

Приложение к журналу

КВАНТ

№2/94

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

Бюро



Квантум

ШКОЛА
В «КВАНТЕ»

АРИФМЕТИКА
И АЛГЕБРА



Москва 1994
Бюро «Квантум»

Ш67 Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра / под ред. А. А. Егорова.— М.: Бюро квантум, 1994.— 128 с. (Прил. к журналу «Квант»)

Книга представляет собой сборник статей по арифметике, алгебре и основам комбинаторики, тематика которых либо присутствует в школьной программе, либо близка к ней, но изучается лишь в факультативных курсах или классах с углубленным изучением математики. Во всех статьях изложение предмета вполне автономно и доступно читателю, впервые знакомящемуся с ним.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга, которую вы держите в руках, представляет собой сборник статей по арифметике, алгебре и основам комбинаторики, опубликованных в разные годы в журнале «Квант», в основном, под рубриками «По страницам школьных учебников» и «Школа в «Кванте»». В сборник вошли материалы, тематика которых либо присутствует в школьном курсе, либо близка к нему, но входит лишь в программу факультативов или классов с углубленным изучением математики. В любом случае будет полезно (и, надеемся, интересно) прочитать о теории чисел, комбинаторике или, скажем, комплексных числах. Изложение предмета во всех статьях автономно и вполне доступно неискушенному читателю.

Представляется, что такое издание, объединяющее под одной обложкой статьи, посвященные различным разделам математики, будет способствовать более глубокому пониманию школьной программы и расширению кругозора — пока в арифметике и алгебре.

В дальнейшем мы планируем выпустить продолжения «Школы в «Кванте», куда войдут статьи разных лет по геометрии и началам анализа.

ПРОСТО О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Г. Гальперин

Бесконечность множества простых чисел

Все знают, что большинство натуральных чисел раскладываются на множители: $10=2\cdot 5$, $60=3\cdot 4\cdot 5$, $111=3\cdot 37$, $144=3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$ и так далее. Такие числа называются *составными*. Но среди натуральных чисел есть и такие, которые подобным образом на множители не раскладываются: например, 11 нельзя представить в виде произведения двух меньших натуральных чисел, оба из которых больше 1; 11 называют простым числом. Вообще, *простыми* числами (или «первоначальными» — по выражению древних греков) называются такие натуральные числа, которые нельзя разложить на два сомножителя, больших 1 (саму единицу не относят к простым числам). Вот несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41... Среди них ровно одно четное — 2, остальные числа нечетные.

Задача 1. Найдите все пары простых чисел, отличающихся а) на 1, б) на 17.

С первого же взгляда видно, что ряд простых чисел несколько причудлив; никакого простого закона в его строении не обнаруживается.

Имеет ли этот ряд конец? Этот вопрос поставлен в IX книге «Начал» Евклида, и там же дается ответ на него: *за каждым простым числом может быть указано еще одно, большее простое число — ряд простых чисел бесконечен.*

Доказательство этого утверждения, данное Евклидом, необычайно остроумно. Евклид рассуждал так: если простых чисел лишь конечное число и p — наибольшее из них, то число $N=2\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot p+1$, поскольку оно больше p , — не простое, а поэтому делится на какое-то простое число из имеющихся простых от 2 до p (ведь других простых чисел, по предположению, нет!). Однако N не делится ни на одно из этих чисел, так как остаток от деления N на любое из них равен 1. Полу-

ченное противоречие доказывает, что простых чисел не конечное количество, а бесконечное.

Это доказательство «методом от противного» говорит о *существовании* сколь угодно больших простых чисел, но не говорит, как явно найти хотя бы одно простое число, большее p . Впрочем, это сделать не сложно: для этого достаточно проверить на простоту натуральные числа на отрезке от $p+1$ до N — среди них обязательно есть простое. Действительно, если само N не простое, то оно делится на простое число, притом (как мы видели) *большее p , но меньшее N* , т. е. расположенное на отрезке $[p; N]$.

Отрезки с простыми числами

Разбиение числовой прямой на отрезки, в каждом из которых содержится простое число, можно производить и по-другому. Докажем предварительно следующее **утверждение**: *наименьший делитель числа $N = n! + 1$ (где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$) является простым числом, большим n .*

Обозначим этот наименьший делитель через p . Так как $n! + 1$ не делится ни на одно из чисел $2, 3, 4, \dots, n$, получаем $p > n$. С другой стороны, если предположить, что p — составное число, т. е. p делится на некоторое число, меньшее p , то p не будет *наименьшим* делителем $n! + 1$, что противоречит предположению. Итак, p — простое число, большее n , что и требовалось доказать.

Из этого доказательства вытекает, что на любом отрезке $[n; n! + 1]$ находится хотя бы одно простое число. А тогда числа $2, 2! + 1, (2! + 1)! + 1, ((2! + 1)! + 1)! + 1$ и т. д. разбивают всю числовую прямую на бесконечное число отрезков, в каждом из которых содержится не менее одного простого числа; мы вновь доказали, что простых чисел бесконечно много.

Оказывается, что уже в каждом из отрезков $\{2; 4\}, \{4; 8\}, \{8; 16\}, \{16; 32\}, \dots$ содержится не менее одного простого числа. Но это — трудная теорема, известная под названием «постулат Бертрана», которая звучит так: *между числами n и $2n-2$ при $n > 7$ всегда расположено простое число*. Постулат Бертрана доказал в 1852 г. известный русский математик Пафнутий Львович Чебышёв (1821—1894).

Задача 2. Докажите, что если $(p-1)! + 1$ делится на p , то p — простое число. *Указание.* Используйте доказательство утверждения.

Задача 3. Докажите, используя постулат Бертрана, что для любого натурального n существует по крайней мере а) одно простое n -значное число; б) 3 простых n -значных числа. *Указание.* Числа $10^{n-1}, 2 \cdot 10^{n-1}, 4 \cdot 10^{n-1}$ и $8 \cdot 10^{n-1}$ — n -значные.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	13	53	117	177	196	175	130	72	47	11	4

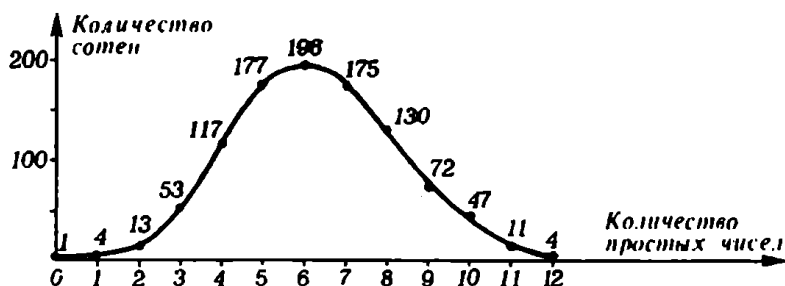


Таблица 1. Фрагмент распределения простых чисел.

В таблице показано, как меняется число простых чисел на интервале от 8 900 000 до 9 000 000, разбитом на 1 000 сотен. В каждом столбце таблицы нижнее число указывает количество тех сотен рассматриваемого интервала, в которых число простых чисел равно соответствующему верхнему числу столбца. Например, в одной сотне вообще нет простых чисел, в 117 сотнях встречается по 4 простых числа, в 130 сотнях — по 8 простых чисел.

Заметьте, что доказательство Евклида дает вовсе не *ближайшее* следующее за p простое число, а лишь некоторое число, лежащее обычно весьма далеко от p . Например, в качестве простого числа, заведомо превышающего 11, доказательство дает не 13, а 2311; за 13 оно дает не 17, а 59 — простой делитель числа 30031.

Отрезки без простых чисел

Чтобы дать конкретное представление о сложности структуры множества простых чисел, покажем, что *в ряду простых чисел встречаются сколь угодно большие пробелы*; так, например, среди миллиона идущих подряд чисел может не оказаться ни одного простого числа. В самом деле, обозначим число миллион буквой N и рассмотрим миллион следующих чисел:

$$(N+1)!+2, (N+1)!+3, \dots, (N+1)!+(N+1).$$

Первое из этих чисел делится на 2, второе — на 3, третье — на 4 и так далее; произвольное, k -е число $(N+1)!+k$ делится на k , так как оба слагаемых делятся на k . Итак, *все N (миллион)*

n	A_n/n	$1/\ln n$	$A_n/n:1/\ln n$
100	0,168	0,145	1,159
1 000 000	0,078498	0,072382	1,084
1 000 000 000	0,050847478	0,048254942	1,053

Таблица 2. Частота распределения простых чисел в натуральном ряде. A_n — количество простых чисел среди первых n натуральных чисел. Отношение A_n/n тем ближе к $1/\ln n$, чем больше n (частное $A_n/n:1/\ln n$ практически не отличается от 1 при $n=10^9$).

указанных чисел составные. Конечно, нам пришлось зайти довольно далеко в ряду простых чисел, прежде чем встретить пробел длиной в миллион последовательных чисел; совершенно ясно, что можно точно так же отыскивать пробелы сколь угодно большой величины.

Интересно, что вопрос о сколь угодно больших пробелах в ряду простых чисел как по характеру постановки, так и по методу доказательства, не встречается ни у кого из греческих математиков. Вот еще один вопрос, выдвинутый новой математикой.

Арифметические прогрессии и простые числа

Рассмотрим все натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 2: 2, 5, 8, 11, 14, ...; общий вид таких чисел $3n+2$. Докажем, что *и среди них бесконечно много простых чисел.* Для этого придется несколько видоизменить доказательство Евклида, а именно, вместо числа $N=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$ рассматривать число $M=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p-1$, которое, будучи на 1 меньше кратного 3, принадлежит к последовательности 2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n+2$, ...

Задача 4. Приведите полное доказательство того, что M имеет вид $3n+2$.

Число M , так же как и N , не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p . Является ли M простым или же раскладывается на несколько простых множителей — в обоих случаях эти простые числа будут больше p . Но имеется ли среди полученных множителей такой, который имел бы вид $3n+2$, т. е. содержался бы в последовательности 2, 5, 8, 11, ...? Допустим, что нет, т. е. предположим, что все простые множители M имеют вид $3k+1$. Но тогда и их произведение имеет вид $3k+1$ (см. задачу 5, а), а это противоречит тому, что M имеет вид $3n+2$

(см. задачу 4). Следовательно, наше допущение неверно, и хотя бы один простой множитель числа M имеет вид $3k+2$. Поэтому простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

Задача 5. а) Докажите, что произведение любого количества чисел вида $3k+1$ также имеет вид $3k+1$. б) Докажите аналогичное утверждение для чисел вида $4k+1$; в) для чисел вида $6k+1$.

Приведенное рассуждение (с небольшим видоизменением) дает инструмент для доказательства бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$ и $6k+5$. Предварительно предлагаем читателям подумать над следующей задачей.

Задача 6. Докажите, что любое простое число, большее 3, имеет вид: а) $4k+1$ или $4k+3$; б) $6k+1$ или $6k+5$.

Здесь мы докажем только *бесконечность множества простых чисел вида $6k+5$* . Доказательство проведем «от противного» в духе, присущем первоначальному доказательству Евклида. Предположим, что простых чисел такого вида лишь конечное число: p_1, p_2, \dots, p_n . Рассмотрим число

$$K = 6p_1p_2\dots p_n - 1 = 6(p_1p_2\dots p_n - 1) + 5.$$

Одно из двух: либо число K само простое, либо оно разлагается на конечное число простых множителей, среди которых нет ни одного из чисел p_1, p_2, \dots, p_n (почему?), и не все из которых имеют вид $6k+1$, поскольку само K не имеет этого вида (см. задачу 5, в). Значит, один из простых множителей числа K , не совпадая с p_1, p_2, \dots, p_n , имеет вид $6k+5$, что противоречит сделанному нами предположению. Это противоречие показывает, что список простых чисел вида $6k+5$ бесконечен.

Задача 7. Проведите доказательство бесконечности множества простых чисел вида $6k+5$, указав явный способ для нахождения этих чисел.

Задача 8. Проведите подробное доказательство бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$. *Указание.* Учтите произведение чисел этого вида и вычтите из произведения 1.

Задача 9. Докажите, что простых чисел, не оканчивающихся на 1 (т. е. оканчивающихся на 3, на 7 и на 9), бесконечно много. *Указание.* Рассмотрите все простые числа вида $10k+a$, где $a \neq 1$, и проведите рассуждения, аналогичные изложенным выше.

Обобщением рассмотренных вопросов является следующая теорема, сформулированная в 1788 г. французским математиком Лежандром и доказанная немецким математиком Дирихле в 1837 г.

Теорема. В любой бесконечной арифметической прогрессии $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$, в которой первый член a взаимно прост с разностью d , содержится бесконечно много простых чи-

сел. Иными словами, функция $y = dx + a$, где a и d — взаимно простые целые числа, принимает бесконечно много простых значений, когда x пробегает последовательно ряд натуральных чисел.

Доказательство Дирихле не элементарно, и в течение долгих лет не было видно никаких элементарных подходов к доказательству этой замечательной теоремы. Элементарное доказательство было впервые получено в 1949 г. (через 161 год после Лежандра!) видным датским математиком А. Сельбергом, доказавшим многие очень трудные теоремы теории чисел без использования высшей математики.

Близнецы

Вспомним первую задачу, сформулированную в самом начале статьи. Как вы, наверное, догадались, если два простых числа отличаются на *нечетное* число p (на 1 или 17, как в задаче 1), то одно из этих простых чисел четно и, стало быть, равно 2. Поэтому другое простое число q отличается от p на 2. Если к тому же и p — простое число (как $p = 17$ в задаче 1), то простые числа p и q называются *числами-близнецами*; в задаче 1 это числа 17 и 19.

Задача 10. Докажите, используя теорему Дирихле, что существует бесконечно много простых чисел, не принадлежащих ни к одной паре простых чисел-близнецов. *Указание.* Все эти простые числа следует брать, например, из арифметической прогрессии $\{15k + 7\}$.

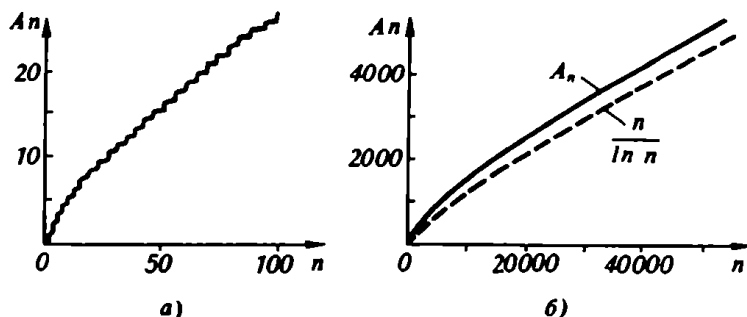
Возникает вопрос: сколько существует пар чисел-близнецов? Например, на отрезке от 0 до 100 000 таких пар 1225, а в интервале от 8 000 000 до 8 100 000 их всего 518. Прекратятся ли когда-нибудь такие пары в бесконечно далеко простирающемся ряде простых чисел? Ни на этот, ни на более общий вопрос, поставленный великим немецким математиком Давидом Гильбертом на Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г., — *всегда ли разрешимо в простых числах x и y линейное уравнение $ax + by = c$ с целыми коэффициентами a, b, c , где a и b взаимно просты?* — ответа до сих пор не получено.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число, большее единицы, допускает одно и только одно (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители.

Интервал	Число простых	Число простых близнецов
$10^8 \div 10^8 + 150\,000$	8154	601
$10^9 \div 10^9 + 150\,000$	7242	466
$10^{10} \div 10^{10} + 150\,000$	6511	389
$10^{11} \div 10^{11} + 150\,000$	5974	276
$10^{12} \div 10^{12} + 150\,000$	5433	276
$10^{13} \div 10^{13} + 150\,000$	5065	208
$10^{14} \div 10^{14} + 150\,000$	4643	186
$10^{15} \div 10^{15} + 150\,000$	4251	161

Таблица 3. Простые числа и числа-близнецы в восьми интервалах длины 150 000.



На рисунках *a* и *б* изображены графики функции A_n — количества простых чисел на отрезке $[1; n]$. Из графика рисунка *a* видно, что A_n растет довольно регулярно, несмотря на локальные колебания. Если же увеличить область изменения n до 50 000, то регулярность A_n (рисунок *б*) становится настолько очевидной, что захватывает дух. Плавность, с которой поднимается эта кривая, следует отнести к числу удивительнейших фактов математики. Отметим, что A_n при очень больших n примерно равно $\frac{n}{\ln n - 1,08366}$.

Доказательство. Если существует хотя бы одно число, допускающее два разложения на различные простые множители, то существует непременно и *наименьшее* число N , обладающее этим свойством:

$$N = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m,$$

где через p и q обозначены простые числа. Меняя, если потребуется, порядок этих множителей, мы можем допустить, что

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n, \quad q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m.$$

Заметим, что $p_1 \neq q_1$, так как в случае $p_1 = q_1$ натуральное число $N/p_1 = N/q_1$, меньшее N , имело бы *два* разных разложения на простые множители, что противоречит предположению о минимальности N . Предположим, что $p_1 < q_1$, и рассмотрим число

$$N' = N - p_1 q_2 \dots q_m.$$

Легко видеть, что число

$$N' = p_1(p_2 p_3 \dots p_n - q_2 q_3 \dots q_m) = (q_1 - p_1) q_2 q_3 \dots q_m$$

положительно и меньше N . Значит, по нашему предположению, N' имеет *единственное* разложение на простые множители. Но так как простое число p_1 входит в разложение N' , то p_1 входит в $q_1 - p_1$ или в $q_2 q_3 \dots q_m$. Из неравенств $p_1 < q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_m$ следует, что p_1 не входит множителем в $q_2 q_3 \dots q_m$. Поэтому p_1 входит множителем в $q_1 - p_1$, т. е. $q_1 - p_1$ делится на p_1 . А тогда и q_1 делится на простое число p_1 . Этого, однако, быть не может, так как q_1 — число простое. Противоречие, к которому мы пришли, показывает несостоятельность первоначально сделанного допущения, чем и заканчивается доказательство.

Замечание. Из доказательства основной теоремы арифметики становится понятным, почему единицу не относят к простым числам. Если ее включить в число простых, то любое натуральное число начинает раскладываться на простые множители многими способами, поскольку в разложение можно добавлять произвольное число единиц.

Вот одно важное следствие основной теоремы арифметики: *если простое число p входит множителем в произведение ab , то оно входит множителем или в a , или в b* . Действительно, если бы p не входило множителем ни в a , ни в b , то, перемножив разложения на простые множители чисел a и b , получили бы разложение на простые множители числа ab , не содержащее множителя p . С другой стороны, справедливо равенство $ab = p^t l$, где l — некоторое натуральное число. Поэтому, перемножая p и разложение на простые множители числа l , получаем разложение числа ab на простые множители, уже содержащее множитель p . Таким образом, получаются *два* разложения ab на различные простые множители, что противоречит основной теореме.

Из основной теоремы вытекает, что число N представляется в виде

$$N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s},$$

где k_1, \dots, k_s — количества различных простых делителей p_1, \dots, p_s соответственно в разложении N . Все делители N имеют вид $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s}$, где $0 \leq r_1 \leq k_1, \dots, 0 \leq r_s \leq k_s$.

Проверка простоты

При разложении N на множители или проверке его на простоту следует проверять делимость N на последовательные простые числа 2, 3, 5, 7, ... При проверке числа N на простоту достаточно ограничиться испытанием простых делителей, не превосходящих \sqrt{N} . Действительно, если $N=ab$, то меньшее из чисел a, b не больше \sqrt{N} (если оба были бы больше \sqrt{N} , то их произведение было бы больше N), и из делимости N на a автоматически следует, что N делится и на N/a (так что делимость на N/a проверять уже не нужно). Первым математиком, указавшим на это, был Фибоначчи (Леонардо Пизанский).

Примеры. а) Если $N=91$, то $\sqrt{91} < 10$; проверив простые числа 2, 3, 5, 7, находим, что $91=7 \cdot 13$.

б) Если $N=1987$, то $\sqrt{N} < 45$, и так как N не делится ни на одно из простых чисел до 43, то 1987 — простое.

В некоторых случаях при определении простоты числа N можно не производить указанных делений на простые числа. Следующее несложное утверждение, сформулированное Эйлером еще в XVIII веке, позволяет определить простоту числа N совсем другим способом.

Первый критерий Эйлера. Если нечетное число $N > 1$ может быть представлено в виде разности квадратов двух натуральных чисел более чем одним способом, то N — составное; если же такой способ только один, то N — простое.

Доказательство. Считаем N не точным квадратом, поскольку точный квадрат всегда составное число. Пусть

$$N = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n).$$

Отсюда следует, что $m - n$ и $m + n$ — делители N . Если N простое, то $m - n = 1$, $m + n = N$ и числа $m = (N + 1)/2$, $n = (N - 1)/2$ определяются числом N однозначно, а поэтому N не может быть представлено еще и другим способом в виде разности двух квадратов.

Если же N составное, т. е. $N = ab$, причем $a > b > 1$ — нечетные числа, то, взяв $x = (a + b)/2$ и $y = (a - b)/2$, получаем: $a = x + y$, $b = x - y$, откуда $N = ab = x^2 - y^2$; получено еще одно представление N в виде разности двух квадратов.

Отсюда вытекает, что если N представляется более чем одним способом в виде разности квадратов, то N не может быть простым: для простого N такое представление единственно. Если же N представляется *ровно* одним способом в виде раз-

ности квадратов, то N не может быть составным (по доказанному выше), стало быть, оно простое.

Этот критерий дает возможность вместо испытания делителей N пользоваться таблицей квадратов, и, прибавляя последовательно к N квадраты n^2 целых чисел, проверять, получается ли в сумме при $n < (N-1)/2$ точный квадрат или нет.

Разложим, например, 3551 на множители этим способом. Добавляя к 3551 последовательно числа $1^2, 2^2, 3^2, \dots$, проверяем каждый раз, является ли полученная сумма точным квадратом. Проверка (с помощью таблицы квадратов) показывает, что $3551 + 7^2 = 60^2$. Значит, $3551 = 60^2 - 7^2 = 53 \cdot 67$.

Задача 11. Разложите указанным способом на множители числа 6557, 19 019, 209 209.

Несложно также доказывается

Второй критерий Эйлера. Если натуральное число N может быть представлено в виде суммы двух квадратов натуральных чисел более чем одним способом (считается, что перестановка слагаемых не дает нового способа), то N — составное число.

Из второго критерия Эйлера следует, что если простое число представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, то только одним способом. Но какие простые числа представляются в таком виде?

Задача 12. Докажите, что числа вида $4k+3$ не могут быть представлены в виде суммы двух квадратов. *Указание.* Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного дает в остатке 1.

Претендентами остаются простые числа вида $4k+1$, и, как доказал Пьер Ферма, все такие числа представляются в виде суммы двух квадратов. Поэтому нетрудно ответить, например, на такой вопрос: какие из трех простых чисел 1973, 1979 и 1987 представимы в виде суммы двух квадратов?

В заключение предлагаем еще несколько задач.

Задачи

13. а) Докажите, что при всех натуральных n число $N = n^4 + 4$ — составное (*теорема Софи Жермен*). б) Докажите, что при всех натуральных m и n число $N = n^4 + 4m^4$ составное. *Указание.* $N = (n^2 - 2m^2)^2 + (2mn)^2$; примените второй критерий Эйлера.

14. Найдите все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

15. Докажите, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

16. Докажите, что если p и $p^2 + 2$ — простые числа, то $p^4 + 2$ — тоже простое число.

17. Какие простые числа представляются в виде суммы двух кубов натуральных чисел?

18. Каково n , если $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15$ — простые?

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ

А. Егоров

Третьего сентября 1990 года мне понадобилось узнать, каким днем недели будет 20 декабря 1991 года. Календаря у меня под рукой не было, поэтому пришлось заняться подсчетами. Я знал, что 3 сентября — понедельник, а с 3-го сентября 1990 года по 20-е декабря 1991 года проходит $27 + 31 + 30 + 20 + 365 = 473$ дня, т. е. 67 полных недель и еще 4 дня ($473 = 67 \cdot 7 + 4$). Следовательно, 20-е декабря 1991 года — пятница.

Возводя в квадрат многозначное число, ученик получил ответ 46 991 075. Учитель, заглянув в его тетрадку, сразу сказал: «Ответ неверен!» Как он это понял?

Упражнение 1. Подумайте, может ли квадрат целого числа оканчиваться цифрами 75.

Дальше мы увидим, что в основе решения и этой нехитрой задачи, и многих других лежат соображения делимости. Однако сначала нам нужно вспомнить, что такое деление с остатком.

Деление с остатком

Определение. Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком значит записать a в виде $a = qb + r$, где q и r неотрицательные целые числа, причем $r < b$. Число q при этом называется частным, а r — остатком от деления a на b .

На практике деление с остатком выполняют обычным способом, т. е. «делением углом». Например:

$$\begin{array}{r} 179 \overline{) 1412} \\ \underline{14} \\ 39 \\ \underline{28} \\ 11 \end{array}$$

Здесь сразу видны остаток 11 и частное 12: $179 = 12 \cdot 14 + 11$.

Заметим, что в данном определении мы не требуем, чтобы a было больше, чем b . Можно, например, разделить 5 на 7: $5 = 0 \cdot 7 + 5$. Вообще, если $a < b$, то $a = 0 \cdot b + a$, т. е. в этом случае $q = 0$, $r = a$.

