

Приложение к журналу

КВАНТ

№2/2003

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Выпуск 2

Бюро



Квантум

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Выпуск 2

Составители
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан



Москва 2003
Бюро Квантум

- Э45 **Практикум абитуриента. Электричество.** Выпуск 2/
Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. — М.: Бюро
Квантум, 2003. — 128 с. — (Прил. к журналу «Квант»
№2/2003)
ISBN 5-85843-043-0

Книга представляет собой сборник статей по электричеству, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Практикум абитуриента по физике» в течение последних десяти лет. Каждая статья – как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо идеей. На разных примерах показывается, как надо подходить к решению задачи данной темы, как избежать ошибок или ловушек, как проанализировать полученный ответ.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам в вуз.

ББК 22.33

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Задачи с проводящими сферами. <i>А. Черноуцан</i>	5
Конденсаторы в электростатическом поле. <i>Ю. Чешев</i>	15
Электростатическое поле в веществе. <i>В. Можаяев</i>	24
Заряженные частицы в электростатическом поле. <i>В. Можаяев</i>	33
Конденсаторы в цепях постоянного тока. <i>В. Можаяев</i>	43
Электрические цепи постоянного тока. <i>Ю. Чешев</i>	53
Нелинейные элементы в электрических цепях. <i>В. Можаяев</i>	63
Электрические цепи с нелинейными элементами. <i>В. Можаяев</i>	72
Магнитные явления. <i>В. Можаяев</i>	81
Электромагнитная индукция. <i>В. Можаяев</i>	93
Колебательный контур. <i>В. Можаяев</i>	106
Заряженные частицы и поля. <i>В. Можаяев</i>	118
Ответы	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге представлена одна из самых традиционных рубрик журнала «Квант» – «Практикум абитуриента». Цель этого раздела – помочь абитуриенту научиться решать задачи. Каждая статья «Практикума» – это как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. Обычно это задачи из конкретного раздела физики, а иногда объединяющим «стержнем», на который «нанизываются» задачи, служит какой-нибудь универсальный прием или подход, применимый к задачам из разных разделов. Ведущий урок «учитель» – автор статьи – на разных примерах показывает, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать полученный ответ.

Важный совет – не идите по пути наименьшего сопротивления, просто читая текст и пассивно следуя за мыслью автора, а работайте над статьей «с карандашом в руках», сначала пытайтесь решить задачу самостоятельно и только потом сверяя свое решение с авторским. Так, конечно, получится дольше, но зато гораздо эффективнее. И еще. «Проработав» статью, обязательно попробуйте решить предложенные в конце упражнения – вы поймете, насколько вам удалось овладеть материалом.

В этой книге собраны статьи по электричеству, опубликованные в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента по физике» в течение последних десяти лет. Статьи посвящены различным вопросам электричества – таким как электростатика, постоянный ток, магнетизм, электромагнитная индукция, электромагнитные колебания и волны. Как обычно, наиболее трудные задачи (или задачи, выходящие за рамки школьной программы) отмечены звездочкой.

ЗАДАЧИ С ПРОВОДЯЩИМИ СФЕРАМИ

А. Черноуцан

Задачи на электростатику, в которых присутствуют одна или несколько проводящих сфер, традиционно оказываются трудными для многих абитуриентов. В особенности это относится к задачам на «перезарядку», где требуется выяснить, какие изменения произошли в системе при соединении отдельных проводников между собой. Большие трудности вызывают задачи на энергию системы проводников. Непреодолимым препятствием может оказаться и присутствие в задаче внешних зарядов (например, точечных), нарушающих сферическую симметрию системы.

Многие такие задачи решаются обычными школьными методами, в первую очередь – методом суперпозиции. Однако для успешного применения этих методов в задачах с проводящими сферами нужно хорошо понимать основные свойства проводников. А именно:

1) Проводник – это тело, в котором есть свободные заряды, способные перемещаться по объему проводника. В металлах, в частности, роль свободных зарядов играют электроны проводимости.

2) В электростатике рассматривается состояние равновесия системы, т.е. состояние, в котором отсутствует направленное движение зарядов (отсутствуют токи). Это означает, что напряженность электростатического поля в любой точке проводника должна быть равна нулю; в противном случае в окрестности этой точки немедленно начнется направленное движение свободных зарядов.

3) Все точки проводника имеют один и тот же потенциал, который называют потенциалом данного проводника. Поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность. Силовые линии поля вне проводника перпендикулярны к его поверхности.

4) Объемная плотность заряда внутри проводника равна

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1999 год.

нулю. Все нескомпенсированные заряды проводника находятся на его поверхности.

5) Если заданы заряды или потенциалы всех проводников системы, то можно найти только одно распределение зарядов на проводниках (и единственное распределение поля в пространстве между проводниками), соответствующее этим данным. Эта так называемая теорема единственности играет важную роль в электростатике.

6) Энергия уединенного проводника (энергия поля вокруг проводника) равна

$$W = \frac{1}{2} q\varphi,$$

где q – заряд и φ – потенциал проводника. Энергия системы проводников равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Начнем с задачи о поле уединенной заряженной сферы.

Задача 1. *На уединенную проводящую сферу радиусом R нанесен заряд q . Найдите напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства. Вычислите потенциал сферы и ее энергию.*

Из соображений симметрии очевидно, что заряд по поверхности сферы распределен равномерно. Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а вне сферы напряженность такая же, как у поля точечного заряда q , помещенного в центр сферы:

$$E = 0 \quad \text{при } r < R,$$
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{при } r > R.$$

Что касается потенциала, то его удобнее найти сначала во внешней области. Так как напряженность поля сферы совпадает с напряженностью поля точечного заряда, потенциалы этих полей могут различаться только константой, но, поскольку оба потенциала равны нулю на бесконечности, эта константа равна нулю. Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad \text{при } r \geq R. \quad (1)$$

Из условия непрерывности потенциала делаем вывод, что потенциал внутри сферы (потенциал сферы) равен

$$\varphi_{\text{сф}} = \varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad \text{при } r \leq R. \quad (2)$$

Полученные результаты для напряженности и потенциала изображены графически на рисунке 1. Отметим, что вычисление потенциала можно начинать не с внешней, а с внутренней области. Дело в том, что центр сферы находится на одном и том же расстоянии R от всех поверхностных зарядов, создающих поле, что позволяет легко вычислить потенциал в этой точке:

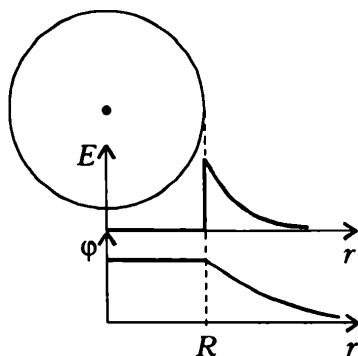


Рис. 1

$$\varphi_{\text{ц}} = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}. \quad (3)$$

В данном случае такой подход выглядит менее естественным, но иногда он оказывается удобным.

Осталось вычислить энергию сферы:

$$W = \frac{1}{2} q \varphi_{\text{сф}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Уместно лишний раз напомнить, что энергия сферы есть не что иное, как энергия электрического поля в пространстве вокруг сферы.

Задача 2. Проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 находятся на большом расстоянии друг от друга. Первая сфера заряжена зарядом q , вторая не заряжена. Сферы соединяют длинной тонкой проволокой. Какие заряды окажутся на сферах после этого? Какое количество теплоты выделится в процессе перезарядки? Зарядом на проволоке пренебречь.

После соединения система двух сфер вместе с проволокой будет представлять собой единый проводник. Значит, в результате перезарядки потенциалы сфер сравниваются:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_2}{R_2},$$

где q'_1 и q'_2 — новые заряды сфер (рис.2). Полный заряд системы в результате перезарядки не меняется, т.е.

$$q = q'_1 + q'_2.$$

Из этих уравнений можно вычислить заряды q'_1 и q'_2 :

$$q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q, \quad q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q.$$

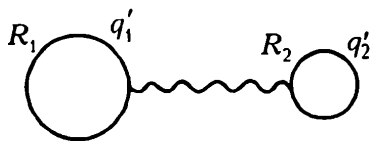


Рис.2

Чтобы найти выделившееся количество теплоты, запишем закон сохранения энергии:

$$W_{\text{нач}} = W_{\text{кон}} + Q,$$

подставим сюда выражения для начальной и конечной энергий:

$$W_{\text{нач}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1}, \quad W_{\text{кон}} = \frac{q_1'^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2'^2}{8\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}$$

и получим искомую величину:

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)} \frac{R_2}{R_1}.$$

В этой задаче при вычислении потенциалов и энергий можно было рассматривать каждую сферу как изолированную. Другая ситуация возникает в случае вложенных друг в друга концентрических сфер.

Задача 3. Две тонкие концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) несут на себе заряды q_1 и q_2 соответственно. Вычислите потенциалы сфер и энергию системы. Какой заряд останется на внутренней сфере, если ее заземлить¹ (рис.3)? Как изменится при этом энергия системы?

Потенциал любой точки пространства можно найти по принципу суперпозиции — как сумму потенциала $\varphi_1(r)$, создаваемого зарядами первой сферы, и потенциала $\varphi_2(r)$, создаваемого зарядами второй сферы. Для каждой точки во внешней области ($r \geq R_2$) оба слагаемых надо вычислять по формуле (1) — получится потенциал поля точечного заряда. Значит, потенциал внешней сферы ($r = R_2$) равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{R_2}. \quad (4)$$

В пространстве между сферами ($R_1 < r < R_2$) вклад внутренней сферы надо вычислять по формуле (1), а вклад внешней сферы — по формуле (2):

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}.$$

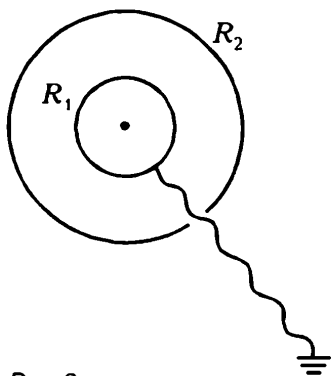


Рис.3

¹ Заземляющая проволока проходит через маленькое отверстие во внешней сфере без контакта с ней.

Положив в этой формуле $r = R_2$, мы опять получим потенциал внешней сферы, а положив $r = R_1$, получим ответ для потенциала внутренней сферы:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2}. \quad (5)$$

Такой же потенциал будет у всех точек при $r < R_1$.

Энергия этой системы зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} q_1 \varphi(R_1) + \frac{1}{2} q_2 \varphi(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{2q_1 q_2}{R_2} + \frac{q_2^2}{R_2} \right).$$

Первый и третий члены представляют собой собственные энергии сфер, а второй член — энергию их взаимодействия.

После заземления внутренней сферы ее потенциал станет равным нулю. Применяя формулу (5), получим уравнение для нового заряда этой сферы:

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

откуда найдем

$$q'_1 = -q_2 \frac{R_1}{R_2}.$$

С помощью формулы (4) найдем теперь новый потенциал внешней сферы:

$$\varphi'(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'_1 + q_2}{R_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 (R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Поскольку потенциал внутренней сферы теперь равен нулю, энергия системы в конечном состоянии равна

$$W' = \frac{1}{2} q_2 \varphi'(R_2) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q_2^2 (R_2 - R_1)}{R_2^2}.$$

Видно, что конечная энергия системы меньше начальной. Это и понятно. Уменьшение электростатической энергии системы равно тому количеству теплоты, которое выделилось при перезарядке.

Задача 4. Три concentric проводящие сферы имеют радиусы R , $2R$ и $3R$. Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, заряд средней сферы равен q . В некоторый момент внутреннюю и внешнюю сферы соединяют проволокой (рис. 4). Какой заряд пройдет по этой проволоке, и какое при этом выделится количество теплоты?

Обозначим конечный заряд внешней сферы q' , тогда заряд внутренней сферы будет $-q'$. Применяя метод суперпозиции,

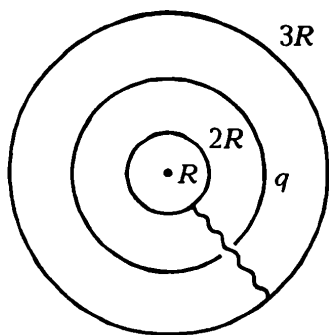


Рис. 4

аналогично тому, как мы это делали в задаче 3, вычислим конечные потенциалы внутренней и внешней сфер и приравняем их друг другу. Потенциал внутренней сферы равен

$$\varphi'(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right)$$

(для вклада от всех трех сфер можно применять формулу (2) или найти потенциал центра – аналогично задаче

1). Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi'(3R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{3R} + \frac{q}{3R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{3R}.$$

Приравнявая потенциалы, находим

$$q' = \frac{q}{4}.$$

Именно такой заряд и пройдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

Для ответа на второй вопрос воспользуемся законом сохранения энергии. Начальная энергия системы равна просто энергии средней сферы, т.е.

$$W = \frac{1}{2} q \varphi(2R) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2R}.$$

Конечная энергия системы равна

$$W' = -\frac{1}{2} q' \varphi'(R) + \frac{1}{2} q \varphi'(2R) + \frac{1}{2} q' \varphi'(3R) = \frac{1}{2} q \varphi'(2R)$$

(мы учли, что потенциалы внешней и внутренней сфер равны друг другу). Для конечного потенциала средней сферы запишем

$$\varphi'(2R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q'}{2R} + \frac{q}{2R} + \frac{q'}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{11q}{24R}$$

(для вклада внутренней сферы применяем формулу (1), а для вклада внешней – формулу (2)). Окончательно, выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = W - W' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{q^2}{2R} - \frac{11q^2}{24R} \right) = \frac{1}{192\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

В следующей задаче выясним, как изменяется потенциал проводящей сферы в присутствии точечного заряда.

Задача 5. Проводящая сфера радиусом R заряжена зарядом Q . Каким станет потенциал сферы, если на расстоянии l от ее центра поместить точечный заряд q ? Разобрать случаи $l > R$ и $l < R$.

На первый взгляд, эта задача гораздо труднее предыдущей, поскольку присутствие точечного заряда нарушает сферическую симметрию и распределение заряда по поверхности сферы становится неравномерным. Действительно, получить полное описание, т.е. найти распределение зарядов на сфере и поле вокруг нее, совсем не просто, хотя и возможно. Это можно сделать, например, с помощью метода электростатических изображений (неоднократно описанного на страницах «Кванта», последний раз — в №1 за 1996 г.). Однако ответить на поставленный в задаче вопрос можно довольно просто, опираясь на симметрию сферы и теорему единственности.

Начнем со случая $l > R$ (рис. 5). В этом случае потенциалы всех точек сферы одинаковы, и достаточно найти потенциал какой-нибудь одной точки. Ясно, что мы выберем центр сферы. Вклад зарядов, распределенных по поверхности сферы, вычисляется так же, как в задаче 1 (см. формулу (3)), и составляет

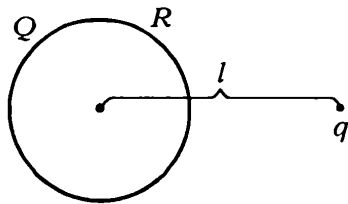


Рис. 5

$$\sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum \Delta Q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

(поскольку в этом вычислении никак не используется равномерность распределения заряда — ответ зависит только от полного заряда сферы). Остается учесть вклад точечного заряда и записать

$$\varphi(R) = \varphi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l}. \quad (6)$$

Видно, что потенциал сферы при помещении рядом с ней точечного заряда изменился на величину потенциала, создаваемого этим зарядом в центре сферы. Во избежание недоразумений отметим, что существует *единственное* распределение зарядов по поверхности сферы, при котором потенциал *всех внутренних точек* сферы равен полученному значению.

Перейдем к случаю $l < R$ (рис. 6). Так как теперь заряд находится внутри сферы, напряженность поля внутри сферы не равна нулю и потенциалы различных точек не равны друг другу. Однако и в этом случае несложно определить потенциал сферы, только надо обратить внимание не на внутреннюю часть сферы, а на окружающее ее внешнее пространство. Оказывается, поле во внешнем пространстве не зависит от положения заряда q внутри сферы, т.е. при перемещении заряда по внутренней области поле во внешней области не меняется.

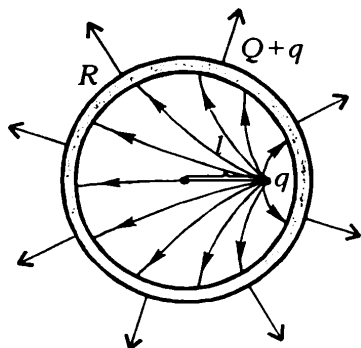


Рис. 6

Это утверждение верно для любого проводника любой формы, и следует оно из теоремы единственности. Поле во внешнем пустом пространстве однозначно определяется следующими условиями: 1) потенциал на бесконечности равен нулю; 2) потенциал на поверхности проводника принимает некоторое постоянное значение; 3) полный заряд внутри этой поверхности известен,

т.е. известно полное число силовых линий, начинающихся на поверхности проводника. Существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям.

Для сферического проводника поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда $Q + q$. При этом заряд на сфере распределится следующим образом: на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд $-q$, поскольку здесь заканчиваются все силовые линии, начинающиеся на заряде q , а на внешней поверхности сферы равномерно распределится заряд $Q + q$. Следовательно, потенциал сферы в этом случае равен

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \quad (7)$$

и не зависит от расстояния l .

А теперь попробуем ответить на такой вопрос: чему будет равен потенциал проводящей сферы, несущей заряд Q , в присутствии двух точечных зарядов q_1 и q_2 , расположенных на расстояниях l_1 и l_2 от центра сферы ($l_1 < R < l_2$)? Может показаться, что здесь нельзя применить ни одно из рассуждений, использованных в случае только одного заряда. Действительно, для первой части задачи было важно, что на-

пряженность поля внутри сферы равна нулю, а для второй — что вне сферы нет зарядов. Но теорема единственности позволяет ответить на поставленный вопрос с помощью суперпозиции рассмотренных выше двух случаев расположения заряда относительно сферы.

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд q_1 на расстоянии l_1 от сферы с зарядом Q_1 , а затем — заряд q_2 на расстоянии l_2 от сферы с зарядом Q_2 , при этом $Q_1 + Q_2 = Q$ (рис. 7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), во втором случае — формулой (6). А теперь наложим

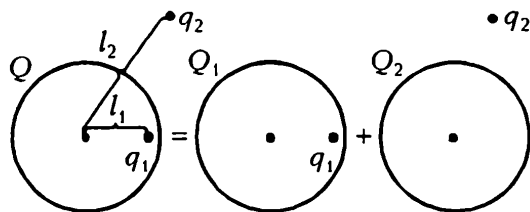


Рис. 7

первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен Q . Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R}.$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная эквивалентность точечных зарядов и заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния l между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом l . Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

Задача 6. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Между сферами на расстоянии r от центра находится точечный заряд q . Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потен-

циал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда $q_1 + q + q_2$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q \frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q \frac{1 - \frac{R_1}{R_2}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

Упражнения

1. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя сфера заряжена зарядом q , внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

2. Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами R_1 , R и R_2 ($R_1 < R < R_2$). Среднюю сферу заряжают зарядом q , а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

3. На расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиусом R помещают точечный заряд q . Какой заряд появится на сфере?

4. Проводящую сферу радиусом R заземляют, а на расстояниях $l_1 < R$ и $l_2 > R$ от ее центра помещают точечные заряды q_1 и q_2 . Какой заряд появится на сфере?

5. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от их центра находится точечный заряд q . Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?

Ю. Чешев

В природе существуют два рода электрических зарядов: положительные и отрицательные. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Сила взаимодействия точечных зарядов определяется законом Кулона.

Пространство вокруг заряда заполнено физической материей, посредством которой и осуществляется взаимодействие между зарядами. Это – электрическое поле. Его основным свойством является наличие силы, действующей на заряд, помещенный в это поле. Отношение силы, с которой поле действует на точечный заряд, к величине этого заряда называют напряженностью поля. Электрическое поле наглядно изображается с помощью силовых линий, или линий напряженности. Напомним, что силовой линией называют линию, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с вектором напряженности поля.

При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Отношение работы поля по перемещению заряда из одной точки в другую к величине этого заряда называют разностью потенциалов.

Электростатическое поле создается только неподвижными зарядами. При решении задач по электростатике часто используются принцип суперпозиции полей и закон сохранения электрического заряда.

Задача 1. Однородное электрическое поле слева от бесконечной заряженной плоской пластины равно \vec{E}_1 , а справа \vec{E}_2 (рис. 1). Определи-

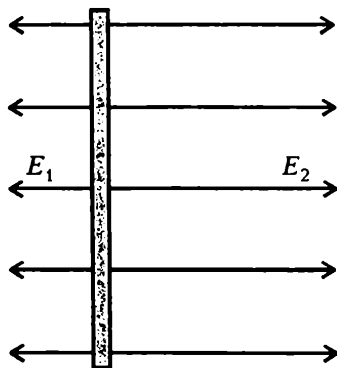
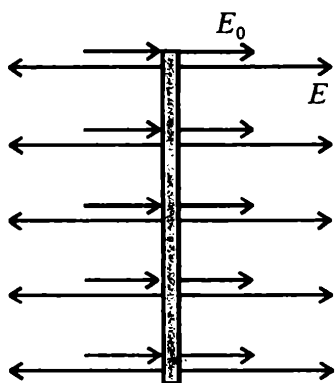


Рис. 1

те силу, действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.

Такая ситуация возможна, если пластину, заряженную некоторым зарядом q , поместить во внешнее однородное поле \vec{E}_0 , силовые линии которого перпендикулярны плоскости пластины



и направлены слева направо (рис.2).

Пусть \vec{E} – напряженность электрического поля пластины площадью S , тогда

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, напряженность поля слева от пластины равна

$$E_1 = E - E_0,$$

а справа –

$$E_2 = E + E_0.$$

Рис.2

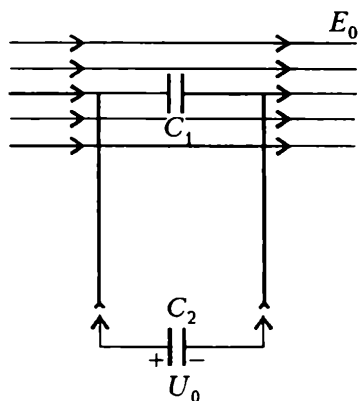
Отсюда находим E и E_0 :

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad E_0 = \frac{E_2 - E_1}{2}.$$

Теперь определим заряд пластины:

$$q = E \cdot 2\epsilon_0 S = (E_1 + E_2)\epsilon_0 S$$

и силу, действующую на единичную площадь пластины со стороны внешнего поля \vec{E}_0 :



$$f = \frac{q}{S} E_0 = \epsilon_0 \frac{E_2^2 - E_1^2}{2}.$$

Задача 2. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 находится во внешнем однородном электрическом поле \vec{E}_0 (рис.3). Силовые линии электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора, расстояние между пластинами d . Конденсатор емкостью C_2 , заряженный до разности потенциалов U_0 , подключается к конденсатору емкостью C_1 . Опре-

Рис.3

делите заряды конденсаторов после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора емкостью C_2 можно пренебречь.

После соединения конденсаторов начальный заряд второго конденсатора $q_0 = C_2 U_0$ перераспределится между обоими конденсаторами так, что разности потенциалов на них уравниваются. Обозначим установившиеся заряды через q_1 и q_2 . По закону сохранения заряда,

$$q_1 + q_2 = C_2 U_0. \quad (1)$$

Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что разность потенциалов между пластинами первого конденсатора будет равна

$$\Delta\varphi_1 = E_0 d + \frac{q_1}{C_1}.$$

Между пластинами второго конденсатора установится разность потенциалов

$$\Delta\varphi_2 = \frac{q_2}{C_2}.$$

Приравняв $\Delta\varphi_1$ к $\Delta\varphi_2$, получаем

$$E_0 d + \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить заряды q_1 и q_2 :

$$q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (U_0 + E_0 d),$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(U_0 \frac{C_2}{C_1} - E_0 d \right).$$

Задача 3. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис. 4). На пластине 1 находится заряд Q , а незаряженные пластины 2 и 3 закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину 2. Площадь каждой пластины S .

Напряженность электрического поля пластины 1 равна

$$E_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}.$$

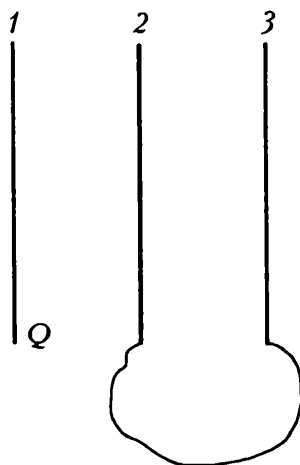


Рис. 4

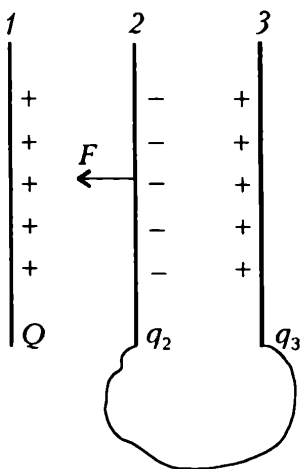


Рис.5

Так как пластины 2 и 3 закорочены проводником, разность потенциалов между ними равна нулю. Следовательно, на них должны появиться заряды, электрические поля которых вместе с электрическим полем заряда Q обеспечивают эту нулевую разность потенциалов. Обозначим заряды пластин через q_2 и q_3 (рис.5). Из закона сохранения заряда следует, что эти заряды равны по величине и противоположны по знаку:

$$q_2 = -q_3.$$

Из принципа суперпозиции электрических полей получаем

$$U_{23} = (E_1 - E_2 - E_3)d = 0,$$

где U_{23} – разность потенциалов между пластинами 2 и 3, E_1 , E_2 и E_3 – величины напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, d – расстояние между пластинами 2 и 3. Принимая во внимание, что $E_2 = E_3$, находим

$$E_2 = E_3 = \frac{E_1}{2}.$$

Теперь легко определить заряды пластин:

$$q_2 = -q_3 = -\frac{Q}{2}.$$

Очевидно, что пластина 2 с зарядом $q_2 = -Q/2$ находится в поле пластин 1 и 3. Следовательно сила, действующая на нее, равна

$$F = q_2(E_3 - E_1) = \frac{QE_1}{4} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}.$$

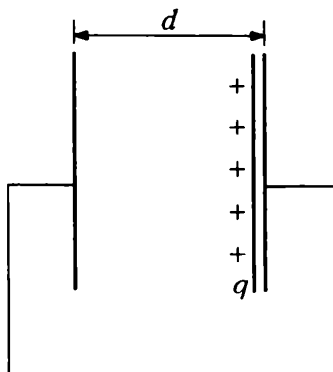


Рис.6

Задача 4. Обкладки плоского конденсатора емкостью C соединены накоротко (рис.6). Вблизи правой обкладки находится плоская пластина с зарядом q , площадь которой равна площади обкладок конденсатора. Какую работу нужно совершить, чтобы отодвинуть пластину от правой обкладки на $d/2$, где d – расстояние между обкладками?

Пусть в некоторый момент времени пластина с зарядом q находится на

расстоянии x от правой обкладки конденсатора (рис.7). Напряженность электрического поля, создаваемая этой пластиной, равна

$$E_0 = \frac{q}{2\epsilon_0 S}.$$

На обкладках конденсатора индуцируются заряды, равные по величине и противоположные по знаку – пусть заряд левой пластины положительный, а правой отрицательный. Совместно с зарядом q эти заряды обеспечивают нулевую разность потенциалов между обкладками конденсатора. Обозначим напряженности полей, соответствующие этим зарядам, через E_x . Работа электрического поля по перенесению положительного единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Следовательно,

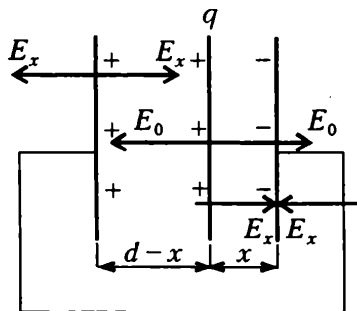


Рис.7

$$(E_0 + 2E_x)x + (2E_x - E_0)(d - x) = 0,$$

откуда находим напряженность электрического поля, в котором перемещается пластина:

$$2E_x = E_0 \left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Сила, действующая на пластину со стороны этого поля, есть линейная функция ее перемещения x (рис.8):

$$F(x) = 2E_x q = E_0 q \left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Теперь очевидно, что искомая работа равна

$$A = \frac{E_0 q}{2} \frac{d}{2} = \frac{q^2 d}{8\epsilon_0 S} = \frac{q^2}{8C}.$$

Задача 5. Две соединенные проводником пластины незаряженного конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого равна E_0 (рис.9). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно

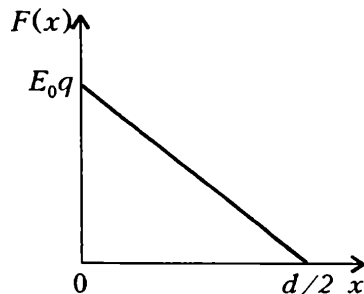


Рис.8

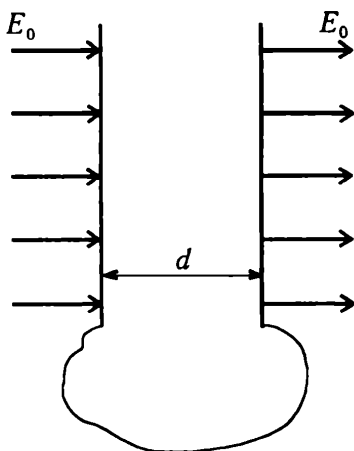


Рис. 9

сблизить пластины до расстояния $d/2$?

Так как пластины конденсатора замкнуты проводником, напряженность электрического поля между ними равна нулю. Пусть начальная энергия электрического поля вне конденсатора равна W_0 . После того как пластины сблизилась на расстояние $d/2$, в объеме $V = Sd/2$ появилось поле, энергия которого равна

$$W_1 = w \frac{Sd}{2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{Sd}{2},$$

где $w = \epsilon_0 E_0^2 / 2$ – плотность энергии электрического поля. Тогда изменение энергии поля во всем пространстве равно

$$\Delta W = (W_1 + W_0) - W_0 = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Это увеличение энергии произошло за счет совершенной работы; таким образом, работа, которую нужно совершить, равна

$$A = \frac{\epsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Задача 6. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной a и массой m

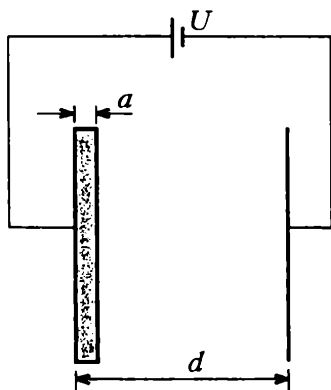


Рис. 10

(рис. 10). В начальный момент пластина прижата к левой обкладке конденсатора, а затем она отпускается. Чему будет равна скорость пластины в тот момент, когда она достигнет правой обкладки конденсатора? Площадь каждой пластины S , расстояние между обкладками d .

