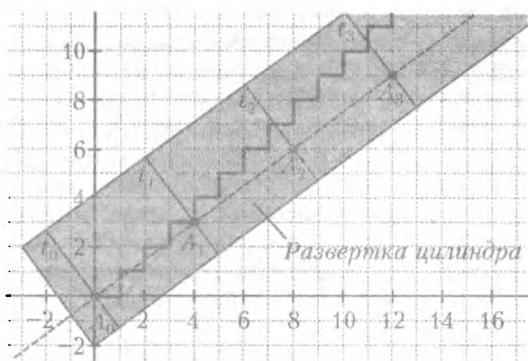


Рис. 10

Пусть  $A_0$  – положение улитки на развертке в начальный момент времени,  $A_1$  – точка, в которой она оказалась через 1 час 45 минут. На луче  $A_0A_1$  построим на равных расстояниях точки  $A_2, A_3, \dots$ . Все эти точки являются изображениями одной и той же точки  $A$  на цилиндре. Образующая цилиндра, проходящая через  $A$ , изобразится в виде прямых  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , перпендикулярных  $A_0A_1$ .

Введем систему координат так, чтобы в начальный момент улитка находилась в точке с координатой  $(0, 0)$ , через 15 мин – в точке с координатой  $(1, 0)$ , а через 30 мин – в точке с координатой  $(1, 1)$ . Тогда легко видеть, что точка  $A_1$  имеет координату  $(4, 3)$ . Поскольку  $\overline{A_0A_k} = k \cdot \overline{A_0A_1}$ , координаты точки  $A_k$  равны  $(4k, 3k)$ .

Через 12,5 часов путь улитки на развертке будет состоять из 50 отрезков, и конечное положение улитки изобразится точкой  $M$  с координатами  $(25, 25)$ . Докажем, что эта точка лежит на прямой  $t_7$ . Действительно, координаты точки  $A_7$  равны  $(28, 21)$ , поэтому координаты вектора  $\overline{A_7M}$  равны  $(-3, 4)$ . Координаты вектора  $\overline{A_0A_1}$  равны  $(4, 3)$ , и из скалярного произведения  $\overline{A_0A_1} \cdot \overline{A_7M} = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$  заключаем, что эти векторы перпендикулярны. Следовательно, точка  $M$  лежит на прямой, перпендикулярной  $A_0A_1$  и проходящей через  $A_7$ , т.е. на прямой  $t_7$ .

Итак, через 12,5 часов улитка окажется на одной образующей с точкой  $A$ , и чтобы вернуться в  $A$  по кратчайшему пути, ей нужно будет проползти вдоль образующей расстояние, равное длине отрезка  $A_7M$ . Учитывая, что в нашем масштабе единичный отрезок равен 10 см, получаем  $|A_7M| = 10 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 50$  см.

*Второе решение* (предложено участником олимпиады). Пусть за первые 15 минут улитка сместилась на  $x$  см по вертикали и на  $y$  см по горизонтали,  $x, y > 0$ . Назовем это перемещением первого типа (рис.11). Повернув вправо, за вторые 15 минут она проползет  $x$  см по горизонтали и  $-y$  см по вертикали. Назовем это

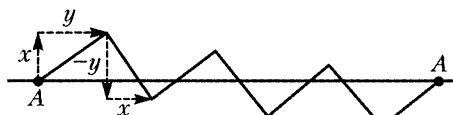


Рис. 11

перемещением второго типа. Тогда за 1 ч 45 мин улитка совершит 4 перемещения первого типа и 3 второго типа, следовательно, смещение по вертикали за это время равно  $4x - 3y$ . Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ x^2 + y^2 = 100. \end{cases}$$

Отсюда  $x = 6$ ,  $y = 8$ . Тогда смещение по горизонтали за 1 час 45 минут равно  $4y + 3x = 50$  см. Сместившись на 50 см по горизонтали, улитка вернулась в точку  $A$ , т.е. сделала целое число оборотов вокруг цилиндра.

Через 12,5 часов улитка совершит 25 перемещений каждого типа и сместится по горизонтали на  $25x + 25y = 350$  см. Таким образом, она сделает опять целое число оборотов вокруг цилиндра и окажется на одной образующей с точкой  $A$ . Смещение по вертикали при этом равно  $25x - 25y = -50$  см. Чтобы вернуться в точку  $A$ , улитке нужно проползти 50 см вдоль образующей.

4. 169150, 85850.

*Первое решение.* Пусть  $a < b < c < d$  – целые числа. Из неравенств  $(d-a)(c-b) > 0$  и  $(b-a)(d-c) > 0$  получаем  $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ . Если в расстановке чисел в условии присутствуют слагаемые  $a \cdot b + c \cdot d$  или  $a \cdot c + b \cdot d$ , где  $a < b < c < d$ , то значение получившегося выражения можно уменьшить, заменив эти слагаемые на  $a \cdot d + b \cdot c$ .

Рассмотрим расстановку с минимальным значением. В такой расстановке должно присутствовать слагаемое  $1 \cdot 100$ . Действительно, если такого слагаемого нет, то расстановка содержит слагаемые  $1 \cdot b + 100 \cdot c$ , где  $1 < b, c < 100$ . Заменяв эти слагаемые на  $1 \cdot 100 + b \cdot c$ , мы уменьшаем значение выражения, что противоречит его минимальности.

Далее, в такой расстановке должно быть слагаемое  $2 \cdot 99$ . Если его нет, то присутствуют слагаемые  $2 \cdot b + 99 \cdot c$ , где  $2 < b, c < 99$ . Опять заменив их на  $2 \cdot 99 + b \cdot c$ , мы уменьшаем выражение, что противоречит минимальности.

Продолжая рассуждать аналогично, получаем, что минимальное значение имеет расстановка  $1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + \dots + 50 \cdot 51$ . Вычислим ее значение (в процессе вычисления используется формула суммы арифметической прогрессии и сумма квадратов первых  $n$  натуральных чисел):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} n \cdot (101 - n) &= 101 \left( \sum_{n=1}^{50} n \right) - \sum_{n=1}^{50} n^2 = \\ &= 101 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - \frac{50 \cdot 51 \cdot (2 \cdot 50 + 1)}{6} = 85850. \end{aligned}$$

Для нахождения максимальной расстановки рассуждаем аналогично. Если в расстановке присутствуют слагаемые  $a \cdot c + b \cdot d$  или  $a \cdot d + b \cdot c$ , где  $a < b < c < d$ , то значение выражения можно увеличить, заменив эти слагаемые на  $a \cdot b + c \cdot d$ . Следовательно, в максимальной расстановке должен присутствовать множитель  $1 \cdot 2$  (иначе заменяем  $1 \cdot c + 2 \cdot d$  на  $1 \cdot 2 + c \cdot d$ , увеличивая значение). Далее, должен присутствовать множитель  $3 \cdot 4$  и т.д. Таким образом, максимальное значение имеет расстановка  $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + \dots + 99 \cdot 100$ . Ее значение равно

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{50} (2n - 1) \cdot 2n &= 4 \left( \sum_{n=1}^{50} n^2 \right) - 2 \left( \sum_{n=1}^{50} n \right) = \\ &= 4 \cdot \frac{50 \cdot 51 \cdot (2 \cdot 50 + 1)}{6} - 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 169150. \end{aligned}$$

*Второе решение* (предложено участником олимпиады). Пусть  $A = 1^2 + 2^2 + \dots + 100^2$ ,  $B = x_1 y_1 + \dots + x_{50} y_{50}$  — расстановка из условия задачи. Рассмотрим разность

$$A - 2B = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{50} - y_{50})^2.$$

Поскольку  $A$  — постоянное число,  $B$  будет максимально при

минимальном  $A - 2B$ . Поскольку в каждой скобке стоит разность двух различных натуральных чисел,  $A - 2B \geq 50$ , и это значение достигается при расстановке  $x_i = 2i - 1$ ,  $y_i = 2i$ . Следовательно,  $A - 2B_{\max} =$

$$= 50 \Rightarrow B_{\max} = \frac{A - 50}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 50 \right) = 169150.$$

Рассмотрим сумму

$$A + 2B = (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_{50} + y_{50})^2.$$

В минимально при минимальном  $A + 2B$ . Из неравенства между средним квадратичным и средним арифметическим следует

$$A + 2B \geq 50 \left( \frac{x_1 + y_1 + \dots + x_{50} + y_{50}}{50} \right)^2 = 50 \cdot 101^2.$$

Равенство достигается, когда все слагаемые  $(x_i + y_i)$  равны, т.е. когда  $x_i = i$ ,  $y_i = 101 - i$ . Следовательно,

$$A + 2B_{\min} =$$

$$= 50 \cdot 101^2 \Rightarrow B_{\min} = \frac{1}{2} \left( 50 \cdot 101^2 - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} \right) = 85850.$$

5. 5.

Рассмотрим на координатной плоскости пять точек  $A(0, 0)$ ,  $B(1, x)$ ,  $C(2, y)$ ,  $D(3, z)$ ,  $E(4, 3)$ . Тогда слагаемые в условии задачи равны длинам отрезков  $AB, BC, CD, DE$ . Из неравенства  $AB + BC + CD + DE \geq AE = 5$  следует, что значение выражения не меньше 5. Равенство достигается, если взять  $x = \frac{3}{4}$ ,  $y = \frac{6}{4}$ ,  $z = \frac{9}{4}$ . (В этом случае точки  $B, C, D$  окажутся на отрезке  $AE$ .)

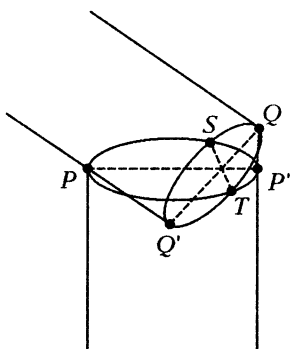


Рис. 12

6. ГМТ – боковая поверхность цилиндра высоты  $2r$ , у которого ось и радиус те же, что и у нижнего стакана, а нижнее основание совпадает с кромкой нижнего стакана.

Пусть  $S, T$  – общие точки кромок двух стаканов,  $P$  – третья точка соприкосновения стаканов,  $Q$  – точка, ГМТ которой нужно найти,  $P'$  и  $Q'$  – точки, диаметрально противоположные точкам  $P$  и  $Q$  на кромках стаканов (рис.12). Проведем плоскость  $\pi$  через середину отрезка  $ST$  перпенди-



# ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2013»

## МАТЕМАТИКА

### Отборочный этап

#### Вариант 1

##### 1. Нет.

Приведем пример, показывающий, что Незнайка неправ. Пусть с 1 по 30 декабря коротышки выпивали 0 бочек, а 31 декабря выпили 310 бочек. Тогда в среднем за декабрь они выпили  $\frac{310}{31} = 10$  бочек сиропа. Пусть с 1 по 15 января коротышки выпивали по 10 бочек, 16 января – 5 бочек, а с 17 по 31 января – 0. Тогда среднее потребление сиропа в январе равно  $\frac{15 \cdot 10 + 5}{31} = 5$ .

##### 2. 1:1.

Пусть  $l$  – длина сосиски, оставшейся после одинакового числа откусываний котенка и щенка. Тогда на следующем шаге котенок откусит  $\frac{l}{4}$ , а щенок –  $\frac{1}{3} \cdot \left(l - \frac{l}{4}\right) = \frac{l}{4}$ , а в сумме они съедят половину сосиски. Значит, и тот, и другой съедят одинаковые части сосиски, и ее середина никогда не будет съедена (это будет единственная точка).

##### 3. 118.

Поскольку

$$\begin{aligned} a_{2013}^2 &= \left( a_{2012} + \frac{1}{a_{2012}} \right)^2 = a_{2012}^2 + 2 + \frac{1}{a_{2012}^2} = \\ &= a_{2011}^2 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2} = \dots = a_1^2 + 2012 \cdot 2 + \frac{1}{a_1^2} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{a_{2011}^2} + \frac{1}{a_{2012}^2}, \end{aligned}$$

то, с одной стороны,

$$a_{2013}^2 > a_1^2 + 2 \cdot 2012 = 14024 > 118^2,$$

с другой стороны,

$$a_{2013}^2 < a_1^2 + 2 \cdot 2012 + \frac{2012}{100^2} < 14024 + 1 < 118,5^2.$$

Поэтому  $118 < a_{2013} < 118,5$ , и ближайшим целым является 118.

#### 4. 100.

Суммарное количество правильных ответов равно 200. Так как ни один человек не ответил правильно более чем на два вопроса, то количество участников викторины не меньше 100. Приведем пример викторины, в которой участвуют ровно 100 человек: пусть они занумерованы числами от 1 до 100 и на первый вопрос ответили участники с номерами от 1 до 90, на второй – с номерами от 91 до 100 и от 1 до 40, на третий – от 41 до 80, а на четвертый – от 81 до 100, тогда описанная в задаче ситуация реализуется.

#### 5. $\arccos(1 - 2\sin^2 \alpha \sin^2 \beta)$ .

Пусть  $AO$  – падающий луч,  $ON_1$  – перпендикуляр к первоначальному положению зеркала, а  $ON_2$  – нормаль ко второму положению зеркала. Рассмотрим трехгранный угол  $OAN_1N_2$ , плоские углы которого равны:  $\angle AON_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,

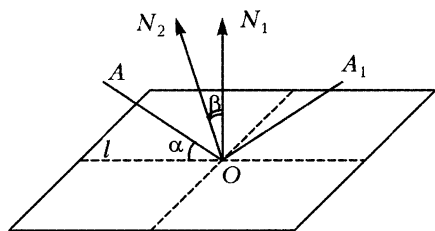


Рис. 14

$\angle N_1ON_2 = \beta$ ,  $\angle AON_2 = \gamma$  (рис.14).

Пусть  $\varphi$  – линейный угол двугранного угла с ребром  $AO$ . По теореме косинусов для трехгранного угла получаем

$$\cos \varphi = \frac{\cos \beta - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \gamma}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \gamma} = \frac{\cos \beta - \sin \alpha \cos \gamma}{\cos \alpha \sin \gamma}. \quad (1)$$

Так как двугранный угол  $N_1$  с ребром  $ON_1$  – прямой (перпендикуляр  $ON_2$  поворачивается в плоскости, перпендикулярной прямой  $l$  – проекции луча на плоскость первоначального положения зеркала), то опять из теоремы косинусов для трехгранного угла  $OAN_1N_2$  получаем

$$0 = \cos \angle N_1 = \frac{\cos \gamma - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta},$$



откуда

$$\cos \gamma = \sin \alpha \cos \beta. \quad (2)$$

Пусть  $OA_1$  – луч, отраженный от первоначального положения зеркала, а  $OA_2$  – луч, отраженный от второго положения зеркала (рис.15). Рассмотрим трехгранный угол  $OAA_1A_2$ . Его

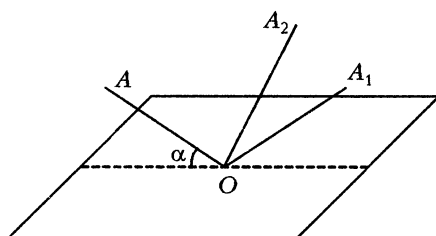


Рис. 15

плоские углы равны:  $\angle AOA_1 = \pi - 2\alpha$ ,  $\angle AOA_2 = 2\gamma$ ,  $\angle A_1OA_2$  – искомый. По теореме косинусов для трехгранного угла  $OAA_1A_2$ :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\cos \angle A_1OA_2 - \cos(\pi - 2\alpha) \cos 2\gamma}{\sin(\pi - 2\alpha) \sin 2\gamma} = \\ &= \frac{\cos \angle A_1OA_2 + \cos 2\alpha \cos 2\gamma}{\sin 2\alpha \sin 2\gamma}. \quad (3) \end{aligned}$$

Из формул (1)–(3) получаем

$$\begin{aligned} \cos \angle A_1OA_2 &= 4 \cos^2 \beta \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - (2 \cos^2 \alpha - 1)(2 \cos^2 \gamma - 1) = \\ &= 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

## 6. $\pi^3 - 2\pi^2$ .

Фигура, точки  $(x, y)$  которой удовлетворяют неравенству  $x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2$  сразу при всех  $t$ , представляет собой круг, заданный условием  $x^2 + y^2 < \pi^2$ .

Преобразуем второе неравенство к виду

$$\begin{aligned} \cos y < 2 \cos^2 x + 4 \cos x \sin t - \cos x + 2 \sin^2 t &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2(\cos x + \sin t)^2 > \cos y + \cos x. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точки  $(x, y)$  удовлетворяют этому неравенству при всех  $t$  тогда и только тогда, когда они удовлетворяют неравенству

$$\cos y + \cos x < 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} < 0.$$

Ввиду периодичности задачи по каждой переменной выпишем решение последнего неравенства на периоде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{x+y}{2} > 0, \\ \cos \frac{x-y}{2} < 0, \\ \cos \frac{x+y}{2} < 0, \\ \cos \frac{x-y}{2} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x - \pi < y < -x + \pi, \\ x + \pi < y < x + 3\pi, \\ -x + \pi < y < -x + 3\pi, \\ x - \pi < y < x + \pi. \end{array} \right.$$

Фигура, заданная этими неравенствами, представляет собой два квадратика, а с учетом периодичности – «паркет» из квадратиков (рис.16).

Пересечение круга с «паркетом квадратиков» состоит из четырех круговых сегментов, суммарная площадь которых равна разности площадей круга  $x^2 + y^2 < \pi^2$  и квадрата

$|x| + |y| \leq \pi$  и равна  $\pi \cdot \pi^2 - (\pi\sqrt{2})^2 = \pi^3 - 2\pi^2$ .

7. 18 и 4.

Пусть основание системы счисления первого числа равно  $n$ , а второго –  $k$ . Тогда равенство, написанное Вовочкой, равносильно уравнению

$$n^2 + 1 = k^4 + k^3 + k + 1 \Leftrightarrow n^2 = k^4 + k^3 + k, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Умножим последнее уравнение на 4 и выделим полные квадраты:

$$(2n)^2 = (2k^2 + k)^2 + 4k - k^2.$$

Так как при  $k > 4$  выполнено неравенство  $4k - k^2 < 0$ , то при  $k > 4$  верно неравенство  $(2n)^2 < (2k^2 + k)^2$ . Сравним  $(2n)^2$  с квадратом предыдущего числа  $(2k^2 + k - 1)^2 = 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1$ :

$$(2n)^2 > 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4k^4 + 4k^3 + 4k > 4k^4 + 4k^3 - 3k^2 - 2k + 1 \Leftrightarrow 3k^2 + 6k - 1 > 0.$$

Решения последнего неравенства принадлежат множеству

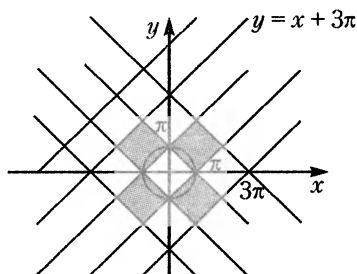


Рис. 16

$\left(-\infty; -\frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$ , поэтому указанное неравенство выполняется для всех натуральных  $k$  (так как  $\frac{-3+2\sqrt{3}}{3} < 1 \Leftrightarrow -3+2\sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow \sqrt{12} < 6$ ). Следовательно, при  $k > 4$  выполнены неравенства  $(2k^2 + k - 1)^2 < (2n)^2 < (2k^2 + k)^2$ , что невозможно.

Остается перебрать значения  $k = 1, 2, 3, 4$ . Проверка показывает, что подходят только  $k = 4, n = 18$ .

#### 8. -4.

Сначала оценим снизу дискриминант описанного в задаче квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ . Так как для всех  $x$  выполнено неравенство  $ax^2 + bx + c \geq 0$ , то  $a \geq 0$  и  $c \geq 0$ . Пусть

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - (ax^2 + bx + c).$$

Так как для всех  $|x| < 1$  по условию  $f(x) \geq 0$ , то

$$0 \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} - (a + 2c).$$

Значит,  $a + 2c \leq 2\sqrt{2}$ , поэтому из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим получаем  $2\sqrt{2} \geq a + 2c \geq 2 \cdot \sqrt{a \cdot 2c} = 2\sqrt{2}\sqrt{ac}$ , откуда  $ac \leq 1$  и  $D = b^2 - 4ac \geq 0 - 4 = -4$ .

Теперь приведем пример квадратного трехчлена, удовлетворяющего условию задачи и имеющего дискриминант  $D = -4$ . Пусть  $a = 2c = \sqrt{2}$ ,  $b = 0$ , тогда имеет место цепочка

$$0 \leq ax^2 + bx + c = \sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

последнее неравенство которой справедливо, поскольку равносильно системе

$$\begin{cases} (2x^2 - 1)^2 (x^2 + 1) \geq 0, \\ |x| < 1. \end{cases}$$

Таким образом, наименьшее значение дискриминанта описанного квадратного трехчлена равно  $-4$ .

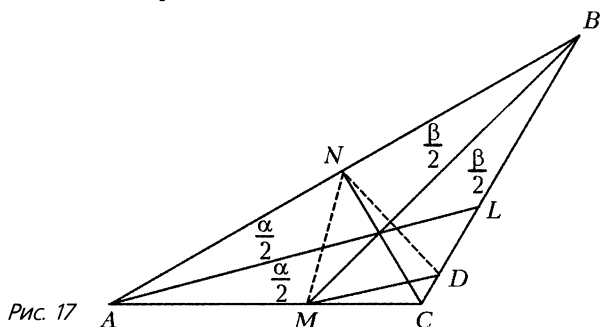
#### 9. 2.

1. Справедливо следующее утверждение:

*Если  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$  — биссектрисы внутренних углов треугольника и при этом  $\angle ANM = \angle ALC$ , то  $\angle BCA = 120^\circ$ .*

*Доказательство.* Проведем  $MD \parallel AL$ , тогда  $\angle CMD = \frac{\alpha}{2}$ . Угол  $ALC$  – внешний угол  $\triangle ALB$ , поэтому  $\angle ANM = \angle ALC = \frac{\alpha}{2} + \beta$ . Из суммы углов  $\triangle BMC$ :  $\angle BMC = \pi - \frac{\beta}{2} - \gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$ . Отсюда  $\angle BMD = \alpha + \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Угол  $NMC$  – внешний угол  $\triangle ANM$ , значит,  $\angle NMC = \frac{3\alpha}{2} + \beta$ . Поэтому  $\angle BMN = \frac{3\alpha}{2} + \beta - \alpha - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Значит,  $\triangle BMN = \triangle BMD$ , т.е.  $NM = MD$  и  $\angle MDN = \frac{\pi - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{\gamma}{2}$ .

Поэтому точки  $N, M, C$  и  $D$  лежат на одной окружности, а так как  $NM$  и  $ND$  – хорды, стягивающие равные дуги, то  $NM = MD$ , и треугольник  $NMD$  – правильный, т.е.  $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{3}$ . Отсюда  $\angle BCA = 120^\circ$  (рис.17).



Заметим, что справедливо и обратное утверждение: если  $\angle BCA = 120^\circ$  и  $AL, BM$  и  $CN$  – биссектрисы, то  $\angle ANM = \angle ALC$ .

2. Прямая  $CB$  является биссектрисой  $\angle NCF$  (рис.18), поэтому точка  $L$  равноудалена от прямых  $CN$  и  $CF$ . Прямая  $AL$  – биссектриса  $\angle BAF$ , поэтому точка  $L$  равноудалена от прямых  $AB$  и  $AF$ . Значит, точка  $L$  равноудалена от прямых  $NC$  и  $NB$ , т.е. прямая  $NL$  – биссектриса угла  $BNC$ .

Аналогично,  $CA$  – биссектриса  $\angle ECN$  ( $\Rightarrow$  точка  $M$  равноудалена от прямых  $CN$  и  $CE$ ), а  $BM$  – биссектриса  $\angle ABC$  ( $\Rightarrow$  точка  $M$  равноудалена от прямых  $BA$  и  $BE$ ). Следовательно, точка  $M$  равноудалена от прямых  $NA$  и  $NC$ , т.е.  $NM$  – биссектриса угла  $ANC$ . Поэтому  $\angle MNL = 90^\circ$ .



4. Если 3 и 4 – длины катетов  $\triangle NLM$ , то либо  $\operatorname{tg}\angle NLM = \frac{3}{4}$ , либо  $\operatorname{tg}\angle NLM = \frac{4}{3}$ . Но так как  $\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ , то этот случай невозможен. Следовательно, возможен лишь случай, когда  $ML = 4$  (гипотенуза), а 3 – длина одного из катетов. Длина другого катета по теореме Пифагора равна  $\sqrt{7}$ . Так как справедливо неравенство  $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{7}}{3} < \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{4}{3}$ , то этот случай реализуется. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, поэтому  $R = \frac{ML}{2} = 2$ .

**10.** Для любых натуральных  $n$  и  $k$ .

1. Вначале докажем, что для любых натуральных  $n$  и  $k$  и любого  $l$  из промежутка  $0 \leq l \leq \min(n; k)$  неравенства

$$x_1 + \dots + x_k \leq n \quad (1)$$

и

$$y_1 + \dots + y_n \leq k \quad (2)$$

имеют одинаковое число таких решений, в которых значения всех переменных целые неотрицательные и ровно  $l$  из них отличны от нуля.

*Первое доказательство.* Каждый набор переменных, удовлетворяющий неравенству (1), изображается в виде «лестницы», идущей от точки  $(k, 0)$  к точке  $(0, n)$  и строящейся следующим образом:

1) зная первое число  $x_1$ , загоняем в левый угол (точка  $(0, 0)$ ) первую горизонтальную ступеньку – прямоугольник шириной  $k$  и высотой  $x_1$  (если высота нулевая, то ступенька вырождена);

2) зная второе число  $x_2$ , загоняем в новый левый угол (теперь это точка  $(0, x_1)$ ) следующую горизонтальную ступеньку – прямоугольник шириной  $k - 1$  и высотой  $x_2$ ;

3) и так далее, пока не получится полная лестница, соединяющая точку  $(k, 0)$  с точкой  $(0, n)$  (если неравенство (1) строгое, добавим в конце вырожденную ступеньку нулевой ширины).

Та же лестница, соединяющая точку  $(0, n)$  с точкой  $(k, 0)$ , изображается по набору переменных, удовлетворяющему неравенству (2), если постепенно загонять в нижние углы вертикальные ступеньки: сначала высотой  $n$  и шириной  $y_1$  в угол  $(0, 0)$ , затем высотой  $n - 1$  и шириной  $y_2$  в угол  $(y_1, 0)$  и так далее.

Таким образом, наборы решений неравенств (1) и (2) отождествляются посредством лестниц, причем число  $l$  ненулевых значений переменных в них одинаково, так как при обоих типах построений оно просто совпадает с числом невырожденных ступенек лестницы.

*Второе доказательство.* Всякое решение неравенства (1), в котором значения всех переменных целые и положительные, можно изобразить в виде последовательности из  $n$  точек, разделенных  $l$  палочками, так что перед первой палочкой стоит  $x_1$  точка, между первой и второй палочкой стоят  $x_2$  точки, между второй и третьей палочкой стоят  $x_3$  точки и так далее, между  $(l-1)$ -й и  $l$ -й палочкой стоят  $x_l$  точек. Тогда палочки должны стоять в разных промежутках между точками, а последняя палочка может стоять как между точками (что соответствует строгому неравенству), так и после последней точки (что соответствует равенству). Причем любая такая расстановка палочек дает решение указанного вида для этого неравенства.

Поэтому число решений указанного вида для этого неравенства равно числу способов выбрать из  $n$  промежутков между точками (одно место находится после всех точек) места для  $l$  палочек, т.е.  $C_n^l$ . Поэтому число решений неравенства  $|x_1| + \dots + |x_k| \leq n$ , в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно  $l$  из них отличны от 0, равно  $C_n^l \cdot C_k^l$  (здесь  $C_n^l$  умножается на количество способов выбрать из  $k$  переменных  $l$  неотрицательных).

Аналогично, число решений неравенства  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq k$ , в котором значения всех переменных целые и неотрицательные и ровно  $l$  из них отличны от 0, равно  $C_k^l \cdot C_n^l$ .

