

Приложение к журналу

# КВАНТ

№6/2003

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА МЕХАНИКА

*Выпуск 2*

Бюро



Квантум

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

МЕХАНИКА

*Выпуск 2*

*Составители*

*В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*



---

Москва 2003  
Бюро Квантум

УДК 373  
ББК 22.2  
П69

Приложение  
к журналу «Квант»  
№6/2003

**П69    Практикум абитуриента. Механика.** Выпуск 2 / Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. — М.: Бюро Квантум, 2003. — 128 с. — (Прил. к журналу «Квант» №6/2003)

ISBN 5-85843-047-3

Книга представляет собой сборник статей по механике (а также по некоторым общим вопросам), опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Практикум абитуриента по физике» в течение последних десяти лет.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам в вуз.

ББК 22.2

ISBN 5-85843-047-3

© Бюро Квантум,  
«Квант», 2003

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	4
Кинематика и векторы. <i>В.Плис</i> .....	5
Гидростатика. <i>Л.Асламазов</i> .....	15
Аэро- и гидростатика. <i>А.Шеронов</i> .....	26
Движение по окружности. <i>А.Овчинников, В.Плис</i> .....	33
Задачи с распределенной массой. <i>А.Черноуцан</i> .....	44
Движение тел в гравитационных полях. <i>В.Можаев</i> .....	51
Закон сохранения импульса. <i>В.Чивилёв</i> .....	60
Задачи на центр масс. <i>А.Черноуцан</i> .....	68
Законы сохранения в задачах на столкновения. <i>А.Овчинников, В.Плис</i> .....	75
Об амплитудах колеблющихся величин. <i>А.Овчинников, В.Плис</i> .....	83
Комбинированные задачи по механике. <i>В.Плис</i> .....	92
Электромеханические задачи. <i>В.Можаев</i> .....	106
Аналогии в задачах по физике. <i>А.Овчинников, В.Плис</i> .....	117
Ответы .....	125

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлена одна из самых традиционных рубрик журнала «Квант» – «Практикум абитуриента». Цель этого раздела – помочь абитуриенту научиться решать задачи. Каждая статья «Практикума» – это как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. Обычно это задачи из конкретного раздела физики, а иногда объединяющим «стержнем», на который «нанизываются» задачи, служит какой-нибудь универсальный прием или подход, применимый к задачам из разных разделов. Ведущий урок «учитель» – автор статьи – на разных примерах показывает, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать полученный ответ.

Важный совет – не идите по пути наименьшего сопротивления, просто читая текст и пассивно следуя за мыслью автора, а работайте над статьей «с карандашом в руках», сначала пытайтесь решить задачу самостоятельно и только потом сверяя свое решение с авторским. Так, конечно, получится дольше, но зато гораздо эффективнее. И еще. «Проработав» статью, обязательно попробуйте решить предложенные в конце упражнения – вы поймете, насколько вам удалось овладеть материалом.

В этой книге собраны статьи по механике (а также по некоторым общим вопросам), опубликованные в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента по физике» в течение последних десяти лет. Как обычно, наиболее трудные задачи (или задачи, выходящие за рамки школьной программы) отмечены звездочкой.

Обсудим основные методы работы с векторными соотношениями в кинематике материальной точки и проиллюстрируем их на примерах равномерного и равнопеременного движений.

## Равномерное движение

Известно, что при равномерном движении скорость  $\vec{v}$  материальной точки остается постоянной и равной начальной скорости  $\vec{v}_0$ , а перемещение

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$$

в течение времени от 0 до  $t$  сонаправлено с вектором  $\vec{v}_0$  и пропорционально ему по величине (здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор материальной точки).

**Задача 1.** *Сверхзвуковой самолет летит горизонтально. Два микрофона, находящихся на одной вертикали на расстоянии  $d$  друг от друга, зарегистрировали приход звука от самолета с запаздыванием по времени, равным  $\tau$ . Найдите величину  $v$  скорости самолета. Скорость звука в воздухе  $c$ .*

Обратимся к рисунку 1, иллюстрирующему последовательные перемещения сверхзвукового самолета (источника звука) и фронта звуковой волны (огивающей вторичных волн). Пусть при пролете самолета через точку  $A$  в атмосфере возбуждается звуковая волна, и через

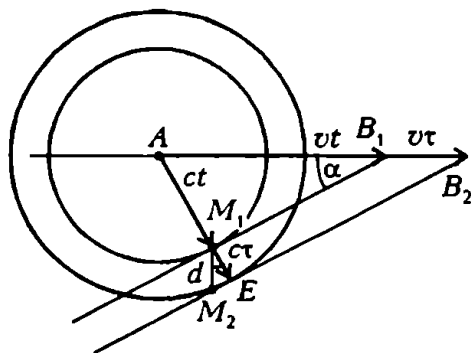


Рис. 1

некоторое время  $t$  волновое возмущение достигает первого микрофона  $M_1$ . В этот момент времени самолет находится в точке  $B_1$ , и прямая  $B_1M_1$  определяет положение волнового фронта. За последующий промежуток времени  $\tau$  самолет перемещается в точку  $B_2$ , а волновой фронт, двигаясь со скоростью  $\vec{c}$ , перемещается в положение  $B_2EM_2$ . Проанализировав кинематику перемещений самолета и волнового фронта, находим из прямоугольного треугольника  $AB_1M_1$

$$\sin \alpha = \frac{AM_1}{AB_1} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v},$$

из прямоугольного треугольника  $M_1M_2E$

$$\cos \alpha = \frac{c\tau}{d}.$$

Исключая  $\alpha$  из этих соотношений, получаем

$$v = c \sqrt{1 - \frac{(c\tau)^2}{d^2}}.$$

**Задача 2.** *Две частицы 1 и 2 движутся с постоянными скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , их радиусы-векторы в начальный момент времени равны  $\vec{r}_{01}$  и  $\vec{r}_{02}$  соответственно. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?*

По условию, частицы в лабораторной системе отсчета движутся равномерно, их радиусы-векторы зависят от времени по законам

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{01} + \vec{v}_1 t, \quad \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{02} + \vec{v}_2 t.$$

Перейдем в систему отсчета, связанную с первым телом и движущуюся поступательно относительно лаборатории. В этой системе положение точки 2 в любой момент времени определяется вектором

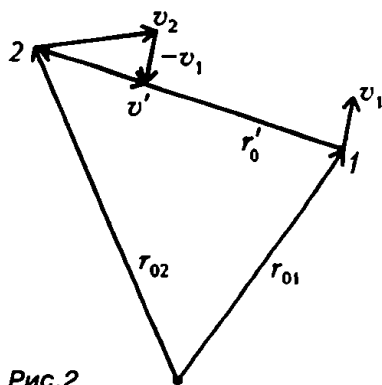
$$\vec{r}'(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) = \left( \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01} \right) + \left( \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \right) t. \quad (*)$$

Отсюда следует, что в подвижной системе отсчета точка 2 движется по прямой, проходящей через начальное положение точки, определяемое равенством  $\vec{r}'_0 = \vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$ , а направляющим вектором прямой является относительная скорость  $\vec{v}' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Рисунок 2 наглядно иллюстрирует приведенные соотношения.

При произвольных абсолютных скоростях  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  соотношение (\*) описывает пучок прямых, проходящих через начальную точку. И только одна из этих прямых проходит через начало отсчета подвижной системы. Это происходит в том случае, когда векторы  $\vec{r}'_0$  и  $\vec{v}'$  антипараллельны, т.е. соответствующие единичные векторы имеют противоположные знаки:

$$\frac{\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}}{|\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}|} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}.$$

Рис.2



### Равнопеременное движение

Как известно, в этом случае зависимости скорости и перемещения от времени имеют вид

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где  $\vec{a} = \text{const}$  – ускорение.

Среди всевозможных случаев равнопеременного движения особое место занимает движение под действием гравитационных сил – свободное падение тел в однородном поле тяжести с постоянным ускорением  $\vec{a} = \vec{g}$ . Зависимость вектора скорости от времени при свободном падении иллюстрирует рисунок 3. Из

соотношения для перемещения следует, что при свободном падении вектор перемещения материальной

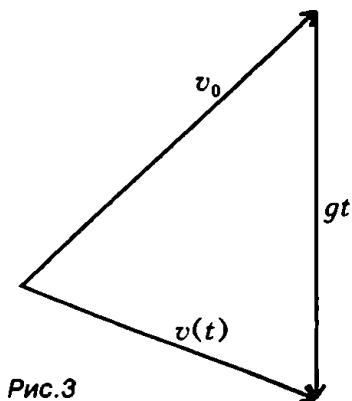


Рис.3

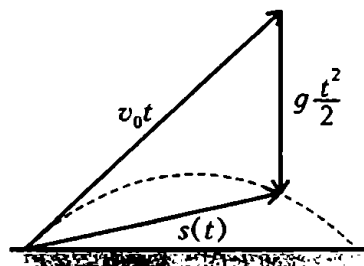


Рис.4



точки в течение времени от 0 до  $t$  равен сумме векторов  $\vec{v}_0 t$  и  $\frac{\vec{g} t^2}{2}$  (рис.4). Это означает, в частности, что движение тела, брошенного под углом к горизонту, есть суперпозиция равномерного прямолинейного движения со скоростью  $\vec{v}_0$  и свободного падения в однородном поле тяжести с нулевой начальной скоростью.

**Задача 3.** Мышонок стреляет из рогатки «точно» в кота, сидящего на ветке дерева. (Вектор начальной скорости камня направлен на кота). Через  $t = 1$  с камень падает на землю в точку, находящуюся на одной вертикали с котом. На какой высоте  $H$  находился кот? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Перемещение камня за время полета  $t$  равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

(считаем  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ). Изобразим эти векторы на рисунке 5. Отсюда получаем

$$H = \frac{g t^2}{2} = 5 \text{ м.}$$

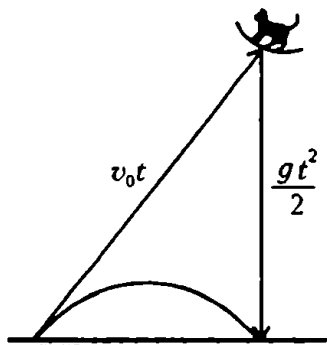


Рис.5

Если бы гравитационные силы не действовали на камень, то через  $t = 1$  с он действительно попал бы в кота.

Заметим, что перемещение камня, брошенного под углом к горизонту, можно представить также в виде полусуммы начальной  $\vec{v}_0$  и конечной  $\vec{v}(t)$  скоростей, умноженной на время  $t$ :

$$\vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_0 + \vec{g} t}{2} t = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}(t)}{2} t.$$

**Задача 4.** Мышонок стреляет из рогатки в кота, сидящего на ветке дерева. Через  $t = 1$  с камень попадает в ветку прямо у лап кота. На каком расстоянии  $s$  от мышонка находился кот, если известно, что векторы  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}(t)$  взаимно перпендикулярны? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Искомое расстояние есть абсолютная величина (модуль)

вектора перемещения камня за время полета  $t$ :

$$s = \left| \vec{s}(t) \right| = \frac{\left| \vec{v}_0 + \vec{v}(t) \right|}{2} t.$$

В момент времени  $t$  вектор скорости  $\vec{v}(t)$  перпендикулярен вектору  $\vec{v}_0$  и равен  $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$  (рис.6). Диагонали изображенного на рисунке 6 прямоугольника равны

$$\left| \vec{v}_0 + \vec{v}(t) \right| = \left| \vec{v}(t) - \vec{v}_0 \right| = \left| \vec{g}t \right| = gt.$$

Тогда искомое расстояние будет равно

$$s = \frac{gt^2}{2} \approx 5 \text{ м}.$$

**Задача 5.** На крышу дома высотой  $H$  с расстояния  $L$  от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной величине начальной скорости  $v_{0\min}$  это возможно? Под ка-

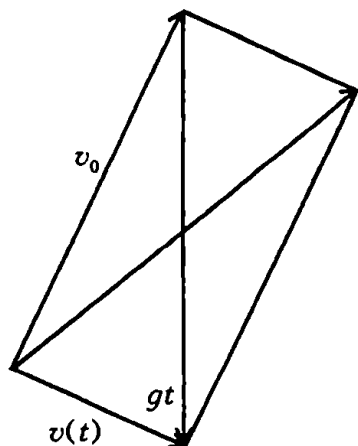


Рис.6

ким углом  $\alpha_*$  следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую  $OA$ , которая образует угол  $\beta$  с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета  $t$  равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

(считаем  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ). Как видим, проекции векторов  $\vec{v}_0 t$  и  $\vec{g}t^2/2$  на направление нормали к прямой  $OA$  равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{gt^2}{2} \cos \beta,$$

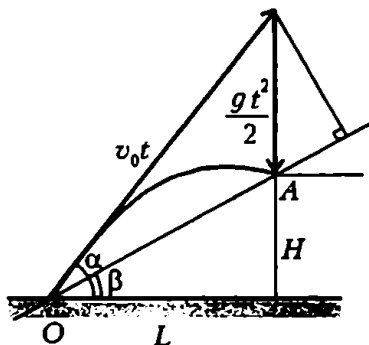


Рис.7

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов  $\vec{v}_0 t$  и  $\vec{g} t^2/2$  на прямую  $OA$  равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2 + L^2} = v_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{gt^2}{2} \sin \beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2 + L^2} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания  $\alpha_*$  такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1, \quad 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$v_{0\min}^2 = g \sqrt{H^2 + L^2} \frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta}.$$

С учетом равенства  $\operatorname{tg} \beta = H/L$  получаем

$$v_{0\min}^2 = g \left( \sqrt{H^2 + L^2} + H \right),$$

и окончательно

$$v_{0\min} = \sqrt{g \left( \sqrt{H^2 + L^2} + H \right)}.$$

**Задача 6.** Из точек  $A$  и  $B$ , находящихся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями  $v_0 = 20$  м/с. Один из камней полетел по навесной траектории, другой по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке  $A$  угол бросания  $\alpha = 75^\circ$ . Через какое время  $\tau$  после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки  $A$ . Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

и расстояние между точками  $A$  и  $B$ :

$$L = v_0 t \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha .$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки  $B$ :

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta .$$

Сравнивая выражения для  $L$ , получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta ,$$

или, поскольку по условию  $2\alpha + 2\beta = \pi$ ,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} .$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки  $A$ , и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе  $\vec{u}$  найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = (\vec{v}_{02} + \vec{g}t) - (\vec{v}_{01} + \vec{g}t) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} ,$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01} ,$$

равной начальной относительной скорости. Так как  $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$  и  $v_{01} = v_{02} = v_0$ , вектор  $\vec{u}$  есть диагональ квадрата, построенного на векторах  $\vec{v}_{02}$  и  $-\vec{v}_{01}$ , поэтому

$$u = \sqrt{2}v_0 .$$

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета  $AC$  в прямоугольном треугольнике  $ACB$ , где угол при вершине  $B$  равен  $\delta = \alpha - 45^\circ = 30^\circ$ :

$$AC = L \sin \delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м} .$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u \sin \delta} = 0,6 \text{ с} .$$

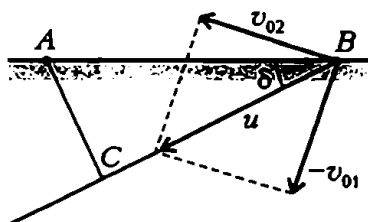


Рис.8

**Задача 7.** С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью  $v = 9,8$  м/с под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность  $t$  полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:  $\vec{F}_c = -k \vec{v}$  ( $k > 0$ ). Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Ускорение мяча в любой момент времени определяется силой тяжести и силой сопротивления:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v},$$

где  $m$  – масса мяча. Найдем приращение скорости мяча за любой элементарный промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta \vec{v} = \left( \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t$$

и за время полета  $t$ :

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \sum \left( \vec{g} - \frac{k}{m} \vec{v} \right) \Delta t = \vec{g} t - \frac{k}{m} \sum \vec{v} \Delta t = \vec{g} t - \frac{k}{m} \vec{s}(t).$$

По условию, перемещение мяча  $\vec{s}(t) = \sum \vec{v} \Delta t$  за время полета – это горизонтальный вектор. Переходя в полученном соотношении к проекциям векторов на вертикальную ось, получаем

$$t = \frac{2,2v \sin \beta}{g} = 1,1 \text{ с}.$$

В заключение отметим, что кинематические соображения позволяют решать не только задачи физики. Например, при решении геометрических задач бывает полезно представить себе, что будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться. Зависимость одних элементов от других может стать при этом столь очевидной, что решение задачи бросится в глаза. Проиллюстрируем это следующим примером.

**Задача 8.** Некто узнал, что в местности, где зарыт клад, растут три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, следует стать под березой (точка Б на рисунке 9) лицом к прямой, проходящей через дуб (точка Д) и сосну (точка С), при этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем следует пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько

было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (точку  $B_1$ ). Затем следует вернуться к березе и пойти к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямым углом налево, и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (точку  $B_2$ ). Клад зарыт точно посередине между вешками (точка  $K$ ).

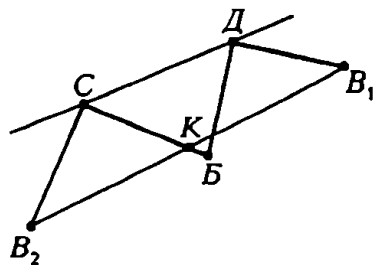


Рис.9

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Как ему это удалось сделать?

Представим себе, что точка  $B$  начала двигаться, и пусть  $\vec{v}$  — вектор ее мгновенной скорости. Так как длины отрезков  $DB_1$  и  $DB$  равны и отрезок  $DB_1$  получается из отрезка  $DB$  поворотом на угол  $\pi/2$ , то точка  $B_1$  будет двигаться согласованно с точкой  $B$ , а именно так, что вектор  $\vec{v}_1$  ее скорости будет получаться из вектора  $\vec{v}$  поворотом на угол  $\pi/2$ .

Аналогично, вектор  $\vec{v}_2$  скорости точки  $B_2$  будет получаться из  $\vec{v}$  поворотом на угол  $-\pi/2$ . Поэтому  $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ . Следовательно, при произвольном движении точки  $B$  скорость точки  $K$

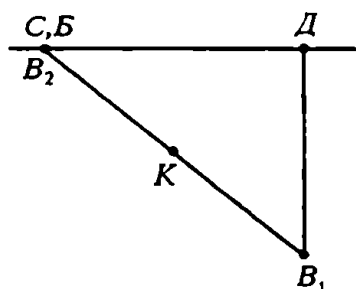


Рис.10

$$\vec{v}_K = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

всегда равна нулю: точка  $K$  неподвижна, и ее положение не зависит от положения точки  $B$ . Чтобы найти теперь положение точки  $K$ , достаточно выбрать одно любое положение точки  $B$ . Например, совместить точку  $B$  с точкой  $C$  и применить построение, известное кладоискателю (рис.10).

### Упражнения

1. Самолет, летящий горизонтально на постоянной высоте с постоянной скоростью  $v$ , большей скорости звука  $c$ , в некоторый момент

времени пролетает над наблюдателем. Какой угол  $\alpha$  с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку, в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол  $\varphi$ ?

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом  $R = 5$  м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели  $T = 10$  с. Под каким углом  $\alpha$  к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? Скорость пули  $v = 300$  м/с.

3. По пересекающимся под углом  $\alpha$  прямым дорогам едут с постоянными скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  две машины. Когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии  $L$  от перекрестка и приближается к нему. Определите наименьшее расстояние  $L_{\min}$  между машинами при дальнейшем движении. Через какое время  $\tau$  расстояние между машинами будет наименьшим?

4. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через  $t = 1,2$  с приземляется на расстоянии  $L = 6$  м от трамплина. Точка приземления и трамплин расположены на одной горизонтальной прямой. Определите величину  $v_0$  начальной скорости и угол  $\alpha$  наклона вектора  $\vec{v}_0$  к горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

5. Найдите максимальную высоту ограды  $H_{\max}$ , через которую вы могли бы перекинуть снежок, находясь на расстоянии  $l = 20$  м от нее. В расчетах используйте свои рекордные возможности по метанию снежков на дальность. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

6. Два жонглера, стоящие на горизонтальной площадке на расстоянии  $L$  друг от друга, перекидываются мячами, бросая их одновременно. С какой по величине скоростью  $v_{02}$  и под каким углом  $\beta$  к горизонту был брошен второй мяч, если он попал в первый, когда тот достиг максимальной высоты? Первый жонглер бросил мяч с начальной скоростью  $v_{01}$  под углом  $\alpha$  к горизонту. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

7. За время полета мяча, брошенного мальчиком под углом к горизонту, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 12%, и он упал на землю на расстоянии  $s_1 = 14$  м. Когда мяч был брошен под тем же углом к горизонту со скоростью на 20% больше, чем в первом случае, то горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 15%. На каком расстоянии  $s_2$  от мальчика упал мяч в этом случае? Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча:  $\vec{F}_c = -k\vec{v}$  ( $k > 0$ ). Опыты проводятся на горизонтальной поверхности.

## Давление и силы давления

Жидкость оказывает давление на стенки сосуда, в котором она находится, или на любую другую поверхность, соприкасающуюся с ней. Давление – величина скалярная. Оно измеряется абсолютной величиной нормальной (перпендикулярной поверхности) силы, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Давление в различных точках поверхности может быть разным. Поэтому площадь  $S$  мы должны брать достаточно маленькой.

По закону Паскаля давление жидкости не зависит от ориентации поверхности. Как бы ни была расположена поверхность в данном месте жидкости, давление на нее будет одним и тем же.

Сила давления всегда перпендикулярна поверхности. В обычных условиях она направлена так, как если бы жидкость стремилась расшириться.

**Задача 1.** *В сосуд, имеющий форму куба с ребром  $a$ , налита доверху жидкость плотностью  $\rho$ . Определите силы давления жидкости на дно и стенки сосуда.*

Давление жидкости на дно сосуда равно весу столба жидкости высотой  $a$  с площадью основания, равной единице:  $p_1 = \rho g a$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. (Для простоты здесь и в других задачах, где это специально не оговорено, предполагается, что атмосферное давление отсутствует.) Сила давления на дно сосуда (рис.1, $a$ ) равна

$$F_1 = p_1 S = \rho g a^3.$$



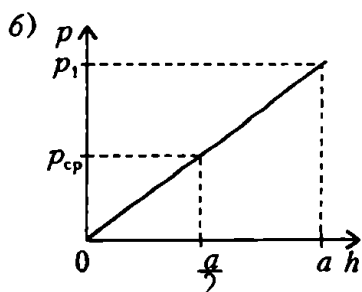
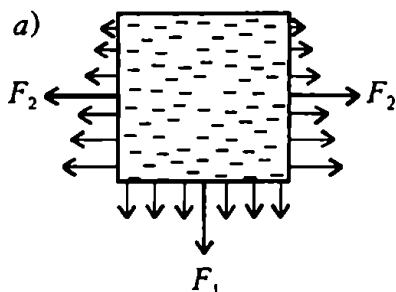


Рис.1

Давление на боковую грань куба будет зависеть от расстояния до поверхности жидкости. На глубине  $h$  давление равно  $p = \rho g h$ . Так как давление изменяется с глубиной по линейному закону (рис.1,б), для определения силы давления мы должны среднее давление

$$p_{\text{ср}} = \frac{\rho g a + 0}{2} = \frac{\rho g a}{2}$$

умножить на площадь боковой грани  $a^2$ :

$$F_2 = \frac{\rho g a^3}{2}.$$

**Задача 2.** В цилиндрический сосуд диаметром  $D = 0,2 \text{ м}$  вставлен поршень с длинной вертикальной трубкой диаметром  $d = 0,05 \text{ м}$  (рис.2). Максимальная сила трения между поршнем и стенками сосуда  $F_{\text{тр}} = 100 \text{ Н}$ .

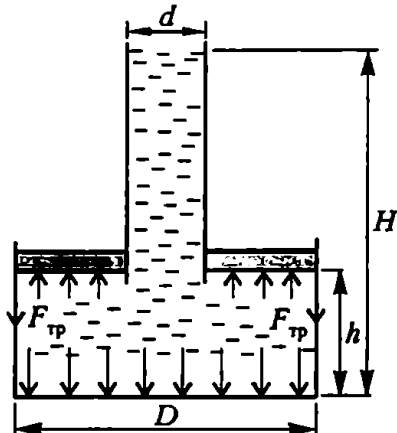


Рис.2

Через трубку в сосуд наливают воду. При каком уровне воды в трубке  $H$  поршень начнет двигаться? Чему будет равна при этом сила давления воды на дно сосуда? Поршень расположен на высоте  $h = 0,2 \text{ м}$  от дна сосуда. Плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Массой поршня с трубкой пренебречь.

Давление в жидкости на уровне поверхности поршня определяется расстоянием от этого уровня до свободной поверхности жидкости:

$$p_1 = \rho g (H - h).$$

Поршень начнет двигаться, когда сила давления на него со

стороны жидкости станет равной максимальной силе трения:

$$p_1(S - s) = F_{\text{тр}},$$

где  $S = \pi D^2/4$  и  $s = \pi d^2/4$  – площади поперечных сечений сосуда и трубки соответственно. Подставляя сюда выражение для  $p_1$ , находим

$$H = h + \frac{4F_{\text{тр}}}{\pi \rho g (D^2 - d^2)} = 0,5 \text{ м.}$$

Давление на дно сосуда равно  $p_2 = \rho g H$ . Сила давления на дно составляет

$$F = p_2 S = \rho g H \frac{\pi D^2}{4} \approx 160 \text{ Н.}$$

**Задача 3.** Длинная вертикальная труба с поршнем опущена одним концом в сосуд с водой. Вначале поршень находится у поверхности воды, затем его медленно поднимают. Как зависит сила, прикладываемая к поршню, от высоты  $h$  его поднятия? Площадь поперечного сечения трубы  $S$ , атмосферное давление  $p_0$ . Изменением уровня воды в сосуде, массой поршня и его трением о стенки трубы пренебречь.

При поднятии поршня вода под действием атмосферного давления будет вначале заполнять трубу (рис.3,а). Давление в трубе на уровне жидкости в сосуде равно атмосферному давлению  $p_0$ . Давление воды на поршень меньше атмосферного на величину веса столба жидкости высотой  $h$  и площадью основания, равной единице:

$$p = p_0 - \rho g h.$$

Сверху на поршень по-прежнему действует атмосферное давление. Поэтому для удержания поршня на высоте  $h$  к нему надо приложить силу,

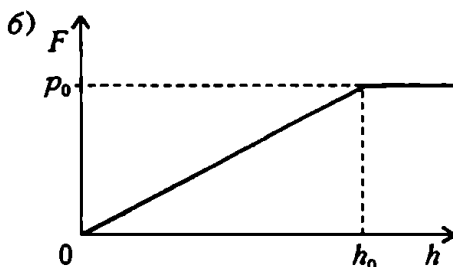
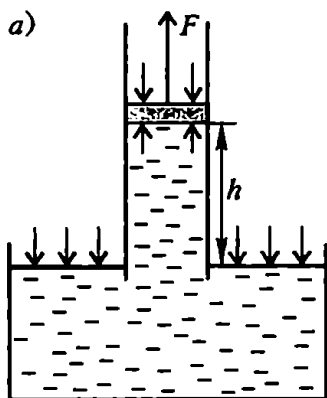


Рис.3

$$F = (p_0 - p) S = \rho g h S$$

и направленную вверх.

С увеличением  $h$  давление воды на поршень будет уменьшаться. На высоте  $h_0 = p_0/(\rho g) \approx 10$  м (где  $p_0 = 9,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>2</sup>) давление обратится в ноль. При дальнейшем поднятии поршня уровень воды в трубе изменяться не будет, так как сила атмосферного давления, действующая на столб жидкости в трубе снизу, уравнивается силой тяжести. Для удержания поршня на высоте  $h > h_0$  к нему надо приложить силу

$$F = p_0 S.$$

Зависимость прикладываемой к поршню силы  $F$  от высоты его поднятия  $h$  изображена графически на рисунке 3,б.

Высота столба воды в трубе  $h_0 = p_0/(\rho g)$ , очевидно, может служить для измерения атмосферного давления  $p_0$ . Однако обычно в барометрах используют ртуть, и нормальному атмосферному давлению тогда соответствует значительно меньшая высота столба ртути  $h_{рт} = p_0/(\rho_{рт} g) = 0,76$  м (плотность ртути  $\rho_{рт} = 1,36 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>).

Примером другого гидростатического устройства, широко используемого в практике, являются сообщающиеся сосуды. Известен закон сообщающихся сосудов: если давление над жидкостью в сосудах одинаково, то уровни жидкости в них равны. Нетрудно доказать этот закон для случая цилиндрических сосудов (рис.4). Так как жидкость в соединительной трубке находится в равновесии, то давления на нее с обеих сторон должны быть одинаковы. Поэтому равны и уровни жидкости в сосудах.

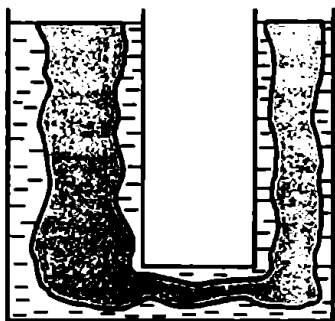


Рис.4

В общем случае для доказательства закона сообщающихся сосудов можно воспользоваться принципом отвердевания, который часто используют в гидростатике. Суть этого принципа заключается в следующем: всегда можно представить себе, что часть жидкости отвердела — равновесие оставшейся части жидкости от этого не нарушится. Так, в цилиндрических сообщающихся сосудах мы можем мысленно выделить часть жидкости, которая заполняла бы сообща-

ющиеся сосуды любой извилистой формы (см. рис. 4), и представить себе, что остальная часть жидкости отвердевает. Тогда равновесие выделенной нами части жидкости не нарушится, и, следовательно, уровни жидкости в извилистых сообщающихся сосудах будут такими же, какими были в цилиндрических сосудах, т.е. одинаковыми.

Закон сообщающихся сосудов справедлив только для однородной жидкости. Если в сосуды налиты жидкости разных плотностей, то уровни в сосудах могут быть разными.

**Задача 4.** В U-образную трубку налита ртуть. Поверх ртути в одно из колен трубки налили воду (рис. 5, а). Высота столбика воды  $l = 0,1$  м. Определите разность уровней жидкостей в коленях трубки. Нарисуйте график зависимости давления в обоих коленях трубки от высоты. Плотность ртути  $\rho_{\text{рт}} = 1,36 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Атмосферное давление не учитывайте.

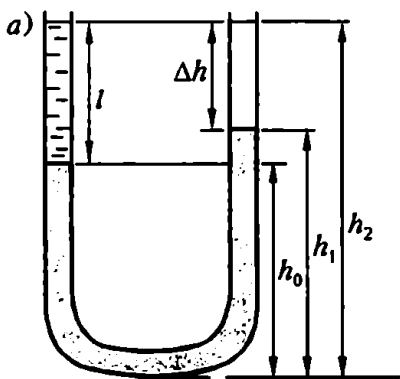
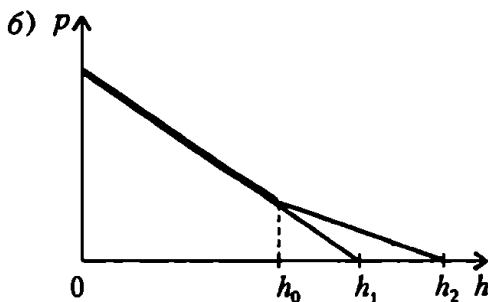


Рис. 5



Давления на ртуть на уровне  $h_0$  соприкосновения воды и ртути в обоих коленях должны быть одинаковы (закон сообщающихся сосудов для однородной жидкости). Поэтому

$$\rho_{\text{в}} g l = \rho_{\text{рт}} g (l - \Delta h),$$

где разность уровней  $h_2 - h_1$  обозначена через  $\Delta h$ . Отсюда

$$\Delta h = \frac{(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}) l}{\rho_{\text{рт}}} \approx 0,09 \text{ м}.$$

Давление в колене, содержащем только ртуть, меняется с высотой  $h$  по закону

$$p_1 = \rho_{\text{рт}} g (h_1 - h).$$

Эта формула справедлива и в изогнутой части трубки. (Представьте себе, что изогнутое колено сообщается с прямым цилиндрическим.