Так как разность потенциалов U на конденсаторе задана, заряд пластины в начальный момент времени равен

$$q = U \frac{\epsilon_0 S}{d - a}$$

и во время движения пластины между обкладками конденсатора будет сохраняться. В начальный момент левая обкладка конденсатора не заряжена, при этом правая обкладка конденсатора заряжена зарядом $-q$. По мере продвижения пластины заряды на обкладках будут изменяться, обеспечивая постоянство разности потенциалов между ними. Батарея зарядов не создает, следовательно, суммарный заряд обкладок конденсатора сохраняется. Найдем заряды обкладок в тот момент, когда пластина приблизится к правой обкладке. Пусть эти заряды равны Q_1 и Q_2 . Тогда, по закону сохранения заряда,

$$Q_1 + Q_2 = -q.$$

Если в некоторый момент времени пластина находится на расстоянии x от левой обкладки (рис. 11), то из постоянства разности потенциалов между обкладками получаем

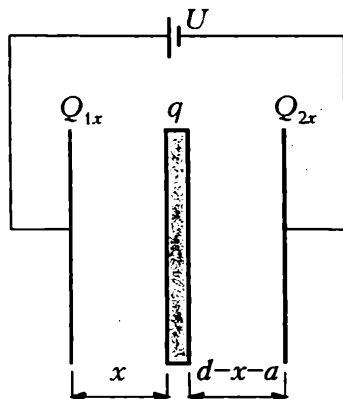


Рис. 11

$$\left(\frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{q}{2\epsilon_0 S} \right) x + \left(\frac{q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q_{1x}}{2\epsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\epsilon_0 S} \right) (d - x - a) = U,$$

где Q_{1x} – заряд на левой обкладке конденсатора, а Q_{2x} – на правой. Устремляя x к $(d - a)$ и учитывая связь между величинами зарядов, находим

$$Q_2 = -2q.$$

Таким образом, при достижении пластиной правой обкладки ее заряд будет $-2q$, а левой $+q$. Работа батареи $A = Uq$ идет на изменение кинетической энергии пластины:

$$Uq = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость пластины равна

$$v = \sqrt{\frac{2\epsilon_0 S U^2}{m(d - a)}}.$$

Задача 7. Две тонкостенные металлические сферы, радиусы которых $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см, образуют сферический конденсатор (рис. 12). На внешней сфере находится заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр Г, если замкнуть ключ К?

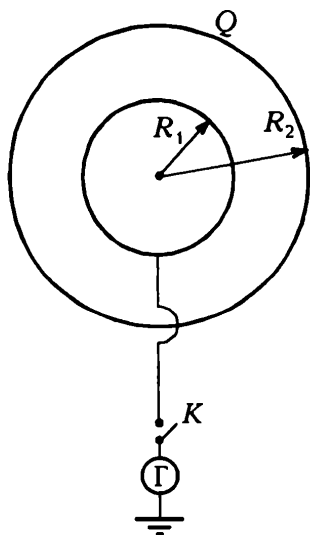


Рис. 12

Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Так как внутренняя сфера не заряжена, во всем внутреннем пространстве внешней сферы потенциал остается постоянным и равным φ_2 . После того как внутреннюю сферу заземлили, ее потенциал стал равен нулю. Чтобы обеспечить нулевой потенциал внутренней сферы, требуется поместить на нее соответствующий заряд q . Согласно принципу суперпозиции,

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = 0,$$

откуда получаем

$$q = -Q \frac{R_1}{R_2} = -5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$$

Именно этот заряд и протечет через гальванометр.

Задача 8. В системе, изображенной на рисунке 13, радиус внутренней проводящей сферы R , внешней (тоже проводящей) $3R$, заряд внешней сферы $+q$. На расстоянии $2R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q , ϵ , R , определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.

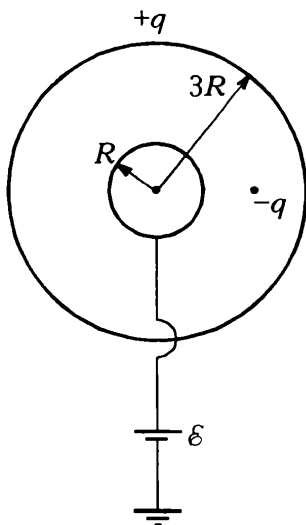


Рис. 13

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на расстоянии $2R$ от проводящей сферы радиусом R расположен точечный заряд $-q$. Определим потенциал сферы. Заряд $-q$ приведет к перераспределению зарядов на сфере (к ее поляризации). Обозначим через σ поверхностную плотность заряда на сфере. По закону сохранения заряда,

$$\sum_i \sigma_i \Delta S_i = 0,$$

где ΔS_i — площадь i -го участка сферы, а σ_i — плотность заряда i -го участка. Тогда из принципа суперпозиции находим потен-

циал в центре сферы:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2R} + \sum_i \frac{\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

При этом напряженность электрического поля внутри проводящей сферы равна нулю. Следовательно, потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу на ее поверхности, т.е.

$$\varphi_R = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Теперь решение поставленной задачи очевидно. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 3R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R\phi + \frac{1}{6}q.$$

Упражнения

1. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС \mathcal{E} , параллельно обкладкам помещена плоская пластина, имеющая заряд q . Расстояния от пластины до обкладок d_1 и d_2 . Площадь пластины и обкладок S . Определите силу, действующую на пластину со стороны электрического поля.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор. На средней пластине имеется заряд $+Q$, крайние незаряженные пластины закорочены проводником. Определите величину и направление напряженностей электрического поля между пластинами, если расстояния между пластинами l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), а площадь каждой пластины S .

3. Две соединенные проводником пластины плоского конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга во внешнем однородном электрическом поле. Расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин. Определите напряженность внешнего электрического поля, если известно, что при медленном сближении пластин до расстояния $d/3$ была совершена работа A .

4. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U , расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной l и массой m . Пластина в начальный момент прижата к левой обкладке конденсатора, а затем отпускается. Чему будет равно ускорение пластины в тот момент, когда она будет занимать симметричное положение относительно обкладок конденсатора? Площадь каждой пластины S , а расстояние между обкладками d .

При помещении диэлектрика в электрическое поле происходит поляризация диэлектрика. В случае полярных диэлектриков силы, действующие со стороны электрического поля на заряды молекул, создают момент сил, который стремится развернуть молекулу (диполь) вдоль силовых линий поля. В неполярных диэлектриках под действием поля происходит деформация молекул: положительные и отрицательные заряды молекул смещаются в противоположные стороны, и молекулы превращаются в диполи.

В общем случае при неоднородной поляризации диэлектрика внутри него и на его поверхности появляются связанные заряды. Напряженность электрического поля в любой точке пространства будет являться суперпозицией внешнего поля и поля, создаваемого связанными зарядами.

В образцах, имеющих форму тонкой пластины, шара или тонкого и длинного цилиндра, во внешнем однородном поле будет происходить однородная поляризация. В этом случае объемных связанных зарядов не будет, а возникают только поверхностные связанные заряды. Эти заряды создают электрическое поле, направленное в диэлектрике против внешнего поля, и результирующее поле в диэлектрике ослабляется. Степень ослабления поля зависит как от формы образца, так и от свойств диэлектрика.

Если мы возьмем заряженный плоский конденсатор и полностью заполним его диэлектрической средой (при сохранении зарядов на обкладках конденсатора), то в этом случае отношение напряженности электрического поля в конденсаторе без диэлектрика (в вакууме) к напряженности поля внутри диэлектрика (после заполнения им конденсатора) будет определяться только электрическими свойствами диэлектрика. Величина этого отношения называется диэлектрической проницаемостью.

Теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора с квадратными обкладками со стороной a частично заполнены диэлектриком с диэлектрической проницаемостью

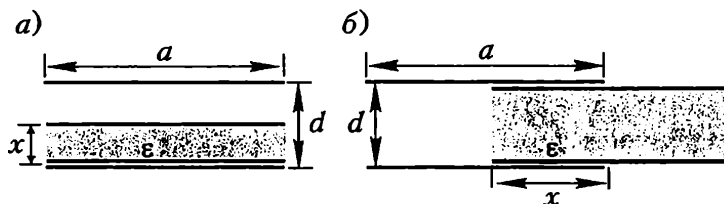


Рис.1

ϵ (рис.1). На каждом конденсаторе находится заряд Q . Определите напряженность электрического поля в диэлектриках и поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектриках.

Рассмотрим сначала конденсатор, изображенный на рисунке 1,а. Такой конденсатор эквивалентен двум последовательно соединенным конденсаторам, один из которых воздушный с расстоянием между пластинами $d - x$, а другой – заполненный диэлектриком с расстоянием между пластинами x . Емкость полностью заполненного диэлектриком конденсатора равна $C = \epsilon_0 \epsilon a^2 / x$. Поскольку конденсаторы соединены последовательно, то заряд на каждом из них равен Q . Тогда разность потенциалов на конденсаторе с диэлектриком равна $U = Q/C$, а напряженность поля в диэлектрике составляет

$$E_d = \frac{U}{x} = \frac{Qx}{\epsilon_0 \epsilon a^2 x} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2}.$$

Мы получили, что напряженность поля в диэлектрике в ϵ раз меньше, чем при отсутствии диэлектрика.

Теперь найдем поверхностную плотность связанных зарядов на поверхностях диэлектрика. Электрическое поле в воздушном зазоре создается только свободными зарядами на обкладках конденсатора (рис.2,а):

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2}.$$

Поле в диэлектрике является суперпозицией поля \vec{E}_1 и поля \vec{E}_2 , создаваемого связанными зарядами. Обозначим через σ_n поверхностную плотность связанных зарядов. Тогда

$$E_2 = \frac{\sigma_n}{\epsilon_0}.$$

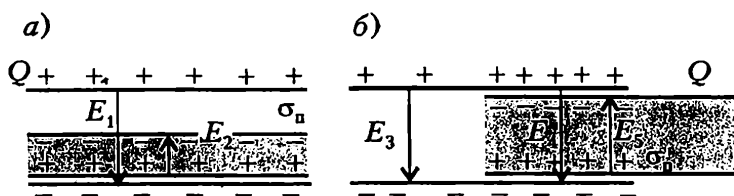


Рис.2

Напряженность поля в диэлектрике, с одной стороны, равна

$$E_d = E_1 - E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_\pi}{\epsilon_0},$$

а с другой стороны, мы раньше получили, что

$$E_d = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2}.$$

Приравняем друг другу эти два выражения:

$$\frac{Q}{\epsilon_0 a^2} - \frac{\sigma_\pi}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon a^2},$$

откуда получим

$$\sigma_\pi = \frac{(\epsilon - 1)Q}{\epsilon a^2}.$$

Сделаем предельные переходы: при $\epsilon \rightarrow 1$ $\sigma_\pi \rightarrow 0$, а при $\epsilon \rightarrow \infty$ $\sigma_\pi \rightarrow \frac{Q}{a^2}$. Первый случай соответствует полному отсутствию диэлектрика (конденсатор пустой), второй – замене диэлектрика металлической пластиной.

Теперь рассмотрим конденсатор, изображенный на рисунке 1,б. Такой конденсатор эквивалентен двум параллельно соединенным конденсаторам: воздушному и полностью заполненному диэлектриком. Суммарная емкость такой системы равна

$$C = \frac{\epsilon_0 a(a-x)}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a x}{d} = \frac{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}{d}.$$

Разность потенциалов между обкладками исходного конденсатора составляет

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Qd}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}.$$

Напряженность поля в диэлектрике равна напряженности поля в воздушной части конденсатора (рис.2,б):

$$E_d = E_3 = \frac{U}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 a(a-x+\epsilon x)}.$$

Поскольку емкость конденсатора, полностью заполненного диэлектриком, составляет

$$C_d = \frac{\epsilon_0 \epsilon a x}{d},$$

то свободный заряд на этом конденсаторе равен

$$Q_c = C_d U = \frac{Q \epsilon x}{(a - x + \epsilon x)}.$$

Этими зарядами создается поле

$$E_4 = \frac{Q_c}{\epsilon_0 a x} = \frac{\epsilon Q}{\epsilon_0 a (a - x + \epsilon x)},$$

а напряженность поля E_5 определяется связанными зарядами:

$$E_5 = \frac{\sigma_{\Pi}}{\epsilon_0},$$

где σ_{Π} – поверхностная плотность связанных зарядов. Используем тот факт, что $E_3 = E_4 - E_5$, и найдем σ_{Π} :

$$\frac{Q}{\epsilon_0 a (a - x + \epsilon x)} = \frac{\epsilon Q}{\epsilon_0 a (a - x + \epsilon x)} - \frac{\sigma_{\Pi}}{\epsilon_0},$$

откуда

$$\sigma_{\Pi} = \frac{(\epsilon - 1) Q}{a (a - x + \epsilon x)}.$$

Проведем проверку полученного результата: при $\epsilon \rightarrow 1$ $\sigma_{\Pi} \rightarrow 0$ (случай пустого конденсатора), при $\epsilon \rightarrow \infty$ $\sigma_{\Pi} \rightarrow Q/(ax)$ (вместо диэлектрика – проводящая пластина). Действительно, во втором случае весь заряд обкладок соберется на площади $S = ax$. Дело в том, что напряженность поля внутри проводника равна нулю, а из этого следует, что напряженность поля в воздушном зазоре также равна нулю. Отсутствие поля в воздушном пространстве конденсатора означает, что поверхностная плотность зарядов на обкладках длиной $a - x$ равна нулю, а весь заряд собрался на обкладках длиной x .

Задача 2. Диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ϵ введена в плоский воздушный конденсатор (рис.3).

Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1 .

Определите силу притяжения

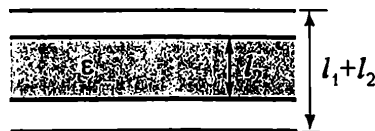


Рис.3

между обкладками конденсатора, если разность потенциалов между ними U , а площадь пластин S .

Пространство между пластинами нашего конденсатора разбивается на две области (рис.4): воздушный зазор, в котором

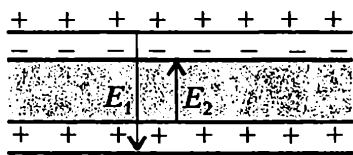


Рис.4

электрическое поле создается свободными зарядами обкладок, и слой диэлектрика, в котором электрическое поле создается и свободными и связанными зарядами и равно $E_d = E_1 - E_2$. Эта система эквивалентна двум последовательно соединенным конденсаторам: один из

них воздушный с расстоянием между пластинами l_1 , а второй – заполненный диэлектриком толщиной l_2 . Емкость первого конденсатора равна $C_1 = \epsilon_0 S / l_1$, а второго – $C_2 = \epsilon_0 \epsilon S / l_2$. Общая емкость равна

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon l_1 + l_2}.$$

Зная напряжение на конденсаторе, можно найти его заряд:

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U}{\epsilon l_1 + l_2}$$

и напряженность электрического поля в воздушном зазоре:

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon U}{\epsilon l_1 + l_2}.$$

Но это поле создается обеими пластинами, а поле одной пластины равно

$$\frac{E_1}{2} = \frac{\epsilon U}{2(\epsilon l_1 + l_2)}.$$

Сила притяжения, действующая на каждую обкладку конденсатора, равна

$$F = \frac{E_1}{2} Q = \frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S U^2}{2(\epsilon l_1 + l_2)^2}.$$

Задача 3. Плоский конденсатор, пластины которого имеют площадь S и расположены на расстоянии d , заполнен твердым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Конденсатор подсоединен к батарее постоянного тока, ЭДС которой \mathcal{E} . Одну из пластин конденсатора ото-

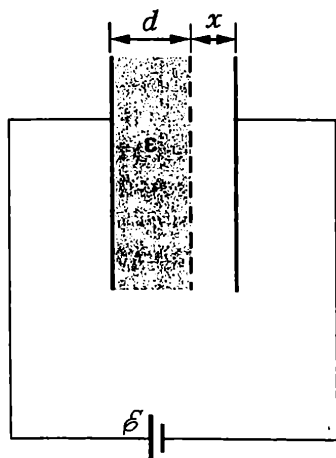


Рис.5

двигают так, что образуется воздушный зазор (рис.5). На какое расстояние x отодвинута пластина, если при этом произведена работа A ?

Емкость исходного конденсатора равна

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

Емкость конденсатора после перемещения правой обкладки на x будет равна емкости двух последовательно соединенных конденсаторов: конденсатора емкостью C_1 и воздушного конденсатора емкостью

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 S}{x}.$$

Емкость системы двух конденсаторов составляет

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d + \epsilon x}.$$

Мы видим, что при перемещении обкладки емкость конденсатора уменьшается, а следовательно, уменьшается и заряд на обкладках конденсатора при постоянном напряжении на них. Первоначальный заряд на конденсаторе был

$$Q_1 = C_1 \epsilon = \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon}{d},$$

а после перемещения стал

$$Q_2 = C \epsilon = \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon}{d + \epsilon x}.$$

Теперь найдем энергию, запасенную в конденсаторе в двух состояниях – исходном и конечном:

$$W_1 = \frac{C_1 \epsilon^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{2d},$$

$$W_2 = \frac{C \epsilon^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{2(d + \epsilon x)}.$$

Перемещая обкладку конденсатора, мы совершили работу A . По закону сохранения энергии эта работа пошла на изменение энергии конденсатора и на работу против ЭДС источника, поскольку при перемещении обкладки конденсатора его заряд уменьшается и ток течет против ЭДС:

$$A = (W_2 - W_1) + (Q_1 - Q_2) \epsilon =$$

$$= \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{2(d + \epsilon x)} - \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{2d} \right) + \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{d} - \frac{\epsilon_0 \epsilon S \epsilon^2}{d + \epsilon x} \right) = \frac{\epsilon_0 \epsilon^2 S \epsilon^2 x}{2d(d + \epsilon x)}.$$

Отсюда находим искомое перемещение пластины конденсатора:

$$x = \frac{d}{\varepsilon \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S \mathcal{E}^2}{2Ad} - 1 \right)}.$$

Задача 4. В плоский конденсатор вдвигается с постоянной скоростью v пластина из диэлектрика (рис.6). Определите ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными ЭДС батареи \mathcal{E} , диэлектрическую проницаемость ε , высоту пластины h , площадь квадратных пластин конденсатора $S = b^2$.

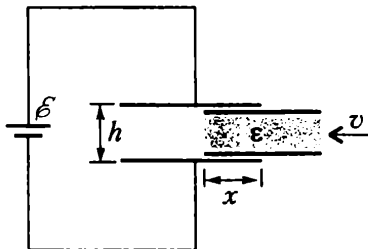


Рис.6

Выберем в качестве переменной величины длину диэлектрика, находящегося в конденсаторе. Найдем емкость конденсатора в тот момент, когда пластина вошла в конденсатор на x . Такой конденсатор эквивалентен системе двух параллельно соединенных конденсаторов: воздушного емкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S (b - x)}{bh}$$

и диэлектрического емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S x}{bh}.$$

Емкость нашей системы равна

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S (b + (\varepsilon - 1)x)}{bh}.$$

Заряд на конденсаторе в этот момент равен

$$Q = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E} (b + (\varepsilon - 1)x)}{bh}.$$

Следовательно, в цепи батареи идет ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E} (\varepsilon - 1)}{bh} \frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E} (\varepsilon - 1)}{bh} v = \frac{\varepsilon_0 b \mathcal{E} (\varepsilon - 1) v}{h}.$$

Задача 5. В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U . Расстояние между

пластинами d , плотность жидкости ρ , диэлектрическая проницаемость ϵ . На какую высоту поднимется жидкость в конденсаторе? Поверхностным натяжением пренебречь.

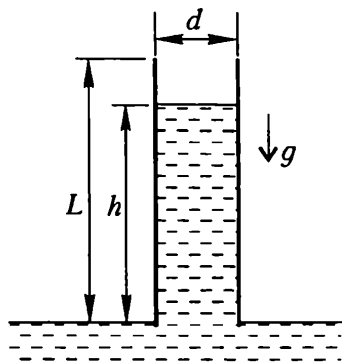


Рис.7

Обозначим высоту подъема жидкости через h , высоту пластин через L , а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через a . Идея решения задачи заключается в следующем: запишем полную энергию нашей системы, которая является

функцией от h , а затем исследуем ее на минимум по переменной h . Очевидно, что при некотором h энергия системы будет минимальна, а производная энергии по h будет равна нулю. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

Сначала найдем емкость нашего конденсатора при подъеме жидкости на высоту h . Мы имеем систему двух параллельных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon h a}{d} + \frac{\epsilon_0 (L - h) a}{d} = \frac{\epsilon_0 a}{d} (h(\epsilon - 1) + L).$$

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости при нулевом уровне, отсчитываемым от уровня жидкости в сосуда, составляет

$$W_2 = \frac{ad\rho gh^2}{2}.$$

Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_3 = W_0 - QU = W_0 - CU^2,$$

где W_0 – полный запас энергии батареи, а CU^2 – это израсходованная энергия батареи, т.е. работа, которую совершила батарея, заряжая конденсатор до напряжения U . Полная энергия нашей системы равна

$$\begin{aligned} W = W_1 + W_2 + W_3 &= \frac{CU^2}{2} + \frac{ad\rho gh^2}{2} + W_0 - CU^2 = \\ &= \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + W_0. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для емкости, получим

$$W = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{\epsilon_0 a (h(\epsilon - 1) + L)U^2}{2d} + W_0.$$

Продифференцируем это выражение по h и приравняем к нулю:

$$\frac{dW}{dh} = ad\rho gh - \frac{\epsilon_0 a (\epsilon - 1)U^2}{2d} = 0.$$

Отсюда найдем высоту подъема жидкости:

$$h = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)}{2\rho g} \left(\frac{U}{d} \right)^2.$$

Упражнения

1. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин $S = 200 \text{ см}^2$ и расстоянием между ними $d = 0,1 \text{ см}$ находится пластина из стекла ($\epsilon = 5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решите задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время подсоединен к батарее с напряжением $U = 300 \text{ В}$; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, затем отключен, и после этого пластина была удалена. Найдите также механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

2. Плоский воздушный конденсатор, пластины которого расположены горизонтально, наполовину залит жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ . Какую часть конденсатора надо залить этим же диэлектриком при вертикальном расположении пластин, чтобы емкости в обоих случаях были одинаковы?

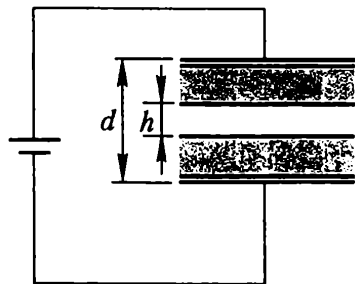


Рис.8

3. В подключенный к батарее плоский конденсатор вставляются две пластины из сегнетоэлектрика ($\epsilon = 100$) таким образом, что между ними остается небольшой зазор (рис.8). При какой величине зазора h поле в нем будет в $n = 50$ раз больше, чем в отсутствие диэлектрика? Расстояние между обкладками $d = 2 \text{ см}$.

4. Плоский конденсатор с горизонтально расположенными пластинами подсоединен к батарее с ЭДС \mathcal{E} и помещен в сосуд, который постепенно заполняется керосином ($\epsilon = 2$). Найдите зависимость напряженности поля в центре конденсатора от толщины слоя керосина h внутри него. Расстояние между пластинами конденсатора равно d .

ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. Можаев

Задача 1. В планетарной модели атома водорода предполагается, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). Определите радиус орбиты электрона, если известно, что минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону для удаления его из атома (энергия ионизации), составляет $W_{\text{ион}} = 2,2 \cdot 10^{-18}$ Дж. Заряды электрона и протона равны $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Будем считать, что электрон движется вокруг неподвижного ядра, масса которого много больше массы m электрона, по окружности радиусом r со скоростью v .

Полная энергия W электрона включает в себя кинетическую энергию его движения и потенциальную энергию электрона в электростатическом поле ядра:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Знак «минус» во втором слагаемом связан с тем, что за нулевой уровень потенциальной энергии принята бесконечность.

Уравнение движения электрона по круговой орбите имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2},$$

поскольку в данном случае стационарность орбиты обеспечивает сила электростатического взаимодействия электрона с протоном. Выражая значение v^2 из этого уравнения и подставляя его в выражение для полной энергии электрона, получим

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Чтобы удалить электрон из атома, ему необходимо сообщить

Опубликовано в «Кванте» №11/12 за 1993 год.

некоторую дополнительную энергию. Она будет минимальной в том случае, если кинетическая энергия электрона на большом удалении от атома равна нулю. Но там его потенциальная энергия также равна нулю, значит, и полная энергия электрона на бесконечности должна быть равна нулю. Тогда из закона сохранения энергии следует, что энергия ионизации равна полной энергии электрона на орбите, взятой с противоположным знаком:

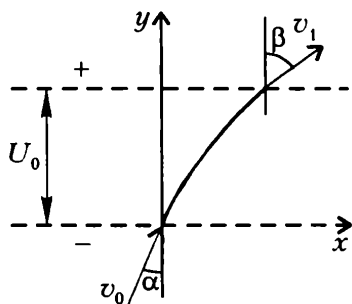
$$W_{\text{ион}} = -W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}.$$

Отсюда находим радиус орбиты электрона:

$$r = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{W_{\text{ион}}} = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ м}.$$

Заметим, что полной аналогией этой задачи является механическая задача о спутнике, вращающемся по круговой орбите вокруг Земли. Здесь после сообщения спутнику минимальной дополнительной энергии для ухода из зоны притяжения Земли (на бесконечность) он приобретает так называемую вторую космическую скорость.

Задача 2. Положительно заряженная частица с зарядом q и массой m , имея начальную скорость v_0 , влетает под углом α в область однородного электростатического поля между двумя металлическими сетками (плоский конденсатор), на которых поддерживается постоянная разность потенциалов U_0 (рис.



1). Расстояние между сетками равно d . Каким будет дальнейшее движение частицы?

Рассмотрим движение частицы в области $0 \leq y \leq d$ вдоль осей x и y . По горизонтали никакие силы на частицу не действуют, поэтому ее движение вдоль оси x будет равномерным:

Рис. 1

$$x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t.$$

В вертикальном направлении на частицу действует электрическая сила, равная qU_0/d и направленная вниз. Следовательно, вдоль оси y частица будет двигаться равнозамедленно:

$$y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{qU_0}{md} \frac{t^2}{2}.$$

Исключая из выражений для $x(y)$ и $y(t)$ время, получим уравнение траектории частицы:

$$y = -\frac{qU_0}{2mv_0^2 d \sin^2 \alpha} x^2 + \operatorname{ctg} \alpha \cdot x.$$

Это — уравнение параболы. Значит, в общем случае заряженная частица в однородном электростатическом поле движется по параболе. В частных случаях, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$, парабола переходит в прямые $x = 0$ и $y = 0$ (либо равнозамедленное движение вдоль оси y , либо равномерное движение вдоль оси x).

В зависимости от величины начальной скорости v_0 и угла α возможны три случая: 1) частица выходит за пределы верхней сетки ($y > d$); 2) частица движется внутри сеток ($y < d$); 3) вершина параболы касается верхней сетки ($y = d$). Обсудим их.

За пределами конденсатора ($y > d$) электрическое поле отсутствует (мы пренебрегаем краевыми эффектами), и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно с некоторой новой скоростью, равной v_1 и направленной под углом β к оси y . Сначала найдем проекцию v_{1y} скорости частицы на ось y , воспользовавшись законом сохранения энергии. Если у нижней сетки ($y = 0$) полная энергия частицы равна только кинетической энергии $mv_0^2/2 = mv_{0x}^2/2 + mv_{0y}^2/2$ (плоскость $y = 0$ мы принимаем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии), то у верхней сетки ($y = d$) полная энергия складывается из кинетической $mv_{1x}^2/2 + mv_{1y}^2/2$ и потенциальной qU_0 . Из баланса энергий

$$\frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{mv_{0y}^2}{2} = \frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{mv_{1y}^2}{2} + qU_0,$$

учитывая, что $v_{0x} = v_{1x}$, получим

$$v_{1y} = \sqrt{v_{0y}^2 - 2qU_0/m} = v_0 \sqrt{\cos^2 \alpha - 2qU_0/(mv_0^2)}.$$

Тогда абсолютная величина скорости частицы у верхней сетки будет равна

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{v_0^2 - 2qU_0/m},$$

а угол β будет таким, что

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - 2qU_0/(mv_0^2)}}.$$

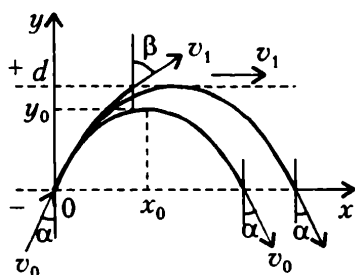
Такая ситуация возможна, если подкоренное выражение для v_{1y} больше нуля:

$$\cos^2 \alpha - \frac{2qU_0}{mv_0^2} > 0 ,$$

или

$$\frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} > qU_0 .$$

Во втором случае, когда частица не дойдет до верхней сетки ($1/2 mv_0^2 \cos^2 \alpha < qU_0$, т.е. начальной «вертикальной» энергии не



хватит для преодоления тормозящего действия электрического поля), она будет двигаться по параболе и вернется к нижней сетке, имея ту же скорость v_0 и под тем же углом α к оси y (рис.2). Найдем координаты $(x_0; y_0)$ вершины параболы. Для этого уравнение параболы запишем в виде

Рис.2

$$y = -\frac{y_0}{x_0^2}(x - x_0)^2 + y_0 ,$$

откуда получим

$$x_0 = \frac{mv_0^2 \sin 2\alpha}{2U_0 q} d , \quad y_0 = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2U_0 q} d .$$

И наконец, рассмотрим промежуточный случай, когда скорость v_{1y} частицы при $y = d$ равна нулю ($1/2 mv_0^2 \cos^2 \alpha = qU_0$). Используем уже найденные решения. Зафиксируем угол падения α и устремим $1/2 mv_0^2 \cos^2 \alpha$ к qU_0 . Из формул, полученных при рассмотрении первого случая, следует, что $v_1 \rightarrow v_{0x} = v_0 \sin \alpha$, а $\sin \beta \rightarrow 1$, т.е. $\beta \rightarrow \pi/2$. В пределе мы приходим к тому, что частица движется параллельно сеткам, а ее скорость равна $v_1 = v_0 \sin \alpha$ (см. рис.2). Теперь сделаем аналогичный предельный переход, рассматривая второй случай. При $1/2 mv_0^2 \cos^2 \alpha \rightarrow qU_0$ траектория частицы остается параболой, координаты вершины которой таковы: $x_0 \rightarrow 2d \operatorname{tg} \alpha$, $y_0 \rightarrow d$.

Мы получили, что при $1/2 mv_0^2 \cos^2 \alpha = qU_0$ одновременно возможны два решения. Очевидно, что такое состояние неустойчиво: небольшое нарушение равенства энергий приводит к реализации одного из первых двух случаев.

Обратите внимание на то, как просто можно усмотреть в рассмотренной выше ситуации аналогию между прохождением

заряженной частицы через плоский слой однородного электрического поля и преломлением света на границе раздела двух сред. В разобранным примере пространство $y < 0$ является как бы средой с неким «показателем преломления» n_1 , а пространство $y > d$ — средой с «показателем преломления» n_2 . При использованной полярности приложенной разности потенциалов и положительном заряде частицы вторая среда оказывается менее «плотной» — угол преломления β больше угла падения α ($n_2 < n_1$). Ситуация, когда $1/2 m v_0^2 \cos^2 \alpha = q U_0$ соответствует случаю, когда при данном угле падения α наступает «полное внутреннее отражение».