2. Если  $(x_1, \dots, x_k)$  – решение неравенства (1), в котором все  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) – целые и ровно  $l$  из них отличны от нуля, то из этого решения получаем ровно  $2^l$  различных решений неравенства  $|x_1| + \dots + |x_k| \leq n$ , заменяя каждое положительное  $x_i > 0$  на два значения:  $x_i$  и  $-x_i$ . Отметим, что таким образом мы получим все целочисленные решения неравенства (1), у которых ровно  $l$  значений переменных отличны от нуля. Из этого рассуждения, используя утверждение пункта 1, получаем: для любых натуральных  $n$  и  $k$  неравенства  $|x_1| + \dots + |x_k| \leq n$  и  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq k$  имеют одинаковое число целочисленных решений, в которых ровно по  $l$  значений переменных отличны от нуля. Далее, замечая, что для числа  $l$  ненулевых переменных в каждом из неравенств (1) или (2) выполнены обе оценки  $l \leq n$  и  $l \leq k$ , и перебирая все значения  $l$  от 0 до  $\min(n; k)$ , получаем доказательство утверждения.

3. Отметим, что из приведенных рассуждений следует, что количество целочисленных решений неравенств (1) и (2) равно

$$\sum_{l=0}^{\min(n; k)} 2^l C_k^l C_n^l.$$

## МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Отборочный этап*

*Вариант 1*

1. а)  $V \in [10\sqrt{2}; 15)$  м/с; б)  $V \in \emptyset$ .

Зависимость высоты от времени есть  $h(t) = Vt - \frac{gt^2}{2}$ . Поэтому на высоте 10 м камень будет в моменты времени  $10 = Vt - 5t^2$ . Получается уравнение  $5t^2 - Vt + 10 = 0$ , которое при  $V^2 \geq 200$  (т.е. при  $V \geq 10\sqrt{2}$ ) имеет корни  $t_{1,2} = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 200}}{10}$ .

$$\text{а) } 1 < \frac{V - \sqrt{V^2 - 200}}{10} \leq \frac{V + \sqrt{V^2 - 200}}{10} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{V^2 - 200} < V - 10, \\ \sqrt{V^2 - 200} < 20 - V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leq V \leq 20, \\ V^2 - 200 < (V - 10)^2, \\ V^2 - 200 < (20 - V)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leq V \leq 20, \\ V < 15 \end{cases} \Leftrightarrow V \in [10\sqrt{2}; 15).$$

б) По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения  $5t^2 - Vt + 10 = 0$  равно  $\frac{10}{5} = 2$ . Поэтому условия  $t_1 > 2$  и  $t_2 > 2$  одновременно выполняться не могут.

2. 42 кв. см.

Из справочника находим  $S_{\text{России}} = 17098246$  кв.км  $\approx 17,1 \cdot 10^{12}$  кв.м,  $R_{\text{Земли}} = 6371$  км  $\approx 637 \cdot 10^4$  м. Коэффициент подобия:  $k = \frac{R_{\text{глоб.}}}{R_{\text{Земли}}} = \frac{10^{-1}}{637 \cdot 10^4} = \frac{10^{-5}}{637}$ . Значит,  $\frac{x}{S_{\text{России}}} = k^2$



(здесь  $x$  – искомая площадь);  $x = k^2 \cdot S_{\text{России}} = \left( \frac{10^{-5}}{637} \right)^2 \times 17,1 \cdot 10^{12} \text{ кв.м} \approx 4,21 \cdot 10^{-3} \text{ кв.м} \approx 42 \text{ кв.см.}$

### 3. 40 °С .

В обоих случаях при одинаковом расходе за одно и то же время проходит одинаковое количество воды, при этом ей передается одинаковое количество теплоты. Следовательно, температура на выходе та же:  $t_3 = t_2 = 40 \text{ °С}$  .

### 4. Около 7 кг.

При оценочных расчетах можно считать размеры ягод одинаковыми и много меньшими размера ведра. Если насыпать ягоды одним слоем, то при наиболее плотной упаковке у каждой ягоды будет 6 соседей: центры ягод будут в вершинах правильных треугольников со сторонами, равными диаметру ягод. При насыпании следующего слоя ягоды будут располагаться в углублениях между ягодами предыдущего слоя. При такой упаковке у каждой ягоды будет 12 соседей, а центры ягод будут находиться в вершинах правильных тетраэдров.

Для вычисления доли объема, приходящейся на ягоды, можно мысленно «вырезать» из решетки, образованной центрами ягод, параллелепипед с ребрами длиной  $2NR$ , где  $R$  – радиус ягоды,  $N$  – число ягод, укладываемых вдоль стороны, причем в двух противоположных вершинах ребра сходятся под углами  $60^\circ$  между собой. Объем такого параллелепипеда

$4\sqrt{2}N^3R^3$  и в него помещается около  $N^3$  ягод объемом  $\frac{4}{3}\pi R^3$

каждая (около стенок ягоды помещаются не полностью, но их число порядка  $N^2$ , так что при больших  $N$  этим обстоятельством можно пренебречь). Поэтому отношение объема ягод к объему ведра приблизительно равно  $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$ , так что в

10-литровом ведре при максимально плотной упаковке примерно 7,4 кг ягод. В реальности их несколько меньше из-за неплотности упаковки.

Отношение объема ягод к объему емкости можно считать и иначе. Например, рассматривать прямоугольный параллелепипед, в котором ягоды уложены слоями, расстояние между которыми равно высоте указанного выше тетраэдра  $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ . В

каждом слое расстояние между рядами равно высоте правильного треугольника  $R\sqrt{3}$ . Тем самым,  $N^3$  ягод займут параллеле-

пипед длиной  $2NR$ , шириной  $\sqrt{3}RN$  и высотой  $\frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}$ . Отношение объемов равно

$$\frac{N^3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{2RN \cdot \sqrt{3}RN \cdot \frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}.$$

5. а) Разойдутся, сохранив исходные скорости; б) начнут вращаться с угловой скоростью  $\frac{V}{2L}$ .

При ударе любых двух шаров скорость остальных не изменяется, так как удар происходит мгновенно. При абсолютно упругом ударе двух одинаковых шаров они обмениваются скоростями. Следовательно, каждая гантель начнет вращаться вокруг своего центра с угловой скоростью  $\frac{V}{L}$ . Спустя полпериода шары, которые не участвовали в первом ударе, окажутся в месте первоначального удара (радиусами шаров пренебрегаем). После второго абсолютно упругого удара гантели разойдутся, сохранив поступательный характер движения и скорость.

В случае абсолютно неупругого удара соприкасающиеся шары слипнутся и станут неподвижными. Система начнет вращаться вокруг этой точки с угловой скоростью  $\frac{V}{2L}$ .

6. 4,89 ч, или 4 ч 53 мин 24 с.

Наша задача: найти такую точку  $C$  на  $A'B'$  (рис.19), чтобы путь по траектории  $AC + CB$  занимал минимально возможное время. Расстояние  $A'B'$  равно  $12\sqrt{3}$ , пусть  $A'C = x$ , где  $x \in [0; 12\sqrt{3}]$  (на самом деле очевидно, что  $x \in [8\sqrt{3}; 12\sqrt{3}]$ ).

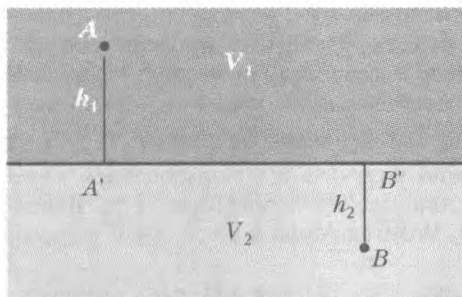


Рис. 19

Тогда время передвижения  $t$  равно

$$\frac{AC}{V_1} + \frac{CB}{V_2} = \frac{\sqrt{x^2 + 64}}{6} + \frac{\sqrt{(12\sqrt{3} - x)^2 + 16}}{3}.$$

Таким образом, нужно найти минимум функции

$$f(x) = \frac{1}{6} \left( \sqrt{x^2 + 64} + 2\sqrt{(12\sqrt{3} - x)^2 + 16} \right). \quad (1)$$

Первый подход связан с использованием производной. Производная

$$f'(x) = \frac{1}{6} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + 64}} - \frac{2(12\sqrt{3} - x)}{\sqrt{(12\sqrt{3} - x)^2 + 16}} \right)$$

равна нулю при

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 64}} = \frac{2(12\sqrt{3} - x)}{\sqrt{(12\sqrt{3} - x)^2 + 16}}. \quad (2)$$

Необходимо найти корни этого уравнения.

Второй подход основан на использовании аналогии с распространением света. Соотношение  $\frac{V_1}{\sin \alpha} = \frac{V_2}{\sin \beta}$  в наших обозначениях запишется как

$$\frac{6\sqrt{x^2 + 64}}{x} = \frac{3\sqrt{(12\sqrt{3} - x)^2 + 16}}{12\sqrt{3} - x}, \text{ что эквивалентно (2).}$$

Уравнение (2) приводится к виду

$$\begin{aligned} x^2 \left( (12\sqrt{3} - x)^2 + 16 \right) &= 4(12\sqrt{3} - x)^2 (x^2 + 64) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 24\sqrt{3}x^3 + 512x^2 - 2048\sqrt{3}x + 36864 &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Это алгебраическое уравнение аналитически не решается. И именно в этом месте следует воспользоваться компьютером. Получаются приближенные корни  $x_1 = 18,71$  и  $x_2 = 22,93$  (не подходит, так как это значение больше  $12\sqrt{3}$ ). Это численное решение можно получить с использованием калькулятора или любых компьютерных программ: как пакетных (Excel, Mathematica, WolframAlpha и т.п.), так и написанных самостоятельно.

Подстановка  $x = 18,71$  в (1) дает значение времени  $t = 4,89$  ч (или 4 ч 53 мин 24 с).

## Заключительный этап

### Вариант 2

1. От 3 до 6 минут (включая 3 и 6).

Если Чуков пробегает круг за  $t$  минут, то у Гекова на это уйдет  $t + 3$  минуты. Если длина круга равна  $L$  метров, то скорость Чукова  $V_1 = \frac{L}{t}$ , а скорость Гекова  $V_2 = \frac{L}{t+3}$ . По условию  $\frac{L}{V_1 + V_2} \geq 2$ ,  $\frac{L}{V_1 - V_2} \leq 18$ .

Тогда  $\frac{\frac{L}{\frac{L}{t} + \frac{L}{t+3}}}{\frac{L}{t} - \frac{L}{t+3}} \geq 2$ , откуда  $\frac{t(t+3)}{2t+3} \geq 2$ ,  $t^2 + 3t \geq 4t + 6$ ,

$t^2 - t - 6 \geq 0$ . Корни соответствующего уравнения:  $-2$  и  $3$ . Значит,  $t \geq 3$ .

Аналогично,  $\frac{\frac{L}{\frac{L}{t} - \frac{L}{t+3}}}{\frac{L}{t} + \frac{L}{t+3}} \leq 18$ , откуда  $\frac{t(t+3)}{3} \leq 18$ ,  $t^2 + 3t - 54 \leq 0$ . Корни соответствующего уравнения:  $-9$  и  $6$ . Значит,  $t \leq 6$ . Поэтому ответ:  $[3; 6]$ .

2. 1,6 с.

Дальность полета тела, брошенного со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, равна  $l = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ , а время полета равно  $\tau = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$ .

По условию  $\frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} \geq \frac{96}{100} \frac{V_0^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g}$ , т.е.  $\sin 2\alpha \geq \frac{96}{100}$ .

Среди этих шариков нужно выбрать тот, у которого максималь-

но  $\tau = \frac{2V_0 \sin \alpha}{g}$ , т.е. тот, у которого  $\sin \alpha$  является наибольшим.

Так как  $\arcsin \frac{24}{25} \leq 2\alpha \leq \pi - \arcsin \frac{24}{25}$ , то  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25}$ . Поэтому наибольшим временем полета является

$$\begin{aligned} \frac{2V_0}{g} \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} \right) &= \frac{2V_0}{g} \cos \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} \right) = \\ &= \frac{2V_0}{g} \sqrt{\frac{1 + \cos \left( \arcsin \frac{24}{25} \right)}{2}} = \frac{2V_0}{g} \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \frac{2V_0}{g} \sqrt{\frac{16}{25}} = 1,6 \text{ с.} \end{aligned}$$

3. а)  $32 + 4\pi$  см или  $22 + 2\sqrt{97} + 4\pi$  см; б) не всегда.

1) Вначале решается геометрическая задача о нахождении стороны  $O_2O_3$ . По условию  $\sin \angle O_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ , поэтому  $\cos \angle O_1 = \pm \frac{3}{5}$ . Третья сторона находится по теореме косинусов и равняется или 10 см, или  $2\sqrt{97}$  см.

2) Периметр фигуры будет равен сумме трех прямолинейных отрезков и сумме трех дуг. Сумма прямолинейных отрезков равна периметру треугольника  $O_1O_2O_3$ .

3) Сумма длин трех дуг равна  $r \cdot (\pi - \alpha) + r \cdot (\pi - \beta) + r \cdot (\pi - \gamma)$  (где  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника  $O_1O_2O_3$ ), что равняется  $r \cdot (3\pi - \alpha - \beta - \gamma) = r \cdot (3\pi - \pi) = 2\pi r$ .

4) В случае остроугольного треугольника требуемая длина ремня есть  $12 + 10 + 10 + 2\pi \cdot 2 = 32 + 4\pi$  см, что очевидно меньше, чем 54. Поэтому шнура хватает.

5) В случае тупоугольного треугольника требуемая длина ремня есть  $12 + 10 + 2\sqrt{97} + 2\pi \cdot 2 = 22 + 2\sqrt{97} + 4\pi$  см. Это больше, чем 54 (для справки:  $22 + 2\sqrt{97} + 4\pi \approx 54,26$ ). Здесь шнура не хватает.

4.  $\frac{1}{2}$ .

КПД тепловой машины есть отношение полезной работы к количеству теплоты, полученному газом за цикл. Для того чтобы найти полезную работу, требуется найти разность работ: совершенной газом ( $A_+$ ) и совершенной над ним ( $A_-$ ). Каждая из этих величин находится интегрированием мощности по времени или нахождением площади фигуры, заключенной между графиком зависимости мощности от времени и осью времени. Аналогично находится количество теплоты, полученное газом ( $Q_+$ ).

Заметим, что  $P_2(t) = aP_1(bt)$ , поэтому фигура, образованная графиком  $P_2$ , получается из фигуры, соответствующей функции  $P_1$ , растяжением вдоль вертикальной оси в  $a$  раз и сжатием вдоль горизонтальной оси в  $b$  раз. Значит,  $A_+ = Q_+ \cdot \frac{a}{b}$ . По условию,  $A_- = \beta A_+$ . Окончательно,  $\eta = \frac{a}{b}(1 - \beta)$ . При данных в условии задачи  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $\beta = \frac{2}{3}$  получается  $\eta = \frac{1}{2}$ .

Отметим, что интеграл от функции  $P_1(t)$  невозможно выразить через элементарные функции. С другой стороны, подынтегральная функция заметно упрощается, если пренебречь вторым слагаемым в знаменателе. Существенной потери точности при

этом не происходит, так как второе слагаемое ограничено и на два порядка меньше первого. После этого интегралы легко вычисляются.

5. [4; 2017].

1) Уравнение

$$\left( \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 = x \quad (1)$$

равносильно уравнению

$$x^5 - 2013 = x. \quad (2)$$

*Возможное доказательство.* Если  $x$  является корнем уравнения (2), то

$$\begin{aligned} \left( \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 &= \\ &= \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 = \\ &= (x^5 - 2013)^5 - 2013 = x^5 - 2013 = x, \end{aligned}$$

т.е.  $x$  является корнем уравнения (1). Если  $x$  является корнем уравнения (1), то он обязан являться и корнем уравнения (2). Предположим противное. Пусть  $x^5 - 2013 > x$ . Тогда из того, что функция  $g(x) = x^5 - 2013$  монотонно возрастает, следует

$$\begin{aligned} \left( \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 &> \\ &> \left( (x^5 - 2013)^5 - 2013 \right)^5 - 2013 > (x^5 - 2013)^5 - 2013 > \\ &> x^5 - 2013 > x, \end{aligned}$$

т.е. левая часть уравнения (1) больше, чем правая. Аналогично нет решений, если  $x^5 - 2013 < x$ . Значит, все корни (1) и (2) совпадают (или их нет), т.е. уравнения (1) и (2) равносильны.

2) Введем функцию  $f(x) = x^5 - x - 2013$ . Имеем  $f(4) < 0$ ,  $f(5) > 0$ , поэтому из-за непрерывности между точками 4 и 5 будут корни (он один, но это здесь неважно).

3) Докажем, что уравнение  $x^5 - 2013 = x$  не имеет корней вне промежутка  $(4; 5)$ . Так как  $f(x) = x(x^4 - 1) - 2013$ , то нет корней при  $x \leq -1$  и при  $x \in (1; 4)$  – в этих случаях  $f(x) < 0$ . При  $x \in [-1; 1]$  корней нет, поскольку тогда  $x^5 - x < 2013$ . Нет

корней и при  $x > 5$ , так как в этом случае

$$x(x^4 - 1) - 2013 > 5(5^4 - 1) - 2013 > 0.$$

Отсутствие корней на  $(4; 5)$  можно доказывать и с помощью производной:  $f'(x) = 5x^4 - 1$  – функция возрастает всюду, кроме  $x^4 \leq \frac{1}{5}$  (некая окрестность нуля). Тогда нужно аккуратно эту окрестность «обойти». Например, нет корней на  $x \in [-1; 1]$  (см. выше), нет корней при  $x \leq -1$  (см. выше) и будет ровно один корень при  $x > 1$ .

4) Итак,  $x \in (4; 5)$ . Поэтому  $y = x + 2013 \in (2017; 2018)$ .

6.  $\frac{6}{7}$  м.

Радиусы дисков образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q < 1$ . Здесь  $q = \frac{1}{2}$ ,  $R = 2$ . Следовательно, массы дисков также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $q^2 < 1$ . Масса всей системы конечна, ее размер тоже, поэтому положение центра масс определено.

Найдем высоту, на которой центр масс расположен над доской:

$$M_i = Mq^{2(i-1)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad R_i = Rq^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (M_i R_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} M_i} = R \frac{1 - q^2}{1 - q^3}.$$

Соединяем отрезком центры двух соседних дисков, и из прямоугольного треугольника с такой гипотенузой и катетами, параллельным и перпендикулярным доске, находим угол между этим отрезком и доской:  $\sin \alpha = \frac{1 - q}{1 + q}$ . Так как этот угол не зависит от номера диска, все центры дисков, а значит, и центр масс лежит на прямой, проходящей через центр первого диска и имеющей найденный наклон к доске.

Из прямоугольного треугольника с катетами, параллельным и перпендикулярным доске, и гипотенузой, соединяющей центр первого диска с центром масс системы, найдем искомое расстояние:

$$d = \frac{R - Y}{\sin \alpha} = R \frac{q^2(1 + q)}{1 - q^3}.$$

### Вариант 3

1. От 10 до 15 мин (включая 10 и 15). 2. 9,6 м. 3. а)  $36 + 6\pi$  см или  $23 + 3\sqrt{41} + 6\pi$  см; б) не всегда. 4.  $\frac{1}{6}$ . 5.  $[-5; -2018]$ .

### ФИЗИКА

#### Отборочный этап

#### 7–9 классы

1. Пусть длина эскалатора  $L$ , модуль скорости эскалатора  $v_э$ , а модуль скорости пассажира относительно эскалатора  $v_п$ . Тогда

$$v_э t_2 = L, \quad (v_э + v_п) t_1 = L \quad \text{и} \quad v_п t = L.$$

Отсюда находим

$$t = \frac{t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 6 \text{ мин.}$$

2. Вода начнет вытекать из-под банки, когда сила давления воды на дно банки станет чуть больше силы тяжести, действующей на банку с трубкой, и силы атмосферного давления, т.е. при условии

$$(\rho g h + p_a)(S - s) \geq mg + (S - s)p_a.$$

Здесь  $p_a$  – атмосферное давление,  $h = \frac{V - V_0}{s}$  – высота столба воды в трубке. Отсюда находим

$$m \leq \frac{\rho(V - V_0)(S - s)}{s} = 90 \text{ г.}$$

3. Масса воды, которую требуется получить, равна

$$m_b = \rho V = 2 \text{ кг,}$$

масса льда, который нужно растопить, составляет

$$m_l = m_b \frac{80}{100} = 1,6 \text{ кг.}$$

Количество теплоты, требующееся для растапливания льда при  $0^\circ\text{C}$ , равно

$$Q_1 = m_l \lambda = 528 \text{ кДж.}$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания котелка и воды до температуры  $100^\circ\text{C}$ , равно

$$Q_2 = (Mc_{ж} + m_b c_v)(t - t_0) = 858,4 \text{ кДж.}$$



При сгорании бензина должно выделиться количество теплоты

$$Q_3 = \frac{(Q_1 + Q_2) \cdot 100\%}{\eta} = 3466 \text{ кДж}.$$

Отсюда находим массу сгоревшего бензина:

$$m_6 = \frac{Q_3}{q} \approx 0,079 \text{ кг} = 79 \text{ г}.$$

4. Исходная цепь и ее эквивалентная схема в первом и во втором случаях изображены на рисунке 20. В первом случае

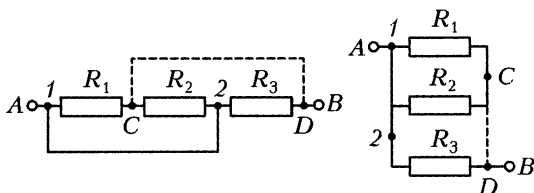


Рис. 20

резисторы сопротивлением  $R_1$  и  $R_2$  замкнуты накоротко, и сопротивление участка  $AB$  равно

$$R_{AB} = R,$$

где  $R$  – сопротивление отдельного резистора. Во втором случае, когда точки  $C$  и  $D$  замкнуты проводником, все три резистора оказываются соединенными параллельно. Следовательно,

$$\frac{1}{R'_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R}, \text{ и } R'_{AB} = \frac{R}{3} = 1 \text{ Ом}.$$

5. Поскольку движение поезда является равноускоренным с нулевой начальной скоростью, справедливы такие равенства:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1}{2}, \quad \frac{L}{9} = \frac{v_1 t_1}{2}, \quad L = \frac{v t}{2}.$$

Здесь  $v_1$  – скорость поезда в конце девятой части пути разгона,  $t_1$  – время его движения на  $1/9$  пути разгона,  $t$  – полное время движения поезда на всем пути разгона  $L$ . Из этих равенств следует, что

$$v = 18 v_{\text{ср}} \frac{t_1}{t}.$$

По законам равноускоренного движения,

$$\left( \frac{t_1}{t} \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Отсюда получаем

$$v = 6v_{\text{ср}} = 60 \text{ км/ч.}$$

### 10–11 классы

1. Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью  $y$ , направленной вертикально вверх. Уравнения движения шариков имеют вид

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2},$$

где

$$t_0 = \frac{v_0}{g}$$

– время подъема первого шарика до верхней точки. Из равенства  $y_1(t_1) = y_2(t_1)$  находим, что промежуток времени  $t_1$  от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков составляет

$$t_1 = \frac{3}{2} \frac{v_0}{g},$$

а высота  $h$ , на которой произойдет столкновение, равна

$$h = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g}.$$

Непосредственно перед столкновением скорости каждого из шариков по величине равны

$$v = \frac{v_0}{2},$$

но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их свободного падения на землю с высоты  $h$  равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{2g} \sqrt{3}.$$

Общее время полета первого шарика (т.е. искомый промежуток времени) составляет

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2g} (3 + \sqrt{3}) \approx 1,2 \text{ с.}$$

2. После того, как одну из нитей пережгут, шарик начнет двигаться по дуге окружности радиусом  $a$  (рис.21). В начальный

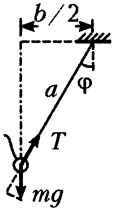


Рис.21

момент скорость шарика и его центростремительное ускорение будут равны нулю. Это означает, что сумма сил, действующих на шарик в направлении нити, также равна нулю. Поэтому величина силы натяжения нити в этот момент определяется формулой

$$T = mg \cos \varphi ,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\varphi$  – начальный угол отклонения нити от вертикали. Косинус этого угла равен

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - (b/2a)^2} .$$

Отсюда получаем

$$T = mg \sqrt{1 - (b/2a)^2} \approx 0,87 \text{ Н} .$$

**3.** Обозначим через  $M_0$  массу поршня, а через  $p_0$  – атмосферное давление. Пусть в начальном состоянии газа пружина растянута. Тогда на поршень действуют в общем случае четыре силы: сила тяжести  $M_0 g$ , сила упругости пружины  $kx$  ( $x$  – удлинение пружины) и сила атмосферного давления  $p_0 S$ , направленные вниз, а также сила давления газа в цилиндре  $pS$ , направленная вверх. Условия равновесия поршня в начальном и конечном состояниях имеют вид

$$M_0 g + p_0 S + kx_1 = p_1 S ,$$

$$M_0 g + p_0 S + kx_2 = p_2 S .$$

Здесь  $p_1$  и  $p_2$  – давления газа в начальном и конечном состояниях. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$p_2 - p_1 = \frac{k}{S} (x_2 - x_1) = \frac{k}{S} (H - h) .$$

С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний газа:

$$p_1 h S = \frac{m}{M} R T_1 ,$$

$$p_2 H S = \frac{m}{M} R T_2 ,$$

вытекает, что

$$p_2 - p_1 = \frac{mR}{MS} \left( \frac{T_2}{H} - \frac{T_1}{h} \right) .$$

Приравнявая разности давлений газа, найденные двумя способами, получаем

$$T_2 = T_1 \frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487,5 \text{ К}.$$

*Замечание.* Предлагаем самостоятельно убедиться в том, что от знака деформации пружины в начальном и конечном состояниях ответ не зависит.

4. Емкость конденсатора с диэлектриком равна

$$C = \frac{q}{U}, \text{ где } U = \frac{d}{2}(E + E_0).$$

Здесь  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора,  $E = \frac{E_0}{\epsilon}$  – напряженность поля в диэлектрике,  $E_0$  – напряженность поля в пространстве, свободном от диэлектрика. Получаем

$$C = \frac{2q\epsilon}{dE_0(\epsilon + 1)}.$$

Емкость пустого конденсатора равна

$$C_0 = \frac{q}{dE_0}.$$

Таким образом,

$$n = \frac{C}{C_0} = \frac{2\epsilon}{\epsilon + 1}.$$

Отсюда находим

$$\epsilon = \frac{n}{2 - n} = 4.$$

5. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению.

В *первом подходе* естественно предположить, что объектив проекционного аппарата остается неподвижным, а формирование резкого изображения на экране достигается путем перемещения диапозитива (рис.22). Как известно, линейное увеличение  $\Gamma$ , даваемое линзой, может быть рас-

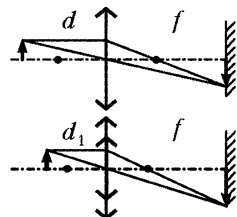


Рис.22

считано по формуле  $\Gamma = \frac{f}{d}$ , где  $d$  – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а  $f$  – расстояние от линзы до экрана,

которое не изменяется. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы равна

$$D_n = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f}(\Gamma + 1).$$

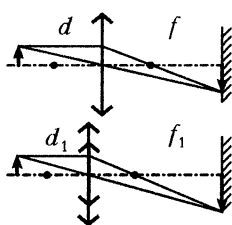
При сдвинутых вплотную тонких линзах их оптические силы складываются. Обозначив через  $D_0$  оптическую силу объектива диапроектора, а через  $D$  – оптическую силу добавочной линзы, имеем

$$D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma_0 + 1), \quad D + D_0 = \frac{1}{f}(\Gamma + 1),$$

откуда

$$D = \frac{1}{f}(\Gamma - \Gamma_0).$$

Учитывая, что конечное увеличение  $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83,3$ , а



начальное  $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9$ , находим, что  $D \approx 1,6$  дптр.