дрическим сосудом, в котором тоже находится ртуть. Тогда давления на одинаковой высоте в обоих сосудах должны быть равны.) В другом колене в области  $h_0 < h < h_2$ , где находится только вода, давление равно

$$p_2 = \rho_{\text{в}} g (h_2 - h).$$

Ниже уровня  $h_0$  зависимость давления от высоты дается той же формулой, что и в первом колене:

$$p_1 = \rho_{\text{в}} g l + \rho_{\text{рт}} g (h_0 - h) = \rho_{\text{рт}} g (h_1 - h).$$

Зависимость давления в коленях трубки от высоты изображена графически на рисунке 5,6. Как видно, выше уровня  $h_0$  давления на одинаковой высоте разные.

### Выталкивающая сила

На тело, погруженное в жидкость, как известно, действует выталкивающая сила. Эта сила является равнодействующей сил давления жидкости на тело. Найдем, например, выталкивающую силу, действующую на кубик с ребром  $a$ , целиком погруженный в жидкость плотностью  $\rho$ . Сила давления со стороны жидкости на верхнюю грань кубика равна

$$F_1 = \rho g h a^2,$$

где  $h$  – расстояние от этой грани до поверхности жидкости (для простоты мы считаем, что плоскость верхней грани кубика параллельна поверхности жидкости). На нижнюю грань кубика действует сила

$$F_2 = \rho g (h + a) a^2.$$

Силы давления на боковые грани кубика уравнивают друг друга. Равнодействующая сил давления, т.е. выталкивающая сила, равна

$$F = F_2 - F_1 = \rho g a^3$$

и направлена вертикально вверх. Мы получили закон Архимеда: выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость.

В общем случае закон Архимеда можно доказать с помощью принципа отвердевания. Мысленно заменим погруженное тело жидкостью. Очевидно, что эта жидкость будет находиться в равновесии. Следовательно, сила тяжести, действующая на нее, уравновешена силами давления со стороны окружающей жидкости. Если теперь представить себе, что выделенная нами часть отверде-

ла, то равновесие оставшейся части не нарушится, и поэтому не изменятся силы давления на отвердевшую жидкость. Равнодействующая этих сил будет по-прежнему равна силе тяжести.

При доказательстве мы считали, что тело целиком погружено в жидкость. Однако аналогичные рассуждения легко провести и в случае, когда только часть тела находится в жидкости (проделайте это сами). И мы опять получим, что выталкивающая сила равна силе тяжести, действующей на вытесненную телом жидкость:

$$F = \rho g V,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $V$  – объем погруженной в жидкость части тела,  $g$  – ускорение свободного падения.

**Задача 5.** На дне водоема установлена П-образная конструкция из трех одинаковых балок, соединенных между собой (рис.6). Как зависит сила давления этой конструкции на дно от уровня воды в водоеме? Рассмотрите два случая: 1) вода подтекает под опоры; 2) опоры плотно соприкасаются с дном. Балки имеют квадратное сечение со стороной  $a$ , длина балки

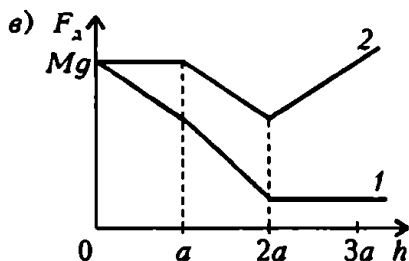
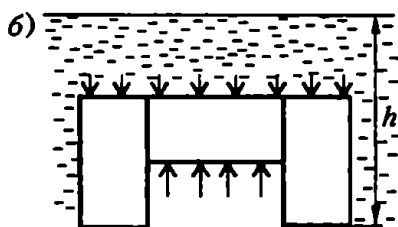
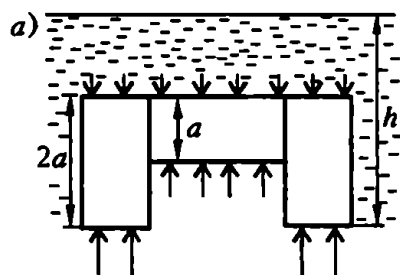


Рис.6

$l = 2a$ . Плотность материала балок  $\rho_0$ , плотность воды  $\rho$ .

Сила давления  $F_d$  на дно определяется разностью силы тяжести конструкции  $Mg = 6\rho_0ga^3$  и выталкивающей силы  $F$ . В первом случае (см. рис.6,а), когда вода подтекает под опоры (например, если дно водоема покрыто галькой), справедлив закон

Архимеда. Зависимость выталкивающей силы от высоты уровня воды  $h$  дается формулами

$$F = 2\rho gha^2 \text{ при } h \leq a,$$

$$F = 2\rho ga^3 + 4\rho ga^2(h - a) \text{ при } a \leq h \leq 2a,$$

$$F = 6\rho ga^3 \text{ при } h \geq 2a.$$

Соответствующий график для силы  $F_d$  изображен на рисунке 6, в – он обозначен цифрой 1.

Во втором случае отсутствует давление воды на опоры снизу (см. рис. 6, б), и пользоваться законом Архимеда уже нельзя. Для определения силы  $F$  необходимо найти равнодействующую сил давления:

$$F = 0 \text{ при } h \leq a,$$

$$F = 2\rho g a^2 (h - a) \text{ при } a \leq h \leq 2a,$$

$$F = 2\rho g a^2 (h - a) - 4\rho g a^2 (h - 2a) \text{ при } h \geq 2a.$$

Последнее выражение обращается в ноль при  $h = 3a$  и при больших  $h$  становится отрицательным. Это означает, что при  $h > 3a$  силы давления не выталкивают конструкцию из воды, а, наоборот, прижимают ее ко дну. Зависимость силы давления на дно от высоты уровня воды показана на втором графике рисунка 6, в.

**Задача 6.** Пробковый кубик с ребром  $a = 0,1$  м погрузили в воду на глубину  $h = 0,2$  м с помощью тонкостенной трубки диаметром  $d = 0,05$  м (рис. 7). Определите, какой груз надо положить в трубку, чтобы кубик от нее оторвался. Плотность пробки  $\rho_0 = 200 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

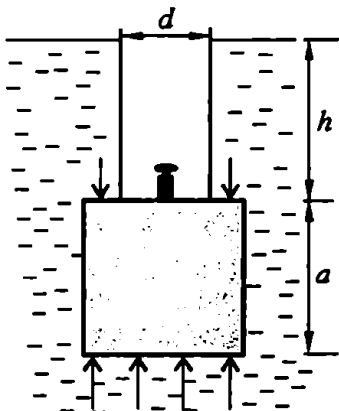


Рис. 7

Сила тяжести груза равна разности выталкивающей силы  $F$ , действующей на кубик, и силы тяжести кубика  $Mg = \rho_0 g a^3$ . Если бы кубик был окружен со всех сторон водой, то на него по закону Архимеда действовала бы выталкивающая сила  $F_0 = \rho g a^3$ . В нашем случае выталкивающая сила будет большей, так как на часть поверхности верхней грани кубика, «заключенную» в трубку, не действует

сила давления воды:

$$F = \rho g a^3 + \rho g h S,$$

где  $S = \pi d^2/4$  – площадь сечения трубки. Таким образом, сила тяжести грузика равна

$$mg = F - Mg = (\rho - \rho_0) g a^3 + \frac{\pi \rho g h d^2}{4} = 12 \text{ Н}.$$

Масса грузика составляет  $m \approx 1,2$  кг.

Выталкивающую силу, действующую на кубик, можно найти и другим способом. Рассмотрим кубик с трубкой как единое тело, вытесняющее объем воды  $V = a^3 + Sh$ . Тогда по закону Архимеда на кубик с трубкой действует выталкивающая сила

$$F = \rho g V = \rho g a^3 + \rho g h S,$$

которая равна выталкивающей силе, действующей на кубик, так как равнодействующая сил давления воды на трубку равна нулю.

### **Жидкость в движущемся сосуде**

Изучим теперь равновесие жидкости в сосуде, движущемся с ускорением. По второму закону Ньютона в этом случае векторная сумма всех сил, действующих на любой выделенный элемент жидкости, должна равняться  $m\vec{a}$ , где  $m$  – масса выделенной жидкости,  $\vec{a}$  – ускорение сосуда. Но на выделенный элемент жидкости действуют сила тяжести и силы давления со стороны окружающей жидкости. Их равнодействующая и должна быть равна  $m\vec{a}$ .

**Задача 7.** *Сосуд с жидкостью плотностью  $\rho$  падает с ускорением  $a$ . Определите давление жидкости на глубине  $h$  и силу давления на дно сосуда. Высота уровня воды в сосуде  $H$ , площадь дна сосуда  $S$ .*

Выделим столбик жидкости высотой  $h$  с площадью основания  $s$ . На него действуют сила тяжести  $\rho g h s$  и сила давления  $p s$ , направленная вверх. Равнодействующая этих сил создает ускорение столбика:

$$m a = \rho g h s - p s,$$

где  $m = \rho h s$  – масса столбика. Для давления  $p$  на глубине  $h$  отсюда находим

$$p = \rho (g - a) h.$$

Сила давления на дно сосуда равна

$$F = \rho (g - a) H S$$

и будет тем меньше, чем больше ускорение сосуда  $a$ . При  $a = g$  (свободное падение) сила давления жидкости обращается в ноль – наступает состояние невесомости. При  $a > g$  жидкость будет свободно падать с ускорением  $g$ , а сосуд – с большим ускорением, и вода вытечет из сосуда.

**Задача 8.** *На дне сосуда с жидкостью лежит тело. Может ли тело всплыть, если сосуд начнет двигаться вверх с ускорением? Определите силу давления тела на дно сосуда, если*



ускорение сосуда  $a$ , плотность жидкости  $\rho_0$ , плотность тела  $\rho$ , его объем  $V$ .

На тело, лежащее на дне сосуда, действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила реакции дна  $\vec{N}$  и выталкивающая сила  $\vec{F}$  (рис.8).

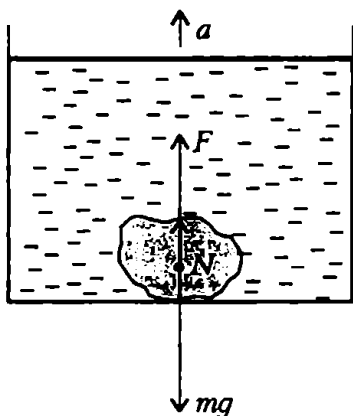


Рис.8

сосуд покоится, то сумма этих сил равняется нулю. При движении сосуда с ускорением  $\vec{a}$  вверх по второму закону Ньютона в проекции на вертикальное направление имеем

$$ma = N + F - mg.$$

Определим выталкивающую силу  $F$ . Аналогично решению предыдущей задачи, легко получить, что при ускоренном движении сосуда вверх давление на глубине  $h$  дается формулой

$$p = \rho(g + a)h,$$

т.е. давление в  $(g + a)/g$  раз больше, чем в неподвижном сосуде. Соответственно, будет большей и выталкивающая сила:

$$F = m_0 g \frac{g + a}{g} = m_0 (g + a),$$

где  $m_0 = \rho_0 V$  – масса вытесненной телом воды. Подставляя это выражение в формулу второго закона Ньютона, для силы реакции дна получаем

$$N = (m - m_0)(g + a).$$

Легко видеть, что в сосуде, движущемся с ускорением вверх, сила реакции дна всегда больше, чем в неподвижном. Поэтому тело не только не всплывает, а наоборот, сильнее прижимается ко дну.

**Задача 9.** Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением  $a$ . Определите форму поверхности жидкости в сосуде.

Выделим горизонтальный столбик жидкости длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $s$  (рис.9). По второму закону Ньютона,

$$ma = (p_1 - p_2)s,$$

где  $m = \rho ls$  – масса столбика,  $p_1$  и  $p_2$  – давления на него слева и справа. Давление на глубине  $h$  определяется по обычной формуле  $p = \rho gh$  (по вертикали ускорения нет). Подставляя

выражения для  $m$  и  $p$  в уравнение второго закона Ньютона, получаем

$$al = (h_1 - h_2)g,$$

$$\text{или } \frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}.$$

Но  $h_1 - h_2$  — это разность высот точек поверхности

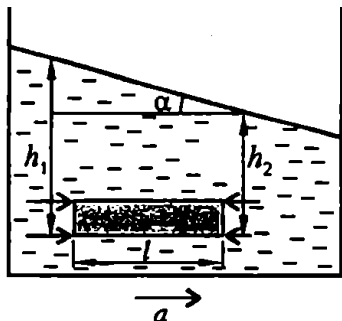
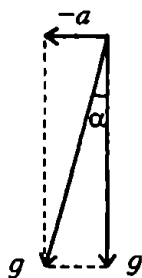


Рис. 9



жидкости. Мы получаем, что поверхность жидкости — плоскость, наклоненная к горизонту под углом  $\alpha$ , причем  $\operatorname{tg} \alpha = a/g$ .

Заметим, что давление жидкости на данной высоте здесь не одно и то же. Линии равного давления параллельны поверхности жидкости. Если ввести расстояние  $h'$  от точки до поверхности жидкости, то давление в этой точке равно

$$p = \rho gh = \frac{\rho gh'}{\cos \alpha} = \rho h' \sqrt{g^2 + a^2}.$$

Поэтому можно сказать, что ускоренное движение сосуда эквивалентно замене ускорения свободного падения  $\vec{g}$  на величину  $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}$ . Это утверждение в равной степени относится и к предыдущим двум задачам.

### Упражнения

1. Три сосуда, имеющие формы цилиндра, усеченного конуса и перевернутого усеченного конуса с одинаковыми площадями оснований и равными объемами, доверху наполнены водой. Как соотносятся между собой силы давления воды на дно сосудов?

2. Длинная вертикальная трубка погружена одним концом в сосуд с ртутью. В трубку наливают  $m = 0,71$  кг воды, которая не вытекает из трубки. Определите изменение уровня ртути в сосуде. Диаметр сосуда  $D = 0,06$  м, плотность ртути  $\rho_0 = 1,36 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>. Толщиной стенок трубки пренебречь.

3. В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает? Что будет, если в лед вморожен: а) кусочек свинца; б) кусочек пробки?

4. В цилиндрические сообщающиеся сосуды с диаметрами  $D = 0,06$  м и  $d = 0,02$  м налита вода. Как изменятся уровни воды в сосудах, если в один из сосудов поместить тело массой  $m = 0,02$  кг, которое будет плавать в воде? Плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

5. Сосуд с водой скользит без трения по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Определите, как расположена поверхность воды в сосуде.

Решение задач из этого раздела физики основывается на законах Архимеда и Паскаля. По закону Паскаля давление в жидкостях и газах передается во все стороны одинаково. Если при этом газ или жидкость находятся в поле тяжести, то давления в точках с разностью координат по высоте  $h$  отличаются на  $\rho gh$ , где  $\rho$  – плотность жидкости или газа,  $g$  – ускорение свободного падения. По закону Архимеда выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ в поле тяжести, равна весу жидкости или газа, вытесненного этим телом.

Ниже мы рассмотрим несколько характерных примеров использования этих законов при решении задач.

**Задача 1.** *Температура кипения воды зависит от давления окружающего воздуха. При увеличении или уменьшении давления воздуха на  $\Delta p = 27$  мм рт.ст. вблизи атмосферного давления температура кипения вблизи  $100^\circ\text{C}$  увеличивается или уменьшается на  $\Delta T_0 = 1^\circ\text{C}$ . При какой температуре кипит вода в ресторане «Седьмое небо» на высоте  $h = 330$  м от поверхности Земли?*

Разность давлений у поверхности Земли и на высоте  $h$  есть  $\rho gh$ , где  $\rho$  – плотность воздуха при давлении  $p = 10^5$  Па и температуре  $T = 290$  К, которая определяется уравнением состояния:

$$\rho = \frac{pM}{RT}$$

( $R$  – универсальная газовая постоянная,  $M$  – молярная масса воздуха). Таким образом, температура кипения на высоте  $h$  уменьшается на

$$\Delta T = \frac{\rho gh \Delta T_0}{\Delta p} = \frac{pMgh \Delta T_0}{\rho_1 g h_1 RT},$$

где  $\rho_1 = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> – плотность ртути,  $h_1 = 27 \cdot 10^{-3}$  м,

---

Опубликовано в «Кванте» №3 за 1996 год.

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ,  $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ ,  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .  
Подставив числовые значения, получим  $\Delta T \approx 1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Следовательно, температура кипения на высоте 330 м равна приблизительно  $99 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**Задача 2.** В последние годы приобрело большую популярность катание на воздушных шарах. Подъемная сила создается путем подогрева воздуха в оболочке шара газовой горелкой. Объем шара и давление воздуха в нем остаются при этом практически постоянными. Оцените, каким должен быть объем шара, чтобы при нагреве воздуха в нем на  $\Delta t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$  относительно окружающей атмосферы он смог поднять полезный груз массой  $m = 150 \text{ кг}$  (масса оболочки, корзины, человека и т.д.).

Выталкивающая сила, равная весу вытесненного шаром холодного атмосферного воздуха, уравнивается силой тяжести полезного груза и теплого воздуха, находящегося в оболочке шара. Пусть  $T_1 = 290 \text{ К}$  – температура атмосферы,  $T_2 = 320 \text{ К}$  – температура воздуха в шаре. Из уравнения состояния газа и условия плавания шара находим его объем:

масса холодного воздуха

$$m_1 = \frac{MpV}{RT_1},$$

масса горячего воздуха

$$m_2 = \frac{MpV}{RT_2},$$

по условию

$$m_1 - m_2 = m,$$

окончательно имеем

$$V = \frac{mR}{Mp \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \approx 1300 \text{ м}^3,$$

где  $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$  – молярная масса воздуха,  $p = 10^5 \text{ Па}$  – атмосферное давление,  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$  – универсальная газовая постоянная.

**Задача 3.** По некоторым оценкам, масса озона ( $\text{O}_3$ ), содержащегося в атмосфере Венеры, составляет  $\alpha = 10^{-5} \%$  массы всей атмосферы. Какой толщины слой образовал бы озон, если бы он собрался у поверхности планеты и имел температуру и давление, равные температуре и давлению атмосферы у поверхности Венеры? Ускорение свободного паде-

ния на Венере  $g = 8,2 \text{ м/с}^2$ , температура вблизи поверхности  $T = 800 \text{ К}$ .

Пусть  $m$  – масса атмосферы Венеры,  $M = 48 \text{ г/моль}$  – молярная масса озона,  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$  – универсальная газовая постоянная. Озон вблизи поверхности планеты занимает объем  $V = 4\pi r^2 h$  при давлении  $p$  и температуре  $T$ , где  $r$  – радиус Венеры. По условию,  $p = mg/(4\pi r^2)$ . С другой стороны, уравнение состояния для озона имеет вид

$$pV = \frac{\alpha m}{M} RT.$$

Подставив сюда выражения для  $V$  и  $p$ , получим искомую толщину слоя озона:

$$h = \frac{\alpha RT}{gM} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

**Задача 4.** Колокол для подводных работ представляет собой тонкостенный цилиндрический стакан, который опускается вверх дном с борта катера на дно водоема. Какова должна быть толщина стенок и дна колокола, чтобы он мог покоиться на дне водоема глубиной  $H = 3 \text{ м}$ ? Внутренний радиус колокола  $r = 1 \text{ м}$ , высота  $H = 2 \text{ м}$ , плотность стали  $\rho_{\text{ст}} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

Предположим, что в момент касания колоколом дна водоема между ними есть тонкая водяная прослойка (рис. 1). Для простоты

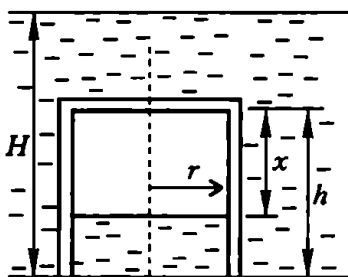


Рис. 1

толщину  $\Delta$  стенок и дна колокола будем считать одинаковой и малой по сравнению с его радиусом и высотой. Вес воды, вытесненной колоколом, определяется объемом воздушной прослойки  $\pi r^2 x$  и объемом боковых стенок и дна колокола  $2\pi r h \Delta$  и  $\pi(r + \Delta)^2 \Delta \approx \pi r^2 \Delta$ . Толщина стенок  $\Delta$  определяется условием, что сила тяжести колокола не меньше выталкивающей силы, т.е.

$$\rho_{\text{в}} (\pi r^2 x + 2\pi r h \Delta + \pi r^2 \Delta) \geq \rho_{\text{ст}} (\pi r^2 \Delta + 2\pi r h \Delta), \quad (*)$$

где  $\rho_{\text{в}} = 10^3 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды. Найдем теперь толщину  $x$  воздушной прослойки, оставшейся у «потолка» в момент касания колоколом дна водоема. Воздух в колоколе находится под давлением  $\rho_{\text{в}} g (H + H_0 (h - x))$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_{\text{в}} g H_0$  – наружное атмосферное давление ( $H_0 = 10,3 \text{ м}$ ).

По закону Бойля–Мариотта имеем

$$\rho_b g H_0 h \pi r^2 = \rho_b g (H_0 + H - (h - x)) x \pi r^2,$$

откуда получаем

$$x^2 + (H_0 + H - h)x - H_0 h = 0, \quad x \approx 1,6 \text{ м}.$$

Окончательно из неравенства (\*) для толщины стенок находим

$$\Delta = \frac{\rho_b r^2 x}{(\rho_{ст} - \rho_b)(r^2 + 2rh)} = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Приведем еще один расчет величины максимальной выталкивающей силы – с использованием закона Паскаля. Воздух в колоколе действует снизу на внутреннюю поверхность дна площадью  $\pi r^2$  с силой  $\rho_b g (H_0 + H - (h - x)) \pi r^2$ . На поверхность соприкосновения колокола с дном площадью  $2\pi r \Delta$  действует снизу сила, равная  $\rho_b g (H_0 + H) \cdot 2\pi r \Delta$ . Сверху на дно колокола площадью  $\pi (r + \Delta)^2 \approx \pi r^2 + 2\pi r \Delta$  действует сила  $\rho_b g (H_0 + H - h - \Delta)(\pi r^2 + 2\pi r \Delta)$ . Выталкивающая сила равна разности сил давления снизу и сверху:

$$\begin{aligned} & \rho_b g (H_0 + H - (h - x)) \pi r^2 + \\ & + \rho_b g (H_0 + H) \cdot 2\pi r \Delta - \rho_b g (H_0 + H - h - \Delta)(\pi r^2 + 2\pi r \Delta) = \\ & = \rho_b g (\pi r^2 x + (2\pi r h + \pi r^2) \Delta), \end{aligned}$$

что совпадает с величиной, приведенной в выражении (\*).

**Задача 5.** Вертикально расположенная U-образная трубка частично заполнена жидкостью так, что расстояния от открытых концов трубки до уровней жидкости в коленях равны  $h_0$ . Какой максимальный по толщине слой более легкой жидкости можно налить в одно из колен трубки, чтобы жидкость из трубки не выливалась? Отношение плотностей жидкостей равно  $k$  ( $k > 1$ ). Жидкости не смешиваются.

Пусть в правое колено трубки налита более легкая жидкость плотностью  $\rho_1$  и толщиной слоя  $h_1$  (рис.2). В другом колене ее уравнивает слой первоначально налитой жидкости плотностью  $\rho_2$  и толщиной  $h_2$ , так что  $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ . В

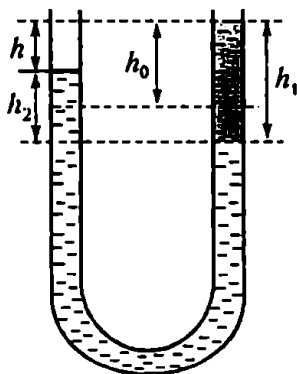


Рис.2

колоне с тяжелой жидкостью остался незаполненным слой толщиной

$$h = h_1 - h_2 = h_1 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}.$$

Заметим, наконец, что имеет место очевидное равенство

$$h_1 + h = 2h_0.$$

Окончательно для  $h_1$  находим

$$h_1 = \frac{2h_0\rho_2}{2\rho_2 - \rho_1} = \frac{2h_0k}{2k - 1}.$$

**Задача 6.** Плотность стратифицированной жидкости меняется с глубиной  $h$  по закону  $\rho(h) = \rho(0)(1 + \alpha h)$ , где  $\rho(0)$  – известная константа. Для измерения константы  $\alpha$  в жидкость опускают тяжелый цилиндр длиной  $l$  и сечением  $S$ , который висит вертикально на нити, привязанной к динамометру. Разность показаний динамометра равна  $\Delta F$  в положениях, когда верхняя грань цилиндра совпадает с поверхностью жидкости и когда она же находится на глубине  $h = l$  от поверхности. Найдите по этим данным величину  $\alpha$ .

Разность показаний динамометра определяется разностью давлений на верхнюю и нижнюю грани цилиндра, находящегося в жидкости. Так как плотность жидкости меняется с глубиной по линейному закону, давление меняется с глубиной по закону

$$p(h) = p(0) + \rho(0)g\left(h + \frac{\alpha h^2}{2}\right).$$

Если  $m$  – масса цилиндра, то в первом случае показание динамометра равно

$$F_1 = mg - \rho(0)g\left(l + \frac{\alpha l^2}{2}\right)S,$$

а во втором –

$$F_2 = mg - \rho(0)g\left(l + \frac{3\alpha l^2}{2}\right)S.$$

По условию,

$$\Delta F = F_1 - F_2,$$

откуда находим

$$\alpha = \frac{\Delta F}{\rho(0)gl^2S}.$$

Разность показаний динамометра, а следовательно, и константу  $\alpha$  можно найти и с помощью закона Архимеда, определив вес жидкости, вытесненной цилиндром в первом и втором случаях. Сделайте это самостоятельно.

**Задача 7.** Изогнутая трубка постоянного внутреннего сечения с открытыми концами расположена так, что ее прямолинейные участки вертикальны (рис.3). Трубка заполнена двумя несмешивающимися жидкостями: плотностью  $\rho_1$

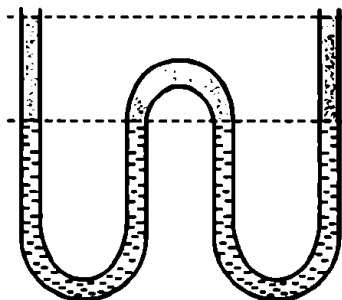


Рис.3

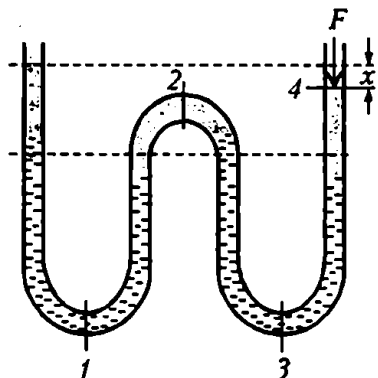


Рис.4

снизу и  $\rho_2$  сверху ( $\rho_1 > \rho_2$ ). Все границы раздела между жидкостями расположены на одном уровне горизонта, свободные поверхности жидкости в крайних коленах также находятся на одном горизонтальном уровне. При каких соотношениях между величинами плотностей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  такое положение жидкостей устойчиво?

Выведем жидкость из равновесия, сместив уровень в правом колене на  $x$  вниз (рис.4). Найдем силу  $F$ , которую надо прикладывать к воображаемому невесомому поршню в этом колене для поддержания равновесия. Если получится  $F > 0$ , то равновесие будет устойчивым.

Изменение давления под поршнем найдем из цепочки уравнений для сечений 1 – 4:

$$\Delta p_1 = \rho_1 g x ,$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_1 - \rho_2 g x + \rho_1 g x = 2\rho_1 g x - \rho_2 g x ,$$

$$\Delta p_3 = \Delta p_2 + \rho_1 g x - \rho_2 g x = 3\rho_1 g x - 2\rho_2 g x ,$$

$$\Delta p_4 = \Delta p_3 + \rho_1 g x = 4\rho_1 g x - 2\rho_2 g x .$$

Так как  $F = \Delta p_4 S$ , из условия  $F > 0$  получим ответ:

$$\rho_1 > \frac{\rho_2}{2} .$$



Условие устойчивости можно найти и через энергию: в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия должна быть минимальной. При смещении уровня на  $x$  изменение потенциальной энергии равно  $\Delta E_p = 2\rho_1 g x^2 S - \rho_2 g x^2 S$ , тогда из условия  $\Delta E_p > 0$  получаем  $\rho_1 > \rho_2/2$ .

### Упражнения

1. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа, давление которого у поверхности достигает  $p = 20$  атм, а температура составляет  $T = 800$  К. Оцените массу углекислого газа на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты  $r = 6300$  км. Какой толщины была бы атмосферы Венеры, если бы давление и температура ее были равны соответствующим значениям вблизи поверхности? Ускорение свободного падения на Венере  $g = 8,2$  м/с<sup>2</sup>, универсальная газовая постоянная  $R = 8,31$  Дж/(моль · К), молярная масса  $\text{CO}_2$  равна  $M = 44$  г/моль.

2. В горизонтальной закрытой с одного конца трубке столбиком ртути длиной  $l = 12$  см заперт слой воздуха толщиной  $L = 35$  см. Если трубку повернуть один раз открытым концом вниз, а другой раз вверх, то столбик ртути смещается. Разность этих смещений от начального горизонтального положения составляет  $\Delta x = 2$  см. Найдите величину наружного атмосферного давления (в см рт.ст.).

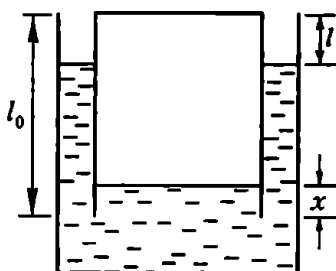


Рис.5

3. В мензурку с водой, стоящую вертикально, опустили вверх дном тонкостенную пробирку длиной  $l_0$ . В результате уровень воды в мензурке поднялся на  $\Delta h$ , а пробирка стала плавать в вертикальном положении (рис.5). Найдите толщину  $x$  слоя воды, зашедшей в пробирку, и длину  $l$  части пробирки, находящейся над водой.

Отношение площади сечения мензурки к площади сечения пробирки равно  $k$  ( $k > 1$ ). Атмосферное давление  $p$ , плотность воды  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ .

# ДВИЖЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

А.Овчинников, В.Плис

Систематизируя задачи о движении по окружности, обычно рассматривают два типа задач: о равномерном и неравномерном движениях.

## Равномерное движение по окружности

Криволинейное движение всегда характеризуется не равным нулю ускорением. Когда говорят о равномерном движении по окружности, имеют в виду постоянство величины (модуля) скорости и изменение ее направления. Ускорение в таком случае перпендикулярно вектору скорости и направлено по радиусу к центру окружности. Учет этого обстоятельства существенно облегчает решение задач, так как в соответствии со вторым законом Ньютона точно известно направление суммы всех сил, действующих на тело. Векторное уравнение, отвечающее второму закону Ньютона, часто бывает удобнее заменить скалярными уравнениями, куда входят проекции соответствующих векторов на координатные оси. При этом одну ось обычно направляют по радиусу к центру окружности, а другую (если не все силы лежат в плоскости окружности) – перпендикулярно плоскости окружности.