Задача 3. Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода устанавливается распределение потенциала, показанное на рисунке 3. Здесь минимальный потенциал $U_m = -2,25$ В, напряжение на аноде $U_a = 33,75$ В. Какой минимальной энергией должен обладать электрон на выходе из катода, чтобы долететь до анода? Чему равно время пролета электронов с такой энергией? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

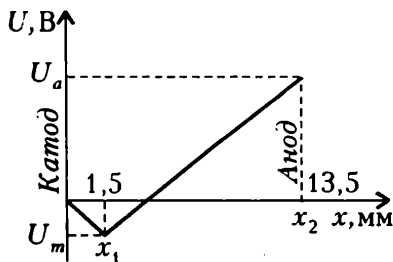


Рис.3

При решении задачи мы должны в первую очередь разобраться с распределением напряженности электрического поля $E(x)$ между катодом и анодом. Для этой цели воспользуемся связью между напряженностью поля и изменением потенциала: $E = -\Delta U / \Delta x$. На участке $0 \leq x \leq x_1$ (вблизи катода)

$$U(x) = -\frac{|U_m|}{x_1} x.$$

Следовательно,

$$E(x) = \frac{|U_m|}{x_1},$$

и мы имеем участок однородного поля с напряженностью, равной $E_1 = |U_m|/x_1$ и направленной от катода к аноду. Рассмотрим теперь участок $x_1 < x \leq x_2$. Здесь распределение потенциала имеет вид

$$U(x) = \frac{U_a - U_m}{x_2 - x_1} x - \frac{U_a x_1 - U_m x_2}{x_2 - x_1},$$

а напряженность поля равна

$$E(x) = -\frac{U_a - U_m}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом, и на этом участке мы имеем однородное поле с напряженностью, равной $E_2 = -(U_a - U_m)/(x_2 - x_1)$, но направленной уже от анода к катоду.

При $x = x_1$ функция $E(x)$ имеет разрыв. Это результат нашего упрощения распределения $U(x)$, в реальной ситуации этого разрыва, конечно, нет.

Теперь мы можем перейти к описанию движения электрона в межэлектродном пространстве диода.

На участке $0 \leq x \leq x_1$ электрон движется равнозамедленно с ускорением

$$a_1 = -\frac{e|U_m|}{mx_1}.$$

Скорость электрона изменяется по закону

$$v(t) = v_0 - \frac{e|U_m|}{mx_1} t,$$

где v_0 — начальная скорость электрона у поверхности катода. Чтобы долететь до анода, скорость электрона в точке $x = x_1$ должна быть больше или равной нулю (поскольку на участке $x_1 \leq x \leq x_2$ электрон будет ускоряться). Минимальную энергию такого электрона проще всего найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{0\min}^2}{2} = e|U_m| = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Время τ_1 пролета участка $0 \leq x \leq x_1$ в этом случае найдем из условия

$$v_{0\min} - \frac{e|U_m|}{mx_1} \tau_1 = 0,$$

откуда

$$\tau_1 = \frac{mx_1 v_{0\min}}{e|U_m|} = \frac{mx_1 \sqrt{2e|U_m|}}{e|U_m| \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{2}x_1}{\sqrt{e|U_m|/m}}.$$

Движение электрона на участке $x_1 \leq x \leq x_2$ равноускоренное с ускорением

$$a_2 = \frac{e(U_a + |U_m|)}{m(x_2 - x_1)}.$$

Поскольку начальная скорость электрона в точке $x = x_1$ равна

нулю, время пролета этого участка равно

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2(x_2 - x_1)}{a_2}} = \frac{\sqrt{2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{e(U_a + |U_m|)/m}}.$$

Полное время пролета составляет

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{|U_m|}} + \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{U_a + |U_m|}} \right) = 10^{-8} \text{ с.}$$

Задача 4. Электрический диполь, представляющий собой два жестко связанных точечных заряда $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов U_0 (рис.4). Определите скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали равна v_0 . Расстояние между пластинами конденсатора d , масса диполя m .

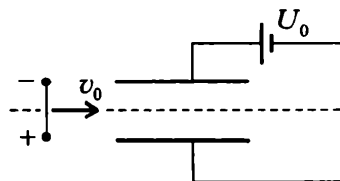


Рис.4

Рассмотрим сначала силы, действующие на диполь со стороны электрического поля конденсатора в некоторый произвольный момент времени, когда диполь еще находится вне конденсатора (здесь, в отличие от задачи 2, краевыми эффектами мы не пренебрегаем). На рисунке 5 (в увеличенном масштабе) изображен диполь, через заряды которого проходит одна из силовых линий электрического поля конденсатора. Как видно из рисунка, силы, действующие на заряды диполя (\vec{F}_1 и \vec{F}_2), зеркально симметричны относительно плоскости симметрии системы. Результирующая сила равна сумме проекций F_{1x} и F_{2x} ($F_{1x} = F_{2x}$) и направлена в сторону конденсатора, т.е. диполь втягивается в конденсатор.

Найти аналитическое выражение для результирующей силы сложно, да и нас интересует только суммарный результат. Поэтому для решения задачи мы воспользуемся энергетическим методом.

На большом удалении от конденсатора полная энергия диполя равна его кинети-

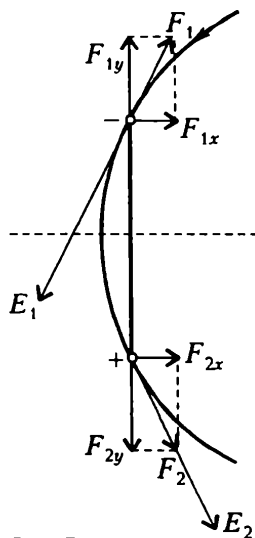


Рис.5

ческой энергии:

$$W_{\text{н}} = \frac{mv_0^2}{2},$$

поскольку потенциальную энергию диполя на бесконечности разумно считать равной нулю. Когда диполь будет находиться в центре конденсатора, его полная энергия будет равна

$$W_{\text{к}} = \frac{mv_{\text{к}}^2}{2} + \Pi,$$

где $v_{\text{к}}$ — скорость диполя, а Π — его потенциальная энергия. Таким образом, задача свелась к нахождению потенциальной энергии диполя в центре конденсатора.

Потенциальная энергия диполя — это потенциальная энергия его зарядов. Так как в электростатическом поле потенциальная энергия системы зарядов не зависит от траекторий, по которым они перемещаются, а определяется лишь их взаимным расположением, будем перемещать наши заряды сначала вдоль эквипотенциальной поверхности нулевого потенциала (пунктирная линия на рисунке 4), а в центре конденсатора отрицательный заряд переместим вверх на расстояние $l/2$, положительный — вниз тоже на $l/2$. При перемещении по эквипотенциальной поверхности работа не совершается, при перемещении же в однородном поле с напряженностью $E = U_0/d$ над отрицательным зарядом совершается работа $A_- = -qEl/2 = -qU_0l/(2d)$, а над положительным зарядом $A_+ = -qU_0l/2 = -qU_0l/(2d)$. Суммарная работа и будет численно равна потенциальной энергии диполя:

$$\Pi = A_- + A_+ = -\frac{qU_0l}{d},$$

Окончательно, записывая баланс энергий диполя

$$W_{\text{н}} = W_{\text{к}}, \text{ или } \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{\text{к}}^2}{2} - \frac{qU_0l}{d},$$

получим

$$v_{\text{к}} = v_0 \sqrt{1 + \frac{2qU_0l}{mv_0^2d}}.$$

Задача 5. Два закрепленных одинаковых тонких металлических кольца расположены соосно на некотором расстоянии друг от друга (рис.6). Кольца заряжены одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Для пролета вдоль прямой, проходящей через центры колец перпенди-

кулярно их плоскостям, заряженной частице на большом удалении от колец необходима минимальная скорость v_0 . Пусть скорость частицы вдали от колец равна v_1 ($v_1 > v_0$). Каким будет отношение максимальной скорости частицы к минимальной во время пролета?

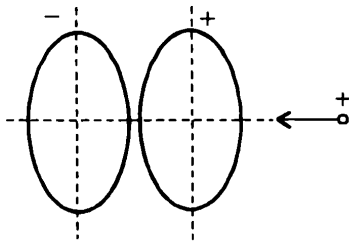


Рис.6

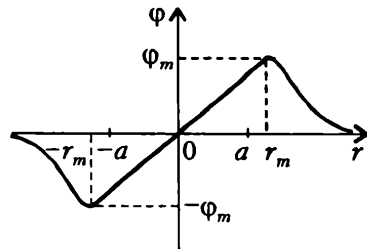


Рис.7

Качественное распределение потенциала $\varphi(r)$ поля заряженных колец вдоль линии движения частицы изображено на рисунке 7. Начало координат выбрано посередине между кольцами, координата центра положительно заряженного кольца $r_1 = a$, а отрицательного кольца $r_2 = -a$. В данном случае нас не интересует конкретный вид функции $\varphi(r)$, нам важен лишь нечетный характер данной функции: $\varphi(r) = -\varphi(-r)$, а также наличие двух экстремумов: максимума и минимума.

Положительно заряженная частица при пролете справа налево будет тормозиться на участках $r_m < r < \infty$ и $-\infty < r < -r_m$ и ускоряться на участке $-r_m < r < r_m$. Минимальная скорость v_0 частицы, необходимая для пролета колец, определяется условием

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\varphi_m,$$

где m — масса частицы, а q — ее заряд. В этом случае в точке $r = r_m$ частица будет иметь нулевую скорость, затем она будет ускоряться и в точке $r = 0$ снова будет иметь скорость v_0 . Продолжая ускоряться, при $r = -r_m$ ее скорость будет максимальной и равной $\sqrt{2}v_0$. На участке $-\infty < r < -r_m$ скорость начнет уменьшаться, стремясь к значению v_0 на большом удалении.

Из приведенного рассуждения ясно, что при начальной скорости частицы v_1 она будет иметь минимальную скорость в точке $r = r_m$, а максимальную в точке $r = -r_m$. Обе скорости

можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_{\min}^2}{2} + q\varphi_m = \frac{mv_{\min}^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2},$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2} - q\varphi_m = \frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Из первого уравнения находим

$$v_{\min} = \sqrt{v_1^2 - v_0^2},$$

а из второго —

$$v_{\max} = \sqrt{v_1^2 + v_0^2}.$$

Их отношение равно

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{\sqrt{1 + (v_0/v_1)^2}}{1 - (v_0/v_1)^2}$$

Упражнения

1. На две параллельные сетки, между которыми приложена разность потенциалов U , падают отрицательно заряженные частицы с энергией $4eU/3$ (e — заряд частицы) под разными углами $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (см. рис. 1). При каких углах падения частицы будут «отражаться», т.е. не смогут пройти через сетки?

2. Электрон, имеющий кинетическую энергию $W = 10$ кэВ, влетает в плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 40$ В. Расстояние между пластинами $d = 1$ см, их длина $l = 10$ см. На расстоянии $L = 20$ см за конденсатором находится экран. Первоначальная скорость электрона направлена параллельно пластинам. Найдите смещение электрона на экране. Силой тяжести можно пренебречь.

3. В планетарной модели атома водорода электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона). При переходе с одной орбиты на другую, расположенную ближе к ядру, испускается фотон. Какова энергия фотона, испущенного атомом водорода при переходе электрона с орбиты радиусом $r_2 = 2,1 \cdot 10^{-8}$ см на орбиту радиусом $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-9}$ см?

4. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, находится в положении устойчивого равновесия в однородном электрическом поле с напряженностью E . Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть диполь на 180° ?

В упрощенном виде конденсатор представляет собой систему двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников. Такая система проводников обладает способностью накапливать электрический заряд: на одной обкладке положительный, а на другой отрицательный, в целом же конденсатор остается электронеутральным.

Количественной характеристикой накопительной способности таких систем является электроемкость. Для ориентировки в величинах электроемкости приведем два примера: электроемкость уединенного проводящего шара радиусом, равным радиусу нашей планеты ($R \sim 6400$ км), составляет примерно 10^{-3} Ф, а электроемкость уединенного куска провода диаметром 2 мм и длиной 1 м равна приблизительно 10^{-12} Ф. (В этих примерах вторая обкладка уединенных проводников находится в бесконечности, т.е. силовые линии электрического поля уходят с данных проводников на бесконечность.)

Основное внимание в статье будет уделено поведению конденсаторов в электрических цепях с источниками постоянного тока. Помимо конденсаторов, в таких цепях обычно присутствуют и резисторы. Весь промежуток времени с момента замыкания цепи и до момента установления стационарного состояния можно разбить на три этапа.

Первый этап – это очень короткий промежуток времени (его можно оценить, разделив линейный размер схемы на скорость света) сразу после замыкания ключа. За это время в цепи установится некоторый начальный ток, но, поскольку в реальных схемах величина этого тока конечна, за бесконечно малое время во всех участках цепи протекут бесконечно малые заряды и изменением зарядов и напряжений на конденсаторах можно будет пренебречь. Итак, на первом этапе, сразу после замыкания

цепи, сохраняются напряжения на конденсаторах, которые были до замыкания, и устанавливаются начальные токи, величины которых определяются законом Ома для замкнутых цепей и не зависят от емкостей конденсаторов.

На втором этапе идет переходной процесс – выход на стационарный режим, во время которого в участках цепи текут переменные токи и происходит разрядка или подзарядка конденсаторов. Этот процесс характеризуется так называемой постоянной времени τ . Смысл ее в следующем: если время, прошедшее после замыкания цепи, много меньше τ , можно считать, что переходной процесс и не начинался, а если время много больше τ , то переходной процесс закончился и установился стационарный режим.

Как в первом, так и во втором процессах через конденсаторы текут переменные токи, но в первом случае это очень быстро изменяющиеся токи и поэтому реактивные сопротивления конденсаторов практически равны нулю, а во втором случае скорости изменения тока существенно меньше и зависят как от омического сопротивления цепи, так и от ее емкости. (Более подробно этот этап будет разобран ниже на конкретных примерах.)

И наконец, третий (и последний) этап, когда устанавливается стационарный режим. Здесь реактивные сопротивления конденсаторов равны бесконечности, токи через конденсаторы равны нулю, напряжения на конденсаторах равны установившимся значениям, которые определяются законом Ома для замкнутой цепи.

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через резисторы и ток через батарею сразу после замыкания ключа.

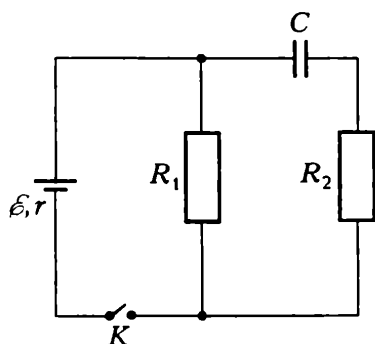


Рис. 1

За очень малое время установления начальных токов (не путать с установившимися стационарными токами) заряд на конденсаторе не изменится и разность потенциалов на нем останется равной нулю. Эквивалентная схема для этого промежутка времени будет иметь вид, изображенный на рисунке 2. Такая

схема позволяет с помощью закона Ома для замкнутой цепи определить начальные токи. Начальный ток через батарею составляет

$$I_{06} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2) \mathcal{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2},$$

а начальные токи через резисторы равны

$$I_{01} = \frac{R_2 \mathcal{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

и

$$I_{02} = \frac{R_1 \mathcal{E}}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Следует отметить, что полученные значения начальных токов не зависят от емкости конденсатора C .

Задача 2. В электрической схеме, изображенной на рисунке 3, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через ключ и через батарею сразу после замыкания ключа.

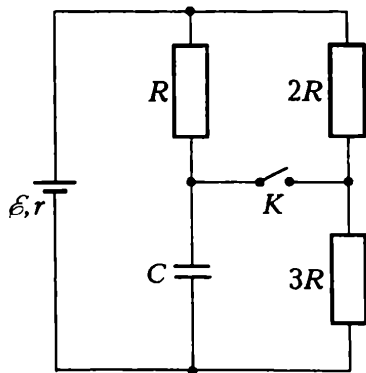


Рис.3

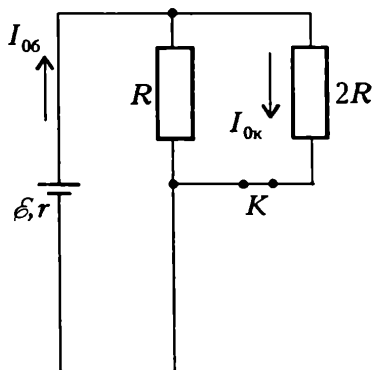


Рис.4

Сразу после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе остается равным нулю, поэтому начальный ток через резистор $3R$ (более точно – через резистор сопротивлением $3R$) будет

равен нулю. Эквивалентная схема для этого момента времени изображена на рисунке 4. Начальный ток через батарею, очевидно, равен

$$I_{06} = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{2R^2}{3R}} = \frac{3\mathcal{E}}{3r + 2R}.$$

Такой же ток течет и через конденсатор. А начальный ток через ключ равен начальному току, протекающему через резистор $2R$:

$$I_{0к} = \frac{\mathcal{E}}{3r + 2R}.$$

Задача 3. В электрической схеме, изображенной на рисунке 5, ключ K разомкнут, а конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_x . Параметры схемы указаны на рисунке. Определите величину U_x , при которой ток через батарею сразу после замыкания ключа останется неизменным.

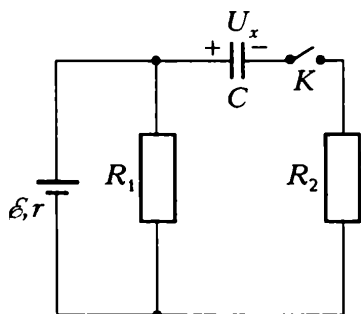


Рис.5

До замыкания ключа через батарею течет ток

$$I_6 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается неизменным и равным U_x . Пусть в этот момент в цепи текут токи, изображенные на рисунке 6. Запишем закон Ома для контура, охватывающего батарею и резистор R_1 :

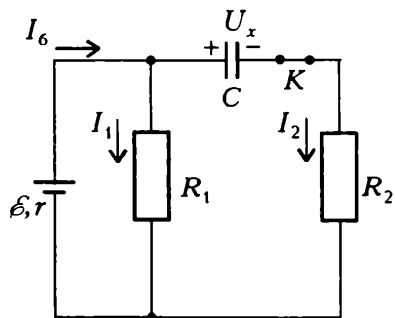


Рис.6

$$\mathcal{E} = I_1 R_1 + I_6 r.$$

Поскольку ток I_6 сохраняется, то и ток I_1 , текущий через резистор R_1 , остается неизменным, значит, $I_1 = I_6$. По закону сохранения

заряда, $I_6 = I_1 + I_2$, откуда следует, что $I_2 = 0$. Запишем теперь закон Ома для контура, охватывающего батарею, конденсатор и резистор R_2 :

$$\mathcal{E} = I_6 r + U_x + I_2 R_2.$$

С учетом выражений для I_2 и I_6 получим

$$U_x = \frac{R_1 \varepsilon}{r + R_1}.$$

Задача 4*. В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Найдите зависимость от времени тока через батарею после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь ($r = 0$).

Сразу оговоримся, что решение этой задачи выходит за рамки школьной программы, но интерес представляет не само решение, а физическая сторона переходных процессов и та роль, которую выполняют конденсаторы в подобных цепях.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа, причем за начало отсчета времени возьмем момент окончания первого этапа – установления начальных значений токов и напряжений. Именно начиная с этого момента в цепи будет идти квазистационарный процесс.

Согласно рисунку 7, для произвольного момента времени можно записать:

$$\varepsilon = U_C + I_2 R_2,$$

$$\varepsilon = I_1 R_1,$$

$$I_6 = I_1 + I_2,$$

$$I_2 = C \frac{dU_C}{dt}.$$

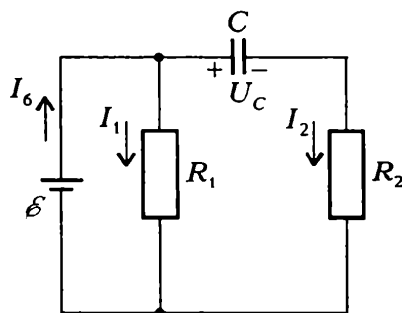


Рис.7

Первое уравнение – это закон Ома для контура, содержащего батарею, конденсатор и резистор R_2 , второе – закон Ома для контура, охватывающего батарею и резистор R_1 , третье – закон сохранения заряда, четвертое – связь между током I_2 и изменением напряжения на конденсаторе. Продифференцировав первое уравнение по времени и решая его совместно с остальными тремя уравнениями, получим дифференциальное уравнение относительно тока через батарею:

$$\frac{dI_6}{dt} + \frac{1}{R_2 C} I_6 = \frac{\varepsilon}{R_1 R_2 C}.$$

Семейство решений этого уравнения имеет вид

$$I_6(t) = A e^{-\frac{t}{R_2 C}} + \frac{\varepsilon}{R_1},$$

где A – произвольная константа, $\tau = R_2 C$ – постоянная времени. Константа A определяется начальным током $I_6(0)$, который мы уже находили в задаче 1. При $t = 0$ получим

$$I_6(0) = \frac{(R_1 + R_2)\varepsilon}{R_1 R_2}.$$

Для данного начального тока зависимость тока через батарею от времени запишется в виде

$$I_6(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} \right).$$

Постоянная времени $\tau = R_2 C$ является характерным временем данного переходного процесса. При $t \ll R_2 C$ ток через батарею практически не успевает заметно измениться, а при $t \gg R_2 C$ можно считать, что переходной процесс закончился и через батарею течет постоянный ток $I_6 = \varepsilon / R_1$.

График зависимости $I_6(t)$ показан на рисунке 8.

На примере разобранный схемы мы рассмотрели все три процесса. До замыкания ключа ток через батарею равен нулю, сразу после замыкания ток скачком возрастает до

значения $I_6(0) = \varepsilon (R_1 + R_2) / (R_1 R_2)$, затем по экспоненте спадает до установившегося значения $I_6(\infty) = \varepsilon / R_1$.

Задача 5. В схеме на рисунке 9 ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя

K_2 разомкнутым. 1) Какие напряжения установятся на конденсаторах? 2) Какой заряд протечет через ключ K_2 , если его замкнуть (при замкнутом ключе K_1)? Параметры схемы указаны на рисунке.

1) В установившемся режиме после замыкания ключа K_1 общее напряжение на конденсаторах будет равно суммарному падению напряжения на резисторах:

$$U_{\text{общ}} = \frac{3R\varepsilon}{r + 3R}.$$

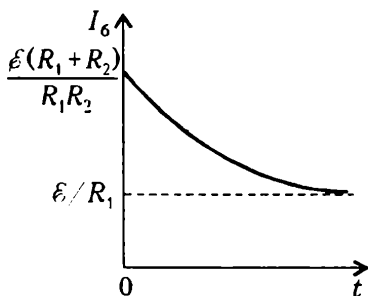


Рис.8

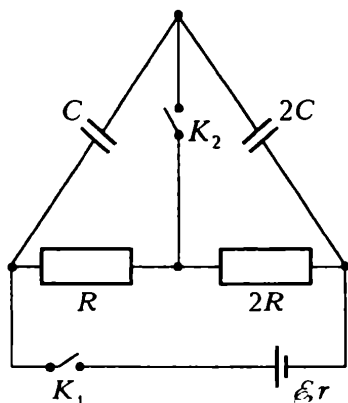


Рис.9

Поскольку суммарная емкость конденсаторов равна $C_{\text{общ}} = 2C/3$, заряды на конденсаторах составляют

$$q_1 = q_2 = C_{\text{общ}} U_{\text{общ}} = \frac{2RC\varepsilon}{r + 3R},$$

а напряжения равны

$$U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{2R\varepsilon}{r + 3R} \text{ и } U_2 = \frac{q_2}{2C} = \frac{R\varepsilon}{r + 3R}.$$

2) До замыкания ключа K_2 на верхней пластине конденсатора C (более точно – конденсатора емкостью C) находился заряд $-q_1$, а на верхней пластине конденсатора $2C$ – заряд $+q_2$. После замыкания ключа K_2 и установления нового стационарного состояния напряжения на конденсаторах изменятся и будут равны

$$U_1^* = \frac{R\varepsilon}{r + 3R} \text{ и } U_2^* = \frac{2R\varepsilon}{r + 3R}.$$

Новый заряд на верхней пластине конденсатора C будет $q_1^* = -U_1^* C$, а на верхней пластине второго конденсатора $q_2^* = +U_2^* \cdot 2C$. Очевидно, что через ключ K_2 протечет заряд

$$Q = (q_1^* + q_2^*) - (-q_1 + q_2) = \frac{3RC\varepsilon}{r + 3R}.$$

Задача 6. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\varepsilon = 20 \text{ В}$, резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$ и конденсатора, замыкают ключ K (рис. 10). 1) Найдите ток через резистор R_3 сразу после замыкания ключа. 2) Определите ток через батарею в тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе станет равным $3/5 \varepsilon$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

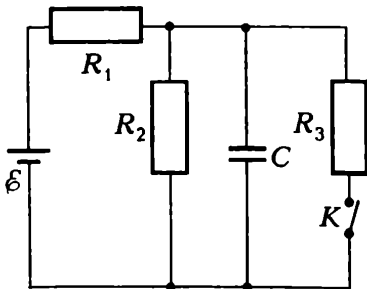


Рис. 10

1) До замыкания ключа часть электрической схемы находится в стационарном режиме: через резисторы и батарею течет постоянный ток

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2},$$

конденсатор C заряжен до напряжения

$$U_C = IR_2 = \frac{R_2 \varepsilon}{R_1 + R_2} = \frac{40}{3} \text{ В} \approx 13,3 \text{ В}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется неизменным, и через резистор R_3 потечет ток (сверху вниз)

$$I_3 = \frac{U_C}{R_3} = \frac{R_2 \varepsilon}{R_3(R_1 + R_2)} = \frac{4}{9} \text{ А} \approx 0,44 \text{ А}.$$

2) Сначала разберемся, в каком режиме будет находиться наша схема: то ли это будет переходной процесс, то ли стационарный режим. Для этого найдем установившееся напряжение на конденсаторе в стационарном режиме. Эквивалентная схема, соответствующая этому случаю, будет иметь вид, изображенный на рисунке 11. Общее сопротивление цепи равно

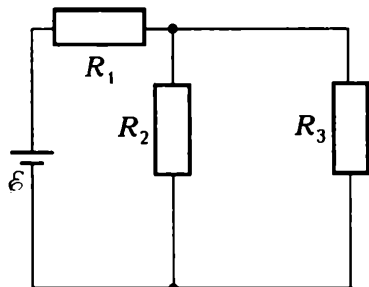


Рис. 11

$$R_{\text{общ}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

через резистор R_1 течет ток

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{\text{общ}}} = \frac{(R_2 + R_3) \varepsilon}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3},$$

напряжение на этом резисторе равно

$$U_1 = I_1 R_1 = \frac{R_1(R_2 + R_3) \varepsilon}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3},$$

а на резисторах R_2 и R_3 и на конденсаторе –

$$U_2 = U_3 = U_C = \varepsilon - U_1 = \frac{R_2 R_3 \varepsilon}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{120}{11} \text{ В} \approx 11 \text{ В}.$$

Поскольку нас интересует напряжение $U_C = 3/5 \varepsilon = 12 \text{ В}$, очевидно, что состояние системы соответствует переходному процессу. В этот момент напряжение на резисторе R_1 равно

$$U_1^* = \varepsilon - U_C = \frac{2}{5} \varepsilon,$$

следовательно, через резистор R_1 и через батарею течет ток

$$I_6 = \frac{U_1^*}{R_1} = \frac{2\varepsilon}{5R_1} = 0,8 \text{ А}.$$

Задача 7. Две батареи с ЭДС ε_1 и ε_2 включены в схему, параметры которой указаны на рисунке 12, причем $R_1 = R_2 = R_3 = R$. В начальный момент времени ключи K_1 и K_2

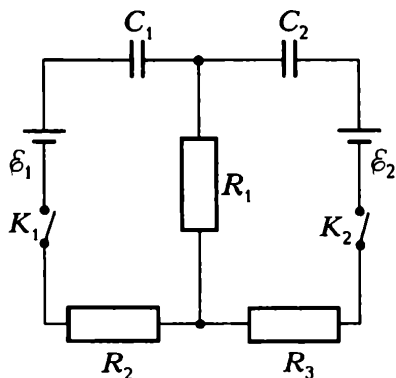


Рис. 12

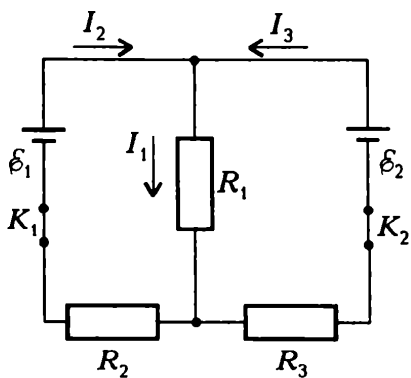


Рис. 13

разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключи одновременно замыкают. 1) Найдите начальный ток через резистор R_1 . 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключей? Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

1) Эквивалентная схема сразу после одновременного замыкания ключей K_1 и K_2 показана на рисунке 13. Для определения начального тока через резистор R_1 запишем уравнения

$$\varepsilon_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2, \quad \varepsilon_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3, \quad I_1 = I_2 + I_3.$$

Совместное решение этих уравнений позволяет найти ток I_1 :

$$I_1 = \frac{R_2 \varepsilon_2 + R_3 \varepsilon_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3R}.$$

2) После установления стационарного состояния напряжения на конденсаторах равны $U_{C_1} = \varepsilon_1$ и $U_{C_2} = \varepsilon_2$, а заряды — $q_1 = C_1 U_{C_1} = C_1 \varepsilon_1$ и $q_2 = C_2 U_{C_2} = C_2 \varepsilon_2$.

Работа, совершенная источниками, равна

$$A = q_1 \varepsilon_1 + q_2 \varepsilon_2 = C_1 \varepsilon_1^2 + C_2 \varepsilon_2^2.$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторах, и количества теплоты, выделившегося в резисторах. Энергия каждого конденсатора составляет

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Значит, в схеме выделяется количество теплоты

$$Q = A - (W_1 + W_2) = \frac{C_1 \varepsilon_1^2 + C_2 \varepsilon_2^2}{2}.$$

Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме, изображенной на рисунке 14, после размыкания ключа K ? Параметры схемы указаны на рисунке.

2. При разомкнутом ключе K (рис. 15) на конденсаторе устанавливается напряжение $U_1 = 12$ В. 1) Найдите ЭДС батареи. 2) Определите установившееся напряжение на конденсаторе после замыкания ключа.