Рис. 23

В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив остается неподвижным, а после прижимания к объективу дополнительной линзы для фокусировки изображения на экран перемещают объектив (рис.23). В этом случае расстояние между диапозитивом и экраном не изменяется, поэтому

$$d + f = d_1 + f_1,$$

где  $d$  – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива,  $f$  – первоначальное расстояние от объектива до экрана, а  $d_1$  и  $f_1$  – те же расстояния после прижимания дополнительной линзы. По формуле линзы имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_0, \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = D_0 + D,$$

где  $D_0$  – оптическая сила объектива диапроектора, а  $D$  – оптическая сила добавочной линзы. Отсюда получаем

$$D = \frac{f_1 + d_1}{d_1 f_1} - \frac{f + d}{d f} = (f + d) \left( \frac{1}{d_1 f_1} - \frac{1}{d f} \right).$$

Объектив дает увеличение  $\Gamma_0 = \frac{f}{d}$ , объектив с добавочной лин-

зой дают увеличение  $\Gamma = \frac{f_1}{d_1}$ , причем  $\Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}}$ . Приведем промежуточные преобразования:

$$d_1 = \frac{f_1}{\Gamma}, \quad d_1 + f_1 = f_1 \frac{\Gamma + 1}{\Gamma}, \quad d = f \frac{\sqrt{2}}{\Gamma}, \quad d + f = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma},$$

$$f_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma + 1}, \quad d_1 = f \frac{\Gamma + \sqrt{2}}{\Gamma(\Gamma + 1)}.$$

Подставляя записанные выражения в формулу для  $D$ , находим

$$D = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\Gamma^2 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(\Gamma + \sqrt{2})f}.$$

По условию  $\Gamma = \frac{2000}{24} = \frac{3000}{36} \approx 83,3$ . Учитывая, что  $\Gamma \gg 1$ , выражение для  $D$  можно упростить и привести к виду

$$D \approx \frac{(\sqrt{2} - 1)\Gamma^2}{f\sqrt{2}\Gamma} = \frac{1}{f} \left( \Gamma - \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{f} (\Gamma - \Gamma_0), \quad \text{где } \Gamma_0 = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58,9.$$

Получаем  $D \approx 1,6$  дптр.

Поскольку увеличение изображения достаточно велико ( $\Gamma, \Gamma_0 \gg 1$ ), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

**6.** Гирька движется по желобу вдоль прямой  $OB$ , образующей с горизонталью угол  $\varphi$ , под действием сил, изображенных на рисунке 24. Здесь  $m$  – масса гирьки,  $m\vec{g}$  – сила тяжести,  $\vec{N}$  – нормальная составляющая силы реакции желоба,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила трения скольжения, причем

$$F_{\text{тр}} = \mu N \quad \text{и} \quad N = mg \cos \varphi.$$

Из рисунка видно, что

$$\cos \varphi = \frac{OC}{OB}, \quad \text{где } OC = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}, \quad OB = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Следовательно,

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

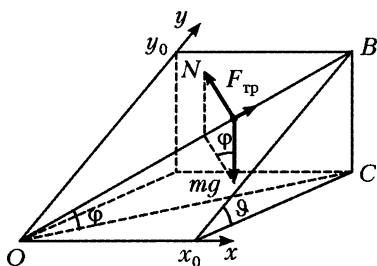


Рис. 24

Работа силы трения при перемещении гирьки из точки  $B$  в точку  $O$  равна по модулю

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot OB = \mu mg \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}.$$

По закону изменения механической энергии,

$$mgy_0 \sin \vartheta = \frac{mv^2}{2} + \mu mg \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta}.$$

Выражая из этого равенства  $v$ , получаем

$$v = \sqrt{2g(y_0 \sin \vartheta - \mu \sqrt{x_0^2 + y_0^2 \cos^2 \vartheta})} = 2,0 \text{ м/с}.$$

*Заключительный этап*

*7–9 классы*

**1.** Расстояние между автобусами равно

$$l = v\tau_1.$$

Интервал времени равен

$$\tau_2 = \frac{l}{v - u}.$$

Отсюда находим

$$u = \frac{v(\tau_2 - \tau_1)}{\tau_2} = 20 \text{ км/ч}.$$

**2.** Вес монеты в воздухе равен

$$P = (m_1 + m_2)g.$$

В воде вес уменьшается на величину архимедовой силы, поэтому

$$\Delta P = \rho_0 \left( \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) g.$$

Здесь  $m_1$  и  $\rho_1$  – масса и плотность золота,  $m_2$  и  $\rho_2$  – масса и плотность серебра,  $\rho_0$  – плотность воды,  $g$  – ускорение свободного падения. Относительное уменьшение веса монеты в воде равно

$$k = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\rho_0}{\rho_2} - X \left( \frac{\rho_0}{\rho_2} - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) = \frac{1}{n_2} - X \left( \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right) = 0,08,$$

где  $X = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$

Отсюда следует, что

$$X = \frac{n_1(1 - n_2 k / 100\%)}{n_1 - n_2} = 0,4, \text{ или } X = 40\%.$$

**3.** Пусть  $C_k$  – теплоемкость калориметра и содержавшейся в

нем первоначально воды,  $C_B$  – теплоемкость порции теплой воды, содержащейся в ложке,  $t_0$  – первоначальная температура калориметра и содержащейся в нем воды,  $t_{TB}$  – температура теплой воды,  $t_1$  – установившаяся в калориметре температура после вливания одной ложки теплой воды,  $t_2$  – установившаяся в калориметре температура после вливания двух ложек теплой воды. Уравнения теплового баланса имеют вид

$$C_K(t_1 - t_0) = C_B(t_{TB} - t_1), \quad C_K(t_2 - t_0) = 2C_B(t_{TB} - t_2).$$

Учитывая, что по условию

$$t_{TB} - t_0 = \Delta t, \quad t_1 - t_0 = \Delta t_1, \quad t_2 - t_0 = \Delta t_1 + \Delta t_2,$$

из записанных уравнений находим

$$\Delta t = \frac{(\Delta t_1 + \Delta t_2)\Delta t_1}{\Delta t_1 - \Delta t_2} = 20^\circ\text{C}.$$

4. Ход луча света, идущего от верхней части головы отца и попадающего в глаз сыну, показан на рисунке 25. С учетом закона отражения из подобия изображенных на рисунке треугольников следует равенство

$$\frac{X}{L} = \frac{x}{l}.$$

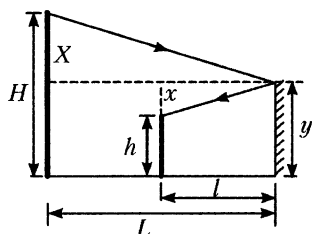


Рис. 25

Кроме того, справедливы соотношения

$$H - X = h + x = y.$$

Решая записанную систему уравнений, находим

$$y = \frac{Hl + hL}{l + L} = 1,4 \text{ м.}$$

10–11 классы

Задание

1. Пусть нить, на которой подвешен шар, в начальный момент образует с вертикалью угол  $\alpha$  (рис.26). По второму закону Ньютона имеем

$$m\omega^2 r = T \sin \alpha, \quad mg = T \cos \alpha,$$

где  $m$  – масса шара,  $\omega = 2\pi n$  – угловая скорость движения шара по окружности,  $r = L \sin \alpha$  – радиус этой окружности,  $T$  – натяжение нити,

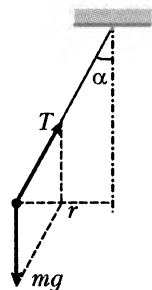


Рис. 26



$g$  – ускорение свободного падения. Из этих уравнений находим

$$\cos \alpha = \frac{g}{(2\pi n)^2 L}.$$

Потенциальная энергия шара относительно его нижнего положения равна

$$E_{\text{п}} = mgL(1 - \cos \alpha) = mgL \left( 1 - \frac{g}{(2\pi n)^2 L} \right).$$

Кинетическая энергия шара равна

$$E_{\text{к}} = \frac{m(\omega r)^2}{2} = \frac{m}{2} (2\pi n L \sin \alpha)^2.$$

С учетом уменьшения угла отклонения нити от вертикали, т.е. с учетом уменьшения  $n$  в 2 раза, находим, что изменение потенциальной энергии шара составит

$$\Delta E_{\text{п}} = E_{\text{п}}(n) - E_{\text{п}}(n/2) = \frac{3mg^2}{4(\pi n)^2},$$

а изменение кинетической энергии –

$$\Delta E_{\text{к}} = E_{\text{к}}(n) - E_{\text{к}}(n/2) = \frac{3}{2} m \left( (\pi n L)^2 + \frac{g^2}{(2\pi n)^2} \right).$$

Поскольку полная механическая энергия шара равна

$$E(n) = E_{\text{п}}(n) + E_{\text{к}}(n),$$

то искомая работа равна

$$A = \Delta E_{\text{п}} + \Delta E_{\text{к}} = \frac{3}{2} m \left( (\pi n L)^2 + \frac{3g^2}{4(\pi n)^2} \right) \approx 25,7 \text{ Дж}.$$

2. При первом сжатии давление смеси сухого воздуха и водяного пара в сосуде возросло менее чем в пять раз. Это означает, что пар стал насыщенным и частично сконденсировался. При дальнейшем сжатии давление пара  $p_{\text{н}}$  уже не менялось. Пренебрежем объемом сконденсировавшейся воды. Парциальное давление сухого воздуха при первом сжатии возросло в 5 раз, а при втором – еще в 3 раза. Полное давление влажного воздуха до начала сжатия равнялось  $p_{\text{п}} + p_{\text{в}}$ , где  $p_{\text{п}}$  и  $p_{\text{в}}$  – парциальные давления пара и сухого воздуха соответственно. По условию задачи,

$$p_{\text{н}} + 5p_{\text{в}} = 3(p_{\text{п}} + p_{\text{в}}), \quad p_{\text{н}} + 15p_{\text{в}} = 7(p_{\text{п}} + p_{\text{в}}).$$

Отсюда получаем

$$p_{\text{н}} = 5p_{\text{п}}.$$

Следовательно, первоначальная влажность воздуха равна

$$\varphi = \frac{p_n}{p_n} \cdot 100\% = 60\%.$$

3. Пусть магнитная индукция  $B$  направлена так, как показано рисунке 27. Согласно правилу Ленца, возникающие при уменьшении магнитного поля ЭДС индукции вызывают в каждом из малых контуров индукционные токи, текущие по часовой стрелке. Обозначим направления токов через резисторы стрелками на рисунке. По правилам Кирхгофа имеем

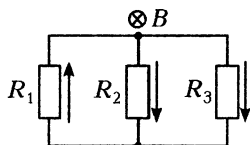


Рис. 27

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_2 R_2, \quad \mathcal{E} = I_3 R_3 - I_2 R_2, \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

Учитывая, что величина ЭДС индукции в каждом малом контуре равна

$$\mathcal{E} = \alpha S,$$

получаем

$$I_2 = \frac{\alpha S (R_3 - R_1)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}.$$

По закону Джоуля–Ленца,

$$Q_2 = I_2^2 R_2 t_0, \quad \text{где } t_0 = \frac{B_0}{\alpha}.$$

Окончательно находим

$$Q_2 = \alpha B_0 R_2 \left( \frac{S (R_3 - R_1)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} \right)^2 = 0,5 \text{ мДж.}$$

4. По закону преломления для луча, выходящего из призмы, имеем

$$n \sin \alpha = \sin \beta,$$

где  $\beta$  – угол преломления. Поскольку углы  $\alpha$  и  $\beta$  малые, то

$$n\alpha \approx \beta.$$

Тогда угол отклонения падающего на призму луча от первоначального направления (рис.28) равен

$$\gamma = \beta - \alpha = (n - 1)\alpha.$$

Угол между главной оптической

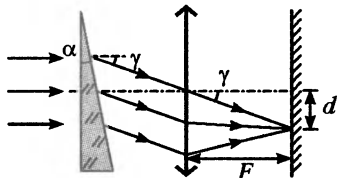


Рис. 28

осью линзы и побочной осью, параллельной падающим на линзу лучам, также равен  $\gamma$ . Отсюда получаем

$$d = F \operatorname{tg} \gamma \approx F \gamma = F(n-1)\alpha.$$

Следовательно,

$$n = 1 + \frac{d}{F\alpha} = 1,5.$$

## ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»

### МАТЕМАТИКА

#### Отборочный этап

#### 1. В 7 раз.

Пусть  $r$  и  $h$  – радиус основания и высота конического фужера соответственно. Тогда объем лимонада во всем фужере равен

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \text{ Объем лимонада, выпитый Малышом, равен } V_M = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{V}{8}. \text{ Следовательно, Карлсон выпил } \frac{7}{8}V,$$

т.е. в 7 раз больше Малыша.

#### 2. $(2; 2; 1)$ , $(2; 4; -1)$ , $(3; -2; 2)$ , $(3; -1; -2)$ , $(1; 1; -4)$ .

Сначала рассмотрим случай, когда

$$\left|y + \frac{1}{z}\right| \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y + \frac{1}{z}} \in [-1; 1]. \text{ Возможны варианты:}$$

$$1) x = 2; \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{1}{3}; y + \frac{1}{z} = 3. \text{ Поэтому либо } y = 2, z = 1, \text{ либо}$$

$$y = 4, z = -1.$$

$$2) x = 3; \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = -\frac{2}{3}; y + \frac{1}{z} = -\frac{3}{2}. \text{ Поэтому либо } y = -2, z =$$

$$= 2, \text{ либо } y = -1, z = -2.$$

Осталось рассмотреть случай  $\left|y + \frac{1}{z}\right| < 1$ , что возможно только при  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = -1$ .

3)  $y = 0$  – не подходит, так как тогда левая часть неравенства – целое число.

$$4) y = 1, z < 0. \text{ Тогда } x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = x + \frac{z}{z+1} = x+1 - \frac{1}{z+1}, \text{ т.е.}$$

$$x - \frac{1}{z+1} = \frac{4}{3}. \text{ Так как } \frac{1}{z+1} \in (-1; 0), \text{ то } x = 1, z+1 = -3, \text{ т.е. } z = -4.$$

5)  $y = -1, z > 0$ . Тогда  $x + \frac{z}{1-z} = \frac{7}{3}$ , т.е.  $x + \frac{1}{1-z} = \frac{10}{3}$ .  
Отсюда  $x = 4, 1-z = -\frac{3}{2}$  – не целое число.

Возможен и другой способ решения. Исходное уравнение равносильно уравнению  $x + \frac{z}{yz+1} = \frac{7}{3}$ . При  $y = 0$  решений нет.

Так как дробь  $\frac{z}{yz+1}$  несократима при  $y \neq 0$ , то  $yz+1 = \pm 3$ .

1)  $yz = 2$ , т.е.  $z = 1, -1, 2, -2$ , а так как  $x = \frac{7-z}{3}$ , то  $z = 1, y = 2, x = 2; z = -2, y = -1, x = 3$ .

2)  $yz = -4$ , т.е.  $z = 1, -1, 2, -2, 4, -4$ , а так как  $x = \frac{7+z}{3}$ , то  $z = -1, y = 4, x = 2; z = 2, y = -2, x = 3; z = -4, y = 1, x = 1$ .

$$3. x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Во-первых, учитывая равенства

$$\sin\left(x + 3^2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right),$$

$$\sin\left(x + 3^3 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right),$$

$$\sin\left(x + 3^4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{2\pi}{7}\right),$$

$$\sin\left(x + 3^5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = \sin\left(x + 5 \cdot \frac{2\pi}{7}\right),$$

получаем, что исходное уравнение имеет вид

$$\sin\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(x + 2 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) + \dots + \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 1.$$

Во-вторых, заметим, что

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) + \dots + \sin\left(x + 6 \cdot \frac{2\pi}{7}\right) = 0.$$

Действительно, семь точек тригонометрической окружности вида  $x + i \cdot \frac{2\pi}{7}$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) образуют вершины правильного семиугольника, поэтому сумма радиусов-векторов с концами в этих точках равна нулю (так как при повороте на угол  $\frac{2\pi}{7}$  вокруг начала координат набор этих векторов не меняется,

следовательно, не меняется и вектор, равный их сумме, а значит, он равен нулю), как и сумма их ординат, т.е. соответствующих синусов.

Поэтому левая часть исходного уравнения равна  $0 - \sin x$ , а само уравнение записывается в виде  $-\sin x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$4. \alpha \in (2\arcsin(\sqrt{2}-1); \pi).$$

Пусть  $BC = a$  — основание треугольника,  $AC = AB = b$  — боковые стороны,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы при вершине и основании соответственно. Одна прямая, делящая площадь и периметр равнобедренного треугольника пополам, существует всегда: она проходит через вершину треугольника перпендикулярно основанию. Найдем, как могут проходить две другие прямые.

Рассмотрим два случая.

1) Прямая, делящая площадь и периметр этого треугольника пополам, проходит через боковые стороны, отсекая от них части, равные  $bx$  и  $by$  соответственно ( $0 \leq x; y \leq 1$ ). Тогда часть отсекаемого периметра равна  $P_1 = b(x+y) = \frac{2b+a}{2}$ , а площадь отсекаемого треугольника равна  $S_1 = \frac{1}{2}bx \cdot by \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}b^2 \sin \alpha\right)$ , откуда получаем, что  $y = \frac{1}{2x}$ . Поэтому соотношение для периметров принимает вид  $bx + \frac{b}{2x} = \frac{2b+a}{2}$ , откуда получаем квадратное уравнение

$$2bx^2 - (2b+a)x + b = 0. \quad (1)$$

Дискриминант этого уравнения равен  $D = a^2 + 4ab - 4b^2$ . Так как  $a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}$ , то  $D = 4b^2 \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right)$ . Следовательно, в этом случае уравнение имеет два решения, если  $\sin \frac{\alpha}{2} > \sqrt{2} - 1$ ; одно — если  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1$ ; ни одного — если  $\sin \frac{\alpha}{2} < \sqrt{2} - 1$ . Заметим, что два решения соответствуют паре симметричных (относительно оси симметрии равнобедренного треугольника) прямых, проходящих через боковые стороны.

Проанализируем, когда существует эта пара прямых. Сделаем замену  $t = \sin \frac{\alpha}{2}$  и заметим, что если  $1 \geq t > \frac{1}{2}$ , то корни

уравнения (1)

$$x_{1,2} = \frac{2b(1+t) \pm 2b\sqrt{t^2+2t-1}}{4b} = \frac{1+t \pm \sqrt{t^2+2t-1}}{2}$$

обладают свойством:

$$x_2 = \frac{1+t + \sqrt{t^2+2t-1}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+2t-1} > 1-t \Leftrightarrow t > \frac{1}{2}.$$

Формула для меньшего корня  $x_1 = \frac{1+t - \sqrt{t^2+2t-1}}{2} > 1$  влечет, что

$$y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{1+t - \sqrt{t^2+2t-1}} = \frac{1+t + \sqrt{t^2+2t-1}}{2} > 1,$$

т.е. рассматриваемых в этом случае прямых при  $t > \frac{1}{2}$  не существует, а при  $\sqrt{2}-1 < t \leq \frac{1}{2}$  их две (при  $t = \frac{1}{2}$  они проходят через вершины  $B$  и  $C$ ).

Таким образом, в этом случае три указанных прямых существуют при  $\alpha \in \left(2 \arcsin(\sqrt{2}-1); \frac{\pi}{3}\right]$ .

2) Прямая, делящая площадь и периметр этого треугольника пополам, проходит через основание и боковую сторону, отсекая от них части, равные  $ax$  и  $by$  соответственно ( $0 \leq x; y \leq 1$ ). Тогда часть отсекаемого периметра равна  $P_1 = ax + by = \frac{2b+a}{2}$ , а площадь отсекаемого треугольника равна

$$S_1 = \frac{1}{2} ax \cdot by \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} ab \sin \beta \right),$$

откуда получаем, что  $y = \frac{1}{2x}$ . Поэтому соотношение для периметров принимает вид  $ax + \frac{b}{2x} = \frac{2b+a}{2}$ , откуда получаем квадратное уравнение

$$2ax^2 - (2b+a)x + b = 0. \quad (2)$$

Его решениями являются  $x_1 = \frac{b}{a}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Если  $x = x_1 = \frac{b}{a}$ , то  $y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{a}{2b} < 1$  при всех  $a$  и  $b$ , при которых существует треугольник  $ABC$ . Если  $x = x_2 = \frac{1}{2}$ , то  $y = 1$ , т.е. это вертикальная

прямая, проходящая через вершину равнобедренного треугольника перпендикулярно основанию. Так как  $x \leq 1$ , то вторая прямая (и третья в силу симметрии треугольника) существует при условии  $\frac{b}{a} \leq 1$ , что равносильно  $\alpha \geq \frac{\pi}{3}$  (или же  $\sin \frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{2}$ ).

Таким образом, три прямые, удовлетворяющие условию задачи, существуют при  $\alpha > 2\arcsin(\sqrt{2}-1)$ .

#### 5. 14.

Пусть Мальвина написала числа  $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$ . Если Буратино придумает числа  $x_1 = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2}$ ,  $x_2 = \frac{a_1 + a_3 - a_2}{2}$ ,  $x_3 = \frac{a_2 + a_3 - a_1}{2}$ ,  $x_4 = a_4 - x_3$ , то, написав  $x_1 + x_2 = a_1$  под  $a_1$ ,  $x_1 + x_3 = a_2$  под  $a_2$ ,  $x_2 + x_3 = a_3$  под  $a_3$ ,  $x_3 + x_4 = a_4$  под  $a_4$ ,  $x_1 + x_4 \geq a_4 \geq a_5$  под  $a_5$ ,  $x_2 + x_4 \geq a_4 \geq a_6$  под  $a_6$ , он получит 14 яблочек.

Чтобы получить более 14 яблочек, Буратино должен обеспечить выполнение по крайней мере пяти равенств, что не всегда возможно: среди любых 5 сумм, составляемых Буратино, есть такие 4, что сумма двух из них равна сумме двух других. Поэтому если Мальвина напишет такие 6 чисел, что сумма никаких двух из них не равна сумме двух других (например, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000), то Буратино не сможет получить 15 или больше яблочек.

6. Все числа вида  $\overline{abab}$ , где  $a$  и  $b$  – любые цифры, кроме нуля (таких чисел 81).

Из условия задачи следует, что найдется  $k \in \mathbb{N}$  такое, что выполняется по крайней мере одно из равенств:

$$(I) \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{bcda};$$

$$(II) \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{cdab};$$

$$(III) \quad k \cdot \overline{abcd} = \overline{dabc}.$$

Поскольку все числа  $\overline{abcd}$ ,  $\overline{bcda}$ ,  $\overline{cdab}$ ,  $\overline{dabc}$  четырехзначные, то  $1 \leq k \leq 9$  и  $a, b, c, d \neq 0$ .

Последовательно разберем все случаи.

1) Вычитая левую и правую часть уравнения (I) соответственно из левой и правой частей равенства  $10 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd0}$ , получаем

$$(10 - k)\overline{abcd} = 9999a. \quad (1)$$

Поскольку  $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ , обе части уравнения (1) делятся

на простое число 101, и в силу ограничений  $1 \leq 10 - k \leq 9$  получаем  $\overline{abcd} : 101 \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{cd}$ . Разделим уравнение (1) на 101:  $(10 - k)\overline{ab} = 99a$ .

Теперь учтем, что обе части полученного уравнения делятся на 11 и опять же в силу неравенств  $1 \leq 10 - k \leq 9$  получим  $\overline{ab} : 11 \Leftrightarrow a = b$ . Таким образом, решениями уравнения (I) являются в точности все числа вида  $\overline{aaaa}$  (при  $k = 1$ ).

2) Уравнение (II) вычтем из равенства  $100 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd00}$ . Получим

$$(100 - k)\overline{abcd} = 9999 \cdot \overline{ab}. \quad (2)$$

Аналогично случаю (I), имеем  $\overline{abcd} : 101 \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{cd}$ . Разделим уравнение (2) на 101:  $(100 - k)\overline{ab} = 99 \cdot \overline{ab}$ .

Следовательно, решениями уравнения (II) являются в точности все числа вида  $\overline{abab}$  (при  $k = 1$ ).

3) Уравнение (III) вычтем из равенства  $1000 \cdot \overline{abcd} = \overline{abcd000}$ . Получим

$$(1000 - k)\overline{abcd} = 9999 \cdot \overline{abc}. \quad (3)$$

При  $1 \leq k \leq 9$  имеем

$$\text{НОД}(101; (1000 - k)) = 1 \Rightarrow \overline{abcd} : 101 \Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{cd}.$$

Разделим уравнение (3) на 101:  $(1000 - k)\overline{ab} = 99 \cdot \overline{aba}$ .

Далее, при  $1 \leq k \leq 9$  имеем

$$\text{НОД}(11; (1000 - k)) = 1 \Rightarrow \overline{ab} : 11 \Leftrightarrow a = b.$$

Следовательно, решениями уравнения (III) являются в точности все числа вида  $\overline{aaaa}$  (при  $k = 1$ ).

Очевидно, что все решения уравнений (I), (III) содержатся среди решений уравнения (II).

7. 89 решений при  $1006^2 - 2012 < a \leq 1006^2 - 1936$ .

Пусть  $\{x\}$  обозначает дробную часть числа  $x$ , тогда  $x = [x] + \{x\}$ , и уравнение можно преобразовать к виду  $([x] + 1006)^2 = 1006^2 - a - 2012\{x\}$ . Заметим, что  $2012\{x\}$  может принимать значения из промежутка  $[0; 2012)$ .

Для каждого целого  $k$ , удовлетворяющего неравенствам  $1006^2 - a - 2012 < k^2 \leq 1006^2 - a$ , число  $k - 1006 + \frac{-k^2 - a + 1006^2}{2012}$

будет решением этого уравнения. Верно и обратное: каждое



решение этого уравнения можно представить в виде  $k - 1006 + \frac{-k^2 - a + 1006^2}{2012}$ , где целое число  $k$  удовлетворяет неравенствам  $1006^2 - a - 2012 < k^2 \leq 1006^2 - a$ . Найдем количество таких  $k$  в зависимости от  $a$ .

Если  $a > 1006^2 - 2012$ , то такие  $k$  образуют набор всех целых чисел из отрезка  $\left[-\sqrt{1006^2 - a}; \sqrt{1006^2 - a}\right]$  — таких целых чисел будет  $2 \cdot \left[\sqrt{1006^2 - a}\right] + 1$ . Это число максимально при  $44^2 \leq 1006^2 - a < 2012$  и равно 89.

Если же  $a \leq 1006^2 - 2012$ , то количество таких целых чисел будет в два раза больше количества натуральных чисел из промежутка  $\left(\sqrt{1006^2 - a - 2012}; \sqrt{1006^2 - a}\right]$ . Покажем, что на этом промежутке не более 44 натуральных чисел. Действительно, иначе найдутся натуральные числа  $n$  и  $n + 44$  из этого промежутка. Следовательно,  $\sqrt{1006^2 - a - 2012} < n$  и  $n + 44 \leq \sqrt{1006^2 - a}$ . Тогда  $1006^2 - 2012 - n^2 < a \leq 1006^2 - (n + 44)^2$  и  $(n + 44)^2 - 2012 - n^2 < 0$ . Отсюда  $n < \frac{76}{88}$ , что неверно.

Значит, максимальное количество решений уравнения достигается при  $44^2 \leq 1006^2 - a < 2012$ , т.е. при  $a$  из промежутка  $(1006^2 - 2012; 1006^2 - 44^2]$  (другая запись:  $(1010024; 1010100]$ ).

8.  $\sqrt{657}$ .

В силу симметрии конфигурации относительно плоскости  $\pi(x; y; 2)$  (проходящей через точки  $K$  и  $L$  параллельно основанию  $ABCD$ ) можно считать, что кратчайший путь проходит не выше плоскости  $\pi$  и тем самым не имеет общих точек с верхним основанием  $A'B'C'D'$ .

Далее, если путь не проходит через внутренние точки основания  $ABCD$ , то его длина не меньше длины его проекции на плоскость основания, т.е. половины периметра  $ABCD$ , равной  $22 + 5 = 27$ . Это значение достигается на горизонтальном пути  $KL$ , лежащем в плоскости  $\pi$ .