Замечание. Можно определить деление с остатком любого целого числа a на любое целое число b так: *разделить a на b с остатком значит представить a в виде $a = qb + r$, где q — целое, а $0 \leq r < |b|$* . Например, при $a = -15$, $b = 7$: $-15 = (-3) \cdot 7 + 6$; при $a = -224$, $b = -9$: $-224 = 15 \cdot (-9) + 1$ и т. п.

Если остаток равен нулю, т. е. $a = qb$, говорят, что a делится на b .

Очень важно следующее простое наблюдение. Если a и b делятся на c , то при любых целых k и l число $ka + lb$ делится на c .

Задача 1. Числа $7n + 1$ и $8n + 3$ делятся на некоторое натуральное число $d \neq 1$. Найдите d .

Решение. Поскольку $7(8n + 3) - 8(7n + 1) = 13$, число 13 делится на d , то $d = 13$ (так как $d \neq 1$ и 13 — простое число).

Упражнения

2. Разделите с остатком

а) 1931 на 17; б) -295 на 31; в) -1005 на -98 .

3. Число $17x + 3y$ делится на 61. Докажите, что $8x + 5y$ тоже делится на 61 (x и y — целые).

4. Найдите остатки от деления чисел

а) n на $n - 1$ и на $n - 2$;

б) $n^2 + n + 1$ на $n + 1$ и на $n + 2$;

в) $n^4 + 1$ на $n + 3$ ($n \geq 80$).

5. Найдите все целые n , при которых будет целым число

а) $\frac{n^2 + 1}{n - 1}$; б) $\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1}$.

Сравнения по модулю

Давайте сразу условимся, что все числа, о которых пойдет речь дальше, будут целыми, так что в последующем это не будет специально оговариваться. Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. На какую цифру оканчивается число 2^{999} ?

Решение. Выпишем последовательные степени двойки:

2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Легко видеть, что последние цифры этих чисел повторяются через 4, так что последняя цифра числа 2^n зависит только от того, какой остаток при делении на 4 дает показатель n . Поскольку $999 = 996 + 3 = 4 \cdot 249 + 3$, ответ в нашей задаче: 8.

В этом примере все множество показателей степени разбилось на 4 класса, состоящих из чисел n вида

$$4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3.$$

Вообще, для любого натурального числа m все целые числа (не только положительные!) разбиваются на m классов. Каждый класс при этом состоит из чисел, дающих при делении на m одинаковые остатки.

Вот эти классы:

0) числа a вида $a = km$,

1) $\dots a \dots a = km + 1$,

$m-1) \dots a \dots a = km + m - 1$.

Ясно, что любое число принадлежит одному из выписанных классов. При этом разность любых двух чисел из одного класса делится на m , а разность двух чисел из разных классов на m не делится.

Определение. Если разность целых чисел a и b делится на натуральное число m , то говорят, что a и b сравнимы по модулю m .

Записывается сравнимость чисел по модулю m так:

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу, т. е. дают одинаковые остатки при делении на m . Иначе говоря, $a \equiv b \pmod{m}$ означает, что $a = b + km$, где k — целое число. Например, $27 \equiv 7 \pmod{10}$, $78 \equiv 6 \pmod{24}$, $6 \equiv 0 \pmod{3}$, $25 \equiv -4 \pmod{29}$.

Упражнения

6. Докажите, что а) $a^3 \equiv a \pmod{6}$, б) $a^4 \equiv a \pmod{5}$.

7. Докажите, что число

$$\frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!}$$

— целое.

8. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100}$ по модулям 5, 13, 211.

9. Докажите, что $11^{10} - 1$ делится на 100.

10. Пусть $S(N)$ — сумма цифр числа N . Докажите, что $N \equiv S(N)$ по модулям 3 и 9.

11. Пусть $S(A) = S(5A)$. Докажите, что $A \equiv 0 \pmod{9}$.

12. Некоторое число записывается в десятичной системе счисления с помощью 1991 единицы и некоторого количества нулей. Может ли оно быть полным квадратом?

13. Пользуясь тем, что $10 \equiv -1 \pmod{11}$, докажите признак делимости числа на 11: число $a = a_n a_{n-1} \dots a_0 \equiv 0 \pmod{11}$ тогда и только тогда, когда

$$(-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_0$$

делится на 11.

Свойства сравнений

Сравнения по своим свойствам напоминают обычные равенства:

- 1) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
Далее, если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
- 2) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$,
- 3) $a - c \equiv b - d \pmod{m}$,
- 4) $ac \equiv bd \pmod{m}$,

т. е. сравнения, как и обычные равенства, можно складывать, вычитать и перемножать.

Докажем, например, свойство 4. Так как $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a - b$ и $c - d$ делятся на m .

Из равенства $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$ получается, что число $ac - bd$ делится на m , т. е.

$$ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Упражнение 14. Докажите остальные свойства сравнений.

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$. Из уже установленных свойств сравнений следует

- 5) для любого натурального k

$$a^k \equiv b^k \pmod{m}.$$

Кроме того, в некоторых случаях сравнения можно сокращать на общий множитель левой и правой частей:

- 6) если $ac \equiv bc \pmod{m}$, а числа c и m взаимно просты, то

$$a \equiv b \pmod{m};$$

- 7) если $a \equiv b \pmod{m}$, k — целое число и $a = ka_1$, $b = kb_1$, $m = km_1$, то

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{m_1}.$$

Иначе говоря, обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель.

Докажем свойство 6. Число $c(a - b)$ делится на m . Так как c и m взаимно просты, то число $a - b$ делится на m . Поэтому

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Упражнение

15. Докажите свойство 7.

Из сказанного следует, что

в любом алгебраическом выражении, полученном из целых чисел a, b, c, \dots, z с помощью сложений, умножений и вычитаний, можно заменить эти числа их остатками от деления на m , не изменяя при этом остатка, который дает это выражение при делении на m .

Решим теперь следующую задачу.

Задача 3. Найдите остаток от деления на 3 числа

$$N = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1) \dots (1000^2 + 1).$$

Решение. Из сделанного выше замечания следует, что

$$\begin{aligned} N &\equiv (1^2 + 1)^{334} \cdot (2^2 + 1)^{333} \cdot (3^2 + 1)^{333} \equiv \\ &\equiv 2^{334} \cdot 2^{333} \cdot 1^{333} = 2^{667} = 2 \cdot (2^2)^{333} = 2 \cdot 1^{333} = 2. \end{aligned}$$

Задача 4. При каких натуральных n число $8n + 3$ делится на 13 (см. задачу 1)?

Решение. Запишем, пользуясь свойствами сравнений, следующую цепочку соотношений.

Пусть $8n + 3 \equiv 0 \pmod{13}$, тогда

$$8n \equiv -3 \pmod{13},$$

$$8 \cdot 8n \equiv -24 \pmod{13},$$

$$-n \equiv -24 \equiv -11 \pmod{13}.$$

Откуда $n \equiv 11 \pmod{13}$.

Окончательно, $8n + 3$ делится на 13, если и только если $n = 13k + 11$.

Упражнения

16. Найдите остатки от деления чисел

а) $2^{1991} + 1$ на 17;

б) $(3^{20} + 11)^{55}$ на 13.

17. Докажите, что число

а) $2^{50} + 1$ делится на 125;

б) $2^{46} - 1$ делится на 105;

в) $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2} .

18. Найдите все простые числа p , для которых $20p^2 + 1$ — тоже простое число.

19. Докажите, что число

а) $1^{1991} + 2^{1991} + \dots + 30^{1991}$ делится на 31;

б) $1^m + 2^m + \dots + (n-1)^m$ делится на n при любых нечетных n и m .

20. При каких натуральных n число $20^n + 16^n + 3^n - 1$ делится на 323?

21. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ при любом натуральном n делится на 19.

22. При каких n сократима дробь $\frac{15n+2}{14n+3}$?

Китайская теорема об остатках

Рассмотрим m членов арифметической прогрессии

$$a, a+d, \dots, a+(m-1)d, \quad (*)$$

где a — целое число, а d — взаимно просто с m . Часто бывает очень полезной следующая

Теорема 1. Среди чисел прогрессии $(*)$ имеется ровно одно, делящееся на m .

Доказательство. Разность k -го и l -го чисел $(*)$, равная $d(k-l)$, не делится на m . Иначе оказалось бы, что $k-l$ делится на m , что невозможно, так как $|k-l| < m$.

Тем самым числа $(*)$ попарно не сравнимы по модулю m и поэтому дают различные остатки при делении на m .

Следовательно, среди чисел $(*)$ представлены все классы по модулю m , т. е. для каждого из остатков $0, 1, 2, \dots, m-1$ ровно одно из чисел $(*)$ сравнимо с ним по модулю m .

Мы доказали даже несколько более сильное утверждение, чем теорема 1.

Упражнения

23. Найдите все тройки простых чисел вида

$$p, p+2, p+4.$$

24. Найдите конечную арифметическую прогрессию с разностью 6 максимальной длины и состоящую из простых чисел.

25. Пятнадцать простых чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью d . Докажите, что $d > 30\,000$.

Теперь применим теорему 1 для доказательства так называемой китайской теоремы об остатках. Эта теорема была известна уже более 2000 лет тому назад в древнем Китае.

Теорема 2. Пусть даны n попарно взаимно простых чисел m_1, m_2, \dots, m_n и n чисел r_1, r_2, \dots, r_n таких, что $0 \leq r_i \leq m_i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тогда существует число N , дающее при делении на m_i остаток r_i .

Иначе говоря, $N \equiv r_i \pmod{m_i}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Применим индукцию по n . При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть теорема справедлива при $n = k$. Тогда существует число M такое, что

$$M \equiv r_i \pmod{m_i} \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть $d = m_1 m_2 \dots m_{k-1}$.

Рассмотрим числа

$$M, M+d, M+2d, \dots, M+(m_k-1)d.$$

Поскольку d взаимно просто с m_k , из доказательства теоремы 1 следует, что среди выписанных чисел найдется число N , дающее при делении на m_k остаток r_k . В то же время при делении на m_1, m_2, \dots, m_{k-1} число N дает остатки r_1, r_2, \dots, r_{k-1} соответственно.

Теорема доказана.

И наконец, еще одна теорема.

Теорема 3. Для любых попарно взаимно простых чисел m_1, m_2, \dots, m_n и остатков r_1, r_2, \dots, r_n по модулям m_1, m_2, \dots, m_n найдутся n последовательных чисел $a, a+1, \dots, a+n-1$ таких, что $a \equiv r_1 \pmod{m_1}, a+1 \equiv r_2 \pmod{m_2}, \dots, a+n-1 \equiv r_n \pmod{m_n}$.

Иначе говоря, для любых попарно взаимно простых модулей m_1, m_2, \dots, m_n найдутся n подряд идущих натуральных чисел, дающих соответственно любые наперед заданные остатки при делении на эти числа.

Доказательство. По китайской теореме об остатках существует такое a , что

$$\begin{aligned} a &\equiv r_1 \pmod{m_1}, \\ a &\equiv r_1 - 1 \pmod{m_2}, \\ &\dots \dots \dots \\ a &\equiv r_n - n + 1 \pmod{m_n}. \end{aligned}$$

Но тогда числа $a, a+1, \dots, a+n-1$ удовлетворяют условию теоремы.

Упражнения

26. Докажите, что среди а) любых десяти; б) любых шестнадцати последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

в) Верно ли утверждение задачи для любых 17 последовательных натуральных чисел?

27. Докажите, что для любого n существуют n последовательных натуральных чисел, каждое из которых делится на квадрат некоторого числа.

28. Существует ли в сутках момент, когда расположенные на общей оси часовая, минутная и секундная стрелки правильно идущих часов образуют попарно углы в 120° ?

29. Найдите наименьшее натуральное число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7 соответственно остатки 1, 2, 4, 6.

30. Найдите наименьшее четное число a такое, что $a+1$ делится на 3, $a+2$ — на 5, $a+3$ — на 7, $a+4$ — на 11, $a+5$ — на 13.

Как решают сравнения

Если вы помните, решая задачу 4, мы нашли все целые n , для которых $8n+3$ делится на 13.

Другими словами, мы решили сравнение

$$8n + 3 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Теперь мы можем решить эту задачу в общем виде. Итак, пусть даны взаимно простые целые числа a и m .

Решим сравнение

$$ax \equiv b \pmod{m}, \text{ где } b \text{ — любое число.}$$

По теореме 1 существует такое k , что $ak \equiv 1 \pmod{m}$.

Умножив левую и правую части данного сравнения на k , получим

$$(ak)n \equiv n \equiv bk \pmod{m},$$

откуда сразу получаем

$$n = bk + ml,$$

где l — произвольное целое число.

Возникает вопрос, как в конкретной ситуации найти k ?

Для не слишком больших m эта задача решается достаточно легко (простым подбором). Об общем решении этой и многих других задач мы поговорим в другой раз*).

Задача 5. Решите сравнение

$$32n \equiv 7 \pmod{37}.$$

Решение. Поскольку $32 \equiv -5 \pmod{37}$, приходим к сравнениям

$$5n \equiv -7 \equiv 30 \pmod{37},$$

или

$$n \equiv 6 \pmod{37}.$$

К решению сравнений сводится задача о решении в целых числах линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Задача 6. Найдите все пары целых чисел x, y , удовлетворяющих уравнению $7x - 23y = 131$.

Решение. Поскольку $23 \equiv 2 \pmod{7}$, получаем сравнения $2y \equiv -131 \pmod{7}$ или $2y \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$, откуда $y \equiv 1 \pmod{7}$.

Итак, $y = 7k + 1$, где k — целое число. Теперь без труда находим x :

$$7x - 23(7k + 1) = 131,$$

*) См. статью Ю. Соловьева «Неопределенные уравнения первой степени» в настоящем сборнике.

откуда

$$7x = 154 + 23 \cdot 7k,$$

т. е.

$$x = 22 + 23k.$$

В заключение предлагаем вам несколько упражнений.

Упражнения

31. Решите сравнения

а) $17x \equiv 19 \pmod{37}$,

б) $147x \equiv 63 \pmod{29}$.

32. Решите в целых числах уравнения

а) $7x + 8y = 1$,

б) $13x - 15y = 16$,

в) $257x + 18y = 175$.

33. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y - 7z = 1, \\ 4x + 9y + 11z = 2. \end{cases}$$

НЕОБЫКНОВЕННЫЕ АРИФМЕТИКИ

А. Егоров, А. Котова

По всей вероятности, некоторые из вас удивятся (и даже возмутятся) при виде таких равенств: $2 \cdot 2 = 1$, $2 \cdot 5 = 3$, $3 \cdot 2 = 0$ и т. д.

Однако ничего загадочного (и тем более неверного) в них нет. Дело в том, что знаки умножения и равенства означают здесь не совсем то, чему учат в школе.

Арифметика цифр

Начнем с примера. Рассмотрим цифры 0, 1, ..., 9. *Суммой (произведением)* двух цифр назовем последнюю цифру их суммы (произведения). Тогда

$$2 + 5 = 7, \quad 7 + 6 = 3, \quad 5 + 5 = 0,$$

$$7 \cdot 7 = 9, \quad 2 \cdot 5 = 0, \quad 8 \cdot 8 = 4.$$

Такие арифметические действия ничуть не хуже привычных вам сложения и умножения обычных целых чисел. В самом деле, для любых цифр a , b и c очевидно верны следующие свойства:

1. $a + b = b + a$;

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3. $a + 0 = a$;

4. для любой цифры a существует цифра $(-a)$ такая, что $a + (-a) = 0$ (например, $-4 = 6$, $-5 = 5$, $-1 = 9$);

5. $ab = ba$;

6. $a(bc) = (ab)c$;

7. $a \cdot 1 = a$;

8. $a(b + c) = ab + ac$.

Справедливость этих свойств немедленно следует из аналогичных свойств действий над целыми числами. Сразу видно, что цифры можно не только складывать, но и вычитать, положив по определению, что

$$a - b = a + (-b).$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Рис. 1

Например,

$$2 - 7 = 2 + (-7) = 2 + 3 = 5,$$

$$4 - 6 = 4 + (-6) = 4 + 4 = 8$$

и т. д.

Рассматривая таблицы сложения и умножения для наших цифр (см. рисунок 1; здесь в каждом пересечении строк и столбцов стоят суммы (соответственно, произведения) цифр, с которых эти строки и столбцы начинаются), мы сразу замечаем и резкое отличие «новой» арифметики от старой. Произведение двух ненулевых цифр может быть равно нулю!

В таких случаях говорят, что в арифметике имеются *делители нуля*, т. е. такие числа $a \neq 0$ и $b \neq 0$, что $ab = 0$.

Упражнения

1. Найдите последнюю цифру числа а) 7^{1993} ; б) $2^{7^{1993}}$; в) 3^{1993} .

2. Докажите, что произведение двух последних цифр квадрата целого числа четно.

3. Решите в арифметике цифр уравнение $x^2 - 1 = 0$.

Арифметика остатков по модулю

Построенная нами арифметика цифр допускает естественное обобщение.

Пусть $m > 1$ — произвольное натуральное число. Каждое целое число при делении на m дает некоторый остаток, причем разных остатков ровно m ; это числа

$$0, 1, 2, \dots, m-1.$$

В частности, цифры — это полный комплект остатков от деления на 10. (Заметим попутно, что остаток от деления на m — последняя цифра числа, представленного в m -ичной системе счисления.)

Введем на множестве остатков от деления на m действия сложения и умножения так же, как мы это делали раньше. Суммой (соответственно, произведением) двух остатков a и b назовем остаток от деления на m обычной суммы (произведения) чисел a и b .

Совершенно очевидно, что все восемь свойств, отмеченных нами для сложения и умножения цифр, справедливы и для действий над остатками. Разумеется, в арифметике остатков есть и операция вычитания, определяемая как и раньше: $a - b = a + (-b)$.

Арифметику остатков от деления на m (по модулю m) принято обозначать Z_m .

На рисунке 2 приведены таблицы умножения для двух арифметик остатков: по модулю 5 и по модулю 6 (поскольку во всех арифметиках остатков свойства таблиц сложения одинаковы, их мы не приводим). Видно, что в Z_5 нет делителей нуля, а в Z_6 они есть. В чем же дело? Понять это вам помогут следующие упражнения.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Рис. 2

Упражнения

4. Постройте таблицы умножения в арифметиках остатков по модулям 7, 8, 9, 11, 12, 13.

5. Решите в этих арифметиках уравнения $x^2 = 1$ и $x^2 = -1$ и выясните, при каких целых x числа $x^2 - 1$ и $x^2 + 1$ делятся на соответствующий модуль.

6. Рассмотрите арифметику остатков по модулю 100. Найдите все делители нуля в этой арифметике. Сколько их? Докажите, что если a не является делителем нуля, то $a^{40} = 1$. (Отсюда следует, в частности, что если a взаимно просто с числом 100, то $a^{40} - 1$ делится на 100.)

7. Докажите, что сумма $1 + 2^{1993} + \dots + 1992^{1993}$ делится на 1993.

Арифметика остатков по простому модулю

Пусть p — произвольное простое число. Рассмотрим остатки от деления на p :

$$0, 1, 2, \dots, p-1.$$

Теорема 1. Среди ненулевых остатков по простому модулю нет делителей нуля.

Доказательство. Предположим, что найдутся два остатка по модулю p , a и b , такие, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $ab = 0$ в \mathbb{Z}_p .

Это значит, что число ab делится на p , т. е. одно из чисел a и b делится на p , что невозможно, поскольку $0 < a < p$, $0 < b < p$.

Множество всех ненулевых остатков в \mathbb{Z}_p мы будем обозначать \mathbb{Z}_p^* .

Из теоремы 1 сразу следует, что если $ab = ac$ и $a \neq 0$, то $b = c$ (убедитесь в этом). Но тогда все элементы из \mathbb{Z}_p^* вида

$$a, 2a, \dots, (p-1)a$$

различны, и, следовательно, среди них есть ровно один элемент, равный единице. Это значит, что в \mathbb{Z}_p^* существует такой остаток b , для которого

$$ab = 1.$$

Будем обозначать его a^{-1} или $1/a$ и называть *обратным к a элементом \mathbb{Z}_p^** .

Очевидно, что если для некоторых двух остатков a и b верно равенство $a^{-1} = b^{-1}$, то $a = b$.

Итак, в арифметике остатков по простому модулю существует операция деления на любой ненулевой элемент, поскольку можно положить $a/b = ab^{-1}$ для всех $b \neq 0$.

Упражнения

8. Докажите, что

$$\text{а) } (a^{-1})^{-1} = a; \quad \text{б) } (-a)^{-1} = -a^{-1}; \quad \text{в) } (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1};$$

г) всякое уравнение $ax=b$, где $a \neq 0$, имеет единственный корень.
9. Докажите, что для любого простого p число

$$(p-1)!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}\right)$$

делится на p .

10. Докажите, что в Z_m обратный элемент имеют те и только те остатки, которые не являются делителями нуля (т. е. остатки, взаимно простые с m).

Теорема Вильсона

Арифметика остатков по простому модулю позволяет доказать такой критерий простоты числа p :

Теорема Вильсона. Число p просто тогда и только тогда, когда число $A=(p-1)!+1$ делится на p .

Доказательство. Пусть число p простое. Докажем, что в этом случае A делится на p .

Для $p=2$ утверждение очевидно. Для $p>2$ заметим, что каждый из остатков от деления на p , не равный нулю, имеет обратный, причем при $a=1$ и $a \neq p-1$ остатки a и a^{-1} различны. В самом деле, если $a^{-1}=a$, то $a^2-1=(a-1)(a+1)=0$. Но числа $a-1$ и $a+1$ не могут делиться на p , поэтому такое равенство невозможно.

Таким образом, все остатки в произведении $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1)$, кроме 1 и $p-1$, разбиваются на пары взаимно обратных сомножителей, откуда

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (p-1) &= 1 \cdot (2 \cdot 2^{-1}) (3 \cdot 3^{-1}) \dots \left(\frac{p-1}{2} \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^{-1}\right) (p-1) = \\ &= 1 \cdot (p-1) = -1. \end{aligned}$$

Итак, в Z_p справедливо равенство $(p-1)! = -1$, т. е. $(p-1)!+1$ делится на p .

Пусть теперь p — составное, т. е. $p=kd$. Тогда $(p-1)!$ содержит среди сомножителей число d и имеет вид nd : число $nd+1$ не делится на d и, следовательно, на p .

К сожалению, этот критерий простоты — красивый, но непрактичный математический факт: для не слишком маленьких чисел его очень трудно проверять. Так, чтобы убедиться в простоте числа 1993, пришлось бы вычислить $1992!+1$, а потом еще и разделить на 1993...

Упражнения

11. Докажите что при $p=4k+1$ уравнение $x^2+1=0$ имеет корень в Z_p .

12. Докажите, что числа а) $91! \cdot 1901! - 1$, б) $92! \cdot 1990! + 1$ делятся на 1993.

Периодичность степеней

Пусть $a \neq 0$ — остаток из \mathbb{Z}_p , где p — простое число. Что получится, если возводить a во всевозможные степени: вторую, третью, четвертую и так далее до бесконечности?

Поскольку в \mathbb{Z}_p^* всего $p-1$ элементов, то уже среди первых p членов последовательности a, a^2, \dots, a^m найдутся два равных. Пусть это, например, a^k и a^l , тогда $a^{k-l} = 1$.

Итак, среди степеней остатка a есть единица.

Пусть d — наименьший показатель степени такой, что $a^d = 1$. Ясно, что $d \neq 1$, все степени a, a^2, \dots, a^d различны и $a^{k+d} = a^k$ для любого целого k , т. е. последовательность степеней остатка a периодична (с периодом d).

Определение. Такое число d называется порядком остатка a по модулю p и обозначается $d_p(a)$.

Отметим некоторые важные свойства порядков:

1. если $d_p(a) = d$ и $a^m = 1$, то m делится на d ;
2. если $d_p(a) = m$, $m = kl$, то $d_p(a^k) = l$;
3. $d_p(a) = d_p(a^{-1})$;
4. если $d_p(a) = m$, $d_p(b) = n$, то $d_p(ab)$ является делителем наименьшего общего кратного чисел m и n ;
5. если $d_p(a) = m$, $d_p(b) = n$ и числа m и n взаимно просты, то $d_p(ab) = mn$.

Упражнения

13. Докажите самостоятельно свойства 2 и 3.

14. Докажите самостоятельно свойство 4 и убедитесь, что $d_p(ab)$ не обязательно равен наименьшему общему кратному m и n .

Докажем свойство 1. Пусть $a^m = 1$ и m не делится на d , т. е. $m = qd + r$, $0 < r < d$. Тогда

$$1 = a^m = a^{qd+r} = a^{qd} a^r = (a^d)^q a^r = a^r.$$

По определению d — наименьший показатель степени такой, что $a^d = 1$. Но мы нашли число r , меньшее d и обладающее тем же свойством. Противоречие.