3. В электрической схеме (рис. 16), состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 30$ В, резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и конденсатора, замыкают ключ K . 1) Найдите ток через резистор R_2 сразу после замыкания

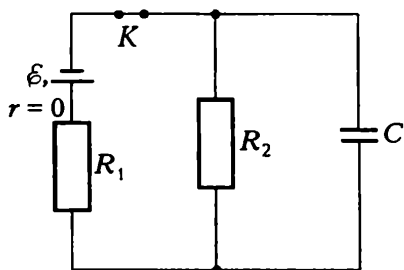


Рис. 14

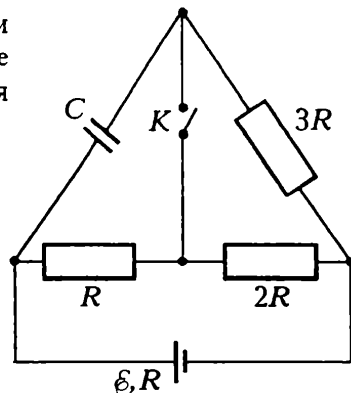


Рис. 15

ключа. 2) Найдите ток через батарею в тот момент времени, когда ток через резистор R_3 равен $I_3 = 0,3$ А. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

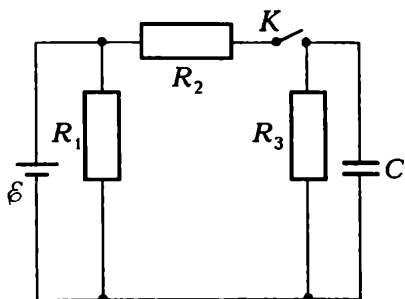


Рис. 16

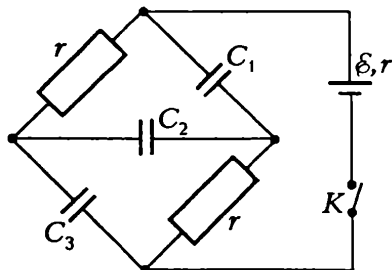


Рис. 17

4. Батарея с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r включена через ключ K в схему, параметры которой указаны на рисунке 17. В начальный момент времени ключ разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Ключ замыкают. 1) Определите начальный ток (сразу после замыкания ключа) через батарею. 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключа?

Основным законом для расчета электрических цепей является, конечно, закон Ома. Однако в случае сложных, разветвленных цепей удобно пользоваться правилами Кирхгофа. Напомним их.

Первое правило непосредственно вытекает из закона сохранения электрического заряда и утверждает, что алгебраическая сумма токов в точке разветвления (узле) электрической цепи равна нулю. Согласно второму правилу, которое является следствием закона сохранения энергии, в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения.

Рассмотрим несколько конкретных задач на электрические цепи постоянного тока.

Задача 1. *Определите среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медной проволоке, площадь поперечного сечения которой $S = 1 \text{ мм}^2$, при протекании по ней постоянного тока $I = 1 \text{ А}$. Считать, что каждый атом меди дает один свободный электрон.*

По определению, сила тока в металлическом проводнике равна

$$I = envS,$$

где e – заряд электрона, n – концентрация электронов, v – искомая скорость их упорядоченного движения. Поскольку на каждый атом меди приходится один свободный электрон, число электронов в объеме проволоки равно числу атомов N . Тогда концентрация свободных электронов в объеме проволоки V равна

$$n = \frac{N}{V}.$$

Число атомов легко найти, зная постоянную Авогадро N_A , т.е.

Опубликовано в «Кванте» №3 за 2001 год.

число атомов в одном моле вещества, и количество молей, равное отношению массы меди m к ее молярной массе M :

$$N = N_A \frac{m}{M} = N_A \frac{\rho V}{M},$$

где ρ — плотность меди.

Таким образом, скорость упорядоченного движения электронов равна

$$v = \frac{I}{enS} = \frac{IM}{eN_A \rho S} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм/с}.$$

Задача 2. При замкнутом ключе K вольтметр V_1 показывает $0,8\varepsilon$, где ε — ЭДС батареи (рис.1). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления одинаковы?

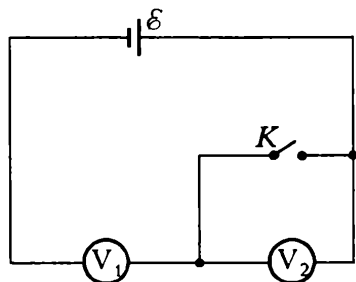


Рис.1

Обозначим через r внутреннее сопротивление батареи, а через r_b — внутреннее сопротивление вольтметров. Тогда, согласно закону Ома, при замкнутом ключе ток в цепи равен

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r + r_b},$$

а напряжение, которое показывает вольтметр V_1 , равно

$$U_0 = I_0 r_b = \frac{\varepsilon r_b}{r + r_b} = 0,8\varepsilon.$$

Отсюда получаем

$$r_b = 4r.$$

После размыкания ключа ток через батарею равен

$$I = \frac{\varepsilon}{r + 2r_b},$$

а напряжения на вольтметрах V_1 и V_2 одинаковы и равны

$$U_1 = U_2 = I r_b = \frac{\varepsilon r_b}{r + 2r_b} = \frac{4}{9} \varepsilon.$$

Задача 3. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r , помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис.2). Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если пластину двигать с постоянной

скоростью v ? Расстояние между обкладками конденсатора d .

При движении заряженной пластины с постоянной скоростью на обкладках конденсатора появляются заряды, обеспечивающие такую разность потенциалов между пластинами, чтобы ток в цепи, а следовательно, и напряжение на батарее оставались постоянными. Пусть в некоторый момент времени расстояние между перемещаемой заряженной пластиной и правой пластиной конденсатора равно x . Обозначим

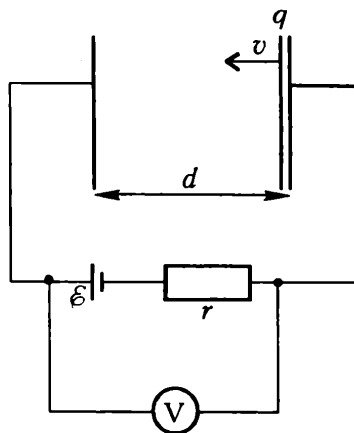


Рис.2

заряды левой и правой обкладок конденсатора в этот момент через q_1 и q_2 . Так как батарея не создает зарядов, а способна только перемещать их, то, в силу закона сохранения заряда, $q_1 + q_2 = 0$, или $q_1 = -q_2$. Эти заряды создают внутри конденсатора электрическое поле, напряженность которого равна

$$E_1 = \frac{q_1}{\epsilon_0 S},$$

а заряд q пластины создает поле напряженностью

$$E = \frac{q}{2\epsilon_0 S},$$

где S – площадь обкладок конденсатора и внесенной в него пластины. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, разность потенциалов на обкладках конденсатора равна

$$U = (E_1 + E)x + (E_1 - E)(d - x).$$

Положив $x = x_0 + vt$, найдем временную зависимость зарядов, возникающих на обкладках конденсатора:

$$q_1(t) = \frac{U\epsilon_0 S}{d} + \frac{q}{2} - \frac{qx_0}{d} - \frac{qv}{d}t.$$

Теперь нетрудно определить ток через батарею:

$$I = \frac{\Delta q_1}{\Delta t} = -\frac{qv}{d}$$

и разность потенциалов на клеммах батареи:

$$U = \epsilon - Ir = \epsilon + \frac{qvr}{d}.$$

У идеального вольтметра внутреннее сопротивление велико, так

что током через вольтметр можно пренебречь. В этом случае показания вольтметра совпадут с найденной разностью потенциалов.

Задача 4. В схеме, изображенной на рисунке 3, ЭДС \mathcal{E}_1 первой батареи уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС \mathcal{E}_2 второй батареи, чтобы сила тока через эту батарею осталась прежней? Внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

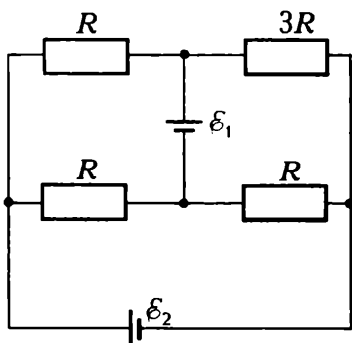


Рис.3

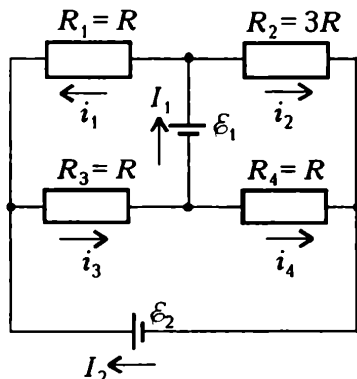


Рис.4

Расставим токи на каждом участке цепи и введем соответствующие обозначения (рис.4). Согласно первому правилу Кирхгофа,

$$i_3 = i_1 + I_2 \text{ и } i_4 = I_2 - i_2.$$

Теперь рассмотрим три замкнутых контура, каждый из которых содержит источник тока, и запишем для них второе правило Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_1 = i_1 R_1 + (i_1 + I_2) R_3,$$

$$\mathcal{E}_1 = i_2 R_2 - (I_2 - i_2) R_4,$$

$$\mathcal{E}_2 = (i_1 + I_2) R_3 + (I_2 - i_2) R_4.$$

Отсюда найдем ток I_2 , протекающий через батарею с ЭДС \mathcal{E}_2 :

$$I_2 = \frac{4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{5}.$$

При изменении ЭДС \mathcal{E}_1 на $\Delta\mathcal{E}_1$ и ЭДС \mathcal{E}_2 на $\Delta\mathcal{E}_2$ ток через батарею с ЭДС \mathcal{E}_2 будет равен

$$I_2^* = \frac{4(\mathcal{E}_2 + \Delta\mathcal{E}_2) - (\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_1)}{5}.$$

По условию задачи токи I_2 и I_2^* равны между собой. Приравняв полученные выражения для этих токов, находим искомое изменение ЭДС второй батареи:

$$\Delta \varepsilon_2 = \frac{\Delta \varepsilon_1}{4} = 0,375 \text{ В},$$

при этом ясно, что ЭДС второй батареи тоже нужно уменьшить.

Задача 5. В схеме, изображенной на рисунке 5, в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через конденсатор C сразу после замыкания ключа. Параметры схемы таковы: ЭДС первой батареи $\varepsilon_1 = 40 \text{ В}$, ее внутреннее сопротивление $r_1 = 200 \text{ Ом}$, ЭДС второй батареи $\varepsilon_2 = 80 \text{ В}$, ее внутреннее сопротивление $r_2 = 50 \text{ Ом}$, сопротивление резистора $R = 150 \text{ Ом}$.

По закону Ома ток в замкнутой цепи до замыкания ключа K равен

$$I_0 = \frac{\varepsilon_2}{R + r_2}.$$

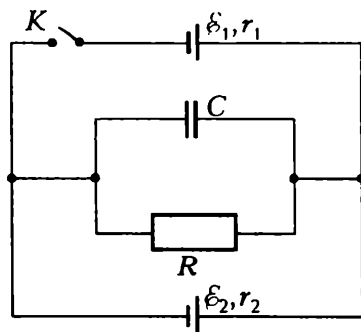


Рис.5

Разность потенциалов на резисторе, а значит, и на конденсаторе равна

$$U_C = \frac{\varepsilon_2 R}{R + r_2}.$$

Так как напряжение на конденсаторе мгновенно измениться не может, то и сразу после замыкания ключа оно равно U_C . Поэтому через батарею с ЭДС ε_1 потечет ток

$$I_1 = \frac{\varepsilon_1 - U_C}{r_1} = \frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{\varepsilon_2 R}{r_1(R + r_2)} = -0,1 \text{ А}.$$

Ток через резистор в момент замыкания ключа не изменился. Покажем, что ток через батарею с ЭДС ε_2 также не изменился. Пусть в момент замыкания ключа ток через батарею с ЭДС ε_2 равен I_3 . Тогда из закона Ома получаем

$$\varepsilon_2 = I_3 r_2 + I_0 R = I_3 r_2 + \frac{\varepsilon_2 R}{R + r_2},$$

откуда находим

$$I_3 = \frac{\varepsilon_2}{R + r_2} = I_0.$$

Из первого правила Кирхгофа следует

$$I_3 + I_1 = I_0 + I_C, \text{ или } I_C = I_1.$$

Это означает, что ток через конденсатор в момент замыкания ключа равен току через батарею с ЭДС \mathcal{E}_1 :

$$I_C = I_1 = -0,1 \text{ А}.$$

Задача 6. При замкнутом ключе K (рис. 6) установившееся напряжение на конденсаторе равно $U_1 = 27 \text{ В}$. Найдите ЭДС источника тока. Определите также установившееся напряжение на конденсаторе U_2 после размыкания ключа.

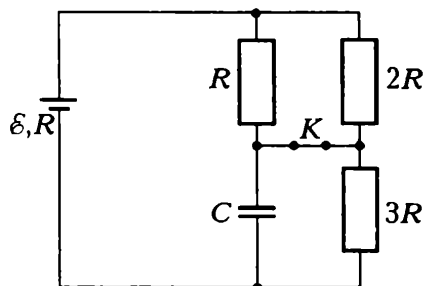


Рис. 6

Обозначим токи через батарею, резисторы R и $2R$ при замкнутом ключе через I , I_1 и I_2 соответственно. Из первого правила Кирхгофа следует, что

$$I = I_1 + I_2.$$

Резисторы R и $2R$ включены параллельно, поэтому разности потенциалов на них равны:

$$I_1 R = I_2 \cdot 2R.$$

Из второго правила Кирхгофа для замкнутого контура, содержащего источник тока и резисторы R и $3R$, находим

$$\mathcal{E} = IR + I_1 R + I \cdot 3R.$$

Кроме того, очевидно, что установившийся ток равен

$$I = \frac{U_1}{3R}.$$

Из полученных уравнений находим ЭДС батареи:

$$\mathcal{E} = 4IR + \frac{2}{3}IR = \frac{14}{3}IR = \frac{14}{9}U_1 = 42 \text{ В}.$$

После размыкания ключа и установления стационарного режима ток через резистор R прекращается и разность потенциалов на обкладках конденсатора C становится равной разности потенциалов на клеммах батареи. Следовательно, ток течет только через резисторы $2R$ и $3R$. Из закона Ома,

$$\mathcal{E} - I^* R = I^* \cdot 5R,$$

откуда находим установившийся ток через батарею после размыкания ключа:

$$I^* = \frac{\varepsilon}{6R}$$

и установившееся напряжение на конденсаторе:

$$U_C = U_2 = I^* \cdot 5R = \frac{5}{6}\varepsilon = 35 \text{ В}.$$

Задача 7. В электрической схеме, представленной на рисунке 7, ключ K в начальный момент замкнут. После размыкания ключа в цепи выделяется количество теплоты Q . Чему равна ЭДС батареи ε ? Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов с сопротивлениями R_1 , R_2 и R_3 ? Индуктивность катушки L , внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

При замкнутом ключе в контуре, содержащем батарею, резистор R_3 и катушку, устанавливается ток

$$I = \frac{\varepsilon}{R_3}$$

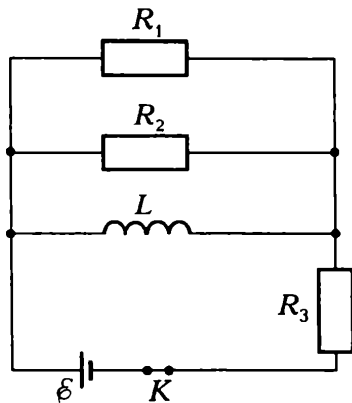


Рис.7

(разность потенциалов на катушке индуктивности равна нулю). При этом катушка с индуктивностью L приобретает энергию

$$W_0 = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\varepsilon^2}{2R_3^2}.$$

После размыкания ключа эта энергия выделится в виде тепла на резисторах R_1 и R_2 (через резистор R_3 ток течь не будет), т.е.

$$Q = W_0,$$

откуда

$$\varepsilon = R_3 \sqrt{\frac{2Q}{L}}.$$

Пусть в некоторый момент времени t токи через резисторы R_1 и R_2 равны I_1 и I_2 . Тогда количества теплоты, выделяющиеся в этих резисторах за небольшой интервал времени Δt , равны

$$\Delta Q_1 = I_1^2 R_1 \Delta t \text{ и } \Delta Q_2 = I_2^2 R_2 \Delta t.$$

Так как резисторы соединены параллельно, разности потенциалов на них равны:

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 = U ,$$

поэтому

$$\Delta Q_1 = \frac{U^2 \Delta t}{R_1} \text{ и } \Delta Q_2 = \frac{U^2 \Delta t}{R_2} .$$

Из этих уравнений следует, что

$$\Delta Q_1 R_1 = \Delta Q_2 R_2 .$$

В начальный момент времени $t = 0$ количества теплоты, выделившиеся на резисторах, равны нулю, откуда получаем

$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2 .$$

Вместе с тем,

$$Q_1 + Q_2 = Q .$$

Окончательно находим

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + R_1/R_2} \text{ и } Q_2 = \frac{Q}{1 + R_2/R_1} .$$

Задача 8*. В схеме, изображенной на рисунке 8, заданы ЭДС батареи \mathcal{E} , сопротивление резистора R , индуктивности сверхпроводящих катушек L_1 и L_2 . Сначала замыкают ключ K_1 , а через некоторое время, когда ток в цепи достигает значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Найдите установившиеся значения токов через катушки. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

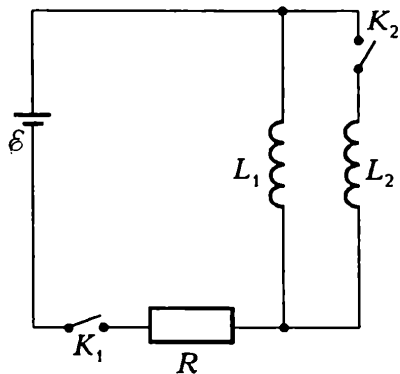


Рис. 8

После замыкания ключа K_1 начальный ток через катушку с индуктивностью L_1 равен нулю, а затем он постепенно возрастает до значения I_0 . Из закона Ома напряжение на катушке равно

$$U_{L_1} = \mathcal{E} - I_0 R .$$

После замыкания ключа K_2 напряжения на катушках одинаковы и равны

$$\frac{L_1 \Delta I_1}{\Delta t} = \frac{L_2 \Delta I_2}{\Delta t} ,$$

где I_1 и I_2 — токи, протекающие через катушки с индуктивностями L_1 и L_2 . Из последнего уравнения следует, что

$$L_1 \Delta I_1 = L_2 \Delta I_2, \text{ или } L_1 (I_1 - I_0) = L_2 I_2$$

(начальный ток через вторую катушку равен нулю). После того как токи через катушки установились, напряжения на них равны нулю. Тогда ток, протекающий через резистор R , равен

$$I = I_1 + I_2,$$

или, в соответствии с законом Ома,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = I_1 + I_2.$$

Решая полученную систему уравнений, находим установившиеся токи:

$$I_1 = \frac{L_2 \mathcal{E} + L_1 I_0 R}{(L_1 + L_2) R} \text{ и } I_2 = \frac{L_1 (\mathcal{E} - I_0 R)}{(L_1 + L_2) R}.$$

Упражнения

1. После замыкания ключа K в схеме, представленной на рисунке 9, заряд конденсатора уменьшился в полтора раза. Найдите внутреннее сопротивление батареи, если $R = 10 \text{ Ом}$.

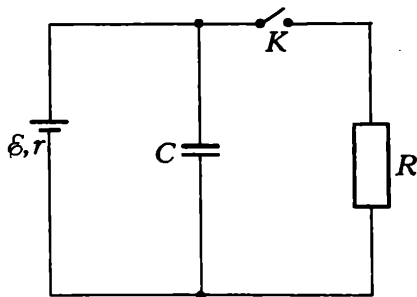


Рис.9

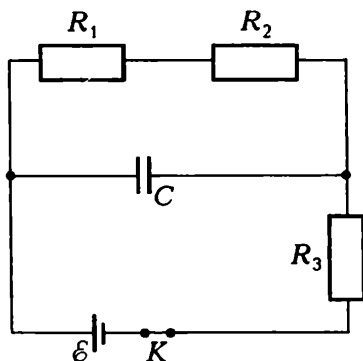


Рис.10

2. В схеме, представленной на рисунке 10, в начальный момент ключ K замкнут. Какое количество теплоты выделится во всей цепи после размыкания ключа? Сколько тепла выделится при этом в каждом из резисторов R_1 , R_2 и R_3 ?

3. Ключи K_1 и K_2 в схеме на рисунке 11 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя ключ K_2 разомкнутым. В результате на конденсаторе емкостью C устанавливается напряжение $U_1 = 15 \text{ В}$. Найдите ЭДС источника тока. Каким станет установившееся напряжение U_2 на конденсаторе емкостью C после замыкания ключа K_2 при замкнутом ключе K_1 ?

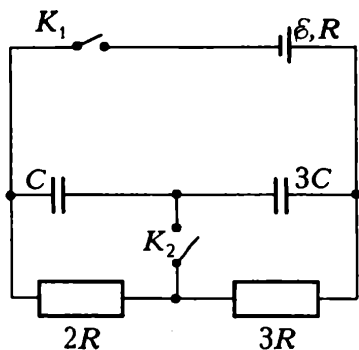


Рис. 11

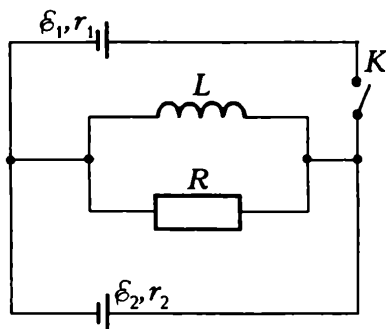


Рис. 12

4. В схеме на рисунке 12 в начальный момент ключ K разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течет установившийся ток. Определите величину и направление тока через резистор сразу после замыкания ключа. Параметры схемы таковы: ЭДС первой батареи $\varepsilon_1 = 10$ В, ее внутреннее сопротивление $r_1 = 5$ Ом, внутреннее сопротивление второй батареи $r_2 = 20$ Ом, сопротивление резистора $R = 4$ Ом.

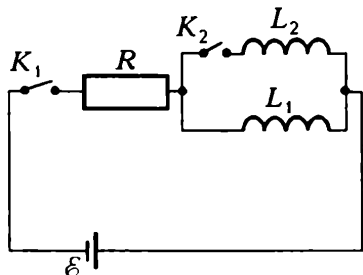


Рис. 13

5. В схеме, изображенной на рисунке 13, известны ЭДС батареи ε , сопротивление резистора R , индуктивности сверхпроводящих катушек L_1 и L_2 ($L_1 > L_2$). Сначала замыкают ключ K_1 , а через некоторое время – ключ K_2 . Известно, что установившиеся токи через катушки оказались одинаковыми. Определите величину тока, протекающего через резистор R в момент замыкания ключа K_2 . Внутренним сопротивлением батареи пренебечь.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В.Можаев

Под нелинейными элементами будем понимать элементы, у которых вольт-амперная характеристика (зависимость тока I от напряжения U) не является прямой, проходящей через начало координат ($I = 0$; $U = 0$). О таких элементах говорят, что для них не выполняется закон Ома. Но это не означает, что нужно забыть о нем. Можно считать, что закон Ома остается справедливым в том смысле, что каждой паре значений I и U такого элемента соответствует свое значение сопротивления ($R = U/I$), равное сопротивлению некоторого линейного элемента, вольт-амперная характеристика которого проходит через начало координат и через точку с координатами I ; U .

Чисто линейных элементов в природе не существует. Любой резистор в той или иной степени является нелинейным элементом: его сопротивление зависит от температуры, растущей по мере нагрева из-за джоулевого тепла, от магнитного поля, вызванного протеканием через него тока, и, наконец, от величины напряженности электрического поля в нем. В одних случаях этими нелинейностями можно пренебречь, а в других они настолько велики, что сопротивления элементов в рабочем режиме возрастают в несколько раз (например, у лампочки накаливания).

Во всех современных электротехнических и радиотехнических устройствах чрезвычайно широко используются специальные нелинейные элементы: диоды, тиристоры, транзисторы и т.п.

Перейдем к рассмотрению конкретных электрических цепей, в которых присутствуют нелинейные элементы.

Задача 1. На рисунке 1 приведена вольт-амперная характеристика лампочки от карманного фонаря (кривая 1), включенной в схему, изображенную на рисунке 2. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 4$ В, сопротивление резистора $r = 16$ Ом, внутренним

сопротивлением батареи пренебречь. Используя вольт-амперную характеристику лампочки, постройте график зависимости ее сопротивления от протекаемого тока. Определите ток

в цепи сразу после замыкания ключа (индуктивностью пренебречь). Найдите графически установившийся ток в лампочке.

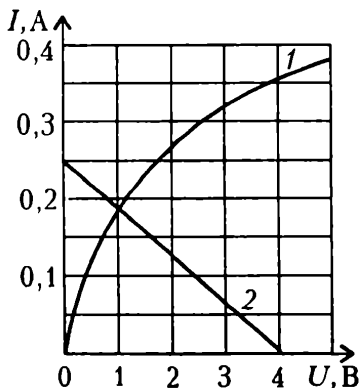


Рис. 1

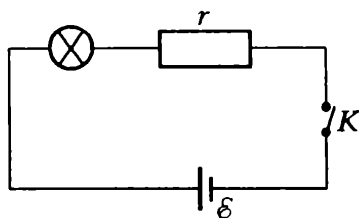


Рис. 2

Каждая точка на вольт-амперной характеристике лампочки соответствует стационарному состоянию: через лампочку течет постоянный ток I и на лампочке имеется постоянное напряжение

U . Используя закон Ома, можно

определить сопротивление лампочки:

$R = U/I$. Полученная зависимость R от I изображена на рисунке

3. А как определить сопротивление лампочки в отсутствие тока ($I = 0$)?

Оказывается, для этого достаточно

аккуратно снять вольт-амперную ха-

рактеристику при допустимо малых

значениях тока, вычислить соответ-

ствующие значения сопротивлений

лампочки и построить зависимость

$R(I)$ в увеличенном масштабе, а

затем через эти точки провести пря-

мую до пересечения с осью R . Точка пересечения и даст значение

сопротивления обесточенной лампочки. Такой способ называется

экстраполяцией.

Итак, сразу после замыкания ключа сопротивление лампочки

$R_0 = 4 \text{ Ом}$, следовательно, ток в лампочке

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R_0 + r} = 0,2 \text{ А}.$$

Затем начнется нагрев спирали лампочки, ее сопротивление

будет расти, а ток в цепи уменьшаться, и через некоторое время установится стационарный режим, при котором наступит тепловой баланс: мощность тепловых потерь будет равна выделяемой в лампочке мощности.

Обозначим в установившемся режиме напряжение на лампочке через U , а ток через I , тогда закон Ома для данной цепи будет иметь вид

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

Поскольку \mathcal{E} и r постоянные величины, зависимость $U(I)$ является уравнением прямой, которую можно провести по двум точкам: при $I = 0$ $U = \mathcal{E} = 4$ В, а при $U = 0$ $I = \mathcal{E} / r = 0,25$ А. Это – прямая 2 на рисунке 1. Любая точка на нашей прямой удовлетворяет закону Ома, который утверждает, что какой бы элемент не был включен в цепь (вместо лампочки), точка на плоскости I и U будет принадлежать данной прямой. Но различные элементы отличаются друг от друга своими вольт-амперными характеристиками. Поэтому установившееся значение тока в лампочке и напряжение на ней будут определяться точкой пересечения нашей прямой (2) и вольт-амперной характеристики лампочки (1):

$$I = 0,18 \text{ А}, \quad U = 1 \text{ В}.$$

Задача 2. В схеме, изображенной на рисунке 4, ЭДС батареи $\mathcal{E}_2 = 4$ В, сопротивление резистора $R = 50$ Ом. Имеется также нелинейный элемент (НЭ), в котором ток I связан с приложенным к нему напряжением U соотношением $I = 0,02U^2$ (I – в амперах, U – в вольтах). Схема сбалансирована, т.е. гальванометр показывает отсутствие тока. Определите мощность батареи с ЭДС \mathcal{E}_1 , пренебрегая ее внутренним сопротивлением.

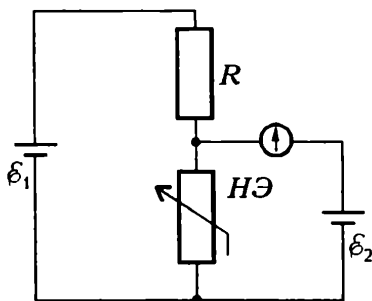


Рис. 4

Поскольку ток через гальванометр отсутствует, падение напряжения на нелинейном элементе равно ЭДС батареи \mathcal{E}_2 , а следовательно, через нелинейный элемент течет ток

$$I = 0,02U^2 = 0,02\mathcal{E}_2^2.$$

Этот же ток протекает через резистор, поэтому падение напряже-

ния на нем равно

$$U_R = IR = 0,02R\varepsilon_2^2.$$

ЭДС первой батареи равна

$$\varepsilon_1 = U + U_R = \varepsilon_2 + 0,02R\varepsilon_2^2.$$

Мощность этой батареи составляет

$$W = I\varepsilon_1 = 0,02\varepsilon_2^2(\varepsilon_2 + 0,02R\varepsilon_2^2) = 0,02\varepsilon_2^3(1 + 0,02R\varepsilon_2) = 6,4 \text{ Вт}.$$

Можно рассуждать иначе: для данного стационарного состояния будем считать наш нелинейный элемент обычным резистором, сопротивление которого $R_{\text{нэ}} = U/I = 1/(0,02\varepsilon_2)$. Тогда общее сопротивление цепи равно

$$R_{\text{о6}} = R + R_{\text{нэ}} = R + \frac{1}{0,02\varepsilon_2},$$

а выделяемая мощность составляет

$$W = I^2 R_{\text{о6}} = (0,02)^2 \varepsilon_2^4 \left(R + \frac{1}{0,02\varepsilon_2} \right) = 0,02\varepsilon_2^3(1 + 0,02R\varepsilon_2).$$

Задача 3. Для стабилизации напряжения применяют газоразрядную лампу стабиловольт, схема включения которого показана на рисунке 5. При изменении тока, протекающего через стабиловольт, от 5 до 15 мА напряжение на нем практически не меняется и остается равным 150В. Сопротивление нагрузки $R_{\text{н}} = 10 \text{ кОм}$. Определите сопротивление резистора R и входное напряжение, при которых напряжение на нагрузке остается постоянным при изменениях входного напряжения на $\pm 10\%$.