Остается рассмотреть случаи, когда путь проходит через грань  $ABCD$ . Поскольку кратчайший путь не должен заходить дважды на одну и ту же грань, имеются три возможные разветки:

См. рис. 29; в этом случае имеем

$$KL = \sqrt{(2 + 22 + 2)^2 + (5 - 1 - 1)^2} = \sqrt{26^2 + 3^2} = \sqrt{685}.$$

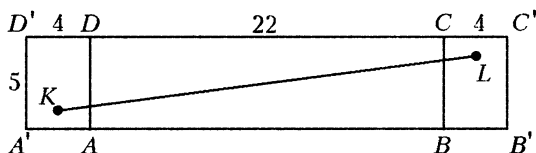


Рис. 29

См. рис. 30; в этом случае имеем

$$KL = \sqrt{(2 + 22 + 1)^2 + (4 + 2)^2} = \sqrt{25^2 + 6^2} = \sqrt{661}.$$

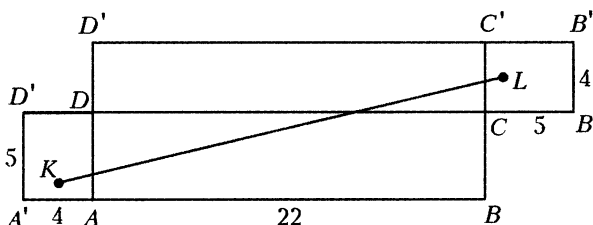


Рис. 30

См. рис. 31; в этом случае имеем

$$KL = \sqrt{(1 + 22 + 1)^2 + (2 + 5 + 2)^2} = \sqrt{24^2 + 9^2} = \sqrt{657}.$$

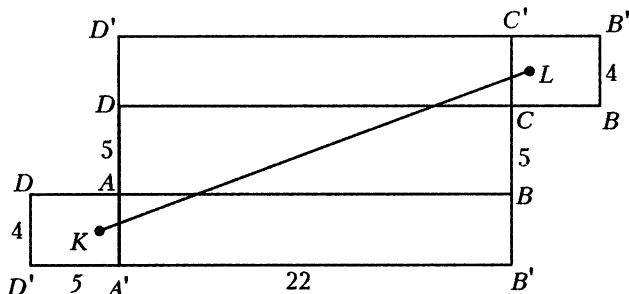


Рис. 31

Поскольку  $27 > \sqrt{685} > \sqrt{661} > \sqrt{657}$ , получаем ответ  $\sqrt{657}$ .

**9. Можно.**

Отделим от группы из 21 человека одного (присвоим ему номер 0), а для остальных 20 человек нарисует граф, в котором

каждому человеку соответствуют своя вершина и номер от 1 до 20. Соединим ребрами те и только те пары вершин, для которых тройка, состоящая из двух соответствующих этим вершинам людей и человека номер 0, вместе делали математику.

Покажем, что в этом графе либо найдется четверка вершин, попарно соединенных ребрами, либо четверка вершин, попарно не соединенных ребрами. Вершина номер 1 нашего графа либо соединена ребрами с 10 другими вершинами, либо не соединена ребрами с 10 другими вершинами. Без ограничения общности будем считать, что выполнено первое.

Рассмотрим подграф нашего графа, образованный этими 10 вершинами. Выберем произвольную вершину этого подграфа (пусть она имеет номер  $k$ ). Она либо имеет общие ребра с четырьмя другими вершинами подграфа (назовем их  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$ ), либо не имеет общих ребер с 6 другими вершинами подграфа.

В первом из этих случаев либо четверка вершин с номерами  $m$ ,  $n$ ,  $p$  и  $q$  попарно не соединена ребрами, либо две из них, например  $m$  и  $n$ , соединены ребром – и тогда четверка вершин с номерами 1,  $k$ ,  $m$  и  $n$  попарно соединена ребрами.

Во втором же из случаев мы получаем 6-вершинный подграф нашего (10-вершинного) подграфа, в котором, как известно, всегда либо найдутся три попарно соединенных ребрами вершины  $a$ ,  $b$  и  $c$  – и тогда четверка вершин с номерами 1,  $a$ ,  $b$  и  $c$  попарно соединена ребрами, либо три попарно не соединенные ребрами вершины  $a$ ,  $b$  и  $c$  – и тогда четверка вершин с номерами  $k$ ,  $a$ ,  $b$  и  $c$  попарно не соединена ребрами.

Без ограничения общности будем считать, что нашлась четверка людей с номерами  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  четырех вершин, попарно соединенных ребрами. Либо среди соответствующих этим вершинам людей найдется тройка, делавшая вместе математику, – и тогда вместе с человеком номер 0 они образуют искомую четверку (делавшую по трое математику), либо такой тройки не найдется – и тогда искомой является сама четверка людей с номерами  $K$ ,  $L$ ,  $M$  и  $N$  (делавшие по трое русский язык).

*Заключительный этап*

1.  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg} x\right) \cdot\left(\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-\operatorname{tg} x\right)=1$ , то логарифмы имеют разные знаки (кроме случая, когда оба аргумента равны 1). Поэтому  $\operatorname{tg} x=0$ .

2. (1; 3), (4; 6).

Так как  $0,xxxx\dots = \frac{x}{9}$ , то получаем  $10x + x + \frac{x}{9} = \left(y + \frac{y}{9}\right)^2$ ,  
т.е.  $\frac{100x}{9} = \frac{100y^2}{81}$ , или  $9x = y^2$ , откуда и получается ответ.

**3.** Первое число больше.

В силу неравенства Коши,

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_{2013} 2012 \cdot \log_{2013} 2014} &< \frac{\log_{2013} 2012 + \log_{2013} 2014}{2} = \\ &= \frac{\log_{2013} (2012 \cdot 2014)}{2} = \frac{\log_{2013} (2013^2 - 1)}{2} < \frac{\log_{2013} (2013^2)}{2} = 1.\end{aligned}$$

Следовательно,  $\log_{2013} 2014 < \frac{1}{\log_{2013} 2012} = \log_{2012} 2013$ .

**4.** Второе число больше.

Так как  $2000 < 2013 < 2^{11}$ , то  $\frac{\lg 2013}{2 \lg 2} = \frac{\log_2 2013}{2} < \frac{11}{2} < 6$ , а  
 $2 \lg \frac{2013}{2} > 2 \lg 1000 = 6$ .

**5.** Первое число больше.

Первое число равно

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}) &= \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left( 3\sqrt{3} - 5 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \right) = \\ &= \log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \left( (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-2} + 3\sqrt{3} - 5 \right),\end{aligned}$$

что больше  $-2$ .

Второе число равно  $4\sqrt{3} - 9 = -2 - (2 - \sqrt{3})^2$ , что меньше  $-2$ .

**6.** Первое число больше.

Если  $a > 0$  и  $\varphi = \arctg a$ , то  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  и  $\tg \varphi = a$ . Значит,  
 $\ctg(\pi - \varphi) = -\frac{1}{a}$  и  $\frac{\pi}{2} < \pi - \varphi < \pi$ , поэтому  $\text{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi - \varphi$ ,  
и, следовательно,  $\arctg a + \text{arcctg}\left(-\frac{1}{a}\right) = \pi$  при всех  $a > 0$ .

Так как  $1 - \sqrt{2} = -\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$ , то первое число равно  $\pi$ . Так как  
 $\sqrt{3} < 1,76$ , то второе число  $\frac{7\sqrt{3}}{4} < 3,08 < \pi$ .

**7.**  $1 + \frac{\pi}{4}$ .

Область допустимых значений неравенства определяется си-

стемой

$$\begin{cases} \arcsin x \geq 0, \\ \arccos y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Если  $-1 \leq y \leq 0$ , то  $\arccos y \geq \frac{\pi}{2} \geq \arcsin x$ . Следовательно, весь квадрат  $\{0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$  площади 1 входит в искомое множество.

На оставшемся множестве  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  справедливы неравенства  $0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \arccos y \leq \frac{\pi}{2}$ , и, так как функция  $\sin t$  возрастает при  $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , получим равносильные неравенства

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y) \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Поэтому здесь в искомое множество входит четверть круга, площадь которой  $\frac{\pi \cdot 1^2}{4}$ .

Суммарно искомая площадь равна  $1 + \frac{\pi}{4}$ .

8.  $3\sqrt{3}$ .

Точки  $M$  и  $N$  расположены на стороне  $AC$  в следующем порядке:  $A, N, M, C$  (иначе угол  $B$  был бы больше  $180^\circ$ ).

Медиана  $BN$  прямоугольного треугольника  $ABM$  должна быть равна половине гипотенузы, т.е.  $BN = 2$ . Аналогично,  $BM = 2$ . Поэтому  $\triangle BNM$  – равносторонний со стороной 2, а треугольники  $ANB$  и  $BMC$  – равнобедренные с боковыми сторонами, равными 2, и углом при вершине  $120^\circ$ . Таким образом,  $\triangle ABC$  – равнобедренный с основанием 6 и высотой

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

9.  $\arctg 2$ .

Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $OCB_1$  (здесь  $BB_1$  – высота) следует  $\frac{AB}{OC} = \frac{BB_1}{CB_1} = \operatorname{tg} \angle C$ . Поэтому  $\operatorname{tg} \angle C = 2$ .

$$10. AB = 12, BC = \frac{5 + \sqrt{501}}{2}, \text{ либо } AB = \sqrt{229}, BC = 12.$$

Рассмотрим три возможных случая.

1) Углы  $A$  и  $C$  – острые. Тогда  $\angle C = 60^\circ$ , и высота  $BH$  равна 12. Но в этом случае  $CH = 6$ , и основание  $H$  высоты не может лежать на стороне  $AC$ .

2) Угол  $A$  тупой, а угол  $C$  острый. Тогда  $\angle C = 60^\circ$ ,  $AB = 12$ , и по теореме косинусов

$$144 = 25 + BC^2 - 5 \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{5 + \sqrt{501}}{2}.$$

3) Угол  $A$  острый, а угол  $C$  тупой. Тогда  $\angle C = 120^\circ$ ,  $BC = 12$ , и по теореме косинусов  $AB^2 = 229$ .

**11. 8.**

1. См. рис. 32. Касательная  $QA$  перпендикулярна диаметру  $AB$ . Сумма опирающихся на одну хорду вписанных углов  $\angle CAB$  и  $\angle CDB$ , как и сумма внутренних односторонних углов  $\angle CDB$  и  $\angle DBA$ , равна  $180^\circ$ , поэтому  $\angle CAB = \angle DBA$ , т.е. трапеция  $ABDC$  – равнобокая.

Тогда  $\triangle ABC = \triangle BAD$ , причем опирающиеся на диаметр углы  $\angle ACB$  и  $\angle BDA$  – прямые. Следовательно,  $\triangle BQA$  и  $\triangle BAD$  подобны как прямоугольные с общим углом, а  $\angle PBA = \angle DAB = \angle AQB$ .

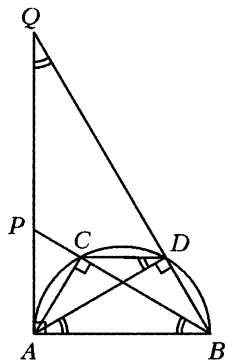


Рис. 32

Значит,  $\triangle BQA \sim \triangle PBA$ , т.е.  $\frac{AB}{AP} = \frac{AQ}{AB}$ . Отсюда  $AQ = \frac{AB^2}{AP} = 8$ .

2. Конфигурация, в которой меняются местами точки  $C$  и  $D$  (и, соответственно,  $P$  и  $Q$ ), невозможна, так как тогда тангенс угла  $B$  в трапеции  $ABCD$  равнялся бы  $\frac{1}{2}$ , т.е. этот угол был бы меньше  $30^\circ$ , и сумма внутренних односторонних углов при вершинах  $B$  и  $D$  трапеции оказалась бы меньше  $180^\circ$ .

**12. 4** корня:  $-\frac{5\pi}{6}$ ;  $-\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{2\pi}{3}$ .

Допустимые значения определяются условиями  $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin x \neq \frac{1}{2}$ , и поэтому на отрезке  $[-\pi; \pi]$ :  $x \neq \pm \frac{\pi}{6}$ ,  $x \neq \frac{5\pi}{6}$ .

Перепишем уравнение в виде

$$(2 \cos 4x + 1)(2 \sin x - 1) = (2 \sin 4x - \sqrt{3})(2 \cos x - \sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 3x - 4 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - 4 \sin \left( 4x - \frac{\pi}{6} \right) + 4 = 0.$$

Замена  $y = x + \frac{\pi}{3}$  приводит к уравнению

$$\sin 3y + \sin y + \cos 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 y \cos y (1 - 2 \sin y) = 0,$$

откуда  $\sin y = 0$ ,  $\cos y = 0$ ,  $\sin y = \frac{1}{2}$ . Получим три серии решений:  $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Непосредственный отбор дает четыре корня:  $-\frac{5\pi}{6}$ ;  $-\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{2\pi}{3}$ .

13.  $-\frac{3}{4} \leq a \leq \frac{11}{4}$ .

Изобразим решение системы на координатной плоскости.

Первое уравнение системы задает объединение двух дуг парабол:  $y = 3 - (x - 1)^2$ ,  $y \geq 1$  и  $y = (x - 1)^2 - 1$ ,  $y < 1$ .

Второе уравнение системы при  $b = 0$  определяет на плоскости прямую  $y = a$ , а при  $b \neq 0$  — два луча  $y = b(2x + 1) + a$ ,  $x \geq -\frac{1}{2}$  и  $y = -b(2x + 1) + a$ ,  $x < -\frac{1}{2}$  с общим началом в точке  $\left(-\frac{1}{2}; a\right)$ .

Прямая  $x = -\frac{1}{2}$  пересекает указанные дуги в точках  $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$  и  $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{11}{4}\right)$ . Поэтому, для того чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы общее начало лучей лежало на отрезке  $AB$ .

14. 7.

1)  $\sqrt{(\pi - 6x)(\pi + x)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}; -\pi$ . Но так как  $-\pi < -1$ , то для корня  $x = -\pi$  не определен  $\arcsin x$ , и только  $x = \frac{\pi}{6}$  является корнем исходного уравнения.

2)  $\sin(6 \arcsin x) = 0 \Leftrightarrow 6 \arcsin x = \pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ . Но так как  $x \leq \frac{\pi}{6}$ , то корнями исходного уравнения будут следующие пять чисел:  $0$ ;  $\pm \frac{1}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $-1$ .

3) Рассмотрим уравнение  $\frac{\sin x}{100} = 11 - 21x$ . На промежутке  $(-\infty; 0]$  корней нет, так как  $\frac{\sin x}{100} < 1 < 11 - 21x$ . Нет корней и на промежутке  $[1; +\infty)$ , так как  $\frac{\sin x}{100} > -1 > 11 - 21x$ . На промежутке  $(0; 1)$  уравнение имеет единственный корень  $x_0$ , так как левая часть уравнения — возрастающая функция, правая часть —

убывающая и, кроме того, при  $x = 0$ :  $\frac{\sin x}{100} = 0 < 11 - 21x$ , а при  $x = \frac{\pi}{6}$ :

$$\frac{\sin x}{100} = \frac{1}{200} > 11 - 21 \cdot \frac{\pi}{6} = 11 - 21x$$

(и соответственно получается, что  $x_0 < \frac{\pi}{6}$ ).

Неравенство  $\frac{1}{200} > 11 - 21 \cdot \frac{\pi}{6}$  выполняется, так как  $21 \cdot \frac{\pi}{6} > 11 - \frac{1}{200} \Leftrightarrow \pi > \frac{2199}{700} \Leftrightarrow \pi > 3,1415 > \frac{2199}{700}$  (последняя дробь равна 3,141428...).

$$15. \left[ 2 - \sqrt{6}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right].$$

Перепишем неравенство в виде:  $\sqrt{4-x} + 4 - x > \sqrt{x^2 - 5x + 2} + x^2 - 5x + 2$ . Так как функция  $h(t) = \sqrt{t} + t$  возрастает при  $t \geq 0$ , то  $4 - x > x^2 - 5x + 2 \geq 0$ . Решение первого неравенства в этой цепочке:  $x \in (2 - \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6})$ ; решение второго:  $x \in \left( -\infty; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right] \cup \left[ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; +\infty \right)$ . Пересечение полученных решений:  $x \in \left( 2 - \sqrt{6}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right]$ .

$$16. a = 7.$$

Так как  $|y| + |y - x| + |x - 1| \geq y - (y - x) - (x - 1) = 1$ , то первое неравенство может иметь решения лишь при  $a \geq 1$ . В этом случае оно равносильно системе неравенств

$$-\frac{a-1}{2} \leq y \leq \frac{a+1}{2}, \quad -\frac{a-1}{2} \leq x \leq \frac{a+1}{2}, \quad x - \frac{a+1}{2} \leq y \leq x + \frac{a-1}{2},$$

которая определяет на координатной плоскости шестиугольник, если  $a > 1$ , и треугольник, если  $a = 1$ .

Второе неравенство системы равносильно неравенству  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{49}{2}$  и потому определяет дополнение до всей плоскости внутренней части круга с центром  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  и радиусом  $\frac{7}{\sqrt{2}}$ .

Если  $a = 1$ , то система не имеет решений. Так как при  $a > 1$



вершины  $\left(-\frac{a-1}{2}; -\frac{a-1}{2}\right)$  и  $\left(\frac{a+1}{2}; \frac{a+1}{2}\right)$  большей диагонали шестиугольника являются наиболее удаленными от точки  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  среди всех точек шестиугольника, то в пересечении рассматриваемых множеств будет ровно две точки тогда и только тогда, когда окружность второго множества проходит через эти вершины. Точка  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  является серединой большей диагонали, а длина этой диагонали равна  $a\sqrt{2}$ . Следовательно,  $a\sqrt{2} = \frac{14}{\sqrt{2}}$ , т.е.  $a = 7$ .

**17.**  $(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$ .

Обозначив  $a = x - y$ , переформулируем задачу: «При каких значениях  $a$  уравнение  $2|x - 2a| = a^2 - 15 - x$  имеет решения?»

При  $x \leq a^2 - 15$  это уравнение равносильно объединению двух уравнений:  $2(x - 2a) = a^2 - 15 - x$  и  $2(x - 2a) = -a^2 + 15 + x$ . В первом из них получается корень  $x = \frac{a^2 + 4a - 15}{3}$ , для которого условие  $\frac{a^2 + 4a - 15}{3} \leq a^2 - 15$  выполняется при  $a \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$ . Во втором уравнении получается корень  $x = -a^2 + 4a + 15$ , для которого условие  $-a^2 + 4a + 15 \leq a^2 - 15$  выполняется при тех же значениях  $a$ . Таким образом, уравнение имеет корни при  $a \in (-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$ . Возможные значения  $x - y$  на 1 больше.

**18.** 2.

Для допустимых значений  $x > \frac{1}{2}$  имеем  $\log_3(x + 1) > 0$ .

Если  $\log_3(2x - 1) < 0$ , т.е.  $\frac{1}{2} < x < 1$ , то  $\log_3(2x^2 + x - 1) < \log_3 2 < 3$ , и потому  $3 - \log_3(2x^2 + x - 1) > 0$ , и левая часть уравнения отрицательна.

Таким образом, все три множителя левой части уравнения положительны, и корни следует искать только среди тех  $x$ , для которых

$$\{x > 1, 2x^2 + x - 1 < 27\} \Leftrightarrow x \in (1; 3,5).$$

Положим  $t = \log_3(x + 1)$ ,  $p = \log_3(2x - 1)$  и перепишем уравнение в виде

$$t \cdot p \cdot (3 - (t + p)) = 1, \text{ или } pt^2 - (3p - p^2)t + 1 = 0.$$

Так как  $p > 0$  и дискриминант этого уравнения равен  $D(p) = p(p-1)^2(p-4)$ , то  $p \in \{1\} \cup [4; +\infty)$ . Но при  $p \geq 4$  получаем  $x \geq 42$ . Поэтому  $p = 1$  и  $t = 1$ , что выполнено, только если  $x = 2$ .

## ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

### МАТЕМАТИКА

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений*

1. 4 часа.

Обозначим через  $v$  – скорость течения реки,  $w$  – скорость катера в неподвижной воде,  $u$  – скорость автобуса,  $S$  – расстояние от  $A$  до  $B$ . Из условий задачи нетрудно получить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{9}S = \frac{S}{w+v} + \frac{4}{9}S, \\ \frac{9}{8}S = \frac{S}{w+v} + \frac{S}{w-v} + \frac{7}{8}S, \\ \frac{S}{u} = \frac{S}{w+v} + \frac{16}{60}. \end{cases}$$

Введя новые переменные  $a = \frac{S}{u}$ ,  $b = \frac{S}{w+v}$ ,  $c = \frac{S}{w-v}$ , получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{9}a = b + \frac{4}{9}c, \\ \frac{9}{8}a = b + c + \frac{7}{8}b, \\ a = b + \frac{16}{60}. \end{cases}$$

Решая систему, найдем  $a = \frac{6}{15}$ ,  $b = \frac{2}{15}$ ,  $c = \frac{3}{15}$ , где  $a$  – время движения автобуса из пункта  $A$  в пункт  $B$ ,  $b$  – время движения

катера по течению реки из  $A$  в  $B$  и  $c$  – время движения катера против течения реки из  $B$  в  $A$ .

Значит, автобус в пункте  $A$  оказывается через каждые  $2 \cdot a = \frac{12}{15}$  ч, а катер через каждые  $b + c = \frac{5}{15}$  ч. Следовательно, одновременно в пункте  $A$  они окажутся через время  $t = \frac{\text{НОК}(12;5)}{15} = 4$  ч.

2.  $-2^{504}$ .

Пусть  $n$  – нечетное. Тогда справедливы равенства  $u_{n+4} = 3u_{n+3} - 2u_{n+2} = 3(u_{n+2} - u_{n+1}) - 2u_{n+2} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n - 3u_{n+1} = -2u_n$ . Следовательно,  $u_{2013} = u_{1+4 \cdot 503} = (-2)^{503} u_1 = -2^{504}$ .

$$3. \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \left( \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right), \\ \left( \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right), \left( \frac{7\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Возведем оба уравнения в квадрат и сложим. Получим следствие из исходной системы:  $4 \cos^6 y + 4 \sin^6 y = 1$ . Разделим полученное равенство на 4 и применим к левой части формулу суммы кубов. Имеем

$$\begin{aligned} (\cos^2 y + \sin^2 y)(\cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y) &= \frac{1}{4}, \\ \cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y &= \frac{1}{4}, \\ (\cos^2 y + \sin^2 y)^2 - 3 \cos^2 y \sin^2 y &= \frac{1}{4}, \\ 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2y = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \sin^2 2y = 1 \Leftrightarrow 2y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Разбивая полученное решение на 4 серии, получим ответ.

4. Согласно условию задачи, получим равенство

$$(f(x - 3 \cdot 2013) - 1)(f(x - 2013) - 1) = -2.$$

Разделим тождество  $(f(x - 2013) - 1)(f(x + 2013) - 1) = -2$  из условия на полученное равенство, тогда придем к равенству

$$\frac{f(x - 3 \cdot 2013) - 1}{f(x + 2013) - 1} = 1 \Leftrightarrow f(x - 3 \cdot 2013) - 1 = f(x + 2013) - 1,$$

откуда следует, что  $f(x + 4 \cdot 2013) = f(x)$ . Таким образом,  $4 \cdot 2013$  – период (возможно, не минимальный) функции  $f(x)$ , что и требовалось доказать.

5.  $\frac{3}{5}$ .

Очевидно, что следующие пары треугольников подобны (по двум углам):  $AME \sim CBM$  и  $DNE \sim BNC$  (рис.33). При этом, так как  $AE = ED$ , то их коэффициенты подобия равны между собой и равны  $\frac{AE}{BC} = \frac{ED}{BC} = 1,5$ . Следовательно,  $\frac{ME}{BM} = \frac{NE}{CN}$ , а тогда из обратной теоремы Фалеса следует, что  $MN \parallel BC$  и треугольники  $BEC$  и  $MEN$  подобны. Отсюда находим отношение

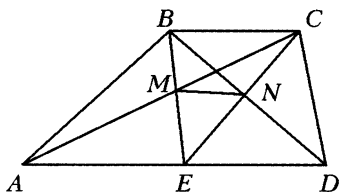


Рис. 33

$\frac{MN}{BC} = \frac{1,5}{1,5 + 1} = \frac{3}{5}$ , и  $MN = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}$ .

6. 4046131.

Из условия следует, что  $n + 2013 = 2012k$ ,  $n + 2012 = 2013t$ , где  $k$  и  $t$  – некоторые натуральные числа. Тогда, вычитая из первого второе, получим:

$$2012k - 2013t = 1.$$

Отсюда

$$2012k - (2012 + 1)t = 1, \quad 2012(k - t) = t + 1.$$

Следовательно, наименьшее натуральное число  $t$  с таким свойством равно 2011. И наименьшее натуральное  $n$  из условия задачи:  $n = 2013 \cdot 2011 - 2012 = 4046131$ .

7. Пусть  $ABC$  и  $CED$  – исходные треугольники.

Построение (рис.34):

1. Проведем прямые  $EL$  и  $BM$  параллельно  $AC$ .

2. Проведем прямую  $EM$  параллельно  $AB$ .

3.  $N = BE \cap LN$ .

Тогда площадь треугольника  $AND$  равна сумме площадей треугольников  $ABC$  и  $CED$ .

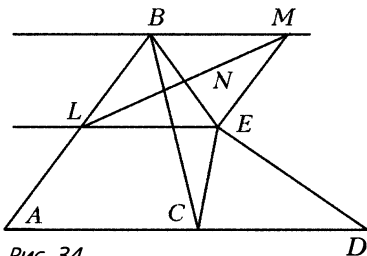


Рис. 34

**Обоснование:** несложно убедиться в том, что высота треугольника  $AND$  равна полусумме высот треугольников  $ABC$  и  $CED$  (проведенных из вершин  $N$ ,  $B$  и  $E$  соответственно). Учитывая, что  $AC = CD$ , получим

$$\begin{aligned} S_{AND} &= \frac{1}{2} AD \cdot h = \frac{1}{2} AD \cdot \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} AD \cdot h_1 + \frac{1}{4} AD \cdot h_2 = \frac{1}{2} AC \cdot h_1 + \frac{1}{2} CD \cdot h_2 = S_{ABC} + S_{CED}. \end{aligned}$$

8. Пусть  $k$  – число различных дорог в стране. Посчитаем суммарное количество дорог в стране с учетом повторений. Будем идти по всем городам и считать количество дорог, их соединяющих. Так как из каждого города выходит ровно три дороги, то суммарное количество дорог с учетом повторений равно  $3n$ . В то же время, каждая дорога соединяет два города, а значит, при таком подсчете она учтется дважды, стало быть,  $3n = 2k$ . Следовательно,  $n$  четное.

Приведем пример построения такой конструкции для произвольного четного  $n$ . Пусть на плоскости изображен выпуклый  $n$ - угольник (при четном  $n$ ). Пронумеруем его вершины числами

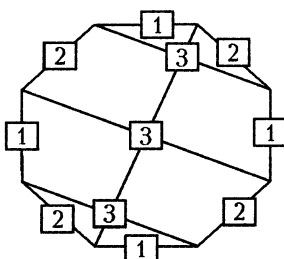


Рис. 35

1, 2, 3, 4, ..., а стороны последовательно цифрами 1, 2, 1, 2, 1... Соединим отрезками вершины с номерами  $i + 1$  и  $n - i + 1$  при  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$ . Эти отрезки пронумеруем цифрой 3. Остается соединить дорогой с номером 3 вершины 1 и  $\frac{n}{2} + 1$  (рис.35).

9. Опишем маршрут движения путешественника последовательностью  $b_i = (A_i, s_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , где  $A_i$  – город, посещенный на  $i$ -м шаге,  $s_i$  – номер дороги-выезда из города  $A_i$ , и при этом  $A_0 = A$ ,  $s_0 = 1$ . Количество всевозможных пар  $b_i = (A_i, s_i)$  равно  $3n$ , следовательно, на маршруте движения  $b_0, b_1, b_2, \dots$  начнутся повторения.

Предположим, что в город  $A$  путешественник не вернется. Тогда, поскольку на маршруте начнутся повторения, то найдутся натуральные числа  $k$  и  $t$  такие, что выполняются условия  $b_t = b_k$  при  $1 \leq k \leq t - 1$  и  $b_i \neq b_j$  ( $i \neq j$ ) при всех  $i, j \in \{1, \dots, t - 1\}$  (другими словами, первый повтор членов последовательности  $b_i = (A_i, s_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}_0$ , произошел на шаге с номером  $t$ ). Но тогда в город  $A_k$  путешественник попадает из города  $A_{k-1}$  по дороге

с номером  $s_{k-1}$ , а затем из города  $A_{t-1}$  по дороге с номером  $s_{t-1}$ . При этом дальнейший маршрут движения в город  $A_{k+1}$  одинаковый. Тогда ввиду однозначности маршрута номера дорог, по которым попадаем в город  $A_k$ , совпадают. Так как в каждый город ведут дороги с различными номерами, то города  $A_{k-1}$  и  $A_{t-1}$  совпадают. Но тогда  $b_{k-1} = b_{t-1}$ . Получили противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. А значит, утверждение доказано.

### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1.  $-\sqrt{5}$ .

$$\sqrt{3x^2 - 10} + x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 10 \geq 0, \\ \sqrt{3x^2 - 10} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0, \\ 3x^2 - 10 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq 0, \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}.$$

2.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$1 - \sin 2x = 4(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = 4(\cos x - \sin x).$$

Сделав замену  $\cos x - \sin x = t$ , получим

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = t^2 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 - t^2.$$

Тогда

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = t, \\ t^2 = 4t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3.  $x \in [\log_4 5; +\infty)$ .

$$\log_x \log_4 (16^x - 20) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 16^x - 20 > 0, \\ \log_4 (16^x - 20) > 0, \\ \log_x \log_4 (16^x - 20) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x > \log_{16} 20, \\ 16^x - 20 > 1, \\ \log_x \log_4 (16^x - 20) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_{16} 21, \\ \log_x \log_4 (16^x - 20) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_{16} 21, \\ \log_4 (16^x - 20) \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (\log_{16} 21; +\infty), \\ 16^x - 4^x - 20 \geq 0. \end{cases}$$

Сделаем замену  $4^x = t$ , получим

$$t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4, \\ t = 5, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} x \in (\log_{16} 21; +\infty), \\ 4^x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (\log_{16} 21; +\infty), \\ x \geq \log_4 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [\log_4 5; +\infty).$$

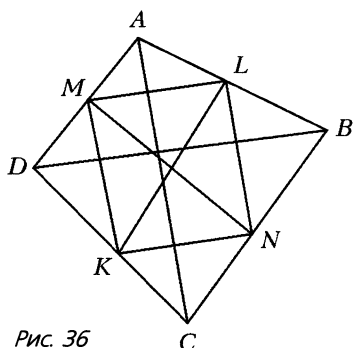


Рис. 36

#### 4. 1.

Пусть  $M, N, K$  и  $L$  – середины соответствующих сторон (рис. 36). Тогда  $ML \parallel DB \parallel KN$ , так как  $ML$  и  $KN$  – средние линии треугольников  $ADB$  и  $CDB$  соответственно. Аналогично,  $MK \parallel AC \parallel LN$ . Следовательно, четырехугольник  $MLNK$  – параллелограмм.

Так как  $AC \perp DB$ , то четырехугольник  $MLNK$  – прямоугольник, и тогда его диагонали равны. А так как по условию одна из них равна 1, то и вторая имеет ту же длину.

#### 5. 30 г/ч.

Пусть  $x$  (г/ч) – масса топлива, которую первый двигатель расходует в час;  $y$  (г/ч) – масса топлива, которую второй двигатель расходует в час;  $t$  (ч) – время совместной работы двигателей. Требуется определить  $x$ .

На основании условий можно выписать следующую систему ограничений:

$$\begin{cases} x > 0, y > 0, t > 0, \\ x(t+2) = 300, \\ yt = 192, \\ y = x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0, t > 0, \\ y = x - 6, \\ x(t+2) = 300, \\ (x-6)t = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0, t > 0, \\ y = x - 6, \\ t = \frac{192}{x-6}, \\ x\left(\frac{192}{x-6} + 2\right) = 300 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0, t > 0, \\ y = x - 6, \\ t = \frac{192}{x - 6}, \\ x^2 - 60x + 900 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30, \\ y = 24, \\ t = 8. \end{cases}$$

6.  $(-\infty; -3]$ .

При  $x < 0$  второе уравнение системы принимает вид  $0 = 2$ , поэтому  $x \geq 0$ . Тогда

$$\begin{cases} y = \frac{-x + 2a - 2}{4}, \\ 2x\left(\frac{-x + 2a - 2}{4} - a\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-x + 2a - 2}{4}, \\ x^2 + 2(a + 1)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решения тогда и только тогда, когда входящее в нее квадратное уравнение имеет дискриминант  $D \geq 0$  (или, что то же самое,  $\frac{D}{4} = (a + 1)^2 - 4 = a^2 + 2a - 3 \geq 0$ ), и больший ее корень равен  $x_2 = -(a + 1) + \left(\sqrt{a^2 + 2a - 1}\right) \geq 0$ . Получим

$$\begin{cases} a^2 + 2a - 3 \geq 0, \\ -(a + 1) + \left(\sqrt{a^2 + 2a - 3}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 3 \geq 0, \\ a + 1 < 0; \\ a^2 + 2a - 3 \geq 0, \\ a + 1 \geq 0, \\ a^2 + 2a - 3 \geq (a + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty), \\ a \in (-\infty; -1); \\ a \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty), \\ a \in [-1; +\infty), \\ -1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -3].$$



## ФИЗИКА

*Межрегиональная олимпиада школьников на базе  
ведомственных образовательных учреждений*

1. Запишем зависимости путей, пройденных кошкой и мышкой, от времени, учтя, что мышка опережала кошку:

$$s_k = v_k t, \\ s_m = \frac{1}{8} \cdot 2\pi R + v_m t.$$

Условие, что расстояние между кошкой и мышкой равно половине длины окружности, имеет вид

$$s_m - s_k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R.$$

Отсюда получим

$$t = \frac{3\pi R}{4(v_m - v_k)} = 4,2 \text{ с}.$$

2. Обозначим силу натяжения нити через  $T$  (она постоянна вдоль всей длины нити, так как нить и блоки невесомы и трения нет), а силу нормального давления груза 3 на груз 1 – через  $N$ . Центр масс системы грузов по горизонтали не перемещается. Поэтому при движении системы груз 2 смещается влево, а груз 3 вместе с грузом 1 – вправо, причем груз 1 смещается еще и вниз. Отсюда следует, что смещения грузов 1 и 3 по горизонтали одинаковы:

$$x_1 = x_3.$$

Из нерастяжимости нити следует, что смещение груза 1 по вертикали равно по величине и противоположно по знаку смещению груза 2 относительно груза 3 в горизонтальном направлении:

$$y_1 = -x_{2\text{отн}}.$$

В свою очередь,

$$x_{2\text{отн}} = x_2 - x_3 = x_2 - x_1.$$

Отсюда следуют такие уравнения кинематических связей:

$$a_{1x} = a_{3x}, \quad a_{1y} = a_{1x} - a_{2x}.$$

Уравнения движения тел системы в проекциях на оси координат имеют вид

$$ma_{1x} = N, \quad ma_{1y} = mg - T, \quad ma_{2x} = -T, \quad ma_{3x} = T - N.$$

Решая полученную систему уравнений, находим проекции ускорения первого груза:

$$a_{1x} = \frac{g}{2}, \quad a_{1y} = \frac{3g}{5}.$$

Следовательно, ускорение груза 1 равно по величине

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = g\sqrt{\frac{2}{5}}$$

и направлено вниз под углом к горизонту

$$\alpha = \arctg \frac{a_{1y}}{a_{1x}} = \arctg 3.$$

**3.** Запишем закон сохранения энергии для случая, когда вторая тележка отталкивается от стены:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

законы сохранения импульса и энергии для системы трех тележек, когда отпустили первую пружину:

$$0 = -mv_1 + 2mv_2',$$

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{2mv_2'^2}{2},$$

где  $v_1$  – скорость первой тележки, а  $v_2'$  – скорость второй и третьей тележек после того, как отпустили первую пружину, а также законы сохранения импульса и энергии для системы второй и третьей тележек, когда отпустили вторую пружину:

$$2mv_2' = -mv_2 + mv_3,$$

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{2mv_2'^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{mv_3^2}{2},$$

где  $v_2$  – скорость второй тележки, а  $v_3$  – скорость третьей тележки после того, как отпустили вторую пружину. В результате алгебраических преобразований находим

$$v_3 = \frac{v}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

**4.** После соединения проводником произойдет поляризация зарядов крайних пластин, и их потенциалы станут равными. Тогда работа, которую совершит электрическое поле над пробным зарядом при его перенесении с одной крайней пластины на другую (например, с левой на правую), должна быть равна нулю.

Пусть заряд левой пластины после соединения будет  $q$ , а заряд правой будет  $-q$  (знак заряда нам заранее не известен). Согласно принципу суперпозиции, напряженность электрического поля и в области между левой и центральной пластинами, и в области между центральной и правой пластинами есть векторная сумма напряженностей полей, созданных зарядами  $q$ ,  $Q$  и  $-q$ . Поэтому для проекции вектора суммарного поля на горизонтальную ось  $x$  в области между левой и центральной пластинами и в области между центральной и правой пластинами имеем

$$E_{1x} = \frac{q}{2S\epsilon_0} - \frac{Q}{2S\epsilon_0} - \frac{-q}{2S\epsilon_0} = \frac{2q - Q}{2S\epsilon_0},$$

$$E_{2x} = \frac{q}{2S\epsilon_0} + \frac{Q}{2S\epsilon_0} - \frac{-q}{2S\epsilon_0} = \frac{2q + Q}{2S\epsilon_0}.$$

Если перенести пробный заряд  $\Delta q$  с левой пластины на правую, то электрическое поле совершит над этим зарядом работу

$$A = \Delta q(\varphi_{\text{л}} - \varphi_{\text{п}}) = \Delta q E_{1x} d_1 + \Delta q E_{2x} d_2,$$

где  $\varphi_{\text{л}}$  и  $\varphi_{\text{п}}$  – потенциалы левой и правой пластин соответственно. Подставляя в выражение для работы напряженности полей  $E_{1x}$  и  $E_{2x}$  и приравнявая ее к нулю (потенциалы пластин после соединения одинаковы), получим

$$\frac{(2q - Q)d_1}{2S\epsilon_0} + \frac{(2q + Q)d_2}{2S\epsilon_0} = 0.$$

Отсюда найдем

$$q = \frac{Q(d_1 - d_2)}{2(d_1 + d_2)}.$$

Из полученного соотношения следует, что если  $d_1 > d_2$ , то знак заряда левой пластины совпадает со знаком заряда  $Q$ , если  $d_1 < d_2$  – то противоположен. Если же  $d_1 = d_2$ , крайние пластины не заряжены (этот результат можно было ожидать заранее: в симметричной ситуации отсутствует выделенное направление, в котором могли бы перемещаться заряды).

**5.** Поскольку через ветвь, содержащую конденсатор, постоянный электрический ток не течет, сопротивление всей электрической цепи равно  $2R + r$ . По закону Ома для замкнутой электрической цепи находим ток в цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R + r},$$

а по закону Ома для однородного участка цепи находим разность

потенциалов между точками разветвления цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR = \frac{\mathcal{E}R}{2R + r}.$$

Разность потенциалов на конденсаторе такая же, как и между точками разветвления цепи. Поэтому заряд конденсатора равен

$$Q = (\varphi_1 - \varphi_2)C = \frac{\mathcal{E}RC}{2R + r} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

6. Обозначим буквами  $A$  и  $B$  начальную и конечную автобусные остановки, буквой  $C$  – точку, откуда остановочный павильон  $B$  казался в  $k$  раз ниже павильона  $A$ , буквой  $D$  – точку, откуда остановочный павильон  $A$  казался в  $k$  раз ниже павильона  $B$ . Поскольку видимый размер павильона обратно пропорционален расстоянию до него, то справедливы следующие пропорции:

$$\frac{AC}{CD + DB} = \frac{1}{k}, \quad \frac{DB}{AC + CD} = \frac{1}{k}.$$

Из них получаем

$$\frac{AC}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k+1} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{DB}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k+1} = \frac{DB}{AB}.$$

С другой стороны,

$$CD = AB - AC - DB,$$

откуда

$$\frac{CD}{AB} = 1 - \frac{AC}{AB} - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k-1}{k+1}.$$

Теперь, учитывая, что  $CD = L$ , находим

$$AB = \frac{k+1}{k-1} L = 500 \text{ м}.$$

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

1.  $v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = 10 \text{ м/с}.$

2.  $A = \nu RT$  (где  $\nu = 1$  моль).

3.  $E = \sqrt{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} = 6,1 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$

4.  $R = \frac{m_p v}{eB} \approx 1,04 \cdot 10^{-2}$  м (здесь  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг – масса протона,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд протона).

5.  $f = \frac{r\sqrt{3}}{Dr\sqrt{3} + 1} = 6 \cdot 10^{-2}$  м (источник света – мнимый, находящийся на расстоянии  $r \operatorname{ctg} \alpha$  за линзой, а изображение – действительное, находящееся на расстоянии  $f$  за линзой).

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Олимпиада-2013

I тур

Вариант 1

1.  $l = v_0 t \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} = 10$  м.

2.  $v_1 > v_2$  (из данного графика следует, что жесткость пружины у первого маятника больше, чем у второго).

3. Предположим, что в пластине симметрично первому квадрату вырезан второй. Тогда центр масс оставшейся части пластины будет расположен в ее геометрическом центре, т.е. в точке  $O$ . Центр масс мысленно вырезанного второго квадрата пластины находится на расстоянии  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$  от точки  $O$ . Если  $M$  – масса целой пластины, а  $m$  – масса вырезанной ее части, то положение центра масс пластины с вырезанным квадратом определится из соотношения

$$(M - m)x = m \left( \frac{a\sqrt{2}}{4} - x \right),$$

где  $x$  – расстояние искомого центра масс от точки  $O$ . Учитывая, что  $m/M = 1/4$  (массы относятся как площади соответствующих частей пластины), получим

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{12}.$$

Силу натяжения нити  $T_2$  найдем из уравнения моментов отно-

сительно точки  $O$ :

$$T_2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} Mg \frac{a\sqrt{2}}{12},$$

откуда

$$T_2 = \frac{Mg}{8}.$$

4. Если брусок массой  $2m$  остается неподвижным при смещении на  $x$  бруска массой  $m$ , то сила  $F$  совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массой  $m$  обращается в ноль):

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx,$$

откуда

$$F = \frac{kx}{2} + \mu mg.$$

Уравнение движения для второго бруска имеет вид

$$2ma = kx - \mu \cdot 2mg.$$

Этот брусок сдвинется при условии  $a > 0$ , т.е.

$$kx > \mu \cdot 2mg.$$

Минимальное значение силы получим, если положим  $kx = \mu \cdot 2mg$ .

Таким образом,

$$F_{\min} = \frac{\mu \cdot 2mg}{2} + \mu mg = 2\mu mg.$$

5. В соответствии с законом сохранения импульса, скорость слипшихся шариков общей массой  $3m$  сразу после удара равна

$$u = \frac{2mv_0}{m + 2m} = \frac{2v_0}{3}.$$

Из второго закона Ньютона находим натяжение нити:

$$T = 3m \left( \frac{u^2}{L} + g \right) = 3m \left( \frac{4v_0^2}{9L} + g \right).$$

$$\begin{aligned} 6. \quad Q = \Delta U + A &= \frac{3}{2} p_1 (V_2 - V_1) + \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \\ &= \left( 2p_1 + \frac{p_2}{2} \right) (V_2 - V_1) = 1300 \text{ Дж.} \end{aligned}$$

$$7. A = -q(\varphi_B - \varphi_D) = -q \left( \frac{q_A + q_C}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{q_A + q_C}{4\pi\epsilon_0 a/2} \right) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

8. Магнитная индукция равна  $B = \frac{E}{v}$  и направлена вниз по оси  $y$ .

9.  $Q = \frac{C_{\text{бат}} U^2}{2}$ , где  $C_{\text{бат}} = 3C + C = 4C$ ,  $U$  найдем из равенства  $F = qE = (3CU) \left( \frac{U/2}{d} \right)$ , окончательно  $Q = \frac{4}{3} Fd$ .

$$10. q = \frac{|\Delta B| S}{R} = \frac{0,1 \text{ Тл} \cdot 10^{-2} \text{ м}^2}{10^{-2} \text{ Ом}} = 0,1 \text{ Кл}.$$

Вариант 2

$$1. v_x = -A\omega \sin \omega t, \quad v_y = A\omega \cos \omega t,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A\omega = 0,3 \text{ м/с};$$

$$a_x = -A\omega^2 \cos \omega t, \quad a_y = -A\omega^2 \sin \omega t,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = A\omega^2 = 0,9 \text{ м/с}^2.$$

2.  $V = \frac{P}{(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{в}})g} = 0,147 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  (здесь  $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды).

$$3. F_{\min} = \frac{mg}{2} = 5 \text{ Н}; \quad \mu \geq 0,5.$$

4. Пусть  $x$  – суммарное сжатие пружин в некоторый момент времени. По закону сохранения энергии,

$$mg(H - L + x) = \frac{mv^2}{2} + \frac{k_{\text{эКВ}} x^2}{2}, \quad \text{где } k_{\text{эКВ}} = \frac{k \cdot 2k}{k + 2k} = \frac{2}{3} k.$$

Максимальную скорость шарик имеет при сжатии, равном  $x_0$ , которое находим из условия

$$k_{\text{эКВ}} x_0 = mg.$$

Отсюда находим

$$v_{\max} = \sqrt{2g(H - L) + \frac{mg^2}{k_{\text{эКВ}}}} = \sqrt{2g(H - L) + \frac{3mg^2}{2k}}.$$

$$5. A = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{2W}{m}} = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

$$6. Q = \Delta U_{41} + A = \frac{3}{2} p_1 V_2 - \frac{3}{2} p_1 V_1 + p_2 (V_2 - V_1) = \\ = \left( \frac{3}{2} p_1 + p_2 \right) (V_2 - V_1) = 3,35 \text{ кДж}.$$

$$7. A = q\varphi_0 = q(\varphi_1 + \varphi_2) = q \left( \frac{\tau \cdot 2\pi R}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{2\tau \cdot 2\pi \cdot 2R}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} \right) = -\frac{q\tau}{2\epsilon_0}.$$

$$8. \frac{r_1}{r_2} = \frac{m_1}{m_2} \frac{v_1}{v_2} \frac{q_2}{q_1} = 16.$$

$$9. F = q \frac{E_1}{2} = q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U_1}{d} = \frac{q}{2d} \frac{q}{C_1} = \frac{q^2}{2dC_1} = \\ = \frac{\left( \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \right)^2}{2dC_1} = \frac{C_0 \epsilon_0^2}{9d}.$$

$$10. q = I \Delta t = \frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \Delta t = \frac{1}{R} B (S_{\text{кр}} - S) = \frac{B}{R} \left( \pi \left( \frac{2\sqrt{S}}{\pi} \right)^2 - S \right) = \\ = \frac{4 - \pi}{\pi} \frac{BS}{R}.$$

Вариант 3

$$1. \Delta r_x = \frac{1}{4} \pi v_0 t_0.$$

2. См. рис.37.

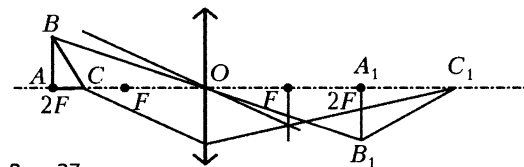


Рис. 37

$$3. T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \alpha}{g + a}}.$$

$$4. \mu_2 = \frac{\cos \alpha - 2\mu_1 \sin \alpha}{\mu_1 \cos \alpha} = 0,85.$$

5. При подъеме поршня вода поднимается за ним только до высоты  $h = 10$  м. Работа, совершаемая при этом, равна

$$A_1 = \frac{\rho S h^2 g}{2}.$$



При дальнейшем движении поршня работа, совершаемая против сил атмосферного давления, равна

$$A_2 = p_0 S (H - h).$$

Общая работа равна

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\rho S h^2 g}{2} + p_0 S (H - h) = 10^4 \text{ Дж.}$$

6.  $\rho = \frac{Mp}{RT} = 0,091 \text{ кг/м}^3$  (здесь  $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса воды).

$$7. A = -3qEL = -3q \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{2}L = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{q\sigma L}{\epsilon_0}.$$

8.  $m = kq = \frac{M}{Fn} \left( \frac{I_0 + I_t}{2} t \right) = 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 0,13 \text{ г}$  (здесь  $M = 64 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса меди,  $F = 96500 \text{ Кл/моль}$  – постоянная Фарадея,  $n = 2$  – валентность меди).

9. На нижний брусок со стороны плоскостей действуют силы трения

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 \frac{m_1 + m_2}{L} (L - x)g \text{ и } F_{\text{тр}2} = \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{L} xg,$$

где  $x = \frac{L}{5}$  – длина части бруска, въехавшей на правую полуплоскость. Под действием результирующей силы трения

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2}$$

оба бруска получают ускорение

$$a = \frac{F_{\text{тр}}}{m_1 + m_2} = \frac{g}{L} (\mu_1 (L - x) + \mu_2 x).$$

Проскальзывание верхнего бруска начинается при условии

$$a = \mu g.$$

Отсюда находим коэффициент трения  $\mu$  между брусками:

$$\mu = \frac{\mu_1 (L - x)}{L} + \frac{\mu_2 x}{L} = 0,3.$$

10. Мощность электромотора равна мощности батареи минус мощность тепловых потерь в цепи:

$$P = I\mathcal{E} - I^2 R = I\mathcal{E} - I^2 \frac{\mathcal{E}}{I_0} = I\mathcal{E} \left( 1 - \frac{I}{I_0} \right) = 8 \text{ Вт.}$$

## II Тур

### Вариант 1

1. Кинетическая энергия материальной точки, совершающей малые колебания, равна

$$W = \frac{mv^2}{2}, \text{ где } v = v_m \cos \omega t.$$

По условию задачи,

$$\frac{W}{W_m} = \frac{v^2}{v_m^2} = \frac{1}{2}, \text{ и } v = \frac{v_m}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда находим

$$\cos \omega t = \frac{v}{v_m} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ и } t = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4\omega}.$$

2.  $\alpha = \arctg n = \arctg 1,5.$

3.  $T = \frac{L}{d+r} mg.$

4.  $p = p_b + p_k + p_a = \frac{m_b}{M_b} \frac{RT}{V} + \frac{m_k}{M_k} \frac{RT}{V/3} + \frac{m_a}{M_a} \frac{RT}{(2/3)V} =$   
 $= 2,7 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (\text{здесь } M_b = 2 \text{ г/моль}, \quad M_k = 32 \text{ г/моль},$   
 $M_a = 28 \text{ г/моль} - \text{молярные массы водорода, кислорода, азота}$   
 $\text{соответственно}).$

5.  $\Delta Q = Q_1 - Q_2 = (C_p - C_v) \frac{m}{M} \Delta T = R \frac{m}{M} \Delta T, \text{ и } M = \frac{mR\Delta T}{\Delta Q} =$   
 $= 0,028 \text{ кг/моль}.$

6.  $\varphi = \frac{q\sqrt{5}}{10\pi\epsilon_0 R}.$

7. Во внешнем контуре течет ток

$$I = \frac{2\varepsilon - \varepsilon}{2R + R} = \frac{\varepsilon}{3R}.$$

Для правого внутреннего контура (направление обхода контура выбираем против часовой стрелки) запишем

$$U + I \cdot 2R = \varepsilon + 2\varepsilon,$$

где  $U$  – напряжение на конденсаторе. Отсюда находим заряд конденсатора:

$$q = CU = \frac{7}{3} C\varepsilon.$$

8. В соответствии с законом Эйнштейна для фотоэффекта,

$$h \frac{c}{\lambda} = A + \frac{mv^2}{2}.$$

По второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R} = evB$$

(где  $m$  и  $e$  – масса и заряд электрона). Отсюда находим искомый радиус окружности:

$$R = \frac{1}{eB} \sqrt{2m \left( \frac{hc}{\lambda} - A \right)}.$$

9. В соответствии с законом сохранения энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ и } v = \sqrt{2gh}.$$

Горизонтальная плоскость гладкая, поэтому, в соответствии с законом сохранения импульса,

$$mv = (m + M)u, \text{ и } u = \frac{m}{m + M} v.$$

В процессе торможения шайбы доска движется равноускоренно, следовательно,

$$u = at, \text{ где } a = \frac{F_{\text{тр}}}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

Отсюда находим  $t = \frac{u}{a} = \frac{M}{(m + M)\mu} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,5 \text{ с}.$

$$10. \quad h\nu = E_4 - E_2 = \frac{E_1}{4^2} - \frac{E_1}{2^2}, \text{ и } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{ch}{\frac{E_1}{16} - \frac{E_1}{4}} = 4,89 \cdot 10^7 \text{ м}.$$

Вариант 2

$$1. \quad \lambda = \frac{3}{2} \lambda_{\text{ф}} = 600 \text{ нм}.$$

$$2. \quad \lambda = cT, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad C = C_1 + C_2, \quad L = \frac{\epsilon}{dI/dt}, \quad \text{и}$$

$$\lambda = 2\pi\epsilon \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{dI/dt}} = 461 \text{ м}.$$

3. Масса однородной плоской фигуры пропорциональна ее площади. Дополним фигуру  $ABDK$  треугольником  $BDK$ , обозначив его массу  $m_1$ . Тогда

$$\frac{m + m_1}{m_1} = \frac{h}{h_1} = 6, \text{ и } m_1 = \frac{m}{5}.$$

Обозначим центр масс фигуры  $ABDK$  точкой  $S$ , треугольника  $ABK$  – точкой  $G$ , а треугольника  $BDK$  – точкой  $C_1$ . Известно, что центр масс равнобедренного треугольника лежит на высоте, проведенной к его основанию, и делит ее в отношении 2:1, считая

от вершины. Поэтому

$$AG = \frac{m \cdot AC + m_1 \cdot AC_1}{m + m_1} = \frac{2}{3}h, \quad AC_1 = h - \frac{1}{3}h_1 = \frac{17}{18}h, \text{ и}$$

$$AC = \left( \frac{2}{3}h(m + m_1) - m_1 \cdot AC_1 \right) \frac{1}{m} = \frac{11}{18}h.$$

Используя условие равновесия пластины

$$Th = mg \cdot AC,$$

находим силу натяжения нити:

$$T = \frac{mg \cdot AC}{h} = \frac{11}{18}mg.$$

4. Координаты точки пересечения струй определяются кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} x &= v_1 t_1 = v_2 t_2, \\ y &= h + \frac{gt_1^2}{2} = 2h + \frac{gt_2^2}{2}, \end{aligned}$$

где

$$v_1 = \sqrt{2gh}, \quad v_2 = \sqrt{2g \cdot 2h} = 2\sqrt{gh}.$$

Отсюда находим

$$x = v_1 t_1 = 2\sqrt{2}h.$$

5. Подводимое к газу количество теплоты идет на изменение внутренней энергии газа и на изменение потенциальной энергии сжатой пружины:

$$Q = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2),$$

где  $\nu$  – число молей газовой смеси,  $k$  – жесткость пружины,  $x$  – величина деформации пружины. Состояние идеального газа описывается уравнением

$$pV = \nu RT.$$

Из условия равновесия поршня следует, что

$$p = \frac{F}{S} = \frac{kx}{S}.$$

Кроме того,

$$V = xS.$$

Отсюда находим теплоемкость системы:

$$C = 2\nu R = 8R.$$

6. Кинетическая энергия частиц на бесконечности равна сумме потенциальной энергии их электростатического взаимодействия на минимальном расстоянии  $r$  и кинетической энергии этих частиц при движении со скоростью их центра масс:

$$\frac{m(v)^2}{2} + \frac{m(3v)^2}{2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{2m}{2} v_{\text{ц}}^2,$$

где скорость центра масс частиц равна

$$v_{\text{ц}} = \frac{m \cdot 2v - m \cdot 3v}{2m}.$$

Отсюда после преобразований получим

$$r = \frac{q^2}{25\pi\epsilon_0 m v^2}.$$

7. Обозначим заряды конденсаторов емкостями  $C$ ,  $2C$  и  $3C$  через  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$  соответственно (рис.38). Предположим, что

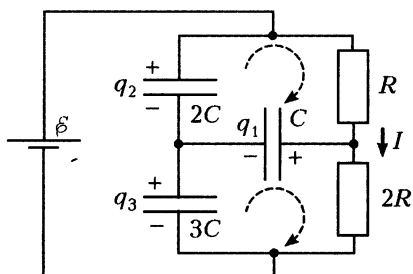


Рис. 38

знаки зарядов на пластинах конденсаторов соответствуют указанным на рисунке. Падения напряжения на сопротивлениях  $R$  и  $2R$  равны  $\frac{\epsilon}{3}$  и  $\frac{2\epsilon}{3}$  соответственно. Вследствие потенциальности электрического поля для любого замкнутого контура работа сил поля по перемещению заряда

вдоль контура равна нулю, т.е.  $\sum U_i = 0$ . Из закона сохранения заряда  $\sum q_i = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{2C} + \frac{\epsilon}{3} &= 0, \\ -\frac{q_1}{C} - \frac{q_3}{3C} + \frac{2}{3}\epsilon &= 0, \\ -q_1 - q_2 + q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, находим

$$q_1 = \frac{2}{9}\epsilon C.$$

8. Из условия равновесия кольца

$$I\pi R^2 B = mgR$$

находим

$$I = \frac{mg}{\pi RB}.$$

$$9. a_{ц} = \frac{(2m - m)^2}{(2m + m)^2} g = \frac{1}{9} g.$$

10. Параллельный главной оптической оси пучок света проходит линзу, затем отражается от зеркального покрытия и снова проходит линзу. С помощью формулы линзы и законов отражения света от плоского зеркала находим, что выходящий из линзы пучок пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии  $F/2$  от линзы, образуя с осью угол  $\alpha = 30^\circ$ . Абсолютная величина суммарного импульса фото-

нов, падающих на линзу, равна  $p_1 = \frac{E}{c}$ ,

а импульс пучка на выходе из линзы

равен  $p_2 = \frac{E}{2c}$ . На рисунке 39 изображена векторная диаграмма, на которой

построен вектор изменения импульса фотонов после прохождения линзы:

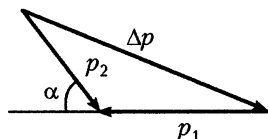


Рис. 39

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

Изменение импульса фотонов по абсолютной величине равно

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos \alpha} = \frac{E}{2c} \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}.$$

Средняя сила, которая действовала на фотоны, равна

$$F_{\Phi} = \frac{\Delta p}{\tau} = \frac{E\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{2\tau c} \approx 1,9 \cdot 10^{-4} \text{ Н}.$$

Сила, равная ей по величине, но направленная в противоположную сторону, и есть средняя сила, которая действует на линзу со стороны фотонов.