Приведем и доказательство свойства 5. Пусть $d_p(ab) = d$. Ясно, что d не превышает mn , поскольку

$$(ab)^{mn} = (a^m)^n (b^n)^m = 1.$$

С другой стороны, так как $(ab)^d = 1$, то $a^d = (b^{-1})^d$, т. е. $a^d = b^d$ (свойство 3). Но тогда $a^{nd} = b^{nd} = 1$, и nd делится на m (свойство 1). Но m и n взаимно просты, поэтому d делится на

m . Аналогичное рассуждение показывает, что d делится и на n , т. е. d делится на mn . Но d не больше mn и, следовательно, $d = mn$.

Порядок остатка a в \mathbb{Z}_p называется также *показателем*, которому принадлежит a по модулю p .

Упражнения

15. Найдите порядок остатка 2 в \mathbb{Z}_7 , \mathbb{Z}_{11} , \mathbb{Z}_{13} .

16. Докажите, что

а) если $A = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ делится на 5, то A делится и на 625;

б) если $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 7, то abc делится на 7;

в) если $a^2 + b^2$ делится на 7, то оба числа a и b делятся на 7.

17. Докажите, что число $5^{2n+1} + 3^{n+2} 2^{n-1}$ делится на 19 при любом натуральном n .

Функция Эйлера

Пусть m — некоторое натуральное число. Рассмотрим множество всех остатков от деления на m , взаимно простых с m , т. е. множество \mathbb{Z}_m^* . Обозначим через $\varphi(m)$ количество элементов в \mathbb{Z}_m^* .

Функция $\varphi(m)$, сопоставляющая каждому натуральному числу m количество натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с ним, называется функцией Эйлера.

В частности, для любого простого числа p

$$\varphi(p) = p - 1,$$

$$\varphi(p^2) = p(p - 1),$$

$$\varphi(p^n) = p^{n-1}(p - 1)$$

(почему?)

Теорема 2. Для любых взаимно простых m и n

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

(т. е. функция Эйлера мультипликативна).

Доказательство. Чтобы подсчитать количество чисел, меньших mn и взаимно простых с mn , расположим все числа от 1 до mn так, как показано на рисунке 3. В каждой строке получившейся таблицы ровно $\varphi(n)$ чисел, взаимно простых с n , а в каждом столбце — ровно $\varphi(m)$ чисел, взаимно простых с m (почему?).

Поскольку m и n взаимно просты, любое число в таблице взаимно просто с mn тогда и только тогда, когда оно взаимно просто и с m , и с n , т. е. когда оно стоит на пересечении столбца с номером, взаимно простым с n , и строки с номером,

1	2	3	...	n
$n+1$	$n+2$	$n+3$...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	$2n+3$...	$3n$
...				
...
$(m-1)n+1$	$(m-1)n+2$	$(m-1)n+3$...	mn

Рис. 3

взаимно простым с m . Очевидно, что таких чисел ровно столько, сколько клеток в пересечении $\varphi(n)$ столбцов и $\varphi(m)$ строк, т. е. $\varphi(m)\varphi(n)$. Но $\varphi(mn)$ равно количеству таких чисел.

Итак, действительно $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Теперь мы можем вывести формулу для вычисления $\varphi(m)$. Разложим m на простые множители:

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}.$$

Тогда

$$\varphi(m) = \varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}) = \varphi(p_1^{k_1}) \varphi(p_2^{k_2}) \dots \varphi(p_s^{k_s}),$$

но p_1, p_2, \dots, p_s — простые числа, поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= p_1^{k_1-1}(p_1-1)p_2^{k_2-1}(p_2-1)\dots p_s^{k_s-1}(p_s-1) = \\ &= p_1^{k_1} \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) p_2^{k_2} \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots p_s^{k_s} \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) = \\ &= m \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right). \end{aligned}$$

Например,

$$\varphi(20) = 20 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8.$$

Упражнения

18. Докажите что $\varphi(n)$ четно при $n \neq 2$.

19. Найдите $d_{210}(11)$.

Еще одно замечательное свойство функции Эйлера описывает

Теорема Эйлера. Если число a взаимно просто с натуральным числом m , то $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m .

Доказательство. Выпишем в строчку элементы из Z_m^* :

$$1 = a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}.$$

Поскольку a взаимно просто с m , его остаток \bar{a} от деления на m не равен нулю, т. е. $\bar{a} \in Z_m^*$. Если будет доказано, что $\bar{a}^{\varphi(m)} = 1$ в Z_m^* , будет доказана и теорема Эйлера.

Для этого умножим каждый из элементов Z_m^* на a ; получим новую строчку

$$\bar{a}, \bar{a}a_2, \bar{a}a_3, \dots, \bar{a}a_{\varphi(m)}.$$

Все остатки в ней различны (почему?), следовательно, мы снова получили полный комплект элементов из Z_m^* , возможно, в другом порядке.

Перемножим их; тогда

$$a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)} = \bar{a}^{\varphi(m)} a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)}.$$

Но произведение $a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)}$ взаимно просто с m , поэтому полученное равенство означает, что $\bar{a}^{\varphi(m)} = 1$, что и требовалось доказать.

Из теоремы Эйлера сразу следует

Малая теорема Ферма. Если p — простое число и число a не делится на p , то $a^{p-1} - 1$ делится на p .

Справедливость этого утверждения становится очевидной, если вспомнить, что $\varphi(p) = p - 1$.

Замечание. Из теоремы Ферма и 1-го свойства порядков вытекает, что $d_p(a)$ является делителем числа $p - 1$ для любого остатка a .

Упражнения

20. Докажите, что

а) $2^{131} - 1$ делится на 263;

б) $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1} и не делится на 3^{n+2} .

21. Докажите, что если $x^2 + 1$ ($x > 1$) делится на простое число p , то $p = 4k + 1$.

22. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $p = 4k + 1$.

23. При разложении рационального числа p/q (где q взаимно просто с 10, $q > p$) в бесконечную периодическую дробь получился период длиной m . Докажите, что m — делитель числа $\varphi(q)$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Ю. Соловьев

Существование решений

Неопределенными уравнениями первой степени с двумя неизвестными называются уравнения вида

$$ax + by = c, \quad (*)$$

где a , b и c — числа из некоторой данной совокупности (действительные, рациональные, целые и т. п.), причем a и b не равны нулю. Решениями неопределенного уравнения (1) называются любые пары чисел $(\alpha; \beta)$, принадлежащих данной совокупности, которые удовлетворяют уравнению.

Выясним, прежде всего, как выглядят решения этого уравнения в случае, когда a , b и c — действительные числа. Решим его относительно какого угодно неизвестного. Например, для y получим:

$$y = \frac{c - ax}{b}.$$

Это выражение показывает, что y однозначно зависит от x , само же x может быть совершенно произвольным. Следовательно, если a , b и c — действительные числа, то уравнение (*) имеет бесконечное множество решений

$$\left(r; \frac{c - ar}{b} \right),$$

где r — произвольное действительное число.

Если a , b и c — рациональные числа, то естественно рассматривать рациональные решения уравнения (*). Очевидно, что они задаются той же самой формулой $\left(r; \frac{c - ar}{b} \right)$, где на сей раз r — произвольное рациональное число.

Гораздо содержательнее и интереснее случай, когда коэффициенты a , b и c — целые числа, и требуется найти целые

решения уравнения (*). Задачу нахождения целых решений можно переформулировать следующим образом: из бесконечного множества действительных решений уравнения (*) выделить только целые. Ясно, что такое ограничение значительно уменьшает число решений.

Прежде всего, выясним, всегда ли возможно решить неопределенное уравнение (*) в целых числах. Ответом на этот вопрос служат следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если свободный член c неопределенного уравнения*

$$ax + by = c$$

не делится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b , НОД (a, b), то уравнение не имеет целых решений.

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$, так что $a = md$, $b = nd$, где m и n — целые числа. Тогда наше уравнение принимает вид

$$mdx + ndy = c,$$

или

$$d(mx + ny) = c.$$

Допустив, что существуют целые числа x и y , удовлетворяющие уравнению (*), мы получим, что коэффициент c делится на d . Полученное противоречие доказывает теорему.

Если все три коэффициента a , b и c имеют общий множитель, то по сокращении на него может оказаться или что коэффициенты a и b имеют общий множитель, или что a и b — взаимно просты. В первом случае, по предыдущей теореме, уравнение не имеет целых решений. Во втором случае мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если коэффициенты a и b неопределенного уравнения*

$$ax + by = c$$

являются взаимно простыми числами, то уравнение имеет по крайней мере одно целое решение.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a > 0$. Решив уравнение относительно x , получим

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Докажем, прежде всего, что если в эту формулу вместо y подставлять все натуральные числа, меньшие a , т. е. числа $0, 1, 2, \dots, a-1$, и каждый раз совершать деление, то все a

остатков будут различны. В самом деле, подставим вместо y какие-нибудь два числа m_1 и m_2 , меньшие a (из множества $0, 1, 2, \dots, a-1$). В результате мы получим две дроби

$$\frac{c-bm_1}{a} \text{ и } \frac{c-bm_2}{a}.$$

Выполнив деление и обозначив неполные частные через q_1 и q_2 , а остатки через r_1, r_2 , найдем

$$\frac{c-bm_1}{a} = q_1 + \frac{r_1}{a}, \quad \frac{c-bm_2}{a} = q_2 + \frac{r_2}{a}.$$

Предположим, что остатки r_1 и r_2 равны. Тогда, вычитая второе равенство из первого, получим

$$\frac{c-bm_1}{a} - \frac{c-bm_2}{a} = q_1 - q_2,$$

или

$$\frac{b(m_2 - m_1)}{a} = q_1 - q_2.$$

Так как $q_1 - q_2$ — число целое, то и левая часть должна быть целым числом. Стало быть, $b(m_2 - m_1)$ должно делиться на a , т. е. разность двух натуральных чисел, каждое из которых меньше a , должна делиться на a , что невозможно. Значит, r_1 не может равняться r_2 , т. е. все остатки различны.

Итак, мы получили a различных натуральных остатков, меньших a . Но различные a натуральных чисел, не превосходящие a , суть не что иное, как числа $0, 1, 2, \dots, a-1$. Следовательно, среди остатков непременно найдется один и только один, равный нулю. Значение y , подстановка которого в выражение $(c-by)/a$ дает остаток 0, превращает $x = (c-by)/a$ в целое число. Итак, если a и b взаимно просты, то уравнение (*) действительно допускает целые решения, что и требовалось доказать.

Доказанная выше теорема 1 утверждает, что условие НОД $(a; b) = 1$ является необходимым условием для разрешимости неопределенного уравнения (*) в целых числах. Теорема 2 утверждает, что это условие является достаточным.

Первый способ решения

Теорема 2 дает практическую возможность находить одну пару решений неопределенного уравнения в целых числах. Пусть, например, дано уравнение

$$7x + 5y = 232.$$

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором находится наименьший (по модулю) коэффициент, т. е. в данном случае относительно y :

$$y = \frac{232 - 7x}{5}.$$

Подставляем в это выражение вместо x натуральные числа, меньшие 5, т. е. 0, 1, 2, 3, 4. В результате находим:

$$x=0, y = \frac{232}{5} = 46\frac{2}{5},$$

$$x=1, y = \frac{232-7}{5} = 45.$$

Итак, одно решение данного уравнения получено: $x=1$, $y=45$.

Этот прием решения неопределенного уравнения целесообразно употреблять в тех случаях, когда коэффициент при каком-либо из неизвестных невелик по модулю.

Коль скоро найдена одна пара целых решений, то легко найти и все такие решения.

Теорема 3. Неопределенное уравнение

$$ax + by = c,$$

в котором a и b являются взаимно простыми числами, допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at,$$

где $(\alpha; \beta)$ — некоторое решение уравнения (1), а t — произвольное целое число.

Доказательство. Так как по условию пара $(\alpha; \beta)$ является решением нашего уравнения, то подстановка $x=\alpha$, $y=\beta$ в уравнение дает тождество

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Вычитая это тождество из нашего уравнения, имеем

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

откуда

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a}.$$

Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $b(\beta - y)/a$ было целым, т. е. чтобы произведение $b(\beta - y)$ делилось на a без остатка. Но a и b — взаимно простые числа; стало

быть, для этого необходимо, чтобы $(\beta - y)/a$ равнялось некоторому целому числу. Обозначим это целое число через t :

$$\frac{\beta - y}{a} = t.$$

Тогда $y = \beta - at$ и, следовательно,

$$x = \alpha + \frac{b(\beta - y)}{a} = \alpha + bt,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ решения

Сперва рассмотрим один частный случай. Допустим, что коэффициент при одном из неизвестных равняется единице. Например, рассмотрим уравнение

$$x + by = c.$$

Отсюда

$$x = c - by.$$

Положив $y = 0$, получим для x целое значение $x = c$. Следовательно, одна пара решений уравнения имеет вид $x = c$, $y = 0$. Все же целые решения задаются формулами

$$x = c + bt, \quad y = -t.$$

Аналогично, если коэффициент при y равен 1, то все целые решения задаются формулами

$$x = t, \quad y = c - at.$$

На этом замечании основан общий способ решения неопределенного уравнения в целых числах. В самом деле, если бы нам удалось привести уравнения $ax + by = c$ к уравнению, в котором один из коэффициентов равен единице, то задача была бы решена. Но когда a и b — взаимно простые числа, такое приведение всегда возможно. Пусть, например, дано уравнение

$$17x - 37y = 55.$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, в данном случае — относительно x . Получаем

$$x = \frac{55 + 37y}{17}. \quad (1)$$

Выделив целую часть, найдем, что

$$x = 3 + 2y + \frac{4 + 3y}{17}.$$

Полученное для x выражение состоит из двух частей: $3+2y$, которая будет целой при всяком целом y , и дробной $(4+3y)/17$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо выбрать такие целые значения y , при которых $(4+3y)/17$ является целым числом. Положим

$$\frac{4+3y}{17} = t,$$

где t — произвольное целое число. Из последнего равенства находим

$$3y - 17t = -4. \quad (2)$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, т. е. относительно y :

$$y = \frac{17t-4}{3}.$$

Выделив целую часть, получим

$$y = 5t - 1 + \frac{2t-1}{3}.$$

Для того чтобы y было целым числом, необходимо подобрать такие целые значения t , чтобы

$$\frac{2t-1}{3} = t_1,$$

где t_1 — произвольное целое число. Последнее равенство дает

$$2t - 3t_1 = 1. \quad (3)$$

Поступая так же, как прежде, находим

$$t = \frac{1+3t_1}{2} = t_1 + \frac{1+t_1}{2}.$$

Чтобы число t было целым, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1+t_1}{2} = t_2,$$

где t_2 — произвольное целое число. Из полученного равенства вытекает, что

$$t_1 - 2t_2 = -1. \quad (4)$$

В этом уравнении коэффициент при одном из неизвестных равен единице, и поэтому мы можем его решить.

Итак, мы получили следующую серию уравнений:

$$\begin{aligned} 17x - 37y &= 55, & 2t - 3t_1 &= 1, \\ 3y - 17t &= -4, & t_1 - 2t_2 &= -1. \end{aligned}$$

Из уравнения (4) получаем, что

$$t_1 = 2t_2 - 1.$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$t_1 = -1, t_2 = 0.$$

Подставляя полученное значение t_1 в уравнение (3), находим $t = -1$; подставляя это значение t в уравнение (2), получаем $y = -7$. После подстановки этого значения y в уравнение (1), мы видим, что $x = -12$. Итак,

$$x = -12, y = -7$$

есть одно из решений заданного уравнения. Общая же формула решений на основании теоремы 3 будет иметь вид

$$x = -12 - 37t, y = -7 - 17t,$$

где t — произвольное число.

Докажем, что описанный выше прием решения неопределенного уравнения всегда приводит к получению целых решений. В самом деле, мы получили следующую цепочку уравнений:

1. Данное уравнение

$$17x - 37y = 55,$$

или уравнение с неизвестными x и y и коэффициентами при них a и b .

2. Уравнение

$$3y - 17t = -4,$$

и вообще уравнение с неизвестными x и t (если $|a| > |b|$) или y и t (если $|a| < |b|$). Коэффициентами его являются a (соответственно b) и остаток r_1 от деления a на b (соответственно b на a).

3. Уравнение

$$2t - 3t_1 = 1,$$

т. е. уравнение с неизвестными t и t_1 . Коэффициенты его: предыдущий остаток r_1 и остаток от деления a или b на r_1 .

4. Уравнение

$$t_1 - 2t_2 = -1,$$

т. е. уравнение с неизвестными t_1, t_2 . Его коэффициенты: предыдущий остаток r_2 и остаток от деления r_1 на r_2 . И так далее.

Отсюда видно, что процесс решения сводится к такой последовательности действий, которая имеет место при нахождении наибольшего общего делителя (НОД ($a; b$)) чисел

a и b с помощью алгоритма Евклида. Но коэффициенты a и b взаимно просты, а потому наибольший общий делитель их равен единице. Следовательно, продолжая ряд указанных действий, мы обязательно дойдем до остатка, равного единице, который и будет коэффициентом в одном из получаемых уравнений. Тем самым, задача сводится к уже известному частному случаю.

Уравнения с большим числом неизвестных

Ограничимся рассмотрением случая уравнения с тремя неизвестными. Пусть

$$ax + by + cz = d \quad (**)$$

такое уравнение, в котором a, b, c, d — целые числа, и ни одно из чисел a, b и c не равно нулю. Прежде всего необходимо, чтобы коэффициенты a, b и c не имели такого общего множителя, который не входил бы в d , так как иначе уравнение не может быть решено в целых числах. Если же у этих коэффициентов имеется общий множитель, содержащийся в d , то его удаляют сокращением. В результате могут представиться два случая:

1) из трех коэффициентов a, b и c по крайней мере два — взаимно просты, как, например, в уравнении

$$12x + 11y + 15z = 141;$$

2) каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимно просты; таково, например, уравнение $12x + 15y + 20z = 181$, в котором НОД $(12; 15) = 3$, НОД $(12; 20) = 4$, НОД $(15; 20) = 5$.

Первый случай. Пусть a и b — взаимно простые числа. Перенесем cz в правую часть и применим к уравнению

$$ax + by = d - cz$$

метод решения уравнения с двумя неизвестными, считая временно z известной величиной. В результате мы найдем

$$x = \alpha + bt, \quad y = \beta - at,$$

где α и β — многочлены первой степени относительно z . Придавая z и t произвольные целые значения, мы получим все целые решения уравнения (**).

Второй случай. Пусть теперь среди коэффициентов a, b и c нет ни одной пары взаимно простых. Пусть $h = \text{НОД}(a; b)$ и a', b' — частные от деления a, b на h . Тогда урав-

нение (**) примет вид

$$ha'x + hb'y + cz = d,$$

откуда

$$a'x + b'y = \frac{d - cz}{h}.$$

Чтобы левая часть была целым числом, необходимо, чтобы $(d - cz)/h$ было равно некоторому целому числу t . Следовательно,

$$a'x + b'y = t, \quad (5)$$

$$cz + ht = d. \quad (6)$$

Но НОД $(a'; b') = 1$, а потому уравнение (5) имеет целые решения вида

$$x = \alpha + b't', \quad y = \beta - a't',$$

где α и β — многочлены первой степени от t с целыми коэффициентами. Заметим теперь, что НОД $(c; h) = 1$, поскольку h , будучи делителем чисел a и b , не делит c . Отсюда вытекает, что уравнение (6) имеет целые решения вида

$$z = \gamma + ht'', \quad t = \gamma - ct''.$$

Подставляя это значение t в формулы для x и y , мы представим эти неизвестные в виде многочленов первой степени с целыми коэффициентами от t' и t'' . Давая t' и t'' произвольные целые значения, мы получим все целые решения x , y и z исходного уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите в целых числах уравнения:

а) $5x + 8y = 29$;

б) $89x - 144y = 1$;

в) $16x + 4y = 1830$;

г) $7x + 4y + 9z = 89$;

д) $10x + 13y + 8z = 143$;

е) $(a^3 + a - 1)x + (a - a^4)y = (a^4 + 2a)(1 - a^3)$, где a — целое число;

ж) $(3x + y)(x + y) = p$, где p — данное простое число.

2. Найдите все двузначные числа, кратные произведению своих цифр.

3. Найдите трехзначное число, в 34 раза большее суммы своих цифр.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

Н. Фельдман

Натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа — эта расширяющаяся цепочка

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

давно уже стала привычной для математиков.

«Квант» не раз рассказывал о трудностях утверждения в математике отрицательных ($N \subset Z$) и комплексных чисел ($R \subset C$). В этой статье речь пойдет о другом звене этой цепочки — о включении $Q \subset R$.

Читателю, конечно, известно о существовании иррациональных чисел (т. е. чисел, не представимых в виде дроби m/n , где $m \in Z$, $n \in N$), найденных еще в древности. В те времена открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны (означающее, в переводе на алгебраический язык, что число $\sqrt{2}$ иррационально) было одним из самых волнующих научных событий. В наши дни алгебраическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ (изящество и обманчивая простота которого не могут оставить равнодушным человека, склонного к математическому мышлению) излагается в школьном учебнике.

Но действительные числа подразделяются не только на рациональные и иррациональные. Менее известно, но тоже очень важно, их деление на алгебраические (таковы, например, $2/3$, $\sqrt{2}$, $5 - \sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$) и трансцендентные числа (к ним относятся такие известные числа, как π , e , $\lg 2$). Именно об этих двух классах чисел, об их свойствах, об их истории (продолжающейся и в наши дни) мы здесь и расскажем.

Алгебраические числа

Каждое рациональное число $\alpha = a/b$ ($a \in Z$, $b \in N$) является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами (например, многочлена $bx - a$). Любое иррациональное число

$\sqrt[n]{a} (a \in \mathbb{Z})$ тоже является корнем такого многочлена (например, $x^n - a$). А что если рассмотреть только такие числа — корни многочленов с целыми коэффициентами?

По определению, действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, не равного тождественно нулевому многочлену^{*)}. Множество всех алгебраических чисел мы будем обозначать через A . Как мы видели выше, $\mathbb{Q} \subset A \subset \mathbb{R}$. Чтобы немного прочувствовать понятие алгебраического числа, решите следующие задачи:

1. Если $\alpha \in A$ ($\alpha \neq 0$), то и $1/\alpha \in A$.

2. Если α — корень многочлена с рациональными коэффициентами, то $\alpha \in A$.

3. Если $\alpha \in A$ и $a \in \mathbb{Q}$, то $a\alpha \in A$ и $a + \alpha \in A$.

Можно доказать, что из $\alpha \in A$ и $\beta \in A$ следует $\alpha + \beta \in A$, $\alpha - \beta \in A$, $\alpha \cdot \beta \in A$, $\alpha/\beta \in A$ (последнее при $\beta \neq 0$). Другими словами, *арифметические действия не выводят за пределы алгебраических чисел* (доказательство этого факта, более сложное, чем решение первых трех задач, мы опускаем). Таким образом, множество A с операциями $+$ и \times , так же как множество \mathbb{Q} с теми же операциями, образует *числовое поле*, т. е. числовое множество, в пределах которого возможны все четыре арифметических действия (кроме деления на 0, конечно!).

Естественно спросить, существуют ли действительные числа, не являющиеся алгебраическими. Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется следующее понятие.

Степень алгебраического числа

Если α — корень многочлена $P(x)$, то α — корень и многочлена $P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — любой многочлен. Поэтому каждое алгебраическое число α является корнем бесконечного множества многочленов из $\mathbb{Z}[x]$. Среди них, очевидно, есть многочлены наименьшей степени. Если она равна n , мы будем говорить, что α — алгебраическое число *степени n* , и писать $\deg \alpha = n$ (от англ. degree — степень). Очевидно, $\deg \alpha = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \mathbb{Q}$. Для иррационального числа $\sqrt{a} (a \in \mathbb{Z})$, очевидно, $\deg \sqrt{a} = 2$.

^{*)} Множество многочленов с целыми коэффициентами мы будем обозначать через $\mathbb{Z}[x]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только многочлены, отличные от тождественно нулевого многочлена, не оговаривая это дополнительно. Для читателей, знакомых с понятием комплексного числа, заметим, что можно также рассматривать и комплексные алгебраические числа.

Для дальнейшего нам потребуется следующая простая, но важная

Теорема Безу (1779 г.) *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-\gamma$ равен $P(\gamma)$.*

Доказательство. Разделим $P(x)$ на $x-\gamma$. Остатком будет постоянная, которую мы обозначим c :

$$P(x) = (x-\gamma)P_0(x) + c;$$

здесь $P_0(x)$ также многочлен. Подставляя $x=\gamma$, находим $c=P(\gamma)$.

При помощи этой теоремы легко доказывается

Лемма. *Если алгебраическое число α степени $n \geq 2$ является корнем многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n , то $P(x)$ не имеет рациональных корней.*

Доказательство. Предположим противное: $P(a/b)=0$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$). По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a/b$ равен 0, т. е. $P(x)$ делится на $x-a/b$:

$$P(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) P_0(x),$$

где многочлен $P_0(x)$, очевидно, имеет рациональные коэффициенты. Если M — общее кратное знаменателей его коэффициентов, то $P_1(x) = MP_0(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Из $P(\alpha)=0$ и $\alpha \neq a/b$ (ведь $n > 1$) следует $P_0(\alpha)=0$. Значит, $P_1(\alpha)=0$. Но степень многочлена $P_1(x)$ равна $n-1 < n = \deg \alpha$. Мы пришли к противоречию.