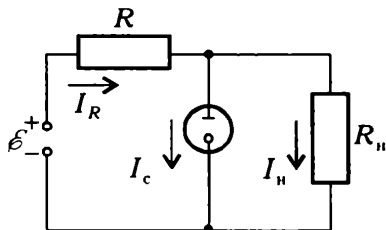


Рис.5

Пусть через стабиловольт течет ток I_c , величина которого изменяется в пределах $5 \text{ мА} < I_c < 15 \text{ мА}$. Обозначим напряжение на стабиловольте через U_c , тогда ток через сопротивление нагрузки составляет $I_n = U_c/R_n$. Ток через резистор R будет равен сумме двух токов:

$$I_R = I_c + I_n = I_c + \frac{U_c}{R_n}.$$

Закон Ома для замкнутой цепи позволяет записать

$$\varepsilon = I_R R + U_c = I_c R + U_c \frac{R}{R_n} + U_c.$$

При фиксированных значениях R и R_n изменение входного напряжения на $\pm \Delta \varepsilon$ приводит к изменению тока в стабиловольте на $\pm \Delta I_c = \pm \Delta \varepsilon / R$. Для стабилизации напряжения U_c на нагрузке допустимые отклонения тока составляют ± 5 мА, а в рабочей точке ток через стабиловольт равен $I_{c0} = 10$ мА. Допустимая вариация тока ΔI_c позволяет выразить рабочее сопротивление резистора R_0 через отношение $\Delta \varepsilon / \Delta I_c$. Пусть $\Delta \varepsilon / \varepsilon_0 = \alpha$ (здесь ε_0 — рабочее напряжение), тогда

$$R_0 = \frac{\alpha \varepsilon_0}{\Delta I_c}.$$

Это равенство является первым уравнением, связывающим два неизвестных параметра R_0 и ε_0 . Второе уравнение получается из закона Ома для замкнутой цепи:

$$\varepsilon_0 = \left(I_{c0} + \frac{U_c}{R_n} \right) R_0 + U_c.$$

Совместное решение этих двух уравнений позволяет определить R_0 и ε_0 :

$$R_0 = \frac{\alpha U_c}{\Delta I_c - \alpha I_{c0} - \alpha U_c / R_n} = 6 \text{ кОм},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{U_c}{1 - \alpha I_{c0} / \Delta I_c - \alpha U_c / (\Delta I_c R_n)} = 300 \text{ В}.$$

Задача 4. Диод имеет вольт-амперную характеристику, изображенную на рисунке 6. При напряжениях $U \geq U_0$ (в прямом направлении) диод открыт. Диод включен в цепь, изоб-

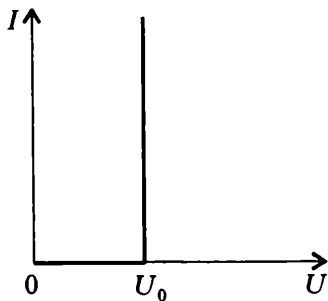


Рис. 6

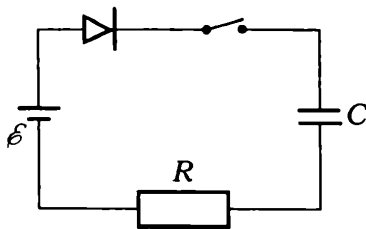


Рис. 7

раженную на рисунке 7. Конденсатор вначале не заряжен. Чему будет равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа?

Рассмотрим случай, когда ЭДС батареи $\varepsilon > U_0$. Пусть сразу после замыкания ключа ток в цепи равен I_0 . Закон Ома для

замкнутой цепи в этом случае будет иметь вид $\mathcal{E} = U_0 + I_0 R$, откуда

$$I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R}.$$

Появившийся ток в цепи начнет заряжать конденсатор, но по мере зарядки ток будет уменьшаться, и при напряжении на конденсаторе, равном $\mathcal{E} - U_0$, ток в цепи прекратится. Это будет новое стационарное состояние: ток $I = 0$, а заряд на конденсаторе

$$q = C(\mathcal{E} - U_0).$$

За время зарядки конденсатора батарея совершит работу

$$A = C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E}.$$

Часть этой работы пойдет на работу по преодолению разности потенциалов U_0 внутреннего электрического поля диода:

$$A_d = qU_0 = C(\mathcal{E} - U_0)U_0.$$

Вторая часть работы перейдет в энергию, запасенную конденсатором:

$$W_k = \frac{q^2}{2C} = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2}.$$

И наконец, оставшаяся часть работы выделится в виде тепла в резисторе:

$$\begin{aligned} Q &= A - A_d - W_k = C(\mathcal{E} - U_0)\mathcal{E} - C(\mathcal{E} - U_0)U_0 - \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2} = \\ &= C(\mathcal{E} - U_0)\left(\mathcal{E} - U_0 - \frac{\mathcal{E} - U_0}{2}\right) = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Задача 5. На рисунке 8 показана зависимость сопротивления некоторого нелинейного элемента от температуры. При нагревании по достижении температуры $t_1 = 100^\circ\text{C}$ мгновенно происходит скачок сопротивления от $R_1 = 50\text{ Ом}$ до $R_2 = 100\text{ Ом}$, а при охлаждении обратный скачок происходит при температуре $t_2 = 99^\circ\text{C}$ (гистерезис). Когда к такому элементу приложили постоянное напряжение $U_1 = 60\text{ В}$, его температура оказалась равной $t_3 = 80^\circ\text{C}$. Наконец, когда к элементу приложили постоянное

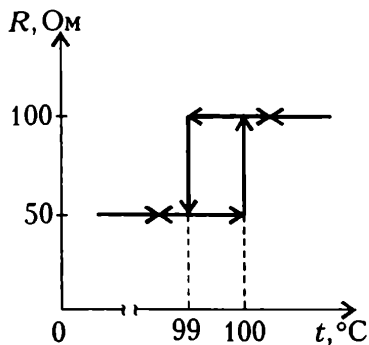


Рис. 8

напряжение $U_2 = 80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное и минимальное значения тока. Температура окружающей среды $t_0 = 20$ °С. Мощность теплоотвода с поверхности элемента пропорциональна разности температур элемента и окружающей среды. Теплоемкость элемента $C = 3$ Дж/К.

Состояние элемента при температуре t_3 позволяет определить неизвестный коэффициент пропорциональности α между отводимым теплом и разностью температур элемента и окружающей среды. Поскольку это состояние стационарно, выделяемое в элементе в единицу времени количество теплоты равно мощности теплоотвода:

$$\frac{U_1^2}{R_1} = \alpha (t_3 - t_0),$$

и

$$\alpha = \frac{U_1^2}{R_1 (t_3 - t_0)} = 1,2 \text{ Вт/К}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда к элементу приложено напряжение $U_2 = 80$ В. Найдем температуру t_4 элемента, которая установилась бы, если бы сопротивление элемента оставалось постоянным и равным R_1 :

$$\frac{U_2^2}{R_1} = \alpha (t_4 - t_0),$$

и

$$t_4 = t_0 + \frac{U_2^2}{\alpha R_1} = 126,6 \text{ °С}.$$

Эта температура выше 100 °С, а это означает, что при достижении 100 °С сопротивление элемента скачкообразно изменится и станет равным R_2 . Опять же из теплового баланса найдем температуру t_5 , которая установилась бы при сопротивлении элемента R_2 :

$$\frac{U_2^2}{R_2} = \alpha (t_5 - t_0),$$

и

$$t_5 = t_0 + \frac{U_2^2}{\alpha R_2} = 73,3 \text{ °С}.$$

Эта температура меньше 99 °С, следовательно, при ее достижении сопротивление элемента вернется к значению R_1 . Мы убедились, что в цепи действительно возникнут самопроизвольные колебания тока. Оценим период этих колебаний.

Пусть время нагрева элемента от температуры 99°C до 100°C равно τ_1 . Выделившееся за это время тепло частично пойдет на нагрев, а остальное уйдет в окружающую среду:

$$\frac{\tau_1 U_2^2}{R_1} = C\Delta t + \alpha(\bar{t} - t_0)\tau_1,$$

где $\Delta t = 1^\circ\text{C}$, а $\bar{t} = 99,5^\circ\text{C}$. Отсюда

$$\tau_1 = \frac{C\Delta t}{U_2^2/R_1 - \alpha(\bar{t} - t_0)} \approx 0,092 \text{ с}.$$

Аналогичный тепловой баланс при охлаждении элемента от 100°C до 99°C имеет вид

$$\frac{\tau_2 U_2^2}{R_2} + C\Delta t = \alpha(\bar{t} - t_0)\tau_2,$$

где τ_2 — время охлаждения. Отсюда

$$\tau_2 = \frac{C\Delta t}{\alpha(\bar{t} - t_0) - \frac{U_2^2}{R_2}} \approx 0,095 \text{ с}.$$

Период колебаний равен

$$T = \tau_1 + \tau_2 \approx 0,19 \text{ с}.$$

Максимальное значение тока при колебаниях составляет $I_{\max} = U_2/R_1 = 1,6 \text{ А}$, а минимальное значение равно $I_{\min} = U_2/R_2 = 0,8 \text{ А}$.

Упражнения

1. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U на трубке имеет вид, показанный на рисунке 9. Напряжение насыщения $U_{\text{н}} = 1 \text{ кВ}$, ток насыщения $I_{\text{н}} = 10 \text{ мкА}$. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^8 \text{ Ом}$ подключена к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 6 \text{ кВ}$. Какой ток установится в трубке и каково будет при этом напряжение на трубке? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

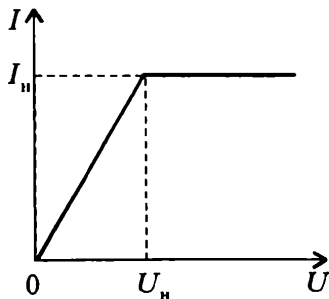


Рис. 9

2. Зажигание неоновой лампы осуществляется с помощью схемы, показанной на рисунке 10. После замыкания ключа K конденсатор C начнет заряжаться. Когда напряжение на лампе, равное напряжению на конденсаторе, достигнет некоторого значения, лампа загорится, после чего на-

пряжение на ней будет падать. Минимальное напряжение на лампе, при котором она еще горит, составляет $U = 80$ В, при этом через лампу течет ток $I = 1$ мА. При каких сопротивлениях резистора R лампа после зажигания будет гореть стационарно? ЭДС батареи $\mathcal{E} = 120$ В.

3. Имеется нелинейный элемент, в котором ток I связан с приложенным напряжением U соотношением $I = 0,01U^2$ (I — в амперах, U — в вольтах). Этот элемент последовательно с резистором, сопротивление которого $R = 100$ Ом, подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 15,75$ В. Найдите количество теплоты, выделяющееся на нелинейном элементе в единицу времени. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. В одно из плеч моста (рис.11) включено нелинейное сопротивление R_x , для которого зависимость тока I_x от приложенного напряжения U_x дается формулой $I_x = AU_x^2$, где A — некоторая константа. Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = R_3$, а $R_2 = 4$ Ом. При каком значении константы A мощность тепловых потерь на нелинейном сопротивлении составляет $P_x = 1$ Вт для сбалансированного моста (ток через гальванометр G равен нулю)? Балансировка достигается изменением тока в цепи с помощью источника ЭДС.

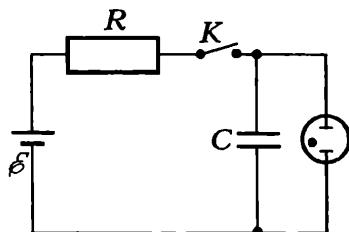


Рис.10

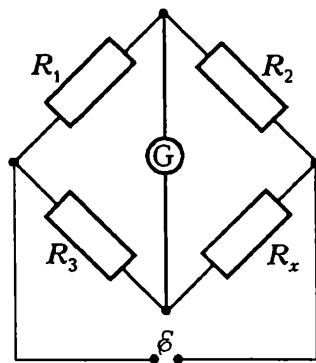


Рис.11

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В.Можаев

Наибольшие трудности для абитуриентов представляют задачи по электричеству, в которых присутствуют нелинейные элементы. К ним относятся такие элементы, у которых вольт-амперная характеристика – зависимость проходящего через них тока I от напряжения на них U – не является прямой, проходящей через начало координат.

Типичным примером нелинейного элемента, наиболее часто встречающегося в задачах, является идеальный диод. Когда к нему приложено запирающее напряжение любой величины, но большей нуля, говорят, что диод закрыт, и ток через него не идет. В этом случае сопротивление диода бесконечно велико – ситуация эквивалентна разрыву цепи. В прямом направлении сопротивление диода равно нулю, и он не оказывает никакого влияния на протекающий через него ток.

К нелинейным элементам относятся также резисторы, у которых сопротивление зависит от величины протекающего через них тока. Например, спираль лампочки накаливания: по мере увеличения тока, протекающего через спираль, растет ее температура, а вместе с ней растет и сопротивление. Нелинейными элементами являются и устройства, в которых происходит газовый разряд, например газонаполненные трубки, тиратроны и другие радиотехнические устройства.

А теперь перейдем к рассмотрению конкретных электрических цепей с нелинейными элементами.

Задача 1. На рисунке 1 показана вольт-амперная характеристика некоторого нелинейного элемента. До напряжения $U_0 = 100$ В ток через элемент отсутствует, а затем линейно растет с напряжением. При подключении такого элемента к батарее с постоянной ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением

Опубликовано в «Кванте» №4 за 2002 год (под названием «Нелинейные элементы в электрических цепях»).

$r = 25 \text{ кОм}$ через элемент течет ток $I_1 = 2 \text{ мА}$, а при подключении его к той же батарее через балластный резистор с сопротивлением $R = r$ течет ток $I_2 = 1 \text{ мА}$. Определите ЭДС батареи.

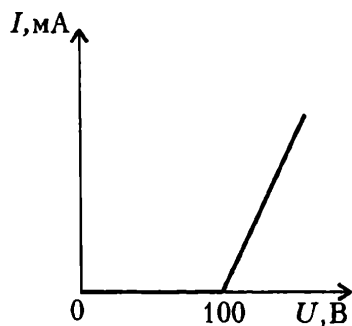


Рис. 1

Выразим в аналитическом виде приведенную на рисунке 1 зависимость тока I от напряжения U : при $0 < U < U_0$ $I = 0$, а при $U > U_0$ $I = \alpha(U - U_0)$, где $\alpha = \Delta I / \Delta U$ — постоянная величина для данной прямой. Запишем закон Ома для замкнутой цепи, когда нелинейный элемент подключен непосредственно к батарее:

$$\mathcal{E} = I_1 r + \frac{I_1}{\alpha} + U_0.$$

Аналогичное уравнение для второго подключения будет иметь вид

$$\mathcal{E} = 2I_2 r + \frac{I_2}{\alpha} + U_0.$$

Решая систему этих двух уравнений относительно \mathcal{E} , получим

$$\mathcal{E} = U_0 + \frac{I_1 I_2 r}{I_1 - I_2} = 150 \text{ В}.$$

Задача 2. В одно из плеч моста (рис. 2) включено нелинейное сопротивление X , для которого зависимость силы тока I от приложенного напряжения U_X задается формулой $I_X = \alpha U_X^3$, где $\alpha = 0,25 \text{ А/В}^3$. Найдите мощность, расходуемую в нелинейном проводнике в условиях, когда ток через гальванометр Γ отсутствует. Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$ и $R_3 = 1 \text{ Ом}$.

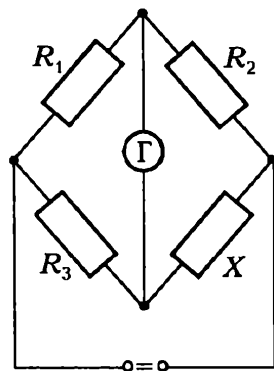


Рис. 2

Обозначим ЭДС источника, подключенного к мосту, через \mathcal{E} . Очевидно, что падение напряжения U_2 на резисторе сопротивлением R_2 равно

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2}.$$

Поскольку мост сбалансирован (ток через гальванометр не

течет), напряжение на нелинейном резисторе X равно падению напряжения на сопротивлении R_2 :

$$U_X = U_2 = \frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2},$$

а падение напряжения на сопротивлении R_3 равно падению напряжения на сопротивлении R_1 :

$$U_3 = U_1 = \frac{\varepsilon R_1}{R_1 + R_2}.$$

Ток I_X , текущий через нижнюю ветвь моста, равен

$$I_X = \frac{U_3}{R_3} = \frac{\varepsilon R_1}{(R_1 + R_2) R_3}.$$

Используем связь между током I_X и напряжением U_X на нелинейном сопротивлении:

$$\frac{\varepsilon R_1}{(R_1 + R_2) R_3} = \alpha \frac{\varepsilon^3 R_2^3}{(R_1 + R_2)^3}$$

и найдем ЭДС источника:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{R_1 (R_1 + R_2)^2}{\alpha R_2^3 R_3}}.$$

Мощность, выделяемая в нелинейном проводнике, равна

$$P_X = I_X U_X = \alpha U_X^4 = \alpha \left(\frac{\varepsilon R_2}{R_1 + R_2} \right)^4.$$

Подставляя в это соотношение выражение для ε , окончательно получим

$$P_X = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_1}{R_2 R_3} \right)^2 = 1 \text{ Вт}.$$

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке 3, конденсатор емкостью $C = 100 \text{ мкФ}$, заряженный до напряжения $U_0 = 5 \text{ В}$, подключен через диод D к резистору сопротивлением $R = 100 \text{ Ом}$. Вольт-амперная характеристика диода изображена на рисунке 4. В начальный момент ключ K разомкнут. Ключ замыкают. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи равен 10 мА ? Какое количе-

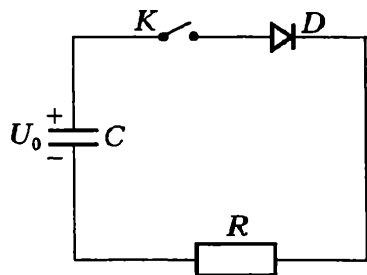


Рис. 3

ство теплоты выделится на диоде после замыкания ключа?

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается неизменным по величине и по знаку. Предположим, что начальный ток I_0 в цепи больше 10 мА. Закон Ома для нашей замкнутой цепи в этот момент имеет вид

$$U_0 = U_n + I_0 R,$$

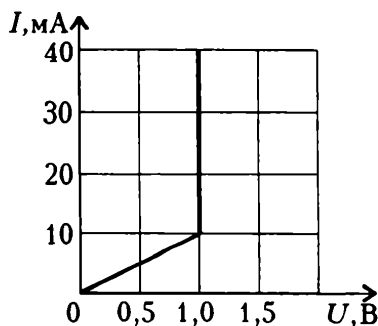


Рис. 4

где U_n – пороговое напряжение диода ($U_n = 1$ В). Подставляя числовые значения, получим

$$I_0 = \frac{U_0 - U_n}{R} = 40 \text{ мА}.$$

Поскольку полученное значение тока больше 10 мА, наше предположение верно.

После замыкания ключа конденсатор будет разряжаться, а ток в цепи будет уменьшаться. Когда ток станет равным $I_1 = 10$ мА, из закона Ома найдем напряжение U_C на конденсаторе:

$$U_C = U_n + I_1 R = 2 \text{ В}.$$

От момента замыкания ключа и до полной разрядки конденсатора диод будет находиться в двух режимах: когда ток в цепи изменяется от $I_0 = 40$ мА до $I_1 = 10$ мА и когда ток изменяется от $I_1 = 10$ мА до нуля. В первом режиме напряжение на диоде будет оставаться постоянным и равным $U_n = 1$ В, а напряжение на конденсаторе будет падать от $U_0 = 5$ В до $U_C = 2$ В. За это время через диод пройдет заряд

$$q = C(U_0 - U_C) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл},$$

и выделившееся на диоде количество теплоты будет равно

$$Q_1 = qU_n = 3 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Во втором режиме диод ведет себя как обычный резистор с сопротивлением $R_d = U_n / I_1 = 100$ Ом. После окончания первого режима напряжение на конденсаторе равно $U_C = 2$ В, а оставшаяся энергия электрического поля конденсатора составляет

$$W = \frac{CU_C^2}{2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Поскольку сопротивление диода R_d равно сопротивлению резистора R , эта энергия разделится поровну между диодом и резистором. Следовательно, на диоде во втором режиме выделится количество теплоты

$$Q_2 = \frac{W}{2} = 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Тогда полное количество теплоты, которое выделится на диоде после замыкания ключа, будет равно

$$Q_d = Q_1 + Q_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Задача 4. При каких сопротивлениях резистора R в цепи на рисунке 5 в случае размыкания рубильника K может возникнуть

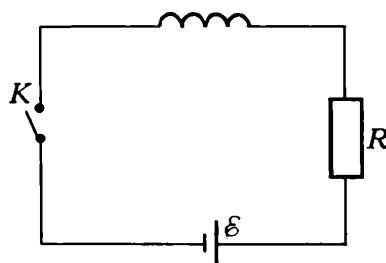


Рис. 5

дуговой разряд? Известно, что напряжение U на участке дугового разряда связано с током I в цепи соотношением $U = a + b/I$, где a и b – константы, причем $a = 10 \text{ В}$ и $b = 100 \text{ В} \cdot \text{А}$. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 100 \text{ В}$. Считать, что все сопротивление цепи сосредоточено в резисторе. Какой ток установится в цепи, если $R = 8 \text{ Ом}$?

Сначала несколько слов о включенной в цепь катушке, величина индуктивности которой не задана. Сразу отметим, что дуговой разряд потому и возникает при разрыве цепи с током, что в цепи имеется достаточно большая индуктивность. В момент разрыва цепи индуктивность, благодаря своей инерционности, стремится сохранить в цепи ток, а это приводит к появлению достаточно большой разности потенциалов на воздушном зазоре рубильника, что и вызывает появление дугового разряда. В дальнейшем мы будем рассматривать стационарные режимы, когда при наличии дугового разряда в цепи течет постоянный ток. В этом случае индуктивность не влияет на величину тока в цепи.

Рассмотрим условие возникновения дугового разряда в зависимости от величины сопротивления резистора R . Качественно можно сказать, что дуга будет поддерживаться при малых сопротивлениях резистора, поскольку при больших R на резисторе будет выделяться большое количество теплоты и батарея будет не в состоянии (по энергетическим соображениям) поддерживать дуговой разряд.

Пусть в цепи течет ток I , а напряжение на разряде равно U .

Закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

$$U = \xi - IR.$$

В координатах U и I это уравнение прямой, которую обычно называют нагрузочной прямой. С другой стороны, вольт-амперная характеристика дугового разряда имеет вид гиперболы, описываемой уравнением

$$U = a + \frac{b}{I}.$$

Очевидно, что дуговой разряд возникнет при размыкании рубильника в том случае, если нагрузочная прямая будет пересекаться с вольт-амперной характеристикой разряда. Максимальное значение сопротивления R , при котором дуговой разряд еще может возникнуть, соответствует такому случаю, когда нагрузочная прямая касается вольт-амперной характеристики разряда. Такая ситуация изображена на рисунке 6 – нагрузочная прямая 1 касается вольт-амперной характеристики разряда 2. Для этой нагрузочной прямой при $U = 0$ $I = 5$ А, следовательно, сопротивление резистора равно $R = \xi/I = 20$ Ом. Таким образом, мы получили, что при сопротивлениях $R \leq 20$ Ом возникает дуговой разряд.

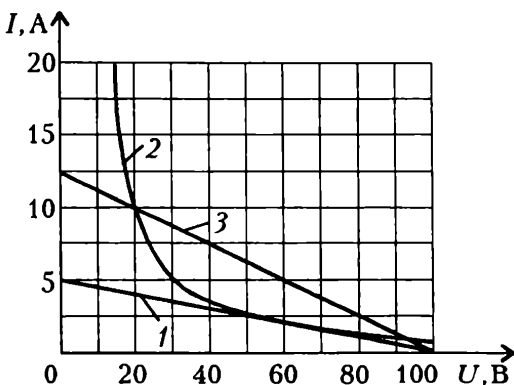


Рис. 6

Разобранный графический способ решения обладает определенной погрешностью, поэтому для более точного определения верхней границы сопротивлений проведем аналитический расчет. Полагая, что дуговой разряд возник, запишем закон Ома для нашей цепи:

$$\xi = IR + a + \frac{b}{I}.$$

После приведения к общему знаменателю и подстановки числовых значений получим для тока квадратное уравнение

$$RI^2 - 90I + b = 0,$$

откуда найдем

$$I = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 100R}}{R}.$$

Поскольку нас интересует случай, когда мы имеем единственное значение тока в точке касания нагрузочной прямой и вольт-амперной характеристики разряда, то в приведенном решении подкоренное выражение должно быть равно нулю. Отсюда получаем $R = 20,25$ Ом. Значит, дуговой разряд в случае размыкания рубильника может возникнуть при сопротивлениях

$$0 \leq R \leq 20,25 \text{ Ом}.$$

Теперь разберем случай, когда сопротивление резистора равно 8 Ом. Нагрузочная прямая для этого случая изображена на рисунке 6 в виде прямой 3. Как видно из рисунка, прямая 3 пересекает вольт-амперную характеристику разряда в двух точках, т.е. мы имеем два решения. Для нахождения этих двух значений тока запишем закон Ома в виде

$$\mathcal{E} = 8I + a + \frac{b}{I},$$

или, после приведения к общему знаменателю и подстановки числовых значений,

$$8I^2 - 90I + 100 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $I_1 = 1,25$ А и $I_2 = 10$ А. Дуговой разряд при токе $I_1 = 1,25$ А ($U = 90$ В) оказывается неустойчивым. Следовательно, в цепи установится ток $I_2 = 10$ А.

Задача 5. В схеме, представленной на рисунке 7, ключ K замыкают на время τ , а затем размыкают. В момент размыкания ключа ток в катушке равен I_0 . Через какое время после размыкания ключа ток в катушке достигнет максимального значения, равного $2I_0$? Постройте график зависимости тока в катушке от времени, начиная с момента замыкания ключа. Омическим сопротивлением в данной схеме пренебречь.

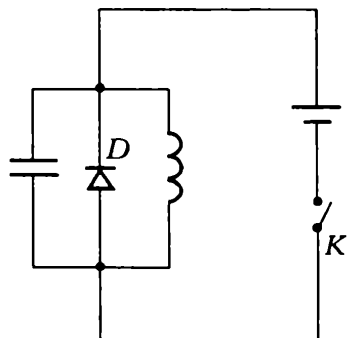


Рис. 7

Сразу после замыкания ключа конденсатор зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи \mathcal{E} , а в катушке ток будет нарастать по линейному закону

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} t,$$

где L – индуктивность катушки. В момент размыкания ключа мы будем иметь колебательный контур с такими начальными условиями : напряжение на конденсаторе $U_C(0) = \varepsilon$, ток в катушке $I_L(0) = I(\tau) = \varepsilon\tau/L = I_0$. Отсчет времени ($t = 0$) начинается с момента размыкания ключа, диод при этом закрыт. Уравнение для тока в данном колебательном контуре будет иметь вид

$$I_L'' + \omega_0^2 I_L = 0,$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – частота собственных колебаний контура, C – емкость конденсатора. Решение уравнения ищем в виде

$$I_L = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где A и B – константы. Из условия, что при $t = 0$ $I_L = I_0$, получаем $A = I_0$. Для нахождения константы B запишем уравнение контура в другом виде:

$$LI_L' = U_C.$$

Подставив в это уравнение наше решение и положив $t = 0$, получим $B = \varepsilon/(L\omega_0)$. Для выражения B через заданные параметры запишем закон сохранения энергии в контуре для $t = 0$ и $t = t_1$, когда ток достигает максимального значения $2I_0$:

$$\frac{C\varepsilon^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{4LI_0^2}{2}, \text{ и } B = \frac{\varepsilon}{L\omega_0} = \sqrt{3}I_0.$$

Следовательно, зависимость тока в контуре от времени будет иметь вид

$$I_L(t) = I_0 \cos \omega_0 t + \sqrt{3}I_0 \sin \omega_0 t.$$

При достижении максимального значения тока $I_L'(t_1) = 0$. Из этого условия следует

$$\operatorname{tg} \omega_0 t_1 = \sqrt{3}, \quad \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{3}, \quad t_1 = \frac{\pi}{3\omega_0} = \frac{\pi\tau}{\sqrt{3}}.$$

В момент t_1 , когда ток достигнет максимального значения, диод откроется, и ток начнет циркулировать по контуру катушка – диод с постоянным значением $I_L = 2I_0$.

Зависимость тока в катушке I_L от времени T (рис.8) разбивается на три участка: 1 – отрезок времени между замыканием и размыканием ключа, 2 – участок колебательного процесса ($0 \leq t \leq$

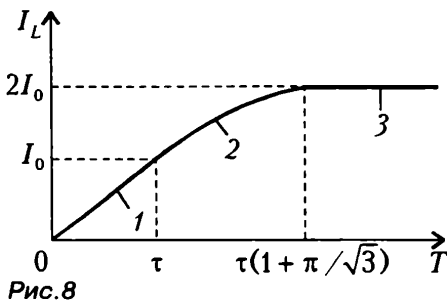


Рис.8

$\leq t_1$), 3 – циркуляционный процесс ($t \geq t_1$), при этом время T отсчитывается от момента замыкания ключа.

Упражнения

1. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U на трубке имеет вид,

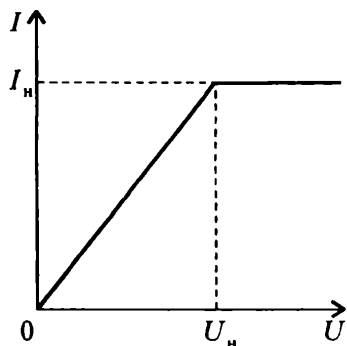


Рис. 9

изображенный на рисунке 9. При некотором напряжении на трубке U_n ток через трубку достигает насыщения, при этом ток насыщения равен $I_n = 10$ мкА. Если трубку, последовательно соединенную с некоторым балластным резистором, подключить к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^3$ В, то через трубку потечет ток $I_0 = 5$ мкА. Как надо изменить сопротивление балластного резистора, чтобы достичь тока насыщения?

2. В одно из плеч моста (см. рис. 2) включено нелинейное сопротивление X , для которого зависимость силы тока I_X от приложенного напряжения U_X задается формулой $I_X = aU_X^2$. Сопротивления остальных плеч моста таковы: $R_1 = R_3 = 2$ Ом, $R_2 = 4$ Ом. При каком значении константы a мощность, расходуемая в нелинейном сопротивлении, равна $P_X = 1$ Вт для сбалансированного моста (ток через гальванометр Γ равен нулю)?

3. В схеме, изображенной на рисунке 10, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ не заряжен. Вольт-амперная характеристика диода D показана на рисунке 11. ЭДС батареи

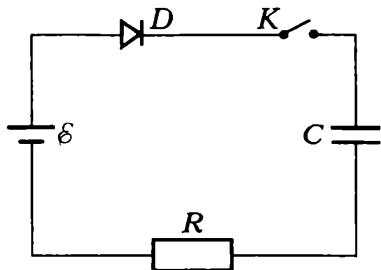


Рис. 10

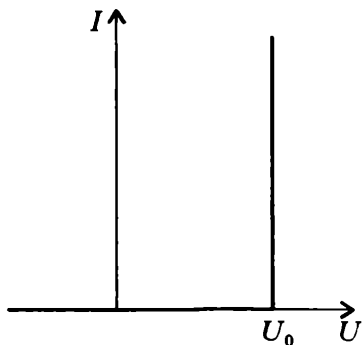


Рис. 11

$\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, сопротивление резистора $R = 1$ кОм. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа? Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Как известно, основным фундаментальным законом в электростатике является закон Кулона – закон электрического взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой электростатического поля служит вектор напряженности электрического поля \vec{E} . (Заметим, что из закона Кулона вытекает основная теорема электростатики – теорема Гаусса, которая устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность с величиной заряда, находящегося внутри этой поверхности.)

Если проводить параллель между электростатикой и магнитостатикой, то можно сказать, что в основе магнитостатики лежит закон Ампера – закон механического взаимодействия двух токов, текущих в малых отрезках проводников, находящихся на некотором расстоянии друг от друга. Силовой характеристикой магнитного поля является вектор индукции магнитного поля \vec{B} .

Магнитное поле, подобно электрическому, является объективной реальностью и в то же время служит средством описания взаимодействия движущихся заряженных частиц. Если мы знаем величину индукции магнитного поля в некоторой точке пространства в данный момент времени, то мы знаем величину и направление силы, которая подействовала бы на движущуюся заряженную частицу в этой пространственно-временной точке.

Для определения индукции магнитного поля, создаваемого электрическим током, можно использовать закон Био–Савара. Согласно этому закону, малый отрезок проводника

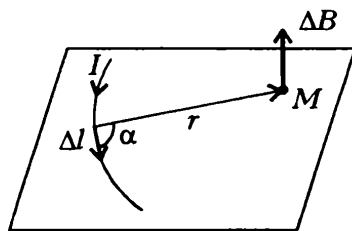


Рис. 1

Опубликовано в «Кванте» №4 за 2001 год.