Вариант 3

$$1. u = 0,09v_0.$$

2. Второй закон Ньютона для частицы в области  $x > 0$  будет иметь вид

$$ma_x = -q\beta x, \quad ma_y = 0.$$

Уравнение

$$a_x = -\frac{q\beta}{m} x$$

описывает колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{q\beta}{m}},$$

а линия  $x = 0$  на плоскости соответствует положениям равновесия, поэтому частица выйдет из области  $x > 0$  через половину периода, т.е.

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Для колебаний вдоль оси  $x$

$$v_{x \max} = v_0 \cos \alpha = \omega L.$$

Откуда находим

$$v_0 = \frac{\pi L}{t \cos \alpha}.$$

$$3. \quad n = \sqrt{\frac{F_m}{2\pi m R}}.$$

$$4. \quad h = \sqrt{H_1 H_2}.$$

5. На большом расстоянии от точек  $A$  и  $B$  положительно заряженная частица будет отталкиваться, поэтому она будет тормозиться. Справа от точки  $B$  есть точка  $C$ , в которой отталкивание сменится притяжением. В этой точке сила притяжения к заряду в точке  $B$  уравнивает силу отталкивания от заряда в точке  $A$ . Пусть  $x$  – расстояние от точки  $B$  до точки  $C$ . Тогда

$$k \frac{4q^2}{(L+x)^2} = k \frac{q^2}{x^2}, \text{ и } x = L.$$

Найдем начальную скорость  $v_0$ , при которой частица сможет долететь до точки  $C$ . Так как механическая энергия сохраняется, то

$$\frac{mv_0^2}{2} = -k \frac{q^2}{L} + k \frac{4q^2}{2L},$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{mL}} = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 mL}}.$$

При  $v > v_0$  частица сможет долететь до точки  $B$ .

6. Емкость плоского воздушного конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Сопrotивление стекляннoгo слoя, зaпoлняющeгo прoстpaнствo мeждy oбклaдкaми, рaвнo

$$R = \rho \frac{d}{S} = \rho \epsilon_0 \frac{d}{\epsilon_0 S} = \frac{\rho \epsilon_0}{C}.$$

Мoщнoсть тeплoвыдeлeния рaвнa

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{CU^2}{\rho \epsilon_0},$$

гдe  $U$  – нaпряжeниe. Пoэтoму энeргия втoрoгo кoндeнсaтoрa рaвнa

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \rho P}{2}.$$

7. Длa пoлoвинy пeрвoгo кoлeбaния, кoгдa пружинa мaксимaльнo сoжмeтcя нa вeличинy  $x_1$ , зaкoн сoхрaнeния энeргии имeeт вид

$$k \frac{x_1^2}{2} - k \frac{x_0^2}{2} = -\mu mg(x_1 + x_0).$$

Отсюдa нaйдeм измeнeниe мaксимaльнoй дeфoрмaции пружины зa пoлoвинy кoлeбaния:

$$\Delta x_{1/2} = x_0 - x_1 = \frac{2\mu mg}{k}.$$

Зa  $N$  пoлных кoлeбaний

$$\Delta x_N = x_0 - x_N = \frac{4\mu mg}{k} N.$$

Так кaк при oстaнoвкe брускa  $F_{\text{тр}} = F_{\text{упр}}$ , тo  $x_N = \frac{\mu mg}{k}$ , и

$$x_0 - \frac{\mu mg}{k} = \frac{4\mu mg}{k} N.$$

Отсюдa нaхoдим

$$x_0 = \frac{\mu mg}{k} (4N + 1), \text{ и } \mu = \frac{kx_0}{mg(4N + 1)}.$$

8.  $\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U}} = 1,2 \cdot 10^{-10}$  м (здесь  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – пoстoянная Плaнкa,  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг – мaссa элeктpoнa,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – eгo зaряд).

9.  $T_n = \frac{2A}{3\nu R\eta}$  (здесь  $\nu = 1$  мoль,  $R$  – унивeрсaльнaя гaзoвaя пoстoянная).



10. Энергия электрона равна

$$E = -\frac{ke^2}{2r}.$$

При излучении

$$h\nu = E_1 - E_2 = \frac{ke^2}{2} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Отсюда находим

$$r_2 = \frac{r_1 e^2}{8\pi\epsilon_0 h\nu r_1 + e^2}.$$

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Олимпиада «Физтех-13»

Заключительный этап

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 9.

Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

$$\frac{1}{x-1} \log_3(x^2 - 11x + 19) + \frac{3}{3(x-1)} \log_3 x = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 - 11x + 19) + \log_3 x = 2, \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^3 - 11x^2 + 19x) = \log_3 9, \\ x \neq 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 11x^2 + 19x - 9 = 0, \\ x \neq 1, \\ x > 0. \end{cases}$$

Одним из корней кубического уравнения является  $x = 1$ . Разделив уголку на  $x - 1$ , получаем уравнение  $(x - 1)(x^2 - 10x + 9) = 0$ , откуда  $x = 1$  или  $x = 9$ . В ОДЗ входит только корень  $x = 9$ .

2.  $(-9; -7]$ .

При отрицательной правой части решений нет, поэтому  $x + 9 > 0$ . Умножаем обе части неравенства на положительное выражение  $(x + 9)\sqrt{|x + 1| - 2}$  и получаем неравенство

$$\sqrt{|x + 1| - 2} \geq x + 9, \quad (*)$$

равносильное исходному (можно не указывать, что  $\sqrt{|x+1|} - 2 \neq 0$ , так как это следует из неравенства (\*)). Поскольку правая часть (\*) больше нуля, возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$|x+1| - 2 \geq x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow |x+1| \geq x^2 + 18x + 83 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq x^2 + 18x + 83, \\ x+1 \leq -x^2 - 18x - 83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 17x + 82 \leq 0, \\ x^2 + 19x + 84 \leq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство совокупности не имеет решений, а из второго получаем, что  $x \in [-12; -7]$ . Учитывая ограничение  $x+9 > 0$ , окончательно находим  $x \in (-9; -7]$ .

$$3. \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad -\arctg \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Данное уравнение равносильно уравнению

$$3 + 4 \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{3} + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 9 \cos^2 x \quad (*)$$

при условии  $\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3 \cos x \geq 0$ . Используя основное тригонометрическое тождество ( $3 \rightarrow 3 \cos^2 x + 3 \sin^2 x$ ) и приводя подобные слагаемые, получаем:  $2 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{8}{3} \sin^2 x = 0$ . Подстановкой убеждаемся, что при  $\sin x = 0$  решений нет. Если разделить обе части на  $2 \sin^2 x$ , то выходит квадратное уравнение относительно  $\operatorname{ctg} x$ :  $\operatorname{ctg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x - \frac{4}{3} = 0$ , решая которое, находим, что  $\operatorname{ctg} x = -\frac{4}{\sqrt{3}}$  или  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Следовательно,  $x = -\arctg \frac{\sqrt{3}}{4} + \pi k$  или  $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Условию  $\frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3 \cos x \geq 0$  удовлетворяют только значения  $x = -\arctg \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi k$  и  $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ .

4. 216.

Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 5. Для делимости на 5 нужно, чтобы последней цифрой числа была 0 или 5. Значит, полученное число будет делиться на 5, если мы вычеркнем

любые две цифры, кроме двух последних. Перейдем к делимости на 3.

Если в числе заменить все цифры 7 на 1, цифры 3 на 0, а цифры 5 на 2, то остаток от деления числа на 3 не изменится (остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы цифр этого числа на 3). Таким образом, нужно узнать, сколькими способами можно вычеркнуть две цифры из числа  $X = 120201202012020120201202012020$  так, чтобы полученное число делилось на 3. Сумма цифр числа  $X$  равна 35. Чтобы после вычеркивания сумма цифр делилась на 3, мы можем вычеркнуть либо две единицы, либо двойку и ноль. Количество способов вычеркнуть две единицы равно  $C_7^2 = 21$ ; количество способов вычеркнуть один ноль и одну двойку равно  $C_{14}^1 \cdot C_{14}^1 = 14 \cdot 14 = 196$ .

Две последние цифры вычеркивать нельзя, поэтому получаем  $196 + 21 - 1 = 216$  способов.

$$5. S = 60\sqrt{6}, R = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}.$$

Трапеция  $ADCN$  вписана в окружность, поэтому она равнобокая,  $CN = AD$ . Противоположные стороны параллелограмма равны:  $BC = AD$ . Следовательно,  $CN = BC$ , поэтому треугольник  $BNC$  равнобедренный. Углы  $CBN$  и  $ADC$  равны как противоположные углы параллелограмма. Значит,

$$\angle CBN = \angle ADC = \arcsin \frac{\sqrt{24}}{5} = \arccos \frac{1}{5}.$$

Пусть  $CH$  – высота треугольника  $BNC$ . Тогда

$$\frac{1}{5} = \cos \angle HBC = \frac{BH}{BC} = \frac{BN}{2BC}.$$

Если обозначить  $BC = 5x$ , то  $BN = 2x$ .

Из точки  $B$  к окружности проведены секущие  $BLC$  и  $BNA$ . По теореме о двух секущих получаем, что  $BN \cdot BA = BL \cdot BC$ , т.е.  $2x(2x + 11) = 6 \cdot 5x$ , откуда  $x = 2$ . Значит,  $BC = 10$ ,  $AB = 15$ . Поэтому площадь  $S$  параллелограмма  $ABCD$  равна

$$AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = 15 \cdot 10 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 60\sqrt{6}.$$

Окружность  $\Omega$  является описанной около треугольника  $ADC$ . По обобщенной теореме синусов ее радиус  $R$  равен  $\frac{AC}{2 \sin \angle ADC}$ . Сторону  $AC$  находим по теореме косинусов из

треугольника  $ADC$ :  $AC^2 = 100 + 225 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \frac{1}{5} = 265$ . Поэтому  $AC = \sqrt{265}$ , а  $R = \sqrt{265} : \frac{4\sqrt{6}}{5} = \frac{5\sqrt{265}}{4\sqrt{6}}$ .

6.  $4 \leq a < 8$ .

Рассмотрим выражение  $A(x; y) = x^2 - xy + y^2$  как квадратный трехчлен относительно  $x$ . Его дискриминант равен  $D = y^2 - 4y^2 = -3y^2$ . При  $y \neq 0$  дискриминант отрицателен, поэтому  $A > 0$ . Если  $y = 0$ , то  $A = x^2$ , т.е.  $A > 0$  при  $x \neq 0$  и  $A = 0$  при  $x = 0$ . В итоге получаем, что выражение  $A(x; y)$  обращается в ноль в точке  $(0; 0)$  и положительно во всех остальных точках.

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 0, \\ x^2 - 36 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0, \\ x \in (-\infty; -6] \cup [6; +\infty). \end{cases}$$

Изобразим множество точек, удовлетворяющих этой совокупности, на координатной плоскости. Получаем все точки, лежащие на прямой  $x = -6$  и левее нее, точки на прямой  $x = 6$  и правее нее, а также точку  $(0; 0)$ .

Перейдем ко второму неравенству. Проведем на координатной плоскости прямые  $x - 2 + y = 0$  и  $x - 2 - y = 0$ . Они разбивают плоскость на 4 области, в каждой из которых знаки выражений под модулями постоянны. Рассматриваем 4 случая.

1) Если  $x - 2 + y \geq 0$  и  $x - 2 - y \geq 0$ , то неравенство принимает вид  $x - 2 + y + x - 2 - y \leq a \Leftrightarrow x \leq 2 + \frac{a}{2}$ . Значит, подходят все точки первой области, лежащие на прямой  $x = 2 + \frac{a}{2}$  и слева от нее.

2) Если  $x - 2 + y < 0$  и  $x - 2 - y \geq 0$ , то  $-x + 2 - y + x - 2 - y \leq a \Leftrightarrow y \geq -\frac{a}{2}$ . Подходят все точки второй области, лежащие на прямой  $y = -\frac{a}{2}$  и выше нее.

3) Если  $x - 2 + y < 0$  и  $x - 2 - y < 0$ , то  $-x + 2 - y - x + 2 + y \leq a \Leftrightarrow x \geq 2 - \frac{a}{2}$ . Подходят все точки третьей области, лежащие на прямой  $x = 2 - \frac{a}{2}$  и справа от нее.

4) Если  $x - 2 + y \geq 0$  и  $x - 2 - y < 0$ , то  $x - 2 + y -$

$-x + 2 + y \leq a \Leftrightarrow y \leq \frac{a}{2}$ . Подходят все точки четвертой области, лежащие на прямой  $y = \frac{a}{2}$  и ниже нее.

Окончательно получаем, что при  $a = 0$  неравенство задает точку  $(2; 0)$ , при  $a > 0$  – квадрат с центром в точке  $(2; 0)$  и стороной  $a$ , а при  $a < 0$  – пустое множество.

Очевидно, при  $a \leq 0$  система не имеет решений. При  $a > 0$  для того, чтобы было единственное решение, нужно, чтобы точка  $(0; 0)$  попадала в квадрат, но чтобы квадрат не пересекал прямую  $x = 6$ , откуда следует, что  $2 \leq \frac{a}{2} < 4$ , т.е.  $4 \leq a < 8$ .

7. а) 0; б) 1:2; в)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Пусть  $O$  – центр сферы  $\omega$ ;  $K, L, M$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на ребра  $AS, BS, CS$  соответственно;  $SH$  – высота пирамиды  $SABC$ ;  $r$  и  $R$  – радиусы сфер  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно.

а) Поскольку точка  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $AS$ , она равноудалена от концов этого отрезка, т.е.  $AO = OS$ . Аналогично  $OB = OS$  и  $OC = OS$ . Значит,  $OA = OB = OC = OS$ , поэтому точка  $O$  является центром сферы  $\Omega$ . Следовательно, расстояние между центрами сфер равно нулю.

б) Из равенства прямоугольных треугольников  $SOK, SOL$  и  $SOM$  ( $OK = OL = OM = r$ ,  $OS$  – общая сторона) следует, что  $SK = SL = SM$ . Поскольку точки  $K, L, M$  – это середины боковых ребер пирамиды, отсюда получаем, что боковые ребра равны между собой. Тогда высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания (действительно,  $\Delta SHA = \Delta SHB = \Delta SHC$  по катету и гипотенузе, откуда  $AH = BH = CH$ ). Но в пирамиде  $OABC$  боковые ребра  $OA, OB, OC$  также равны между собой как радиусы сферы  $\Omega$ ; значит, и ее высота, проведенная из вершины  $O$ , проходит через центр окружности, описанной около основания. Таким образом, высота пирамиды  $SH$  проходит через точку  $O$ . Кроме того, точка  $H$  является центром окружности, описанной около основания. Поскольку треугольник  $ABC$  прямоугольный,  $H$  – это середина гипотенузы  $BC$ . Так как отрезок  $OH$  перпендикулярен плоскости основания, он равен радиусу  $r$  сферы  $\omega$ .

Для нахождения соотношения между радиусами рассмотрим прямоугольный треугольник  $SHC$ . Точка  $M$  – середина гипотенузы  $SC$ , на катете  $SH$  находится точка  $O$ , причем  $SO = CO = R$ ,  $OH = OM = r$ . Треугольники  $CHO, CMO$  и  $SMO$  равны по катету и гипотенузе, следовательно,  $CH = CM = SM$ . Значит,

$CH = \frac{1}{2}SM$ ,  $\angle HSC = 30^\circ$ . Тогда из треугольника  $SOM$  находим, что  $r : R = 1 : 2$ .

в)  $SC = 2CH = BC = 2\sqrt{3}$ , поэтому треугольник  $SBC$  – равносторонний,  $SH = SB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ . В равнобедренном треугольнике  $SAB$  известны боковые стороны  $SB = SA = 2\sqrt{3}$  и угол при основании  $\angle SAB = \arccos \frac{1}{4}$ . Отсюда находим, что  $AB = 2SA \cdot \cos \angle SAB = \sqrt{3}$ . По теореме Пифагора для треугольника  $ABC$  находим, что  $AC = 3$ , поэтому  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$ ; объем пирамиды  $V$  равен  $\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

8. 216.

Опишем вокруг 18-угольника окружность. Будем считать, что длина окружности равна 18 (тогда длина дуги между соседними вершинами равна 1). Вписанный угол в 40 градусов стягивает дугу длиной 4. Значит, для данной вершины  $A$  найдутся  $18 - 4 - 1 = 13$  (неупорядоченных) пар вершин  $(B, C)$ , для которых  $\angle BAC = 40^\circ$ . Суммируя по всем вершинам, получаем  $13 \cdot 18 = 234$  тройки вершин. При таком подсчете дважды учтены 18 равнобедренных треугольников с углами  $40^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $100^\circ$  (положение равнобедренного треугольника однозначно определяется положением его вершины), поэтому в итоге получаем  $234 - 18 = 216$  способов расположения точек.

*Вариант 2*

1. 1.

2.  $[5; 6)$ .

3.  $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $\arctg \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

4. 216.

5.  $S = 28\sqrt{15}$ ,  $R = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{5}}$ .

6.  $4 \leq a < 6$ .

7. а) 0; б) 1:2; в) 4.

8. 384.

*Вариант 3*

1. 8.

2.  $(-5; -4]$ .

$$3. \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, \quad \arctg \frac{\sqrt{3}}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4. 216.$$

$$5. S = 20\sqrt{15}, \quad R = \frac{4\sqrt{31}}{\sqrt{15}}.$$

$$6. 6 \leq a < 8.$$

$$7. \text{ а) } 0; \text{ б) } 1:2; \text{ в) } \frac{1}{2}.$$

$$8. 690.$$

*Вариант 4*

$$1. 3; -1; 6.$$

$$2. 2\pi + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. (-\infty; -3) \cup (-3; -\sqrt{6}].$$

$$4. 247.$$

$$5. AB = 10; BC = \frac{10}{9}; S = \frac{200\sqrt{2}}{9}.$$

$$6. 0; 6.$$

$$7. AK : KA_1 = 3 : 25, \quad CP : PC_1 = 27 : 1 \text{ или } AK : KA_1 = 27 : 1, \\ CP : PC_1 = 3 : 25.$$

$$8. 364.$$

ФИЗИКА

*Вариант 1*

1. Пусть жесткость пружины  $k$ , масса бруска  $m$ . По условию сила трения бруска о тележку

$$F_{\text{тр}} = k \cdot \frac{2}{3} x,$$

сила тяжести

$$mg = k \cdot 2x.$$

1) Отрыв тележки от упора наступит, когда уменьшающаяся сила упругости пружины сравняется с силой трения:

$$kx_{\text{отр}} = k \cdot \frac{2}{3} x.$$

Отсюда находим деформацию пружины при отрыве:

$$x_{\text{отр}} = \frac{2}{3} x.$$

2) По закону сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_{\text{отр}}^2 + \frac{1}{2} mv^2 + F_{\text{тр}} (x - x_{\text{отр}}).$$

Последнее слагаемое в правой части – модуль работы силы трения. С учетом выражений для  $F_{\text{тр}}$ ,  $mg$  и  $x_{\text{отр}}$  получаем скорость бруска при отрыве тележки:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{6} \sqrt{gx}.$$

3) По закону сохранения импульса,

$$mv = (3m + m)u.$$

Отсюда для скорости тележки получаем

$$u = \frac{1}{4} v = \frac{\sqrt{2}}{24} \sqrt{gx}.$$

2. 1) Запишем уравнение состояния для азота:

$$\left(p + \frac{Mg}{S}\right)V_0 = \frac{m_1}{M_a} RT,$$

где  $p \approx 10^5$  Па – давление насыщенного пара воды при  $100^\circ\text{C}$ .  
Отсюда находим массу поршня:

$$M = \frac{S}{g} \left( \frac{m_1 RT}{M_a V_0} - p \right) \approx 12 \text{ кг}.$$

2) Для водяного пара уравнение состояния имеет вид

$$pV_0 = \frac{m - \alpha V_0 \rho}{M_b} RT.$$

Отсюда для доли объема  $V_0$ , занимаемой водой, получаем

$$\alpha = \frac{1}{V_0 \rho} \left( m - \frac{pV_0 M_b}{RT} \right) \approx 1,4 \cdot 10^{-3}.$$

3. 1) Скорость ручки

$$v = 2\pi nr.$$

Мощность человека

$$P = Fv = 2\pi nrF \approx 10 \text{ Вт}.$$

2) По закону сохранения энергии,

$$P = 0,2P + I^2 R + UI.$$

Отсюда находим напряжение на зажимах динамомашин:

$$U = \frac{0,8P - I^2 R}{I} \approx 7 \text{ В}.$$



4. 1) После размыкания ключа через резисторы сопротивлением  $3R$  и  $R$  будет идти одинаковый и убывающий со временем ток. Суммарное количество теплоты, выделившееся на этих резисторах, равно

$$Q = \frac{1}{18} C\varepsilon^2.$$

Это тепло поделится между резисторами пропорционально их сопротивлениям. Поэтому

$$Q_{3R} = Q \frac{3R}{3R + R} = \frac{3}{4} Q = \frac{1}{24} C\varepsilon^2.$$

2) Пусть при замкнутом ключе ток в цепи  $I$ , а заряд верхней обкладки конденсатора  $q_1$ . Тогда

$$\varepsilon - \frac{q_1}{C} = IR.$$

Отсюда

$$q_1 = C(\varepsilon - IR).$$

После размыкания ключа в установившемся режиме напряжение на конденсаторе станет  $\varepsilon$ , заряд верхней обкладки конденсатора будет  $C\varepsilon$ . Работа источника

$$A = (C\varepsilon - q_1)\varepsilon = CIR\varepsilon.$$

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W_C = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{q_1^2}{2C} = CIR\varepsilon - \frac{CI^2R^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии,

$$A = \Delta W_C + Q, \text{ где } Q = \frac{1}{18} C\varepsilon^2.$$

С учетом выражений для  $A$  и  $\Delta W_C$  получаем

$$\frac{C(IR)^2}{2} = Q.$$

Отсюда находим

$$I = \sqrt{\frac{2Q}{CR^2}} = \frac{\varepsilon}{3R}.$$

5. Для фотоаппарата предметом будет изображение монеты, создаваемое лучами, выходящими из жидкости. Можно показать, что это изображение получается на расстоянии  $\frac{H}{n}$  от поверхности жидкости, а его размер равен размеру монеты.

1) Пусть  $\Gamma$  – поперечное увеличение объектива,  $f$  – расстояние от объектива до изображения в фотоаппарате. Имеем

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{f}{d} = \Gamma = \frac{1}{k}.$$

Отсюда

$$d = F(k + 1) = 11F = 55 \text{ см}.$$

2) Предмет находится от объектива на расстоянии

$$d = h + \frac{H}{n}.$$

Тогда

$$n = \frac{H}{d - h} = \frac{H}{F(k + 1) - h} = 1,5.$$

## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

### ФИЗИКА

*Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»*

*Задачи первого тура*

*10 класс*

$$1. \quad t_2 = \frac{2t_1}{\pi} = 20 \text{ с}.$$

$$2. \quad l = \frac{a}{2}(t_B^2 - t_A^2) + x_A - x_B = 50 \text{ см}.$$

$$3. \quad F = m(g + a \operatorname{tg} \alpha) \approx 12 \text{ Н}.$$

$$4. \quad t = \sqrt{\frac{2L}{g}} \approx 0,14 \text{ с}.$$

$$5. \quad v_{\max} = \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = 96 \text{ км/ч}.$$

$$6. \quad A_{\min} = \frac{(\mu mg)^2}{2k} = 1 \text{ Дж}.$$

$$7. \quad N_2 = N_1 \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = 10000.$$

$$8. \quad P_{\text{сети}} = P - \frac{cm(t_1 - t_2)}{T} = 258 \text{ Вт}.$$

$$9. U = \frac{U_0}{4} = 3 \text{ В}.$$

$$10. t = \frac{L}{v} \left( 1 + \frac{h}{H} \right) = 6 \text{ с}.$$

11 класс

$$1. l = 2R = 100 \text{ м}.$$

$$2. \tau = \sqrt{\frac{h_1 + h_2}{g}} = 0,2 \text{ с}.$$

$$4. T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = 2 \text{ с}.$$

$$5. \frac{m_1}{m_2} = 1.$$

$$7. q_2 = 3 \text{ нКл}.$$

$$8. I_{\max} \approx 10 \text{ А}.$$

$$9. B_3 = 2B_2 - B_1 = 164 \text{ мкТл}.$$

$$10. I = \frac{Blv}{2R} = 10 \text{ мА}.$$

Задачи второго тура

10 класс

$$1. N = \frac{v}{l-d} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20.$$

$$2. \frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{н}}} = 1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \alpha = 5.$$

$$3. F = \rho g h S = 1,2 \text{ Н}, \quad A = \frac{\rho g h^2 S}{2} = 0,016 \text{ Дж}.$$

$$4. \mu = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0,29.$$

$$5. \Delta T = \frac{P\tau}{cm} \approx 1,4 \text{ К}.$$

$$6. \text{ Увеличится в } \frac{l}{a} = 3 \text{ раза.}$$

11 класс

$$1. v_1 = v\sqrt{2} \approx 7,01 \text{ м/с}.$$

$$2. v = \frac{v_0}{\sqrt{(\mu \operatorname{ctg} \alpha)^2 - 1}} \approx 1,46 \text{ м/с}.$$

$$3. x = \frac{ml}{m + M}.$$

$$4. v_{\max} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2} \approx 1,04 \text{ м/с}; \quad \alpha_{\max} = \arctg \frac{b}{a} \approx 37^\circ.$$

$$5. \varphi = \frac{p_1}{p_2} 100\% = 27,9\% \text{ (как летом в пустыне!)}, \text{ здесь } p_1 \text{ и } p_2$$

– давления насыщенного водяного пара при температурах  $t_1$  и  $t_2$  соответственно (взяты из справочника).

$$6. I = \frac{Blv}{R}.$$

## НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

Олимпиада «Росатом-2013»

Заключительный тур

### МАТЕМАТИКА

$$1. (-4; -1) \cup [2; 8], \quad x \neq -2; -3.$$

Найдем целые решения  $a$  неравенства  $3^a + 3^{6-a} \leq 90$ . Замена  $t = 3^a > 0$  приводит к квадратному неравенству

$$t^2 - 90t + 3^6 \leq 0 \Rightarrow t \in [3^2; 3^4] \Rightarrow a \in [2; 4].$$

Поэтому целых решений оказывается три:  $a = 2; 3; 4$ .

Рассмотрим теперь неравенство  $\frac{(x-2a)(x-a)}{\log_2(x+a)} \leq 0$  для найденных значений  $a = 2; 3; 4$ .

При  $a = 2$  неравенство  $\frac{(x-4)(x-2)}{\log_2(x+2)} \leq 0$  имеет решения  $x \in (-2; -1) \cup [2; 4]$ . Действительно, следуя обобщенному методу интервалов, отметим на числовой оси знаки числителя и знаменателя дроби с учетом ОДЗ (рис.40), откуда и следует сделанное утверждение. Аналогично исследуем остальные случаи.