Решающим шагом в поиске чисел, не являющихся алгебраическими, стала

Теорема Лиувилля

Ее формулировка, на первый взгляд, никак не связана с существованием «не алгебраических» чисел.

Теорема Лиувилля (1884 г.). *Если α — алгебраическое число степени $n \geq 2$, то существует такое число $c > 0$, что для любых $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

(Смысл теоремы состоит в том, что иррациональное алгебраическое число α нельзя «слишком хорошо» приблизить рациональными дробями. Поэтому, если мы найдем иррациональное число, которое можно «слишком хорошо» приблизить, оно будет не алгебраическим.)

Доказательство. Пусть α — алгебраическое число степени $n \geq 2$. Тогда существует такой многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0,$$

что $P(\alpha) = 0$. Обозначим через H наибольший из модулей чисел $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|$. Покажем, что число

$$c = \frac{1}{n^2 H (1 + |\alpha|)^{n-1}}$$

обладает нужным свойством. Заметим для дальнейшего, что $c < 1$. Возьмем произвольные $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$. Тогда

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} = \frac{a}{q^n}.$$

По лемме $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Значит, $a \neq 0$. Поскольку $a \in \mathbb{Z}$, мы имеем $|a| \geq 1$. Следовательно,

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^n}.$$

Так как $P(\alpha) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^n} &\leq \left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \\ &= \left| a_n \left(\alpha^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n \right) + a_{n-1} \left(\alpha^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \right) + \dots + a_1 \left(\alpha - \frac{p}{q} \right) \right|. \end{aligned}$$

Если $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq 1$, то

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq 1 \geq \frac{1}{q^n} > \frac{c}{q^n}.$$

Если же $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < 1$, то $\left| \frac{p}{q} \right| < |\alpha| + 1$. Тогда для любого $1 \leq k \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\begin{aligned} \left| \alpha^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k \right| &= \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| \alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} \left(\frac{p}{q}\right) + \dots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} \right| \leq \\ &\leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| k (|\alpha| + 1)^{k-1} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| n (|\alpha| + 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{q^n} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| n^2 (|\alpha| + 1)^{n-1} H = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot \frac{1}{c},$$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^n}.$$

Теорема доказана.

Теореме Лиувилля можно придать следующую форму, в которой уже не требуется условие $\deg \alpha \geq 2$:

Если α — алгебраическое число степени n , то существует такое число $c_0 > 0$, что для любых $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$, для которых $\alpha \neq p/q$, имеем

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c_0}{q^n}. \quad (1)$$

Доказательство. Случай $\deg \alpha \geq 2$ рассмотрен выше. Пусть теперь $\deg \alpha = 1$, т. е. $\alpha = a/b$ ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$). Тогда число $c' = 1/b$ обладает нужным свойством. В самом деле, если $a/b \neq p/q$, то $|pb - qa| \geq 1$. Следовательно,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|pb - qa|}{bq} \geq \frac{1}{bq} = \frac{c'}{q}.$$

Выбрав в качестве c_0 наименьшее из чисел c и c' , получим искомое неравенство.

Теорему Лиувилля можно доказать также, изучив разность $P(\alpha) - P(p/q)$ с помощью теоремы Лагранжа. Попробуйте сделать это!

Приближение алгебраических чисел рациональными

Будем говорить, что число α допускает приближения порядка t , если для некоторой постоянной γ существует бесконечно много рациональных дробей p/q , удовлетворяющих неравенству

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{\gamma}{q^m}. \quad (2)$$

Теорема Лиувилля показывает, что алгебраическое число степени n не допускает приближений большего порядка, чем n . Действительно, если α допускает приближения порядка t , то из (1) и (2) получаем, что для бесконечной последовательности натуральных q

$$\frac{c}{q^n} < \frac{\gamma}{q^m}, \frac{1}{q^{m-n}} > \frac{c}{\gamma},$$

а это неравенство при $t > n$ и достаточно больших q невозможно.

Пример трансцендентного числа^{*)}

Теперь у нас есть средство для построения действительных чисел, не являющихся алгебраическими. (Такие числа называются *трансцендентными*.) Нужно построить число, допускающее приближения сколь угодно высокого порядка. Мы зададим такое число в виде бесконечной десятичной дроби: $\alpha = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где

$$a_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t = m! \ (m = 1, 2, \dots), \\ 0, & \text{если } t \neq m! \end{cases} \quad (3)$$

В частности,

$$a_1 = a_2 = a_6 = a_{24} = a_{120} = a_{720} = \dots = 1,$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_7 = \dots = a_{23} = a_{25} = \dots = a_{119} = a_{121} = \dots = 0.$$

Тогда для любого $m > 1$

$$\alpha = 0, a_1 \dots a_{(m-1)!} + 0, 0 \dots 0 a_m \dots = \frac{p_m}{q_m} + \beta_m,$$

где

$$p_m = a_1 a_2 \dots a_{(m-1)!}, \quad q_m = 10^{(m-1)!},$$

$$\begin{aligned} \beta_m = 0, 0 \dots 0 a_m \dots, \quad 0 < \beta_m = 10^{-m!} \cdot a_{m!}, \dots = \\ = 10^{-m!} \cdot 1, \dots < 2 \cdot 10^{-m!} = \frac{2}{q_m}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$0 < \left| \alpha - \frac{p_m}{q_m} \right| < \frac{2}{q_m}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

а это означает, что α допускает приближение сколь угодно высокого порядка и поэтому не может быть алгебраическим.

Задача 4. Покажите, что α будет трансцендентным, если в (3)

$$a_t = \begin{cases} 1 & \text{при } t = m^m \ (m = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{при } t \neq m^m. \end{cases}$$

Задача 5. Пользуясь теоремой Лиувилля, постройте еще несколько трансцендентных чисел.

^{*)} Читатель, знакомый с понятием счетности, легко докажет, что множество алгебраических чисел счетно. Если он знает, что множество всех действительных чисел несчетно, он сразу заключит, что трансцендентные числа существуют. Это рассуждение, однако, не дает ни одного конкретного примера трансцендентного числа.

Теорема Дирихле

В 1955 г. английскому математику К. Роту удалось доказать, что *любое алгебраическое число не допускает приближений большего порядка, чем 2.*

В то же время каждое иррациональное число допускает приближения второго порядка. Это доказал немецкий математик П. Дирихле с помощью носящего его имя очень простого и в то же время очень плодотворного принципа: *если n предметов разложить по $n-1$ ящикам, то хотя бы в одном ящике окажется не менее двух предметов.*

Задача 6. Постройте несколько трансцендентных чисел с помощью теоремы Рота.

Теорема Дирихле (1842 г.). Для любых действительного числа α и натурального числа m существуют такие $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$, что $q \leq m$ и

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qm}. \quad (4)$$

Доказательство. Промежуток $[0; 1)$ является объединением промежутков

$$\left[0; \frac{1}{m} \right), \left[\frac{1}{m}; \frac{2}{m} \right), \dots, \left[\frac{m-2}{m}; \frac{m-1}{m} \right), \left[\frac{m-1}{m}; 1 \right). \quad (5)$$

Рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ ($k=0, 1, \dots, n$); здесь $\{x\}$ — дробная часть (напомним, что, по определению, $\{x\} = x - [x]$). Каждое из них принадлежит одному из промежутков (5). Но наших чисел $m+1$, а промежутков m . Следовательно, хотя бы одному из промежутков (5) принадлежит по крайней мере два наших числа (принцип Дирихле!). Пусть это $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$ ($k_1 > k_2$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &> |\{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\}| = \\ &= |k_1\alpha - [k_1\alpha] - k_2\alpha + [k_2\alpha]| = |(k_1 - k_2)\alpha - ([k_1\alpha] - [k_2\alpha])|. \end{aligned}$$

Если мы теперь положим $q = k_1 - k_2$, $p = [k_1\alpha] - [k_2\alpha]$, то, учитывая неравенства $0 \leq k_2 < k_1 \leq n$, получим требуемое.

Следствие. Каждое иррациональное число α допускает приближения второго порядка.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют такие $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$, что $q \leq m$ и выполняется (4). Поскольку $q \leq m$ и α — иррациональное, из (4) получаем

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что при неограниченном возрастании m величина $|\alpha - p/q|$ становится сколь угодно малой. Она отлична от нуля, поэтому с увеличением m дробь p/q должна принимать все более близкие к α значения, так что (6) выполняется для бесконечного числа дробей p/q .

Знаменитые трансцендентные числа

Хотя, пользуясь теоремами Лиувилля и Рота, можно построить бесконечное множество трансцендентных чисел, непосредственно доказать с их помощью трансцендентность таких известных чисел, как, например, π , e , $\ln 2$, $\lg 2$, до сих пор не удавалось. В то же время интерес к этим числам существует уже давно.

Особенно знаменитым в этом смысле является число π . Дело в том, что еще математики Древней Греции поставили знаменитую задачу о квадратуре круга: с помощью циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади круга с заданным радиусом. Эта задача сводится к построению отрезка длиной π , если задан отрезок единичной длины. Решить задачу не удавалось в течение двух тысячелетий. Со временем было установлено, что для доказательства невозможности решения этой задачи достаточно доказать трансцендентность числа π (в действительности достаточно меньшего — доказать, что π не является алгебраическим числом некоторого вида).

Иррациональность чисел e и π в 1766 г. доказал И. Ламберт. В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e . Созданный им для этого метод до сих пор играет важную роль в теории чисел. Усилив метод Эрмита, Ф. Линдeman в 1882 г. доказал трансцендентность числа π . Линдeman доказал также, что при $\alpha \in \mathbb{A}$, $\alpha \neq 0$, число e^α — трансцендентное. Отсюда следует, что *натуральные логарифмы всех отличных от единицы алгебраических чисел трансцендентны* (докажите это).

В 1748 г. Л. Эйлер высказал такое предположение: *если $a, b \in \mathbb{Q}$ и $\log_a b$ — иррациональное число, то оно — трансцендентное*. Конечно, число $\log_a b$ может быть рациональным, например $\log_4 8 = 3/2$. Предположение Эйлера не удалось доказать ни в восемнадцатом, ни в девятнадцатом веке.

В 1900 г. на Всемирном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал 23 проблемы, решение которых,

по его мнению, должно было бы содействовать дальнейшему существенному развитию математики. Седьмая проблема — это предложение доказать, что если α и β — алгебраические числа, α отлично от чисел 0 и 1, а β — иррациональное, то число α^β — трансцендентное. В частности, предлагалось доказать трансцендентность чисел $2^{\sqrt{2}}$ и e^π — последнее число также приводится к виду α^β ($\alpha, \beta \in \mathbb{A}$), однако для этого нужна некоторая информация о функциях комплексного аргумента.

Задача 7. Докажите, что из утверждения Гильберта следует справедливость предположения Эйлера.

Первое частичное решение седьмой проблемы Гильберта нашел в 1929 г. аспирант Московского университета А. О. Гельфонд. В частности, он доказал трансцендентность числа e^π . В следующем году ленинградский математик Р. Кузьмин показал, что метод Гельфонда с соответствующими изменениями позволяет доказать трансцендентность чисел вида α^β в случае, когда α — алгебраическое, отличное от 0 и 1, а $\beta = \sqrt{d}$, где натуральное число d не является полным квадратом. В частности, он доказал трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$.

Полное решение седьмой проблемы Гильберта с помощью уже нового метода (второй метод Гельфонда) получил в 1934 г. А. О. Гельфонд.

Теорема Гельфонда. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, α отлично от 0 и 1, β иррационально. Тогда число α^β — трансцендентное.

Задача 8. Докажите, что если числа α, β, ρ — такие, что выражение $\log_\rho \alpha / \log_\rho \beta$ имеет смысл и $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, то число $\log_\rho \alpha / \log_\rho \beta$ трансцендентное или рациональное.

Второй метод Гельфонда позволил доказать и многие другие теоремы. Усиление этого метода, найденное в 1966 г. А. Бейкером, привело к новым значительным успехам теории чисел. Работа здесь продолжается и в настоящее время.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Ю. Соловьев

Уже в древности при решении задач, записываемых на современном языке квадратными уравнениями, математики столкнулись с ситуациями, в которых было необходимо извлекать корни из отрицательных чисел. В таких случаях считали задачу неразрешимой. Однако решение в радикалах кубического уравнения, найденное итальянскими математиками в первой половине шестнадцатого века, приводило к выражению действительных корней уравнения через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков оперировать новыми числами, применяя для них те же правила действий, которым подчиняются действительные числа.

Рассмотрим задачу извлечения квадратного корня из отрицательного числа $-a$. Так как квадрат действительного числа всегда положителен, то такая задача в области действительных чисел невозможна. Нужны какие-то новые числа:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ — обозначение нового, не действительного числа, называемого *мнимой единицей*.

Числа вида

$$a + bi,$$

где a и b — действительные числа, носят название *комплексных чисел*; число a называется *действительной частью*, а число b — *мнимой частью*. При $a=0$ комплексное число обращается в *чисто мнимое число* bi ; при $b=0$ получим число $a+0i$, которое рассматривается как *действительное число* a .

Комплексные числа вида $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*, комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными*. Множество комплексных чисел обычно обозначается через C .

Условимся считать комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ равными в том и только в том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a+bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a=0$ и $b=0$. В самом деле, действительное число 0 может быть представлено в виде комплексного числа как $0+0i$. На основании определения, равенство $a+bi=0+0i$ будет иметь место только лишь при условии $a=0$ и $b=0$.

Заметим, что относительно комплексных чисел не принято соглашения, какое из них считать больше другого.

Упражнения

1. Найдите x и y , для которых

$$(2x+3y)+(x-y)i=2+(2x+y)i.$$

2. Найдите комплексные числа, противоположные и сопряженные с числами

а) $2+i$; б) $1+i$.

3. Какие комплексные числа совпадают со своими сопряженными? Противоположными?

Действия над комплексными числами

Условимся производить над комплексными числами алгебраические действия и преобразования по тем же правилам, по которым они производятся над действительными числами, принимая всегда, что $i^2=-1$. Это соглашение служит основой для операций над комплексными числами. Чтобы выполнить какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a+bi$, надо выполнить соответствующее действие над двучленами такого вида по правилам, которые существуют для многочленов с действительными коэффициентами, и затем в результате заменить i^2 на -1 .

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Из этого правила легко усмотреть, что сложение комплексных чисел обладает теми же свойствами, которыми обладает сложение действительных чисел, т. е. переместительным и сочетательным свойствами.

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Отметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным: например, сумма сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ равна $2a$.

Умножение

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Заметим, что произведение двух сопряженных, не равных нулю, чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ равно положительному действительному числу $a^2 + b^2$. В самом деле:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2i^2.$$

Но $i^2 = -1$, следовательно,

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Возведение в степень

Прежде всего, выясним, что происходит при возведении в степень мнимой единицы i с учетом условия $i^2 = -1$. Мы имеем:

$$\begin{aligned} i^1 &= i; & i^5 &= i^4 \cdot i = i; \\ i^2 &= -1; & i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1; \\ i^3 &= -i; & i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i; \\ i^4 &= 1; & i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1; \dots \end{aligned}$$

Таким образом, получаются четыре чередующихся значения:

$$i; -1; -i; 1.$$

Заметим еще, что число i^0 принимается равным 1.

Теперь нетрудно найти результат возведения в степень комплексного числа $a + bi$:

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 &= a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi; \\ (a+bi)^3 &= a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i. \end{aligned}$$

Упражнения

4. Выполните действия:

- | | |
|--|---|
| а) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$; | в) $(1+i)^{100}$; |
| б) $\frac{2+i}{1+i} - \frac{2}{i}$; | г) $(1+i\sqrt{3})^9$; |
| | д) $(1+i \operatorname{tg} \alpha)^3$. |

5. Найдите все комплексные числа z , для которых

а) $iz + 3 = 2i$;

б) $\frac{z+1}{z-i} = \frac{3-i}{3+i}$;

в) $2z + i\bar{z} = 1 + 3i$.

Извлечение квадратного корня

Положим

$$\sqrt{a+bi} = x + yi.$$

Тогда

$$a + bi = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т. е.

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Следовательно, задача сводится к нахождению действительных решений этой системы. Возведя оба уравнения в квадрат, а затем сложив их, получим

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2; \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(берется только положительный корень, поскольку $x^2 + y^2 > 0$). Теперь из уравнений

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x^2 - y^2 = a$$

находим

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

Для x и y имеем по два значения, что дает четыре комбинации $(x; y)$, однако из условия $xy = b/2$ вытекает, что знак y произведения xy должен совпадать со знаком числа b ; это дает только две пары значений $(x; y)$, т. е. два корня:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), \quad b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \right), \quad b < 0.$$

Упражнение

6. Вычислите

а) $\sqrt{1+i}$;

б) $\sqrt{3+4i}$;

в) $\sqrt{4-3i}$;

г) $\sqrt{\cos \alpha + i \sin \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi)$;

д) $\sqrt{\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha}$.

Решение квадратного уравнения

Хорошо известно, что не любое квадратное уравнение может быть решено в действительных числах: условием разрешимости является неотрицательность его дискриминанта $D=b^2-4ac$. В комплексных числах это исключение исчезает. Если $D<0$, то решения квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}.$$

Иными словами, каковы бы ни были коэффициенты a , b и c квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

его решения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Заметим также, что эта формула позволяет решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами a , b , c . Ведь мы уже умеем извлекать квадратные корни из любых комплексных чисел.

Упражнения

7. Решите квадратные уравнения

а) $x^2 + 2x + 2 = 0$;

б) $x^2 + (1+i)x + i = 0$;

в) $ix^2 - 2x + 1 = 0$.

8. Найдите все корни (комплексные) уравнений

а) $x^3 = 1$;

б) $x^4 = -1$;

в) $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Слово «комплексный» в переводе с латыни означает «составной», «сложный». Несмотря на то, что оперировать с комплексными числами ничуть не сложнее, чем с действительными, до начала девятнадцатого столетия комплексные числа рассматривались как очень сложный, темный, почти мистический объект. С упорством, достойным лучшего применения, велась длительная борьба между сторонниками и противниками «мнимых» чисел. Главное возражение противников заключалось в следующем: выражение вида $a+bi$ лишено смысла, поскольку i не является действительным числом, а значит, и вообще не является числом; поэтому i нельзя умножать на действительные числа.

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная их конструкция, лучше всего — геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел неотделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей ноль, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Впервые геометрическое изображение действий над комплексными числами было дано датским геодезистом К. Весселем в 1799 году и независимо от него французским математиком Ж. Арганом в 1806 году. Однако общее признание оно получило лишь в тридцатых годах прошлого столетия после работ немецкого математика Ф. Гаусса и английского математика У. Гамильтона. Идея геометрической интерпретации комплексных чисел заключается в том, что они изображаются не точками прямой, как действительные числа, а точками плоскости.

Итак, построим множество, элементы которого были бы точками плоскости, а сложение и умножение точек подчинялись бы всем правилам операций с действительными числами.

Выберем в плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс x и осью ординат y . Обозначим через $(a; b)$ точку с абсциссой a и ординатой b . Для точек $(a; b)$ и $(c; d)$ определим сумму и произведение по правилам:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d); \quad (1)$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc). \quad (2)$$

Прямой проверкой без труда устанавливается, что операции сложения и умножения точек обладают переместительным и сочетательным свойствами:

$$(a; b) + (c; d) = (c; d) + (a; b),$$

$$((a; b) + (c; d)) + (e; f) = (a; b) + ((c; d) + (e; f)),$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (c; d) \cdot (a; b),$$

$$((a; b) \cdot (c; d)) \cdot (e; f) = (a; b) \cdot ((c; d) \cdot (e; f)).$$

Выполняется и распределительный закон:

$$((a; b) + (c; d)) \cdot (e; f) = (a; b) \cdot (e; f) + (c; d) \cdot (e; f).$$

Точка $(1; 0)$ служит единицей, т. е. для любой точки $(a; b)$

$$(a; b)(1; 0) = (1; 0)(a; b) = (a; b).$$

И наконец, для любой точки $(a; b) \neq (0; 0)$ существует единственная такая точка $(x; y)$, что

$$(a; b)(x; y) = (1; 0).$$

Докажем последнее свойство. Возьмем какую-нибудь ненулевую точку $(a; b)$ (это означает, в частности, что $a^2 + b^2 > 0$). Нам нужно найти такую точку $(x; y)$, чтобы $(a; b)(x; y) = (1; 0)$. Но

$$(a; b)(x; y) = (ax - by; ay + bx).$$

Следовательно, мы получаем систему уравнений

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ ay + bx = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно x и y , найдем

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Этим все доказано.

Итак, мы превратили точки на плоскости в числовое множество, т. е. множество с операциями сложения и умножения, для которых верны все свойства сложения и умножения обычных действительных чисел. Действительные числа содержатся в этом множестве — это точки вида $(a; 0)$. В самом деле, сложить и перемножить такие точки — это попросту сложить и перемножить действительные числа:

$$(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0);$$

$$(a; 0)(c; 0) = (ac; 0).$$

А теперь возьмем точку $(0; 1)$. Посмотрим, что произойдет, если мы возведем ее в квадрат, т. е. умножим саму на себя:

$$(0; 1)^2 = (0; 1)(0; 1) = (-1; 0).$$

Таким образом, $(0; 1)^2$ — это действительное число -1 . Значит, точку $(0; 1)$ можно интерпретировать как мнимую единицу i , срывая, тем самым, с нее мистический покров. И наконец, любую точку $(a; b)$ можно представить в виде

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0)(0; 1).$$

Если $(a; 0)$ и $(b; 0)$ обозначить просто через a и b , а $(0; 1)$ — через i , то мы получим

$$(a; b) = a + bi,$$

т. е. теперь формальное выражение $a + bi$ стало на твердую основу — это всего-навсего точка с координатами $(a; b)$ на плоскости с заданными выше операциями сложения (1) и умножения (2).

Кроме чисто теоретической ценности, геометрическая реализация комплексных чисел имеет важное практическое значение — с ее помощью комплексные числа можно представить в так называемой тригонометрической форме, весьма удобной в многочисленных приложениях.

Упражнения

9. Изобразите точками на плоскости комплексные числа

$$2+i, 1+i, -1-i, -3-2i.$$

10. Докажите, что сумма $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 изображается четвертой вершиной параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2 с точкой O .

11. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника на плоскости. Найдите число, изображающее центр тяжести этого треугольника.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат xOy . Пусть точка P изображает комплексное число $z = a + bi$ (рис. 1).

Обозначим расстояние OP от точки P до начала координат через r , а через φ — угол (см. рис. 1), образуемый лучом OP с положительным направлением оси Ox и отсчитываемый против часовой стрелки ($0 \leq \varphi < 2\pi$). (На рисунке 1 показаны углы φ для различных случаев расположения точки P .)

Из определения тригонометрических функций следует, что

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

т. е.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа. Величина $OP = r$ называется *модулем комплексного числа z* и обозначается через $|z|$, а величина угла φ — *главным аргументом числа z* и обозначается через $\arg z$.

Так как OP является гипотенузой прямоугольного треугольника OAP , то

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \text{при } b \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Из этих формул вытекает, что $|z|$ определен однозначно и равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$.

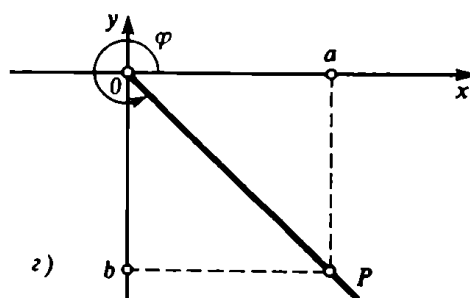
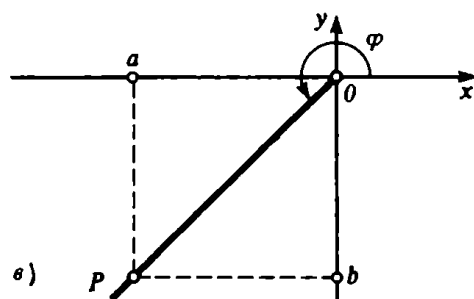
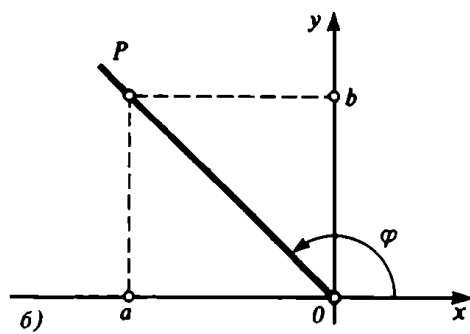
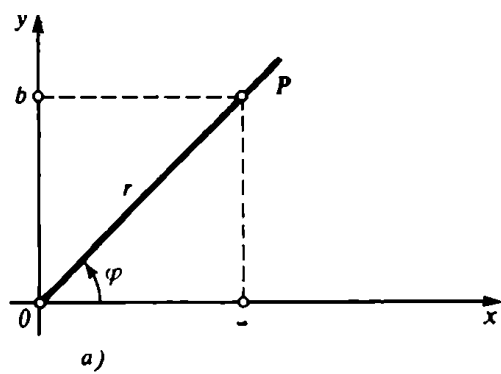


Рис. 1

Главный аргумент при $z=0$ не определен. Для $z \neq 0$ всякий угол, отличающийся от $\arg z$ на слагаемое, кратное 2π , называется *аргументом* числа z .