**Задача 1.** Кольцо, изготовленное из однородного резинового жгута длиной  $l$ , массой  $m$  и жесткостью  $k$ , вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца, с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите радиус  $R$  вращающегося кольца.

Рассмотрим элементарный участок вращающегося кольца длиной  $\Delta L$

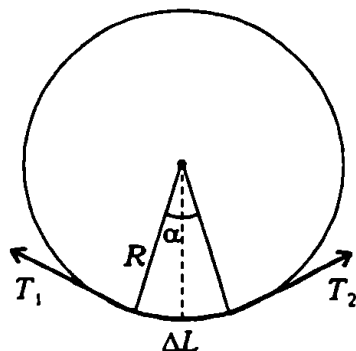


Рис. 1

---

Опубликовано в «Кванте» №1 за 2000 год.

и массой  $\Delta m = m\Delta L/(2\pi R)$ . На выделенный участок действуют силы упругости  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$  (рис.1), направленные по касательным к кольцу и одинаковые по модулю:  $T_1 = T_2 = T$ . По второму закону Ньютона,

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2.$$

Рассматриваемый участок равномерно движется по окружности; следовательно, его ускорение в любой момент времени направлено к центру окружности и по величине равно  $\omega^2 R$ . Это ускорение сообщается суммой сил  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ , приложенных к участку.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях сил и ускорений на радиальное направление:

$$\frac{m\Delta L}{2\pi R} \omega^2 R = 2T \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Величина  $T$  упругой силы (силы натяжения) связана с удлинением  $(2\pi R - l)$  кольца законом Гука:

$$T = k(2\pi R - l).$$

При малых углах  $\sin(\alpha/2) \approx \alpha/2 = \Delta L/(2R)$ . С учетом этих соотношений уравнение движения принимает вид

$$\frac{m}{2\pi} \omega^2 \Delta L = 2k(2\pi R - l) \frac{\Delta L}{2R}.$$

Отсюда находим

$$R = \frac{2\pi kl}{4\pi^2 k - \omega^2 m}.$$

Из полученного выражения, казалось бы, следует, что при  $\omega = 2\pi\sqrt{k/m}$  кольцо должно неограниченно растягиваться. Однако этого не случится, так как закон Гука нарушится уже при небольших удлинениях, а при некоторой скорости вращения кольцо просто разорвется.

**Задача 2.** Маленький деревянный шарик прикреплен с помощью нерастяжимой нити длиной  $l = 30$  см к дну цилиндрического сосуда с водой. Расстояние от центра дна до точки закрепления нити  $r = 20$  см. Сосуд раскручивают вокруг вертикальной оси, проходящей через центр дна. При какой угловой скорости вращения  $\omega$  нить отклонится от вертикали на угол  $\alpha = 30^\circ$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

Нить с шариком отклонится к оси вращения (рис.2). На шарик будут действовать три силы: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила

натяжения нити  $\vec{T}$  и сила Архимеда  $\vec{F}_A$ . Найдем последнюю силу. Обозначим объем шарика  $V$ , плотность дерева, из которого изготовлен шарик,  $\rho_{\text{ш}}$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}}$ . Рассмотрим сначала движение жидкости до погружения в нее шарика. Любой элементарный объем воды равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Следовательно, вертикальная составляющая суммы сил давления, т.е. силы Архимеда, уравнивает силу тяжести, действующую на жидкость в рассматриваемом объеме, а горизонтальная составляющая силы Архимеда сообщает этой жидкости центростремительное ускорение. При замещении жидкости в элементарном объеме соответствующим фрагментом шарика эти составляющие не изменяются. Тогда вертикальная составляющая  $\vec{F}_{A1}$  силы Архимеда, действующей на шарик, по величине равна  $\rho_{\text{в}} V g$ , а направленная к оси вращения горизонтальная составляющая  $\vec{F}_{A2}$  силы Архимеда по величине равна  $\rho_{\text{в}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha)$ .

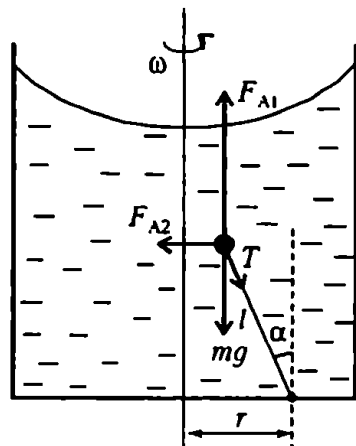


Рис.2

Под действием приложенных сил шарик движется равномерно по окружности радиусом  $r - l \sin \alpha$  в горизонтальной плоскости. По второму закону Ньютона,

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_A, \text{ или } m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на вертикальную ось, находим

$$0 = -\rho_{\text{ш}} V g - T \cos \alpha + \rho_{\text{в}} V g,$$

а проектируя силы и ускорение в горизонтальной плоскости на радиальное направление, получаем

$$\rho_{\text{ш}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = \rho_{\text{в}} V \omega^2 (r - l \sin \alpha) - T \sin \alpha.$$

Исключая  $T$  из двух последних соотношений, определяем искомую угловую скорость:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r - l \sin \alpha}} \approx 11 \text{ с}^{-1}.$$

Умение описывать движение по окружности может суще-

ственно помочь при анализе движений по еще более сложным траекториям: винтовой линии или циклоиде. Действительно, движение по винтовой линии можно представить в виде суперпозиции движения по окружности и движения по прямой, перпендикулярной плоскости окружности и проходящей через точку окружности. Движение по циклоиде тоже возможно представить как одновременные два движения: по окружности и по прямой, лежащей в плоскости окружности.

**Задача 3.** По длинной проволочной винтовой линии с шагом  $H$ , ось которой вертикальна, скользит бусинка. Радиус воображаемой цилиндрической поверхности, на которой расположена винтовая линия, равен  $R$ . Коэффициент трения скольжения бусинки по проволоке  $\mu$  ( $\mu < H/(2\pi R)$ ). Найдите установившуюся скорость  $v_*$  скольжения бусинки. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

На бусинку действуют силы тяжести  $m\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}$  и трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . При этом  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , как обычно, а  $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ , где  $\vec{N}_1$  – горизонтальная составляющая, направленная

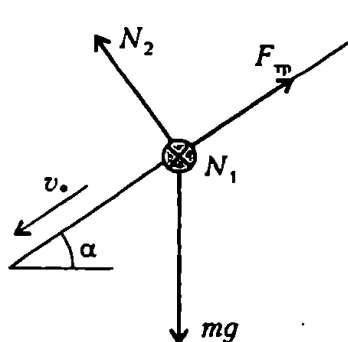


Рис.3

ная к оси винтовой линии, а  $\vec{N}_2$  лежит в одной вертикальной плоскости с  $m\vec{g}$  и  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.3).

Из второго закона Ньютона следует, что с ростом величины скорости будет расти величина силы трения, так что естественно ожидать выхода движения на установившийся режим скольжения с некоторой скоростью  $v_*$ . Для определения этой скорости перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся по вертикали вниз со скоростью  $v_* \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол наклона вектора скорости к горизонту и  $\operatorname{tg} \alpha = H/(2\pi R)$ . В выбранной системе бусинка равномерно движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v_* \cos \alpha$ , при этом ускорение бусинки направлено к оси винтовой линии и по величине равно  $(v_* \cos \alpha)^2/R$ . Из второго закона Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, находим

$$m \frac{(v_* \cos \alpha)^2}{R} = N_1.$$

В вертикальной плоскости справедливо равенство

$$0 = m \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}},$$

откуда, переходя к проекциям сил на взаимно ортогональные направления, получим

$$F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha.$$

Из этих соотношений с учетом того, что  $F_{\text{тр}} = \mu \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ , окончательно имеем

$$v_* = \left( \frac{gR}{\mu} \right)^{1/2} \left( (tg^2 \alpha - \mu^2)(tg^2 \alpha + 1) \right)^{1/4}.$$

**Задача 4\*.** Протон движется в однородном и постоянном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Векторы начальной скорости  $\vec{v}_0$  и индукции  $\vec{B}$  образуют угол  $\alpha$ . Определите вид траектории протона в лабораторной системе отсчета. Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

В соответствии со вторым законом Ньютона и выражением для магнитной составляющей силы Лоренца имеем

$$m \vec{a} = e[\vec{v} \vec{B}],$$

где  $[\vec{v} \vec{B}]$  – векторное произведение.<sup>1</sup> Проанализируем это уравнение. Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости  $\vec{v}$ ; следовательно, эта сила не совершает работы, и по теореме об изменении кинетической энергии величина  $v$  скорости протона остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0$ . Сила Лоренца перпендикулярна также вектору индукции  $\vec{B}$ ; следовательно, составляющая  $\vec{v}_{\parallel}$  вектора скорости, параллельная вектору индукции, тоже остается постоянной и равной по величине своему начальному значению  $v_0 \cos \alpha$ . Тогда величина  $v_{\perp}$  перпендикулярной вектору индукции составляющей скорости протона тоже остается постоянной и равной своему начальному значению  $v_0 \sin \alpha$ .

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории со скоростью  $\vec{V} = \vec{v}_{\parallel}$ . С учетом закона сложения скоростей и представления скорости

---

<sup>1</sup> При решении этой и следующей задач используется понятие векторного произведения, которое известно учащимся специализированных классов физико-математического профиля. (Прим. ред.)

в виде суммы составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$$

получаем, что в рассматриваемой системе протон движется в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ , с постоянной по величине (но не по направлению!) скоростью  $\vec{v}' = \vec{v}_\perp$ . Уравнение движения принимает вид

$$m \vec{a}' = e[\vec{v}_\perp \vec{B}].$$

Отсюда следует, что величина вектора ускорения равна

$$a' = \frac{ev_\perp B}{m} = \frac{ev_0 \sin \alpha}{m}$$

и постоянна, а его направление перпендикулярно вектору скорости  $\vec{v}_\perp$ . Значит, в рассматриваемой системе отсчета протон равномерно движется по окружности радиусом

$$R = \frac{v_\perp^2}{a'} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{eB}$$

с частотой

$$\omega = \frac{v_\perp}{R} = \frac{eB}{m},$$

не зависящей от скорости.

Соответственно, движение протона относительно лабораторной системы отсчета осуществляется по винтовой линии (рис.4) с шагом винта

$$H = v_\parallel T = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2\pi R}{v_\perp} = 2\pi \frac{mv_0}{eB} \cos \alpha.$$

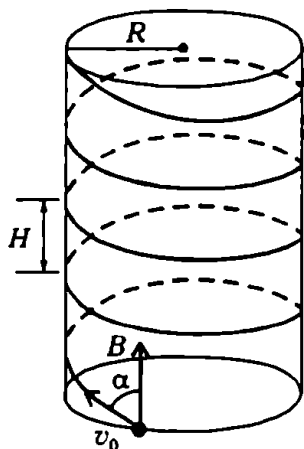


Рис.4

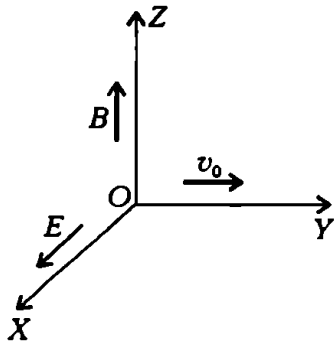


Рис.5

**Задача 5\*.** Протон движется в области пространства, где созданы однородные и постоянные электрическое  $\vec{E}$  и магнитное  $\vec{B}$  поля. Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и вектор  $\vec{v}_0$  начальной скорости протона взаимно перпендикулярны (рис.5), причем  $E \ll Bc$ , где  $c$  – скорость света. Определите вид траектории протона в этой системе отсчета. Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

Уравнение второго закона Ньютона для протона в скрещенных электрическом и магнитном полях имеет вид

$$m \vec{a} = e \vec{E} + e[\vec{v} \vec{B}].$$

Попытаемся найти систему отсчета, в которой протон «чувствует» только магнитное поле. Для этого перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лабораторной системы с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Учитывая закон сложения скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

и закон сложения ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A},$$

уравнение движения запишем в виде

$$m(\vec{a}' + \vec{A}) = e(\vec{E} + [\vec{V} \vec{B}]) + e[\vec{v}' \vec{B}].$$

Отсюда следует, что в выбранной системе, движущейся с постоянной скоростью

$$\vec{V} = \frac{[\vec{E} \vec{B}]}{B^2}, \quad V = \frac{E}{B} \ll c,$$

первое слагаемое в правой части уравнения движения обращается в ноль. Кроме того, вследствие постоянства скорости,

$$\vec{A} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = 0,$$

так что уравнение движения протона

$$m \vec{a}' = e[\vec{v}' \vec{B}]$$

совпадает с уравнением, полученным в предыдущей задаче.

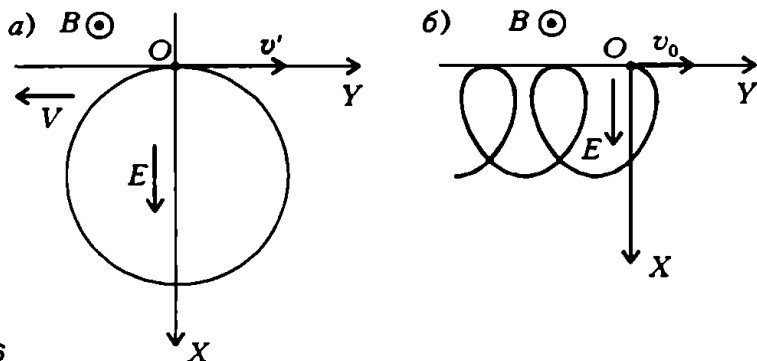


Рис. 6



Приходим к выводу, что в системе отсчета, перемещающейся в отрицательном направлении оси  $OY$  со скоростью  $V = E/B$  (рис.6,а), протон равномерно движется по окружности ( $\vec{v}' \perp \vec{B}$ ) радиусом  $R = \frac{v'}{\omega} = \frac{m}{eB} \left( v_0 - \frac{E}{B} \right)$  с частотой  $\omega = \frac{eB}{m}$ .

Итак, относительно лаборатории частица участвует в двух движениях: равномерном движении по окружности в подвижной системе отсчета и движении вместе с подвижной системой отсчета с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Средняя (дрейфовая) скорость частицы относительно лаборатории равна  $E/B$  и не зависит ни от массы, ни от величины заряда, ни от знака заряда. Все эти параметры влияют лишь на движение по окружности. В зависимости от соотношения между  $v$  и  $E/B$  траектория выглядит как сжатая, удлиненная или обычная циклоида (рис.6,б).

Заметим, что с такой же суперпозицией движений мы встречаемся при изучении движения точек катящегося колеса.

### Неравномерное движение по окружности

В отличие от равномерного движения по окружности, в случае неравномерного движения ускорение характеризует изменение не только направления скорости, но и ее величины. Соответственно, вектор ускорения удобно представить в виде суммы двух ускорений: ускорения, перпендикулярного скорости, его называют нормальным  $\vec{a}_n$ , или центростремительным (иногда осецистремительным), и ускорения, касательного к траектории, его называют тангенциальным  $\vec{a}_t$  (латинское tangens означает касающийся).

**Задача 6.** Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги, представляющему собой дугу в  $1/12$  длины окружности радиусом  $R = 100$  м. С какой наибольшей по величине скоростью автомобиль может выехать на прямолинейный участок дороги, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию  $\mu = 0,3$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Все колеса автомобиля ведущие. Нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

На автомобиль в процессе разгона действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$ , которая единственная сонаправлена с ускорением  $\vec{a}$ . Проанализируем изменение вектора ускорения со временем. Для этого удобно

обратиться к величинам тангенциальной  $a_t$  и нормальной  $a_n$  составляющих ускорения. По условию,  $a_t$  постоянна; следовательно, скорость  $v$  автомобиля в конце разгона и тангенциальная составляющая  $a_t$  связаны соотношением

$$v = \sqrt{2a_t s} = \sqrt{2a_t \frac{\pi R}{6}},$$

откуда получаем

$$a_t = \frac{3v^2}{\pi R}.$$

Нормальная (центростремительная) составляющая определяется формулой

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

и достигает наибольшего значения в конце участка разгона, где скорость наибольшая. По теореме Пифагора,

$$a_{\max} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{3v^2}{\pi R}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2} = \frac{v^2}{R} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}.$$

Из второго закона Ньютона следует

$$N = mg,$$

а сила трения может сообщить наибольшее по величине ускорение

$$a_{\max} = \frac{F_{\text{тр max}}}{m} = \frac{\mu N}{m} = \mu g.$$

Таким образом, наибольшая скорость в конце участка разгона равна:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{\pi}\right)^2}}} \approx 15 \text{ м/с}.$$

Однако, значительное количество задач о неравномерном движении по окружности не решается простой записью проекций уравнения второго закона Ньютона (уравнения движения) на радиальное и касательное направления. На таком пути возникают математические трудности при использовании тангенциальной составляющей уравнения движения. Выход находят в замене этого уравнения формулой, описывающей закон сохранения механической энергии.

**Задача 7.** На горизонтальной поверхности лежит полушар массой  $M = 100 \text{ г}$  (рис.7). С его верхней точки без трения с

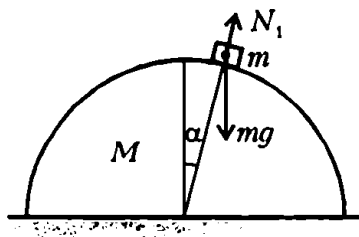


Рис. 7

нулевой начальной скоростью скользит шайба массой  $m = 10$  г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается при  $\alpha = 10^\circ$ . Найдите коэффициент трения  $\mu$ .

Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел.

На шайбу действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила нормальной реакции  $\vec{N}_1$  (см. рис. 7). Из второго закона Ньютона,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на радиальное направление, в момент начала движения полушара получаем

$$m\frac{v^2}{R} = mg \cos \alpha - N_1.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha).$$

Из этих соотношений находим величину действующей на шайбу силы нормальной реакции в рассматриваемый момент времени:

$$N_1 = mg(3 - 2 \cos \alpha).$$

На полушар действуют силы тяжести  $M\vec{g}$ , нормальной реакции  $\vec{N}_2$ , трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  и давления со стороны шайбы  $\vec{F}$  (рис. 8). Из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на вертикальное направление, с учетом равенства  $F = N_1$  получаем

$$N_2 = Mg + F \cos \alpha =$$

$$= Mg + mg(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha.$$

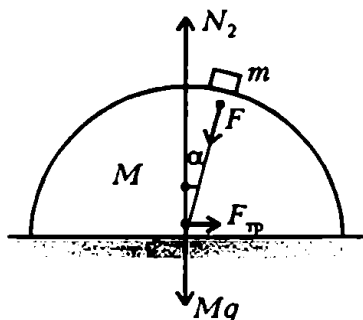


Рис. 8

В момент начала движения полушара величина силы трения связана с величиной силы нормальной реакции соотношением  $F_{\text{тр}} = \mu N_2$ , а из второго закона Ньютона, записанного в проекциях на горизон-

тальное направление, следует

$$F_{\text{тр}} = F \sin \alpha = mg(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha .$$

Отсюда находим

$$\mu = \frac{F_{\text{тр}}}{N_2} = \frac{m(3 - 2 \cos \alpha) \sin \alpha}{M + m(3 - 2 \cos \alpha) \cos \alpha} \approx \frac{m}{M} \alpha = 0,017 .$$

### Упражнения

1. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует со скоростью  $v$  вода. Радиус кольца  $R$ , диаметр трубки  $d \ll R$ . С какой силой  $T$  растянута резиновая трубка?

2. Закрытая пробирка длиной  $l$ , полностью заполненная жидкостью, составляет угол  $\alpha$  с вертикальной осью, проходящей через ее нижний конец. В жидкости плавает легкая пробка. До какой угловой скорости  $\omega$  следует раскрутить пробирку вокруг вертикальной оси, чтобы пробка погрузилась до середины пробирки?

3. Слабо расходящийся пучок протонов, стартующих из одной точки пространства, в котором создано однородное постоянное магнитное поле  $\vec{B}$ , так, что векторы скорости  $\vec{v}_0$  протонов составляют малые углы с вектором поля  $\vec{B}$ . На каком расстоянии  $L$  от точки старта пучок протонов впервые сфокусируется? Масса протона  $m$ , заряд  $e$ .

4. На кольцевой горизонтальной дороге радиусом  $R = 1000$  м стартует гоночный автомобиль и разгоняется так, что величина скорости увеличивается на  $2$  м/с за каждую секунду. В течение какого времени  $\tau$  гонщику удастся удерживать автомобиль на дороге, если коэффициент трения скольжения шин по дорожному покрытию  $\mu = 0,5$ ? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Ведущие колеса автомобиля – задние, нагрузки на переднюю и заднюю оси одинаковы. Центр масс автомобиля расположен очень низко.

5. Маятник, имеющий на конце нити шарик массой  $m$  и зарядом  $Q$ , находится в поле тяжести и в однородном электрическом поле, напряженность  $\vec{E}$  которого перпендикулярна ускорению свободного падения  $\vec{g}$ . Маятник отклоняют до горизонтального положения в плоскости векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{g}$  и отпускают. Найдите натяжение нити  $T$ , когда маятник будет проходить положение равновесия в данных полях.

6. На горизонтальной поверхности лежит полушар массой  $M = 200$  г. Из его верхней точки в противоположных направлениях без трения с нулевыми начальными скоростями начинают скользить две шайбы с массами  $m_1 = 20$  г и  $m_2 = 15$  г. Из-за трения между полушаром и горизонтальной поверхностью движение полушара начинается в тот момент, когда одна из шайб пройдет  $1/36$  длины окружности большого круга. Найдите коэффициент трения  $\mu$ .

# ЗАДАЧИ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ

А. Черноуцан

Две основные модели механики — это материальная точка и твердое тело. В отличие от точек, твердые тела могут двигаться не только поступательно, но и вращательно. Поскольку динамику вращательного движения твердого тела в школе не изучают, большинство задач динамики посвящено движению точки. И тем не менее, некоторые школьные задачи (как олимпиадные, так и вступительные) имеют дело с протяженными телами, массу которых нельзя считать сосредоточенной в одной точке.

В этой статье будут рассмотрены разнообразные линейные объекты — веревки (массивные нити), цепочки, струи, масса которых распределена вдоль одной линии. Подход к обсуждению движения таких тел, в сущности, обычный — в основе лежат уравнения динамики точки, записанные для небольшого элемента протяженного тела. При этом в некоторых случаях достаточно записать уравнения динамики для одного-единственного элемента линейного объекта. Главное — правильно этот элемент выбрать. В других случаях возникает необходимость просуммировать уравнения движения, записанные для отдельных элементов, по всей длине. При удачной записи уравнений (при проектировании на удачно выбранные оси) суммирование может оказаться совсем несложным.

Теперь — конкретные задачи.

**Задача 1.** Струя воды сечением  $S$  ударяется о стенку, расположенную перпендикулярно струе. Скорость воды в струе  $v$ , после удара вода теряет скорость и стекает по стенке. Какова сила давления воды на стенку? Плотность воды  $\rho$ .

Изменение импульса воды за время  $\Delta t$  равно импульсу силы реакции, действующей на воду со стороны стенки, а по третьему закону Ньютона эта сила равна по величине искомой силе давления струи на стенку. Изменение импульса воды сводится к изменению импульса элемента струи длиной  $\Delta l = v\Delta t$ , который

---

Опубликовано в «Кванте» №2 за 1998 год.

за время  $\Delta t$  пришел в соприкосновение со стенкой (рис. 1):

$$0 - \Delta m v = -F \Delta t.$$

Подставляя  $\Delta m = \rho(v \Delta t) S$  и сокращая на  $\Delta t$ , получаем

$$F = \rho S v^2.$$

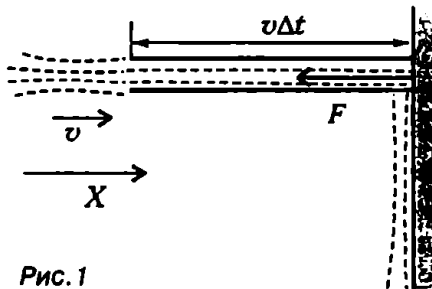


Рис. 1

Характерно, что интервал времени  $\Delta t$  и длина элемента струи  $\Delta l$  выбираются произвольно, но в ответ они, конечно же, не входят.

**Задача 2.** Космический корабль массой  $M$  движется в глубоком космосе. Для управления кораблем используется реактивный двигатель, который выбрасывает реактивную струю со скоростью  $\vec{u}$  относительно корабля, причем расход топлива в струе равен  $\mu$  (расход топлива — это масса топлива, выбрасываемая за единицу времени). Найдите ускорение корабля.

Изменение импульса замкнутой системы корабль — топливо за время  $\Delta t$  равно нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой скорость корабля в начале этого интервала времени равна нулю:

$$0 = M \overline{\Delta v} + \mu \Delta t \vec{u},$$

где  $\overline{\Delta v}$  — изменение скорости корабля. Перепишем это уравнение в виде

$$M \frac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = -\mu \vec{u}, \text{ или } M \vec{a} = -\mu \vec{u}.$$

Стоящее в правой части выражение называется реактивной силой. Если на корабль действует еще и внешняя сила  $\vec{F}$  (например, со стороны поля тяготения), то ускорение корабля вычисляется по формуле

$$M \vec{a} = -\mu \vec{u} + \vec{F}.$$

Это уравнение называется уравнением Мещерского. При его решении, вообще говоря, надо учитывать, что масса корабля  $M$  уменьшается со временем.

**Задача 3.** Тонкая цепочка длиной  $l$  и массой  $m$  удерживается за верхний конец так, что нижним концом она касается земли. Цепочку отпускают, и она начинает падать. Найдите силу давления цепочки на землю через время  $t$ . Цепочка неупругая и мягкая.

Поскольку цепочка мягкая, сила взаимодействия нижних звеньев с поверхностью не передается верхним, которые свободно падают с ускорением  $g$ . К моменту времени  $t$  часть цепочки длиной  $gt^2/2$  и массой  $(m/l)gt^2/2$  лежит на земле, а верхняя часть цепочки падает со скоростью  $v = gt$ . Сила реакции земли, равная по величине силе давления цепочки, складывается из двух частей. Одна уравнивает силу тяжести неподвижной части цепочки и равна

$$F_1 = \frac{mg^2t^2}{2l}.$$

Вторая связана с изменением импульса элемента цепочки длиной  $v\Delta t$  и массой  $\Delta m = (m/l)v\Delta t$  при его соприкосновении с поверхностью и находится из уравнения  $F_2\Delta t = \Delta mv$ , откуда

$$F_2 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2t^2}{l}.$$

Видно, что  $F_2 = 2F_1$ , а полная сила давления

$$F = \frac{3mg^2t^2}{2l}$$

в три раза больше веса неподвижной части цепочки. Перед самым концом падения эта сила достигает максимального значения  $3mg$ .

**Задача 4.** Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на уступе высотой  $H$  (рис.2). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая и мягкая.

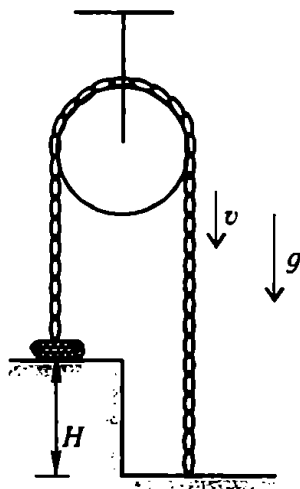


Рис.2

Рассмотрим сначала правую часть цепочки. Поскольку цепочка неупругая и мягкая, взаимодействие с полом нижнего звена не передается верхним. Значит, натяжение цепочки возле пола равно нулю. Так как цепочка при установившемся режиме движется равномерно, натяжение на некоторой высоте  $h$  равно весу нижней части цепочки:

$$T_h = \lambda gh,$$

где  $\lambda$  — масса единицы длины цепочки. Перейдем теперь к левой части цепочки. Натяжение в нижней части, над самым

уступом, можно найти, записав изменение импульса элемента цепочки длиной  $v\Delta t$  и массой  $\lambda v\Delta t$ , который за время  $\Delta t$  приходит в движение:

$$\lambda v \Delta t v = T_H \Delta t, \text{ или } T_H = \lambda v^2.$$

При равномерном движении натяжения справа и слева на одном уровне должны быть равны:

$$T_h = T_H,$$

откуда получаем

$$\lambda g H = \lambda v^2, \text{ или } v = \sqrt{gH}.$$

Попробуем решить эту задачу из энергетических соображений. Если быть не очень внимательным, можно легко прийти к противоречию с полученным выше результатом. Казалось бы, при установившемся движении цепочки работа силы тяжести за время  $\Delta t$  должна быть равна выделившемуся за то же время количеству теплоты. Работа равна  $\lambda g H v \Delta t$ , а количество теплоты, выделяющееся при неупругом ударе о пол элемента длиной  $v\Delta t$ , равно  $\lambda v \Delta t v^2/2$ . Однако, если приравнять эти выражения, получим ответ, в  $\sqrt{2}$  раз больший предыдущего. В чем же здесь дело?

Оказывается, тепло выделяется не только при неупругом ударе элемента цепочки о пол, но и (хотя это не столь очевидно) при разгоне такого же элемента на уступе до скорости  $v$ . Более того, эти количества теплоты оказываются одинаковыми. Это приводит к тому, что общее количество теплоты увеличивается вдвое и лишний  $\sqrt{2}$  из ответа исчезает. Действительно, сравним работу силы натяжения при подъеме элемента длиной  $v\Delta t$  с уступа:  $\lambda v^2 (v\Delta t)$  с кинетической энергией, приобретенной этим элементом:  $(\lambda v \Delta t) v^2/2$ . Видно, что работа в два раза больше, а разность между работой и энергией как раз равна количеству теплоты, которое выделилось при разгоне этого элемента.

Чтобы лучше понять механизм выделения тепла, представим себе, что мы хотим разогнать тело массой  $m$  до скорости  $v$  при помощи пружины, для чего начнем перемещать конец пружины с постоянной скоростью  $v$ . Если пружина идеальная, то скорость тела никогда не установится, так как колебательный процесс никогда не прекратится. Если же пружина не идеальная, то колебания в конце концов затухнут и тело приобретет скорость  $v$ . Чтобы узнать, сколько за это время выделилось тепла, надо



перейти в систему отсчета, в которой конец пружины покоится. В этой системе начальная кинетическая энергия тела  $mv^2/2$  полностью перейдет в тепло. Значит, приобретенная телом кинетическая энергия при разгоне равна количеству теплоты, которое при этом выделяется.

**Задача 5.** Тонкое веревочное кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$  положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости  $\omega$ . Найдите силу натяжения веревки.