Δl (рис.1), по которому течет ток I (отрезку приписывается направление тока), создает в точке M , находящейся на расстоянии r от Δl ($\Delta l \ll r$), магнитное поле с индукцией, равной

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l \sin \alpha}{r^2}.$$

Здесь α – угол между $\Delta \vec{l}$ и радиусом-вектором \vec{r} , проведенным от отрезка к точке M , $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Направление вектора $\Delta \vec{B}$ определяется правилом буравчика: если буравчик ввинчивать по направлению тока, то направление вращения рукоятки буравчика совпадает с направлением индукции магнитного поля. Полная индукция \vec{B} магнитного поля, создаваемая в точке M всем проводником с током, равна векторной сумме индукций магнитного поля от всех участков проводника.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Найдем индукцию магнитного поля протяженного прямого провода с током I на расстоянии a от провода. Длину провода будем считать много большей a .

Для определения индукции магнитного поля вблизи провода воспользуемся законом Био–Савара. На рисунке 2 бесконечный прямой провод с током I расположен вдоль оси z . На расстоянии z от начала координат выберем небольшой отрезок провода длиной dz и запишем выражение для величины индукции магнитного поля в точке A , создаваемого элементом тока dz :

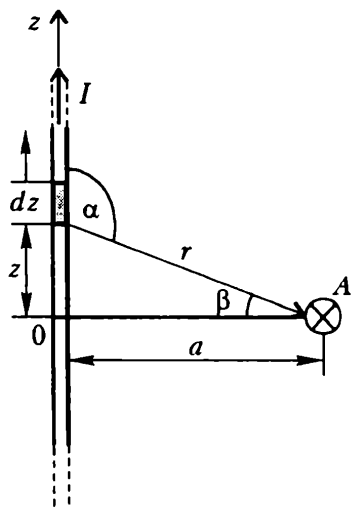


Рис.2

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos \beta \cdot dz}{r^2}.$$

Сделаем замену переменных: перейдем от z к β . Поскольку $z/a = \tan \beta$, то продифференцировав обе части этого равенства, получим $dz = a d\beta / \cos^2 \beta$. После замены переменной найдем индукцию в точке A , просуммировав по всему проводу:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 I \cos \beta \cdot a d\beta}{4\pi r^2 \cos^2 \beta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (*)$$

Вектор индукции \vec{B} магнитного поля в точке A направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Линии магнитной индукции представляют собой семейство окружностей, симметричное относительно провода.

Полученный результат остается справедливым для бесконечно длинного провода и любого конечного расстояния a , а также для провода конечной длины, но при условии, что расстояние a много меньше длины провода. Если проводник с током не является прямолинейным, то формула для B остается справедливой при расстояниях a , много меньших радиуса кривизны проводника.

А теперь разберем несколько конкретных задач.

Задача 1. Два длинных параллельных медных провода диаметром $d = 2$ мм расположены на расстоянии $L = 5$ см друг от друга. В обоих проводах текут одинаковые токи со средней скоростью движения электронов проводимости $v = 0,1$ см/с. Атомная масса меди $A = 63,6$ г/моль, плотность меди $\rho = 8,9$ г/см³, постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹. Можно считать что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

Определите силу Ампера, действующую на элемент провода с током длиной $l = 1$ м. Вычислите электростатическую силу, которая действовала бы на электроны проводимости в проводе длиной $l = 1$ м со стороны электронов проводимости другого провода без учета положительных зарядов, и сравните ее с силой Ампера.

Указание: напряженность электрического поля вблизи заряженной бесконечной нити равна $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, где q – заряд единичной длины нити, r – расстояние до нити.

Сначала вычислим концентрацию электронов проводимости в меди:

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = 0,84 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$$

и силу тока в проводах:

$$I = \frac{\pi d^2}{4} n e v = 42,2 \text{ А}$$

(здесь e – заряд электрона). Теперь, воспользовавшись формулой (*), найдем величину индукции магнитного поля, создаваемого током одного из проводов в месте расположения второго:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

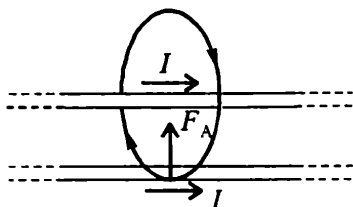


Рис.3

На рисунке 3 изображена одна из линий индукции магнитного поля провода. Сила Ампера, действующая на элемент провода, равна

$$F_A = BIl = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi L} = 7,13 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

Для вычисления электростатической силы найдем заряд q электронов, содержащихся в куске провода единичной длины:

$$q = \frac{\pi d^2}{4} ne = 4,22 \cdot 10^4 \text{ Кл}.$$

Напряженность электрического поля, создаваемого электронами, расположенными вдоль провода, на расстоянии L от провода равна

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ В/м},$$

а электростатическая сила отталкивания, действующая на элемент второго провода единичной длины, заряженный электронами проводимости, составляет

$$F_3 = qE = 6,3 \cdot 10^{20} \text{ Н}.$$

Отношение силы магнитного взаимодействия к электростатической силе в пределах погрешности расчета дает

$$\frac{F_A}{F_3} = 1,1 \cdot 10^{-23}.$$

Задача 2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки. Масса рамки m , величина индукции B .

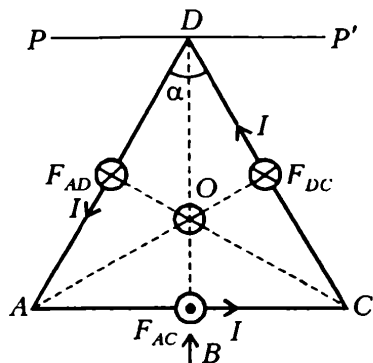


Рис.4

Какой ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

Пусть по контуру против часовой стрелки течет ток I (рис.4). Очевидно, что на все три стороны

треугольника будут действовать силы Ампера, точками приложения которых являются середины сторон AC , CD и DA . В точке пересечения биссектрис (точка O) приложена сила тяжести, равная mg и направленная от нас перпендикулярно плоскости рисунка.

Найдем результирующий момент сил Ампера, действующих на три стороны треугольника, относительно оси PP' . Сила \vec{F}_{AC} равна $F_{AC} = IaB$ и направлена на нас, силы \vec{F}_{AD} и \vec{F}_{DC} равны $F_{AD} = F_{DC} = IaB \sin(\alpha/2) = IaB/2$ (поскольку $\alpha = 60^\circ$) и направлены от нас. Суммарный момент всех трех сил Ампера относительно оси PP' равен

$$M_A = IaB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a - \frac{IaB}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B.$$

Видно, что с увеличением тока момент сил Ампера увеличивается и в некоторый момент окажется в состоянии приподнять рамку относительно вершины D , поскольку препятствует этому постоянный момент силы тяжести

$$M_g = mg \cdot \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Рамка начнет приподниматься относительно вершины D , когда

$M_A \geq M_g$, или

$$\frac{\sqrt{3}}{4} Ia^2 B \geq mg \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$I \geq \frac{4mg}{3aB}.$$

Задача 3. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая тонкая жесткая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (рис.5). Масса рамки m , индукция магнитного поля у боковых сторон рамки 1 и 2 равна B ,

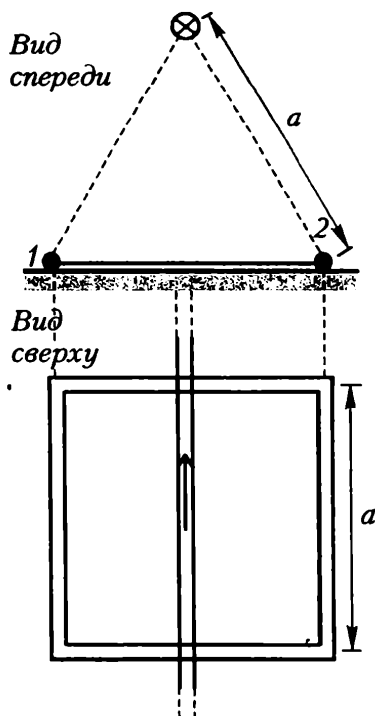


Рис.5

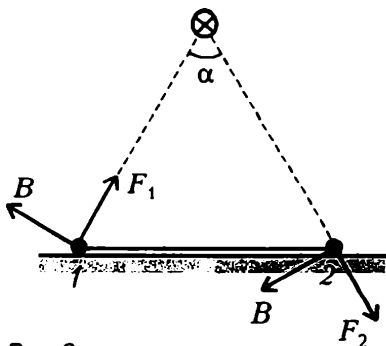


Рис. 6

действовать силы Ампера \vec{F}_1 и \vec{F}_2 (рис. 6), причем

$$F_1 = F_2 = IaB.$$

В общем случае при увеличении тока через рамку возможны два варианта: либо рамка начнет приподниматься относительно стороны 2, либо она начнет скользить без отрыва от стола.

Предположим, что коэффициент трения скольжения таков, что рамка может приподниматься раньше, чем наступит скольжение. Запишем условие подъема стороны 1:

$$F_1 a \frac{\sqrt{3}}{2} - mg \frac{a}{2} \geq 0.$$

Отсюда следует, что ток, при котором происходит подъем, подчиняется условию

$$I_n \geq \frac{mg}{\sqrt{3}aB}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда раньше наступит скольжение рамки. Результирующая сила вдоль горизонтальной оси равна

$$F_2 \cos \alpha + F_1 \cos \alpha = IaB \cdot 2 \cos \alpha.$$

Реакция опоры равна весу рамки mg . Запишем условие скольжения:

$$2IaB \cos \alpha \geq \mu mg.$$

Отсюда для тока, соответствующего скольжению, получаем

$$I_{ск} \geq \frac{\mu mg}{aB} = \frac{mg}{3aB}.$$

Сравнивая токи I_n и $I_{ск}$, мы убеждаемся, что скольжение рамки наступит раньше при токах

$$I_{ск} \geq \frac{\mu mg}{aB}.$$

коэффициент трения скольжения рамки о поверхность стола μ ($\mu \leq 1/3$).

Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?

Пусть по квадратной рамке течет ток I по часовой стрелке, если смотреть сверху. На боковые стороны рамки будут дей-

Задача 4. В сверхпроводящем тонком кольце радиусом R , индуктивностью L и массой m течет наведенный ток I_0 . Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} . В устойчивом положении равновесия угол между вектором \vec{B} и его проекцией на плоскость кольца равен α .

Определите зависимость угла α от начального тока I_0 в кольце и постройте график $\alpha = \alpha(I_0)$. Найдите также зависимость установившегося тска $I_{уст}$ в кольце от величины начального тока I_0 и постройте график $I_{уст} = I_{уст}(I_0)$.

Если кольцо находится в однородном магнитном поле \vec{B} и в нем течет ток $I_{уст}$, то единственным положением устойчивого равновесия является положение, когда $\alpha = \pi/2$ и вектор индукции собственного магнитного поля кольца в его центре направлен вдоль вектора \vec{B} . Тогда, согласно закону сохранения магнитного потока через сверхпроводящее кольцо,

$$LI_0 = LI_{уст} + B\pi R^2.$$

Отсюда

$$I_{уст} = I_0 - \frac{B\pi R^2}{L}.$$

Из условия $I_{уст} > 0$ следует, что $I_0 > \pi R^2 B/L$, при этом $\alpha = \pi/2$. Если $I_0 < \pi R^2 B/L$, то устойчивого положения с током $I_{уст} \neq 0$ нет, поэтому устойчивое положение равновесия в этом случае будет при $I_{уст} = 0$ и $\alpha \neq \pi/2$. По закону сохранения магнитного потока,

$$LI_0 = \pi R^2 B \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin \frac{LI_0}{\pi R^2 B}.$$

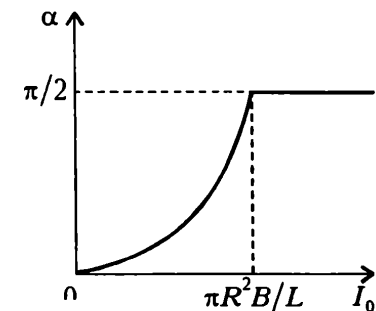


Рис.7

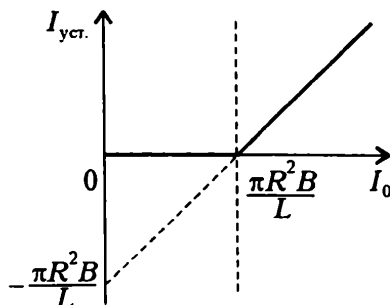


Рис.8

Графики зависимостей $\alpha(I_0)$ и $I_{\text{уст}}(I_0)$ приведены на рисунках 7 и 8.

Задача 5*. По оси длинного полого диэлектрического ($\epsilon = 3$) цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м (рис. 9). Цилиндр

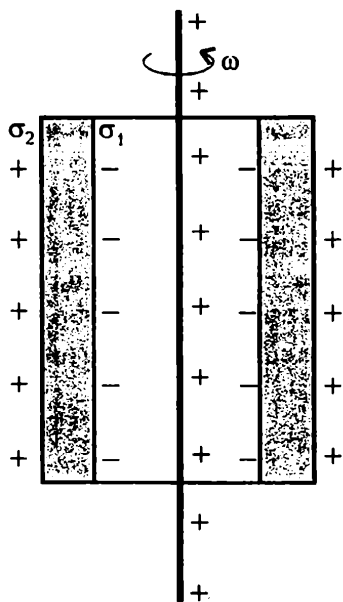


Рис. 9

вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Определите индукцию магнитного поля внутри диэлектрика, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра. Центробежными эффектами пренебречь.

Указание: используйте формулу для индукции в соленоиде: $B = \mu_0 NI/l$, где N – число витков соленоида, l – длина соленоида, I – ток в соленоиде.

Под действием электрического поля зарядов нити происходит поляризация диэлектрического цилиндра: на внутренней поверхности цилиндра появляются отрицательные поляризационные заряды с поверхностной плотностью σ_1 , а на внешней стороне цилиндра – положительные заряды с плотностью σ_2 . Напряженность электрического поля вблизи заряженной нити в вакууме на расстоянии r , много меньшем длины нити, равна (см. указание к задаче 1)

$$E_0 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Очевидно, что внутри диэлектрика напряженность электрического поля будет в ϵ раз меньше:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \epsilon r}.$$

С другой стороны, мы можем использовать предыдущую формулу и для нахождения поля в диэлектрике:

$$E = \frac{q - \sigma_1 \cdot 2\pi R_1}{2\pi\epsilon_0 r},$$

где R_1 – радиус внутренней поверхности цилиндра. Приравни-

вая последние два выражения, получим

$$\sigma_1 = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_1}.$$

Поскольку диэлектрик электронейтрален, то

$$2\pi R_2\sigma_2 - 2\pi R_1\sigma_1 = 0,$$

где R_2 – радиус внешней поверхности цилиндра. Отсюда

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{R_1}{R_2} = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon R_2}.$$

Вращение поляризационных зарядов эквивалентно току в соленоиде. При расстояниях $r_n \leq r \leq R_1$ (здесь r_n – радиус заряженной нити) суммарное магнитное поле двух эквивалентных соленоидов с радиусами R_1 и R_2 равно нулю из-за электронейтральности диэлектрика.

Рассмотрим теперь пространство внутри диэлектрика при $R_1 < r < R_2$. Индукция магнитного поля, создаваемая вращающимися зарядами плотностью σ_1 , очевидно, равна нулю, а вращающиеся заряды плотностью σ_2 создают однородное магнитное поле. В формулу для индукции в соленоиде входит величина NI/l – это величина поверхностного тока на единицу длины соленоида. Эквивалентная величина для вращающихся поляризационных зарядов плотностью σ_2 равна

$$\frac{\omega}{2\pi} \cdot 2\pi R_2\sigma_2 = \omega R_2\sigma_2 = \frac{\omega(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon}.$$

Окончательное выражение для индукции будет таким:

$$B = \frac{\mu_0\omega(\epsilon - 1)q}{2\pi\epsilon} = 1,33 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}.$$

Индукция внутри диэлектрика параллельна нити и направлена вертикально вверх.

Во внешнем пространстве индукция магнитного поля равна нулю.

Задача 6*. На двух горизонтальных параллельных и проводящих рельсах, расстояние между которыми l , расположены два проводящих и отстоящих друг от друга на расстояние b стержня, каждый массой m . Омическое сопротивление каждого стержня R , а омическим сопротивлением рельсов можно пренебречь.

На каком расстоянии друг от друга окажутся стержни после включения внешнего однородного магнитного поля с индукцией \vec{B} ? Вектор индукции перпендикулярен плоскости стержней и рельсов.

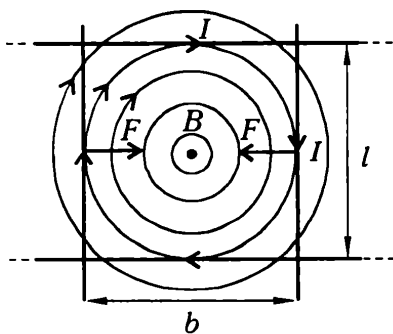


Рис. 10

Сначала обсудим процесс установления магнитного поля, который осуществляется быстро, но за конечное время. Рассмотрим произвольный момент времени, когда еще происходит увеличение индукции магнитного поля. Нарастающее магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля. Если магнитное поле симметрично относительно центра прямоугольника, образованного рельсами и стержнями, то силовые линии вихревого электрического поля будут иметь вид концентрических окружностей (рис. 10). Работа по перемещению единичного положительного заряда в вихревом поле вдоль замкнутого контура равна ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -lb \frac{dB}{dt}.$$

В нашем контуре будет течь ток

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{2R} = \frac{lb}{2R} \frac{dB}{dt}.$$

Сила, действующая на каждый из стержней, равна

$$F = IlB = \frac{l^2 b}{2R} B \frac{dB}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt}.$$

Уравнение движения каждого стержня имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{l^2 b}{4R} \frac{d(B^2)}{dt},$$

или

$$dv = \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Мы нашли связь бесконечно малого изменения скорости стержня с бесконечно малым приращением квадрата индукции поля. Для полных приращений получим

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{B_0} \frac{l^2 b}{4mR} d(B^2).$$

Отсюда найдем конечную скорость стержней:

$$v_0 = \frac{l^2 b B_0^2}{4mR}.$$

Теперь рассмотрим второй этап, когда мы имеем стационарное однородное магнитное поле с индукцией B_0 . В начальный момент времени два стержня находятся на расстоянии b друг от друга и имеют начальные скорости, равные v_0 и направленные навстречу друг другу. На рисунке 11 изображены стержни в произвольный момент времени, их координаты равны x_1 и x_2 . Пусть в этот момент в контуре течет ток I по часовой стрелке. Запишем уравнения движения стержней:

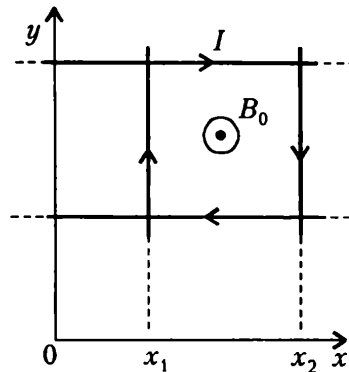


Рис. 11

$$mx_1'' = lIB_0,$$

$$mx_2'' = -lIB_0.$$

Эквивалентная электрическая схема контура изображена на рисунке 12, где $\mathcal{E}_{i1} = -x_1' l B_0$ – ЭДС индукции, возникающая в стержне с координатой x_1 , $\mathcal{E}_{i2} = x_2' l B_0$ – ЭДС индукции во втором стержне, R – их внутренние сопротивления. Закон Ома для этой схемы имеет вид

$$x_2' l B_0 - x_1' l B_0 = 2IR.$$

Объединив последние три уравнения, получим

$$x_2'' - x_1'' = -\frac{(lB_0)^2}{mR} (x_2' - x_1'),$$

или, обозначив $x_2 - x_1 = z$,

$$z'' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z' = 0.$$

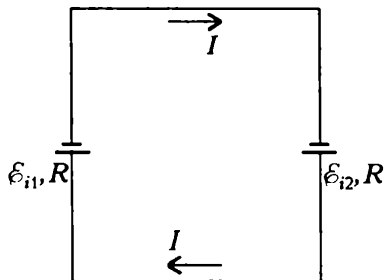


Рис. 12

После интегрирования запишем

$$z' + \frac{(lB_0)^2}{mR} z = \text{const}.$$

Из начальных условий следует, что

$$\text{const} = \frac{(lB_0)^2}{mR} b - 2v_0.$$

При $t \rightarrow \infty$ $z' \rightarrow 0$, поэтому для конечного расстояния между стержнями найдем

$$b_{\kappa} = b - \frac{2v_0 m R}{(lB_0)^2} = \frac{b}{2}.$$

Упражнения

1. Какова индукция магнитного поля вблизи протона, создаваемого вращением электрона по круговой орбите радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая квадратная рамка из однородного куска провода со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки. Масса рамки m , величина индукции B . Какой ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?

3. По оси длинного металлического цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-7}$ Кл/м. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с $^{-1}$. Пренебрегая центробежными эффектами, определите индукцию магнитного поля внутри металла, в полости цилиндра и во внешнем пространстве вдали от торцов цилиндра.

Указание: индукция магнитного поля внутри длинного соленоида с числом витков N и длиной l равна $B = \mu_0 NI/l$, где I – ток в соленоиде.

4*. Частица с зарядом q и массой m влетает с начальной скоростью v_0 в вязкую среду с поперечным однородным магнитным полем с индукцией B . Сила вязкого трения пропорциональна скорости частицы: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha \vec{v}$. На каком расстоянии от начальной точки (точки влета частицы в среду) частица остановится?

Электродвижущая сила (ЭДС) индукции возникает в проводящем контуре, который пронизывается линиями индукции внешнего магнитного поля, в двух принципиально различных (с точки зрения физики) случаях.

В первом случае мы имеем дело с постоянным (во времени) магнитным полем, а геометрические параметры контура изменяются, т.е. различные участки контура перемещаются в пространстве и при этом пересекают линии индукции магнитного поля. ЭДС индукции возникает в каждом участке, который пересекает линии индукции, а результирующая ЭДС в контуре равна их алгебраической сумме. Сторонней силой в этом случае является сила Лоренца. Свободные носители зарядов в контуре перемещаются под действием как силы Лоренца, так и электростатического поля, возникающего за счет перераспределения свободных зарядов в контуре. При этом работа, совершаемая электрическим полем по перемещению заряда вдоль контура, остается равной нулю.

Во втором случае ЭДС индукции возникает в контуре, когда его геометрические размеры сохраняются, а магнитное поле, пронизывающее контур, изменяется во времени. Переменное магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля. Работа, совершаемая этим полем по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура, и равна ЭДС индукции.

Для расчета ЭДС индукции в обоих случаях можно пользоваться законом Фарадея: ЭДС индукции \mathcal{E}_i в контуре прямо пропорциональна скорости изменения во времени магнитного потока Φ через площадь S , ограниченную контуром:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Знак «минус» обусловлен законом сохранения энергии.

Подробнее – на конкретных задачах.

Задача 1. Проволочный контур расположен в однородном магнитном поле, вектор индукции которого равен B и перпендикулярен плоскости контура (рис. 1). Неподвижная U-образная

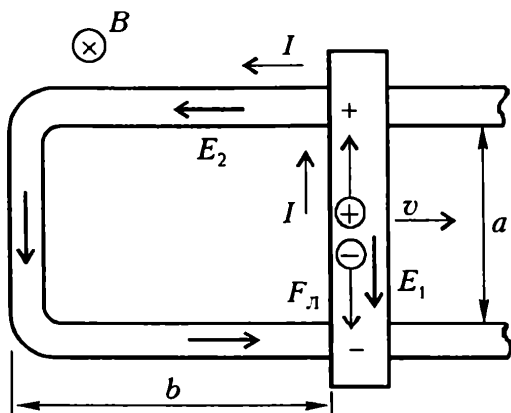


Рис. 1

часть контура выполнена из проволоки с площадью поперечного сечения S_2 и удельным сопротивлением материала ρ_2 , а подвижная перемычка – из проводника сечением S_1 и удельным сопротивлением ρ_1 . Определите ток в контуре при скорости перемычки v . Размеры контура указаны на рисунке. Нарисуйте также эквивалентную элект-

трическую схему для данного контура.

При движении перемычки со скоростью v на свободные электроны со стороны внешнего магнитного поля действует сила Лоренца $F_L = evB$, где e – заряд электрона. Возникающее перераспределение зарядов перемычки приводит к появлению статического электрического поля. Обозначим напряженность электрического поля в перемычке через E_1 , а в другой части контура через E_2 . Пусть в контуре течет установившийся ток I . Рассмотрим сначала неподвижную часть контура. В проводнике длиной $2b + a$ за счет напряженности электрического поля E_2 течет ток I . Падение напряжения на этом проводнике равно, с одной стороны,

$$U_2 = IR_2 = I \frac{\rho_2 (2b + a)}{S_2},$$

а с другой стороны,

$$U_2 = E_2 (2b + a).$$

Приравнявая эти два выражения, получим

$$\frac{I}{S_2} = \frac{E_2}{\rho_2}$$

– так называемый дифференциальный закон Ома. Теперь посмотрим, что происходит в перемычке. Здесь на свободные электроны действуют две силы: сила Лоренца и сила со стороны статического электрического поля напряженностью E_1 , т.е. $F = e(vB - E_1)$, что эквивалентно действию электрического поля

с напряженностью $E = vB - E_1$. Исходя из этого, мы можем записать дифференциальный закон Ома для перемычки в виде

$$\frac{I}{S_1} = \frac{vB - E_1}{\rho_1}.$$

Связь между E_1 и E_2 легко установить из условия потенциальности электростатического поля – работа электрического поля по перемещению заряженной частицы по замкнутому контуру равна нулю:

$$E_1 a - E_2 (2b + a) = 0.$$

Совместное решение полученных трех уравнений позволяет найти силу тока:

$$I = \frac{Bva}{\rho_1 \frac{a}{S_1} + \rho_2 \frac{2b+a}{S_2}}.$$

Мы видим, что полученное соотношение имеет вид знакомого нам закона Ома для замкнутой цепи, содержащей источник постоянной ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r и внешний резистор сопротивлением R :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

В нашем случае роль источника выполняет перемычка, в которой возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Bva$ (сторонней силой является сила Лоренца). Внутреннее сопротивление источника равно сопротивлению перемычки: $r = \rho_1 a / S_1$, а внешнее – сопротивлению неподвижной части контура: $R = \rho_2 (2b + a) / S_2$. Эквивалентная схема изображена на рисунке 2.

Получить аналогичное выражение для тока мы могли бы и более простым (но формальным) способом. При движении перемычки происходит изменение магнитного потока, пронизывающего рамку, в которой возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t = Bva$. Ток в рамке равен величине ЭДС, деленной на сопротивление рамки.

В приведенном подробном решении мы обсудили роли, которые играют в данном «спектакле» магнитное поле, отдельные элементы контура и тот, кто перемещает перемычку. Вы уже, наверное, догадались, что тот, кто перемещает перемычку, тот и совершает работу, за счет которой в

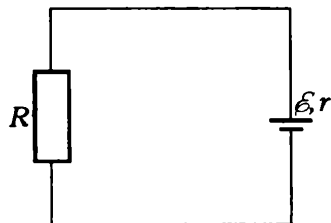


Рис.2

контуре поддерживается ток (инициатива всегда наказуема!). Попробуйте самостоятельно показать, что мощность, затрачиваемая «тем, кто...», в точности равна мощности тепловых потерь в контуре.

Задача 2. Две проволочных контура, изготовленных из одного куска провода, движутся с одинаковыми скоростями к длинному прямолинейному проводу с постоянным током (рис. 3). Контур 1 является квадратом со стороной a , а контур 2, выполненный

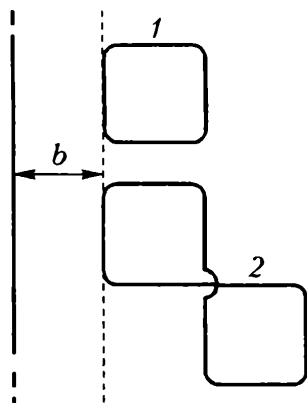


Рис. 3

в виде восьмерки, состоит из двух квадратов, стороны которых тоже a . Когда контуры оказались на расстоянии $b = 2a$ от провода, ток в первом контуре был равен I_1 . Чему был равен в этот момент ток во втором контуре, если известно, что индукция магнитного поля, создаваемого током провода, обратно пропорциональна расстоянию от провода? Провод и оба контура расположены в одной плоскости.

Запишем выражение для индукции магнитного поля провода с током в виде $B(x) = A/x$, где A — некоторая константа, а x — расстояние от провода. Пусть скорость проволочных контуров равна v . Эквивалентная схема для первого контура изображена на рисунке 4. Здесь ЭДС равны $\mathcal{E}_1 = aAv/b = Av/2$ и $\mathcal{E}_2 = aAv/(a+b) = Av/3$, внутренние сопротивления источников одинаковы и равны r (сопротивление провода длиной a), внешнее сопротивление $R_1 = 2r$ (сопротивление провода длиной $2a$). Величина силы тока в этом контуре равна

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + 2r} = \frac{Av}{24r}.$$

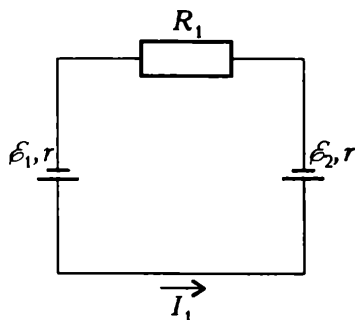


Рис. 4

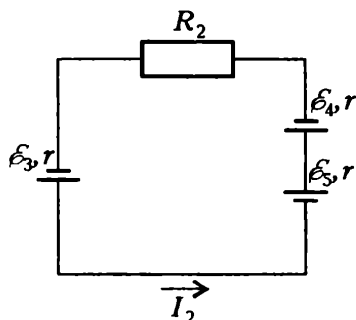


Рис. 5

На рисунке 5 показана эквивалентная схема для второго контура. В ней $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_1 = Av/2$, $\mathcal{E}_4 = 2aAv/(b+a) = 2Av/3$, $\mathcal{E}_5 = aAv/(b+2a) = Av/4$, $R_2 = 4r$. Ток в этом контуре равен

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_5 - \mathcal{E}_4}{R_4 + 4r} = \frac{Av}{96r}.$$

Сравнивая два выражения для токов, получаем

$$I_2 = I_1/4.$$

Задача 3. Два одинаковых проволочных кольца, радиусы которых R , а сопротивления r , движутся поступательно в одной плоскости навстречу друг другу вдоль прямой, проходящей через их центры (рис.6). Однородное магнитное поле с индукцией, равной B , направлено перпендикулярно плоскости колец. Найдите направления и абсолютные величины сил, действующих на кольца со стороны магнитного поля, в тот момент, когда скорости колец равны v , а угол $\alpha = \pi/3$. В точках соприкосновения колец a и b имеется хороший электрический контакт. Индуктивностями колец пренебречь.