Например, так как $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то все аргументы числа i имеют вид $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Аналогично, $\arg(-1) = \pi$, а все остальные аргументы — это числа $\pi(2k+1)$.

Упражнения

12. Найдите $|z|$ и $\arg z$, если

- | | |
|-------------------|--------------------------|
| а) $z = -2$; | г) $z = -i$; |
| б) $z = 1 + i$; | д) $z = 1 - i\sqrt{3}$; |
| в) $z = -1 - i$; | е) $z = -3 - 4i$. |

13. Запишите тригонометрическую форму чисел а) 1; б) -1 ; в) $12 + 5i$; г) $12 - 5i$; д) $-12 - 5i$; е) $\sin \alpha + i \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$).

14. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$. Пользуясь этим, изобразите точки на плоскости, для которых

- а) $|z - i| = 1$;
 б) $|z - 1| = |z + 1|$;
 в) $|z - i| = |iz - 1|$;
 г) $1 \leq |z - i| \leq 2$.

15. Изобразите точки плоскости, для которых

- а) $\arg iz = \pi/4$;
 б) $\arg(iz - 1) = \pi/3$.

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить — в тригонометрической форме.

Теорема 1. При умножении любого конечного количества комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Ограничимся двумя сомножителями; общий случай без труда получается индукцией. Итак, мы должны доказать, что

$$\begin{aligned} (r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1))(r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ = (r_1 r_2)(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (3)$$

Но

$$\begin{aligned} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает равенство (3). Так как из $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ следует, что $r_1 r_2 \geq 0$, то $r_1 r_2$ — модуль, а $\varphi_1 + \varphi_2$ — аргумент произведения двух данных чисел. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что произведение комплексного числа z на комплексное число a получается из точки z так: нужно повернуть луч Oz на угол $\alpha = \arg a$ против часовой стрелки и затем взять на полученном луче точку, удаленную от O на расстояние $|a| \cdot |z|$ (рис. 2). Иначе говоря, преобразование плоскости, переводящее всякую точку z в точку az , есть произведение поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром O .

Упражнение

16. Докажите следующие равенства:

а) $|z|^2 = z\bar{z}$;

б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$;

в) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(выясните, при каких z_1 и z_2 будет равенство);

г) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Каков геометрический смысл этого тождества?

Теорема 2. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Более подробно,

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Доказательство. Преобразуем дробь

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)},$$

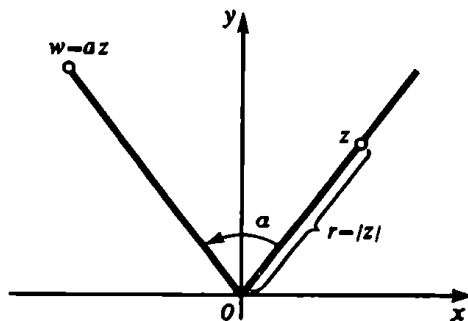


Рис. 2

умножив ее числитель и знаменатель на $\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2$. В результате получим

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}.$$

Поскольку $i^2 = -1$, знаменатель второй дроби равен $\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1$. Числитель же можно записать так:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)).$$

Применив правило умножения, получим

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2),$$

что и требовалось доказать.

При совпадении сомножителей из теоремы 1 получается так называемая *формула Муавра*

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Теперь нетрудно решить вопрос об извлечении корня из комплексного числа.

Теорема 3. Пусть z — комплексное и n — натуральное числа. В множестве комплексных чисел выражение $\sqrt[n]{z}$ при $z=0$ имеет единственное значение — 0, а при $z \neq 0$ — n различных значений. Если

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то эти значения находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Поскольку $0^n = 0$ и из $z^n = 0$ следует, что $z = 0$, то $\sqrt[n]{z} = 0$ при $z = 0$.

Пусть теперь

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0.$$

Обозначив через ρ и α соответственно модуль и аргумент корня, будем иметь

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Отсюда по формуле Муавра

$$r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (4)$$

Сколько различных значений мы получим? Легко убедиться, что пока мы будем подставлять в последнюю формулу значения $k=0, 1, 2, \dots, n-1$, все получаемые значения корня будут различны, поскольку будут различны их аргументы. При $k=n$ получим

$$\frac{\varphi + 2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi,$$

и корень будет равен

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right),$$

т. е. мы получим тот же корень, что и при $k=0$. Аналогично, при $k=n+1, n+2$ и т. д. мы будем получать те же корни, что и при $k=1, 2, \dots$ Таким образом, целое число k в формуле (4) изменяется в пределах от 0 до $n-1$. Теорема доказана.

Следствие. *Корни n -й степени из единицы выражаются формулой*

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

$$k=0, 1, \dots, n-1.$$

Они расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат.

Упражнения

17. Вычислите корни и изобразите их на плоскости:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[3]{-i}$; д) $\sqrt[3]{3+4i}$.

18. Решите уравнения

а) $z^4 = z$; б) $(x+i)^4 + (x-i)^4 = 0$; в) $z^3 = -z$.

19. Докажите, что все корни n -й степени из единицы являются

степенями числа $e = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Вычислите затем сумму k -х степеней всех корней n -й степени из единицы.

Алгебраическая замкнутость множества комплексных чисел

Мы построили совокупность комплексных чисел \mathbb{C} как расширение множества действительных чисел, в котором разрешимо любое квадратное уравнение. На первый взгляд может показаться, что для разрешимости уравнений более высоких степеней понадобится раз за разом расширять множество \mathbb{C} . Оказывается, что больше никаких расширений не нужно. Если мы возьмем уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (5)$$

какой угодно степени, в котором все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ суть произвольные комплексные числа, то все его корни принадлежат множеству \mathbb{C} , и значит, для решения уравнения (5) никаких новых чисел, не входящих в \mathbb{C} , не требуется.

Это свойство называется алгебраической замкнутостью множества комплексных чисел. Впервые его сформулировал голландский математик Альберт Жирар еще в 1629 году, однако первое строгое доказательство было получено лишь в 1799 году Карлом Фридрихом Гауссом.

Упражнение

20°. Докажите, что если точки z_1, z_2, \dots, z_n являются вершинами выпуклого n -угольника, то все корни уравнения

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0$$

лежат внутри или на границе этого многоугольника.

АРИФМЕТИКА И ПРИНЦИПЫ ПОДСЧЕТА

Н. Васильев, В. Гутенмахер

В основе математики лежит арифметика — теория натуральных чисел 1, 2, 3, ... В теории чисел много глубоких и красивых теорем, немало в ней трудных и до сих пор не решенных проблем, в течение сотен лет не поддающихся усилиям самых выдающихся математиков. Целые разделы современной математики возникли из попыток решения и обобщения теоретико-числовых задач. Недаром К. Ф. Гаусс (1777—1855), сделавший много замечательных открытий в теории чисел и в других областях математики, сказал: «Математика — царица наук; теория чисел — царица математики».

Цель этой статьи — познакомить читателей с простейшими понятиями этой увлекательной науки, основной теоремой арифметики, некоторыми арифметическими функциями и принципами подсчета.

Простые и составные числа

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело с натуральными числами. Мы говорим, что число n *делится* на число a , если существует такое число b , что $n = ab$. В этом случае число a называется *делителем* числа n , а число n называется, в свою очередь, *кратным* числу a .

Всякое натуральное число, большее единицы, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и само это число. Число, большее 1, называется *простым*, если у него нет других делителей, и *составным*, если они есть. Единица при этом не является ни простым, ни составным числом.

Теорема. *Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых.*

В самом деле, составное число n можно разложить в произведение двух множителей, меньших n . Если среди них

есть не простые (составные), можно каждое из них разложить в произведение двух меньших и т.д. Очевидно, этот процесс не может продолжаться бесконечно, потому что на каждом шагу мы получаем меньшие множители, чем на предыдущем, а всего натуральных чисел, меньших n , конечное число: $n-1$. В результате мы приходим к разложению числа на простые множители.

Обычно одинаковые простые множители собирают вместе и записывают разложение в таком стандартном виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ — различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — натуральные числа. Например, $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

Основная теорема арифметики. *Всякое натуральное число, большее 1, разлагается на простые множители единственным образом.*

Основной эта теорема называется потому, что практически все свойства делимости чисел являются ее следствиями.

Мы не будем останавливаться на доказательстве основной теоремы^{*)}, а сформулируем лишь одно ее следствие:

Для того чтобы число a делилось на число b , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b , входил в разложение a в такой же или в более высокой степени.

А как разложить большое число на простые множители? В этом нам поможет такое полезное наблюдение.

Если число n составное, то у него есть делитель, не превосходящий \sqrt{n} и больший 1.

Допустим противное. Пусть $n = ab$, и оба делителя a и b больше, чем \sqrt{n} . Поскольку $a > \sqrt{n}$ и $b > \sqrt{n}$, получаем, что $ab > n$, что противоречит предположению.

Чтобы убедиться в простоте данного числа n или, если n составное, найти его делитель, достаточно проверить, делится ли n на простые числа, не большие \sqrt{n} .

Составить список простых чисел, не превосходящих заданного числа N , можно таким образом. Надо выписать подряд все натуральные числа от 1 до N , вычеркнуть единицу, потом вычеркнуть все четные числа, кроме числа 2, затем вычеркнуть все числа, кратные 3, кроме самого числа 3, затем — кратные 5, и т.д. вплоть до самого большого про-

^{*)} Оно содержится, например, в статье Г. Гальперина «Просто о простых числах» в настоящем сборнике.

стого числа, не превосходящего \sqrt{N} . После вычеркивания чисел, кратных какому-то простому числу p , первое не вычеркнутое число и будет следующим за p простым числом. Этот метод просеивания чисел называется «решетом Эратосфена». Он не так плох, как кажется на первый взгляд: например, чтобы составить таблицу простых чисел до 2000, достаточно вычеркнуть все кратные первым четырнадцати простым числам от 2 до 43 (так как $47^2 > 2000 > 43^2$). С помощью современных ЭВМ составлены очень большие таблицы простых чисел. Здесь, конечно, стоит заметить, что все простые числа выписать нельзя: как умел доказывать еще Евклид, *существует бесконечно много простых чисел*.

Доказательство этой замечательной теоремы см. в статье Г. Гальперина «Просто о простых числах».

Задачи

1. Разложите на простые множители числа а) 1981; б) 1982; в) 1983; г) 1984.

Решение задачи в). Разделив 1983 на 3, получим $1983 = 3 \cdot 661$. Теперь ищем делители числа 661. Так как $25^2 < 661 < 26^2$, нужно проверить делимость на простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Ни на одно из них 661 не делится, значит 661 — простое число.

2. Укажите в натуральном ряду а) шесть; б) тринадцать последовательных составных чисел.

в) Существуют ли такие соседние простые числа, между которыми в натуральном ряду помещается ровно шесть составных чисел?

3. Докажите, что если d — наибольший делитель составного числа n , меньший n , то число n/d — простое.

4. Докажите, что среди натуральных чисел от 1 до $30m$ не более $10m$ простых чисел (при каждом $m = 1, 2, 3, \dots$).

5. Найдите все такие числа p , что числа p , $p+2$, $p+4$ одновременно являются простыми (такие числа можно назвать простыми «тройками»).

6. Каким количеством нулей кончатся десятичная запись числа $30!$?

7. Докажите, что среди чисел $2, 5, 8, 11, \dots$ (т.е. чисел вида $3m+2$, где $m = 0, 1, 2, \dots$) бесконечно много простых.

Количество делителей.

Комбинаторное правило произведения

На рисунке 1 ниже выписаны все натуральные делители чисел 96 и 144. Мы видим, что все делители числа 96 разбиваются на пары *дополнительных* друг другу делителей (на рисунке 1 они соединены дугами), а у числа 144 один из делителей, 12, является дополнительным к самому себе, поскольку $144 = 12^2$. Из симметрии множества делителей следует такое утверждение:

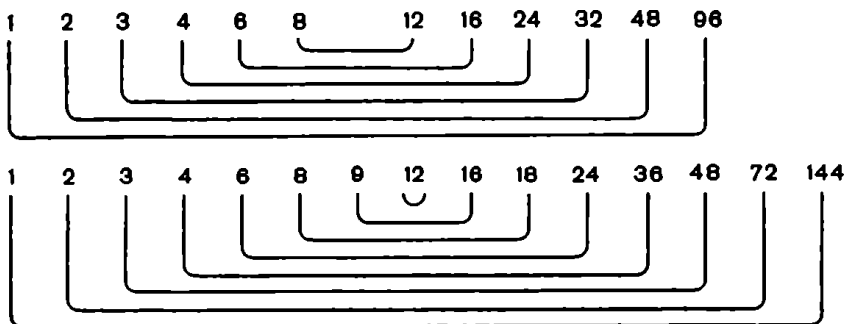


Рис. 1. Делители и дополнительные к ним.

Если число n не является квадратом целого числа, то у него четное число делителей, а если является — то нечетное.

В самом деле, каждому делителю a числа n , меньшему \sqrt{n} , соответствует делитель n/a , больший \sqrt{n} . Поэтому делителей, отличных от \sqrt{n} , всегда четное число. Если же $n = k^2$, то к ним добавляется еще один делитель k .

Пусть $d(n)$ — количество делителей натурального числа n . Как показано выше, если n — полный квадрат, то $d(n)$ — нечетное число (например, $d(144) = 15$), а если нет, то $d(n)$ — четное число (например, $d(96) = 12$). Покажем теперь, как, зная разложение числа n на простые множители, находить значение $d(n)$.

Прежде всего, заметим, что при простом p всегда $d(p^\alpha) = \alpha + 1$.

Действительно, по определению, простое число p имеет только два делителя: 1 и p , а в силу следствия из основной теоремы арифметики число p^α имеет $\alpha + 1$ делителей: 1, p , p^2 , ..., p^α (считается, что $p^0 = 1$).

Рассмотрим теперь число n с двумя различными простыми множителями, например $n = 144 = 2^4 \cdot 3^2$. Все его делители имеют вид $2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$, где β_1 может принимать любое из пяти целых значений от 0 до 4, β_2 — одно из трех значений 0, 1 или 2. Значит, всего различных пар $(\beta_1; \beta_2)$ может быть $3 \cdot 5 = 15$, так что $d(144) = 15$ (см. рис. 2). Здесь мы воспользовались полезным принципом подсчета:

Правило произведения. Если элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, а элемент β_2 — N_2 способами независимо от β_1 , то всего можно составить $N_1 \cdot N_2$ различных пар $(\beta_1; \beta_2)$. Вообще, если нужно составить набор $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$ из k элементов, причем элемент β_1 можно выбрать N_1 способами, элемент β_2 — N_2 способами, ..., элемент β_k — N_k способами, то всего можно составить $N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_k$ различных наборов $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$.

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
3^0	1	2	2^2	2^3	2^4
3^1	3	$2 \cdot 3$	$2^2 \cdot 3$	$2^3 \cdot 3$	$2^4 \cdot 3$
3^2	3^2	$2 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3^2$	$2^4 \cdot 3^2$

Рис. 2. Правило произведения: делители $2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2}$ числа $144 = 2^4 \cdot 3^2$ ($0 \leq \beta_1 \leq 4$, $0 \leq \beta_2 \leq 2$) размещаются в табличке 5×3 .

Это общее правило позволяет написать формулу для числа делителей любого $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. В самом деле, согласно следствию из основной теоремы арифметики, любой делитель числа n имеет вид $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}$, где β_i принимает одно из $\alpha_i + 1$ значений $0, 1, \dots, \alpha_i$. Следовательно, количество разных наборов $(\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k)$, а значит, и различных делителей числа n , равно

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1). \quad (*)$$

Задачи

8. Найдите: а) $d(1000)$; б) $d(1350)$; в) $d(5040)$; г) $d(84^{19})$.

Решение задачи б). Ответ: 24. Так как $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, по формуле (*) получаем

$$d(2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^2) = (1+1)(3+1)(2+1) = 24.$$

9. Приведите пример числа, имеющего а) ровно 6 делителей; б) ровно 7 делителей.

10. Докажите, что число n , дающее при делении на 3 остаток 2, имеет поровну делителей вида $3l+1$ и $3s+2$ и не является полным квадратом.

11. Окружность разбита на 720 одинаковых дуг. Сколько существует различных (по числу сторон) правильных многоугольников с вершинами в точках разбиения?

12. Сколько у числа n четных делителей (напишите общую формулу)? Для каких чисел n количество таких делителей равно $\frac{1}{2} d(n)$?

13. В письменном столе имеется 9 ящиков. Сколькими способами можно разложить по ним пять разных книг?

Ответ: 9^5 способов. **Решение.** Первую книгу мы можем положить 9 способами в тот или иной ящик, и, независимо от этого выбора, есть 9 способов выбрать ящик для второй книги, и т. д. По правилу произведения, всего способов 9^5 .

14. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетные?

15. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

Функция Эйлера. Включения и исключения

Мы познакомились с арифметической функцией $d(n)$. Еще чаще в теории чисел используется *функция Эйлера*: $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним, т. е. таких чисел, которые не имеют с n общих делителей (кроме 1).

На рисунке 3 для примера выписаны числа от 1 до 18. Мы видим, что все взаимно простые с 18 числа разбиваются на пары $(a; 18-a)$.

Такая симметрия будет для любого $n > 2$: если число a взаимно просто с n , то $n-a$ также будет взаимно просто с n и не равно a . В самом деле, если бы $n-a$ и n имели общий делитель $p > 1$, то их разность $n-(n-a)=a$ имела бы тот же делитель p , тем самым n и a не были бы взаимно просты.

Из этой симметрии $a \leftrightarrow (n-a)$ мы видим, что число $\varphi(n)$ всегда четно (при $n > 2$).

Покажем теперь, как находить $\varphi(n)$, зная разложение числа n на простые множители. Прежде всего, заметим, что если p простое, то $\varphi(p)=p-1$, так как все числа $1, 2, \dots, (p-1)$ взаимно простые с p и меньше его. Пусть $n=p^\alpha$, где p — простое число и $\alpha > 1$. Тогда из n чисел, не превосходящих n , т. е. из чисел $1, 2, 3, \dots, n$, мы должны исключить те, которые делятся на p . Таких чисел $\frac{n}{p} = \frac{p^\alpha}{p} = p^{\alpha-1}$, поэтому

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p} = n \left(1 - \frac{1}{p} \right). \quad (1)$$

Рассмотрим теперь число $n=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ с двумя различными простыми множителями. Подсчет $\varphi(n)$ (для $n=18$ он проделан на рисунке 3) мы проиллюстрируем диаграммой на

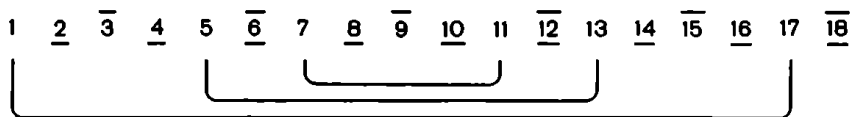


Рис. 3. Среди чисел от 1 до $18=2 \cdot 3^2$ подчеркнуты все кратные 2 и надчеркнуты все кратные 3. Числа, кратные 6, отмечены дважды (и чертой сверху, и чертой снизу). Не отмеченных — взаимно простых с 18 — осталось $\varphi(18)=18-18/2-18/3+18/6=18-9-6+3=6$. Они разбиваются на пары чисел, дающих в сумме 18.

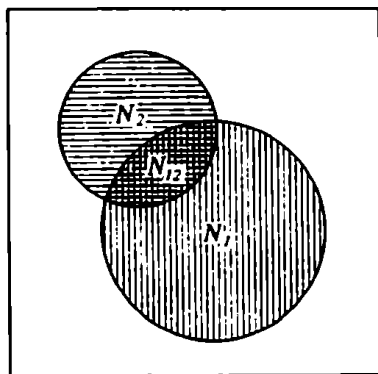


Рис. 4.

рисунке 4: квадрат изображает множество всех чисел от 1 до n , круги — это множества чисел, делящихся на p_1 и p_2 соответственно, пересечение кругов — множество чисел, делящихся на $p_1 p_2$.

Числа, взаимно простые с n , изображаются не заштрихованной частью квадрата. Для определения их числа мы должны исключить $N_1 = n/p_1$ чисел из 1-го круга, $N_2 = n/p_2$ чисел из 2-го круга и прибавить $N_{12} = n/(p_1 p_2)$ чисел, лежащих в пересечении кругов. Таким образом,

$$\varphi(n) = N - N_1 - N_2 + N_{12} =$$

$$= n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right). \quad (2)$$

Разобрать случай числа $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$ с тремя различными множителями нам поможет рисунок 5: квадрат изобража-

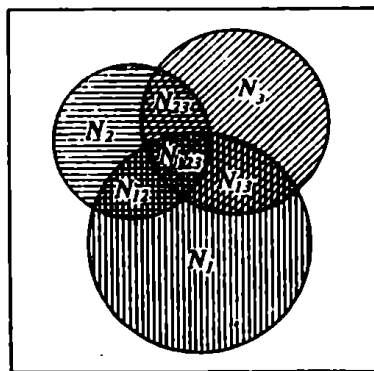


Рис. 5. Если всего в квадрате N элементов, то вне кругов их $N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123}$.

ет множество чисел, не превосходящих n , а круги — множества чисел, делящихся на p_1 , на p_2 и на p_3 ; тогда в кругах будет соответственно $N_1 = \frac{n}{p_1}$, $N_2 = \frac{n}{p_2}$ и $N_3 = \frac{n}{p_3}$ чисел, в их попарных пересечениях — $N_{12} = \frac{n}{p_1 p_2}$, $N_{13} = \frac{n}{p_1 p_3}$ и $N_{23} = \frac{n}{p_2 p_3}$ чисел, а в пересечении всех трех кругов — $N_{123} = \frac{n}{p_1 p_2 p_3}$ чисел (это числа, делящиеся одновременно на p_1 , p_2 и p_3 , т. е. на $p_1 p_2 p_3$).

Мы должны подсчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из n сумму $N_1 + N_2 + N_3$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга — даже три раза.

Теперь к разности $N - (N_1 + N_2 + N_3)$ добавим сумму $N_{12} + N_{13} + N_{23}$. Тогда все числа, попадающие только в один или только в два круга, мы учтем правильно, и только числа, попавшие во все три круга одновременно — неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды прибавили. Придется из суммы $N - (N_1 + N_2 + N_3) + (N_{12} + N_{13} + N_{23})$ вычесть еще N_{123} . Теперь все числа, вошедшие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к такой формуле:

$$\varphi(n) = n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right). \quad (3)$$

Мы встретились здесь с частными случаями такого общего правила подсчета:

Правило включений и исключений. Пусть задано множество A и выделено k его подмножеств. Количество элементов множества A , которые не входят ни в одно из выделенных подмножеств, подсчитывается так: надо из общего числа элементов A вычесть количества элементов всех k подмножеств, прибавить количества элементов всех их попарных пересечений, вычесть количества элементов всех тройных пересечений, прибавить количества элементов всех пересечений по четыре и т. д. вплоть до пересечения всех k подмножеств.

Применяя это правило к подсчету $\varphi(n)$, где

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

и используя алгебраическое тождество

$$1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k + x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{k-1}x_k - x_1x_2x_3 - \dots \\ \dots - x_{k-2}x_{k-1}x_k + \dots + (-1)^k x_1x_2\dots x_k = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_k)$$

(его левая часть устроена как раз по правилу «включений и исключений»), можно получить общую формулу

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Заметим, что написанное выше алгебраическое тождество можно использовать и при доказательстве общего правила включений и исключений: положив некоторые j из k букв x_1, x_2, \dots, x_k равными 1, а остальные $(k-j)$ — нулю, мы получим (при $0 < j \leq k$) в правой части 0, а левая часть покажет, что элементы пересечения ровно j подмножеств одинаковое число раз прибавляются и вычитаются.

Задачи

16. Сколько существует правильных несократимых дробей со знаменателем 288?

17. Найдите а) $\varphi(96)$; б) $\varphi(540)$; в) $\varphi(1983)$.

18. Сколько существует чисел, не превосходящих 1000, которые а) делятся одновременно на 6 и на 15; б) делятся на 3, но не делятся на 7; в) делятся на 6 или на 15?

19. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

20. Объединение множеств A и B состоит из 25 элементов, пересечение — из 10 элементов. Сколько элементов в множестве A , если в B а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

21. В декабре было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней был ветер и 12 дней шел снег. Сколько дней была метель (и снег, и ветер)?

22. В группе из 25 студентов 12 изучают латынь, 10 — греческий и 9 — санскрит. Для каждого из двух языков найдется ровно 5 студентов, изучающих оба этих языка. Сколько студентов изучает все три языка?

23. На каждой стороне треугольника ABC отмечены по 9 точек, разбивающих ее на 10 равных частей. Рассмотрим всевозможные треугольники с вершинами в отмеченных точках (по одной на каждой стороне). Сколько среди этих треугольников таких, у которых ни одна из сторон не параллельна стороне треугольника ABC ?

СКОЛЬКО ВАРИАНТОВ?

Ю. Ионин

Ах, эти задачи, начинающиеся со слов «Сколькими способами можно...» Учителя знают, какую путаницу в качестве решений таких задач предлагают иногда школьники. В настоящее время эта тематика (комбинаторика) осталась лишь в факультативе. В первой части публикуемой ниже статьи разбираются задачи, решаемые по «правилу произведения»; во второй части приемы решения будут разнообразнее.