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной  $\Delta l$  и массой  $\Delta m = m\Delta l/(2\pi R)$ , который виден из центра окружности под малым углом  $\Delta\varphi = \Delta l/R$  (рис.3). Действующая на элемент сила равна векторной сумме двух сил натяжения:  $\Delta F = T\Delta\varphi$ . Из второго закона Ньютона  $\Delta F = \Delta m\omega^2 R$  находим

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}.$$

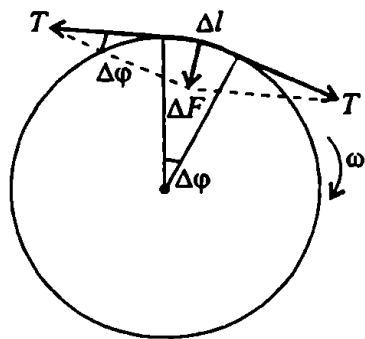


Рис.3

Полученный результат имеет неожиданное применение — с его помощью можно найти положение центра масс (центра тяжести) тонкой однородной полуокружности. Действительно, сила, действующая на вращающуюся полуокружность, равна  $2T$ , а в уравнение движения входит ускорение центра масс:  $2T = (m/2)\omega^2 x$ , где  $x$  — расстояние от центра окружности до центра масс полуокружности. Подставляя  $T$ , получаем  $x = 2R/\pi$ .

**Задача 6.** Веревку длиной  $l$  и массой  $m$  кладут на гладкое горизонтальное бревно радиусом  $R$  (рис.4), причем вначале веревку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу  $F$ , а затем отпускают. Определите: а) значение силы  $F$ ; б) ускорение веревки в первый момент.

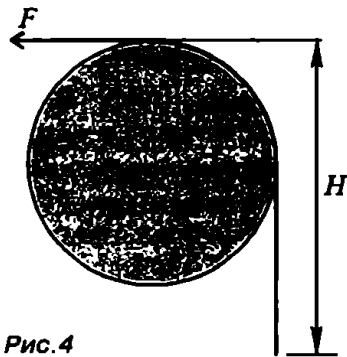


Рис.4

Обозначим через  $H$  расстояние по вертикали (разность высот) между верхней и нижней точками веревки. Если веревка свешивается с бревна ( $l > \frac{\pi R}{2}$ ), то  $H = l - \frac{\pi R}{2} + R$ , если же нет, то  $H = R\left(1 - \cos \frac{l}{R}\right)$ . Как мы увидим, в ответ будет входить только  $H$ .

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной  $\Delta l$  и массой  $\Delta m = (m/l)\Delta l = \lambda\Delta l$  ( $\lambda$  — масса единицы длины веревки) в проекциях на ось, направленную вдоль этого элемента (рис.5):

$$\Delta T + \Delta mg \cos \alpha = \Delta ma.$$

Здесь  $\Delta T$  — разность между натяжениями на концах элемента,  $a$  — ускорение веревки (в первом случае, пока веревку еще удерживают, надо положить  $a = 0$ ). Перед тем как просуммировать эти уравнения, заметим, что  $\Delta m \cos \alpha = \lambda\Delta l \cos \alpha = \lambda\Delta h$ , где  $\Delta h$  — расстояние по вертикали между концами элемента.

Теперь просуммируем уравнения вдоль всей длины веревки. Сумма всех  $\Delta T$  равна разности сил натяжения на концах веревки, т.е. для неподвижной веревки это  $-F$ , а для свободной веревки это ноль. В случае а) получаем уравнение

$$-F + \lambda gH = 0, \text{ откуда } F = (m/l)gH.$$

В случае б) —

$$\lambda gH = ma, \text{ откуда } a = g(H/l).$$

Эту задачу можно решить и из энергетических соображений, причем в этом случае удастся обойтись без суммирования. Начнем с неподвижной веревки. Сместив конец веревки на малое расстояние  $\Delta x$ , мы совершим работу  $F\Delta x$ , которая должна равняться изменению потенциальной энергии веревки  $\Delta E$ . Заметим, что для расчета потенциальной энергии можно считать, что вся веревка осталась на месте, а элемент длиной  $\Delta x$  был перенесен с одного конца веревки на другой. Значит,  $\Delta E = \lambda\Delta xgH$ . Приравнявая изменение энергии к работе, получаем  $F = (m/l)gH$ . Для свободной веревки надо  $\Delta E$  приравнять к кинетической энергии, а для определения ускорения использовать кинематическое выражение  $v^2 = 2ax$ . Сделайте это сами и, кроме того, подумайте, почему получается  $a = F/m$ . Если поймете, то вторая часть задачи станет просто продолжением первой.

**Задача 7.** Цепочку массой  $m$  и длиной  $l$  подвесили за концы к потолку (рис.6). При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы  $\alpha$  с вертикалью. Найдите

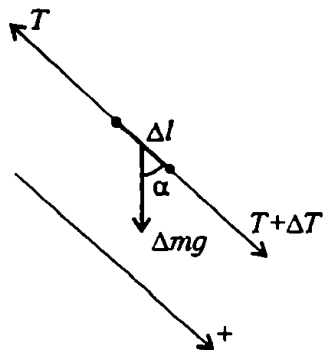


Рис.5

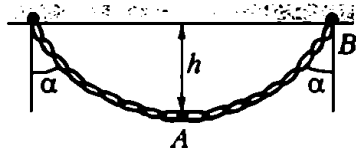


Рис. 6

расстояние  $h$  от нижней точки цепочки до потолка.

Используя метод суммирования, описанный в предыдущей задаче, найдем соотношение между натяжениями в нижней точке  $A$  и в верхней точке  $B$ :

$$T_B - T_A = (m/l) gh.$$

Кроме того, запишем условия равновесия половины цепочки в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_B \sin \alpha = T_A, \quad T_B \cos \alpha = \frac{mg}{2}.$$

Выразив отсюда  $T_A$  и  $T_B$ , подставим их в первое уравнение и получим

$$h = l \frac{1 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

### Упражнения

1. По трубе сечением  $S$  движется вода со скоростью  $v$ . Найдите силу, с которой вода действует на трубу в том месте, где труба делает поворот на  $90^\circ$ . Плотность воды  $\rho$ .

2. Готовясь к прыжку, кобра поднимает голову со скоростью  $v$ . Найдите силу давления кобры на землю. Массу кобры  $m$  считать равномерно распределенной вдоль туловища длиной  $l$ .

3. Через застопоренный блок (который не может вращаться) перекинули веревку длиной  $l$  так, что один ее конец находится на  $\Delta h$  выше другого. Считая поверхность блока идеально гладкой, найдите, с каким ускорением начнет соскальзывать веревка.

4. Вережку длиной  $l$  закрепили за концы на разных уровнях. Оказалось, что у одного конца веревка образует с вертикалью угол  $\alpha$ , а у другого — угол  $\beta$ . На сколько первый конец веревки выше второго?

*В. Можжев*

Мы будем рассматривать относительно слабое гравитационное взаимодействие между телами, когда эти тела покоятся или достаточно медленно движутся (по сравнению со скоростью света). В этом случае справедлив закон всемирного тяготения Ньютона. Он утверждает, что любые две материальные частицы (тела, линейные размеры которых много меньше расстояния между ними) с массами  $m_1$  и  $m_2$  притягиваются друг к другу с силой, величина которой  $F$  прямо пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Коэффициент пропорциональности  $G$  называют гравитационной постоянной. По современным данным,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .

В ньютоновской теории тяготения справедлив принцип суперпозиции гравитационных полей — сила тяготения, действующая на данную частицу со стороны многих других частиц, является векторной суммой сил, действующих на частицу со стороны каждой из частиц, и каждая из этих сил не зависит от действия других сил.

Из закона Ньютона следует, что гравитационное поле — потенциальное поле. При перемещении тела в таком поле по любой замкнутой траектории работа, совершенная полем, равна нулю. Из потенциальности гравитационного поля следует также связь между силой тяготения  $\vec{F}$ , действующей на материальную частицу, и ее потенциальной энергией  $U$ . В случае сферически симметричного гравитационного поля эта связь имеет вид

$$F_r = -\frac{dU}{dr},$$

где  $F_r$  — проекция силы на направление радиуса-вектора  $\vec{r}$ .

---

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1997 год.

Ниже на конкретных примерах мы рассмотрим сферически симметричные гравитационные поля и движения тел в этих полях.<sup>1</sup>

**Задача 1.** 1) Приняв за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии бесконечность, найдите потенциальную энергию тела массой  $m$  в гравитационном поле Земли. Землю считать однородным шаром массой  $M_3$  и радиусом  $R_3$ . Рассмотрите случаи, когда тело находится вне и внутри Земли. 2) На какое максимальное расстояние от поверхности Земли сможет удалиться небольшое тело массой  $m$ , если ему сообщить начальную скорость, равную первой космической скорости  $u_1$ ?

1) Рассмотрим сначала случай, когда тело массой  $m$  находится на произвольном расстоянии  $r$  от центра Земли и  $r \geq R_3$ . В этом случае на тело действует гравитационная сила, равная  $F = -GmM_3/r^2$  и направленная к центру Земли. Используем связь  $F = -dU/dr$ , где  $U$  — потенциальная энергия тела в поле Земли. Отсюда  $U = -\int Fdr + C_1$ , где  $C_1$  — некоторая константа, которую найдем из условия  $U(\infty) = 0$ . После подстановки выражения для силы получим

$$U(r) = -G \frac{mM_3}{r}.$$

Очевидно, что  $C_1 = 0$ .

Теперь рассмотрим ситуацию при  $r < R_3$ . В этом случае  $F = -GmM_3r/R_3^3$  (покажите это). Тогда  $U = \int GmM_3rdr/R_3^3 + C_2$ . Константа  $C_2$  находится из граничного условия  $U(R_3) = -GmM_3/R_3$ . После подстановки получим, что  $C_2 = -3GmM_3/(2R_3)$ , следовательно,

$$U(r) = G \frac{mM_3}{R_3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R_3} \right)^2 - \frac{3}{2} \right).$$

Общая зависимость  $U(r)$  показана на рисунке 1. Очевидно, что такая же зависимость будет иметь место не только для гравитационного поля Земли, но и для поля любого тела в виде

---

<sup>1</sup> Тема этой статьи несколько выходит за рамки школьного курса физики. Однако рассмотренные в статье задачи неоднократно предлагались на вступительных экзаменах в вузы, например — в Московский физико-технический институт. (Прим. ред.)

однородного (по плотности) шара, если вместо массы Земли в полученные выражения подставить массу данного шара.

Изображенную на рисунке 1 зависимость  $U(r)$  обычно называют потенциальной ямой. Это название связано с тем, что, если полная энергия тела, находящегося в таком поле, меньше нуля, то это тело оказывается как бы запертым в яме, т.е. оно не сможет уйти от Земли на бесконечность и будет совершать финитное движение. Максимально возможное удаление тела определяется границей (стенкой) ямы, при достижении которой скорость тела становится равной нулю и тело возвращается обратно.

2) При фиксированной величине начальной скорости  $v_0$  тело сможет максимально удалиться от поверхности Земли, если его скорость будет направлена по радиусу. Это удаление  $H$  находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM_3}{R_3} = -G \frac{mM_3}{R_3 + H},$$

откуда

$$H = \frac{R_3}{2GM_3/(R_3v_0^2) - 1}.$$

Первая космическая скорость равна  $v_1 = \sqrt{GM_3/R_3}$ . После подстановки  $v_0 = v_1$  получим

$$H = R_3.$$

**Задача 2.** Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна  $v_{II} = 12$  км/с. Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью, заполненной веществом с плотностью, в  $\beta = 2$  раза большей плотности планеты (рис. 2). Отношение радиуса полости к радиусу планеты  $\alpha = 1/2$ .

Вторая космическая скорость для планеты соответствует скорости тела на поверхности планеты, при которой полная энергия тела равна нулю. Для

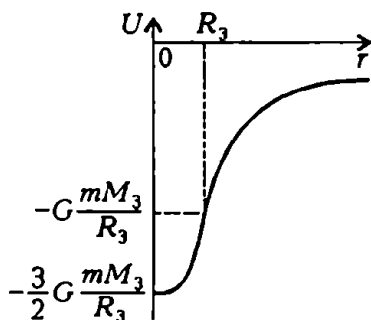


Рис. 1

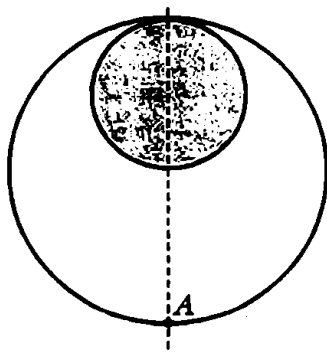


Рис. 2

однородной планеты массой  $M$  и радиусом  $R$  это условие имеет вид

$$\frac{v_{11}^2}{2} - G \frac{M}{R} = 0.$$

В случае неоднородной планеты плотность вещества, заполняющего полость, равна  $\rho = 3\beta M / (4\pi R^3)$ . Будем рассматривать эту полость как суперпозицию двух полостей, одна из которых заполнена веществом с плотностью  $\rho_0 = 3M / (4\pi R^3)$ , а другая – с плотностью  $\rho_1 = 3(\beta - 1)M / (4\pi R^3)$ . Очевидно, что потенциальная энергия тела на поверхности такой планеты будет равна сумме потенциальных энергий однородной планеты и шара с радиусом полости и плотностью  $\rho_1$ .

Минимальная величина второй космической скорости будет в той точке поверхности планеты, где потенциальная энергия минимальна по абсолютной величине. Этой точкой будет точка  $A$  (см. рис.2). Обозначим для нее величину второй космической скорости через  $v'_{11}$ , тогда условие равенства нулю полной энергии тела в точке  $A$  будет иметь вид

$$\frac{v_{11}'^2}{2} - G \frac{M}{R} - G \frac{\alpha^3 (\beta - 1) M}{(\alpha + 1) R} = 0,$$

или, после подстановки численных значений  $\alpha$  и  $\beta$ ,

$$v_{11}'^2 - \frac{13}{6} G \frac{M}{R} = v_{11}'^2 - \frac{13}{12} v_{11}^2 = 0.$$

Отсюда получаем

$$v'_{11} = \sqrt{\frac{13}{12}} v_{11} \approx 12,5 \text{ км/с}.$$

**Задача 3.** Для спутников, движущихся вокруг Земли по эллиптическим орбитам, выразите длину большой оси эллипса через полную энергию спутника  $E$  (кинетическая плюс потенциальная).

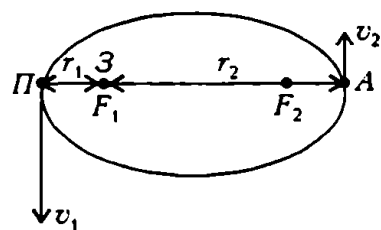


Рис.3

Рассмотрим эллиптическую орбиту спутника, изображенную на рисунке 3. Пусть в одном из фокусов эллипса находится Земля (например, в  $F_1$ ). Тогда точка  $A$  (афелий) соответствует максимальному удалению спутника от Земли, а точка  $\Pi$  (перигелий) является точкой минимального удаления. Дли-

ну отрезка  $PF_1$  обозначим через  $r_1$ , а длину отрезка  $F_1A$  — через  $r_2$ . В этих обозначениях длина большой оси равна  $2a = r_1 + r_2$ .

Запишем полную энергию спутника для точки  $P$ :

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM_3}{r_1} = E,$$

где  $m$  — масса спутника,  $v_1$  — его скорость в точке  $P$ , а  $M_3$  — масса Земли. Воспользуемся вторым законом Кеплера (законом площадей): радиус-вектор спутника в равные промежутки времени описывает равные площади. Из этого закона для точек орбиты спутника  $A$  и  $P$  можно записать

$$v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Обозначим это произведение через  $L$ . Выражая  $v_1$  через  $L$  и подставляя в выражение для полной энергии, получим относительно  $r_1$  квадратное уравнение

$$r_1^2 + G \frac{mM_3}{E} r_1 - \frac{mL^2}{2E} = 0.$$

Это уравнение имеет два решения, которые соответствуют нашим двум точкам  $A$  и  $P$  (поскольку коэффициент при  $r_1$  и свободный член данного уравнения одинаковы для этих точек). Поэтому получаем

$$r_1 = -G \frac{mM_3}{2E} - \sqrt{\left(G \frac{mM_3}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}},$$

$$r_2 = -G \frac{mM_3}{2E} + \sqrt{\left(G \frac{mM_3}{2E}\right)^2 + \frac{mL^2}{2E}}.$$

Отсюда находим большую ось эллиптической орбиты спутника:

$$2a = r_1 + r_2 = -G \frac{mM_3}{E}.$$

Следует напомнить, что полная энергия  $E$  величина отрицательная — полная энергия при финитном движении всегда является отрицательной величиной.

Обсудим физический смысл полученного соотношения. При фиксированном значении полной энергии спутник может двигаться по большому семейству эллиптических орбит, но все эти орбиты будут иметь одну и ту же большую ось. А если мы знаем величину большой оси эллипса орбиты спутника, то мы однозначно можем вычислить полную энергию спутника. Естественно, что полученная связь имеет место не только для спутников Земли, но и для орбит планет Солнечной системы, для спутников



других планет — главное, чтобы это были спутники, т.е. тела, масса которых много меньше массы тела, вокруг которого они вращаются.

**Задача 4.** Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая ось которой равна  $2a$ . Центр Земли расположен в фокусе эллипса  $F_1$  (рис. 4). В тот момент, когда корабль находится в точке максимального удаления и

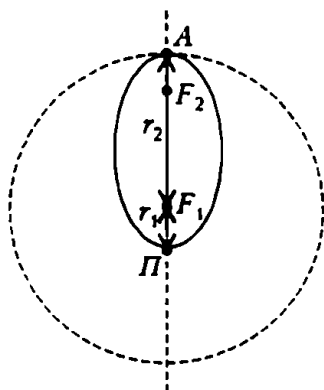


Рис. 4

расстояние от центра Земли до корабля равно  $r_2$ , на короткое время включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом  $r_2$ ? Считать известными ускорение свободного падения  $g$  на поверхности Земли и радиус Земли  $R_3$ .

Поскольку речь идет о переходе на круговую орбиту, новая скорость корабля должна быть перпендикулярна радиусу-вектору, соединяющему центр Земли и центр масс корабля, а следовательно, и вектор изменения скорости корабля должен быть направлен вдоль скорости корабля перед включением двигателя. Вычислим теперь величину и знак изменения скорости. Величина скорости  $v_0$ , которую должен иметь корабль на круговой орбите радиусом  $r_2$ , находится из уравнения движения корабля  $v_0^2/r_2 = GM_3/r_2^2$ , где  $M_3$  — масса Земли. Отсюда

$$v_0 = \sqrt{G \frac{M_3}{r_2}} = \sqrt{R_3 g \frac{R_3}{r_2}}.$$

Скорость корабля  $v_A$  в точке A до включения двигателя можно найти из соотношения между большой осью эллиптической орбиты и полной энергией корабля (см. задачу 3). Для нашего случая эта связь имеет вид

$$\frac{mv_A^2}{2} - G \frac{mM_3}{r_2} = -G \frac{mM_3}{2a},$$

откуда

$$v_A = \sqrt{G \frac{M_3}{r_2} \left( 2 - \frac{r_2}{a} \right)} = v_0 \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}}.$$

Поскольку  $r_2 > a$ , то  $v_A < v_0$ . Следовательно, для перехода на

круговую орбиту необходимо увеличить скорость на величину

$$\Delta v = v_0 - v_A = \sqrt{R_3 g \frac{R_3}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{2 - \frac{r_2}{a}} \right).$$

**Задача 5.** Вычислите приближенно третью космическую скорость, т.е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы. Влиянием планет Солнечной системы пренебречь. Орбиту Земли вокруг Солнца считать круговой с радиусом  $R_{3c} = 1,5 \cdot 10^8$  км и временем обращения  $T = 1$  год. Первая космическая скорость  $v_1 = 7,9$  км/с.

Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом неоднородностью поля солнечного тяготения. Считая массу Земли  $M_3$  бесконечно большой по сравнению с массой ракеты  $m$ , запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_3}{R_3} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где  $v$  — скорость ракеты у поверхности Земли,  $R_3$  — радиус Земли, а  $v_\infty$  — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Выразим потенциальную энергию ракеты через круговую скорость спутника Земли, движущегося по круговой орбите вблизи ее поверхности:

$$G \frac{mM_3}{R_3} = mv_1^2.$$

Тогда

$$v_\infty^2 = v^2 - 2v_1^2.$$

На втором этапе, после того как ракета выйдет из зоны земного тяготения, будем рассматривать ее движение в гравитационном поле Солнца. Скорость ракеты в системе координат, связанной с Солнцем, векторно складывается из скорости  $\vec{v}_\infty$  и скорости кругового движения Земли вокруг Солнца  $\vec{V}$ . Найдем, какую скорость (параболическую)  $v_n$  должно иметь тело на земной орбите, чтобы уйти из Солнечной системы. По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv_n^2}{2} - G \frac{mM_c}{R_{3c}} = 0,$$

откуда

$$v_n = \sqrt{2G \frac{M_c}{R_{3c}}} = \sqrt{2}V.$$

Очевидно, что минимальное значение скорости ракеты  $v_{\min}$  соответствует тому случаю, когда ее скорость направлена вдоль скорости Земли, т.е.  $v_n = v_{\infty} + V$ . После подстановки выражений для  $v_n$  и  $v_{\infty}$  получим

$$v_{\min} = \sqrt{2v_1^2 + V^2(\sqrt{2} - 1)^2}.$$

Поскольку  $V = 2\pi R_{3c}/T \approx 30$  км/с, а  $v_1 = 7,9$  км/с, то  $v_{\min} \approx 16,7$  км/с.

**Задача 6.** *Определите, какую минимальную дополнительную скорость необходимо кратковременно сообщить спутнику Земли, движущемуся по очень высокой круговой орбите, чтобы он смог достичь Марса. Орбиты Земли и Марса считать круговыми, радиус орбиты Земли равен  $R_{3c} = 1,5 \cdot 10^8$  км, а радиус орбиты Марса  $R_{mc}$  в 1,52 раза больше, чем у Земли.*

«Очень высокая круговая орбита» означает, что радиус орбиты спутника много больше радиуса Земли и что скоростью, которой обладает спутник относительно Земли, можно пренебречь. Но, оставаясь спутником Земли, он движется вместе с Землей относительно Солнца по круговой орбите со скоростью  $V = \sqrt{GM_c/R_{3c}} \approx (2\pi R_{3c})/T \approx 30$  км/с, где  $M$  — масса Солнца,  $T$  — время обращения Земли вокруг Солнца. Если мы будем добавлять спутнику скорость вдоль направления скорости Земли, то он будет двигаться по эллиптическим орбитам, большая ось которых больше диаметра орбиты Земли и растет по мере увеличения добавочной скорости. Очевидно, что цель будет достигнута, когда точка максимального удаления спутника достигнет круговой орбиты Марса. Такая траектория (полуэллипс) показана на рисунке 5 штриховой линией, большая ось орбиты равна  $2a = R_{3c} + R_{mc}$ .

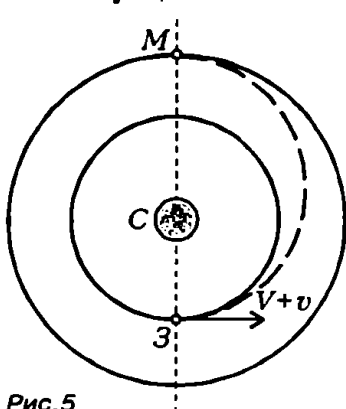


Рис. 5

Полная энергия спутника массой  $m$  на данной орбите составляет

$$\begin{aligned} E &= \frac{m(V+v)^2}{2} - G \frac{mM_c}{R_{3c}} = \\ &= \frac{m(V+v)^2}{2} - mV^2 = \frac{m(v^2 + 2Vv - V^2)}{2}. \end{aligned}$$

Используем связь между большой осью эллипса и полной энергией спутника:

$$R_{ЗС} + R_{МС} = \frac{2GM_C}{V^2 - 2Vv - v^2} = \frac{2V^2 R_{ЗС}}{V^2 - 2Vv - v^2}.$$

После простых преобразований, относительно добавочной скорости  $v$  получим квадратное уравнение

$$v^2 + 2Vv - \frac{(R_{МС} - R_{ЗС})V^2}{R_{МС} + R_{ЗС}} = 0,$$

которое имеет два корня:

$$v_1 = V \left( \sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС} + R_{ЗС}}} - 1 \right) \approx 2,95 \text{ км/с}$$

и

$$v_2 = -V \left( 1 + \sqrt{\frac{2R_{МС}}{R_{МС} + R_{ЗС}}} \right) \approx -62,95 \text{ км/с}.$$

Нашему случаю соответствует первый корень, а второй корень отвечает случаю, когда дополнительная скорость будет направлена в противоположную сторону.

### Упражнения

1. Предположим, что от поверхности Земли до ее центра прорыта узкая шахта и некоторое тело падает из бесконечности с нулевой начальной скоростью в эту шахту. Какую скорость будет иметь это тело в тот момент, когда оно достигнет центра Земли? Землю считать однородным шаром. Считать известными радиус Земли  $R_3$  и ускорение свободного падения на поверхности Земли  $g$ . *Указание:* под бесконечностью следует понимать большое удаление тела от Земли, но при этом тело и Земля как единое целое движутся вокруг Солнца.

2. Вторая космическая скорость для некоторой планеты равна  $v_{II} = 10 \text{ км/с}$ . Найдите минимальную величину второй космической скорости для такой же планеты, но с полостью (см. рис.2), заполненной веществом с плотностью, в 2 раза меньшей плотности планеты. Отношение радиуса полости к радиусу планеты равно 0,5.

3. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите, большая полуось которой равна  $a$ . Центр Земли расположен в фокусе эллипса  $F_1$  (см. рис.4). В тот момент, когда корабль находится в точке  $\Pi$  (перигелий) и расстояние от центра Земли до корабля равно  $r_1$ , включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он стал двигаться по круговой орбите радиусом  $r_1$ ? Считать известными ускорение свободного падения  $g$  на поверхности Земли и радиус Земли  $R_3$ .

Импульсом материальной точки называется произведение массы точки на ее скорость:  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Импульсом системы материальных точек называется векторная сумма импульсов отдельных точек:  $\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots$ . Любое макроскопическое тело или несколько макроскопических тел можно рассматривать как систему материальных точек, поскольку каждое тело можно мысленно разбить на сколь угодно малые части и считать их материальными точками. В дальнейшем систему материальных точек для краткости будем называть просто системой.

Из законов Ньютона следует, что в инерциальной системе отсчета справедливо векторное равенство

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}, \quad (1)$$

где  $\vec{F}$  – сумма всех внешних сил, действующих на систему в течение сколь угодно малого интервала времени  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), а  $\Delta\vec{p}$  – изменение импульса системы за это время. Произведение  $\vec{F}\Delta t$  называется импульсом силы. Обратите внимание, что  $\vec{F}$  – это сумма только *внешних* сил, т.е. сил, действующих на тела системы со стороны тел, не входящих в систему. *Внутренние* силы, т.е. силы взаимодействия между частями системы, в равенство (1) не входят.

Если в течение времени  $\Delta t$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) сумма внешних сил равна нулю, т.е.  $\vec{F} = 0$ , то  $\Delta\vec{p} = 0$  и  $\vec{p} = \text{const}$ , т.е. импульс системы в течение  $\Delta t$  сохраняется. Когда время взаимодействия тел системы (время опыта) не мало, его можно разбить на сколь угодно малые интервалы:  $\Delta t = \sum \Delta t_k$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Если в течение каждого такого интервала сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы будет сохраняться в течение этого интервала и, как следствие, в течение всего времени опыта. Напомним, что замкнутой (изолированной) системой называется

система, тела которой не взаимодействуют с другими телами (внешним миром). Ясно, что для замкнутой системы  $\vec{F} = 0$  и  $\vec{p} = \text{const}$ .

Итак, в инерциальной системе отсчета импульс системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени  $\Delta t$  (не обязательно малого) в двух случаях:

- 1) система в течение  $\Delta t$  замкнута (изолирована);
- 2) система не замкнута, т.е. внешние силы есть, но их сумма равна нулю в течение всего времени  $\Delta t$ .

Это утверждение и представляет собой закон сохранения импульса в развернутой формулировке.

Импульс системы – это вектор, и его сохранение в течение некоторого времени взаимодействия частей системы встречается не так часто, хотя бы потому, что в земных условиях строго замкнутой системы нет в принципе из-за наличия внешней силы – силы притяжения к Земле. Да и равенство нулю суммы всех внешних сил на протяжении некоторого интервала времени может реализоваться только при вполне определенных условиях. Гораздо чаще встречается случай, когда за время  $\Delta t$  векторная сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма их проекций на некоторую ось  $X$  в пространстве. Тогда в течение этого времени сохраняется проекция на ось  $X$  импульса системы. Действительно, запишем равенство (1) в проекциях на ось  $X$ :

$$F_x \Delta t = \Delta p_x, \quad (2)$$

где  $F_x$  – проекция на ось  $X$  суммы всех внешних сил (по правилам действия с векторами  $F_x$  равна сумме проекций на ось  $X$  всех внешних сил), а  $\Delta p_x$  – проекция на ось  $X$  изменения импульса системы  $\Delta \vec{p}$  (по правилам действия с векторами  $\Delta p_x$  равна изменению проекции на ось  $X$  импульса системы). Если в течение времени  $\Delta t \rightarrow 0$   $F_x = 0$ , то из равенства (2) следует, что  $\Delta p_x = 0$  и  $p_x = \text{const}$ . Если же время  $\Delta t$  опыта не мало, то после разбиения его на сколь угодно малые интервалы легко показать, что при выполнении в течение произвольного  $\Delta t$  условия  $F_x = 0$  будет иметь место следствие  $p_x = \text{const}$ .

Иными словами, в инерциальной системе отсчета проекция на некоторую ось  $X$  импульса системы материальных точек сохраняется в течение некоторого времени  $\Delta t$  (не обязательно малого), если сумма проекций на ось  $X$  всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю в течение этого времени  $\Delta t$ .

На основании этого утверждения о сохранении проекции импульса и решается большинство задач. При этом часто запись уравнения, отражающего сохранение проекции импульса в виде

равенства начальной и конечной проекций импульса, обосновывается фразой «по закону сохранения импульса», что не совсем точно. Но поскольку эта неточность не влияет на результат при решении задачи, на нее, как правило, никто не обращает внимания, в том числе и экзаменаторы.

Скажем несколько слов о приближенном сохранении импульса или его проекции. Равенство (1) тем точнее, чем меньше  $\Delta t$ . Конечное время опыта  $\Delta t$  можно разбить на сколь угодно малые интервалы времени  $\Delta t_k$  и записать для каждого из них равенство  $\bar{F}_k \Delta t_k = \Delta \bar{p}_k$ . Сложив все такие равенства, получим новое, внешне похожее на (1) равенство:

$$\bar{F}_{\text{ср}} \Delta t = \Delta \bar{p}, \quad (3)$$

где  $\bar{F}_{\text{ср}}$  – некоторая средняя внешняя сила, действующая в течение  $\Delta t$  и определяемая из равенства  $\bar{F}_{\text{ср}} \Delta t = \Sigma \bar{F}_k \Delta t_k$ , а  $\Delta \bar{p} = \Sigma \Delta \bar{p}_k$  – изменение импульса системы за конечное время  $\Delta t$ . Аналогично получается и внешне похожее на (2) равенство в проекциях:

$$F_{x\text{ср}} \Delta t = \Delta p_x, \quad (4)$$

где  $F_{x\text{ср}}$  – некоторое среднее значение суммы проекций на ось  $X$  всех внешних сил в течение конечного времени опыта  $\Delta t$ , а  $\Delta p_x$  – изменение проекции на ось  $X$  импульса системы за это время. Ясно, что при  $\bar{F}_{\text{ср}} = 0$  (например,  $\bar{F} = 0$  в любой момент опыта) из равенства (3) следует  $\Delta \bar{p} = 0$  и  $\bar{p} = \text{const}$ . При  $F_{x\text{ср}} = 0$  из равенства (4) следует  $p_x = \text{const}$ . Если же в течение времени опыта не выполняются строго равенства  $\bar{F}_{\text{ср}} = 0$  или  $F_{x\text{ср}} = 0$ , то за «помощью» в решении задачи следует обращаться к равенствам (3) и (4) и анализировать их. Иногда можно считать, что величины  $F_{\text{ср}} \Delta t$  или  $F_{x\text{ср}} \Delta t$ , характеризующие импульс силы, малы. Тогда из (3) или (4) следует, что  $\bar{p} \approx \text{const}$  или  $p_x \approx \text{const}$ . Такая ситуация встречается при некоторых взаимодействиях тел системы – таких, как удары, когда  $\Delta t$  мало, а  $F_{\text{ср}}$  или  $F_{x\text{ср}}$  ограничены из-за ограниченности значений  $F$  или  $F_x$  в течение опыта.