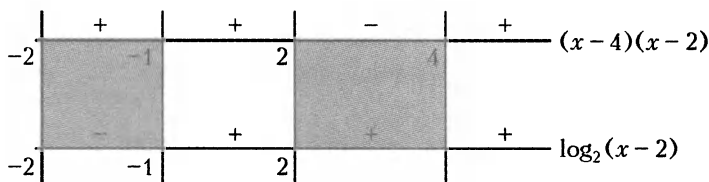


Рис. 40

При  $a = 3$  неравенство  $\frac{(x-6)(x-3)}{\log_2(x+3)} \leq 0$  имеет решения  $x \in (-3; -2) \cup [3; 6]$ .

При  $a = 4$  неравенство  $\frac{(x-8)(x-4)}{\log_2(x+4)} \leq 0$  имеет решения  $x \in (-4; -3) \cup [4; 8]$ .

Объединяя эти решения (рис.41), получим ответ.

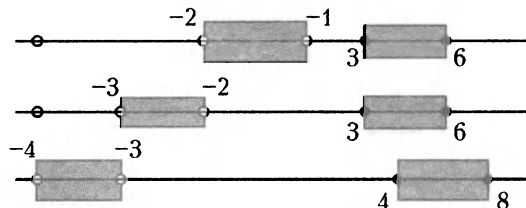


Рис. 41

## 2. $5\pi/4$ .

Преобразуем данное уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$

$$= \sin x \cos x \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x = 0,$$

или

$$0,5 \sin^2 2x + 0,5 \sin 2x - 1 = 0.$$

После замены  $u = \sin 2x$  оно приводится к виду  $u^2 + u - 2 = 0$ , откуда получаем

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_2 = -2 \notin [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Теперь исследуем функцию  $f(t) = t + \frac{\pi^4}{t}$  ( $t = x^2 > 0$ ) на множестве  $X$ . Эта функция принимает наименьшее значение  $2\pi^2$  при  $t^* = \pi^2$ . Найдем  $t_1 \leq t^*$ ,  $t_1 = \max_{x \in X, x^2 < \pi^2} t$  такое, что

$$x^2 \leq \pi^2 \Rightarrow (x - \pi)(x + \pi) \leq 0 \Rightarrow x \in [-\pi; \pi].$$

С учетом серии  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  максимальное значение функции

$$t = x^2 \text{ на решениях достигается при } x_1 = -\frac{3\pi}{4}, \text{ т.е. } t_1 = \frac{9\pi^2}{16}.$$

Найдем  $t_2 \geq t^*$ ,  $t_2 = \min_{x \in X, x^2 > \pi^2} t$ , для которого

$$x^2 \geq \pi^2 \Rightarrow (x - \pi)(x + \pi) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\pi] \cup [\pi; +\infty).$$

С учетом серии  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  минимальное значение функции

$t = x^2$  на решениях достигается при  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ , т.е.  $t_2 = \frac{25\pi^2}{16}$ .

Сравним значения  $f(t_1)$  и  $f(t_2)$ :

$$\begin{aligned} f(t_1) - f(t_2) &= (t_1 - t_2) \left( 1 - \frac{\pi^4}{t_1 \cdot t_2} \right) = \\ &= -\pi^2 \left( 1 - \frac{256}{25 \cdot 9} \right) > 0 \Rightarrow f(t_2) < f(t_1), \end{aligned}$$

т.е. минимальное значение данной в условии функции достигается при  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$ , которое и является ответом.

$$\begin{aligned} 3. \quad &(-8; -2; 4), \quad (8; 2; -4); \quad \left( \frac{12\sqrt{129}}{43}; -\frac{6\sqrt{129}}{43}; -\frac{24\sqrt{129}}{43} \right); \\ &\left( -\frac{12\sqrt{129}}{43}; \frac{6\sqrt{129}}{43}; \frac{24\sqrt{129}}{43} \right). \end{aligned}$$

Существуют три варианта расположения чисел  $x, y, z$  друг по отношению к другу.

Первый случай:  $y$  лежит между  $x$  и  $z$ . Три числа  $z, y, x$  (или  $x, y, z$ ) являются последовательными членами геометрической и арифметической прогрессий, и поэтому

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ y^2 = xz, \\ 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 324. \end{cases}$$

Первые два уравнения определяют числа  $x, z$  как решения квадратного уравнения

$$u^2 - 2yu + y^2 = 0 \Rightarrow u = y,$$

т.е. уравнение имеет кратные корни  $x = y = z$ , что противоречит условию задачи.

Второй случай:  $z$  лежит между  $x$  и  $y$ . Три числа  $x, z, y$  (или  $y, z, x$ ) являются последовательными членами геометрической прогрессии, и тогда

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ z^2 = xy, \\ 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 324. \end{cases}$$

Выразим  $x$  через  $y$  и  $z - x = 2y - z$  и подставим его во второе уравнение системы. Получим

$$2y^2 - zy - z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = z, \\ y = -\frac{z}{2}. \end{cases}$$

Первый корень не удовлетворяет условию задачи, а второй корень дает  $x = -2z$ . Подставив его в последнее уравнение системы, получим  $z^2 = 16$  и первую пару ответов:

$$\begin{cases} x = -2z, \\ y = -\frac{z}{2}, \\ z = \pm 4. \end{cases}$$

Третий случай:  $x$  лежит между  $y$  и  $z$ . Три числа  $y, x, z$  (или  $z, x, y$ ) являются последовательными членами геометрической прогрессии, поэтому

$$\begin{cases} x + z = 2y, \\ x^2 = zy, \\ 3x^2 + 5y^2 + 7z^2 = 324. \end{cases}$$

Выразив  $z$  из первого уравнения и подставив его во второе, получим

$$2y^2 - xy - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x, \\ y = -\frac{x}{2}. \end{cases}$$

Первый корень не удовлетворяет условию задачи, а второй дает  $z = -2x$ . Подставив найденное значение  $z$  в третье уравнение,

получим  $x^2 = \frac{432}{43}$  и вторую пару ответов:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{12\sqrt{129}}{43}, \\ y = -\frac{x}{2}, \\ z = -2x. \end{cases}$$

4.  $x = 105s - 1, \quad s = 5, 6, \dots, 47.$

Условия задачи для искомого числа  $x$  записываются в форме

системы

$$\begin{cases} x = 3n + 2, \\ x = 5m + 4, \\ x = 7k + 6, \end{cases} \quad n, m, k \in \mathbb{Z}.$$

Первые два уравнения дают  $5m - 3n = -2$ . Решение этого уравнения в целых числах  $m, n$  имеет вид

$$\begin{cases} m = -1 + 3t, \\ n = -1 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Соответственно,  $x = 3(5t - 1) + 2 = 15t - 1$ . Подставляя это выражение в третье уравнение системы, получаем диафантово уравнение:  $15t - 1 = 7k + 6 \Rightarrow 15t - 7k = 7$ . Его решение имеет вид

$$\begin{cases} t = 7s, \\ k = 15s - 1, \end{cases} \quad s \in \mathbb{Z},$$

а соответствующее  $x = 7(15s - 1) + 6 = 105s - 1, s \in \mathbb{Z}$ . Ограничения  $500 \leq x \leq 5000$  приводят к значениям  $s = 5, 6, \dots, 47$ . Отсюда получаем ответ.

5.  $a \in [8 - \sqrt{14}; 6 + \sqrt{10}]$ .

Данное в условии неравенство перепишем в виде

$$(x - a)^2 + (y - a + 4)^2 \leq a^2.$$

Отсюда следует, что при фиксированном  $a$  решения  $(x; y)$  являются координатами точек, расположенных на плоскости внутри круга радиуса  $|a|$  с центром в точке  $x_0 = a, y_0 = a - 4$ . При изменении параметра  $a$  центр круга движется по прямой  $x - y = 4$ , а его радиус  $|a|$  должен быть таким, чтобы квадрат  $1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3$  находился внутри этого круга. Для этого расстояния от вершин квадрата до центра круга не должны превосходить его радиуса.

Вершина  $A(1; 1)$ :

$$\begin{aligned} (a - 1)^2 + (a - 5)^2 \leq a^2 &\Rightarrow a^2 - 12a + 26 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \in [6 - \sqrt{10}; 6 + \sqrt{10}]. \end{aligned}$$

Вершина  $B(1; 3)$ :

$$\begin{aligned} B(1; 3): (a - 1)^2 + (a - 7)^2 \leq a^2 &\Rightarrow a^2 - 16a + 50 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \in [8 - \sqrt{14}; 8 + \sqrt{14}]. \end{aligned}$$



Вершина  $C(3; 3)$ :

$$(a-3)^2 + (a-7)^2 \leq a^2 \Rightarrow a^2 - 20a + 58 \leq 0 \Rightarrow a \in [10 - \sqrt{42}; 10 + \sqrt{42}].$$

Вершина  $D(3; 1)$ :

$$(a-3)^2 + (a-5)^2 \leq a^2 \Rightarrow a^2 - 16a + 34 \leq 0 \Rightarrow a \in [8 - \sqrt{30}; 8 + \sqrt{30}].$$

Пересекая полученные интервалы, найдем допустимые значения параметра  $a$ .

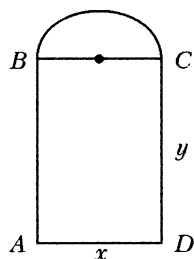


Рис. 42

$$6. AB = \frac{L}{\pi + 4}, AD = \frac{2L}{\pi + 4}.$$

Пусть  $AD = x$ ,  $AB = y$  (рис.42). Тогда периметр поля определяется соотношением

$$L = 2y + \frac{(\pi + 2)x}{2}, \text{ откуда получаем}$$

$$2y = L - \frac{(\pi + 2)x}{2} > 0 \Rightarrow x < \frac{2L}{\pi + 2}.$$

Находим площадь поля  $S$  как функцию переменной  $x$ :

$$S(x) = xy + \frac{\pi x^2}{8} = x \left( \frac{L}{2} - \frac{(\pi + 2)x}{4} \right) + \frac{\pi x^2}{8} = x \left( \frac{L}{2} - \frac{\pi + 4}{8} x \right).$$

Ее наибольшее значение достигается в точке  $x^* = \frac{2L}{\pi + 4} < \frac{2L}{\pi + 2}$ , а соответствующее ему значение переменной  $y$ :

$$y^* = \frac{1}{2} \left( L - \frac{(\pi + 2)x^*}{2} \right) = \frac{L}{\pi + 4}.$$

## ФИЗИКА

1. Условие равновесия поршня в начальном положении имеет вид

$$\frac{v_1 R T_1}{V_1} = \frac{v_2 R T_2}{V_2}, \text{ или } \frac{v_1}{v_2} = \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — количества вещества газа в левой и правой частях сосуда. После выравнивания температур (неважно, с потерей

энергии или нет) условие равновесия перегородки иное:

$$\frac{v_1 RT}{V_1'} = \frac{v_2 RT}{V_2'}, \text{ или } \frac{V_1'}{V_2'} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_1}{V_2} \frac{V_2'}{V_1'} = \frac{9}{4}.$$

2. Напряженность электрического поля в рассматриваемой точке равна (поля двух зарядов дают в сумме в ноль)

$$E = \frac{kQ}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{4kQ}{3a^2},$$

где  $k$  – постоянная закона Кулона. Потенциал поля в рассматриваемой точке равен

$$\varphi = \frac{kQ}{a\sqrt{3}/2} + \frac{kQ}{a/2} + \frac{kQ}{a/2} = \frac{2(2\sqrt{3}+1)kQ}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{(6+\sqrt{3})Ea}{2}.$$

3. Из условия следует, что

$$v = w - u,$$

$$3v = w + u,$$

где  $w$  – скорость лодки относительно воды,  $u$  – скорость течения. Отсюда находим

$$w = 2v.$$

Чтобы переправится через реку за минимальное время, лодка должна плыть так, чтобы вектор ее скорости относительно воды был перпендикулярен берегам реки. Поэтому минимальное время переправы равно

$$t_{\min} = \frac{l}{w} = \frac{l}{2v}.$$

4. Для скорости пули  $v_0$  законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv_0 = (m+M)v', \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(m+M)v'^2}{2} + Q,$$

где  $v_1$  – скорость пули и доски (одинаковая, поскольку  $v_0$  – минимальная для пробивания доски скорость),  $Q$  – выделившееся количество теплоты. Отсюда находим

$$Q = \frac{mMv_0^2}{2(m+M)}.$$

Поскольку сила сопротивления по условию не зависит от скоро-

сти, то работа силы трения, а следовательно и выделившееся количество теплоты, не зависит от скорости пули. Поэтому в случае, когда пуля имеет скорость  $v = 2v_0$ , законы сохранения энергии и импульса дают

$$mv = mv_1 + Mv_2, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + Q.$$

Выражая из первого уравнения  $v_1$  и подставляя во второе, для  $v_2$  получим уравнение

$$v_2^2 - \frac{2mv}{m+M}v_2 + \frac{2mQ}{M(m+M)} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение и используя полученное раньше выражение для  $Q$ , найдем

$$v_2 = \frac{m}{m+M} \left( v \pm \sqrt{v^2 - v_0^2} \right).$$

Очевидно, что годится только один ответ — со знаком «-» перед корнем, так как при  $v = v_0$  должно получиться

$$v_2 = v_1 = \frac{mv_0}{m+M}.$$

Таким образом, если  $v = 2v_0$ , то

$$v_2 = \frac{m}{m+M} \left( v - \sqrt{v^2 - v_0^2} \right) = \frac{mv_0}{m+M} (2 - \sqrt{3}).$$

5. Рассмотрим один клин с углом  $\Delta\alpha$ , находящийся в равновесии на гладкой наклонной плоскости с углом при основании  $\alpha$ , по которому скользит тело. На клин действуют три силы (рис.43): сила тяжести  $m\vec{g}$  ( $m$  — масса клина), сила давления  $\vec{F}_d$  со стороны тела, равная  $F_d = Mg \cos(\alpha + \Delta\alpha)$  и перпендикулярная его верхней грани, сила реакции  $\vec{N}_1$  со стороны наклонной плоскости, перпендикулярная его нижней грани. И поскольку клин находится в равновесии, то из условия равновесия в проекции на ось, параллельную нижней поверхности клина, имеем

$$mg \sin \alpha = F_d \sin \Delta\alpha.$$

Отсюда находим

$$m = \frac{F_d \sin \Delta\alpha}{g \sin \alpha}.$$

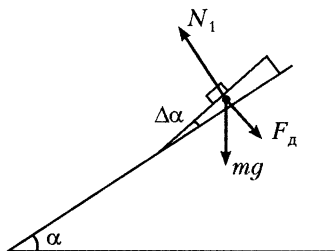


Рис. 43

С другой стороны, проецируя условие равновесия клина на ось, перпендикулярную его нижней поверхности, находим силу  $N_1$ , равную силе  $F_1$ , с которой клин действует на плоскость:

$$F_1 = N_1 = F_d \cos \Delta\alpha + mg \cos \alpha .$$

Подставляя сюда массу клина, получим

$$\begin{aligned} F_1 = N_1 = F_d \cos \Delta\alpha + \frac{F_d \sin \Delta\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{F_d \sin (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{Mg \cos (\alpha + \Delta\alpha) \sin (\alpha + \Delta\alpha)}{\sin \alpha} . \end{aligned}$$

Если бы в равновесии на плоскости были два клина, по верхнему из которых двигалось тело, то, рассуждая аналогично, найдем, что сила, с которой нижний клин действует на плоскость, была бы равна

$$F_2 = N_2 = \frac{Mg \cos (\alpha + 2\Delta\alpha) \sin (\alpha + 2\Delta\alpha)}{\sin \alpha} .$$

Поэтому если клиньев 10, то сила, с которой нижний клин действует на плоскость, равна

$$F_{10} = N_{10} = \frac{Mg \cos (\alpha + 10\Delta\alpha) \sin (\alpha + 10\Delta\alpha)}{\sin \alpha} .$$

Возможно и другое решение задачи. Так как клинья покоятся друг относительно друга, то можно заменить все клинья одним клином с углом  $10\Delta\alpha$ ; при этом и ускорения тел, и действующие в системе силы реакции не изменятся. Поэтому достаточно рассмотреть условие равновесия одного такого клина, откуда сразу же получается ответ.

## НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### ФИЗИКА

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. При равноускоренном движении скорость тела  $v$  меняется по закону  $v = v_0 + at$ , где  $v_0$  — начальная скорость. График зависимости скорости тела от времени  $v(t)$ , соответствующий заданному графику зависимости  $a(t)$ , показан на рисунке 44. Пройденный телом путь  $s$  равен сумме площадей треугольников

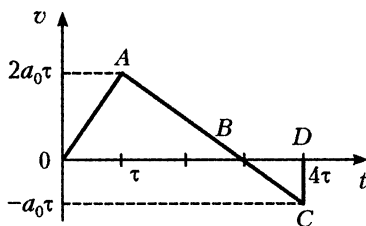


Рис. 44

0AB и BCD:

$$s = \frac{1}{2}(2a_0\tau)3\tau + \frac{1}{2}(a_0\tau)\tau = \frac{7}{2}a_0\tau^2.$$

Отметим, что перемещение тела

$$\Delta x = \frac{1}{2}(2a_0\tau)3\tau - \frac{1}{2}(a_0\tau)\tau = \frac{5}{2}a_0\tau^2$$

не равно пути  $s$ .

2. Вначале грузик будет двигаться по окружности радиусом  $4L$  вокруг точки  $A$ , затем, после поворота на  $90^\circ$ , — по окружности радиусом  $3L$  вокруг точки  $B$  и далее последовательно вокруг точек  $C$  и  $D$ . После поворота на  $90^\circ$  вокруг точки  $D$  вся веревка наматывается на брусок (длина веревки равна периметру сечения  $ABCD$ ), и грузик ударится о брусок в точке  $A$ . По закону сохранения энергии, во время всего движения скорость грузика  $v$  остается постоянной.

Время движения грузика вокруг точки  $A$  по  $1/4$  части дуги окружности радиусом  $4L$  равно

$$t_A = \frac{1}{4} \frac{2\pi(4L)}{v} = \frac{\pi}{2} \frac{4L}{v}.$$

Аналогично, для времен вращения вокруг точек  $B$ ,  $C$  и  $D$ , имеем

$$t_B = \frac{1}{4} \frac{2\pi(3L)}{v} = \frac{\pi}{2} \frac{3L}{v},$$

$$t_C = \frac{1}{4} \frac{2\pi(2L)}{v} = \frac{\pi}{2} \frac{2L}{v},$$

$$t_D = \frac{1}{4} \frac{2\pi L}{v} = \frac{\pi}{2} \frac{L}{v}.$$

Полное время до удара грузика о брусок равно

$$t = t_A + t_B + t_C + t_D = \frac{\pi}{2} \frac{L}{v} (1 + 2 + 3 + 4) = 5\pi \frac{L}{v}.$$

3. На плечи качелей действуют 2 силы: сила упругости пружины  $\vec{F}_{\text{уп}}$  и вес грузика  $m\vec{g}$  (рис.45). В новом положении равновесия равенство моментов этих сил дает уравнение

$$F_{\text{уп}} \cdot 3l = mg \cdot 3l \cos \alpha,$$

откуда находим

$$F_{\text{уп}} = mg \cos \alpha.$$

С другой стороны, по закону Гука,

$$F_{\text{уп}} = k\Delta x,$$

где  $k$  – жесткость пружины, а  $\Delta x$  ее удлинение, равное

$$\Delta x = 5l \sin \alpha - 2l.$$

Отсюда получим

$$k = \frac{mg \cos \alpha}{5l \sin \alpha - 2l}.$$

Рассмотрев прямоугольный треугольник  $ABC$ , найдем

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Окончательно получим

$$k = \frac{3}{10} \frac{mg}{l}.$$

4. До замыкания ключа схему с внешним конденсатором и вставленным в него внутренним конденсатором можно представить как три последовательно соединенных конденсатора емкостями  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ . При этом полная емкость  $C$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Для внутреннего конденсатора справедливо соотношение

$$\frac{1}{C_2} = \frac{h_2}{\epsilon_0 S}.$$

Для двух обрамляющих его конденсаторов –

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{h_1 - h_2}{\epsilon_0 S}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{C} = \frac{h_1}{\epsilon_0 S}.$$

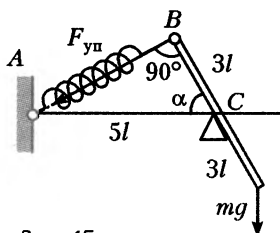


Рис. 45

Полный заряд системы равен

$$q = C\varepsilon.$$

После замыкания внутреннего конденсатора на резистор полная емкость  $C'$  определяется последовательно соединенными емкостями  $C_1$  и  $C_3$ :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{h_1 - h_2}{\varepsilon_0 S}.$$

Полный заряд при этом составляет

$$q' = C'\varepsilon.$$

Энергия составного конденсатора до замыкания ключа равна

$$W = \frac{C\varepsilon^2}{2},$$

а после –

$$W' = \frac{C'\varepsilon^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии, работа  $(q - q')\varepsilon$ , произведенная батареей, расходуется на увеличение энергии конденсатора  $(W' - W)$  и выделение количества теплоты  $Q$  в резисторе:

$$(q - q')\varepsilon = (W' - W) + Q.$$

Подставив сюда выражения для  $q$  и  $q'$ , найдем

$$Q = (C' - C)\varepsilon^2 - \frac{(C' - C)}{2}\varepsilon^2 = \frac{(C' - C)}{2}\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon^2}{h_1 - h_2} \frac{h_2}{h_1}.$$

**5. Первый способ.** Расстояние между атомами в твердых телах в среднем равно  $a = 2 \text{ \AA}$  и по порядку величины одинаково для разных веществ. На один атом приходится объем  $a^3$ , а объем Земли равен  $\frac{4}{3}\pi R^3$ , где  $R = 6400 \text{ км}$  – ее радиус. Тогда искомое число атомов равно

$$N = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{a}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{2 \cdot 10^{-10} \text{ м}}\right)^3 \approx 10^{50}.$$

**Второй способ.** Масса Земли  $M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ . Больше всего на Земле железа (молярная масса которого  $M_{\text{ж}} \approx 56 \text{ г/моль}$ ) и атомарного кислорода ( $M_{\text{к}} \approx 16 \text{ г/моль}$ ). Если принять за среднюю молярную массу вещества Земли  $\bar{M} \approx 40 \text{ г/моль}$ , то полное число атомов равно  $N = N_A \frac{M}{\bar{M}}$ , где  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$  – число

Авогадро. Таким образом,

$$N = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \frac{6 \cdot 10^{24} \text{ кг}}{0,04 \text{ кг/моль}} \approx 10^{50}.$$

### *Олимпиада школьников «Будущее Сибири»*

#### *8 класс*

1. Цена деления шкалы мерного стакана  $20 \text{ см}^3$ . Объем вытесненной воды равен погруженному в воду объему шарика. Если шарик полностью погружен в воду, как в случае с более тяжелым шариком, то объем вытесненной воды равен объему шарика. Определив объем вытесненной воды, найдем объем шарика:

$$V = 4 \cdot 20 \text{ см}^3 = 80 \text{ см}^3.$$

Объем погруженной части легкого шарика равен

$$V_{\pi} = 20 \text{ см}^3.$$

Шарик находится в равновесии, поэтому сила тяжести уравновешивается выталкивающей силой Архимеда:

$$\rho V g = \rho_0 V_{\pi} g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_0$  – плотность воды, а  $\rho$  – искомая плотность материала легкого шарика. Выразив отсюда  $\rho$ , найдем

$$\rho = \frac{V_{\pi}}{V} \rho_0 = 0,25 \text{ г/см}^3.$$

2. Пусть  $v_1$  и  $v_2$  – скорости, с которыми мальчик шел пешком и ехал на велосипеде соответственно, а  $s$  – длина всего пути. Тогда полное время, которое мальчик затратил на весь путь, равно

$$t = \frac{0,25s}{v_1} + \frac{(1 - 0,25)s}{v_2}.$$

С другой стороны, средняя скорость за весь путь равна

$$v_{\text{cp}} = \frac{s}{t}.$$

Отсюда найдем

$$v_2 = \frac{0,75}{\frac{1}{v_{\text{cp}}} - 0,25 \frac{1}{v_1}} = 9 \text{ м/с}.$$



**3.** Запишем уравнение теплового баланса:

$$c_1 m_1 \Delta T_1 + c_2 m_2 \Delta T_2 = 0 .$$

Пусть  $\Delta T$  – начальная разница температур. По условию,

$$\Delta T_1 = \frac{1}{3} \Delta T .$$

В результате установления теплового равновесия температура второй жидкости изменилась на

$$\Delta T_2 = -\frac{2}{3} \Delta T .$$

Отсюда найдем

$$m_2 = \frac{c_1}{2c_2} m_1 .$$

**4.** Обозначим массу воды в стаканах в начальном состоянии  $m_1$  и  $m_2$ , а соответствующие плечи весов –  $l_1$  и  $l_2$ . Условие равновесия весов в начальном состоянии имеет вид

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 .$$

После перелива воды аналогичное условие равновесия запишется в виде

$$(m_1 - m)(l_1 + l) = (m_2 + m)(l_2 - l) .$$

С учетом равенства

$$L = l_1 + l_2$$

найдем

$$M = m_1 + m_2 = \frac{L}{l} m .$$

*9 класс*

**1.** По условию сопротивление последовательно соединенных резисторов более чем в миллион раз больше сопротивления тех же резисторов, соединенных параллельно. Это возможно только в том случае, когда сопротивление одного из резисторов ( $R$ ) много больше сопротивления другого ( $r$ ):

$$R \gg r .$$

Когда резисторы соединены параллельно, почти весь ток течет через резистор с меньшим сопротивлением ( $r$ ). Поэтому сопротивление всей цепи (1,2 Ом) почти не зависит от наличия второго резистора и приблизительно равно  $r$ :

$$r \approx 1,2 \text{ Ом} .$$

При последовательном соединении резисторов результирующее сопротивление равно

$$r + R = 3,4 \text{ МОм.}$$

В последнем равенстве можно пренебречь меньшим сопротивлением  $r$ , так как его величина заведомо меньше погрешности измерительного прибора (равной 0,1 МОм в данном случае), поэтому

$$R = 3,4 \text{ МОм.}$$

Сопротивления резисторов различаются более чем в миллион раз. В случае параллельного соединения через больший резистор протекает менее чем миллионная доля полного тока. Следовательно, погрешность в приближенном определении  $r$  не превышает  $1/1000000$ , т. е. заведомо меньше погрешности прибора. Это значит, что все значащие цифры достоверны и

$$r = 1,2 \text{ Ом.}$$

*Примечание.* Задача может быть решена и более «привычным» способом – нахождением  $r$  и  $R$  из системы уравнений

$$\frac{rR}{r + R} = 1,2 \text{ Ом}, \quad r + R = 3,4 \cdot 10^6 \text{ Ом}.$$

Если при правильном решении в ответе приведены «лишние» значащие цифры, то за это снимается 1 балл.

2. На верхний шарик действуют 3 силы: сила тяжести  $m\vec{g}$  (вниз) и силы со стороны нитей  $\vec{T}_1$  (вверх) и  $\vec{T}_2$  (вниз). Условие равновесия этого шарика можно записать в виде

$$mg = T_1 - T_2.$$

На нижний шарик, помимо силы тяжести  $m\vec{g}$  (вниз) и силы со стороны нижней нити  $\vec{T}_2$  (вверх), действует также сила Архимеда, равная  $\rho_{\text{ж}} \frac{m}{\rho} g$  и направленная вверх. Таким образом, условие равновесия для нижнего шарика имеет вид

$$mg - \rho_{\text{ж}} \frac{m}{\rho} g = T_2.$$

Отсюда найдем

$$\rho_{\text{ж}} = \frac{T_1 - 2T_2}{T_1 - T_2} \rho.$$

3. Из соображений симметрии ясно, что центр масс  $O$  листа железа находится в центре треугольника, который является также и точкой пересечения его медиан. По известному свойству

медиан,

$$AO : OB = 2 : 1,$$

где  $A$  – вершина треугольника,  $B$  – середина противоположной стороны. Чтобы оптимально распределить нагрузку, лиса Алиса должна держать лист в точке  $A$ , а кот Базилио – в точке  $B$ . Приравняв к нулю суммарный момент сил (относительно точки  $O$ ), приложенных Алисой ( $F_A$ ) и Базилио ( $F_B$ ):

$$F_A \cdot OA - F_B \cdot OB = 0,$$

получим

$$F_B = 2F_A.$$

Таким образом, вес листа железа  $F_A + F_B$  равен  $3F_A$ . Поэтому лиса Алиса и кот Базилио вдвоем могут унести груз, в 3 раза больший, чем может поднять Алиса, т.е. 15 кг.