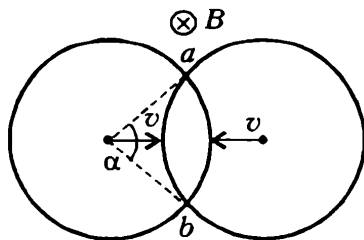


Рис.6

При движении колец во всех четырех проволочных участках возникают одинаковые по величине ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_i = vBl_{ab} = 2vBR \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Здесь использован тот факт, что ЭДС индукции, возникающая в произвольном по форме контуре, не зависит от его формы, а определяется лишь расстоянием между разомкнутыми концами контура.

(Для доказательства этого факта достаточно заметить, что при поступательном движении в однородном магнитном поле замкнутого контура, состоящего из криволинейного участка и прямолинейного проводника, соединяющего концы нашего участка, поток вектора индукции через весь замкнутый контур не меняется, а значит, полная ЭДС равна нулю. – Прим. ред.)

Эквивалентная электрическая схема для нашего случая представлена на рисунке 7, где контур, обведенный более тонкими линиями, соответствует левому кольцу, а более толстыми – правому. В этой схеме \mathcal{E}_1 – это ЭДС индукции, действующая в

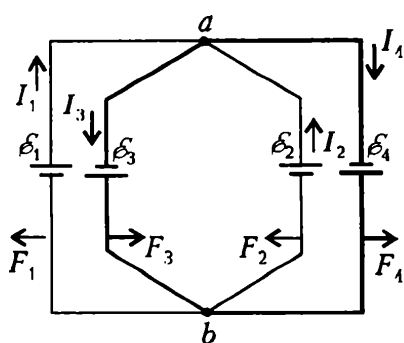


Рис.7

левом участке левого кольца, внутреннее сопротивление этого «источника» равно $r_1 = r(1 - \alpha/(2\pi))$, ε_2 и $r_2 = r\alpha/(2\pi)$ соответствуют правому участку левого кольца, ε_3 и $r_3 = r\alpha/(2\pi)$ – левому участку правого кольца, ε_4 и $r_4 = r(1 - \alpha/(2\pi))$ – правому участку правого кольца.

В силу симметрии,

$$I_1 = I_4, \quad I_3 = I_2.$$

По закону Ома для замкнутого контура, содержащего источники с ЭДС ε_2 и ε_3 , можно записать

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_2 r_2 + I_3 r_3, \text{ или } \varepsilon_i = I_2 r \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Отсюда

$$I_2 = I_3 = \frac{4\pi B v R \sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha r}.$$

Совершенно аналогично, для контура, содержащего источники ε_1 и ε_4 , получаем

$$I_1 = I_4 = \frac{4\pi B v R \sin \frac{\alpha}{2}}{(2\pi - \alpha)r}.$$

Сила Ампера, действующая со стороны внешнего магнитного поля на левый участок левого кольца, равна

$$F_1 = B I_1 l_{a6} = \frac{8\pi B^2 v R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(2\pi - \alpha)r},$$

а на правый –

$$F_2 = B I_2 l_{a6} = \frac{8\pi B^2 v R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha r}.$$

(Здесь использовано утверждение, что сила Ампера, действующая на криволинейный участок контура с током в однородном магнитном поле, не зависит от формы участка и равна силе, действующей на прямолинейный проводник, соединяющий концы нашего криволинейного участка. Можно доказать это утверждение «в лоб», исходя из закона Ампера. Мы же приведем энергетические соображения. Для доказательства заметим, что

при воображаемом поступательном движении замкнутого контура в любом направлении работа сил Ампера должна быть равна нулю. В самом деле, равна нулю как полная работа сил Лоренца, действующих на заряды контура ($\vec{F}_L \perp \vec{v}$), так и работа по перемещению этих зарядов вдоль контура ($\mathcal{E} = 0$). – Прим. ред.)

Результирующая сила Ампера, действующая на левое кольцо, равна

$$F_{\text{л}} = F_1 + F_2 = \frac{16\pi^2 B^2 v R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\alpha (2\pi - \alpha) r} = \frac{36}{5} \frac{B^2 v R^2}{r}$$

и направлена в противоположную сторону по отношению к скорости кольца. Из соображений симметрии, результирующая сила Ампера, действующая на правое кольцо, равна

$$F_{\text{п}} = -\frac{36}{5} \frac{B^2 v R^2}{r}.$$

Задача 4. Два проводящих диска, радиусы которых r_1 и r_2 , вращаются с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной их плоскости (рис.8). Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора емкостью C_1 , ободы (через скользящие контакты) – к обкладкам конденсатора емкостью C_2 . Найдите разности потенциалов на конденсаторах.

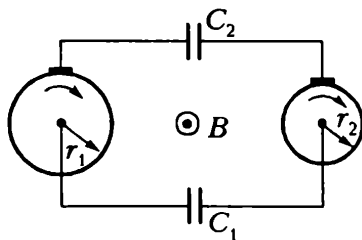


Рис.8

Эта задача – типичный пример того случая, когда магнитный поток через замкнутый контур не меняется, а ЭДС индукции тем не менее возникает. Это связано с тем, что в данном случае мы имеем дело с большим количеством контуров, образованных в результате разбиения дисков на маленькие секторы в виде проводящих перемычек, соединяющих центры дисков с проводящими кольцами радиусами r_1 и r_2 . В каждом из таких контуров при вращении радиальной перемычки магнитный поток уже не сохраняется и возникает ЭДС индукции, по закону Фарадея равная $\mathcal{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t$. Если длина перемычки первого диска r_1 и угловая скорость ω , то

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\omega r_1^2 B}{2},$$

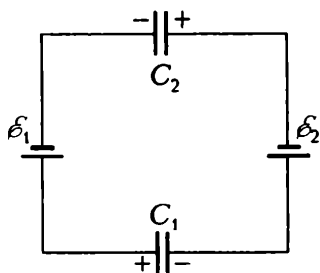


Рис.9

где $\omega r_1^2/2$ – площадь сектора, заматаемая перемычкой за единицу времени. Совершенно аналогично, вращающаяся одиночная перемычка другого диска, радиусом r_2 , вызывает появление ЭДС индукции

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega r_2^2 B}{2}.$$

Эквивалентная схема для случая двух вращающихся перемычек изображена на рисунке 9.

Возникает законный вопрос – а как учесть все остальные перемычки, на которые мы разбили диски? Разумеется, во всех перемычках одного и того же диска возникают одинаковые ЭДС индукции и все они соединены параллельно друг другу. Но тогда их действие эквивалентно действию одной ЭДС – все остальные можно убрать без всяких последствий. Следовательно, наша эквивалентная схема будет соответствовать действительности.

Очевидно, что заряды на конденсаторах будут равны (условие электронейтральности всех элементов схемы в исходном состоянии). Обозначим заряд каждого конденсатора через Q и запишем условие потенциальности электростатического поля:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{Q}{C_1} - \frac{Q}{C_2} = 0.$$

Отсюда находим заряды конденсаторов:

$$Q = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{\omega B C_1 C_2 (r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1 + C_2)}$$

и искомые разности потенциалов:

$$U_1 = \frac{\omega B C_2 (r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1 + C_2)} \text{ и } U_2 = \frac{\omega B C_1 (r_1^2 - r_2^2)}{2(C_1 + C_2)}.$$

При $r_1 > r_2$ знаки зарядов на пластинах конденсаторов соответствуют рисунку 9.

Эту задачу можно решать и не рассматривая магнитный поток, а так, как мы это делали при решении задачи 1. Во вращающихся дисках на свободные электроны будут действовать две силы: сила Лоренца и электрическая сила со стороны возникшего радиального электрического поля. В стационарном режиме надо записать условие отсутствия тока в дисках, а затем записать условие потенциальности электростатического поля вдоль замкнутого контура. Попробуйте проделать это самостоятельно.

Задача 5. Проволочное кольцо радиусом r_1 изготовлено из проводника с поперечным сечением S_1 и удельным сопротивлением ρ_1 . К точкам кольца a и c при помощи проводников общей длиной l , поперечным сечением S_2 и удельным сопротивлением ρ_2 подключен амперметр A (рис. 10). Центральная область кольца радиусом r_0 ($r_0 < r_1$) пронизывается перпендикулярным плоскости кольца магнитным полем, изменяющимся с постоянной скоростью $\Delta B / \Delta t = k$ ($k > 0$). Определите ток, который регистрирует амперметр. Что будет показывать амперметр, если его перебросить в положение, изображенное на рисунке пунктирными линиями? Нарисуйте эквивалентные схемы для обоих случаев. Длина дуги abc равна $1/3$ длины кольца. Внутренним сопротивлением амперметра пренебречь.

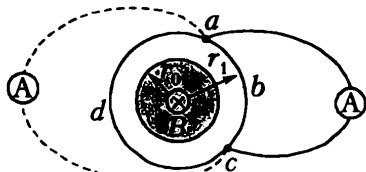


Рис. 10

Нарастающее магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля, силовые линии которого будут иметь вид окружностей, расположенных в плоскости чертежа. Одна из силовых линий, в частности, будет проходить по кольцу. На рисунке 11 более толстой линией изображена произвольная силовая линия. Если радиус такой линии $r > r_0$, то работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного заряда вдоль окружности, равна

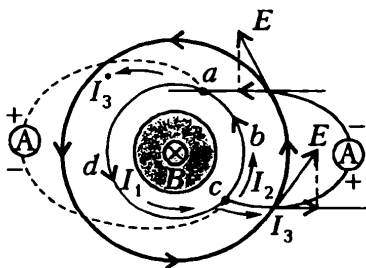


Рис. 11

$$E \cdot 2\pi r = |\mathcal{E}_i| = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \pi r_0^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = k\pi r_0^2,$$

где E — напряженность вихревого электрического поля на окружности радиусом r . Характерно, что распределение возникающего поля в пространстве не зависит от наличия или отсутствия проводников. Другим фундаментальным свойством такого поля является то, что указанная выше работа для любого замкнутого контура, который полностью охватывает область линий индукции магнитного поля, остается постоянной и равной ЭДС индукции.

Рассмотрим контур, включающий в себя амперметр, два проводника (общей длиной l) и дугу кольца adc . В каждом

маленьком элементе проводника, входящего в данный контур, имеется своя составляющая вихревого электрического поля вдоль проводника и, следовательно, своя ЭДС индукции. Но суммарная ЭДС индукции во всем контуре будет равна $k\pi r_0^2$: в дуге adc кольца будет распределена ЭДС, равная $2/3 k\pi r_0^2$, а в другой части контура будет распределена ЭДС, равная $1/3 k\pi r_0^2$. Закон Ома для данного контура будет иметь вид

$$k\pi r_0^2 = I_1 \rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1} + I_3 \rho_2 \frac{l}{S_2}.$$

Рассмотрим теперь круговой контур $abcd$ и запишем для него закон Ома:

$$k\pi r_0^2 = I_1 \rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1} + I_2 \rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1}.$$

Можно было бы выбрать замкнутый контур, состоящий из амперметра и дуги abc , в котором ЭДС индукции равна нулю (контур не пересекают линии магнитного поля), и получить еще одно уравнение:

$$0 = I_2 \rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1} - I_3 \rho_2 \frac{l}{S_2}.$$

Из этих трех уравнений независимыми являются только два – например, третье уравнение получается почленным вычитанием второго и первого. Поэтому можно выбрать любые два уравнения, а недостающее третье получить из условия непрерывности тока:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Совместное решение полученных трех уравнений позволяет определить ток через амперметр:

$$I_3 = \frac{k\pi r_0^2}{\rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1} + 3\rho_2 \frac{l}{S_2}}.$$

Аналогичную систему трех уравнений можно записать для второго положения амперметра:

$$k\pi r_0^2 = I_2^* \rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1} + I_3^* \rho_2 \frac{l}{S_2},$$

$$I_1^* \rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1} - I_3^* \rho_2 \frac{l}{S_2} = 0,$$

$$I_2^* = I_1^* + I_3^*.$$

Направления токов I_1^* и I_2^* совпадают с направлениями токов I_1 и I_2 . Из совместного решения этих уравнений получаем

$$I_3^* = \frac{k\pi r_0^2}{\rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1} + \rho_2 \frac{3l}{2S_2}}$$

– ток через амперметр меняет направление и возрастает в два раза.

Эквивалентные схемы для обоих случаев изображены на рисунке 12 (*а* – первое положение амперметра, *б* – второе).

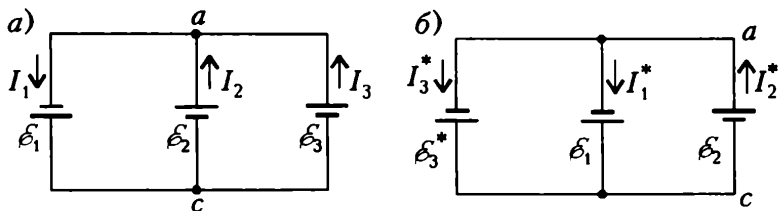


Рис. 12

Параметры источников (ЭДС \mathcal{E} и внутреннее сопротивление R):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{2}{3} k\pi r_0^2, \quad R_1 = \rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3} k\pi r_0^2, \quad R_2 = \rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1}, \\ \mathcal{E}_3 &= \frac{1}{3} k\pi r_0^2, \quad R_3 = \rho_2 \frac{l}{S_2}, \quad \mathcal{E}_3^* = \frac{2}{3} k\pi r_0^2, \quad R_3^* = \rho_2 \frac{l}{S_2}. \end{aligned}$$

Задача 6. *Неподвижная тонкая проволоочная рамка в виде квадрата со стороной a расположена горизонтально в однородном магнитном поле, индукция которого равна B_0 и перпендикулярна плоскости рамки. На рамке лежит проволоочная перемычка PP_1 массой m (рис.13). Рамка и перемычка выполнены из одного куска проволоки с удельным сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S . Какую скорость приобретет перемычка сразу после выключения магнитного поля? Силой трения и перемещением перемычки за время спада поля пренебречь.*

Пусть в произвольный момент времени в процессе уменьшения магнитного поля индукция поля равна B . Магнитный поток через контур $AP P_1 K$ (рис.14) равен $\Phi_1 = 3/4 a^2 B$, а через контур $PCDP_1$ равен $\Phi_2 = 1/4 a^2 B$. ЭДС индукции $\mathcal{E}_1 = -3/4 a^2 \Delta B / \Delta t$ (в

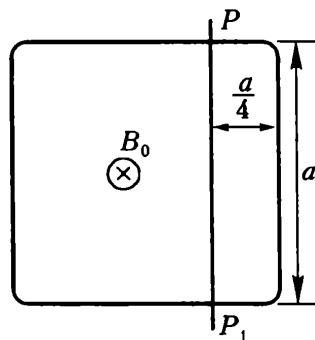


Рис. 13

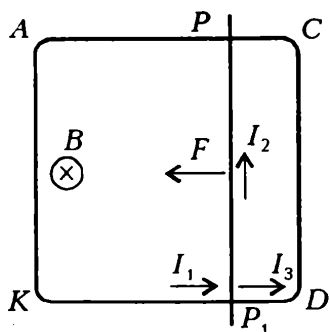


Рис. 14

первом контуре) и $\mathcal{E}_2 = -1/4 a^2 \Delta B / \Delta t$ (во втором контуре) наводят в проводниках токи I_1 , I_2 и I_3 . Закон Ома для наших замкнутых контуров будет иметь вид

$$-\frac{3}{4} a^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = I_1 \rho \frac{5a}{2S} + I_2 \rho \frac{a}{S},$$

$$-\frac{1}{4} a^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = I_3 \rho \frac{3a}{2S} - I_2 \rho \frac{a}{S}.$$

Третье уравнение – условие непрерывности тока:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Из совместного решения этих уравнений находим ток через перемычку:

$$I_2 = -\frac{2}{31} \frac{aS}{\rho} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

На перемычку со стороны внешнего магнитного поля будет действовать сила Лоренца

$$F = BI_2 a = -\frac{2}{31} \frac{a^2 S}{\rho} B \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{a^2 S}{31\rho} \frac{\Delta(B^2)}{\Delta t}.$$

За малый промежуток времени Δt на перемычку подействует импульс силы, который вызовет приращение импульса перемычки:

$$F \Delta t = m \Delta v.$$

Следовательно, приращение скорости будет равно

$$\Delta v = -\frac{a^2 S}{31m\rho} \Delta(B^2).$$

Поскольку значение B^2 изменяется от B_0^2 до 0, а скорость изменяется от 0 до v , то при $B = 0$ скорость перемычки будет

$$v = \frac{a^2 S}{31m\rho} B_0^2.$$

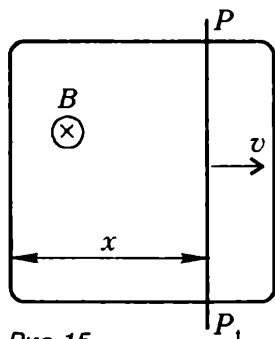


Рис. 15

Упражнения

1. Квадратная проволочная рамка со стороной a находится в магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости рамки (рис.15). Рамка изготовлена из провода с

поперечным сечением S и удельным сопротивлением ρ . По рамке параллельно ее боковым сторонам без нарушения контакта скользит с постоянной скоростью v перемычка PP_1 , сопротивление которой R . Определите величину и направление тока в перемычке при произвольном расстоянии x от левой боковой стороны квадрата.

2. Два проволоочных контура, изготовленные из одного куска провода, движутся к длинному прямолинейному проводу с постоянным током (рис. 16). Контур 1 является прямоугольником со сторонами a , $2a$. Контур 2 состоит из двух прямоугольников со сторонами $2a$, a . Когда оба контура находились на расстоянии $b = a$ от провода, токи в контурах были равны. Определите отношение скоростей контуров в этот момент времени, если известно, что индукция магнитного поля, создаваемая током провода, обратно пропорциональна расстоянию от провода. Провод и оба контура расположены в одной плоскости.

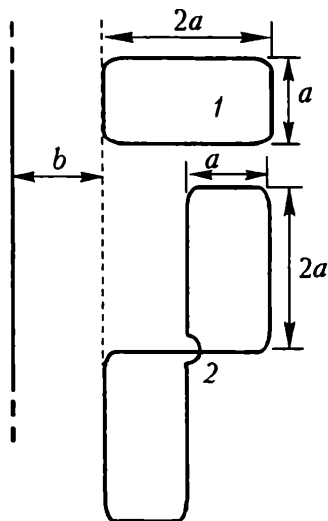


Рис. 16

3. Два одинаковых проволоочных кольца, радиусы которых R и сопротивления r , находятся в области однородного магнитного поля, индукция которого перпендикулярна плоскости колец (рис. 17). Известно, что если одно кольцо неподвижно, а скорость поступательного движения другого равна v и направлена вдоль прямой, проходящей через их центры, то при $\alpha = \pi/2$ сила, действующая на каждое кольцо со стороны магнитного поля, равна F . Определите величину индукции магнитного поля. В точках соприкосновения колец a и b имеет место хороший электрический контакт. Индуктивностями колец пренебречь.

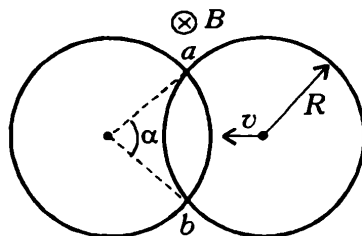


Рис. 17

4. В задаче 5 из статьи вместо амперметра подключен вольтметр с большим сопротивлением R . Определите показание вольтметра в обоих положениях. Найдите также предельные значения этих показаний при $R \rightarrow \infty$. Сопротивление подводящих проводов можно не учитывать.

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

В.Можаев

В этой статье будут разобраны задачи, в которых основным элементом является колебательный LC -контур. В состав такого контура обычно входят два реактивных элемента – индуктивность и емкость, а также активное сопротивление. Последовательно соединенные эти три элемента и образуют последовательный колебательный контур. Основная задача при расчете колебательного контура состоит в определении временной зависимости тока в контуре и напряжении на его элементах при заданных начальных условиях.

Процессы в колебательном контуре описываются так называемым дифференциальным уравнением второго порядка, а общее решение этого уравнения содержит две неизвестные константы. Эти константы можно определить из начальных условий, вот почему для нахождения решения необходимо знать начальный ток в контуре и начальное напряжение, скажем, на конденсаторе.

Часто в задачах на колебательный контур требуется найти не общее решение, а какой-то конкретный параметр, например максимальный ток в контуре или максимальное напряжение на конденсаторе. Такие задачи можно решать, исходя из закона сохранения энергии и общих физических соображений. Так, при максимальном токе в контуре ЭДС индукции в катушке равна нулю, а если активное сопротивление контура отсутствует, то и напряжение на конденсаторе также равно нулю. Или, если напряжение на конденсаторе максимально, то ток в контуре отсутствует.

А теперь – конкретные задачи.

Задача 1. В колебательном LC -контуре (рис.1) в начальный мо-

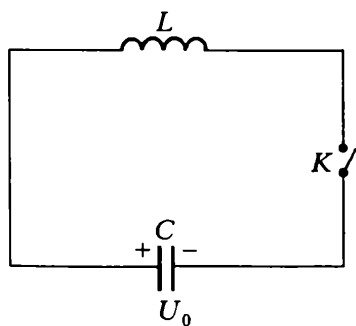


Рис.1

Опубликовано в «Кванте» №3 за 2002 год.

мент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0 . Найдите зависимости напряжения на конденсаторе и тока в контуре от времени после замыкания ключа.

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе не изменяется: $U(0) = U_0$, а ток в контуре отсутствует: $I(0) = 0$. Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа в контуре течет ток, как это изображено на рисунке 2. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$LI' = U.$$

Поскольку $I = -q' = -CU'$, получим

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это – однородное (справа стоит ноль) дифференциальное уравнение второго порядка (старшая производная второго порядка). Уравнения такого вида описывают гармонические колебания одного из параметров колебательной системы. В нашем случае – напряжения на конденсаторе. Решение уравнения имеет вид

$$U(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура, а A и B – константы, которые находятся из начальных условий. Первое начальное условие – это

$$U(0) = U_0.$$

После подстановки в решение получим $A = U_0$. Из второго начального условия

$$I(0) = -CU' = 0$$

следует $B = 0$.

Теперь запишем окончательные выражения для напряжения на конденсаторе:

$$U(t) = U_0 \cos \omega_0 t$$

и для тока в контуре:

$$I(t) = U_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t.$$

Сравнивая последние два выражения, мы видим, что напряжение на конденсаторе и ток в контуре изменяются по гармоничес-

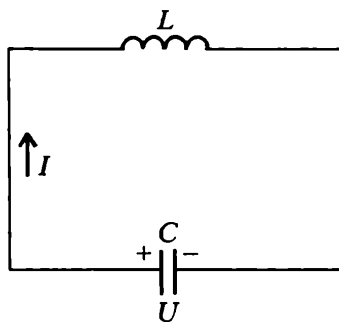


Рис.2

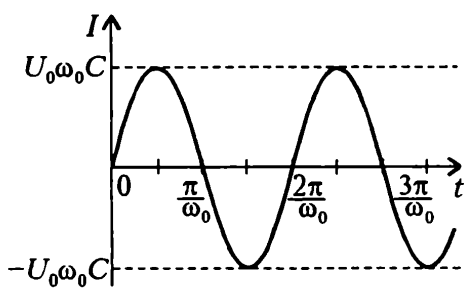
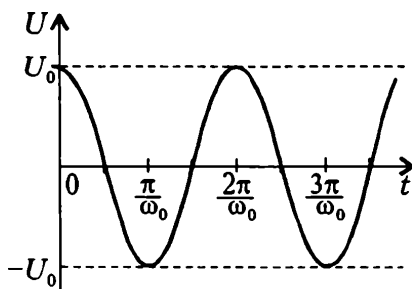


Рис.3

кому закону с одной и той же частотой, но колебания тока и напряжения сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Зависимости $U(t)$ и $I(t)$ изображены на рисунке 3.

Задача 2. К LC -контур (рис.4) в момент $t=0$ подключают источник постоянной ЭДС \mathcal{E} с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Определите напряжение на конденсаторе в зависимости от времени.

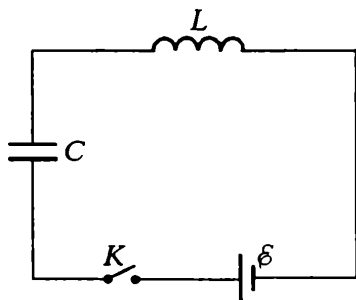


Рис.4

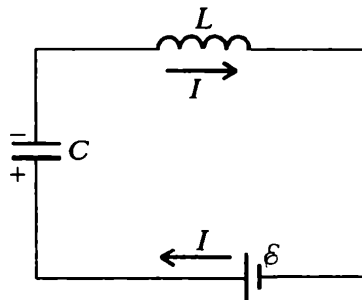


Рис.5

Рассмотрим произвольный момент после замыкания ключа. Пусть в контуре течет ток I , как это изображено на рисунке 5. Запишем закон Ома для нашего контура:

$$\mathcal{E} - LI' = U_C,$$

где U_C – напряжение на конденсаторе. Используем связь между током и напряжением на конденсаторе:

$$I = CU'_C.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$I' = CU''_C.$$

Подставляя выражение для I' в уравнение закона Ома, получим

$$U''_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота контура. Это уравнение является неоднородным (справа не ноль) линейным дифференциальным уравнением второго порядка (по старшей производной). Ранее, в задаче 1, мы имели дело с аналогичным уравнением, только с нулевой правой частью. Сделав замену переменной $X = U_C - \varepsilon$, сведем наше неоднородное уравнение к однородному:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0.$$

Решение такого уравнения мы уже знаем:

$$X = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

Для определения констант A и B используем наши начальные условия: при $t = 0$ $U_C = 0$, или $X = -\varepsilon$, и $I = CU_C' = 0$, или $X' = 0$. Подстановка начальных условий в решение позволяет найти A и B :

$$A = -\varepsilon, \quad B = 0.$$

Окончательно получим

$$X(t) = -\varepsilon \cos \omega_0 t,$$

или

$$U_C(t) = \varepsilon(1 - \cos \omega_0 t).$$

Изменение напряжения на конденсаторе будет происходить по гармоническому закону (рис.6), но, в отличие от предыдущей задачи, не относительно нулевого уровня, а относительно уровня $U_C = \varepsilon$.

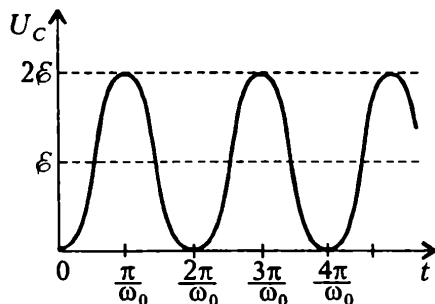


Рис.6

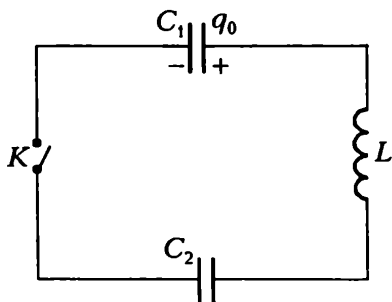


Рис.7

Задача 3. В колебательном LC-контуре, изображенном на рисунке 7, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q_0 , а конденсатор емкостью C_2 не заря-

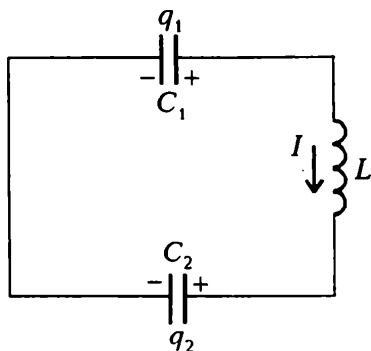


Рис.8

жен. Через какое время после замыкания ключа заряд на конденсаторе емкостью C_2 будет иметь максимальное значение? Чему будет равен этот заряд? Омическими потерями в катушке индуктивностью L пренебречь.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. Пусть в этот момент заряд на первом конденсаторе q_1 , на втором конденсаторе q_2 и в контуре

течет ток I (рис.8). Поскольку нас интересует заряд $q_{2\max}$, разумно найти зависимость $q_2(t)$. Для этого запишем закон Ома для нашего контура:

$$-LI' = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1}.$$

Поскольку $I = q_2'$, а $q_1 + q_2 = q_0$, уравнение закона Ома относительно q_2 будет иметь вид

$$q_2'' + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} q_2 = \frac{q_0}{LC_1}.$$

Введем новую переменную:

$$X = q_2 - \frac{q_0C_2}{C_1 + C_2},$$

запишем для нее уравнение колебаний:

$$X'' + \omega_0^2 X = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}$ – собственная частота контура, и его решение:

$$X(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

При $t = 0$ $q_2 = 0$, или $X(0) = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}$, и $I = 0$, или $X' = 0$.

Начальные условия позволяют найти константы A и B :

$$A = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2}, B = 0.$$

Решение уравнения колебаний имеет вид

$$X(t) = -\frac{q_0C_2}{C_1 + C_2} \cos \omega_0 t,$$

или, переходя обратно к переменной q_2 ,

$$q_2(t) = \frac{q_0 C_2}{C_1 + C_2} (1 - \cos \omega_0 t).$$

Очевидно, что первый раз заряд q_2 достигнет максимального значения через время $t_1 = \pi/\omega_0$, затем это максимальное значение будет повторяться с периодом $T = 2\pi/\omega_0$. В общем случае это можно записать в виде

$$t_N = \frac{\pi}{\omega_0} (1 + 2N), \text{ где } N = 0, 1, 2 \dots$$

Величина максимального заряда на втором конденсаторе равна

$$q_{2\max} = \frac{2q_0 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Задача 4. В схеме, изображенной на рисунке 9, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ K на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток через катушку индуктивности в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе оказалось равным 2ε , где ε – ЭДС батареи. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. Внутреннее сопротивление батареи настолько мало, что время зарядки конденсатора (при замкнутом ключе) много меньше времени, в течение которого ключ K остается замкнутым.

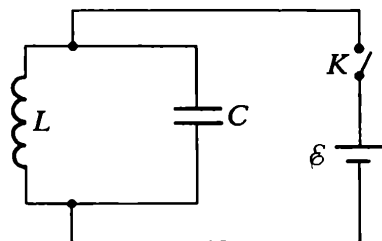


Рис.9

После замыкания ключа конденсатор быстро зарядится до напряжения, равного ЭДС батареи, а в катушке индуктивности будет медленно нарастать ток, начиная с нулевого значения. В момент размыкания ключа напряжение на конденсаторе будет равно ЭДС батареи ε , а через катушку будет течь ток, который мы обозначим I_0 . Это будут начальные условия для нашего LC-контура.