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт (МФТИ). Автор всех разобранных задач, включая и задачи для упражнений, – автор этой статьи.

**Задача 1.** После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой  $m_1 = 4$  кг полетел

вертикально вниз со скоростью  $v_1 = 150$  м/с, осколок массой  $m_2 = 3$  кг полетел горизонтально на юг со скоростью  $v_2 = 100$  м/с, осколок массой  $m_3 = 1$  кг – горизонтально на восток. Осколок массой  $m_4 = 3,5$  кг полетел со скоростью  $v_4 = 200$  м/с. Найдите скорость осколка массой  $m_3$ .

Рассмотрим систему из четырех осколков. За малое время разрыва  $\Delta t$  действием внешних сил – сил тяжести – можно пренебречь, поскольку за это время они не вызывают существенного изменения импульса осколков из-за их малости по сравнению с внутренними силами, действующими между осколками. Поэтому можно считать, что импульс системы сохраняется (приближенно):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 = 0.$$

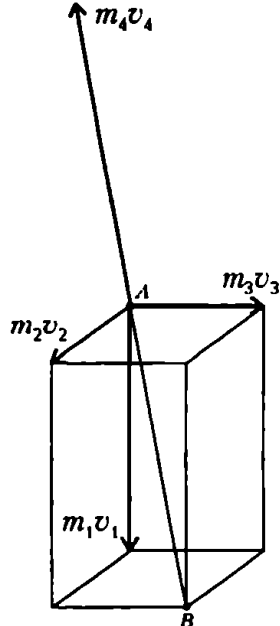


Рис. 1

Длина вектора  $m_4\vec{v}_4$  равна длине диагонали  $AB$  прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах  $m_1\vec{v}_1$ ,  $m_2\vec{v}_2$  и  $m_3\vec{v}_3$  (рис.1). Следовательно,

$$(m_4v_4)^2 = (m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 + (m_3v_3)^2.$$

Из последнего равенства находим

$$v_3 = \frac{\sqrt{(m_4v_4)^2 - (m_1v_1)^2 - (m_2v_2)^2}}{m_3} = 200 \text{ м/с}.$$

**Задача 2.** Между шариками с массами  $m$  и  $M$ , связанными нитью, вставлена легкая пружина жесткостью  $k$ , сжатая на некоторую величину (рис.2). Система движется со скоростью  $v_0$  вдоль прямой, проходящей через центры шариков. Нить пережигают, и один из шариков останавливается. Найдите начальную величину  $x$  сжатия пружины.

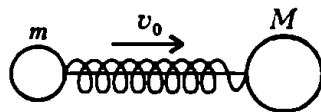


Рис.2

Система из шариков, пружины и нити предполагается замкнутой. В земных условиях смоделировать процесс, описанный в задаче, можно на гладком горизонтальном столе. Ясно, что остановиться может только левый шарик, так как пружина на него действует с силой, направленной против его начальной скорости. Пусть скорость правого шарика после распрямления



пружины равна  $\bar{v}$ . По закону сохранения импульса,

$$(m + M)\bar{v}_0 = M\bar{v}.$$

Заметим, что совпадение направлений скоростей  $\bar{v}$  и  $\bar{v}_0$  следует именно из последнего равенства. Взяв модули от левой и правой частей этого равенства (точнее, записав равенство в проекциях на ось  $X$ , направленную вдоль оси пружины), получим

$$(m + M)v_0 = Mv.$$

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{(m + M)v_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Исключая из последних двух уравнений  $v$ , находим искомую величину сжатия пружины:

$$x = v_0 \sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

**Задача 3.** Кусок пластилина массой  $m = 32$  г попадает в брусок массой  $6m$ , двигавшийся по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 3), прилипает к бруску и далее движется с ним по столу. Перед ударом скорость куска пластилина равна  $v = 7$  м/с и направлена под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту, а скорость бруска равна  $v/4$  и лежит в одной вертикальной плоскости со скоростью пластилина. Определите скорость бруска с пластилином после удара. На

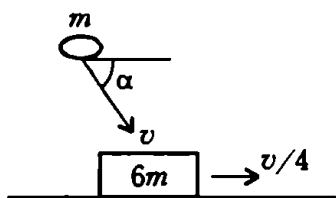


Рис. 3

сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия бруска, пластилина и окружающих тел?

Внешние силы, действующие на систему из бруска и пластилина за время их взаимодействия  $\Delta t$ , — это силы тяжести  $m\bar{g}$  и  $6m\bar{g}$  и зависящая от времени сила  $\bar{N}(t)$  нормальной реакции стола на брусок, направленная вертикально вверх. Ясно, что сумма внешних сил

$$\bar{F} = m\bar{g} + 6m\bar{g} + \bar{N}(t)$$

в произвольный момент интервала времени  $\Delta t$  не равна нулю. Этим и объясняется, что импульс системы не сохраняется. Впрочем, несохранение импульса сразу бросается в глаза — начальный суммарный импульс системы направлен вправо и вниз, а конечный — вправо и горизонтально.

Если импульс системы не сохраняется, то следует поискать ось в пространстве, для которой сохраняется проекция импульса системы. Поэтому проанализируем выражение для  $\vec{F}$ . Ясно, что для горизонтальной оси  $X$ , направленной вдоль начальной скорости бруска,  $F_x = 0$  в любой момент из интервала  $\Delta t$ , поэтому проекция на ось  $X$  импульса системы сохраняется:

$$mv \cos \alpha + 6m \frac{v}{4} = (m + 6m)u ,$$

откуда и находим скорость бруска с пластилином:

$$u = \frac{(\cos \alpha + 3/2)v}{7} = \frac{2v}{7} = 2 \text{ м/с}.$$

Величину  $\Delta W$  увеличения внутренней энергии бруска, пластилина и окружающих тел найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{6m(v/4)^2}{2} = \frac{(m + 6m)u^2}{2} + \Delta W ,$$

откуда, с учетом выражения для  $u$ , получаем

$$\Delta W = \frac{45}{112}mv^2 = 0,63 \text{ Дж} .$$

**Задача 4.** Пуля летит горизонтально со скоростью  $v_0$ , пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола небольшую коробку и вылетает в том же направлении с вдвое меньшей скоростью. Масса коробки в 5 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом  $\mu$ . Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. На какое расстояние передвинется при этом коробка?

Рассмотрим систему из коробки и пули. Пусть масса пули  $m$ , масса коробки  $5m$ , скорость коробки сразу после вылета пули  $v$ . За время взаимодействия  $\Delta t$  (пролета пули через коробку) на систему действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести  $m\vec{g}$  и  $5m\vec{g}$ , направленная вертикально вверх и мало изменяющаяся со временем сила нормальной реакции стола  $\vec{N}$  и направленная против скорости коробки сила трения со стороны стола  $\vec{F}_{\text{тр}}$  (рис.4). Ясно, что сумма вне-

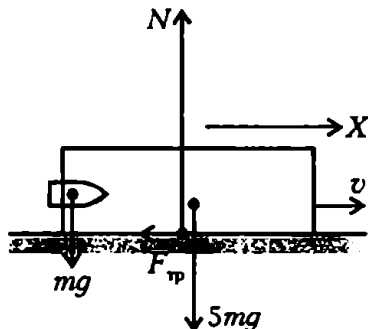


Рис.4

шних сил  $\vec{F} = m\vec{g} + 5m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$  в течение  $\Delta t$  не равна нулю. Не равна нулю и проекция  $F_x$  на горизонтальную ось  $X$ , направленную вдоль скорости коробки:  $F_x = -F_{\text{тр}}$ . Но действием ограниченной по величине силы трения за малое время пролета  $\Delta t$  можно пренебречь и считать, что  $F_x \Delta t = 0$ . Тогда за время пролета пули проекция на ось  $X$  импульса системы сохраняется (приближенно):

$$mv_0 = \frac{mv_0}{3} + 5mv,$$

откуда и находим скорость коробки:

$$v = \frac{2}{15}v_0.$$

После вылета пули скорость коробки с течением времени уменьшается под действием силы трения, равной  $5\mu mg$ . Расстояние  $s$ , на которое передвинется коробка, найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$\frac{5mv^2}{2} = 5\mu mgs,$$

и

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2v_0^2}{225\mu g}.$$

**Задача 5.** Трубка в форме петли укреплена на бруске, находящемся на гладкой горизонтальной поверхности стола

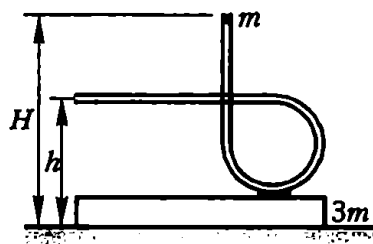


Рис. 5

(рис. 5). Нижний участок трубки горизонтален и находится на расстоянии  $h$  от стола. Шарик массой  $m$ , который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте  $H$  от стола. Масса платформы с трубкой  $3m$ . Вначале система покоилась. Шарик отпустили. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если:

1) брусок закреплен на столе; 2) брусок не закреплен и после вылета шарика движется поступательно.

1) В случае закрепленного бруска скорость  $v_1$  вылетевшего шарика найдем из закона сохранения и превращения энергии:

$$mgH = mgh + \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{2g(H - h)}.$$

2) В случае незакрепленного бруска будем рассуждать так. Пусть шарик вылетел из трубки со скоростью  $v_2$ , а брусок с трубкой приобрел скорость  $u$  в противоположном направлении. На систему из шарика и бруска с трубкой за время  $\Delta t$  движения шарика в трубке действуют такие внешние силы: направленные вертикально вниз силы тяжести  $m\vec{g}$  и  $3m\vec{g}$  и направленная вертикально вверх и зависящая от времени сила нормальной реакции стола  $\vec{N}(t)$ . Заметим, что  $\Delta t$  здесь не считается малым! Направим ось  $X$  горизонтально в направлении скорости вылетевшего шарика. Ясно, что проекция на ось  $X$  суммы всех трех вертикальных сил равна нулю в любой момент из интервала времени  $\Delta t$ . Значит, проекция на ось  $X$  импульса системы сохраняется:

$$0 = mv_2 - 3mu.$$

По закону сохранения и превращения энергии,

$$mgH = mgh + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{3mu^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений находим скорость шарика:

$$v_2 = \sqrt{\frac{3g(H-h)}{2}}.$$

### Упражнения

1. Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки с массами  $m_1 = 3$  кг,  $m_2 = 2$  кг и  $m_3 = 4$  кг полетели, соответственно, со скоростями  $v_1 = 200$  м/с вертикально вверх,  $v_2 = 150$  м/с горизонтально на север и  $v_3 = 100$  м/с горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвертый осколок?

2. Камень массой  $m = 1$  кг подняли на некоторую высоту и отпустили без начальной скорости. Через время  $t = 1$  с практически свободного падения камень попал в ящик с песком массой  $5m$ , скользящий по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v = 6$  м/с. Найдите скорость ящика с камнем. На сколько увеличилась суммарная внутренняя энергия ящика, песка, камня и окружающих тел?

3. Трубка в виде петли жестко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.6). Система покоится. Шарик отпускают. Найдите скорость вылетевшего из трубки шарика, если: 1) платформа закреплена; 2) платформа после вылета шарика движется поступательно.

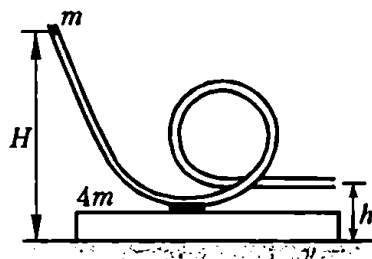


Рис.6

А. Черноуцан

При решении механических задач неоценимую помощь может оказать использование понятия центра масс системы материальных точек. Одни задачи просто невозможно решить, не прибегая к этому понятию, решение других с его помощью может стать гораздо проще и нагляднее. Перед тем как обсуждать конкретные задачи, напомним основные свойства центра масс и проиллюстрируем их примерами.

Центром масс (центром инерции) системы материальных точек назовем точку, характеризующую распределение масс в системе, координаты которой определяются формулами

$$x_u = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_N x_N}{m_1 + \dots + m_N},$$

$$y_u = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_N y_N}{m_1 + \dots + m_N},$$

$$z_u = \frac{m_1 z_1 + \dots + m_N z_N}{m_1 + \dots + m_N}.$$

Здесь  $m_i$  – массы материальных точек, образующих систему,  $x_i, y_i, z_i$  – координаты этих точек. Читатели, знакомые с понятием радиуса-вектора, предпочтут векторную запись:

$$\vec{r}_u = \frac{m_1 \vec{r}_1 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}. \quad (1)$$

**Пример 1.** Найдём положение центра масс простейшей системы, состоящей из двух точек, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  и расстояние между ними  $l$  (рис. 1). Направив ось  $X$  от первой точки ко второй,

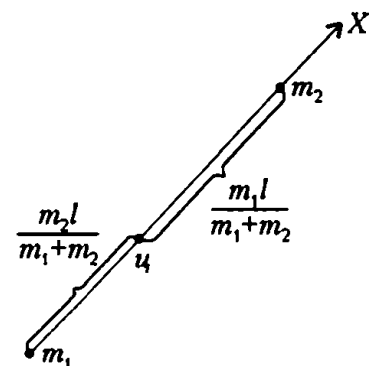


Рис. 1

получим, что расстояние от первой точки до центра масс (т.е. координата центра масс) равно  $m_2 l / (m_1 + m_2)$ , а расстояние от центра масс до второй точки равно  $m_1 l / (m_1 + m_2)$ , т.е. отношение расстояний обратно отношению масс. Значит, в этом случае положение центра масс совпадает с центром тяжести.

Обсудим некоторые свойства центра масс, что, как нам кажется, наполнит физическим содержанием приведенное выше несколько формальное определение этого понятия.

1) Положение центра масс не изменится, если какую-то часть системы заменить одной точкой с массой, равной массе этой подсистемы, и находящейся в ее центре масс.

**Пример 2.** Рассмотрим плоский однородный треугольник и найдем положение его центра масс. Разделим треугольник на тонкие полоски, параллельные одной из сторон, и заменим каждую полоску точкой, расположенной в ее середине. Так как все такие точки лежат на медиане треугольника, центр масс тоже должен лежать на медиане. Повторяя рассуждения для каждой из сторон, получаем, что центр масс находится на пересечении медиан.

2) Скорость центра масс можно найти, взяв производную по времени от обеих частей равенства (1):

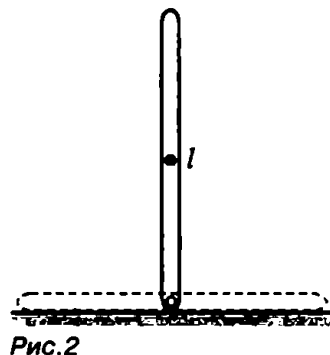
$$\vec{v}_c = \frac{m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_N \vec{v}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\vec{p}}{m}, \quad (2)$$

где  $\vec{p}$  – импульс системы, а  $m$  – полная масса системы. Видно, что скорость центра масс замкнутой системы постоянна. Значит, если связать с центром масс поступательно движущуюся систему отсчета, то она будет инерциальной.

**Пример 3.** Поставим однородный стержень длиной  $l$  вертикально на гладкую плоскость (рис.2) и отпустим. В процессе падения как горизонтальная составляющая импульса стержня, так и горизонтальная составляющая скорости его центра масс будут оставаться равными нулю. Поэтому в момент падения центр стержня окажется в том месте, где первоначально стоял стержень, а концы стержня сместятся по горизонтали на  $l/2$ .

3) Ускорение центра масс равно производной от его скорости по времени:

$$\vec{a}_c = \frac{m_1 \vec{a}_1 + \dots + m_N \vec{a}_N}{m_1 + \dots + m_N} = \frac{\sum \vec{F}}{m}, \quad (3)$$



где в правой части равенства стоят только внешние силы, так как все внутренние силы взаимно уничтожаются по третьему закону Ньютона. Получаем, что центр масс движется так, как двигалась бы воображаемая точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей внешней силы. Наверное, это самое физическое свойство центра масс.

**Пример 4.** Если бросить палку, приведя ее при этом во вращение, то центр масс палки (ее середина) будет двигаться с постоянным ускорением  $\bar{g}$  по параболе (рис.3).

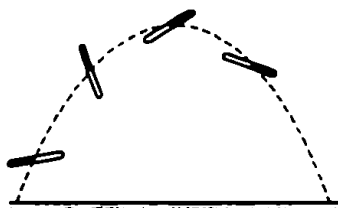


Рис.3

4) Пусть система точек находится в однородном поле тяжести. Тогда суммарный момент сил тяжести относительно любой оси, проходящей через центр масс, равен нулю. Это значит, что равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс, т.е.

центр масс является также центром тяжести.

5) Потенциальная энергия системы точек в однородном поле тяжести вычисляется по формуле

$$E = m_1gh_1 + \dots + m_Ngh_N = (m_1 + \dots + m_N)g \frac{m_1h_1 + \dots + m_Nh_N}{m_1 + \dots + m_N} = mgh_{\text{ц}},$$

где  $h_{\text{ц}}$  – высота центра масс системы.

**Пример 5.** При выкапывании в однородном грунте ямы глубиной  $h$  и разбрасывании грунта по поверхности его потенциальная энергия возрастает на  $mg \frac{h}{2}$ , где  $m$  – масса извлеченного грунта.

6) И еще одно полезное свойство центра масс. Кинетическая энергия  $E$  системы точек может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: кинетической энергии общего поступательного движения системы, равной  $mv_{\text{ц}}^2/2$ , и кинетической энергии  $E_{\text{отн}}$  движения точек относительно системы отсчета, связанной с центром масс:

$$E = \frac{mv_{\text{ц}}^2}{2} + E_{\text{отн}}.$$

**Пример 6.** Кинетическая энергия обруча, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью  $v$ , равна  $mv^2/2 + mv^2/2 = mv^2$ , так как относительное движение в этом случае представляет собой чистое вращение, для которого

линейная скорость точек обруча равна  $v$  (полная скорость нижней точки должна быть равна нулю).

Теперь приступим к разбору задач на использование центра масс.

**Задача 1.** Однородный стержень лежит на гладкой горизонтальной поверхности. К стержню прикладывают две одинаковые по величине, но противоположные по направлению горизонтальные силы: одна сила приложена к середине стержня, другая – к его концу (рис.4). Относительно какой точки начнет поворачиваться стержень?

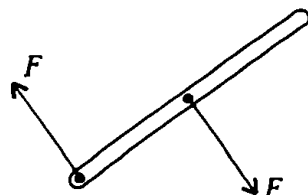


Рис.4

На первый взгляд может показаться, что осью вращения будет точка, лежащая посередине между точками приложения сил. Однако уравнение (3) показывает, что поскольку сумма внешних сил равна нулю, то равно нулю и ускорение центра масс. Значит, центр стержня будет оставаться в покое, т.е. служить осью вращения.

**Задача 2.** Тонкий однородный стержень длиной  $l$  и массой  $m$  привели в движение по гладкой горизонтальной поверхности так, что он движется поступательно и одновременно вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Найдите натяжение стержня в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от его центра.

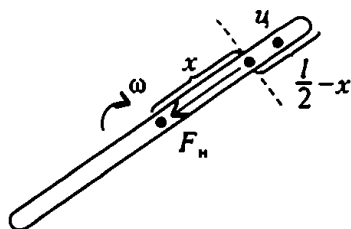


Рис.5

Перейдем в инерциальную систему отсчета, связанную с центром стержня. Рассмотрим движение куска стержня, заключенного между рассматриваемой точкой стержня и его концом (рис.5). Единственной внешней силой для этого куска является

искомая сила натяжения  $F_n$ , масса куска равна  $\Delta m = m(l/2 - x)/l$ , а его центр масс движется по окружности радиусом  $x + (l/2 - x)/2 = (l + 2x)/4$  с ускорением  $a_n = \omega^2(l + 2x)/4$ . Записав уравнение движения центра масс выделенного куска, получим

$$F_n = \Delta m a_n = \frac{m\omega^2(l^2 - 4x^2)}{8l}.$$

**Задача 3.** Двойная звезда состоит из двух звезд-компонентов с массами  $m_1$  и  $m_2$ , расстояние между которыми не меняется и остается равным  $L$ . Найдите период вращения двойной звезды.



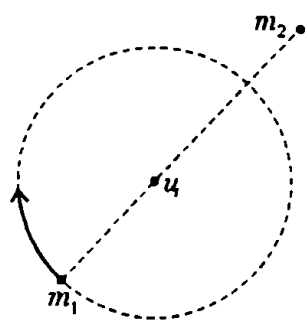


Рис. 6

другой звезде:

$$G \frac{m_1 m_2}{L^2} = m_1 \omega^2 \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Видим, что период вращения двойной звезды равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L^3}{G(m_1 + m_2)}}$$

и определяется полной массой двойной звезды, независимо от того, как она распределена между звездами-компонентами.

**Задача 4.** Две точечные массы  $m$  и  $2m$  связаны невесомой нитью длиной  $l$  и движутся по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость массы  $2m$  равна нулю, а скорость массы  $m$  равна  $v$  и направлена перпендикулярно нити (рис. 7). Найдите натяжение нити и период вращения системы.

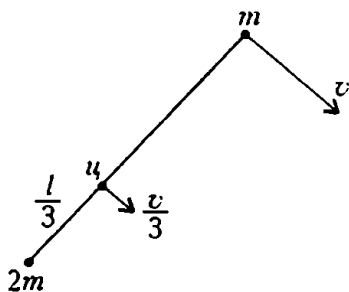


Рис. 7

Центр масс системы находится на расстоянии  $l/3$  от массы  $2m$  и движется со скоростью  $v/3$ . В системе отсчета, связанной с центром масс, точка массой  $2m$  движется по окружности радиусом  $l/3$  со скоростью  $v/3$ . Значит, период вращения равен

$T = 2\pi l/v$  (проверьте, что такой же ответ получается, если рассмотреть точку массой  $m$ ).

Натяжение нити найдем из уравнения движения любой из двух точек:

$$F_{\text{н}} = 2m \frac{(v/3)^2}{l/3} = \frac{2}{3} \frac{mv^2}{l}.$$

**Задача 5.** На гладкой горизонтальной плоскости лежат два одинаковых бруска массой  $m$  каждый, связанных легкой

пружиной жесткостью  $k$  (рис.8). Первому бруску сообщают скорость  $v_0$  в направлении от второго бруска. Опишите движение системы. Через какое время деформация пружины впервые достигнет максимального значения?



Рис.8

Центр масс системы будет перемещаться с постоянной скоростью  $v_0/2$ . В системе отсчета центра масс начальная скорость каждого бруска равна  $v_0/2$ , а жесткость половинной пружины, которая соединяет его с неподвижным центром масс, составляет  $2k$  (жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине). Период таких колебаний равен  $T = 2\pi\sqrt{m/(2k)}$ , а амплитуда колебаний каждого бруска, которую можно найти из закона сохранения энергии, составляет  $x_m = v_0\sqrt{m/(8k)}$ .

В первый раз деформация станет максимальной через четверть периода, т.е. через время

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{m}{8k}}.$$

**Задача 6.** Шар массой  $m$  налетает со скоростью  $v$  на покоящийся шар массой  $2m$ . Найдите скорости обоих шаров после упругого центрального удара.

В системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс двух шаров равен нулю как до, так и после соударения. Легко догадаться, какой ответ для конечных скоростей удовлетворяет одновременно и этому условию, и закону сохранения энергии: скорости останутся такими же, как до удара, по величине, но изменят свои направления на противоположные. Скорость центра масс системы равна  $v/3$ . В системе центра масс первый шар движется со скоростью  $2v/3$ , а второй шар движется навстречу первому со скоростью  $v/3$ . После удара шары будут разлетаться с такими же скоростями. Осталось вернуться в первоначальную систему отсчета. Применяя закон сложения скоростей, находим, что конечная скорость шара массой  $m$  равна  $v/3$  и направлена назад, а скорость покоившегося раньше шара массой  $2m$  равна  $2v/3$  и направлена вперед.

Отметим, что в системе центра масс очевидным является утверждение, что при ударе относительная скорость шаров не меняется по величине, но меняется по направлению. А так как разность скоростей при переходе в другую инерциальную систему отсчета не изменяется, можно считать, что мы вывели это важное

соотношение и для первоначальной системы отсчета:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1,$$

где буква  $v$  используется для обозначения начальных скоростей, а  $u$  – для конечных. Это уравнение можно решать совместно с законом сохранения импульса вместо закона сохранения энергии (куда скорости входят во второй степени).

**Задача 7.** Известно, что при упругом нецентральной ударе двух одинаковых шаров, один из которых до удара покоился, угол разлета равен  $90^\circ$ . Докажите это утверждение.

В системе центра масс нецентральный удар можно описать следующим образом. До удара шары сближаются с одинаковыми импульсами, после удара они разлетаются с такими же по величине, но противоположно направленными импульсами, а прямая разлета поворачивается на некоторый угол относительно прямой сближения. Чтобы перейти обратно в начальную систему отсчета, надо каждую конечную скорость сложить (векторно!) со скоростью центра масс. В случае одинаковых шаров скорость центра масс равна  $v/2$ , где  $v$  – скорость налетающего шара, и в системе отсчета центра масс шары сближаются и разлетаются с одинаковыми скоростями  $v/2$ . В том, что после сложения каждой конечной скорости со скоростью центра масс получаются взаимно перпендикулярные векторы, можно убедиться, сделав рисунок. А можно и просто проверить, что скалярное произведение векторов  $(\vec{u} + \vec{v}_c)$  и  $(-\vec{u} + \vec{v}_c)$  обращается в ноль в силу того, что модули векторов  $\vec{u}$  и  $\vec{v}_c$  равны друг другу.

### Упражнения

1. Стержень массой  $m$  и длиной  $l$  шарнирно закреплен за один из концов. Стержень отклонили на некоторый угол от вертикального положения и отпустили. В момент прохождения вертикального положения скорость нижней точки равна  $v$ . Найдите натяжение в средней точке стержня в этот момент времени.

2. Тонкий стержень массой  $m$  и длиной  $l$  вращают в горизонтальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$  вокруг одного из его концов. Найдите натяжение стержня в точке, находящейся на расстоянии  $x$  от оси вращения, если на другом конце закреплен маленький грузик массой  $M$ .

3. Найдите период колебаний для системы, описанной в задаче 5 статьи, но для брусков различных масс  $m_1$  и  $m_2$ .

4. Шар массой  $m_1$  налетает на покоящийся шар меньшей массы  $m_2$ . Найдите максимально возможный угол отклонения налетающего шара при упругом нецентральной ударе.

# ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ НА СТОЛКНОВЕНИЯ

А. Овчинников, В. Плис

В физике под столкновениями понимают процессы кратковременного взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не только как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – соединение тел, возникновение новых тел и т.п. Наконец, может иметь место *упругое* столкновение, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, приводящие к изменению внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль. В частности, с такими столкновениями приходится иметь дело в физических экспериментах в области атомных явлений.

Обсудим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол  $\beta = \arccos(4/15)$ , а величина скорости протона уменьшилась на 10% (рис. 1). Найдите массовое число химического элемента.

Взаимодействие частиц упругое; следовательно, импульс и энергия

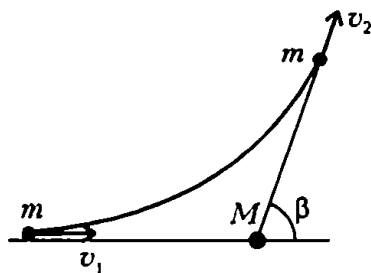


Рис. 1

---

Опубликовано в «Кванте» №1 за 2001 год.

системы сохраняются:

$$m \vec{v}_1 = m \vec{v}_2 + M \vec{v} ,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} ,$$

где  $M$  и  $v$  – масса и скорость неизвестного ядра. Из закона сохранения импульса с помощью теоремы косинусов получаем

$$(Mv)^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 - 2m^2v_1v_2 \cos \beta .$$

Из двух последних соотношений находим искомое массовое число:

$$A = \frac{M}{m} = \frac{1 + k^2 - 2k \cos \beta}{1 - k^2} = 7 , \text{ где } k = \frac{v_2}{v_1} = 0,9 .$$

Следовательно, протон столкнулся с ядром лития.

**Задача 2.** Каков максимальный угол  $\theta$  упругого рассеяния  $\alpha$ -частицы в водороде? Масса атома водорода в 4 раза меньше массы  $\alpha$ -частицы.

Рассмотрим два способа решения задачи.

*Первый способ*

Проанализируем упругое столкновение в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. Введем обозначения:  $m_1$  – масса  $\alpha$ -частицы,  $\vec{v}$  – ее скорость до рассеяния,  $m_2$  – масса атома водорода,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости  $\alpha$ -частицы и атома водорода, соответственно, после рассеяния.

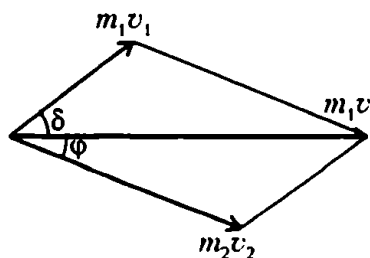


Рис.2

Взаимодействие упругое; следовательно, сохраняются импульс

(рис.2) и кинетическая энергия системы  $\alpha$ -частица – атом водорода:

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \delta + m_2 v_2 \cos \varphi ,$$

$$m_1 v_1 \sin \delta = m_2 v_2 \sin \varphi ,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} .$$

Исключив из этих соотношений угол  $\varphi$  и скорость  $v_2$ , получим относительно  $v_1$  квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2) v_1^2 - 2m_1 v \cos \delta \cdot v_1 + (m_1 - m_2) v^2 = 0 .$$

Корни этого уравнения будут вещественными при  $\sin \delta \leq m_2/m_1$ . Максимальный угол  $\delta$ , удовлетворяющий этому условию, и есть искомый угол  $\theta$ . Таким образом,

$$\theta = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \approx 0,25 \text{ рад}.$$

Заметим, что рассеяние на максимальный угол возможно только при условии, что масса налетающей частицы больше массы покоящейся.

### *Второй способ*

В общем случае столкновение удобно рассматривать в системе центра масс сталкивающихся частиц (в системе, где их суммарный импульс равен нулю). Скорость центра масс нашей системы тел равна

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}.$$

До столкновения импульс частицы массой  $m_1$  равен

$$\vec{p} = m_1 \left( \vec{v} - \vec{V} \right) = \frac{m_1 m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2},$$

а импульс частицы массой  $m_2$  равен  $-\vec{p}$ .