Часть I

Схема перебора

Представим себе, что мы зашли в столовую и решили выбрать обед из трех блюд. Мы смотрим в меню и видим в перечне первых блюд борщ, суп и щи, в перечне вторых блюд — гуляш, котлеты, оладьи и рыбу и, наконец, на третье нам предлагают морс или чай. Все представленные нам возможности удобно изобразить следующей схемой (рис. 1).

На этой схеме представлены все варианты выбора обеда. Три строчки схемы соответствуют тому, что выбор обеда осуществляется в три шага. На первом шаге мы выбираем первое блюдо (три имеющихся у нас возможности обозна-

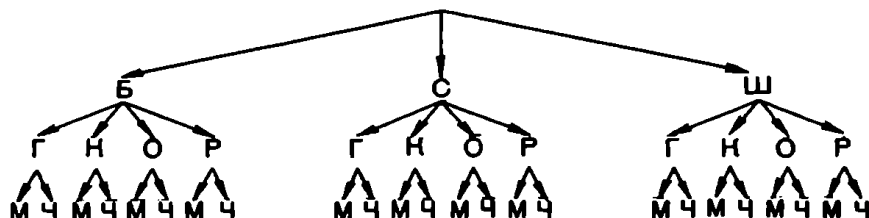


Рис. 1

чены буквами Б, С, Щ). Независимо от принятого нами на первом шаге решения у нас есть четыре возможности выбора второго блюда. На схеме эта независимость выражается в том, что из букв первой строчки выходит поровну стрелок во вторую строчку (а именно по четыре стрелки). Независимо от того, какие блюда мы выбрали на первых двух шагах, у нас есть две возможности выбора третьего блюда, и на схеме из каждой буквы второй строчки выходят две стрелки в третью строчку. Каждому варианту обеда соответствует на схеме путь, идущий по стрелкам из верхней строчки в нижнюю. Так, например, путь $C \rightarrow K \rightarrow M$ соответствует обеду «суп — котлеты — морс», а путь $\Psi \rightarrow K \rightarrow Ч$ соответствует обеду «щи — котлеты — чай».

С помощью схемы легко подсчитать число всех возможных вариантов выбора обеда — оно равно числу путей из верхней строчки в нижнюю или, что то же самое, числу букв в нижней строчке. Так как в первой строчке 3 буквы, во второй вчетверо больше — $3 \cdot 4$, а в третьей вдвое больше, чем во второй, — $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$, всего возможно 24 варианта обеда.

Именно подсчет числа возможных вариантов будет нашей целью в последующих задачах. Такой подсчет удобно осуществлять с помощью схем, подобных изображенной на рисунке 1. При этом схему не обязательно рисовать — достаточно лишь представить ее себе, тем более что при большом числе вариантов нарисовать схему невозможно.

Разберем теперь несколько задач.

Задача 1. *Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?*

Решение. Построение каждого четырехзначного числа, удовлетворяющего условию задачи, можно разбить на четыре шага. На первом шаге выбирается первая цифра числа. Такой выбор можно осуществить девятью способами (цифра 0 не может быть первой цифрой числа), так что в первой строчке воображаемой схемы 9 цифр. На втором шаге выбирается вторая цифра числа. Хотя выбор второй цифры зависит от выбора первой цифры (вторая цифра должна быть отлична от первой), но число возможностей выбора второй цифры, независимо от цифры, выбранной на первом шаге, равно 9. Поэтому из каждой цифры первой строки воображаемой схемы выйдет 9 стрелок во вторую строку, в которой, следовательно, будет $9 \cdot 9$ цифр. На третьем шаге выбирается третья цифра; так как она должна быть отлична от цифр, выбранных на первых двух шагах, независи-

мо от решения, принятого нами на первых двух шагах, на третьем шаге нам предоставляется выбор из восьми возможностей. Следовательно, в третьей строке схемы будет $9 \cdot 9 \cdot 8$ цифр. На четвертом шаге мы можем выбрать любую из семи цифр, не использованных на первых трех шагах, и потому число цифр в нижней строке равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Так как число цифр в нижней строке равно, очевидно, числу путей из верхней строки в нижнюю, 4536 и есть требуемое число.

Упражнение

1. Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

Задача 2. Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^3 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?

Решение. Ясно, что каждый делитель такого числа имеет вид $2^k \cdot 3^l \cdot 7^m \cdot 11^n$, где $0 \leq k \leq 3$, $0 \leq l \leq 10$, $0 \leq m \leq 15$, $0 \leq n \leq 9$. Выбор каждого делителя может быть поэтому разбит на четыре шага: выбор k , выбор l , выбор m , выбор n . Так как первый шаг мы можем осуществить восемью способами, на втором шаге, независимо от первого шага, у нас 11 возможностей, на третьем шаге, независимо от первых двух шагов, есть 16 возможностей и, наконец, независимо от первых трех шагов, мы можем десятью способами осуществить четвертый шаг, рассуждая так же, как и в предыдущих задачах, мы приходим к ответу $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14\,080$.

Аналогичные рассуждения приводят к общей формуле для числа делителей $\tau(n)$ натурального числа n , если известно разложение числа n на простые множители. Именно, если $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$, где p_1, p_2, \dots, p_s — различные простые числа, k_1, k_2, \dots, k_s — натуральные числа, то

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1).$$

Упражнение

2. Сколько различных натуральных делителей имеет число $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$?

Правило произведения

Во всех разобранных задачах подсчет числа интересующих нас предметов (вариантов обеда, четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами, делителей данного числа) про-

исходил по одной и той же схеме: мы представляли себе построение произвольного из пересчитываемых предметов в виде последовательности нескольких шагов, на каждом из которых число возможностей выбора легко находилось и не зависело от решений, принятых на предыдущих шагах. Произведение этих чисел и давало ответ задачи. Эту схему решения принято называть «правилом произведения»:

Предположим, что нам нужно подсчитать количество предметов, удовлетворяющих некоторым условиям. Предположим, что построение произвольного такого предмета мы разбили на несколько последовательных шагов, причем на первом шаге у нас есть выбор из a_1 возможностей; независимо от результата первого шага, у нас есть a_2 различных возможностей на втором шаге; независимо от результатов первых двух шагов, есть a_3 способов осуществления третьего шага и т. д.; наконец, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть a_n возможностей осуществления последнего шага. Тогда общее количество пересчитываемых предметов равно произведению

$$a_1 a_2 \dots a_n.$$

Упражнения

3. В номере автомашины стоят в начале три буквы русского алфавита (содержащего 33 буквы), а затем четыре цифры. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

4. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно последовательно извлечь 6 звуков?

Разберем теперь несколько более трудную задачу.

Задача 3. *Сколько имеется четных четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 3, 4, 6, 7, в записи каждого из которых соседние цифры различны?*

Решение. Если на первом шаге выбирать первую цифру такого числа, на втором шаге — вторую цифру и т. д., то на первом шаге у нас 5 возможностей, на втором и третьем шагах по 4 возможности (на каждом из этих шагов мы можем выбирать любую цифру, кроме той, которая выбрана на предыдущем шаге). Однако при осуществлении четвертого шага число возможностей зависит от результата предыдущего шага: так как последняя цифра должна быть четной и отличной от предпоследней цифры, то мы имеем на последнем шаге две возможности, если на третьем шаге была выбрана одна из цифр 1, 3, 7, и одну возможность, если в качестве третьей цифры мы выбрали 4 или 6.

Выходит, что правило произведения к решению данной задачи неприменимо? Этот вывод был бы преждевременным.

Правило произведения неприменимо из-за неудачно выбранной нами последовательности шагов построения четырехзначного числа с требуемыми свойствами. Если же мы на первом шаге будем выбирать четвертую цифру, а затем третью, вторую и первую, то у нас будет 2 возможности на первом шаге и по 4 возможности на каждом из последующих шагов. По правилу произведения искомое число четырехзначных чисел равно $2 \cdot 4^3 = 128$.

Искусство решения комбинаторных задач (так называют рассматриваемые нами задачи пересчета) в значительной степени состоит в умении выбрать последовательность шагов, приводящих к построению пересчитываемых предметов. Как правило, эту последовательность выбирают так, чтобы на первых шагах удовлетворить максимальному числу ограничений, накладываемых условием задачи.

Упражнения

5. Сколько имеется пятизначных чисел n , удовлетворяющих условию:

- а) n оканчивается двумя семерками;
- б) n начинается с двух одинаковых цифр;
- в) все цифры числа n различны, причем вторая и четвертая цифры нечетны;
- г)* n делится на 4, его соседние цифры различны и отличны от 0, 4, 8?

6*. На координатной плоскости рисуются всевозможные ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям и не проходят дважды через одну вершину; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n . Докажите, что $4 \cdot 2^{n-1} \leq L_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$.

Перестановки

Начнем с такой задачи.

Задача 4. *Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников?*

Решение. Здесь последовательность шагов такова: сначала выбираем ученика на первое место, затем ученика на второе место и т. д. На первом шаге у нас 30 возможностей, на втором — 29 возможностей, на третьем — 28 возможностей и т. д., наконец, на последнем, тридцатом шаге у нас останется 1 возможность: записать ученика, чья фамилия не была написана ни на одном из 29 предыдущих шагов. Ответом задачи является, следовательно, число $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Эту задачу мы привели здесь лишь потому, что она является частным случаем следующей важной задачи.

Задача 5 (число перестановок из n элементов). *Сколькими способами можно упорядочить данное множество, состоящее из n элементов?*

Упорядочить множество — значит расположить его элементы в некотором порядке. Каждое такое расположение называют перестановкой данного множества. Таким образом, задачу можно сформулировать так: сколько существует перестановок множества из n элементов? Рассуждая так же, как и в задаче со списком учеников (каждый такой список — это перестановка множества учеников), мы получим, что число перестановок n -элементного множества равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Упражнения

7. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает третье место, цифра 4 — пятое место, цифра 7 — седьмое место?

8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

9. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 6 следует непосредственно за цифрой 9?

Разберем теперь две задачи, при решении которых используются как формула для числа перестановок, так и правило произведения.

Задача 6. *Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, а цифра 9 — одно из трех последних мест?*

Решение. Построение произвольной такой перестановки разобьем на три шага: выберем место для цифры 0 (первый шаг), выберем место для цифры 9 (второй шаг), расположим остальные восемь цифр на оставшихся восьми местах (третий шаг). На первом шаге у нас 4 возможности; независимо от того, какую возможность мы изберем, у нас есть 3 возможности на втором шаге, и наконец, как бы мы ни расположили цифры 0 и 9, у нас будет $8!$ возможностей расположения остальных восьми цифр на восьми местах. Согласно правилу произведения, число $4 \cdot 3 \cdot 8! = 12 \cdot 8!$ является решением задачи.

Как видите, на третьем шаге мы воспользовались решенной ранее задачей о числе перестановок восьми предметов. При решении комбинаторных задач на перебор вариантов есть возможность эффективно использовать накопленный опыт: любая решенная задача может помочь на одном из шагов в более сложной задаче.

Задача 7. *Сколькими способами можно рассадить за 15 парт 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы за каждой партой слева сидел мальчик, а справа — девочка?*

Решение. Построение произвольного варианта рассадки разобьем на два шага: рассадим 15 мальчиков на пятнадцати предназначенных для них местах, а затем рассадим 15 девочек на пятнадцати оставшихся местах. На каждом шаге мы решаем задачу о перестановке пятнадцати человек и потому имеем $15!$ возможностей. В силу правила произведения ответом задачи является число $(15!)^2$.

Упражнения

10. Сколькими способами можно расставить на полке четыре десятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний сочинений стояли подряд, хотя и не обязательно в порядке следования томов?

11. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых между цифрами 2 и 3 стоят три другие цифры?

Числа подмножеств конечного множества

Число, указанное в подзаголовке, часто встречается в задачах. Попытаемся его найти в частных случаях.

Выпишем все подмножества каждого из множеств

$$A = \{a_1; a_2\},$$

$$B = \{a_1; a_2; a_3\},$$

$$C = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}.$$

Подмножества множества A :

$$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1; a_2\}.$$

Подмножества множества B :

$$\begin{aligned} &\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \\ &\{a_1; a_2\}, \{a_2; a_3\}, \{a_1; a_3\}, \\ &\{a_1; a_2; a_3\}. \end{aligned}$$

Подмножества множества C :

$$\begin{aligned} &\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \\ &\{a_1; a_2\}, \{a_2; a_3\}, \{a_3; a_4\}, \\ &\{a_1; a_3\}, \{a_1; a_4\}, \{a_2; a_4\}, \\ &\{a_1; a_2; a_3\}, \{a_2; a_3; a_4\}, \\ &\{a_1; a_3; a_4\}, \{a_1; a_2; a_4\}, \\ &\{a_1; a_2; a_3; a_4\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в множестве A четыре подмножества, в множестве B восемь подмножеств, в множестве C 16 подмножеств.

Выписывая подмножества, мы располагали их по возрастанию числа элементов. Пытаясь таким путем подсчитать число подмножеств произвольного конечного множества, мы при-

ходим к более трудной задаче подсчета числа подмножеств с заданным числом элементов. Однако есть и другой путь решения задачи.

Пусть $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ — n -элементное множество. Выбор произвольного подмножества B множества A можно разбить на следующие шаги: на первом шаге мы решаем, включать ли элемент a_1 в подмножество B , на втором шаге мы решаем, включать ли в B элемент a_2 , и т. д.; на последнем, n -м, шаге мы решаем, включать ли в подмножество B элемент a_n . Так как на каждом шаге, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть две возможности (включать в B очередной элемент или не включать), то по правилу произведения число подмножеств множества A равно произведению n двоек, т. е. равно 2^n . Итак, в n -элементном множестве имеется 2^n различных подмножеств.

Это утверждение поможет нам в решении следующей задачи.

Задача 8. *Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы каждый мальчик сидел за одной партой с девочкой?*

Вспоминая решенную ранее задачу, мы на первом шаге рассадим учеников так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка — справа, а на втором шаге выберем множество парт, на которых мальчик и девочка поменяются местами. На первом шаге у нас $(15!)^2$ возможностей, на втором 2^{15} возможностей. По правилу произведения получим ответ: $(15!)^2 \cdot 2^{15}$.

Упражнение

12. Сколькими способами можно 9 различных монет разложить в два кармана?

Часть II

Во всех разобранных выше задачах (и в предложенных вам для решения упражнениях) для получения ответа требовалось лишь одно арифметическое действие — умножение. Покажем, в каких случаях для подсчета числа вариантов применяются другие арифметические действия.

Вычитание и сложение

Задача 1. *Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых встречаются одинаковые цифры?*

Решение. Действуя по той же схеме, что и раньше, разобьем построение четырехзначного числа на четыре шага:

выбор первой, второй, третьей, четвертой цифр. На первом шаге у нас 9 возможностей, на втором и третьем шагах — по 10 возможностей. Но число вариантов осуществления четвертого шага зависит от результата первых трех шагов: если среди первых трех цифр были равные, то на четвертом шаге у нас 10 возможностей, если же первые три цифры были различными, то в качестве четвертой цифры мы обязаны взять одну из этих цифр, и, следовательно, у нас будет на этом шаге лишь три возможности. Таким образом, правило произведения здесь неприменимо. Не поможет и перестановка шагов: мы все равно встретимся с такой же трудностью. Однако вспомним, что нам приходилось решать задачу, противоположную разбираемой, — найти число четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр. Вычитая это число (оно равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$) из числа всех четырехзначных чисел (оно равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$), мы получим, что число четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $9000 - 4536 = 4464$.

Упражнения

13. Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра четна?

14. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых хотя бы одна из первых трех цифр делится на 3?

Задача 2. *Сколько имеется натуральных чисел, меньших 10^5 , в десятичной записи которых соседние цифры различны?*

Решение. Если разбить построение такого числа на шаги, на каждом из которых выбирается одна цифра, то для разных чисел число шагов будет разным. Вместе с тем с помощью правила произведения нетрудно найти по отдельности число однозначных, двузначных и пятизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи: $9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^6$. Значит, всего есть $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 66\,429$ натуральных чисел, меньших 10^5 , с различными соседними цифрами.

Упражнения

15. Алфавит состоит из 10 букв. Назовем цепочкой любую последовательность букв этого алфавита, в которой никакая буква не встречается три раза подряд. Сколько имеется цепочек, состоящих не более чем из четырех букв?

16. Сколько имеется шестизначных чисел, в которых четные и нечетные цифры чередуются?

В задаче 2 и упражнениях 15, 16 не удастся непосредственно применить правило произведения. В каждой из этих задач множество пересчитываемых предметов удастся разбить на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. Сложив получившиеся числа, мы находим решения этих задач.

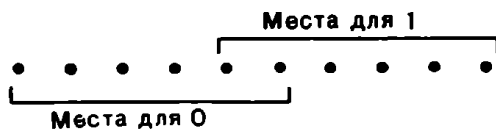


Рис. 2

Задача 3. Сколько имеется перестановок из цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра 1 — одно из шести последних мест (рис. 2)?

Решение. Если мы сначала выберем место для нуля, затем — место для единицы, а после этого расставим на оставшихся восьми местах остальные восемь цифр, то на втором шаге число возможностей будет зависеть от решения, принятого на первом шаге; именно, если на первом шаге мы поставим цифру 0 на одно из первых четырех мест, то место для единицы мы сможем выбрать шестью способами; если же цифра 0 займет пятое или шестое место, то для единицы будет лишь пять возможных мест. Поэтому с самого начала разобьем множество всех перестановок, удовлетворяющих условию задачи, на два подмножества: перестановки, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, и перестановки, в которых эта цифра занимает пятое или шестое место. Число элементов в каждом из этих подмножеств легко подсчитывается с помощью правила произведения: $4 \cdot 6 \cdot 8! = 24 \cdot 8!$ и $2 \cdot 5 \cdot 8! = 10 \cdot 8!$

Ответ: $24 \cdot 8! + 10 \cdot 8! = 34 \cdot 8!$

Упражнения

17. Сколько имеется четных шестизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?

18. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, удовлетворяющих условию

а) цифры 0 и 1 стоят рядом, а цифры 1 и 2 не стоят рядом;

б) между цифрами 0 и 1 стоят три другие цифры, а между цифрами 1 и 2 — две другие цифры?

19. Сколько имеется функций f , удовлетворяющих следующим условиям: область определения функции f — множество $\{1, 2, 3, 4, 6\}$, каждое значение функции f принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$, число $f(5)$ делится без остатка на $f(3)$?

Деление

Четвертое арифметическое действие тоже бывает полезным при решении комбинаторных задач.

Задача 4. *Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если за столом 12 стульев?*

Решение. Число различных расположений 12 человек на 12 местах, т. е. число перестановок этих двенадцати человек, равно $12!$, независимо от того, где эти стулья находятся,— за столом, или у стены, или где-нибудь еще. За чем в таком случае в задаче отмечается, что стулья стоят именно за круглым столом? В задаче 4 — ни за чем. Но круглый стол позволяет дать естественные «варианты» задачи.

А. Если для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, кто является его соседом справа и кто является его соседом слева, то два расположения следует отождествить, если при переходе от одного из этих расположений к другому у каждого из сидящих за столом не меняется ни сосед справа, ни сосед слева.

Б. Если для каждого человека важно лишь то, кто является его соседями (и не важно, кто из этих соседей сидит справа, а кто — слева), то два расположения следуют отождествить, если каждый из сидящих за столом имеет в обоих случаях одних и тех же соседей.

В. Если для каждого человека важно лишь то, кто сидит напротив него, то два расположения нужно отождествить, если любые два человека, занимающие диаметрально противоположные места при одном расположении, занимают также диаметрально противоположные места при другом расположении.

Перейдем к варианту А. Разобьем все $12!$ расположений на группы, относя к одной группе те и только те расположения, которые нужно отождествить. Число получаемых таким образом групп и есть ответ задачи. Чтобы его найти, выясним сначала, сколько расположений окажется в одной группе. Выберем произвольную такую группу и рассмотрим расположения, которые в нее попали. У каждого человека во всех этих расположениях фиксирован сосед справа и сосед слева. Поэтому, чтобы построить произвольное расположение из данной группы, достаточно указать человека, который займет стул № 1 (и в этом варианте задачи, и в вариантах Б и В будем считать, что стулья занумерованы по кругу числами от 1 до 12), после чего места остальных людей определятся уже однозначно. Так как на место № 1 можно посадить любого из 12 человек, каждая группа составлена из 12 расположений. Чтобы найти теперь число групп, остается разделить общее число располо-

жений на число расположений в одной группе:

$$\frac{12!}{12} = 11!$$

Разберем теперь вариант **Б**. И здесь мы разобьем все 12! расположений на группы так, чтобы два расположения попали в одну группу в том и только в том случае, когда их нужно отождествить. Выберем какую-нибудь группу и подсчитаем, сколько в ней расположений. Так как у каждого человека в этих расположениях постоянные соседи, произвольное расположение из данной группы можно построить в два шага: сначала выберем человека, который займет стул № 1 (12 возможностей), затем решим, кто из двух его соседей займет место № 2 (2 возможности), после чего места остальных десяти человек определятся «по цепочке» однозначно. В соответствии с правилом произведения каждая группа состоит из 24 расположений и, следовательно, число групп равно

$$\frac{12!}{24} = \frac{11!}{2}.$$

И, наконец, в варианте **В**, как и в предыдущих вариантах, подсчитаем, сколько расположений оказалось в одной группе этого варианта. Пусть во всех расположениях из этой группы A должен сидеть напротив A' , B — напротив B' , C — напротив C' , D — напротив D' , E — напротив E' , и, наконец, F — напротив F' . Эти шесть пар человек нужно рассадить на шесть пар стульев: (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11) и (6, 12) — по одной паре стульев на каждую пару человек. Построение произвольного расположения из данной группы можно поэтому разбить на семь шагов: сначала распределить 6 пар мест между шестью парами человек ($6!$ возможностей), на втором шаге распределить A и A' на отведенных для них двух местах, на третьем шаге распределить B и B' на отведенных для них местах, и т. д., на седьмом шаге — распределить места между F и F' . Так как на каждом из шести последних шагов у нас есть по две возможности, в силу правила произведения в данной группе (как и в любой другой) будет $6! \cdot 2^6$ расположений. Искомое число групп равно, следовательно,

$$\frac{12!}{6! \cdot 2^6} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10\,395.$$

Задача 5. Каждую из сторон AB , BC , CD , DA и диагональ AC квадрата $ABCD$ требуется окрасить в один из дан-

ных пяти цветов, причем все цвета должны быть использованы. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением. Сколько имеется различных раскрасок?

Решение. Если не обращать внимания на перемещения, то речь идет о распределении пяти цветов по пяти отрезкам. Таких распределений, очевидно, $5!$. Условие задачи разбивает эти $5!$ распределений на группы, каждая из которых состоит из всех распределений цветов, определяющих неразличимые раскраски. Число этих групп и служит ответом задачи. Найдем, как и прежде, число элементов в одной группе. Это число равно, очевидно, числу различных перемещений, которые переводят фигуру, изображенную на рисунке 3, в себя. Так как при каждом таком перемещении диагональ AC должна переходить в себя, вершины A и C либо останутся на месте, либо поменяются местами. Для вершин B и D поэтому остаются тоже две возможности: остаться на месте или поменяться местами. Комбинируя каждый из двух вариантов перемещения вершин A и C с каждым из двух вариантов перемещения вершин B и D , мы получим четыре различных перемещения: тождественное (A и C остались на месте, B и D остались на месте), симметрию относительно прямой BD (A и C поменялись местами, а B и D остались на месте), симметрию относительно прямой AC (A и C остались на месте, B и D поменялись местами) и композицию этих двух симметрий — симметрию относительно центра квадрата (при этом поменяются местами как A с C , так и B с D). Таким образом, каждая группа состоит из четырех элементов, и ответом задачи является число $\frac{5!}{4} = 30$.

Упражнения

20. Сколько попарно неравных фигур можно построить из данного правильного n -угольника и m кругов попарно различных радиусов, если каждая сторона n -угольника должна касаться в своей середине одного и только одного из данных кругов?

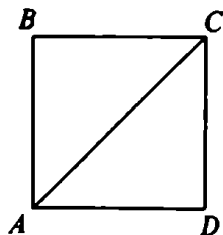


Рис. 3

Задача 6. Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых цифры 1 и 2 встречаются по два раза, а цифры 3 и 4 — по одному разу?

Решение. Шестизначное число, все цифры которого заданы, — это, по существу, перестановка этих шести цифр. Но мы знаем формулу для числа перестановок различных предметов, в то время как среди цифр рассматриваемых шестизначных чисел есть одинаковые. Чтобы все-таки использовать формулу для числа перестановок будем считать, что у нас есть две разных единицы: 1 и 1 и две разных двойки: 2 и 2, так что речь идет о $6!$ перестановках шести цифр: 1, 1, 2, 2, 3, 4. Однако искомое число шестизначных чисел не равно числу таких перестановок, так как некоторые перестановки, например 3/2142 и 312/42, приводят к одному и тому же числу. Две перестановки будут определять одно и то же шестизначное число, если одну из другой можно получить, лишь меняя местами 1 и 1 или 2 и 2. Мы приходим к знакомой ситуации: все $6!$ перестановок разбиваются на группы, число которых и есть искомое число шестизначных чисел. Так как в каждой группе четыре перестановки, ответ: $\frac{6!}{4} = 180$.