Пусть в произвольный момент времени (после размыкания ключа) в контуре течет ток I , а напряжение на конденсаторе равно U_C , как это изображено на рисунке 10. Запишем закон Ома для данного контура:

$$LI' = U_C,$$

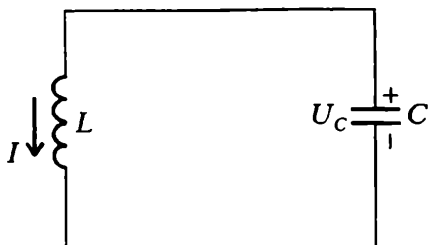


Рис. 10

или, поскольку $I = -CU'_C$,

$$U''_C + \omega_0^2 U_C = 0,$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная частота колебаний контура. Решение данного уравнения будет искать в виде

$$U_C(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Эта форма записи решения эквивалентна используемой ранее. Там мы имели две константы: A и B , и в данном случае также две константы: A и φ . Используя начальные условия $U_C(0) = \varepsilon$ и $I(0) = I_0$, получим $\varepsilon = A \cos \varphi$, $I_0 = AC\omega_0 \sin \varphi$. Отсюда

$$A = \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{I_0}{\varepsilon C\omega_0}.$$

Поскольку A является амплитудой колебаний напряжения на конденсаторе, эта величина и есть максимальное напряжение на нем. Следовательно,

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{I_0}{C\omega_0}\right)^2} = 2\varepsilon,$$

откуда

$$I_0 = \sqrt{3}\varepsilon C\omega_0 = \varepsilon \sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Как в предыдущих трех задачах, так и при решении этой задачи мы использовали общий принцип решения, который позволяет получить полную информацию о контуре. Теперь приведем упрощенное решение, исходя из общих физических соображений и закона сохранения энергии. Запишем закон сохранения энергии для момента времени $t = 0$ и для того момента, когда напряжение на конденсаторе максимально и ток в контуре равен нулю:

$$\frac{LI_0^2}{2} + \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{4C\varepsilon^2}{2},$$

откуда и найдем искомый ток:

$$I_0 = \varepsilon \sqrt{3\frac{C}{L}}.$$

Задача 5. В схеме на рисунке 11 конденсатор емкостью C заряжен до некоторого напряжения, а ключ K разомкнут.

После замыкания ключа в схеме происходят свободные колебания, при которых амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0 . Когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения, из нее быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний) выдвигают сердечник, что приводит к уменьшению ее индуктивности в k раз. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе после выдвигения сердечника.

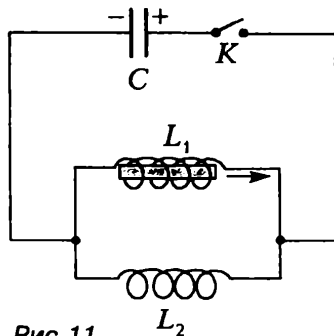


Рис. 11

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа K , но до выдвигения сердечника. Обозначим начальное напряжение на конденсаторе U_{C0} , напряжение в произвольный момент времени U_C . Пусть через катушку индуктивностью L_1 течет ток I_1 , а через катушку индуктивностью L_2 — ток I_2 (рис. 12). Запишем закон Ома для контура, включающего в себя конденсатор и катушку индуктивностью L_2 :

$$L_2 I_2' = U_C. \quad (1) \quad \text{Рис. 12}$$

Закон Ома для контура, охватывающего обе катушки, имеет вид

$$L_1 I_1' = L_2 I_2',$$

или

$$(L_1 I_1 - L_2 I_2)' = 0.$$

Отсюда получим

$$L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const},$$

или, поскольку начальные токи через катушки равны нулю,

$$L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

Из условия непрерывности тока следует, что

$$I = I_1 + I_2 = \frac{L_1 + L_2}{L_1} I_2. \quad (2)$$

Продифференцируем уравнение (1) по времени:

$$L_2 I_2'' = U_C'.$$

Поскольку $I = -CU'_C$, уравнение приобретает вид

$$L_2 I_2'' + \frac{1}{C} I = 0.$$

Подставив сюда выражение (2), окончательно получим

$$I_2'' + \frac{L_1 + L_2}{CL_1 L_2} I_2 = 0.$$

Решение этого уравнения запишем в виде

$$I_2(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{CL_1 L_2}}$ – частота колебаний. Поскольку $I_2(0) = 0$, получим $A = 0$. Для нахождения константы B воспользуемся тем фактом, что амплитудное значение тока в катушке индуктивностью L_2 равно I_0 , и получим $B = I_0$. Тогда зависимости токов от времени имеют вид

$$I_2(t) = I_0 \sin \omega_0 t \text{ и } I_1(t) = \frac{L_2}{L_1} I_0 \sin \omega_0 t.$$

За время удаления сердечника из первой катушки магнитные потоки в обеих катушках не изменятся. Это приведет к тому, что ток во второй катушке сохранится:

$$I_2^* = I_0.$$

Ток I_1^* в первой катушке найдем из условия $L_2 I_0 = \frac{L_1}{k} I_1^*$:

$$I_1^* = \frac{kL_2}{L_1} I_0.$$

Для определения максимального напряжения на конденсаторе воспользуемся законом сохранения энергии. Магнитная энергия, запасенная в катушках сразу после удаления сердечника, равна

$$W_L = \frac{L_1 (I_1^*)^2}{2k} + \frac{L_2 (I_2^*)^2}{2} = \frac{L_1}{2k} \left(\frac{kL_2}{L_1} I_0 \right)^2 + \frac{L_2 I_0^2}{2} = \frac{L_2 I_0^2}{2} \left(1 + \frac{kL_2}{L_1} \right).$$

Когда напряжение на конденсаторе максимально, общий ток в контуре равен нулю, т.е. токи через катушки связаны соотношением

$$I_1^{**} + I_2^{**} = 0.$$

Ранее полученная связь между токами ($L_1 I_1 - L_2 I_2 = \text{const}$) для токов I_1^{**} и I_2^{**} будет иметь вид

$$\frac{L_1}{k} I_1^{**} - L_2 I_2^{**} = 0.$$

Из последних двух уравнений следует, что токи в катушках будут равны нулю, а вся энергия контура будет сосредоточена в конденсаторе и равна

$$W_C = \frac{CU_m^2}{2},$$

где U_m – максимальное напряжение на конденсаторе. Согласно закону сохранения энергии, $W_L = W_C$, или

$$\frac{L_2 I_0^2}{2} \left(1 + \frac{kL_2}{L_1} \right) = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Отсюда находим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_2 (L_1 + kL_2)}{CL_1}}.$$

Задача 6. В колебательном LCR-контуре (рис.13) активное сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: в те моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро (за малое время по сравнению с периодом колебаний в контуре) растягивают от длины l_1 до длины l_2 , причем $l_2 - l_1 \ll l_1$, а в моменты, когда ток в цепи равен нулю, катушку быстро сжимают до прежнего размера. При каком относительном изменении длины катушки $(l_2 - l_1)/l_1$ колебания в контуре не будут затухать? Индуктивность катушки считать обратно пропорциональной ее длине.

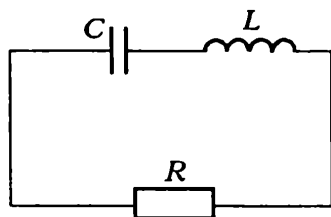


Рис. 13

Рассмотрим момент времени, когда ток в катушке индуктивностью L_1 достигает максимального значения I_{1m} и катушку растягивают до длины l_2 , при которой индуктивность равна L_2 . Поскольку изменение индуктивности происходит быстро, будет сохраняться магнитный поток, пронизывающий катушку:

$$L_1 I_{1m} = L_2 I_{2m},$$

где I_{2m} – новый ток в катушке после ее удлинения. Так как индуктивность обратно пропорциональна длине катушки, то

$$l_2 I_{1m} = l_1 I_{2m}.$$

Отсюда

$$I_{2m} = \frac{l_2}{l_1} I_{1m}.$$

Новая энергия в контуре стала

$$W_2 = \frac{L_2 I_{2m}^2}{2} = \frac{L_2 l_2^2 I_{1m}^2}{2 l_1^2},$$

а первоначальная энергия была

$$W_1 = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2}.$$

Приращение энергии в контуре равно

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{L_2 l_2^2}{2 l_1^2} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2,$$

или, поскольку $L_2 = \frac{l_2}{l_1} L_1$,

$$\Delta W = \frac{L_1 l_2}{2 l_1} I_{1m}^2 - \frac{L_1}{2} I_{1m}^2 = \frac{L_1 (l_2 - l_1)}{2 l_1} I_{1m}^2.$$

Возвращение индуктивности к прежнему значению при нулевом токе в контуре, очевидно, не приводит к изменению энергии – она остается неизменной. Последующая подкачка энергии в контур происходит через время, равное полупериоду колебаний. За это время в контуре происходит потеря энергии в виде выделяющегося в резисторе количества теплоты

$$\Delta W_R = \frac{I_{1m}^2 R T}{2} = \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2}.$$

Колебания в контуре не будут затухать, если подкачка энергии в контур ΔW будет больше или равна потерям энергии ΔW_R :

$$\frac{L_1 (l_2 - l_1)}{2 l_1} I_{1m}^2 \geq \pi \sqrt{L_1 C} \frac{I_{1m}^2 R}{2}.$$

Отсюда находим искомую величину относительного изменения длины катушки:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_1} \geq \pi R \sqrt{\frac{C}{L_1}}.$$

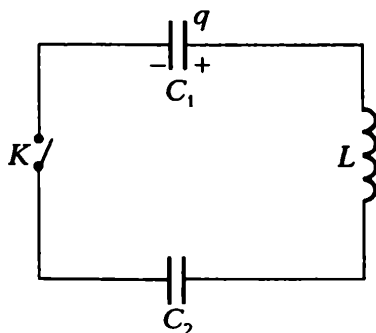


Рис. 14

Упражнения

1. В LC -контуре, изображенном на рисунке 14, при разомкнутом ключе K заряд на конденсаторе емкостью C_1 равен q , а конденсатор емкостью C_2 ($C_2 = 4C_1$) не заряжен. Определите максимальный ток в контуре после замыкания ключа. Омическими поте-

рями в катушке индуктивностью L можно пренебречь.

2. В схеме на рисунке 15 в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью C не заряжен. Ключ на некоторое время замыкают, а затем снова размыкают. Определите ток I_0 через катушку индуктивностью L в момент размыкания ключа, если после размыкания ключа максимальный ток в LC -контуре оказался равным $2I_0$. Омическим сопротивлением катушки пренебречь. ЭДС источника \mathcal{E} .

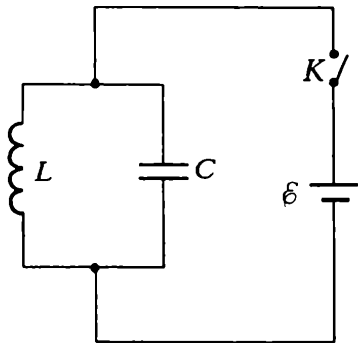


Рис. 15

3. Колебательный контур состоит из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостью C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L (рис. 16). В контуре происходят свободные колебания, при которых амплитуда колебаний заряда на конденсаторе емкостью C_2 равна q_0 . В конденсаторе емкостью C_1 находится диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ϵ , которая полностью заполняет его пространство. Когда заряд на этом конденсаторе достигает максимального значения, пластину быстро (за малое время по сравнению с периодом колебания) удаляют из конденсатора. Определите амплитуду новых колебаний тока в катушке.

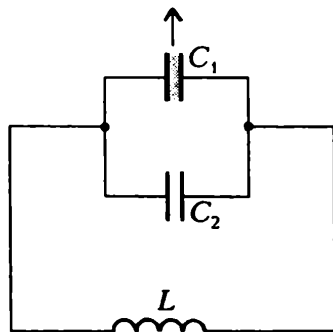


Рис. 16

4. В колебательном LCR -контуре (см. рис. 13) сопротивление R мало, так что колебания в нем затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период, когда заряд конденсатора максимален, его пластины быстро (по сравнению с периодом колебаний) раздвигают от расстояния d_1 до расстояния d_2 , а в моменты, когда заряд равен нулю, их быстро сдвигают до прежнего расстояния. При каком относительном изменении расстояния между обкладками $(d_2 - d_1)/d_1$ колебания в контуре не будут затухать?

Рассмотрим движение отдельных зарядов в заданных электрических и магнитных полях.

Силовой характеристикой электрического поля является вектор напряженности поля \vec{E} . Если заряженная частица с зарядом q находится в некоторой точке пространства, где напряженность электрического поля равна \vec{E} , то на частицу со стороны электрического поля действует сила $\vec{F}_e = q\vec{E}$. А если в системе координат, в которой заряженная частица движется со скоростью \vec{v} , существует магнитное поле с индукцией \vec{B} , то на частицу будет действовать еще и магнитная сила, или (как ее обычно называют) сила Лоренца, равная $F_L = qvB \sin \alpha$, где α – угол между вектором скорости и вектором магнитной индукции. Сила Лоренца перпендикулярна векторам \vec{B} и \vec{v} , а ее направление определяется с помощью правила левой руки. Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на заряженную частицу, перпендикулярна вектору скорости, она не совершает работы, а лишь искривляет траекторию движения частицы, не меняя ее энергии.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *Рассматривая классическое приближение, вычислите скорость электрона в атоме водорода, если радиус его круговой орбиты $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.*

Электрон в атоме водорода находится в центральном электростатическом поле протона. На него действует сила Кулона, которая в данном случае обеспечивает центростремительное ускорение при движении электрона по круговой орбите. Уравне-

ние движения электрона имеет вид

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где v – скорость электрона на орбите. Отсюда получаем

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задача 2. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 3,52 \cdot 10^3 \text{ В}$, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,01 \text{ Тл}$ перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $r = 2 \text{ см}$. Вычислите по этим данным отношение заряда электрона к его массе.

Пройдя ускоряющую разность потенциалов, электрон приобретает скорость v , которую можно найти по закону сохранения энергии

$$eU = \frac{mv^2}{2},$$

где e – заряд электрона, m – его масса. В магнитном поле на электрон будет действовать сила Лоренца, равная evB и направленная перпендикулярно векторам скорости \vec{v} и индукции \vec{B} . Сила Лоренца в данном случае будет сообщать электрону центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{r} = evB,$$

откуда и находим удельный заряд электрона:

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{rB}.$$

Подставляя сюда выражение для скорости из первого уравнения, окончательно получим

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{(rB)^2} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}.$$

Задача 3. Электрон со скоростью $v_0 = 10^9 \text{ см/с}$ влетает в пространство плоского конденсатора, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 425 \text{ В}$ (рис.1). Определите величину h максимального удаления электрона от нижней пластины конденса-

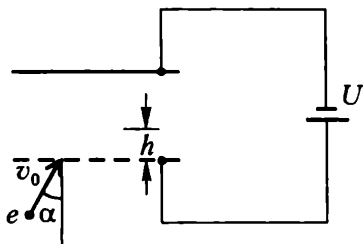


Рис. 1

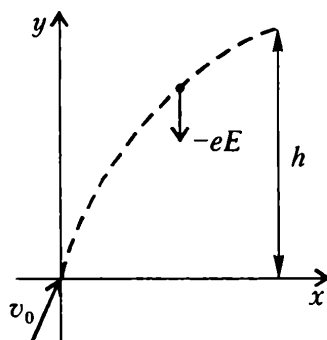


Рис.2

тора. Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha = 30^\circ$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1$ см.

Рассмотрим движение электрона в системе координат, изображенной на рисунке 2. Электрон движется в однородном электрическом поле с напряженностью, равной $E = U/d$ и направленной по оси y . Уравнение движения электрона вдоль этой оси имеет вид

$$ma_y = -eE = -\frac{eU}{d},$$

т.е. он движется в этом направлении равнозамедленно. Если через время $t = \tau$ электрон максимально удалится от нижней пластины, его координата y , а в наших обозначениях h , будет равна

$$h = v_0 \cos \alpha \cdot \tau - \frac{eU}{2md} \tau^2.$$

Очевидно, что в верхней точке вертикальная составляющая скорости электрона равна нулю:

$$v_0 \cos \alpha - \frac{eU}{md} \tau = 0.$$

Исключая время τ из двух последних уравнений, находим искомую величину:

$$h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2Ue/m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Этот результат можно получить также из закона сохранения энергии. Если отсчитывать потенциальную энергию электрона в электрическом поле от нижней пластины ($y = 0$), то потенциальная энергия электрона на высоте h составит eUh/d . Закон сохранения энергии электрона, записанный для точек с координатами $y = 0$ и $y = h$, будет иметь вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{eUh}{d},$$

где $v_x = v_0 \sin \alpha$ — скорость электрона на высоте h . После подстановки выражения для v_x получим

$$h = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot d}{2Ue/m}.$$

Задача 4. Электрон влетает в однородное магнитное поле и в точке A имеет скорость v_0 , вектор которой составляет угол α с направлением магнитного поля (рис. 3). При каких значениях индукции магнитного поля B электрон окажется в точке C ? Заряд электрона e , его масса m , а расстояние AC равно L .

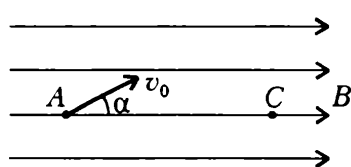


Рис. 3

Введем систему координат (рис. 4), направив ось x вдоль вектора магнитной индукции. Разложим скорость электрона в точке A на составляющие $v_x = v_0 \cos \alpha$ и $v_y = v_0 \sin \alpha$. На электрон в магнитном поле будет действовать сила Лоренца, проекция которой на ось x всегда равна нулю, поэтому вдоль оси x электрон будет двигаться равномерно с постоянной скоростью $v_x = v_0 \cos \alpha$. В плоскости, перпендикулярной оси x , электрон будет двигаться по окружности радиусом R под действием силы Лоренца, обеспечивающей центростремительное ускорение электрона:

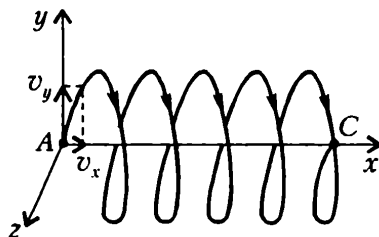


Рис. 4

$$\frac{m(v_0 \sin \alpha)^2}{R} = ev_0 \sin \alpha \cdot B.$$

В результате электрон станет двигаться по винтовой линии, изображенной на рисунке 4, пересекая ось x через равные промежутки времени (период обращения)

$$T = \frac{2\pi R}{v_0 \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Очевидно, что электрон попадет в точку C , если за время t_{AC} равномерного движения вдоль оси x от точки A до точки C он совершит целое число полных оборотов:

$$t_{AC} = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = TN = \frac{2\pi m}{eB_N} N,$$

где $N = 1, 2, \dots$ Каждому целому числу N соответствует свое значение индукции магнитного поля

$$B_N = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{eL} N.$$

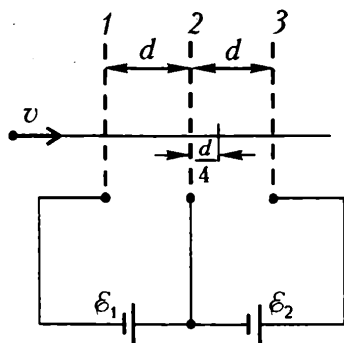


Рис.5

Задача 5. Протон с удельным зарядом $q/t = 0,96 \cdot 10^8$ Кл/кг налетает на систему из трех плоских металлических сеток, между которыми с помощью двух источников с ЭДС $\varepsilon_1 = 500$ В и $\varepsilon_2 = 200$ В поддерживаются постоянные разности потенциалов (рис.5). Расстояния между сетками равны d и много меньше поперечных размеров сеток. В точке, находящейся на расстоянии $d/4$ за второй сеткой, скорость

протона оказалась равной нулю. Чему была равна скорость протона на большом удалении от сеток?

Скорость v протона на большом удалении от сеток можно найти по закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = q\varphi\left(\frac{d}{4}\right),$$

где $\varphi(d/4)$ – значение потенциала электрического поля сеток (относительно бесконечности) в точке остановки протона.

Найдем распределение потенциала $\varphi(x)$ между сетками 2 и 3 вдоль оси x , приняв за начало отсчета положение второй сетки (рис.6). Потенциал $\varphi(x)$ является суммой потенциалов $\varphi_{12}(x)$ и $\varphi_{23}(x)$, где $\varphi_{12}(x)$ создается только зарядами сеток 1 и 2, между которыми поддерживается разность потенциалов ε_1 , а $\varphi_{23}(x)$ – только зарядами сеток 2 и 3 с разностью потенциалов ε_2 .

Рассмотрим конденсатор, образуемый сетками 2 и 3. На рисунке 7 приведен график распределения потенциала внутри этого конденсатора. Из соображений симметрии ясно, что потенциал центра конденсатора

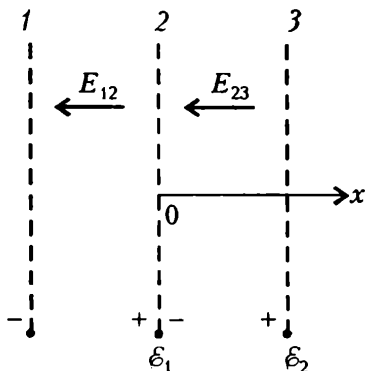


Рис.6

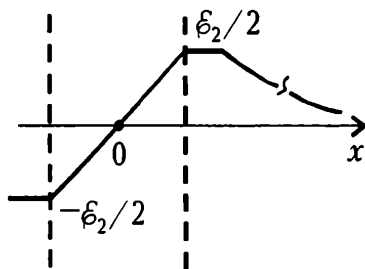


Рис.7

равен потенциалу на бесконечности, т.е. нулю. (Отметим, что нулю равен потенциал всех точек в плоскости симметрии системы.) Значит, внутри конденсатора потенциал меняется от значения $-\epsilon_2/2$ на отрицательной пластине до $+\epsilon_2/2$ на положительной по линейному закону. Вне конденсатора, где напряженность поля гораздо меньше, чем внутри, при удалении от пластин на малое расстояние (по сравнению с их размерами) потенциал почти не изменяется (а при удалении на бесконечно большое расстояние потенциал стремится к нулю). Аналогичные рассуждения можно провести и для конденсатора, образуемого сетками 1 и 2. Поскольку рассматриваемая точка остановки протона лежит внутри правого конденсатора (на расстоянии $d/4$ от отрицательной пластины), но вне левого конденсатора, то для $0 \leq x \leq d$ получаем

$$\varphi_{12}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_1 \text{ и } \varphi_{23}(x) = \epsilon_2 \left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2} \right).$$

После суммирования находим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) + \epsilon_2 \frac{x}{d},$$

и

$$\varphi\left(\frac{d}{4}\right) = \frac{1}{4}(2\epsilon_1 - \epsilon_2).$$

Итак, скорость протона вдали от сеток равна

$$v = \sqrt{2 \frac{q}{m} \varphi\left(\frac{d}{4}\right)} = \sqrt{\frac{q}{m} \left(\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2}{2} \right)} \approx 1,96 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Упражнения

1. Пучок однократно заряженных положительных ионов Li^+ ($A = 6$) испускается эмиттером Э, ускоряется электрическим полем и, пройдя разность потенциалов $U = 3000 \text{ В}$, попадает в камеру с поперечным магнитным полем с индукцией $B = 3 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$ (рис.8). Найдите величину отклонения пучка h . Длина камеры $L = 15 \text{ см}$, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, масса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

2. Электрон влетает в пространство плоского конденсатора, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U = 60 \text{ В}$ (см. рис.1). Определите мини-

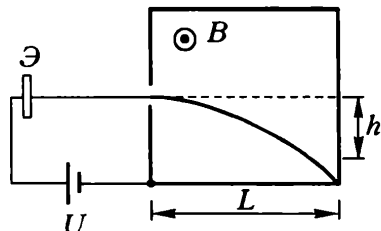


Рис.8

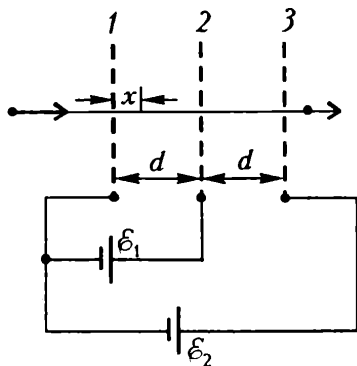


Рис. 9

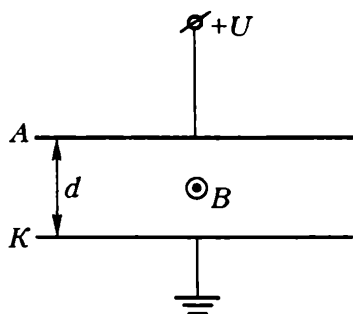


Рис. 10

мальную скорость электрона, при которой он достигнет верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha = 60^\circ$.

3. Положительно заряженная частица пролетает через три плоские металлические сетки, между которыми с помощью двух источников с ЭДС $\varepsilon_1 = 250$ В и $\varepsilon_2 = 200$ В поддерживаются постоянные разности потенциалов (рис. 9). На каком расстоянии x от первой сетки скорость частицы будет равна скорости, которую она имела вдали от сеток? Расстояние d между сетками много меньше размеров сеток.

4. На вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом K и анодом A равно d , подано постоянное напряжение U (рис. 10). Диод находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно плоскости электродов. При какой минимальной величине индукции маг-

нитного поля электроны, покидающие поверхность катода, не смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода можно считать неподвижными, а полем тяжести можно пренебречь. Заряд электрона e , его масса m .

Задачи с проводящими сферами

1. $\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$; уменьшится на $\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_2}$.
2. $q_1 = -q \frac{R_2/R - 1}{R_2/R_1 - 1}$, $q_2 = -q \frac{1 - R_1/R}{1 - R_1/R_2}$.
3. $Q = -q \frac{R}{l}$ при $l > R$, $Q = -q$ при $l < R$.
4. $Q = -\left(q_1 + q_2 \frac{R}{l_2} \right)$. 5. $Q_R = -\frac{q}{4}$, $Q_{3R} = \frac{q}{4}$.

Конденсаторы в электростатическом поле

1. $F = q \frac{q(d_2 - d_1)/(2\epsilon_0 S) + \epsilon}{d_1 + d_2}$.
2. $E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{l_2}{l_1 + l_2}$, $E_2 = -\frac{Q}{\epsilon_0 S} \frac{l_1}{l_1 + l_2}$.
3. $E_0 = \sqrt{\frac{3A}{\epsilon_0 S d}}$. 4. $a = \frac{\epsilon_0 S U^2}{m(d - l)^2}$.

Электростатическое поле в веществе

1. 1) $\Delta W = \frac{\epsilon_0(1 - \epsilon) S U^2}{2d} \approx -3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$,
 $A = -\Delta W \approx 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$;
- 2) $\Delta W = \frac{\epsilon_0 \epsilon (\epsilon - 1) S U^2}{2d} \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$, $A = \Delta W \approx 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$.
2. $k = \frac{1}{\epsilon + 1}$.
3. $h = \frac{\epsilon - n}{\epsilon - 1} \frac{d}{n} \approx 0,2 \text{ мм}$.
4. $E = \frac{\epsilon \epsilon}{\epsilon(d - h) + h}$ при $h < \frac{d}{2}$, $E = \frac{\epsilon}{\epsilon(d - h) + h}$ при $h > \frac{d}{2}$.

Заряженные частицы в электростатическом поле

1. $\alpha \geq 30^\circ$.
2. $x = \frac{eUl}{2dW} \left(\frac{l}{2} + L \right) = 0,5 \text{ см}$.
3. $W = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \approx 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$.
4. $A = 2qlE$.

Конденсаторы в цепях постоянного тока

1. $Q = \frac{C\epsilon^2}{2} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2$.
2. 1) $\epsilon = \frac{4U_1}{3} = 16 \text{ В}$; 2) $U_2 = \frac{5\epsilon}{16} = 5 \text{ В}$.
3. 1) $I_2 = \frac{\epsilon}{R_2} = 1,5 \text{ А}$; 2) $I_6 = \frac{\epsilon(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} - \frac{I_3 R_3}{R_2} = 4,05 \text{ А}$.
4. 1) $I_{06} = \frac{\epsilon}{r}$; 2) $Q = \frac{(C_1 + C_2 + C_3)\epsilon^2}{2}$.

Электрические цепи постоянного тока

1. $r = \frac{R}{2} = 5 \text{ Ом}$.
2. $Q = \frac{C\epsilon^2}{2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$; $Q_{R_1} = \frac{C\epsilon^2}{2} \frac{R_1(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$,
 $Q_{R_2} = \frac{C\epsilon^2}{2} \frac{R_2(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)^2}$, $Q_{R_3} = 0$.
3. $\epsilon = \frac{8U_1}{5} = 24 \text{ В}$; $U_2 = \frac{8U_1}{15} = 8 \text{ В}$.
4. $I_R = \frac{\epsilon_1 r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} = 1 \text{ А}$, ток течет справа налево.
5. $I = \frac{\epsilon(L_1 - L_2)}{2RL_1}$.

Нелинейные элементы в электрических цепях

1. $I = 10 \text{ мкА}$, $U = 3 \text{ кВ}$.
2. $R < 40 \text{ кОм}$.
3. $P_T = 0,43 \text{ Вт}$.
4. $A = 0,125 \text{ А/В}^2$.

Электрические цепи с нелинейными элементами

1. Сопротивление надо уменьшить на 200 мОм.

$$2. a = \frac{1}{\sqrt{P_X (R_2 R_3 / R_1)^3}} = 0,125 \text{ А/В}^2.$$

$$3. I_0 = \frac{\varepsilon - U_0}{R} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А}; \quad q = C(\varepsilon - U_0) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$

$$Q_R = \frac{C(\varepsilon - U_0)^2}{2} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Магнитные явления

$$1. B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi^2 r^2 \sqrt{\pi \varepsilon_0 r m}} \approx 4 \text{ Тл}.$$

$$2. I = \frac{mg}{\sqrt{2} a B}.$$

3. Внутри металла $B = \mu_0 q \omega / (2\pi) = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Тл}$, а в полости цилиндра и во внешнем пространстве магнитное поле отсутствует.

$$4. l = \frac{mv_0}{\sqrt{\alpha^2 + (qB)^2}}.$$

Электромагнитная индукция

1. Ток в перемычке направлен снизу вверх и равен

$$I = \frac{Bva}{R + \rho \frac{(a+2x)(3a-2x)}{4aS}}.$$

$$2. \frac{v_1}{v_2} = 0,5.$$

$$3. B = \frac{1}{4R} \sqrt{\frac{3rF}{v}}.$$

$$4. U = k\pi r_0^2 \frac{R}{\rho_1 \frac{4\pi r_1}{3S_1} + 3R}, \quad U^* = k\pi r_0^2 \frac{R}{\rho_1 \frac{2\pi r_1}{3S_1} + \frac{3}{2}R}, \quad \text{при } R \rightarrow \infty$$

$$U = \frac{1}{3} k\pi r_0^2 \quad \text{и} \quad U^* = \frac{2}{3} k\pi r_0^2.$$

Колебательный контур

$$1. I_m = \frac{2q}{\sqrt{5LC_1}}.$$

$$2. I_0 = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{3L}}.$$

$$3. I_0 = \frac{q_0(C_1 + C_2)}{C_2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{L(C_1 + \varepsilon C_2)}}.$$

$$4. \frac{d_2 - d_1}{d_1} \geq \pi R \sqrt{\frac{C_1}{L}}.$$

Заряженные частицы и поля

$$1. \quad h = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2AmU}{e}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(LB)^2 e}{2AmU}} \right) \approx 1,9 \text{ см}.$$

$$2. \quad v_{\min} = \frac{\sqrt{2Ue/m}}{\cos \alpha} \approx 9,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

$$3. \quad x = \frac{d\epsilon_2}{2\epsilon_1} = 0,4d.$$

$$4. \quad B_{\min} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Приложение к журналу «Квант» №2/2003

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ВЫПУСК 2

Составители

В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

Редактор *В.А.Тихомирова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 63

Подписано к печати 26.02.03. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 8 печ.л.

Тираж 5000 экз. Заказ 584.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП «Чеховский полиграфический комбинат»

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536