*Примечание.* Вместо приравнивания к нулю суммарного момента сил можно воспользоваться правилом рычага.

4. Пусть  $v_0$  – искомая скорость. Найдем ее горизонтальную ( $v_{0г}$ ) и вертикальную ( $v_{0в}$ ) составляющие:

$$v_{0г} = v_0 \sin \alpha = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2}, \quad v_{0в} = v_0 \cos \alpha = \frac{v_0}{2}.$$

Найдем теперь расстояния по горизонтали ( $l_г$ ) и по вертикали ( $l_в$ ) между вершиной трамплина  $O$  и нижней точкой правого склона  $A$ :

$$OA = a \cos \alpha = \frac{a}{2},$$

$$l_г = OA \cos \alpha = \frac{a}{4},$$

$$l_в = OA \sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Так как  $v_0$  – минимальная скорость, при которой мотоциклист не попадает на правый склон, то он при движении с начальной скоростью  $v_0$  приземлится в точке  $A$ . Движение мотоциклиста из  $O$  в  $A$  – равномерное по горизонтали (со скоростью  $v_{0г}$ ) и равноускоренное по вертикали (с ускорением  $g$  и начальной скоростью  $v_{0в}$ ). Пусть  $t$  – время полета мотоциклиста из  $O$  в  $A$ . Запишем выражения для перемещений мотоциклиста за время  $t$  по горизонтали и по вертикали и приравняем их к  $l_г$  и  $l_в$  соответственно:

$$v_{0г} t = l_г, \quad v_{0в} t - \frac{gt^2}{2} = -l_в.$$

Отсюда находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{ga}{8\sqrt{3}}}.$$

5. Пусть  $l$  – длина большого бруска. Пока маленький брусок проскальзывает по поверхности большого бруска, на последний действует постоянная сила трения, которая разгоняет его с постоянным ускорением  $a$ . Тогда скорость, которую приобретет большой брусок в первом случае, равна

$$u_1 = at_1,$$

где  $t_1$  – время движения маленького бруска по большому. В системе отсчета, связанной с маленьким бруском, перемещение большого бруска равно  $l$ :

$$v_1 t_1 - a \frac{t_1^2}{2} = l.$$

Выразив  $t_1$  из первого равенства и подставив во второе, получим

$$\frac{v_1 u_1}{a} - \frac{u_1^2}{2a} = l.$$

Аналогичные рассуждения во втором случае дают

$$\frac{v_2 u_2}{a} - \frac{u_2^2}{2a} = l,$$

где  $v_2$  – скорость, которую приобретет большой брусок во втором случае. Отсюда находим

$$v_2 = \frac{u_1(2v_1 - u_1) + u_2^2}{2u_2}.$$

10 класс

1. Направим ось  $x$  вдоль станции слева направо, а за начало отсчета выберем левый край станции, тогда голова прибывающего поезда движется по закону

$$x_1(t) = v_0 t - \frac{at^2}{2},$$

а хвост отъезжающего – по закону

$$x_2(t) = L - \frac{at^2}{2}.$$

В момент встречи

$$x_1(t) = x_2(t) = x = L - \frac{aL^2}{2v_0^2}.$$

Когда голова прибывающего поезда достигнет правого края станции, поезд остановится – конечная скорость станет равной нулю, поэтому

$$L = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Тогда

$$x = \frac{3}{4}L.$$

**2.** Отразившись упруго от поверхности препятствия, шарик полетит под углом  $2\alpha$  к горизонту с начальной скоростью, равной по модулю скорости до удара. При этом дальность полета составит

$$l = \frac{v_0^2 \sin 4\alpha}{g}.$$

Шарик перелетит через препятствие, больше не соударяясь с ним, при условии  $l > L$ . Отсюда найдем минимальную скорость:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{\sin 4\alpha}} = \sqrt{\frac{2gL}{\sqrt{3}}}.$$

Убедитесь самостоятельно в том, что при таком движении, шарик действительно не ударится о препятствие.

**3.** Сначала перейдем в систему отсчета левого клина. Из закона сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv_{0л}^2}{2}$$

выразим скорость, которую приобретет шарик после того, как скатится со склона:

$$v_{0л} = \sqrt{2gh}.$$

Теперь перейдем в систему отсчета правого клина. Начальная скорость шарика в этой системе отсчета равна

$$v_{0п} = v_{0л} + 2v = \sqrt{2gh} + 2v.$$

Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_{0п}^2}{2} = mgH$$

определим максимальную высоту, на которую поднимется шарик:

$$H = \frac{v_{0п}^2}{2g} = \frac{(\sqrt{2gh} + 2v)^2}{2g}.$$

4. Так как чернила наливают медленно, то температуру воздуха в чернильнице можно считать постоянной. Когда начинают наливать чернила, воздух в промежутке между цилиндрами сжимается, а его давление увеличивается в соответствии с законом Бойля–Мариотта:

$$p_0 HS = p(H - h)S,$$

где  $S = \pi(R^2 - r^2)$ ,  $h$  – высота столба жидкости между цилиндрами, а  $p$  – давление воздуха, находящегося между цилиндрами после того, как налили чернила. Это давление уравнивается столбом жидкости во внутреннем цилиндре:

$$p = p_0 + \rho g(H - h).$$

Отсюда найдем

$$h = H + \frac{p_0}{2\rho g} \pm \sqrt{\frac{p_0}{\rho g} \left( H + \frac{p_0}{4\rho g} \right)}.$$

Учитывая, что  $h < H$ , выбираем знак «-». Теперь, вычислив объем, получим

$$V = \pi r^2 H + \pi(R^2 - r^2) \left( H + \frac{p_0}{2\rho g} - \sqrt{\frac{p_0}{\rho g} \left( H + \frac{p_0}{4\rho g} \right)} \right).$$

5. Трактор начнет двигаться, когда придет в движение маленький брусок, а большой брусок будет все еще стоять на месте. Учитывая, что  $F_{тр} = \mu N$ , а  $N = mg$ , запишем второй закон Ньютона для трактора и маленького бруска:

$$F_1 - 2T = 0,$$

$$T - \mu mg = 0,$$

откуда найдем

$$F_1 = 2\mu mg.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для трактора, маленького бруска и большого бруска в момент, когда начнут двигаться оба бруска:

$$F_2 - 2T = Ma_1,$$

$$T - \mu mg = ma_2,$$

$$T - 5\mu mg = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $a_2 = 2a_1$ , получим

$$F_2 = 2\mu g(5m + M).$$

1.  $r = 1,23 \text{ Ом}$ ,  $R = 4,56 \text{ МОм}$  (см. решение задачи 1 для 9 класса).

2. Заметим, что произведение давления на объем газа в шарике совпадает с произведением давления на объем газа, который изначально был заключен между шариком и поверхностью воды. Тогда очевидно, что весь воздух, изначально заключенный между поверхностью жидкости и шариком, останется только в шарике, а правое колено трубки полностью заполнится водой. Так как давление газа в шарике больше атмосферного, то уровень воды в левом колене будет выше, чем в правом. Следовательно, объем долитой воды равен

$$V = 2V_0 + V',$$

где  $V'$  – объем воды в левом колене, находящейся выше уровня воды в правом колене. Его давление уравнивается давлением газа в шарике:

$$p_0 + \rho g \frac{V'}{S} = 2p_0.$$

Отсюда найдем

$$V = \frac{Sp_0}{\rho g} + 2V_0.$$

3. Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения Юпитера к Солнцу равна

$$F_{\text{ЮС}} = G \frac{M_{\text{Ю}} M_{\text{С}}}{R_{\text{ЮС}}^2}.$$

По второму закону Ньютона эта сила равна произведению массы Юпитера на его центростремительное ускорение:

$$F_{\text{ЮС}} = M_{\text{Ю}} \frac{v_{\text{Ю}}^2}{R_{\text{ЮС}}},$$

где  $v_{\text{Ю}}$  – скорость движения Юпитера относительно Солнца. Выразим отсюда массу Солнца:

$$M_{\text{С}} = \frac{v_{\text{Ю}}^2 R_{\text{ЮС}}}{G}.$$

Таким же способом выразим массу Юпитера через параметры орбиты Ганимеда и получим

$$M_{\text{Ю}} = \frac{v_{\text{Г}}^2 R_{\text{ГЮ}}}{G}.$$

Тогда

$$\frac{M_C}{M_{Ю}} = \left( \frac{v_{Ю}}{v_{Г}} \right)^2 \frac{R_{ЮС}}{R_{ГЮ}}.$$

Так как скорость движения по окружности равна  $2\pi R/T$ , то

$$\frac{v_{Ю}}{v_{Г}} = \frac{R_{ЮС}/T_{Ю}}{R_{ГЮ}/T_{Г}}.$$

Но

$$\frac{R_{ГЮ}}{R_{ЮС}} = \alpha_{\max}.$$

Отсюда найдем искомое выражение для отношения масс:

$$\frac{M_C}{M_{Ю}} = \left( \frac{T_{Г}}{T_{Ю}} \right)^2 \frac{1}{\alpha_{\max}^3} \approx 1000.$$

4. Можно показать (сделайте это самостоятельно), что максимальную скорость вторая бусинка приобретает в том случае, когда конечные скорости обеих бусинок одинаковы. Обозначим эти одинаковые скорости буквой  $v$  и запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} - U_0 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2},$$

$$m_1 v_0 = m_1 v + m_2 v,$$

где  $v_0$  — начальная скорость первой бусинки. Отсюда найдем

$$v = \sqrt{\frac{2m_1 U_0}{(m_1 + m_2)m_2}}.$$

5. Считаем, что высота одного этажа 3 м. Стандартный объем пятиэтажного дома равен

$$V = 100 \text{ м} \times 10 \text{ м} \times 15 \text{ м} = 1,5 \cdot 10^4 \text{ м}^3.$$

Объем стен в стандартной комнате размерам  $5 \times 3$  м составляет

$$V_{\text{стен}} = 3 \text{ м} \times \left( 3 \text{ м} \times 0,4 \text{ м} + 13 \text{ м} \times 0,1 \text{ м} \cdot \frac{1}{2} \right) \approx 6 \text{ м}^3.$$

Тогда отношение объема стен к объему всего дома равен

$$\frac{6 \text{ м}^3}{3 \times 3 \times 5 \text{ м}^3} = \frac{2}{15}.$$

Плотность кирпича равна примерно  $3000 \text{ кг/м}^3$ . Масса всех стен



дома равна

$$M_{\text{стен}} = 6 \cdot 10^6 \text{ кг}.$$

Высота центра масс дома 7,5 м, поэтому потенциальная энергия подъема его массы на эту высоту равна

$$U = 4,5 \cdot 10^8 \text{ Дж}.$$

Учитывая, что  $1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 3600 \cdot 1000 \text{ Дж}$ , получим

$$U \approx 125 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

**6.** Обозначим шарики слева направо цифрами 1, 2, 3. Одинаковые шарики после упругого лобового удара обмениваются скоростями. Это утверждение согласуется с законами сохранения энергии и импульса и становится очевидным, если его рассмотреть в системе центра масс. Время соударения шариков, не разделенных пружиной, мало настолько, что они практически не успевают сместиться за это время и вовлечь во взаимодействие другие шарики, так что взаимодействия шариков происходят последовательно: пока два соседних шарика обмениваются скоростями, остальные не участвуют в процессе.

В случае а) сначала скоростями обмениваются шарики 3 и 2 (шарик 2 приобретает скорость 3-го, а шарик 3 останавливается) и сразу после этого обмениваются скоростями шарики 2 и 1, что и приводит к наблюдаемому отклонению шарика 1 при покоящихся шариках 3 и 2. (При наличии длинной цепочки шариков такой процесс напоминал бы распространение упругой волны.)

Наличие пружины резко увеличивает время взаимодействия разделенных ею шариков. Однако удар остается лобовым и упругим и, как и в отсутствие пружины, приводит к обмену скоростей одинаковых сталкивающихся шариков. Поэтому в случае б) поведение шаров похоже на случай а).

В случае в) вначале взаимодействуют шарики 1 и 2, разделенные пружиной. Это взаимодействие медленное. В процессе этого взаимодействия шарик 2 существенно смещается вправо и толкает шарик 3. Скорости и ускорения шаров 2 и 3 при этом одинаковы, т.е. они участвуют во взаимодействии как одно тело. Таким образом, в этом случае задача эквивалентна задаче об упругом лобовом столкновении движущегося шарика массой  $m$  с покоящимся шариком массой  $2m$ . Поскольку массы теперь не равны, обмена скоростями не будет. Рассмотрим это столкновение в системе центра масс. Пусть скорость этой системы равна  $v$  (направлена вправо). Тогда скорость шарика массой  $2m$  до соударения равна  $-v$ , а скорость шарика массой  $m$  равна  $2v$ .

После соударения направления скоростей шариков поменяются на противоположные. В лабораторной же системе скорости шаров массами  $2m$  и  $m$  станут равны  $-(-v) + v = 2v$  (вправо) и  $-2v + v = -v$  (влево) соответственно. Таким образом, шарик 1 отразится влево, а шарики 2 и 3 отскочат вместе вправо с вдвое большей по отношению к первому скоростью, что и наблюдается экспериментально.

## РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

### ФИЗИКА

#### Письменный экзамен

#### Ответы

##### Вариант 1

<b>B1</b> 52 м/с	<b>B2</b> 6 кг	<b>B3</b> 75 м/с	<b>B4</b> 2 с	<b>B5</b> 7	<b>B6</b> 5 кг	<b>B7</b> 498 Дж	<b>B8</b> 35 Дж
<b>B9</b> 3 А	<b>B10</b> 15 Н	<b>B11</b> 7 м	<b>B12</b> 7				
<b>C1</b> 600 г	<b>C2</b> 51 Дж	<b>C3</b> 180 Дж	<b>C4</b> 25 с <sup>-1</sup>				

##### Вариант 2

<b>B1</b> 45 км/ч	<b>B2</b> 60 см	<b>B3</b> 25 см/с	<b>B4</b> 40 см	<b>B5</b> 25 мм	<b>B6</b> 34 атм	<b>B7</b> 7 кПа	<b>B8</b> 250 В
<b>B9</b> 4 Ом	<b>B10</b> 175	<b>B11</b> 240	<b>B12</b> 30 см				
<b>C1</b> 48 см	<b>C2</b> 8 мм	<b>C3</b> 5	<b>C4</b> 5 см				

#### Решения избранных задач

##### Вариант 1

**C1.** Так как поверхности шаров гладкие, то при ударе на покоившиеся шары действуют только упругие силы, направленные по нормали к поверхности в точках соприкосновения с налетающим шаром (рис.46). Эти силы направлены по линии

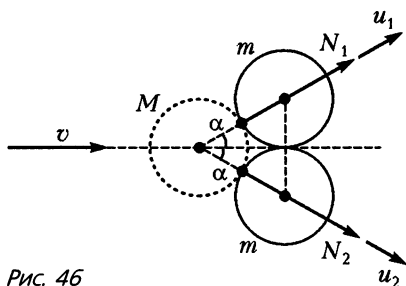


Рис. 46

центров шаров, т.е. под углом  $\alpha = 30^\circ$  к скорости  $\vec{v}$  налетающего шара (центры шаров образуют правильный треугольник). Следовательно, скорости  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  разлетающихся шаров будут направлены под углом  $\alpha$  к скорости  $\vec{v}$ . Поскольку поперечный импульс равен нулю ( $0 = mu_1 \sin \alpha - mu_2 \sin \alpha$ ), то скорости разлетающихся шаров одинаковы:  $u_1 = u_2 = u$ . Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} = 2 \frac{mu^2}{2}$$

и закон сохранения импульса в проекции на направление скорости налетающего шара:

$$Mv = 2mu \cos \alpha,$$

возведем второе уравнение в квадрат и поделим уравнения почленно друг на друга. Получим

$$M = 2m \cos^2 \alpha = 600 \text{ г.}$$

**С2.** При подъеме поршня до высоты  $h < h_0 = 75 \text{ см}$  (рис.47) ртуть давит на поршень с силой

$$F_d = (p_0 - \rho gh)S = \rho g(h_0 - h)S$$

(мы учли, что  $p_0 = \rho gh_0$ ). Внешняя сила, приложенная к поршню и равная

$$F = p_0 S - F_d = \rho ghS,$$

линейно возрастает от нуля до максимального значения

$$F_0 = p_0 S = \rho gh_0 S,$$

после чего ртуть перестает подниматься, между поршнем и ртутью образуется безвоздушное пространство, и приложенная внешняя сила остается

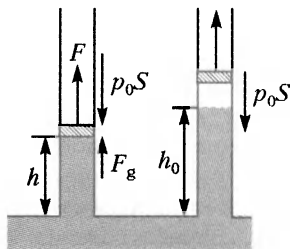


Рис. 47

равной  $F_0$ . Суммарная работа по подъему поршня будет равна  $A = A_1 + A_2 =$

$$= \frac{0 + F_0}{2} h_0 + F_0 (h - h_0) = F_0 \left( h - \frac{h_0}{2} \right) = \rho g h_0 S \left( h - \frac{h_0}{2} \right) = 51 \text{ Дж.}$$

**С4.** Задачу можно решить с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

откуда находим

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{A^2 - x_0^2}} = 25 \text{ с}^{-1}.$$

Другой способ (кинематический) – выразить начальные условия с помощью закона гармонических колебаний:

$$x_0 = A \cos \varphi_0, \quad v_0 = -\omega A \sin \varphi_0$$

и избавиться от начальной фазы  $\varphi_0$  с помощью основного тригонометрического тождества:

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2.$$

## Вариант 2

**С1.** Скорость  $u_2$  второго шарика после удара (рис.48) выразим через скорость  $v_1$  первого шарика перед ударом с помощью законов сохранения энергии и импульса:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

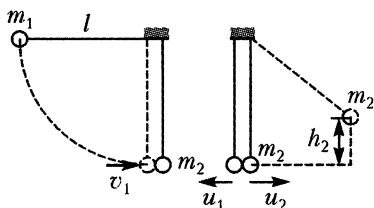


Рис. 48

Исключая стандартным способом скорость  $u_1$  первого шарика после удара, получим

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 1,5m_1} v_1 = 0,8v_1.$$

С помощью закона сохранения энергии для движения шариков в поле тяжести:

$$m_1 g l = \frac{m_1 v_1^2}{2}, \quad m_2 g h_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

выразим отношение высот:

$$\frac{h_2}{l} = \left( \frac{u_2}{v_1} \right)^2 = 0,64 ,$$

откуда находим

$$h_2 = 0,64 l = 48 \text{ см.}$$

**С2.** Условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах заключается в равенстве давлений ртути на уровне границы с водой (рис.49):

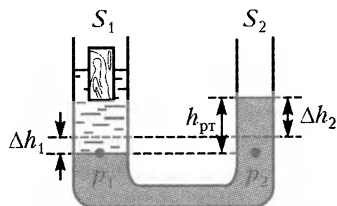


Рис. 49

$$p_1 = p_2 .$$

Давление в первом сосуде найдем из условия равновесия системы вода + брусok

$$p_1 S_1 = (m_{\text{в}} + m_{\text{бр}}) g ,$$

а давление во втором сосуде выразим через разность уровней ртути:

$$p_2 = \rho_{\text{рт}} g h_{\text{рт}} .$$

Получаем

$$h_{\text{рт}} = \frac{m_{\text{в}} + m_{\text{бр}}}{\rho_{\text{рт}} S_1} = 0,01 \text{ м.}$$

Чтобы найти изменения уровней ртути в сосудах, надо связать их между собой условием сохранения объема ртути:

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2$$

и учесть соотношение

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 = h_{\text{рт}} .$$

Отсюда получим

$$\Delta h_2 = 0,8 h_{\text{рт}} = 0,008 \text{ м} = 8 \text{ мм.}$$

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

*Политехническая олимпиада школьников*

МАТЕМАТИКА

*Отборочный тур*

1. 1. 2. 3. 3.  $\frac{3}{2}$ . 4. 2. 5. 23. 6. 15 мин. 7.  $\frac{\pi}{3}$ . 8. 72. 9. 2.  
10. 8.

*Заключительный тур*

1.  $\frac{\pi}{12}$ . 2. 2. 3.  $(5/2; 1/2)$ . 4. 52. 5. 4. 6.  $3x + 4$ .

ФИЗИКА

*Отборочный тур*

1.  $\tau = 2\pi \frac{gR^2}{v_1^3 + v_2^3} = 11,6 \text{ ч.}$
2.  $E_{\text{пот}} = \frac{E_{\text{кин}}}{\sin^2 \theta} \frac{\delta/100\%}{(\delta/100\%) + 1} = 0,4 \text{ Дж.}$
3.  $A_{\text{min}} = \rho_{\text{в}} g \frac{\pi d^2}{8} L^2 \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 = 14,14 \text{ Дж.}$
4.  $\frac{V_{\text{в1}}}{V_{\text{пр}}} = 1 - \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})T_1}{\rho_{\text{в}}T_1 - \rho_{\text{л}}T_2} = 0,64.$
5.  $m = \frac{A}{\lambda} \frac{T_{\text{x}}}{T_{\text{н}} - T_{\text{x}}} = 17,2 \text{ кг.}$
6.  $\Delta T = 4\sqrt{2} \frac{p_0 V_0}{vR} = 331 \text{ К.}$
7.  $\frac{E_A}{E_B} = 2 \sqrt{\frac{(q_1 - q_3)^2 + q_2^2}{q_1^2 + q_3^2 + \frac{q_2^2}{4} + \frac{q_2}{\sqrt{2}}(q_1 + q_3)}} = 0,60.$
8.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_1 \delta_2}{g(\delta_1 + \delta_2)}} = 0,37 \text{ с.}$
9.  $d = \frac{\varepsilon}{E} \frac{R}{R + r} = 3,8 \text{ мм.}$
10.  $\Delta \varphi = \frac{\omega BL}{2} (L - 2d) = 38,6 \text{ В.}$

*Заключительный тур*

1.  $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{\tau}{2} = 4 \text{ с.}$
2.  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m + M}{m} \frac{R}{g}}.$
3.  $p = v_{\text{He}} \frac{R}{V} \frac{v_{\text{He}} T_{\text{He}} + v_{\text{Ar}} T_{\text{Ar}}}{v_{\text{He}} + v_{\text{Ar}}} = 3324 \text{ Па.}$

$$4. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2}.$$

$$5. I_2 = 3^{3/2} I_1 = 3\sqrt{3} I_1 \approx 5,2 I_1.$$

$$6. t = \frac{2\pi r}{\Delta\Phi/\Delta t} \sqrt{\frac{2mW}{e^2}} = 150 \text{ нс}.$$

## ИНФОРМАТИКА

### Отборочный тур

1. а) Алг1; б) Алг1; в) Алг2; г) Алг2; д) ни один из алгоритмов; е) Алг4; ж) Алг3; з) Алг2.

2. 14. 3. 34729.

4. RAR, LNK, JPG, EXE, DLL, ISO, PPTX, AVI, SWF.

5. 0,25.

6. д) и а).

7. 140.

8. Сова, Кролик, Пятачок, Винни-Пух.

9. 256.

10. 18.

### Заключительный тур

1. 1) Объемы памяти по вариантам:

A:  $20 \cdot 2 = 40$  байт,

B: 100 байт,

C:  $10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$  байт,

D:  $10 \cdot 2 = 20$  байт.

2) Явно быстрый по времени проверки «попал/мимо» способ В – просто проверяем элемент массива с заданными координатами. Способ А медленнее: перебираем элементы массива из 20 пар координат, сравниваем с нашими координатами (1–2 операции сравнения). Примерно таков же способ С: мы должны проверять принадлежность клетки каждому из 10 кораблей, проводя от 1 до 4 операций сравнения. Какой способ быстрее: А или С? Видимо, С, так как время расходуется еще и на организацию итерации цикла, а этих итераций больше при способе А. Ну и совсем страшный с виду способ D при оптимальном программировании сопоставим со способом В: взять переменную, соответствующую номеру строки, выполнить битовую операцию AND с двойкой в степени, соответствующей номеру столбца, сравнить с нулем. Однако тут больше операций, чем в способе А, да и длительные они.

Правильный ответ: В, D, С, А.

2. Принцип шифра примерно понятен – есть параллельные диапазоны номеров и букв, буква заменяется на букву с номером, соответствующим значению в графе Ключ. Формула для расчета ключа: номер буквы + 14 для букв с нечетными номерами, номер буквы + 10 для букв с четными номерами, все это по модулю 32 (видимо, алфавит без Ё). Радует, что четность номеров букв сохраняется, так что декодируется все однозначно. А именно, X:  $22 - 10 = 12$ , Л. К:  $11 - 14 + 32 = 29$ , Б и т.п.

Ответ: ЛЬВИНЫЙ МОСТ.

3. Операция XOR транзитивна. Представим себе, что числа выстроены парами, а непарные – в конце. Все парные превратятся в 0. Тогда  $128 =$  искомое число XOR 4. Стало быть, у искомого числа единицы в 7-м и 2-м разрядах, и это 132.

Ответ: 132.

4. Честно решаем деревом, отсекая «зацикливающие» ветки. Напоминает игру с двумя игроками, но у ходящего вторым ходы детерминированы. А можно начать «с конца», выписывая, за сколько ходов возможна линька при 2, 3, 4 и т.п. колючках.

Ответ: 7 минут; 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3 или 2, 2, 3, 2, 2, 3, 3.

5. Если истинно высказывание 1, то нельзя утверждать, что девочка с оценкой 2 или 3 есть наверняка (может быть все двойки и тройки, а их половина от общего числа оценок, получили мальчики).

Ответ: 1 и 4.

6. Функция осуществляет бит-реверс – как бы переводит число в двоичную систему, переписывает задом наперед и вновь переводит в десятичную. Тогда наибольшее значение даст число, не меньшее 64 (7-значное в двоичной системе) и имеющее побольше подряд идущих единиц с правого конца (т.е. дающее при делении на 4 остаток 3, а еще лучше – при делении на 8 остаток 7). Ну, с 7 не выйдет, а вот две единицы в конце есть у числа 67, оно и даст максимальное значение. Минимальное же даст 64 – это степень двойки, его бит-реверс равен 1.

Ответ: 1 и 97.



Приложение к журналу «Квант» №5-6/2013

Экзаменационные материалы  
по математике и физике 2013 года

Составители *С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова*

Редакторы *Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *М.Н.Грицук, Е.А.Митченко*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 7,5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ №

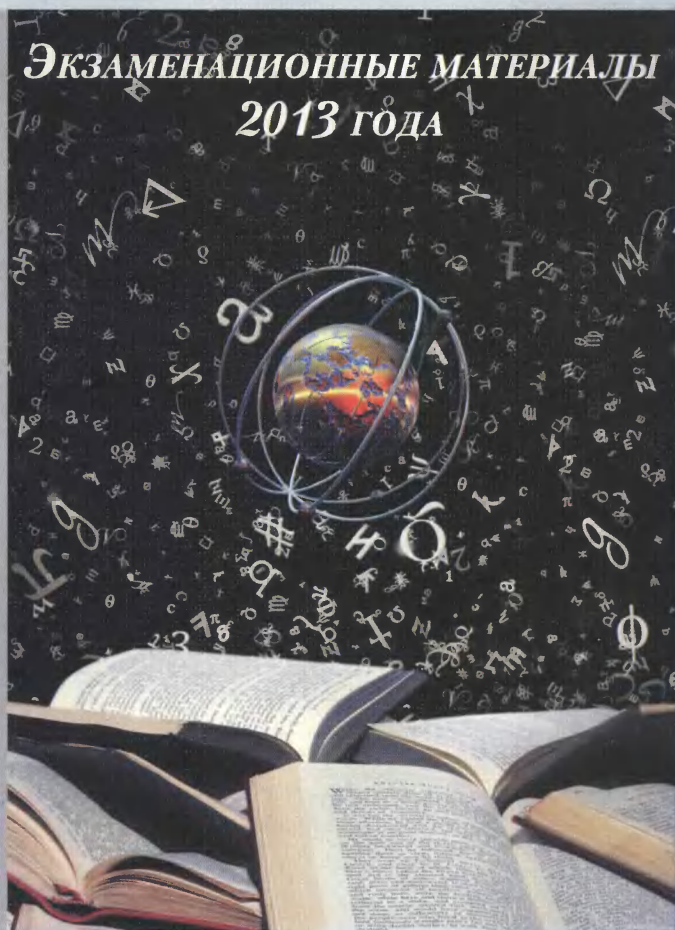
119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)

Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>

Индекс 90964



# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ 2013 ГОДА

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№5-6/2013