Упражнения

21. Сколько разных семибуквенных слов можно получить, переставляя буквы слова «колокол»? (В математике словом называют любую конечную последовательность букв некоторого алфавита.)

22. Сколько имеется семизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается трижды, а цифра 0 — дважды?

23. Сколько имеется пятизначных чисел, делящихся на 25, в записи которых не встречаются цифры 0 и 2?

24. В некотором алфавите — 5 букв. Сколько имеется в этом алфавите шестибуквенных слов, в каждом из которых встречаются только две разные буквы, причем одна из них — пять раз?

25. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд

а) в порядке возрастания;

б) в произвольном порядке?

26. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 9, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что

а) в каждом числе каждая цифра встречается не более одного раза;

б) в каждом числе каждая цифра встречается не более двух раз?

27. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых восьми мест, цифра 1 — одно из первых пяти мест и между цифрами 0 и 1 расположены две другие цифры?

28. Сколько $(m+n)$ -буквенных слов можно составить из m букв А и n букв Б?

НЕРАВЕНСТВА С ФИКСИРОВАННОЙ СУММОЙ

В. Гутенмахер

Тема «Неравенства» пронизывает всю школьную программу по алгебре. И не случайно: к решению неравенств сводится великое множество задач, в частности, к неравенствам с несколькими переменными приводят многие важные задачи из экономики и других приложений математики.

В статье на простейших задачах мы познакомимся с важными приемами рассуждений, которые помогут вам научиться свободно обращаться с неравенствами.

Задачи про муку

В условиях первых задач речь идет о тройках чисел a , b , c , связанных соотношением $a+b+c=1$, в третьей части — о способе изображения таких троек на плоскости.

Задача 1. *В трех пакетах находится 1 кг муки. Кроме того, известно, что в первом пакете муки не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.*

а) *Может ли в третьем пакете находиться $2/5$ кг муки?*
б) *Может ли в третьем пакете находиться $1/5$ кг муки?*
в) *Сколько, самое меньшее, может быть муки в третьем пакете?*

г) *Сколько, самое большее, может быть муки в третьем пакете?*

а) **Ответ:** может. Приведем пример. Распределим муку так: в первый и второй пакеты положим $3/10$ кг муки, а в третий — $2/5$ кг. Тогда все условия выполнены: $3/10+3/10+2/5=1$, причем в первом пакете муки не больше, чем во втором ($3/10 \leq 3/10$), а во втором — не больше, чем в третьем ($3/10 \leq 2/5$).

б) **Ответ:** Нет, не может. Докажем это. Допустим, что в третьем пакете $1/5$ кг, тогда во втором — не больше $1/5$ кг и в первом — тоже не больше $1/5$ кг. Но тогда во

всех трех пакетах не больше $\frac{3}{5}$ кг муки, что противоречит условию. Поэтому наше допущение (что в третьем пакете $\frac{1}{5}$ кг) неверно.

в) **Ответ:** в третьем пакете, самое меньшее, $\frac{1}{3}$ кг. Покажем это. Покажем сначала, что в третьем пакете не меньше, чем $\frac{1}{3}$ кг. Допустим противное: пусть там меньше $\frac{1}{3}$ кг муки. Тогда и во втором, и в первом пакетах тоже меньше $\frac{1}{3}$ кг, но это означает, что во всех трех пакетах меньше 1 кг муки, что противоречит условию. Итак, в третьем пакете не меньше $\frac{1}{3}$ кг. Покажем теперь, что в третьем пакете может быть $\frac{1}{3}$ кг муки. Если насыпать в каждый пакет по $\frac{1}{3}$ кг, то сумма будет 1 кг и в первом пакете муки окажется не больше, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем.

г) **Ответ:** в третьем пакете, самое большее, 1 кг. В самом деле, больше 1 кг не может быть по условию, а 1 кг получится, когда в первых двух пакетах муки вообще нет.

Следующие две задачи того же типа, что и задача 1. Напишите их решения, взяв за образец наше решение задачи 1.

Задача 2. Условие то же, что в задаче 1. Нужно ответить на вопросы:

- а) может ли во втором пакете быть $\frac{2}{5}$ кг муки?
 - б) может ли во втором пакете быть $\frac{3}{5}$ кг муки?
- и доказать, что
- в) во втором пакете, самое большее, $\frac{1}{2}$ кг муки,
 - г) во втором пакете может быть 0 кг муки.

Задача 3. Условие то же, что в задаче 1. Надо ответить на вопросы:

- а) Может ли в первом пакете быть $\frac{13}{37}$ кг муки?
- б) Может ли в первом пакете быть $\frac{12}{37}$ кг муки?
- в) Сколько, самое большее, муки в первом пакете?
- г) Сколько, самое меньшее, муки в первом пакете?

Вместо муки — числа и углы

Обратимся снова к задаче 1. Ее можно сформулировать и по другому:

Задача 4. Про числа a , b , c известно, что $a+b+c=1$ и $0 \leq a \leq b \leq c$.

- а) Может ли c равняться $\frac{2}{5}$?
- б) Может ли c равняться $\frac{1}{5}$?
- в) Найдите наименьшее значение c .
- г) Найдите наибольшее значение c .

Решение задачи 4 можно записать так:

а) c может быть равно $2/5$. Например, $c=2/5$, $a=3/10$, $b=3/10$, тогда $3/10+3/10+2/5=1$ и $3/10 \leq 3/10 \leq 2/5$.

б) c не может быть равно $1/5$. В самом деле, если $c=1/5$, то $b \leq 1/5$, $a \leq 1/5$, поэтому $a+b+c \leq 3/5$, а это противоречит условию задачи.

в) Наименьшее значение c равно $1/3$. Покажем сначала, что $c \geq 1/3$. Допустим противное, т.е. что $c < 1/3$, тогда $b < 1/3$ и $a < 1/3$, поэтому $a+b+c < 1$, что невозможно. Итак, $c \geq 1/3$. Покажем, что c может равняться $1/3$. В самом деле, если положить $a=b=c=1/3$, все условия будут выполнены.

Задача 5. Переформулируйте аналогичным образом задачу 2 и приведите ее решение так же, как мы это сделали с задачей 1 (см. задачу 4).

Решите теперь следующие задачи:

Задача 6. Про числа a_1 , a_2 , a_3 известно, что $a_1+a_2+a_3=1$ и $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

а) Найдите максимальное значение $2a_1+3a_2$.

б) Найдите минимальное значение $2a_1+3a_2$.

Задача 7. а) Может ли наибольший по величине угол в треугольнике равняться 50° ?

б) Может ли средний по величине угол в треугольнике равняться 88° ?

в) Может ли меньший по величине угол в треугольнике равняться 66° ?

Задача 8. Какое наименьшее значение может принимать наибольший угол в треугольнике?

Задача 9. В трех пакетах находится 1 кг муки, причем известно, что в первом пакете в два раза меньше муки, чем во втором, а во втором — не больше, чем в третьем. Сколько, самое большее, может находиться муки во втором пакете?

Задача 10. Пять прямых на плоскости расположены так, что никакие две из них не параллельны. Докажите, что среди них найдутся, по крайней мере, две прямые, угол между которыми не меньше 36° . **Указание.** Выберите произвольную точку на плоскости и проведите через нее прямые, параллельные данным.

Задача 11. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике не может быть больше трех острых углов.

Задача 12. Про числа a , b , c , d известно, что $a+b+c+d=4$ и $0 \leq a \leq b \leq c \leq d$.

а) Докажите, что $c \leq 2$.

б) Докажите, что наибольшее значение $b+c$ равно $8/3$.

в) Найдите наименьшее значение $a+d$.

Задача 13. Про числа a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 известно, что $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$ и $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$.

а) Докажите, что $a_3 \leq 1/3$.

б) Найдите наибольшее значение $a_2+a_3+a_4$.

в) Найдите наименьшее значение a_1+a_5 .

Задачи про правильный треугольник

Задача 14. Дан равносторонний треугольник. Найдите множество точек внутри него:

а) удаленных от стороны AB не больше, чем от стороны BC ;

б) удаленных от стороны BC не больше, чем от стороны AC ;

в) удовлетворяющих одновременно условиям а) и б).

Ответ на вопрос а) показан на рисунке а, на вопрос в) — на рисунке б.

Оказывается, задача 14, в) тесно связана с задачей 1. Для того чтобы перекинуть мостик между ними, решим следующую задачу:

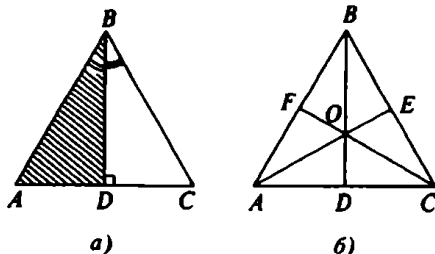
Задача 15. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника ABC до его сторон равна длине h его высоты.

Решение. Возьмем произвольную точку M внутри треугольника ABC и опустим из нее перпендикуляры на стороны AB , BC и AC . Пусть длины получившихся отрезков равны h_1 , h_2 и h_3 ; это и есть расстояния от точки M до сторон. Надо доказать, что $h_1 + h_2 + h_3 = h$. Соединим точку M с вершинами A , B и C . Очевидно, $S_{ABM} + S_{CBM} + S_{CMA} = S_{ABC}$, где S_{ABM} , S_{CBM} , S_{CMA} , S_{ABC} — площади треугольников ABM , CBM , CMA , ABC соответственно. Обозначим длину стороны треугольника ABC через a и перепишем это равенство так:

$$\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{ah}{2}.$$

Отсюда следует доказываемое равенство: $h_1 + h_2 + h_3 = h$.

Дополнение к задаче 15. Утверждение этой задачи верно не только для внутренних точек треугольника, но и для точек, лежащих на его сторонах и в вершинах. (При этом мы считаем, что если точка лежит на стороне треугольника, то ее расстояние до этой стороны равно нулю.)



Возьмем равносторонний треугольник ABC таким, чтобы его высота равнялась единице: $h=1$. Решив задачу 15, мы узнали, что каждой точке внутри нашего треугольника ABC соответствуют три числа h_1, h_2, h_3 , сумма которых равна 1.

Мы предлагаем вам самим подумать над доказательством «обратного» утверждения: если заданы три числа h_1, h_2, h_3 таких, что $h_1 \geq 0, h_2 \geq 0, h_3 \geq 0, h_1 + h_2 + h_3 = 1$, то внутри или на границе треугольника ABC можно найти точку M , расстояние от которой до AB равно h_1 , до BC — h_2 , до AC — h_3 . Конечно, достаточно потребовать, чтобы выполнялись лишь первые два условия, тогда расстояние от M до третьей стороны, согласно задаче 15, будет $1 - h_1 - h_2 = h_3$.

Итак, мы научились тройки положительных (точнее, неотрицательных) чисел $(h_1; h_2; h_3)$, у которых $h_1 + h_2 + h_3 = 1$, изображать геометрически. Будем так и говорить: «точка $(h_1; h_2; h_3)$ »^{*)}.

Геометрическая иллюстрация первых задач

Теперь снова вернемся к первым задачам. Рассмотрим, например, рисунок 1, б к задаче 14 (здесь и дальше мы по-прежнему считаем, что высота треугольника ABC равна 1). На нем выделено множество тех точек $(h_1; h_2; h_3)$, для которых $h_1 \leq h_2$ и $h_2 \leq h_3$.

Покажем, что на многие вопросы, которые мы ставили в первых задачах, очень легко ответить при помощи барицентрических координат. Например, вернемся к задаче 4.

Теперь у нас другие обозначения: $a = h_1, b = h_2, c = h_3$, а условия записываются так:

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq h_3, h_1 + h_2 + h_3 = 1.$$

Вопрос в) задачи 4 можно сформулировать теперь так: какая точка треугольника BOF ближе всего к стороне AC ?

Вопрос г) — какая точка треугольника BOF дальше всего от стороны AC ?

Задача 16. Сформулируйте вопросы в) и г) в задаче 2 на геометрическом языке — так же, как мы это сделали для задачи 4.

Задача 17. Укажите внутри правильного треугольника ABC и на его границе такие точки $(h_1; h_2; h_3)$, что а) $h_1 = 1/4$, б) $h_1 + h_2 = 1/2$, в) $h_1 + h_2 \leq 3/5$.

^{*)} Числа h_1, h_2, h_3 математики называют *барицентрическими координатами* точек правильного треугольника.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Ю. Ионин, В. Некрасов

В школьном курсе алгебры неравенствам отводится значительное место: сначала это — линейные неравенства, потом — квадратичные, потом — неравенства, в которых участвуют логарифмические, показательные и тригонометрические функции. Постепенно неравенства усложняются — появляются всевозможные комбинации функций, изучаемых в школе. В этой статье мы на нескольких примерах проиллюстрируем один важный метод решения неравенств, который обычно называют «методом интервалов». Мы будем рассматривать здесь неравенства, правая часть которых равна нулю, а левая часть представлена в виде произведения или частного функций с известными промежутками знакопостоянства. Метод интервалов основан на следующей очевидной идее: знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

Задача 1. Решите неравенство

$$\frac{(2x-1)(x^2-x-2)}{3-x} < 0.$$

Линейная функция с ненулевым угловым коэффициентом меняет знак при переходе через корень, причем справа от корня знак функции совпадает со знаком углового коэффициента (рис. 1); квадратный трехчлен с положительным дискриминантом тоже меняет знак при переходе через каждый корень, причем правее большего корня знак квадратного трехчлена совпадает со знаком его старшего коэффициента (рис. 2).

Эти соображения приводят к следующей схеме решения неравенства.

1. Находим корни каждого «сомножителя»: $x = \frac{1}{2}$; $x = -1$, $x = 2$, $x = 3$. Наносим найденные корни на числовую ось (рис. 3).

2. Числовая ось разбилась на пять промежутков. На самом правом из них знак каждого сомножителя совпадает со знаком его старшего коэффициента: $2x-1 > 0$, $x^2-x-2 > 0$, $3-x < 0$.

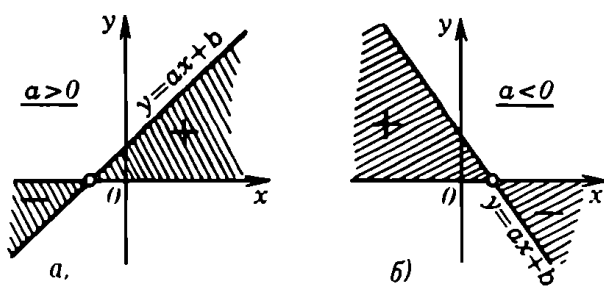


Рис. 1

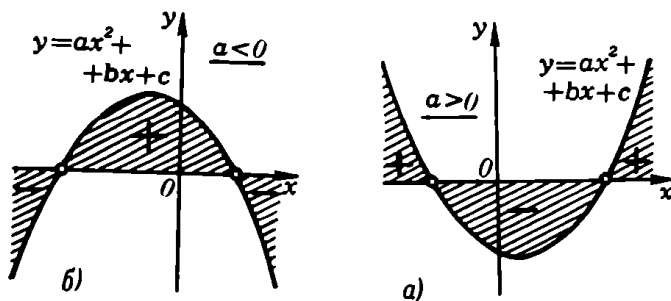


Рис. 2

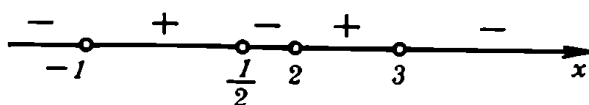


Рис. 3

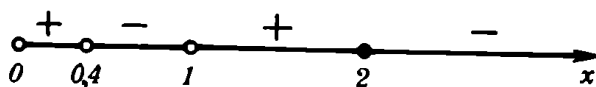


Рис. 4

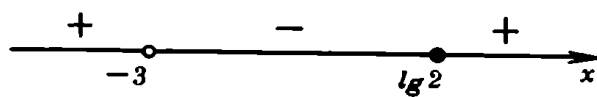


Рис. 5

Следовательно, дробь на этом промежутке отрицательна.

3. При переходе через каждый из отмеченных корней один и только один из сомножителей меняет знак, и потому каждый раз меняется знак дроби. Учитывая это, расставляем в этих промежутках знаки (как показано на рисунке 3).

4. Выбираем промежутки, на которых дробь отрицательна.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (\frac{1}{2}; 2) \cup (3; +\infty)$.

Задача 2. Решите неравенство

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x} \geq 0.$$

Будем решать это неравенство по той же схеме, но не на всей оси, а на промежутке $(0; +\infty)$ — области определения логарифмической функции.

1. Корни «сомножителей»: $x=2$; $x=0,4$; $x=1$ (рис. 4).

2. Полуось $(0; +\infty)$ разбилась на четыре промежутка. На самом правом из них $4-x^2 < 0$, $5x-2 > 0$, $\lg x > 0$. Следовательно, на этом промежутке левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через каждый корень меняет знак один и только один из сомножителей. Учитывая это, расставляем знаки на остальных промежутках (рис. 4).

4. Мы решили строгое неравенство. Остается присоединить к полученному множеству решений корни уравнения

$$\frac{4-x^2}{(5x-2)\lg x} = 0,$$

т. е. корни числителя дроби (входящие в область определения неравенства).

Ответ: $(0; 0,4) \cup (1; 2]$.

Задача 3. Решите неравенство

$$\frac{(10^x-2)(x^2-5x+7)}{x+3} \leq 0.$$

Решение изображено на рисунке 5. Квадратный трехчлен в числителе дроби не имеет корней и потому не меняет знак, который совпадает со знаком его старшего коэффициента.

Ответ: $(-3; \lg 2]$.

Задача 4. Решите неравенство

$$(x^2-2x-3)(6+x-x^2) \geq 0.$$

1. Находим корни сомножителей: $x=-1$, $x=3$, $x=-2$, $x=3$.

2. При $x > 3$ левая часть неравенства отрицательна.

3. При переходе через точку $x=3$ оба сомножителя меняют



Рис. 6

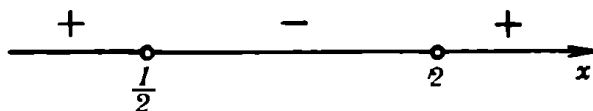


Рис. 7

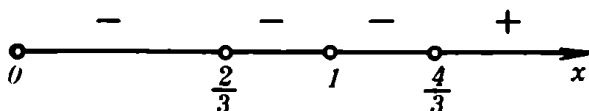


Рис. 8

знак ($x=3$ — их общий корень), так что знак произведения не меняется.

При переходе через каждый из двух других корней левая часть, как и в предыдущих примерах, меняет знак (рис. 6).

Ответ: $[-2; -1] \cup \{3\}$.

Из этой задачи видно, что, применяя метод интервалов, необходимо следить за тем, сколько сомножителей меняют знак при переходе через данный корень. Возможны сомножители, которые не меняют знак при переходе через свой корень (например, квадратный трехчлен с дискриминантом, равным нулю).

Задача 5. Решите неравенство

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 - 5x + 2} \leq 0.$$

$x = \frac{1}{2}$ — корень и числителя, и знаменателя дроби. Однако при переходе через этот корень меняет знак лишь знаменатель; поэтому в этой точке дробь меняет знак (рис. 7).

Ответ: $(\frac{1}{2}; 2)$.

Проверьте себя, решив следующую задачу:

Задача 6. Решите неравенство

$$\frac{(1+x-2x^2) \lg x}{(4-3x)(9x^2-12x+4)} < 0.$$

Ответ: $(0; \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}; 1) \cup (1; \frac{4}{3})$ (рис. 8).

В рассмотренных примерах мы имели дело с линейной, квадратичной, показательной и логарифмической функциями, промежутки знакопостоянства которых изучаются в школьном курсе. Однако метод интервалов можно применять и в более сложной ситуации.

Идея решения следующих неравенств основана на интуитивно явной теореме, точное доказательство которой дается в курсах математического анализа: *если функция непрерывна на промежутке и не имеет в этом промежутке корней, то она сохраняет в этом промежутке знак.*

Задача 7. Решите неравенство

$$\sqrt{x+2} > x. \quad (1)$$

Функция $y = \sqrt{x+2} - x$ определена и непрерывна на промежутке $[-2; +\infty)$.

Найдем корни этой функции, т. е. решим уравнение

$$\sqrt{x+2} = x. \quad (2)$$

Возведя обе части уравнения (2) в квадрат, придем к квадратному уравнению $x^2 - x - 2 = 0$ с корнями $x = -1$, $x = 2$. Проверка показывает, что корнем уравнения (2) является только $x = 2$. Эта точка разбивает область определения неравенства (1) на два промежутка: $[-2; 2)$ и $(2; +\infty)$. На каждом из этих промежутков функция $y = \sqrt{x+2} - x$ сохраняет знак, т. е. либо все точки такого промежутка удовлетворяют неравенству (1), либо ни одна из них этому неравенству не удовлетворяет. Поэтому достаточно подставить в неравенство (1) по одной точке из каждого промежутка. Выберем точки $x = -2$ и $x = 7$. Так как $x = -2$ удовлетворяет неравенству (1), а $x = 7$ этому неравенству не удовлетворяет, множеством решений неравенства (1) является промежуток $[-2; 2)$ (рис. 9).

Ответ: $[-2; 2)$.



Рис. 9



Рис. 10

Задача 8. Решите неравенство

$$x\sqrt{10-x^2} \geq x^2 - 6.$$

1. Область определения функции $\sqrt{10-x^2}$: $[-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$.

2. Решаем уравнение:

$$x\sqrt{10-x^2} = x^2 - 6,$$

$$x^2(10-x^2) = (x^2-6)^2,$$

$$x^4 - 11x^2 + 18 = 0.$$

Получаем четыре корня: $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 3$. Проверка оставляет два корня: $x = -\sqrt{2}$, $x = 3$ (рис. 10).

3. Подставляем в неравенство числа $x = -\sqrt{10}$, $x = 0$, $x = \sqrt{10}$. Число $x = 0$ удовлетворяет неравенству, а числа $x = \pm\sqrt{10}$ ему не удовлетворяют.

Ответ: $[-\sqrt{2}; 3]$.

Как известно, линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая и тригонометрические функции, а также их композиции и функции, получаемые из них с помощью арифметических действий, непрерывны в своей области определения. Поэтому метод интервалов можно применять при решении практически всех неравенств школьного курса. Метод интервалов позволяет представить множество решений неравенства в виде объединения промежутков, границы которых — либо корни соответствующего уравнения, либо граничные точки области определения неравенства.

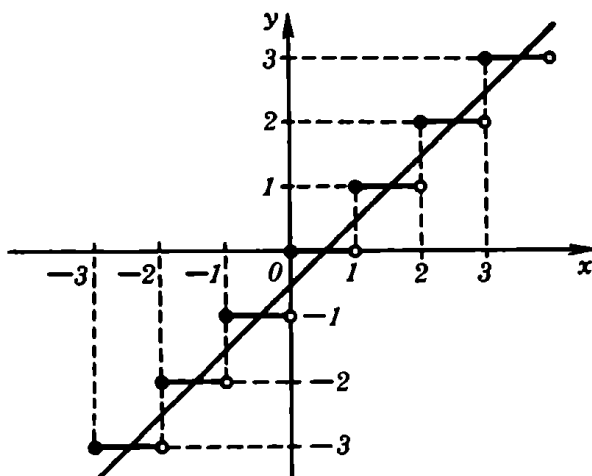


Рис. 11

Требование *непрерывности* существенно для применения метода интервалов. В этом можно убедиться на следующей задаче.

Задача 9. Решите неравенство $[x] \leq x - \frac{1}{2}$.

Построим графики левой и правой части неравенства (рис. 11). Корнями уравнения $[x] = x - \frac{1}{2}$ являются числа вида $k + \frac{1}{2}$, где k — любое целое число. В то же время множество решений неравенства — объединение промежутков вида $(k + \frac{1}{2}; k + 1)$, граничными точками которых являются, в частности, все целые числа, которые не являются при этом ни корнями уравнения, ни граничными точками области определения.

СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

А. Влисов

- Какое из двух чисел больше: $\frac{22}{7}$ или 3,14?
- Они равны.
- Почему?!
- Каждое из них равно л.

Разговор на устном экзамене

В этой заметке разбираются некоторые основные методы установления отношения «больше» или «меньше» между числами, записанными «в неявном виде» — с помощью логарифмов, радикалов и т. п. Подобные задачи часто возникают в ходе выполнения экзаменационных заданий, — и далеко не всегда школьники могут успешно с ними справиться. Широко распространена и та точка зрения, что для решения такой задачи нужно «вычислить» исследуемые числа; и нынешние школьники, «испорченные» прогрессом микроэлектроники, встречая задачу, в которой требуется сравнить два числа, хватаются за микрокалькулятор. Однако, с одной стороны, ясно, что здесь не требуется находить значения чисел с точностью до определенного десятичного знака после запятой. С другой стороны, вычислительный подход может иметь доказательную силу лишь в том случае, когда имеется *оценка точности*, — без нее легко впасть в ошибку. Верность того или иного знака после запятой *нужно обосновывать*, а это уже совсем непростая задача. Поэтому предпочтительнее избрать другой способ решения.