При упругом столкновении импульс и энергия взаимодействующей системы тел сохраняются. Так что если импульс первой частицы после столкновения обозначить  $\vec{p}_*$ , то импульс второй будет  $-\vec{p}_*$ . Из закона сохранения энергии, записанном в виде

$$p^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = p_*^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

находим

$$p = p_*.$$

Таким образом, единственное, что происходит в рассматриваемой системе при столкновении, это поворот импульсов частиц, т.е. изменение их направления без изменения величины. Вместе с импульсами так же изменяются и скорости обеих частиц. Угол поворота зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и от их взаимного расположения при столкновении.

При переходе в лабораторную систему отсчета воспользуемся правилом сложения скоростей. В соответствии с ним, скорость

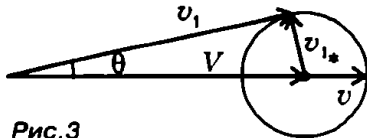


Рис.3

налетающей частицы после столкновения равна

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{1*},$$

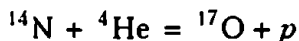
где  $\vec{v}_{1*}$  – ее скорость в системе центра масс. На рисунке 3 из одной точки отложены вектор  $\vec{V}$  – скорость центра масс системы и вектор  $\vec{v}$  – скорость налетающей частицы до столкновения. Величина

$$v_{1*} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$

определяет радиус окружности, на которой заканчивается вектор  $\vec{v}_1$ . Из рисунка следует, что в случае  $m_1 > m_2$  угол между векторами скоростей  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_1$  налетающей частицы до и после столкновения не может превышать некоторого максимального значения  $\theta$ , соответствующего случаю, когда  $\vec{v}_1$  касается окружности, т.е.

$$\theta = \arcsin \frac{v_{1*}}{V} = \frac{m_2}{m_1} = 0,25 \text{ рад.}$$

### Задача 3. Первая искусственная ядерная реакция



наблюдалась Резерфордом в 1919 году. Она идет с поглощением энергии  $Q = 1,13 \text{ МэВ}$ . Какую пороговую кинетическую энергию  $E_{\text{пор}}$  следует сообщить в лабораторной системе отсчета  $\alpha$ -частице, чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из азота указанная реакция могла произойти?

Пороговой энергией  $E_{\text{пор}}$ , или порогом ядерной реакции, называют такую энергию налетающей на неподвижную мишень частицы, начиная с которой ядерная реакция становится возможной.

Сначала – небольшое отступление. Найдем связь кинетических энергий  $E_k$  и  $E_{k*}$  системы материальных точек в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс соответственно. По закону сложения скоростей, для каждой  $i$ -й материальной точки

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i*},$$

где  $\vec{V}$  – скорость центра масс системы. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе

равна

$$E_k = \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{V} + \vec{v}_{i*})^2}{2} = \\ = \sum \frac{m_i \vec{V}^2}{2} + \sum \frac{m_i \vec{v}_{i*}^2}{2} + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_{i*} .$$

Сумма  $\sum m_i \vec{v}_{i*}$  равна нулю, так как она определяет скорость центра масс в системе центра масс. Таким образом,

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + E_{k*} ,$$

т.е. кинетическая энергия совокупности материальных точек в лабораторной системе отсчета равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же совокупности материальных точек в ее относительном движении в системе центра масс.

Теперь приступим к решению задачи. Обозначим через  $\vec{p}_0$  импульс  $\alpha$ -частицы до столкновения. Кинетическая энергия движения центра масс системы

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}}$$

не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется, и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Тогда искомую энергию найдем из условия

$$E_{\text{пор}} = Q + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}} ,$$

откуда

$$E_{\text{пор}} = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} Q = 1,45 \text{ МэВ} .$$

Заметим, что минимум кинетической энергии бомбардирующей частицы достигается в случае, когда продукты реакции покоятся в системе центра масс.

**Задача 4.** *Неподвижный невозбужденный атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбужденное состояние и начинает двигаться. Найдите величину  $v$  скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения*



фотона. Энергия возбуждения атома  $E_{12} = 1,63 \cdot 10^{-18}$  Дж. Энергия покоя атома водорода  $mc^2 = 1,49 \cdot 10^{-10}$  Дж. Указание: при  $x \ll 1$  можно считать, что  $(1+x)^a \approx 1+ax$ .

Обсудим два способа решения задачи.

#### *Первый способ*

Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Из законов сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

и импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

находим искомую скорость:

$$v = c \left( \sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{mc^2}} - 1 \right) \approx c \frac{E_{12}}{mc^2},$$

которая определяется только отношением энергии возбуждения к энергии покоя атома водорода. При выводе учтено, что в числителе стоит величина, на много порядков меньшая, чем в знаменателе. Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении.

Итак, при переходе атома водорода из основного состояния в первое возбужденное состояние атом начинает двигаться со скоростью

$$v \approx c \frac{E_{12}}{mc^2} \approx 3,3 \text{ м/с}.$$

#### *Второй способ*

При записи законов сохранения энергии и импульса воспользуемся релятивистскими формулами для энергии и импульса:

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Далее, разделим второе соотношение на первое и получим

$$v = c \frac{hc/\lambda}{mc^2 + hc/\lambda}.$$

Энергия поглощаемого фотона много меньше энергии покоя

атома, поэтому выражение для скорости можно представить в виде

$$v = c \frac{hc/\lambda}{mc^2} = c \frac{E_{12}}{mc^2}.$$

**Задача 5.** На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова минимальная кинетическая энергия налетающего атома, при которой в результате столкновения может излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода 13,6 эВ.

Налетающий атом передаст на ионизацию максимально возможную энергию при таком неупругом столкновении, когда оба атома в системе центра масс будут покоиться. Кинетическая энергия движения центра масс системы, равная

$$\frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{p^2}{4m_p} = \frac{E_{\text{пор}}}{2},$$

где  $m_p$  – масса протона, а  $E_{\text{пор}}$  – пороговая энергия, не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется, и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Фотон унесет минимальную энергию, если электрон в атоме водорода перейдет с первого уровня на второй. Для этого атом должен поглотить энергию

$$h\nu_{12} = hR \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} hR = \frac{E_{\text{пор}}}{2},$$

где  $R$  – постоянная Ридберга. При ионизации электрон переходит с первого уровня на бесконечность; следовательно, энергия ионизации равна

$$E_{\text{и}} = hR.$$

Из полученных соотношений находим

$$E_{\text{пор}} = \frac{3}{2} E_{\text{и}} = 20,4 \text{ эВ}.$$

**Задача 6.** Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в обратном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.

При энергиях в сотни тысяч электронвольт необходим учет релятивистских эффектов. Законы сохранения энергии и им-

пульса принимают вид

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{hc}{\lambda},$$
$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

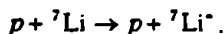
где  $m$  – масса электрона,  $\lambda_0$  и  $\lambda$  – длины волн фотона. Умножим второе равенство на  $c$ , сложим его с первым и вычтем его из первого равенства. Перемножив полученные соотношения, найдем

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2 \frac{h}{mc} = 4,84 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Заметим, что это вполне согласуется с экспериментальными данными.

### Упражнения

1. Ядро лития возбуждается пучком протонов, падающим на неподвижную литиевую мишень. При этом происходит реакция



При каких отношениях энергии налетающего протона к энергии возбуждения лития возможно возникновение протонов, движущихся в обратном к потоку направлении?

2. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает электрон. Какова пороговая кинетическая энергия  $E_{\text{пор}}$  налетающего электрона, при которой в результате столкновения может излучаться фотон? Энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{и}} = 13,6 \text{ эВ}$ .

3. Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в перпендикулярном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.

*А. Овчинников, В. Плис*

Гармонические колебания – важнейший вид механического движения. Поэтому полезно обратить внимание на некоторые особые свойства этого движения.

Известно, что при гармонических колебаниях смещение  $x$  тела от положения равновесия зависит от времени  $t$  по закону

$$x = X \cos(\omega t + \delta).$$

Здесь  $X$  – величина максимального смещения тела от положения равновесия, т.е. амплитуда колебаний,  $(\omega t + \delta)$  – фаза колебаний,  $\omega$  – циклическая (круговая) частота колебаний,  $\delta$  – начальная фаза колебаний.

Дифференцирование смещения  $x$  по времени  $t$  позволяет найти проекцию скорости  $v_x$  колеблющегося тела на координатную ось  $OX$ :

$$v_x = -X\omega \sin(\omega t + \delta).$$

Произведение величин  $X$  и  $\omega$  в правой части этого равенства имеет смысл величины максимальной скорости  $V$ , т.е. амплитуды скорости колеблющегося тела. Таким образом, амплитуды скорости и смещения связаны соотношением

$$V = X\omega. \quad (1)$$

Дифференцируя проекцию  $v_x$  скорости по времени  $t$ , найдем проекцию  $a_x$  ускорения колеблющегося тела на ось  $OX$ :

$$a_x = -X\omega^2 \cos(\omega t + \delta).$$

Произведение величин  $X$  и  $\omega^2$  в правой части равенства – это величина максимального ускорения  $A$ , т.е. амплитуды ускорения колеблющегося тела. Иными словами, амплитуды ускорения и смещения связывает выражение

$$A = X\omega^2. \quad (2)$$

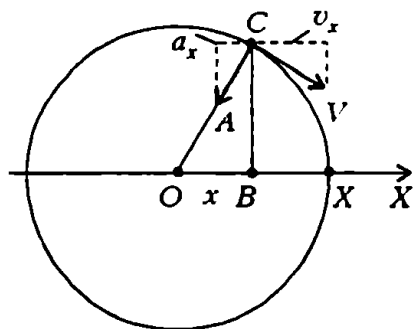


Рис. 1

Формулы (1) и (2) можно получить по-другому. Их вывод основан на том, что если точка C равномерно с линейной скоростью  $V$  и угловой скоростью  $\omega$  движется по окружности радиусом  $X$  (рис.1), то ее проекция  $B$  на координатную ось  $OX$  совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$ . Из кинематики движения по окружности известно, что линейная скорость  $V$ , угловая скорость  $\omega$  и радиус вращения  $X$  связаны соотношением, совпадающим с соотношением (1), а центростремительное ускорение  $A$  выражается через радиус  $X$  и квадрат угловой скорости  $\omega$  формулой, совпадающей с выражением (2).

Обратим внимание еще на одно важное свойство гармонических колебаний. При рассмотрении колебаний в механике часто удобнее их описывать не на языке сил, а на языке энергий. Допустим, исследуемая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии описываются формулами

$$E_p = \frac{\alpha x^2}{2}, \quad E_k = \frac{\beta (x')^2}{2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – положительные постоянные величины (параметры системы),  $x$  и  $x'$  – смещение от положения равновесия и его первая производная по времени, т.е. проекция скорости  $v_x$ . Закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{\alpha x^2}{2} + \frac{\beta (x')^2}{2} = \text{const}. \quad (3)$$

Продифференцировав это равенство по времени, получим дифференциальное уравнение

$$x'' + \frac{\alpha}{\beta} x = 0,$$

где  $x''$  – вторая производная от  $x$  по времени, т.е. проекция ускорения  $a_x$ . Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$x = X \cos(\omega t + \delta),$$

причем для циклической частоты находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (4)$$

Таким образом, приходим к выводу, что если энергия исследуемой системы описывается формулой (3), то движение является гармоническим колебанием с циклической частотой, определяемой соотношением (4).

Теперь обсудим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** К пружине жесткостью  $k$ , один конец которой закреплен, подвешен груз массой  $m$ , лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис.2). Подставку быстро убирают. Найдите величины максимальной скорости и максимальной силы упругости пружины при дальнейшем движении груза.

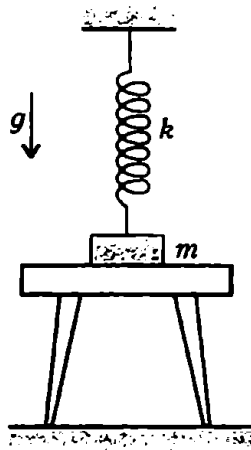


Рис.2

Положение равновесия находится ниже начального положения груза на  $X = mg/k$ . Колебания смещения  $x$  груза относительно положения равновесия будут происходить по закону  $x(t) = X \cos \omega t$  (ось  $OX$  направлена по вертикали вверх), где  $\omega = \sqrt{k/m}$  — круговая частота колебаний.

В начальный момент пружина не деформирована; следовательно, в этот момент ускорение груза равно ускорению свободно падающего тела:  $a_x = -g$  и максимально по величине. Максимальная скорость достигается при прохождении грузом положения равновесия. Амплитуда  $V$  колебаний скорости связана с амплитудой  $A$  колебаний ускорения соотношением  $V = A/\omega$ . Отсюда

$$V = g\sqrt{m/k}.$$

После прохождения положения равновесия ускорение груза направлено вверх, растет по величине и достигает при остановке максимального значения  $a_x = g$ . Из второго закона Ньютона  $ma_x = F_x + mg_x$  находим максимальную величину силы упругости пружины:

$$F = mg - (-mg) = 2mg.$$

**Задача 2.** В известном опыте академик А.Ф.Иоффе для определения амплитуды колебаний ножки камертона подносил к ней стальной шарик на нити вплоть до соприкосновения шарика с ножкой (рис.3). Найдите амплитуду  $X$  колебаний ножки камертона, если максимальная высота подъема шарика после одного отскока (точнее — ее среднее значение при многочисленных опытах) равна  $H$ . Частота колебаний ножки

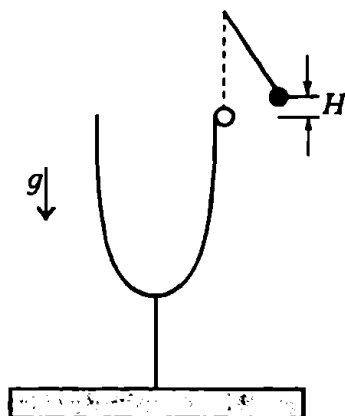


Рис.3

камертона  $\nu$ . Масса шарика мала по сравнению с массой ножки камертона.

Найдем величину скорости, которую приобретает легкий неподвижный шарик в результате абсолютно упругого соударения с массивной ножкой камертона, движущейся со скоростью  $\vec{V}$ . Покоящийся относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчета шарик движется относительно такой ножки со скоростью  $-\vec{V}$ . В результате абсолютно упругого соударения относительная скорость шарика меняет знак и становится равной  $\vec{V}$ . Тогда скорость шарика в неподвижной системе отсчета, равная векторной сумме скорости ножки и относительной скорости шарика, будет равна  $2\vec{V}$ . Максимальная высота подъема шарика достигается при максимальной начальной скорости, которая для ножки камертона равна  $X\omega$ , а для шарика – соответственно,  $2X\omega$ . По закону сохранения полной механической энергии,

$$\frac{m(2X\omega)^2}{2} = mgH,$$

где  $m$  – масса шарика. Отсюда с учетом соотношения  $\omega = 2\pi\nu$  находим искомую амплитуду колебаний:

$$X = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{gH}{2}}.$$

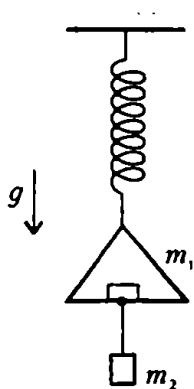


Рис.4

**Задача 3.** На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик (рис.4). Масса чашки  $m_1$ , масса грузика пренебрежимо мала. К дну чашки подвешен груз массой  $m_2$ . Вся система находится в равновесии. Нить, на которой подвешен груз, пережигают. При каком соотношении между  $m_1$  и  $m_2$  грузик на чашке начнет подскакивать?

После отрыва груза массой  $m_2$  положение равновесия системы сместится вверх на  $X = m_2g/k$ , где  $k$  – жесткость пружины. Колебания смещения  $x$  чашки относительно нового положения равновесия будут происходить по

гармоническому закону  $x(t) = X \cos \omega t$  с круговой частотой  $\omega = \sqrt{k/m_1}$  (ось  $OX$  направлена по вертикали вниз). В процессе подъема чашки с грузом после прохождения положения равновесия ускорение направлено вниз, растет по величине и достигает наибольшего значения

$$A = \omega^2 X = \frac{kX}{m_1} = \frac{m_2 g}{m_1}.$$

Если  $A < g$ , т.е.  $m_2 < m_1$ , то при движении чашки вниз грузик будет оставаться на ней. Если  $A > g$ , т.е.  $m_2 > m_1$ , грузик оторвется от чашки (до того, как чашка остановится).

**Задача 4.** Математический маятник длиной  $L$  совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую величину  $\Delta L$ , вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (рис. 5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину  $\Delta L$ . Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите относительное увеличение амплитуды колебаний угла отклонения нити от вертикали за один период.

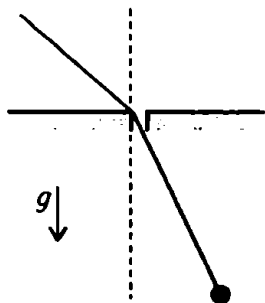


Рис. 5

При прохождении маятником положения равновесия внешняя сила поднимает грузик на  $\Delta L$  и совершает при этом работу, равную

$$\left( \frac{mV^2}{L} + mg \right) \Delta L,$$

где  $m$  – масса грузика,  $V$  – его максимальная скорость. В крайних положениях, при которых угол отклонения нити от вертикали равен  $\pm A$ , длина маятника увеличивается на  $\Delta L$ . В этом случае работа внешней силы равна

$$-mg\Delta L \cos A.$$

В течение каждого периода длина маятника дважды увеличивается и уменьшается. Таким образом, приращение энергии маятника за период колебаний составляет

$$\Delta W = 2 \left( \frac{mV^2}{L} + mg(1 - \cos A) \right) \Delta L,$$



или, поскольку рассматриваются малые колебания, т.е. угол  $A$  мал и  $\cos A = 1 - A^2/2$ ,

$$\Delta W = 2 \left( mg \Delta L \frac{A^2}{2} + \frac{mV^2}{L} \Delta L \right).$$

Амплитуда колебаний скорости  $V$  связана с амплитудой колебаний смещения  $LA$  соотношением  $V = \omega LA$ , где  $\omega = \sqrt{g/L}$  — круговая частота колебаний маятника. Тогда

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} \frac{mV^2}{2} = 6 \frac{\Delta L}{L} mgL \frac{A^2}{2}.$$

Энергия маятника равна

$$W = \frac{mV^2}{2} = mgL \frac{A^2}{2},$$

поэтому формула для  $\Delta W$  принимает вид

$$\Delta W = 6 \frac{\Delta L}{L} W.$$

Таким образом, энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии  $W$  и величине  $\Delta L/L$ . Отсюда для относительного увеличения энергии получаем

$$\frac{\Delta W}{W} = 6 \frac{\Delta L}{L}.$$

Теперь, принимая во внимание выражение для энергии маятника

$$W = mgL \frac{A^2}{2},$$

найдем

$$\Delta W = \frac{mgL}{2} \cdot 2A \Delta A \text{ и } \frac{\Delta W}{W} = 2 \frac{\Delta A}{A}.$$

Сравнивая между собой два выражения для  $\Delta W/W$ , для относительного увеличения амплитуды угла за период получим

$$\frac{\Delta A}{A} = 3 \frac{\Delta L}{L}.$$

**Задача 5.** Вдали от всех тяготеющих масс в космосе находится тонкая однородная спица длиной  $L = 10$  м и массой  $M = 1$  кг. По ней без трения может скользить бусинка массой  $m = 0,1$  кг. В начальный момент бусинка смещена относительно центра спицы на  $d = 1$  см и система неподвижна. С какой по величине скоростью  $V$  (в системе спицы) и через какое время

$\tau$  бусинка достигнет центра спицы? Гравитационная постоянная  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ .

В процессе колебаний центр масс системы тел будет оставаться неподвижным. Начало неподвижной системы отсчета  $OX$  поместим в центр масс, а подвижную систему отсчета  $OX_1$  свяжем со спицей. Ускорение бусинки при малом ее смещении  $x_1$  (в системе спицы) определяется силой притяжения концевого отрезка спицы, имеющего вдвое большую длину и расположенного на расстоянии  $L/2$  от бусинки:

$$a_{bx} = \frac{F_x}{m} = -\frac{Gm(M/L) \cdot 2x_1}{m(L/2)^2} = -\frac{8GM}{L^3} x_1.$$

Ускорение спицы при этом смещении бусинки равно

$$a_{cx} = -\frac{F_x}{M} = \frac{Gm(M/L) \cdot 2x_1}{M(L/2)^2} = \frac{8Gm}{L^3} x_1.$$

Для сложения ускорений справедливо то же правило, что и для сложения скоростей (в этом легко убедиться, например, путем дифференцирования). Тогда ускорение бусинки относительно спицы будет

$$x_1'' = a_{bx_1} = a_{bx} - a_{cx} = -\frac{8G(M+m)}{L^3} x_1.$$

Получено уравнение гармонических колебаний бусинки относительно спицы. Круговая частота этих колебаний равна

$$\omega = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2G(M+m)}{L}} \approx 0,77 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Бусинка вернется в центр спицы через четверть периода колебаний, т.е. через

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ с}$$

с относительной скоростью

$$V = \omega d \approx 0,77 \cdot 10^{-8} \text{ м/с}.$$

**Задача 6.** Потенциальная энергия атома в некотором кристалле описывается формулой  $U(r) = U_0 \left( (r_0/r)^{12} - 2(r/r_0)^6 \right)$ , где  $U_0 = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$ ,  $r_0 = 0,287 \text{ нм}$  и при этом  $r_0$  соответствует равновесному положению атома. При малых отклонениях от положения равновесия происходят колебания. Согласно квантовым представлениям, энергия колебаний с частотой

$\omega = 2\pi\nu$  может принимать значения  $E_n = h\nu(n + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Оцените наименьшую амплитуду  $X_0$  колебаний смещения атома в таком кристалле. Масса атома  $m = 6,4 \cdot 10^{-24}$  г;  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Для определения круговой частоты  $\omega$  колебаний атома обратимся к гармоническим колебаниям груза массой  $m$  на пружине жесткостью  $k$ , находящегося на гладкой горизонтальной плоскости. При смещении на  $x$  от положения равновесия приращение потенциальной энергии груза составляет  $kx^2/2$ , приращение его кинетической энергии составляет  $mv_x^2/2$ , а круговая частота колебаний равна  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Вернемся к нашей задаче и проанализируем выражение для потенциальной энергии атома в кристалле. Отметим, что при  $r = r_0$  потенциальная энергия достигает минимума (проверьте это самостоятельно). Тогда при малых смещениях  $\delta r$  ( $\delta r \ll r_0$ ) от положения равновесия приращение потенциальной энергии можно приближенно считать пропорциональным квадрату смещения:

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = \frac{k(\delta r)^2}{2}.$$

Найдем коэффициент пропорциональности  $k$ . При малых  $x$  справедливы приближенные равенства

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n - 1)x^2,$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x,$$

и приращение потенциальной энергии при малых смещениях  $\delta r$  от положения равновесия принимает вид

$$\Delta U = U(r_0 + \delta r) - U(r_0) = \frac{36U_0}{r_0^2}(\delta r)^2.$$

Отсюда получаем

$$k = \frac{72U_0}{r_0^2}, \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{6}{r_0} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.$$

Искомую амплитуду  $X_0$  найдем из условия квантования колебаний:

$$E_0 = \frac{h\nu}{2} = \frac{kX_0^2}{2},$$

откуда

$$X_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{h}{mv}} = \sqrt{\frac{hr_0}{12\pi\sqrt{2mU_0}}} = 0,06 \text{ нм}.$$

### Упражнения

1. На неподвижный груз массой  $m = 10 \text{ кг}$ , лежащий на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленный пружиной жесткостью  $k = 4 \cdot 10^3 \text{ Н/м}$  к вертикальной стенке (рис.6), в течение некоторого времени  $\tau$  действует постоянная по величине и направлению сила  $F$ . При каких значениях  $\tau$  амплитуда колебаний скорости после прекращения действия силы будет максимальной?

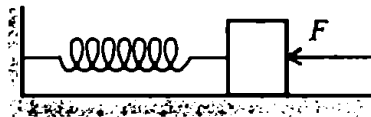


Рис.6

2. Брусок массой  $m_1$  под действием пружины совершает на гладком столе гармонические колебания с амплитудой  $X$  и периодом  $T$ . Пуля массой  $m_2$ , летящая вдоль направления движения бруска, попадает в него. В результате колебания прекращаются. Определите величину  $V$  скорости пули. Время торможения пули в бруске мало по сравнению с периодом колебаний.

3. Чашка пружинных весов с гирями (рис.7) совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой  $X$  и периодом  $T$ . Масса чашки и гирь  $m_1$ . Гирю какой массы  $m_2$  следует снять с чашки весов в момент ее нахождения в крайнем верхнем положении, чтобы колебания прекратились?

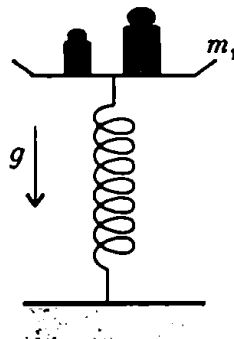


Рис.7

4. Небольшой шарик на нити длиной  $L$  совершает колебания в вертикальной плоскости с малой угловой амплитудой. Для увеличения амплитуды колебаний нить при каждом прохождении положения равновесия укорачивают на малую по сравнению с  $L$  величину  $\Delta L = 3 \text{ мм}$ , вытягивая ее через узкое отверстие в месте подвеса (см. рис.5), а в каждом крайнем положении нить удлиняют на ту же величину  $\Delta L$ , отпуская ее. Нить удлиняют и укорачивают таким образом, что за время одного изменения длины сила натяжения остается постоянной по величине. Найдите период  $T$  колебаний, если за каждый период амплитуда колебаний скорости увеличивается на  $\delta = 0,5\%$ . Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

5. На тележке массой  $m_1$ , покоящейся на горизонтальных рельсах, укреплен маятник – шарик массой  $m_2$  на нити длиной  $L$ . Найдите период  $T$  малых колебаний маятника, которые он будет совершать, если отклонить его вдоль рельсов на небольшой угол и затем отпустить одновременно с тележкой, не сообщив им начальной скорости.

В.Плис

Опыт вступительных экзаменов в ведущие физические вузы (МФТИ, МГУ, НГУ и др.) показывает, что задачи по механике, для решения которых следует привлекать не только законы сохранения или изменения физических величин, но и учитывать кинематические связи, выполнять переход из одной системы отсчета в другую, анализировать динамику системы тел наряду с динамикой того или иного тела в отдельности и т.д., вызывают затруднения у поступающих. Такие задачи иногда называют комбинированными. Зачастую они допускают несколько подходов к решению. Проиллюстрируем это на конкретных примерах достаточно сложных задач вступительных экзаменов по физике.

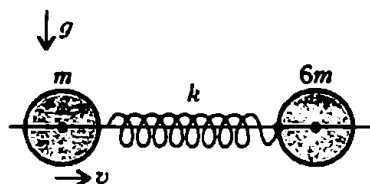


Рис. 1

Шар массой  $m$  движется со скоростью  $v$ . Найдите максимальную деформацию  $\Delta L_m$  пружины и время  $\tau$  контакта шара массой  $m$  с пружиной.

Рассмотрим три способа решения этой задачи.

## Первый способ

В лабораторной системе отсчета – ЛСО – уравнения движения шаров в проекции на горизонтальную ось  $X$  принимают вид (рис. 2)

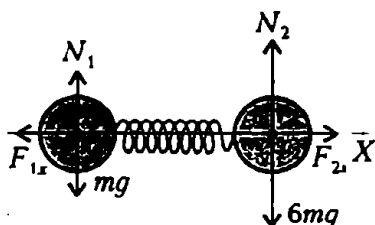


Рис. 2

$$ma_{1x} = F_{1x},$$

$$6ma_{2x} = F_{2x}.$$

Опубликовано в «Кванте» №1 за 2003 год.

Отсюда с учетом равенства  $F_{1x} = -F_{2x}$  получим

$$a_{2x} - a_{1x} = F_{2x} \left( \frac{1}{6m} + \frac{1}{m} \right).$$

В момент времени  $t$  деформация пружины равна

$$L(0) - L(t) = 6R - (x_2 - x_1 - 2R) = -(x_2 - x_1) + 8R,$$

где  $L$  – длина пружины. Упругая сила связана с деформацией пружины законом Гука:

$$F_{2x} = k(-(x_2 - x_1) + 8R).$$

Тогда движение одного шара относительно другого задается уравнением

$$(x_2 - x_1 - 8R)'' = a_{2x} - a_{1x} = -\frac{k}{M}(x_2 - x_1 - 8R),$$

где  $M = \frac{m \cdot 6m}{m + 6m} = \frac{6}{7}m$  – так называемая приведенная масса системы шаров. Это уравнение описывает свободные гармонические колебания. Его общее решение имеет вид

$$x_2 - x_1 - 8R = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{7k}{6m}}$ , а постоянные  $A$  и  $B$  можно найти из начальных условий

$$x_2(0) - x_1(0) - 8R = 0 = A$$

и

$$v_{2x}(0) - v_{1x}(0) = -v = B\omega.$$

Окончательно получим

$$x_2(t) - x_1(t) - 8R = -v\sqrt{\frac{6m}{7k}} \sin \omega t.$$

Отсюда находим максимальную деформацию пружины:

$$\Delta L_m = v\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Шар массой  $m$  будет находиться в контакте с пружиной в течение половины периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

### Второй способ

В ЛСО кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Если ввести систему центра масс – Ц-систему, – то с учетом правила сложения скоростей

$$\vec{v}_i = \vec{v}_u + \vec{u}_i,$$

где  $\vec{v}_u$  – скорость центра масс в ЛСО, а  $\vec{u}_i$  – скорость  $i$ -й точки в Ц-системе, выражение для энергии можно преобразовать:

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right) v_u^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2} + \left(\vec{v}_u \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i\right).$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, так как в Ц-системе скорость центра масс равна нулю:

$$\vec{u}_u = \frac{\sum_i m_i \vec{u}_i}{\sum_i m_i} = 0.$$

Полученное равенство

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right) v_u^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2}$$

словами формулируется так (теорема Кенига): кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме половины произведения массы системы на квадрат скорости ее центра масс и кинетической энергии относительного движения точек в Ц-системе.

Чтобы применить эту формулу для решения нашей задачи, найдем скорость центра масс системы шаров. Так как горизонтальные внешние силы на шары не действуют, импульс системы сохраняется:

$$mv = (m + 6m) v_u,$$

поэтому скорость центра масс системы в ЛСО постоянна и равна  $v_u = v/7$ . В момент начала деформации пружины кинетическая

энергия относительного движения шаров в Ц-системе равна

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{7m}{2} \left( \frac{v}{7} \right)^2 = \frac{3mv^2}{7}.$$

В процессе деформации кинетическая энергия относительного движения убывает до нуля, а энергия деформации растет и достигает наибольшего значения в момент остановки шаров в Ц-системе. Центр масс системы движется при этом с постоянной скоростью. По закону сохранения энергии,

$$\frac{3mv^2}{7} = \frac{k\Delta L_m^2}{2},$$

откуда

$$\Delta L_m = v \sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Для определения  $\tau$  заметим, что деформация пружины изменяется по гармоническому закону, поэтому амплитуда скорости деформации и амплитуда относительного смещения связаны соотношением

$$v_m = v = \omega \Delta L_m.$$

Из двух последних равенств находим

$$\omega = \frac{v}{\Delta L_m} = \sqrt{\frac{7k}{6m}}.$$

Искомое время равно половине периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

### *Третий способ*

В начальный момент времени скорости шаров в Ц-системе максимальны по величине и равны, соответственно,  $u_{1m} = v - v/7 = 6v/7$  для налетающего в ЛСО шара и  $u_{2m} = v/7$  для покоящегося шара. В Ц-системе (системе нулевого импульса) отношение скоростей 6 : 1 (обратное отношению масс) будет постоянным в процессе деформации пружины. Следовательно, неподвижная в Ц-системе точка пружины делит ее длину в том же отношении, т.е. 6 : 1. Жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Отсюда находим жесткости двух пружин, разделенных неподвижной точкой:

$$k_1 = \frac{7}{6} k \text{ и } k_2 = 7k.$$



Тогда амплитуды смещений шаров будут равны

$$\Delta L_{1m} = \frac{u_{1m}}{\omega_1} = \frac{6v/7}{\sqrt{k_1/m}} = \frac{6}{7} v \sqrt{\frac{6m}{k}}$$

и

$$\Delta L_{2m} = \frac{u_{2m}}{\omega_2} = \frac{v/7}{\sqrt{k_2/(6m)}} = \frac{1}{7} v \sqrt{\frac{6m}{k}}.$$

Эти деформации достигаются одновременно, а максимальная деформация пружины равна их сумме:

$$\Delta L_m = \Delta L_{1m} + \Delta L_{2m} = v \sqrt{\frac{6m}{k}}.$$

Время  $\tau$  равно половине периода гармонических колебаний любого шара:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_2} = \pi \sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

**Задача 2.** С плоскости, образующей с горизонтом угол  $\alpha$ , скатывается без проскальзывания однородная тонкостенная труба массой  $M$ . Найдите ускорение  $a_u$  центра масс трубы и силу трения  $F_{тр}$ , пренебрегая влиянием воздуха. При каком соотношении между коэффициентом трения скольжения  $\mu$  и углом  $\alpha$  качение будет происходить без проскальзывания? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Введем обозначения:  $\vec{v}_u$  – скорость центра масс трубы,  $\omega$  – угловая скорость вращения трубы в Ц-системе. Труба катится без проскальзывания, поэтому

$$v_u = \omega R,$$

где  $R$  – радиус трубы. Кинетическая энергия трубы равна

$$E_k = \frac{Mv_u^2}{2} + \sum_i \frac{m_i (\omega R)^2}{2} = Mv_u^2.$$

По закону сохранения энергии приращение кинетической энергии трубы к моменту времени  $t$  от начала движения равно убыли потенциальной энергии:

$$Mv_u^2 = Mgx \sin \alpha,$$

где  $x$  – перемещение центра масс трубы к указанному моменту времени. Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что  $v_u = dx/dt$  и  $a_u = dv_u/dt$ , получим искомое ускорение:

$$a_u = \frac{1}{2} g \sin \alpha.$$

Из уравнения движения центра масс трубы (рис.3)

$$Ma_{\text{ц}} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

найдем величину силы трения сцепления:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} Mg \sin \alpha .$$

Если считать, что при качении величина максимальной силы трения равна

$$F_{\text{тр} \text{ м}} = \mu N = \mu Mg \cos \alpha ,$$

то качение без проскальзывания будет происходить при условии

$$F_{\text{тр}} \leq \mu Mg \cos \alpha ,$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 2\mu .$$

Так как на скатывающееся тело действует сила трения, может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения механической энергии. Ответ заключается в том, что при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения, т.е. к точкам, скорость которых равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления работы не совершает. Роль силы трения сцепления сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение (без проскальзывания).

**Задача 3.** По клину массой  $M$ , находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, скользит шайба массой  $m$ . Гладкая наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Определите величину ускорения клина  $a_1$ . Под каким углом  $\beta$  к горизонту движется шайба? Найдите силу давления  $F$  шайбы на клин. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

Обсудим два способа решения этой задачи.

*Первый способ*

Внешние силы, действующие на систему клин – шайба, направлены только по вертикали (рис.4). Следовательно, импульс системы в го-

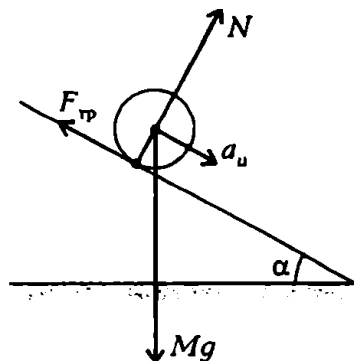


Рис.3

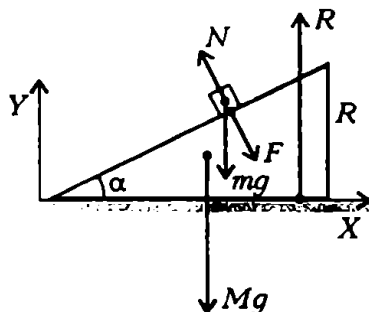


Рис.4

ризонтальном направлении сохраняется:

$$Mv_{1x} + mv_{2x} = 0.$$

Отсюда дифференцированием по времени получаем

$$Ma_{1x} + ma_{2x} = 0.$$

Скорость шайбы  $\vec{v}_2$  в ЛСО, скорость шайбы  $\vec{u}$  относительно клина и скорость клина  $\vec{v}_1$  в ЛСО связаны законом сложения скоростей (рис.5):

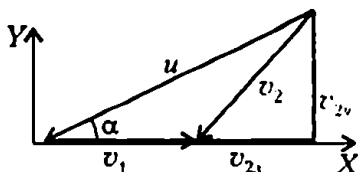


Рис.5

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u},$$

так что

$$v_{2x} = v_{1x} - u \cos \alpha,$$

$$v_{2y} = -u \sin \alpha.$$

Подставляя выражение для  $v_{2x}$  в уравнение закона сохранения импульса, находим

$$u = v_{1x} \frac{m + M}{m \cos \alpha}.$$

С учетом этого соотношения получаем

$$v_{2y} = -v_{1x} \frac{m + M}{m} \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a_{2y} = -a_{1x} \frac{m + M}{m} \operatorname{tg} \alpha.$$

Далее обратимся к энергетическим соображениям. Поскольку силы трения отсутствуют, полная механическая энергия системы клин – шайба сохраняется:

$$\frac{Mv_{1x}^2}{2} + mgy + \frac{mv_{2x}^2}{2} + \frac{mv_{2y}^2}{2} = mgh,$$

где буквой  $h$  обозначена  $y$ -координата шайбы при  $t = 0$ . Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$Mv_{1x}a_{1x} + mgv_{2y} + mv_{2x}a_{2x} + mv_{2y}a_{2y} = 0.$$

Подстановка в это соотношение полученных выше выражений для  $v_{2x}$ ,  $v_{2y}$ ,  $a_{2x}$ ,  $a_{2y}$  приводит (после сокращения на  $v_{1x}$ ) к ответу на вопрос об ускорении клина:

$$a_{1x} = \frac{1}{2} \frac{m \sin 2\alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

Для определения угла  $\beta$  заметим, что в ЛСО шайба движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, так что ее

перемещение за любой промежуток времени сонаправлено с вектором ускорения  $\vec{a}_2$ , тогда

$$\beta = \arctg \left| \frac{a_{2y}}{a_{2x}} \right| = \arctg \left( \frac{m+M}{M} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Горизонтальная составляющая силы давления  $F$  шайбы на клин (см. рис.4) сообщает клину ускорение  $a_{1x}$ . По второму закону Ньютона,

$$Ma_{1x} = F \sin \alpha.$$

Отсюда находим силу давления шайбы:

$$F = \frac{Mm \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

### *Второй способ*

Для определения ускорения клина рассмотрим движение каждого из тел. Силы, приложенные к телам, указаны на рисунке 4. Запишем второй закон Ньютона для клина:

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}$$

и для шайбы:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на оси ЛСО с учетом равенства  $\vec{F} = -\vec{N}$ , получаем

$$Ma_{1x} = N \sin \alpha,$$

$$ma_{2x} = -N \sin \alpha,$$

$$ma_{2y} = mg - N \cos \alpha.$$

Скорость  $\vec{v}_2$  шайбы в ЛСО, скорость  $\vec{u}$  шайбы относительно клина и скорость  $\vec{v}_1$  клина в ЛСО связаны законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим связь соответствующих ускорений:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{w}.$$

Из треугольника ускорений (см. треугольник скоростей на рисунке 5) следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a_{1x}}.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для проекций ускорения шайбы  $a_{2x}$  и  $a_{2y}$ , после несложных преобразований получаем

$$a_{1x} = \frac{1}{2} \frac{m \sin 2\alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g.$$

**Задача 4.** На гладкой горизонтальной плоскости лежит клин с углом при вершине  $\alpha$ . На гладкой наклонной плоскости клина лежит брусок, связанный с клином пружиной жесткостью  $k$  (рис.6). Масса клина  $M$ , масса бруска  $m$ . Найдите период  $T$  малых колебаний системы.

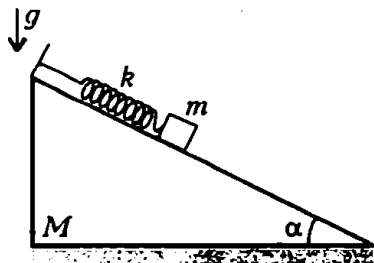


Рис.6

Предлагаем два способа решения задачи.

*Первый способ*

Внешние силы, действующие на систему клин – брусок, направлены только по вертикали (рис.7). Следовательно, импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется:

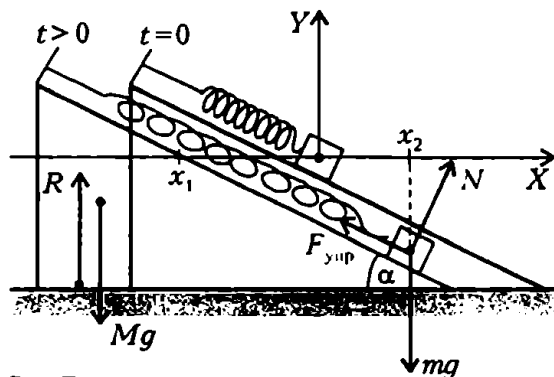


Рис.7

$$Mv_1 + mv_{2x} = 0.$$

Интегрируя это равенство по времени, получаем

$$Mx_1 + mx_2 = 0.$$

Начало отсчета ЛСО соответствует такому положению бруска, при котором пружина недеформирована. Из геометрии перемеще-

ний (см. рис.7) с учетом последнего соотношения находим удлинение пружины:

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos \alpha} = \frac{x_2}{\cos \alpha} \left( 1 + \frac{m}{M} \right)$$

и смещение бруска по вертикали:

$$y_2 = -x_2 \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha$$

в зависимости от координаты  $x_2$  бруска.

Квадратичная относительно смещения  $x_2$  часть потенциальной энергии имеет вид

$$E_p = \frac{k\Delta L^2}{2} = \frac{k}{2\cos^2\alpha} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 x_2^2$$

(линейные относительно  $x_2$  и  $y_2$  слагаемые сокращаются вблизи положения равновесия). Так как  $x_1$  и  $y_2$  линейны относительно  $x_2$ , кинетическая энергия системы клин – брусок будет квадратичной функцией горизонтальной проекции  $v_{2x} = x_2'$  скорости шайбы:

$$E_k = \frac{Mv_{1x}^2}{2} + \frac{m}{2}(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left(1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan^2\alpha\right) (x_2')^2.$$

Если механическая система такова, что ее потенциальная и кинетическая энергии выражаются в зависимости от обобщенной координаты  $q$  формулами вида

$$E_p = \frac{\gamma}{2} q^2 \text{ и } E_k = \frac{\beta}{2} (q')^2,$$

то обобщенная координата совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}.$$

Тогда в рассматриваемой задаче смещения тел от положения равновесия совершают гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m \cos^2\alpha + (1 + m/M) \sin^2\alpha}{k(1 + m/M)}}.$$

### *Второй способ*

На брусок действуют три силы: упругости, тяжести и реакции опоры (см. рис.7). По второму закону Ньютона,

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} + \vec{N}.$$

Переходя к проекциям сил и ускорения на оси ЛСО, получаем

$$ma_{2x} = -k\Delta L \cos\alpha + N \sin\alpha,$$

$$ma_{2y} = k\Delta L \sin\alpha - mg + N \cos\alpha.$$

Подставляя в эти уравнения полученные выше кинематические соотношения

$$\Delta L = \frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{x_2}{\cos\alpha} \left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

и

$$a_{2y} = -a_{2x} \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \operatorname{tg} \alpha ,$$

приходим (после исключения  $N$ ) к уравнению

$$m \left( \cos^2 \alpha + \left( 1 + \frac{m}{M} \right) \sin^2 \alpha \right) a_{2x} = -k \left( 1 + \frac{m}{M} \right) x_2 + mg \operatorname{tg} \alpha ,$$

описывающему гармонические колебания смещения бруска относительно положения равновесия, которое определяется соотношением

$$k \Delta L_0 = mg \sin \alpha .$$

Введение новой переменной

$$X_2 = x_2 - \frac{\Delta L_0}{\cos \alpha}$$

приводит последнее уравнение к виду

$$X_2'' = -\omega^2 X_2 ,$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{1 + m/M}{\cos^2 \alpha + (1 + m/M) \sin^2 \alpha}} .$$

Это значение циклической частоты совпадает с полученным ранее.

**Задача 5\*.** Гантель, стоящая на гладкой горизонтальной поверхности (рис.8), начинает падать вследствие малого отклонения вправо от вертикали. Определите силу  $F$ , с которой левый шарик гантели действует на опору за мгновение до удара об опору правого шарика. Масса каждого шарика  $m$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

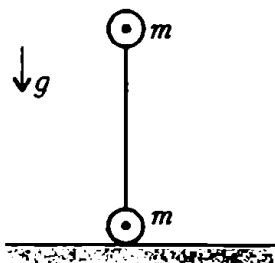


Рис.8

На гантель действуют силы тяжести и реакции опоры. Центр масс гантели будет двигаться по вертикали (горизонтальные силы отсутствуют, начальная горизонтальная скорость равна нулю). Уравнение движения центра масс в ЛСО имеет вид

$$2m \frac{dv_y}{dt} = -2mg + N .$$

В Ц-системе гантель вращается (рис.9) с угловой скоростью

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} .$$

Скорость нижней точки гантели направлена горизонтально. Следовательно, из правила сложения скоростей при любом угле  $\alpha$  получаем

$$v_y = -\omega R \sin \alpha ,$$

где  $R$  – половина расстояния между шариками. Продифференцируем это равенство по времени:

$$\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{d\omega}{dt} R \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha\right).$$

При  $\alpha = \pi/2$  получаем

$$\frac{dv_y}{dt} = -R \frac{d\omega}{dt}.$$

Кинетическая энергия гантели равна

$$\frac{2mv_y^2}{2} + 2 \frac{m(\omega R)^2}{2} = m\omega^2 R^2 \sin^2 \alpha + m\omega^2 R^2.$$

Силы трения отсутствуют, поэтому полная механическая энергия сохраняется:

$$m\omega^2 R^2 \sin^2 \alpha + m\omega^2 R^2 = 2mgR(1 - \cos \alpha),$$

т.е. приращение кинетической энергии равно убыли потенциальной. Дифференцируя последнее равенство по времени и полагая  $\alpha = \pi/2$ , находим

$$R \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} g.$$

Следовательно, в рассматриваемый момент времени проекция ускорения центра масс гантели равна

$$\frac{dv_y}{dt} = -R \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} g.$$

Из уравнения движения центра масс по вертикали находим величину силы реакции опоры:

$$N = 2mg + 2m \frac{dv_y}{dt} = mg.$$

По третьему закону Ньютона,

$$F = N = mg.$$

Читатель, несомненно, испытает радость познания, если найдет решение этой задачи для произвольного угла  $\alpha$ .

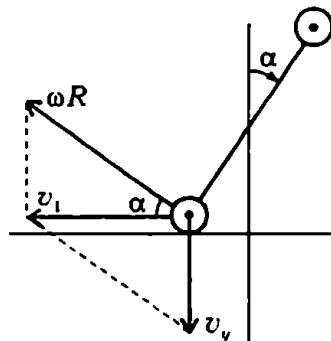


Рис.9



**Задача 6.** Гамма-излучением (поглощением) называется электромагнитное излучение (поглощение) при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния (и наоборот). Ядро атома олова  $^{119}\text{Sn}$  движется со скоростью  $v = 63$  м/с и испускает в направлении движения  $\gamma$ -квант, который затем поглощается неподвижным свободным ядром олова. Найдите энергию  $\gamma$ -кванта  $E_\gamma$ . Энергия покоя ядра олова  $E = m_\text{я}c^2 = 113$  ГэВ. Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. При испускании и поглощении  $\gamma$ -кванта происходит переход между одними и теми же энергетическими состояниями ядра.

Фундаментальные законы сохранения позволяют решать задачи не только механики, но и физики микромира. Правда, для решения данной задачи нам понадобятся не только законы сохранения, но и элементарные (в рамках школьной программы) сведения по квантовой и ядерной физике.

Допустим, что при излучении  $\gamma$ -кванта возбужденное ядро олова переходит из одного состояния в другое, разность энергий которых равна  $\Delta E$ . При излучении  $\gamma$ -кванта движущимся ядром олова сохраняются энергия:

$$\Delta E + \frac{p^2}{2m_\text{я}} = E_\gamma + \frac{p_1^2}{2m_\text{я}}$$

и импульс:

$$p = p_1 + \frac{E_\gamma}{c},$$

где  $p$  и  $p_1$  – импульсы ядра до и после излучения  $\gamma$ -кванта. Отсюда получаем

$$\Delta E = E_\gamma - \frac{pE_\gamma}{m_\text{я}c} + \frac{E_\gamma^2}{2m_\text{я}c^2}.$$

При поглощении  $\gamma$ -кванта покоящимся ядром олова тоже сохраняются энергия:

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{p_2^2}{2m_\text{я}}$$

и импульс:

$$\frac{E_\gamma}{c} = p_2,$$

где  $p_2$  – импульс ядра после поглощения  $\gamma$ -кванта. Исключая  $p_2$  из двух последних равенств, находим

$$E_\gamma = \Delta E + \frac{E_\gamma^2}{2m_\text{я}c^2}.$$

Подстановка в это соотношение явного выражения для  $\Delta E$  приводит к ответу на вопрос задачи:

$$E_\gamma = \frac{v}{c} m_\pi c^2 = \frac{v}{c} E \approx 23,7 \text{ кэВ}.$$

### Упражнения

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположены две точечные массы  $m$ , соединенные упругой легкой пружиной жесткостью  $k$  (рис.10). На одну из масс налетает со скоростью  $v$  третья точечная масса  $2m$ . Сталкивающиеся массы слипаются. Совершив два полных малых колебания, система сталкивается со стенкой. Определите начальное расстояние  $s$  от пружины до стенки.

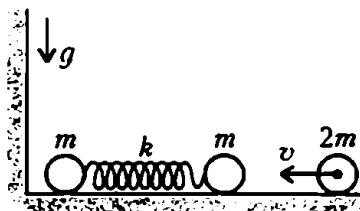


Рис. 10

2. На горизонтальной поверхности покоится клин массой  $M$  с углом наклона к горизонту  $\alpha$ . Шайба массой  $m$ , движущаяся по горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$ , въезжает на клин. Через какое время  $\tau$  шайба съедет с клина? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Переход с плоскости на клин плавный.

3. Внутри цилиндра массой  $m$  подвешен на пружине жесткостью  $k$  груз такой же массы. Вначале цилиндр покоится. В некоторый момент времени его отпускают, и он свободно падает, причем ось цилиндра остается вертикальной. Какое расстояние  $s$  пройдет цилиндр за время, в течение которого груз совершит полтора колебания? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

4. Гантель стоит в углу, образованном гладкими плоскостями. Нижний шарик гантели смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантель начинает двигаться. Найдите силу реакции  $N$  горизонтальной опоры в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости. Масса каждого шарика гантели равна  $m$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

5. Гамма-излучением называется электромагнитное излучение, возникающее при переходе атомных ядер из возбужденных в более низкие энергетические состояния. Свободное покоящееся ядро атома олова  $^{119}\text{Sn}$  испускает  $\gamma$ -квант с энергией  $E_\gamma = 22,5 \text{ кэВ}$ , который затем поглощается таким же ядром олова, движущимся навстречу  $\gamma$ -кванту. Найдите скорость  $v$  ядра олова, поглотившего  $\gamma$ -квант. Энергия покоя ядра олова  $E = m_\pi c^2 = 113 \text{ ГэВ}$ . Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . При испускании и поглощении  $\gamma$ -кванта происходит переход между одними и теми же энергетическими состояниями ядра.

Среди разнообразных физических задач есть так называемые смешанные задачи, которые нельзя отнести к какому-то одному определенному разделу физики. В таких задачах, как и в природных процессах, тесным образом переплетаются различные физические явления. В этой статье мы рассмотрим задачи, которые можно причислить к разряду электромеханических — в них речь идет о движении механических систем при воздействии на них электрических и магнитных сил.

**Задача 1.** *Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода (энергия ионизации), равна  $W_i = 2,2 \cdot 10^{-18}$  Дж. Полагая, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона), определите силу электростатического взаимодействия между электроном и протоном.*

Слово «тяжелое» по отношению к ядру означает, что его масса много больше массы электрона, и поэтому можно считать, что центр вращения системы протон — электрон совпадает с центром масс протона. Обозначим радиус круговой орбиты электрона через  $r$ . Движение электрона по окружности радиусом  $r$  происходит под действием электростатической силы, действующей на электрон со стороны протона. Второй закон Ньютона позволяет записать:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

где  $m$  — масса электрона,  $v$  — его скорость,  $e$  — величина заряда. С помощью этого уравнения найдем кинетическую энергию электрона:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия

электрона и протона, как системы точечных зарядов, равна

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Таким образом, полная энергия электрона, находящегося на круговой орбите радиусом  $r$  в атоме водорода, составляет

$$W = W_k + W_p = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

(Как это и характерно для финитного движения частицы в потенциальном поле, полная энергия электрона является отрицательной величиной.)

Очевидно, что минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода, соответствует такому новому состоянию электрона, когда он находится на большом (много больше радиуса орбиты) расстоянии от атома и его скорость равна нулю. В этом состоянии полная энергия электрона также равна нулю, поэтому минимальная сообщенная ему дополнительная энергия, энергия ионизации, составляет

$$W_i = -W = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}.$$

Отсюда находим радиус орбиты электрона:

$$r = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 W_i}$$

и силу электростатического взаимодействия электрона с протоном:

$$F_{эл} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{16\pi\epsilon_0 W_i^2}{e^2} = 8,4 \cdot 10^{-8} \text{ Н}.$$

**Задача 2.** Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом  $q$  и массой  $m$ , связаны нерастяжимыми нитями длиной  $L$  каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Одна из нитей пережигается. Какие скорости будут у шариков в тот момент, когда они расположатся на одной прямой? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

В начальный момент шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника с длиной каждой стороны  $L$  (рис.1). Шарики неподвижны, поэтому их полная

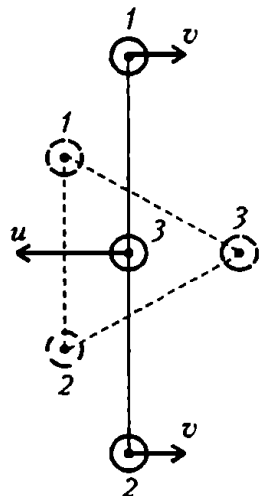


Рис. 1

кинетическая энергия равна нулю:

$$W_{k1} = 0.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия составляет

$$W_{p1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 L}.$$

(В этом выражении каждый член соответствует энергии взаимодействия пары зарядов, а всего таких пар три.) Поскольку нить нерастяжима, энергия упругих деформаций равна нулю. Итак, в исходном состоянии полная энергия системы составляет  $W_{p1}$ , а импульс системы равен нулю.

После пережигания нити (например, между шариками 1 и 2) центр масс шариков остается неподвижным, и когда шарики будут располагаться на одной прямой, шарик 3 будет находиться в центре масс нашей системы. Действительно, как до пережигания нити, так и после пережигания между шариками действуют только внутренние силы (замкнутая система), а так как начальная скорость центра масс была равна нулю, то центр масс системы будет оставаться неподвижным.

Пусть в тот момент, когда шарики расположены на одной прямой, скорость шарика 3 равна  $u$ , а скорости двух других шариков равны  $v$  (в силу симметрии, скорости шариков 1 и 2 одинаковы). По закону сохранения импульса,

$$mu - 2mv = 0, \text{ или } u = 2v.$$

Кинетическая энергия шариков в этот момент равна

$$W_{k2} = \frac{mu^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} = 3mv^2.$$

Новая потенциальная энергия электростатического взаимодействия составляет

$$W_{p2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 L} = \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 L}.$$

Закон сохранения полной энергии системы позволяет записать

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2},$$

или

$$\frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 L} = 3mv^2 + \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 L}.$$

Отсюда находим скорость шариков 1 и 2:

$$v = \frac{q}{2\sqrt{6\pi\epsilon_0 mL}}$$

и скорость шарика 3:

$$u = \frac{q}{\sqrt{6\pi\epsilon_0 mL}}.$$

**Задача 3.** Плоский конденсатор с прямоугольными пластинами, подключенный к источнику постоянного напряжения  $U = 100$  В, установлен в вертикальном положении так, что его пластины соприкасаются с диэлектрической жидкостью (рис.2). Расстояние между пластинами  $d = 0,5$  мм много меньше линейных размеров пластин. Определите установившуюся высоту поднятия жидкости между пластинами, если жидкостью является вода с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 81$  и плотностью  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Капиллярными эффектами пренебречь.

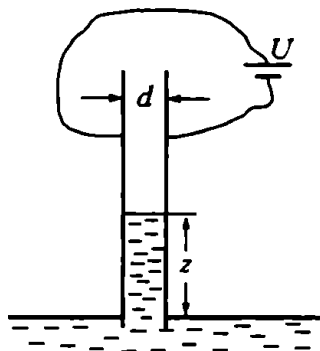


Рис.2

Наша электромеханическая система включает в себя заряженный конденсатор (при постоянном напряжении  $U$  на обкладках), источник постоянного напряжения и диэлектрическую жидкость, находящуюся в поле тяжести Земли. Любая замкнутая система стремится прийти в такое устойчивое состояние, при котором она обладает минимумом энергии. Именно с такой позиции мы и будем исследовать нашу систему.

Пусть в стационарном состоянии высота подъема уровня диэлектрической жидкости между обкладками конденсатора равна  $z$ . Найдем полную энергию  $W$  нашей системы, которая включает в себя энергию электрического поля конденсатора  $W_k$ , потенциальную энергию поднятой жидкости  $W_{ж}$  и энергию источника постоянного напряжения  $W_{и}$ . Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора высотой  $z$ , заполненного диэлектрической жидкостью, и пустого конденсатора высотой  $(H - z)$ :

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 L z}{d} + \frac{\epsilon_0 L (H - z)}{d} = \frac{\epsilon_0 L}{d} (H + (\epsilon - 1) z),$$

где  $H$  — высота пластин конденсатора,  $L$  — их длина. Электри-

ческая энергия, запасенная в таком конденсаторе, составляет

$$W_{\kappa} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 LU^2 (H + (\epsilon - 1)z)}{2d}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости равна

$$W_{\text{ж}} = \frac{\rho L d g z^2}{2}$$

(за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят уровень  $z = 0$ ). Теперь разберемся с энергией источника. Обозначим исходную энергию источника через  $W_0$ . В тот момент, когда емкость между пластинами конденсатора равна  $C$ , на них находится заряд  $Q = CU$ . Следовательно, наш источник истратил часть своей энергии, равную совершенной работе  $A = QU = CU^2$ . Очевидно, что оставшаяся энергия источника составляет

$$W_{\text{и}} = W_0 - CU^2 = W_0 - \frac{\epsilon_0 LU^2}{d} (H + (\epsilon - 1)z).$$

Тогда полная энергия системы равна

$$W(z) = W_{\kappa} + W_{\text{и}} + W_{\text{ж}} = W_0 - \frac{\epsilon_0 LU^2}{2d} (H + (\epsilon - 1)z) + \frac{\rho L d g z^2}{2}.$$

Продифференцируем это выражение по  $z$  и приравняем нулю:

$$\frac{dW(z)}{dz} = -\frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) LU^2}{2d} + \rho L d g z = 0.$$

Отсюда следует, что полная энергия нашей электромеханической системы будет минимальна при высоте жидкости

$$z_1 = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) U^2}{2d^2 \rho g} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Теперь обсудим приведенное решение. Чего мы добились, найдя минимум потенциальной энергии? Можно сказать, что мы провели исследование данной электромеханической системы на устойчивость и установили, что система имеет одно устойчивое состояние, при котором высота подъема диэлектрической жидкости равна  $z_1$ . Но это решение ничего не говорит о том, по какому закону и сколь быстро наша система придет в это устойчивое состояние. Если вы заметили, мы ничего не говорили о возможных потерях энергии. Наше решение никак не связано с потерями и не зависит от диссипации энергии в системе. Величиной энергетических потерь в системе определяется временной закон, по которому система будет подходить к своему устойчивому состоянию, но не параметры этого состояния. В качестве примера

рассмотрите идеализированную ситуацию, когда в системе нет диссипации энергии. Попробуйте самостоятельно провести для этого случая энергетическое решение: работа источника идет на изменение энергии конденсатора и работу по подъему жидкости. Вы получите два значения высоты подъема:  $z_1^* = 0$  и  $z_2^* = 2z_1$ . Это означает, что жидкость в конденсаторе будет совершать незатухающие колебания около устойчивого положения равновесия с амплитудой  $z_1$ . Но реально потери всегда есть, и если они малы, то колебания будут медленно затухать, а уровень жидкости со временем займет свое устойчивое положение  $z = z_1$ . При больших затуханиях жидкость будет медленно подниматься и стремиться все к тому же значению  $z = z_1$ .

**Задача 4.** На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой  $m$ , вдоль которого равномерно распределен заряд  $Q$ . Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B_0$  и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.

Обозначим радиус кольца через  $r$ . Спадание величины индукции магнитного поля от  $B_0$  до нуля может произойти, конечно, и за очень малое время, но реально это всегда будет конечная величина. Пусть в произвольный момент времени (в процессе уменьшения индукции поля) мгновенное значение индукции магнитного поля равно  $B(t)$ . Изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого на рисунке 3 изображены круговыми линиями (для простоты будем рассматривать симметричное распределение магнитного поля относительно нашего кольца). Одна из силовых линий, очевидно, проходит вдоль нашего кольца. Пусть в рассматриваемый момент величина напряженности вихревого электрического поля на этой силовой линии равна  $E(t)$ .

С одной стороны, работа, совершенная вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура кольца, численно равна ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_i = 2\pi r E(t).$$

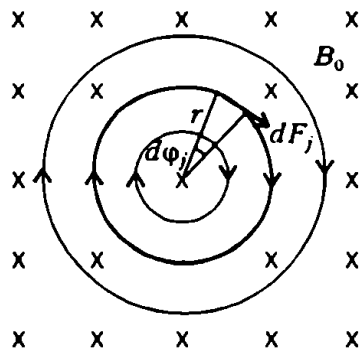


Рис.3



С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в контуре кольца равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt},$$

где  $\Phi$  — магнитный поток, пронизывающий наш контур. Приравняв два выражения для ЭДС индукции, получим

$$E(t) = -\frac{r}{2} \frac{dB(t)}{dt}.$$

На каждый небольшой элемент заряженного кольца будет действовать сила, направленная по касательной к окружности радиусом  $r$  и равная

$$dF_j = E(t) \frac{Q}{2\pi r} r d\varphi_j = -\frac{Q}{4\pi} \frac{dB(t)}{dt} r d\varphi_j.$$

Суммарная сила, действующая в данный момент времени на все кольцо, равна

$$F = \sum_{j=1}^N dF_j = -\frac{Qr}{4\pi} \frac{dB(t)}{dt} \sum_{j=1}^N d\varphi_j = -\frac{Qr}{2} \frac{dB(t)}{dt}.$$

За малое время  $\Delta t$  импульс этой силы приведет к изменению импульса кольца:

$$F \Delta t = m \Delta v,$$

откуда получим

$$\Delta v = \frac{F}{m} \Delta t = -\frac{Qr}{2m} \Delta B.$$

Малое изменение угловой скорости кольца равно

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{r} = -\frac{Q}{2m} \Delta B.$$

Такое же соотношение связывает изменения угловой скорости и магнитной индукции за все время. Учитывая, что  $\Delta \omega = \omega - 0 = \omega$ , а  $\Delta B = 0 - B_0 = -B_0$ , получаем

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}.$$

**Задача 5.** По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми  $l$ , в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой  $m$ . Рельсы замкнуты на идеальную катушку индуктивностью  $L$ . Вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией, равной  $B$  и перпендикулярной плоскости рисунка 4. В началь-

ный момент переключки удерживается внешней силой. Определите максимальное смещение переключки от начального положения после устранения внешней силы. Омическими потерями пренебречь.

В системе координат, изображенной на рисунке 5, начальное положение переключки  $z = 0$ . Рассмотрим произвольный момент времени, когда переключка находится на расстоянии  $z$  от начала координат и имеет скорость  $v_z = \frac{dz}{dt}$ . В результате пересечения линий магнитного поля в переключке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = v_z B l.$$

Возникающий в замкнутом контуре ток  $I_z$  вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI_z}{dt}.$$

При отсутствии омического сопротивления алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна нулю:

$$Bl \frac{dz}{dt} - L \frac{dI_z}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(Blz - LI_z) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Blz - LI_z = \text{const}.$$

Поскольку при  $t = 0$   $z = 0$  и  $I_z = 0$ , для  $t \geq 0$  получаем

$$Blz - LI_z = 0.$$

На переключку действуют две силы: сила тяжести, равная  $mg$ , и сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля, равная  $F_A = BI_z l$ . Запишем уравнение движения переключки вдоль оси  $Z$ :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - BI_z l,$$

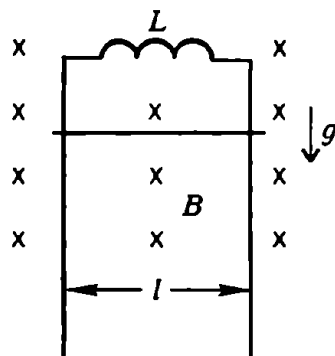


Рис.4

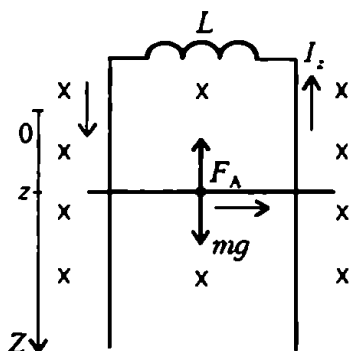


Рис.5

или, после подстановки выражения для  $I_z$ ,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{B^2 l^2}{mL} z = g.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания перемычки относительно уровня  $z = (mgL)/(Bl)^2$ . В этом положении ускорение перемычки равно нулю, и значение  $z$  равно амплитуде колебаний. А максимальное смещение перемычки, очевидно, равно двойной амплитуде, поэтому

$$z_{\max} = \frac{2mgL}{B^2 l^2}.$$

Этот результат можно получить и исходя из закона сохранения энергии. Попробуйте это сделать самостоятельно.

**Задача 6.** В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин  $S$  и расстоянием  $d$  между ними помещен в поток проводящей

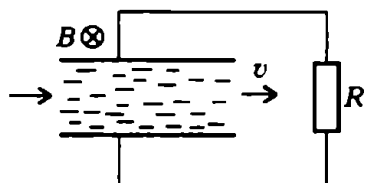


Рис. 6

жидкости с удельным сопротивлением  $\rho$ , движущейся с постоянной скоростью  $v$  параллельно пластинам. Конденсатор находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B$  и направленной перпендикулярно плоскости рисунка 6. Найдите полезную тепловую

мощность, которая выделяется на внешней нагрузке в виде резистора сопротивлением  $R$ . Пренебрегая возможными потерями при протекании жидкости, определите также КПД такого генератора.

Рассмотрим вкратце процесс установления стационарного состояния — когда через резистор течет постоянный ток.

Как только проводящая жидкость начинает протекать между обкладками конденсатора, на свободные заряды жидкости со стороны внешнего магнитного поля начинает действовать сила Лоренца. Положительные заряды начинают смещаться к верхней пластине конденсатора, а отрицательные — к нижней. Между пластинами конденсатора возникает разность потенциалов, которая приводит к появлению тока через резистор  $R$ . Одновременно, возникшее электрическое поле начинает препятствовать движению свободных зарядов жидкости к пластинам. В результате через некоторое время устанавливается стационарное состояние: заряд, поступающий из жидкости на каждую пластину в единицу времени, равен силе тока, протекающего через резистор. Други-

ми словами, в цепи резистора начинает течь постоянный ток. Обозначим его через  $I$ .

Теперь выясним, чему равна электродвижущая сила, которая поддерживает ток в цепи. По определению, ЭДС равна напряжению на пластинах конденсатора при разомкнутой внешней цепи. Условие отсутствия тока внутри конденсатора имеет вид  $E = vB$ , где  $E$  — напряженность электрического поля. Разность потенциалов между пластинами составляет  $\mathcal{E} = Ed = vBd$ . Это и есть величина электродвижущей силы, действующей в замкнутой цепи.

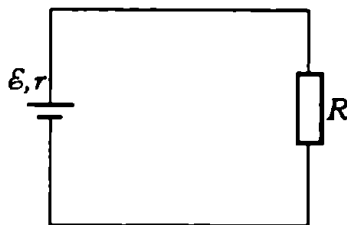


Рис. 7

Можно нарисовать эквивалентную электрическую схему — см. рисунок 7, где  $r$  — внутреннее сопротивление источника:  $r = \rho d/S$ . Очевидно, что сила тока в такой цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} = \frac{vBd}{R + \rho d/S}.$$

а мощность, выделяемая на резисторе, составляет

$$P_R = I^2 R = \frac{(vBd)^2 R}{(R + \rho d/S)^2} = \frac{(vBd)^2}{R(1 + \rho d/(SR))^2}.$$

Для расчета КПД генератора необходимо найти мощность внешних сил, приводящих в действие генератор. Понятно, что работа внешних сил затрачивается на перемещение жидкости между пластинами конденсатора. Поскольку через жидкость течет ток  $I$ , на носители тока, а следовательно и на жидкость между пластинами, действует сила Ампера  $F_A = Bid$ , которая направлена против движения жидкости. Для равномерного протекания жидкости на нее должна действовать внешняя сила, равная силе Ампера и направленная вдоль скорости течения. Мощность, развиваемая этой силой, равна

$$P = F_A v = Bidv = \frac{(vBd)^2}{R(1 + \rho d/(SR))},$$

а КПД генератора равен

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{1}{1 + \rho d/(SR)}.$$

Как видно, КПД генератора определяется отношением омических сопротивлений жидкости и резистора. При стремлении этого отношения к нулю КПД стремится к единице.

## Упражнения

1. Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом  $q$  и массой  $m$ , связаны двумя нерастяжимыми нитями длиной  $l$  каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Какую минимальную скорость необходимо сообщить центральному шарiku вдоль оси, перпендикулярной нитям, чтобы при дальнейшем движении шарики смогли образовать равносторонний треугольник? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

2. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , расположенных на расстоянии  $l$  друг от друга, пролетает через плоский конденсатор, пластины которого подключены

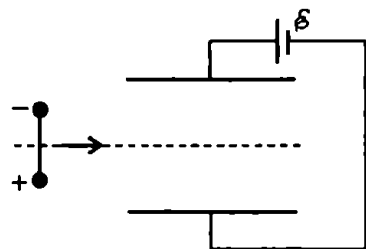


Рис. 8

к источнику с постоянной ЭДС  $\varepsilon$  (рис. 8). Определите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна  $v_0$ . Расстояние между пластинами конденсатора  $d$ , масса диполя  $m$ .

3. На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое проводящее кольцо радиусом  $r$ . Сопротивление кольца  $R$ . Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной  $B_0$  и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Индукция магнитного поля стала уменьшаться со временем по закону  $B(t) = B_0 - At$ , где  $A$  — константа. Чему равна максимальная сила натяжения проволоки кольца, обусловленная взаимодействием тока в кольце с внешним магнитным полем? Самоиндукцией кольца пренебречь.

4. По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми  $l$ , в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой  $m$ . Рельсы замкнуты катушкой индуктивностью  $L$  и находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рисунка (см. рис. 4). В начальный момент времени перемычка удерживается внешней силой, а затем внешняя сила убирается и перемычка начинает движение вниз с нулевой начальной скоростью. Определите величину индукции внешнего магнитного поля, если известно, что максимальная скорость, которую приобретает перемычка, равна  $v_0$ . Омическими потерями пренебречь.

А. Овчинников, В. Плис

Довольно часто при решении задачи обнаруживается, что она аналогична какой-то другой, уже решенной, причем степени близости задач могут быть весьма разнообразными. Заметив аналогию новой и старой задач, мы получаем дополнительный шанс на успех в поисках решения новой. В этом смысле «рассуждение по аналогии» является одним из методов решения задач (наряду с такими, как соображения симметрии или размерностей, преобразования системы отсчета, использование графиков или векторных диаграмм и т.п.).

В качестве примеров рассмотрим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** *Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом  $V$ . Рабочий объем камеры насоса  $V_0$ . Во сколько раз уменьшится давление в сосуде после  $n$  ходов поршня? Переход воздуха из сосуда в камеру насоса считайте изотермическим процессом.*

В каждом цикле работы насоса будем различать два процесса: один – это изотермическое расширение воздуха от объема  $V$  до объема  $V + V_0$ , другой – освобождение камеры насоса от воздуха, оказавшегося в ней в конце первого процесса.

В соответствии с уравнением Менделеева – Клапейрона, число молей воздуха, производящего в объеме  $V$  давление  $p$  при температуре  $T$ , равно

$$\nu = \frac{pV}{RT},$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная. В первом акте расширения воздуха условие сохранения количества молей воздуха с учетом постоянства температуры можно описать уравнением

$$pV = p_1(V + V_0).$$

---

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1998 год.

После удаления воздуха из камеры насоса и возврата поршня в исходное положение произойдет второе расширение оставшегося в сосуде воздуха:

$$p_1 V = p_2 (V + V_0),$$

затем третье, четвертое... и, наконец,  $n$ -е расширение воздуха:

$$p_{n-1} V = p_n (V + V_0).$$

Перемножив соответственно левые и правые части этих  $n$  уравнений, получим

$$p V^n = p_n (V + V_0)^n.$$

Отсюда после простых преобразований окончательно находим ответ на вопрос задачи:

$$\frac{p}{p_n} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^n.$$

**Задача 2.** Конденсатор емкостью  $C$  заряжен до напряжения  $U$  и отсоединен от источника. К этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью  $C_0$ . Когда заканчивается перераспределение зарядов, зарядившийся второй конденсатор (емкостью  $C_0$ ) отсоединяют от первого конденсатора (емкостью  $C$ ). Затем к первому конденсатору присоединяют следующий незаряженный конденсатор емкостью  $C_0$ , и т.д. Во сколько раз уменьшится напряжение на конденсаторе емкостью  $C$  после  $n$  подключений конденсаторов емкостью  $C_0$ ?

Эта задача аналогична предыдущей, и ответ, по-видимому, тоже аналогичен предыдущему:

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Проверим это, проводя подробное решение.

В первом акте происходит «расселение» исходного заряда по двум параллельно соединенным конденсаторам. При этом заряд сохраняется, поэтому можно записать

$$CU = (C + C_0)U_1.$$

Во втором акте «расселению» подвергается заряд  $CU_1$ :

$$CU_1 = (C + C_0)U_2,$$

и так далее. Наконец,  $n$ -й акт описывается соотношением

$$CU_{n-1} = (C + C_0)U_n.$$

Перемножив соответствующим образом эти равенства друг на

друга, получим

$$C^n U = (C + C_0)^n U_n ,$$

или

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n .$$

Таким образом, сравнивая эти две задачи, можно заключить, что похожие процессы, хотя и имеют различную физическую природу, описываются сходной математикой и имеют ответы на аналогичные вопросы в виде совпадающих математических конструкций. Более того, аналогичными оказываются отношения  $p/p_n$  и  $U/U_n$ , а также  $V_0/V$  и  $C_0/C$ .

**Задача 3.** Тонкий обруч массой  $m$  и радиусом  $R$  вращается равномерно вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с частотой  $n$ . Найдите величину силы натяжения, возникающей в обруче.

При раскручивании обруча до частоты  $n$  он слегка деформируется (увеличивается его длина), и возникает сила натяжения.

На рисунке 1 выделен малый участок кольца, на концы которого действуют две силы натяжения, величиной  $T$  каждая. Длина участка равна  $R \cdot 2\Delta\alpha$ . При достаточно малом угле  $\Delta\alpha$  участок можно считать материальной точкой, масса которой  $m(R \cdot 2\Delta\alpha)/(2\pi R)$ , движущейся по окружности с линейной скоростью  $2\pi Rn$  и центростремительным ускорением  $a = (2\pi Rn)^2/R$  под действием радиальных составляющих двух сил натяжения, равных в сумме  $2T\Delta\alpha$ . Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, в проекции на радиальное направление имеем

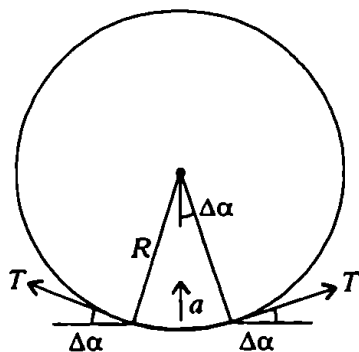


Рис. 1

$$\left(\frac{m}{2\pi R} R \cdot 2\Delta\alpha\right) \frac{(2\pi Rn)^2}{R} = 2T\Delta\alpha ,$$

откуда получаем

$$T = 2\pi Rn^2 m .$$

**Задача 4.** Тонкое проводящее кольцо радиусом  $R$ , по которому течет ток  $I$ , расположено в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , причем вектор поля перпендикулярен плоско-



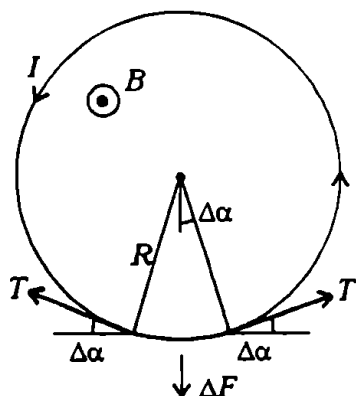


Рис. 2

сти кольца. Найдите величину силы натяжения, возникающей в кольце.

На рисунке 2 выделен элементарный участок кольца длиной  $R \cdot 2\Delta\alpha$  с током  $I$  в магнитном поле, причем вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  направлен к читателю. В соответствии с законом Ампера, участок испытывает со стороны магнитного поля действие силы, равной по величине  $\Delta F = I(R \cdot 2\Delta\alpha)B$  и направленной так, как показано на рисунке 2.

Обратим внимание на то, что закон Ампера применим только к прямолинейному отрезку проводника с током, так что мы должны потребовать, чтобы угол  $\Delta\alpha$  был мал. Учитывая, что выделенный участок кольца покоится, из второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление имеем

$$0 = 2T\Delta\alpha - I(R \cdot 2\Delta\alpha)B,$$

откуда получаем

$$T = IRB.$$

По-видимому, родственный характер явлений, рассматриваемых в задачах 3 и 4, не так очевиден, как в задачах 1 и 2, но структура решений двух последних задач делает их близкими.

**Задача 5.** Покажите, что минимальная работа по зарядке первоначально незаряженного конденсатора равна  $QU(Q)/2$ . Здесь  $Q$  и  $U(Q)$  – окончательные заряд конденсатора и напряжение между его пластинами.

На рисунке 3 изображен график зависимости напряжения на конденсаторе от величины его заряда. В соответствии с определением электрической емкости,

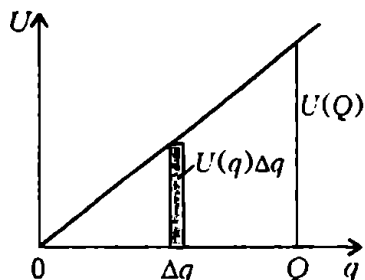


Рис. 3

$$U(q) = \frac{1}{C} q.$$

Из графика видно, что величина  $U$ , численно равная работе внешней силы по переносу единичного положительного заряда с отрицательно заряженной пластины конденсатора на положительно заряженную, тем больше, чем больше заряд  $q$

конденсатора. Работа по дополнительной зарядке конденсатора от заряда  $q$  до  $q + \Delta q$  равна  $U(q)\Delta q$  – на рисунке 3 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работа по зарядке конденсатора от  $q = 0$  до  $q = Q$  может быть найдена как сумма произведений  $U(q)\Delta q$ , т.е. как площадь прямоугольного треугольника с катетами  $Q$  и  $U(Q)$ :

$$A = \frac{1}{2}QU(Q).$$

**Задача 6.** *Покажите, что минимальная работа по строительству вертикальной однородной колонны массой  $m$  и высотой  $H$  из материала, первоначально расположенного в тонком слое на горизонтальной плоскости, совпадающей с основанием колонны, равна  $mgH/2$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Площадь поперечного сечения колонны одинакова по всей высоте.*

Известно, что формула  $mgh$  позволяет найти потенциальную энергию небольшого тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над нулевым уровнем, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Соответственно, величина  $gh$  может рассматриваться как минимальная работа по поднятию на высоту  $h$  единичной массы.

Пусть  $\rho$  – плотность материала, из которого строится колонна:

$$\rho = \frac{m}{SH},$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения колонны. На рисунке 4 представлен график зависимости величины  $gh$  от массы колонны (в процессе ее строительства)  $\rho Sh$ .

График показывает, что чем больше высота, а значит, и масса  $\rho Sh$  уже построенной части колонны, тем большую работу  $gh$  следует совершить по подъему очередной единичной массы. Работа по увеличению высоты колонны от  $h$  до  $h + \Delta h$  равна  $gh \cdot \rho S \Delta h$  – на рисунке 4 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работу по строительству всей колонны можно найти как площадь прямоугольного треугольника с катетами  $m$  и  $gH$ :

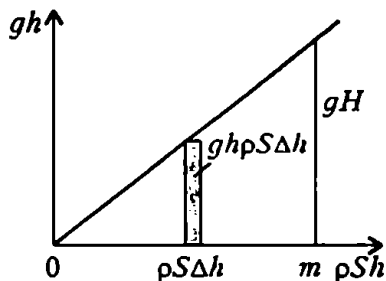


Рис. 4

$$A = \frac{1}{2}mgH.$$

В задачах 5 и 6 аналогичны структуры мысленных экспериментов по зарядке конденсатора и сооружению колонны; аналогичны также методы решения и структуры ответов.

**Задача 7.** Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  движутся со скоростями  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ . Происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого тела объединяются. Сколько тепла выделится в результате удара?

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v},$$

где  $\vec{v}$  – скорость образовавшегося тела, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q.$$

Перейдя от векторных уравнений к скалярным, после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

**Задача 8.** Два небольших проводящих шарика с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , заряженные до потенциалов  $\phi_1$  и  $\phi_2$  соответственно, находятся далеко друг от друга. Сколько тепла выделится через достаточно большое время после соединения шариков друг с другом длинной проволокой?

Будем считать известным, что потенциал  $\phi$  заряженного шарика связан с его зарядом  $q$  формулой  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная. Закон сохранения заряда для рассматриваемого процесса соединения шариков запишем в виде

$$4\pi\epsilon_0 R_1 \phi_1 + 4\pi\epsilon_0 R_2 \phi_2 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \phi + 4\pi\epsilon_0 R_2 \phi,$$

где  $\phi$  – окончательный потенциал шариков и соединяющей их проволоки. Рассматривая шарик как конденсатор (второй обкладкой служит концентрическая с шариком сфера бесконечно большого радиуса) емкостью  $4\pi\epsilon_0 R$ , можно подсчитать энергию шарика, заряженного до потенциала  $\phi$ , по формуле  $C\phi^2/2$  (потенциал в бесконечности принят за ноль). С учетом этих соображений, закон сохранения энергии перепишем так:

$$\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \phi_1^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \phi_2^2}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \phi^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \phi^2}{2} + Q.$$

Отсюда и из закона сохранения заряда после простых преобра-

зований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2.$$

Математическая структура окончательных формул в задачах 7 и 8 одна и та же, и это связано, видимо, с аналогией использованных при решении двух законов сохранения -- импульса и заряда.

**Задача 9.** Легкий стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. К концам стержня прикреплены небольшие тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Стержень удерживают в горизонтальном положении. Какие ускорения возникнут у каждого из тел сразу (в первый момент) после того, как стержень отпустят и у него появится возможность вращаться вокруг оси? Найдите также величину силы давления оси на стержень в этот момент времени.

На рисунке 5 показаны силы, действующие на стержень и на каждое из прикрепленных к нему

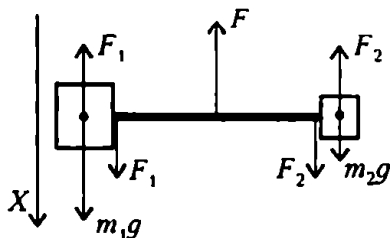


Рис. 5

тел в интересующий нас момент времени. Запишем уравнения движения для тел с массами  $m_1$  и  $m_2$  в проекции на ось  $X$ :

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - F_1, \quad m_2 a_{2x} = m_2 g - F_2.$$

Уравнение моментов для стержня приводит к равенству

$$F_1 = F_2.$$

Равноудаленность тел от оси вращения и недеформируемость стержня делают справедливым соотношение

$$a_{1x} = -a_{2x}.$$

Второй закон Ньютона, примененный к легкому стержню, дает

$$F = F_1 + F_2.$$

Решая систему записанных пяти уравнений, находим все искомые величины:

$$a_{1x} = -a_{2x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

**Задача 10.** На концах легкой нити, переброшенной через легкий блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, прикреплены тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ .

*Найдите ускорения каждого из тел, а также величину силы давления оси на блок.*

Очевидно, что рисунок, который следовало бы сделать к этой задаче, полностью совпал бы с рисунком 5, только стержень пришлось бы заменить блоком, диаметр которого равен длине стержня. Весь текст решения задачи 9 тоже может быть использован и в этой задаче. Совпадают, конечно же, и ответы. Единственное и принципиально важное отличие состоит в том, что полученные ответы в задаче 9 применимы только к первому моменту, а в задаче 10 – ко всему времени движения тел.

Таким образом, задачи 9 и 10 демонстрируют весьма своеобразное родство.

### Упражнения

1. Тонкое кольцо радиусом  $R$  однородно заряжено с положительной линейной плотностью заряда  $\lambda$ . В центре кольца покоится большой точечный положительный заряд  $q$ . Найдите величину силы натяжения кольца, вызванной взаимодействием заряженного кольца с точечным зарядом. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать равным  $k$ .

2. На мыльной пленке плавает петля из нити. Часть пленки, находившуюся внутри нити, осторожно прокалывают, и нить принимает форму окружности радиусом  $R$ . Найдите величину силы натяжения нити, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен  $\sigma$ .

3. К заряженному конденсатору, обладающему энергией  $W_0$ , присоединяют такой же, но незаряженный конденсатор. На сколько изменится энергия системы конденсаторов?

4. В одно из двух колен U-образной трубки налита жидкость. Вначале колена не сообщаются друг с другом и энергия жидкости в поле тяжести равна  $W_0$ . На сколько изменится энергия жидкости, когда сообщение колен установится и уровень жидкости в них станет одним и тем же?

5. Шарик, имевший кинетическую энергию  $W_0$ , сталкивается вдоль линии центров абсолютно неупруго с другим таким же, но покоившимся шариком. На сколько изменится кинетическая энергия системы шариков в результате удара?

# ОТВЕТЫ

## Кинематика и векторы

1.  $\alpha_{1,2} = \arctg \frac{\tg \varphi \pm \beta \sqrt{\tg^2 \varphi + 1 - \beta^2}}{1 - \beta^2}$ , где  $\beta = \frac{v}{c}$ .
2.  $\alpha = \frac{4\pi R}{vT} \approx 0,02 \text{ рад} \approx 1^\circ$ .
3.  $L_{\min} = L \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}}$ ;  $\tau = \frac{L(v_2 - v_1 \cos \alpha)}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \alpha}$ .
4.  $v_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2} \approx 7,8 \text{ м/с}$ ;  $\alpha = \arctg \frac{gt^2}{2L} \approx 50^\circ$ .

5. Считая, что при броске на максимальную дальность лучшие результаты составляют примерно  $L_{\max} = 30 \text{ м}$ , получаем

$$H_{\max} = \frac{L_{\max}}{2} \left( 1 - \left( \frac{l}{L_{\max}} \right)^2 \right) \approx 8,3 \text{ м}.$$

$$6. v_{02} = \sqrt{v_{01}^2 + \left( \frac{gL}{v_{01} \sin \alpha} \right)^2 - 2gL \ctg \alpha};$$

$$\beta = \arctg \frac{2v_{01}^2 \sin^2 \alpha}{2gL - v_{01}^2 \sin 2\alpha}.$$

Отметим, что  $\tg \beta > 0$  при условии  $2gL > v_{01}^2 \sin 2\alpha$ .

$$7. s_2 = 1,5s_1 = 21 \text{ м}.$$

## Гидростатика

1. Сила давления на дно наибольшая у сосуда, имеющего форму усеченного конуса, наименьшая – у перевернутого конуса.

$$2. \Delta h = \frac{4m}{\pi \rho_0 D^2} \approx 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,8 \text{ см}.$$

3. Если лед чистый или в него вморожен кусочек пробки, то уровень воды не изменится. Если же в лед вморожен кусочек свинца, то уровень воды понизится.

$$4. \Delta h = \frac{4m}{\pi \rho (D^2 + d^2)} \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 6 \text{ мм}.$$

5. Поверхность воды в сосуде параллельна наклонной плоскости.

## Аэро- и гидростатика

$$1. m = \frac{4\pi r^2 p}{g} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ кг}; h = \frac{RT}{Mg} = 18 \text{ км}.$$

$$2. p_a = l \sqrt{1 + \frac{2L}{\Delta x}} = 72 \text{ см рт.ст.}$$

$$3. x = l_0 \frac{k\rho g \Delta H}{p + k\rho g \Delta H}; l = l_0 \frac{p}{p + k\rho g \Delta H} - k \Delta H.$$

## Движение по окружности

$$1. T = \frac{\rho v^2 \pi d^2}{4}, \text{ где } \rho - \text{плотность воды.}$$

$$2. \omega = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2g \cos \alpha}{l}}. \quad 3. L = \frac{2\pi m v_0}{eB}.$$

$$4. \tau = \frac{\sqrt{R}}{a_t} (\mu^2 g^2 - 4a_t^2)^{1/4} \approx 27 \text{ с}, \text{ где } a_t = 2 \text{ м/с}^2.$$

$$5. T = 3\sqrt{(QE)^2 + (mg)^2} - 2QE.$$

$$6. \mu = \frac{(m_1 - m_2)(3 - 2\cos \alpha)\sin \alpha}{M + (m_1 + m_2)(3 - 2\cos \alpha)\cos \alpha} = \frac{m_1 - m_2}{M} \alpha = 4,4 \cdot 10^{-3}, \text{ где } \alpha = 10^\circ.$$

## Задачи с распределенной массой

$$1. F = \sqrt{2}\rho S v^2. \quad 2. F = mg + \frac{mv^2}{l}.$$

$$3. a = \frac{g\Delta h}{l}. \quad 4. \Delta h = l \frac{\sin \beta - \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

## Движение тел в гравитационных полях

$$1. v = \sqrt{3R_3 g}. \quad 2. v_{II} = v_{II} \sqrt{\frac{7}{8}} \approx 9,35 \text{ км/с}.$$

$$3. \Delta v = -\sqrt{g \frac{R_3^2}{r_1}} \left( \sqrt{2 - \frac{r_1}{a}} - 1 \right).$$

## Закон сохранения импульса

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{(m_2 v_2)^2 + (m_3 v_3)^2}} = \frac{6}{5}, \quad \alpha \approx 50^\circ.$$

$$2. u = \frac{5}{6} v = 5 \text{ м/с}; \Delta W = \frac{m}{2} \left( \frac{5}{6} v^2 + g^2 t^2 \right) = 63 \text{ Дж}.$$

$$3. 1) v = \sqrt{2g(H-h)}; 2) v = \sqrt{\frac{8g(H-h)}{5}}.$$

## Задачи на центр масс

$$1. F = \frac{m}{2} \left( g + \frac{3v^2}{4l} \right). \quad 2. F = \omega^2 l \left( M + m \frac{l^2 - x^2}{2l^2} \right).$$

$$3. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}. \quad 4. \alpha_{\max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1}.$$

## Законы сохранения в задачах на столкновения

$$1. \delta > \frac{M}{M - m_p} = \frac{7}{6}, \text{ где } M - \text{масса ядра лития, а } m_p - \text{масса протона.}$$

$$2. E_{\text{пор}} = \frac{3E_H}{4} = 10,2 \text{ эВ.} \quad 3. \Delta\lambda = \frac{h}{mc} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

## Об амплитудах колеблющихся величин

1. Амплитуда колебаний скорости будет максимальной, если действие силы прекращается в момент прохождения грузом смещенного положения равновесия  $\Delta L = \frac{F}{k}$ . Тогда

$$\tau = \frac{T}{4} + n \frac{T}{2} = (0,052 + n \cdot 0,1) \text{ с},$$

где  $n = 1, 2, 3 \dots$  и  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,21 \text{ с}$ .

$$2. V = \frac{m_1}{m_2} \frac{2\pi X}{T}. \quad 3. m_2 = m_1 \frac{4\pi^2 X}{T^2 g}.$$

$$4. T = 2\pi \sqrt{\frac{100\%}{\delta} \frac{3\Delta L}{g}} = 2,6 \text{ с.} \quad 5. T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{L}{g}}.$$

## Комбинированные задачи по механике

$$1. s = \pi v \sqrt{\frac{3m}{k}}. \quad 2. \tau = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m}{M} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}. \quad 3. s = \left( \frac{9\pi^2}{4} + 1 \right) \frac{mg}{k}.$$

$$4. N = mg. \quad 5. v = c \frac{E_\gamma}{m_\pi c^2} = \frac{E_\gamma}{E} = 60 \text{ м/с}.$$

## Электромеханические задачи

$$1. v_{\min} = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi\epsilon_0 m l}}. \quad 2. v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2ql\mathcal{E}}{md}}.$$

$$3. F_{\max} = \frac{\pi r^3 A B_0}{R}. \quad 4. B = \frac{g\sqrt{mL}}{v_0 l}.$$

## Аналоги в задачах по физике

$$1. T = \frac{kq\lambda}{R}. \quad 2. T = \sigma R. \quad 3, 4, 5. \Delta W = -\frac{W_0}{2}.$$



## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

### МЕХАНИКА

#### ВЫПУСК 2

Составители

*В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан*

Редактор *В.А.Тихомирова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

*Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 67

Подписано к печати 29.10.03. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 8 печ.л.

Тираж 4000 экз. Заказ 3356.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП «Чеховский полиграфический комбинат»

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и  
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536