Весьма общий метод определения знака неравенства между числами (или выражениями) α и β заключается в следующем: *пытаются подобрать такое число (выражение) γ , для которого, например, $\alpha < \gamma$ и одновременно $\gamma < \beta$* . Пронллюстрируем этот метод следующей задачей.

Задача 1. *Выясните (не пользуясь таблицами), что больше: $\log_2 3$ или $\log_5 8$?*

Решение. Легко проверить, что $1 < \log_2 3 < 2$ и $1 < \log_5 8 < 2$, но отсюда не видно, какой из знаков: « $>$ », « $<$ », « $=$ » следует поставить между числами $\log_2 3$ и $\log_5 8$. Обозначим этот неизвестный пока нам знак «галочкой» « \vee » (знак

$\sqrt{}$ называют *знаком сравнения*) и сравним два логарифма: $\log_2 3 \sqrt{\log_5 8}$. Умножим обе части этого неравенства на 2, получим $2 \log_2 3 \sqrt{2 \log_5 8}$. Поскольку $3 < 2 \log_2 3 < 4$, а $2 < \sqrt{2 \log_5 8} < 3$, получаем, что $2 \log_2 3 > 2 \log_5 8$, откуда и $\log_2 3 > \log_5 8$ (мы воспользовались одним из основных свойств неравенств: *если $a > b$, то $ac > bc$, где c — любое положительное число*).

Теперь ясно, какое число нужно выбрать в качестве «промежуточного» — это число $3/2$: оно больше одного из данных чисел и меньше другого:

$$\log_5 8 < 3/2 < \log_2 3.$$

Конечно, в этой задаче мы все время неявно пользовались тем обстоятельством, что *на промежутке $(0; +\infty)$ логарифмическая функция $\log_a x$ при $a > 1$ возрастает*.

Задача 2. Что больше:

$$\sqrt{9978} + \sqrt{9981}$$

или

$$\sqrt{9979} + \sqrt{9980}?$$

Решение. Вычтем из одного числа другое:

$$(\sqrt{9981} - \sqrt{9980}) - (\sqrt{9979} - \sqrt{9978}). \quad (*)$$

Каждую разность радикалов умножим и одновременно разделим на их сумму:

$$\frac{(\sqrt{9981} - \sqrt{9980})(\sqrt{9981} + \sqrt{9980})}{\sqrt{9981} + \sqrt{9980}} - \frac{(\sqrt{9979} - \sqrt{9978})(\sqrt{9979} + \sqrt{9978})}{\sqrt{9979} + \sqrt{9978}}.$$

Поскольку $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, разность (*) равна

$$\frac{1}{\sqrt{9981} + \sqrt{9980}} - \frac{1}{\sqrt{9979} + \sqrt{9978}}.$$

Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, откуда следует, что первое число меньше второго:

$$\sqrt{9978} + \sqrt{9981} < \sqrt{9979} + \sqrt{9980}.$$

Разность (*) равна примерно $0,5 \cdot 10^{-6}$, поэтому ее вычисление на микрокалькуляторе, который воспроизводит 8 значащих цифр на индикаторе, не дает ответа на поставленный вопрос; — мы получим, что эти числа равны, т. е. придем к неверному ответу.

Задача 3. Что больше: 1986^{1985} или 1985^{1986} ?

Решение. Сравним числа, полученные после извлечения корня $(1985 \cdot 1986)$ -й степени из данных чисел:

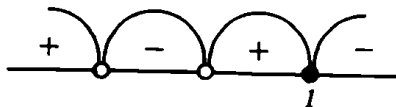


Рис. 1

$$^{1986}\sqrt{1986} \vee ^{1985}\sqrt{1985}.$$

Заметим, что это — значения функции $y = x^{1/x}$ при $x = 1985$ и $x = 1986$. Производная этой функции $y' = x^{1/x-2} (1 - \ln x)$ отрицательна при $x > e$, так что на промежутке $(e; +\infty)$ функция $y = x^{1/x}$ убывает. Поэтому

$$^{1986}\sqrt{1986} < ^{1985}\sqrt{1985},$$

а значит, $1986^{1985} < 1985^{1986}$.

Оценим количество десятичных цифр числа 1986^{1985} : $1 + \lg 1986^{1985} = 1 + 1985 \lg 1986 \approx 1985 (\lg 2 + 3) \approx 1985 (0,3 + 3) \approx 6550$ цифр! Такое огромное число, большее «гугола» (так называется число 10^{100}), не может вычислить ни одна ЭВМ в мире!

Задачи на сравнение чисел очень часто возникают при решении неравенств. Мы разберем сейчас два примера, после чего предложим несколько неравенств для самостоятельного решения.

Задача 4. Решите неравенство

$$(2 - 5^x)(7x^2 - 10x + 3) < 0.$$

Решение. Будем решать это неравенство методом интервалов (см. статью Ю. Ионина и В. Некрасова в настоящем сборнике, с. 92). Отметим на числовой оси корни сомножителей: $x_1 = \log_5 2$, $x_2 = 3/7$, $x_3 = 1$. Очевидно, $x_3 = 1$ — самый большой корень, и при $x > 1$ данное произведение отрицательно. Чередование знаков левой части неравенства показано на рисунке 1 (выделены корни x_1 и x_2). Мы видим, что ответ существенно зависит от того, что больше: $3/7$ или $\log_5 2$. Сравним их: $3/7 \vee \log_5 2$. Умножим обе части неравенства на 7:

$$3 \vee 7 \log_5 2,$$

или

$$3 = \log_5 5^3 \vee 7 \log_5 2, \quad \log_5 5^3 \vee \log_5 2^7, \quad 5^3 \vee 2^7.$$

Поскольку $5^3 < 2^7$, и каждая наша операция не меняет знака неравенства, мы, произведя все описанные действия в об-

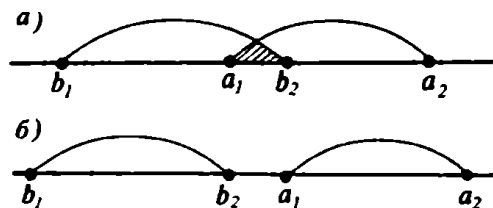


Рис. 2

ратном порядке, получим, что $3/7 < \log_5 2$, так что ответ в задаче 4 такой: $(3/7; \log_5 2) \cup (1; +\infty)$.

Задача 5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 - 10x + 5 < 0, \\ x^2 + 3x - 2 < 0. \end{cases}$$

Решение. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

$$\begin{cases} 2(x - a_1)(x - a_2) < 0, \\ (x - b_1)(x - b_2) < 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= (5 - \sqrt{15})/2, & a_2 &= (5 + \sqrt{15})/2, \\ b_1 &= -(3 + \sqrt{17})/2, & b_2 &= (-3 + \sqrt{17})/2. \end{aligned}$$

Решением этой системы служит пересечение интервалов $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$. Таким образом, ответ зависит от взаимного расположения этих интервалов на числовой оси. Очевидно, что $b_1 < a_1$ и $b_2 < a_2$, но числа a_1 и b_2 близки (каждое из них немного больше 0,5). Поэтому реализуется один из двух изображенных на рисунке 2 вариантов в зависимости от того, какое из иррациональных чисел, a_1 или b_2 , больше (разумеется, сравнивать числа надо без применения калькулятора).

Итак, сравним числа a_1 и b_2 , пользуясь основными свойствами неравенств:

	$(5 - \sqrt{15})/2$ V $(-3 + \sqrt{17})/2$
Умножим на 2 оба числа:	$5 - \sqrt{15}$ V $-3 + \sqrt{17}$;
Прибавим по 3 к обоим числам:	$8 - \sqrt{15}$ V $\sqrt{17}$;
Возведем положительные числа в квадрат:	$64 - 16\sqrt{15} + 15$ V 17 ;
Прибавим к обоим числам по $(16\sqrt{15} - 17)$ и поделим их на 2:	31 V $8\sqrt{15}$;
Возведем положительные числа в квадрат:	961 V 960 .

Поскольку $961 > 960$, получаем, что $(5 - \sqrt{15})/2 > (-3 + \sqrt{17})/2$. Мы видим, что реализуется случай, изображенный на рисунке 2, б — интервалы $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$ не пересекаются. Значит, исходная система неравенств решений не имеет.

Упражнения

1. Решите неравенство

$$|3 + 5x - 2x^2| < \frac{1-x}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$4^x - 2^{x+1} - 3 < 0.$$

Верно ли, что $\sqrt{2}$ является его решением?

3. Решите неравенство

$$\frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1.$$

Верно ли, что $\lg \frac{1}{32}$ является его решением?

4. Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0.$$

5. Найдите все решения неравенства $\cos \frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $(-\frac{21}{5}; 0)$.

6. Найдите все решения неравенства $\lg \frac{5}{2} + 6x - x^2 > 0$, лежащие в промежутке $[\frac{1}{4}; 6)$.

7. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 4x - 11)^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{2 - 5x - 3x^2} \geq 0.$$

8. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(x^2 - 2x - 7)^5 - \log_3(x^2 - 2x - 7)^6}{3x^2 - 13x + 4} \leq 0.$$

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

В. Болтянский

Прежде всего напомним, как решается квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

с действительными коэффициентами p, q . Его можно переписать в виде

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(p^2 - 4q) \quad (2)$$

(это легко проверить, раскрыв скобки). Число $p^2 - 4q$ называют *дискриминантом* уравнения (1) и обозначают через D . Таким образом, уравнение принимает вид

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}D. \quad (3)$$

Теперь ясно, что если число D неотрицательно, то уравнение (1) имеет два действительных корня

$$x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{D}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{D}), \quad (4)$$

причем эти корни различны при $D > 0$ и совпадают в случае $D = 0$.

Если же D отрицательно, то уравнение (3), а потому и (1), действительных корней не имеет, поскольку ни при каком действительном x левая часть в (3) не может быть отрицательным числом. В этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{-Di})^2 = 0, \quad (5)$$

где i — мнимая единица, т. е. $i^2 = -1$. Теперь, раскладывая левую часть на множители, получаем

$$\left(x + \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-Di}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-Di}\right) = 0,$$

откуда видно, что уравнение имеет два комплексных корня

$$x_1 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{-Di}), \quad x_2 = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{-Di}). \quad (6)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Квадратное уравнение (1) с действительными коэффициентами p, q имеет два корня, вид которых зависит от значения дискриминанта $D = p^2 - 4q$. При $D > 0$ корни действительны и различны (см. (4)), при $D = 0$ они действительны и совпадают, а при $D < 0$ являются комплексными (см. (6)).*

Следующую теорему установил известный французский математик Франсуа Виет (1540 — 1603), один из основателей буквенных обозначений и современной алгебраической символики.

Теорема 2 (Виета). *Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения (1) удовлетворяют соотношениям*

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (7)$$

В самом деле, в случае действительных корней (т. е. при неотрицательном D) мы находим из формул (4):

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{D}) + \frac{1}{2}(-p - \sqrt{D}) = -p,$$

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4}(-p + \sqrt{D})(-p - \sqrt{D}) = \frac{1}{4}(p^2 - D) = q.$$

В случае комплексных корней (т. е. при $D < 0$) формулы Виета (7) аналогичным образом получаются из (6).

Теорема 3. *Любой квадратный трехчлен разлагается на линейные множители:*

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1).

В самом деле, по формулам Виета,

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Иногда при разложении на множители бывает удобно осуществлять *выделение полного квадрата* (см. (2)) вместо нахождения корней уравнения по формулам (4) или (6). Например,

$$x^2 + 8x - 33 = (x + 4)^2 - 49,$$

откуда находим требуемое разложение

$$x^2 + 8x - 33 = (x - 3)(x + 11).$$

Заметим еще, что $\frac{1}{4}D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ и $\frac{1}{2}\sqrt{D} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Этими формулами удобнее пользоваться, если p четно.

Задачи

1. Докажите, что дискриминант D квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен $(x_1 - x_2)^2$, где x_1, x_2 — корни этого уравнения.

2. Проверьте подстановкой, что числа, указанные в (4), являются при $D \geq 0$ корнями уравнения (1). Проверьте также, что при $D < 0$ числа (6) являются корнями этого уравнения.

3. Решите следующие квадратные уравнения:

а) $x^2 - 5 = 0$;

ж) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

б) $x^2 + 7 = 0$;

з) $x^2 + 2(a-1)x - (6a+3) = 0$;

в) $x^2 + 3x = 0$;

и) $x^2 + 2(a+3)x + (a^2 + 2a + 9) = 0$;

г) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

к) $x^2 - 2(a^2 - 1)x + (a^4 - a^2 + 1) = 0$;

д) $x^2 - x - 30 = 0$;

л) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

е) $x^2 + 4x + 5 = 0$;

м) $(1+a)x^2 + 2x\sqrt{a^2+1} - (1-a) = 0$.

4. Докажите, что при $D > 0$ график квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ пересекает ось абсцисс в двух точках $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ (рис. 1). При $D = 0$ график касается оси абсцисс (рис. 2). Наконец, при $D < 0$ график не имеет общих точек с осью абсцисс, а расположен выше нее (рис. 3).

5. Составьте квадратное уравнение, имеющее следующие корни:

а) $x_1 = 1, x_2 = -2$;

б) $x_1 = x_2 = -4$;

в) $x_1 = 2 - 3i, x_2 = 2 + 3i$;

г) $x_1 = a + bi, x_2 = a - bi$;

д) $x_1 = 3 - 4i, x_2 = 2 - 5i$.

6. Докажите, что при любых p, q система уравнений

$$\begin{cases} y + z = -p, \\ yz = q \end{cases}$$

имеет два решения: $y = x_1, z = x_2$; $y = x_2, z = x_1$ (действительных или комплексных, различных или совпадающих), где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

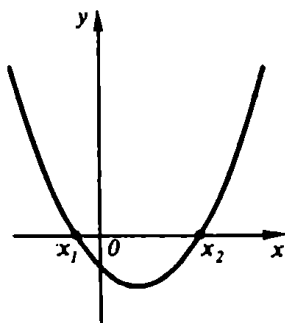


Рис. 1

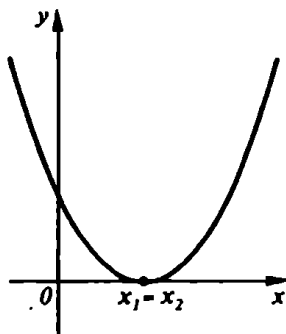


Рис. 2

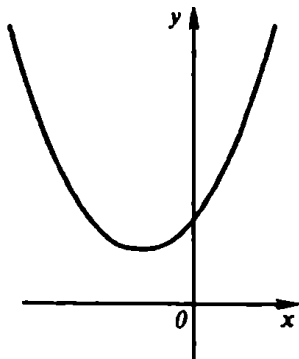


Рис. 3

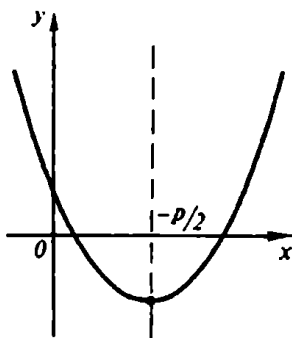


Рис. 4

7. Докажите, что график квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ симметричен относительно прямой $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 4).

8. Докажите, что корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (с действительными коэффициентами p, q) в том и только в том случае действительны и положительны, если выполнены условия

$$D \geq 0, \quad p < 0, \quad q > 0.$$

9. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ (с действительными коэффициентами p, q) были действительными, отличными от нуля и имеющими а) одинаковые знаки, б) разные знаки.

10. Докажите, что если один корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ (с действительными коэффициентами p, q) действителен, то и второй корень действителен.

11. Докажите, что если один корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ (с действительными p, q) не является действительным числом, т. е. имеет вид $a + bi$, где $b \neq 0$, то второй корень этого уравнения равен $a - bi$, т. е. также не является действительным числом.

12. Числа p и q действительны. Найдите (в зависимости от значения D) множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $x^2 + px + q < 0$.

13. Решите следующие строгие квадратичные неравенства (и сделайте чертежи):

а) $x^2 - 5x + 6 < 0$;

б) $x^2 - 10x + 25 > 0$;

в) $x^2 - x - 12 > 0$;

г) $x^2 - 12x + 38 > 0$.

14. Решите следующие нестрогие квадратичные неравенства:

а) $x^2 - 3x - 18 \leq 0$;

б) $x^2 - 8x + 16 \leq 0$;

в) $x^2 + 6x + 5 \geq 0$;

г) $x^2 - 14x + 50 \leq 0$.

15. Докажите, что если корни обоих квадратных уравнений

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

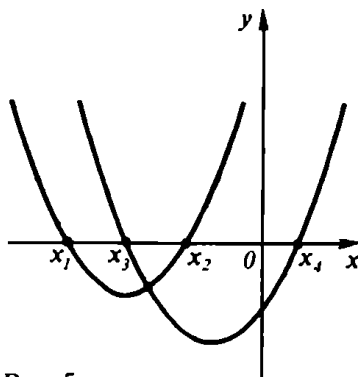


Рис. 5

действительны и находятся на отрезке $[a; b]$, то при любом $k > 0$ корни уравнения

$$x^2 + p_1x + q_1 + k(x^2 + p_2x + q_2) = 0, \quad (8)$$

если они действительны, лежат на том же отрезке $[a; b]$.

16. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ действительны и перемежаются (рис. 5), т. е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, то при любом $k > 0$ корни уравнения (8) действительны, причем один из них расположен на отрезке $[x_1; x_3]$, а другой — на отрезке $[x_2; x_4]$.

17. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ действительны и перемежаются (рис. 5), то при любом отрицательном k , отличном от -1 , корни уравнения (8) действительны, причем один расположен на отрезке $[x_3; x_2]$, а другой — вне отрезка $[x_1; x_4]$.

18. При каких a уравнение $x^2 + ax + 6 = 0$ имеет целые корни?

19. При каких a уравнение $(x - 10)(x - a) + 1 = 0$ имеет целые корни?

20. Укажите знаки чисел p и q , если график квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ имеет вид, указанный на рисунке 6.

21. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найдите p и q , если известно, что $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ являются корнями

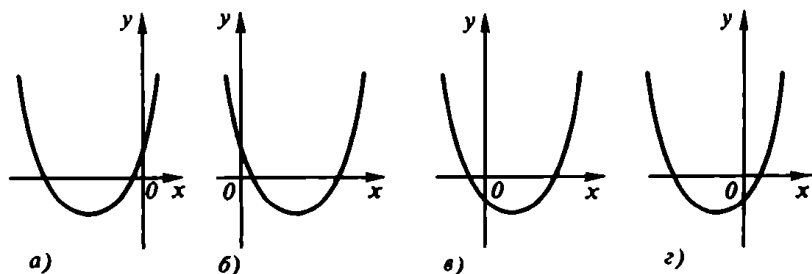


Рис. 6

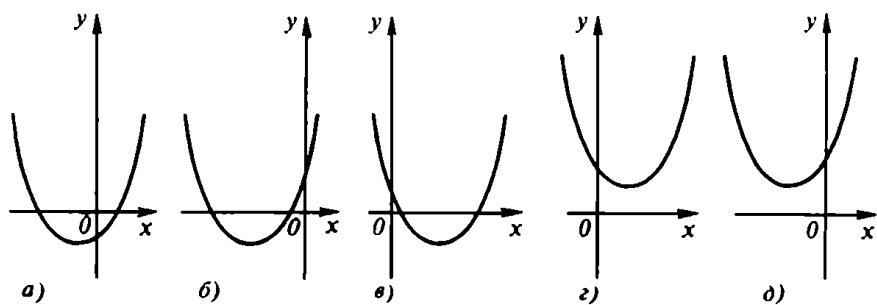


Рис. 7

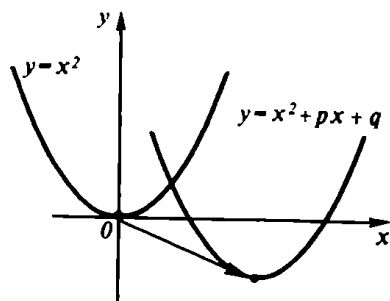


Рис. 8

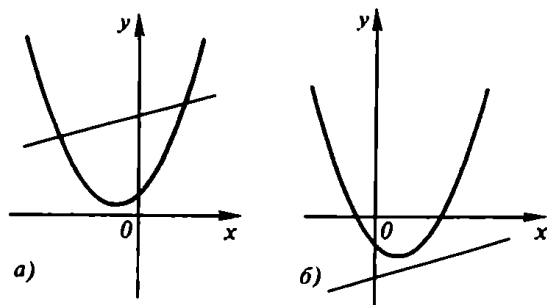


Рис. 9

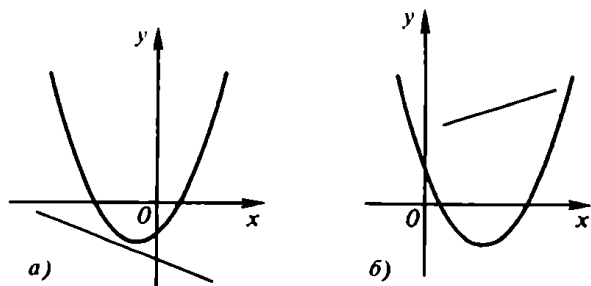


Рис. 10

$$x^2 - p^2x + pq = 0.$$

22. На оси абсцисс взята точка A , а на оси ординат — точка B (обе точки отличны от начала координат). Докажите, что существует единственный квадратный трехчлен $y = x^2 + px + q$, график которого проходит через обе точки A, B (рис. 7).

23. Для каких действительных значений a квадратный трехчлен $y = x^2 + 2ax + 1$ положителен при всех действительных x ?

24. Уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют действительные коэффициенты, причем $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет действительные корни.

25. Рассмотрим многочлен $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ с действительными коэффициентами $a > 0, b, c$. Докажите, что справедливо одно из следующих утверждений:

а) $f(x, y) = a(x - m_1y)(x - m_2y)$, где $m_1 \neq m_2$ — действительные числа (гиперболический многочлен);

б) $f(x, y) = a(x - ty)^2$, где t — действительное число (параболический многочлен);

в) $f(x, y) > 0$ при любых действительных x, y , кроме $x = y = 0$ (эллиптический многочлен).

26. Докажите, что график трехчлена $y = x^2 + px + q$ получается из графика $y = x^2$ параллельным переносом (рис. 8) на вектор $\vec{a} = (-p/2; -D/4)$.

27. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 + px + q, \\ y = ax + b \end{cases}$$

при любых a, b имеет не более двух решений (рис. 9).

28. Докажите, что внутренняя область параболы $y = x^2 + px + q$, т. е. множество всех точек (x, y) , для которых $y > x^2 + px + q$, является *выпуклой* (это означает, что вместе с каждым двумя точками она содержит и весь соединяющий их отрезок (рис. 10)).

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

А. Болибрух, В. Уроев, М. Шабунин

Квадратным трехчленом относительно x называется выражение вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — заданные числа, причем $a \neq 0$. Значения x , при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называются *корнями* трехчлена.

Задачи, при решении которых требуется знание свойств квадратного трехчлена, нередко встречаются на вступительных экзаменах в вузы. Многие школьники без затруднений выписывают различные формулы, умеют изобразить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, знают ее основные свойства. Однако эти знания часто бывают формальными, абитуриентам не удастся их применить при решении задач, относящихся к рассматриваемой теме.

Мы покажем на примерах, как важно бывает умение сочетать алгебраические и геометрические соображения при решении таких задач.

1. Найдите наибольшее значение квадратного трехчлена

$$y = -2x^2 + 4x - 5.$$

Для решения этой задачи можно, конечно, пользоваться производной, но можно обойтись и без нее. Применим метод выделения полного квадрата:

$$y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + 1) + 2 - 5 = -2(x - 1)^2 - 3.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение квадратного трехчлена равно -3 и достигается при $x = 1$.

Заметим, что метод выделения полного квадрата применяется для получения формулы корней квадратного уравнения, а также для построения графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Выделяя полный квадрат, получаем

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{2a},$$

откуда следует, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается параллельным переносом параболы $y = ax^2$ на вектор $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{2a} \right)$.

2. Определите знаки чисел a , b , c , исходя из расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно координатных осей в каждом из случаев, показанных на рисунке 1.

Рассмотрим подробно случай a . Коэффициент a меньше 0, так как ветви параболы направлены вниз. Абсцисса вершины параболы, равная $-\frac{b}{2a}$, меньше нуля, откуда следует, что $b < 0$. Ордината точки пересечения оси Oy с параболой равна значению функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $x = 0$. Следовательно, коэффициент $c = f(0)$ положителен. Итак, $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

Этот же результат можно получить иначе, если воспользоваться формулами Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Однако такой способ исследования уже нельзя применить в случае b , когда корней нет.

Предлагаем читателям самостоятельно разобрать случаи b , $в$, $г$.

3. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 - 2rx - 7r^2 = 0$ удовлетворяют условию $x_1^2 + x_2^2 = 18$. Найдите r .

Сначала выразим $x_1^2 + x_2^2$ через сумму и произведение корней, а затем воспользуемся теоремой Виета. Имеем

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2r)^2 - 2(-7r^2) = 18r^2.$$

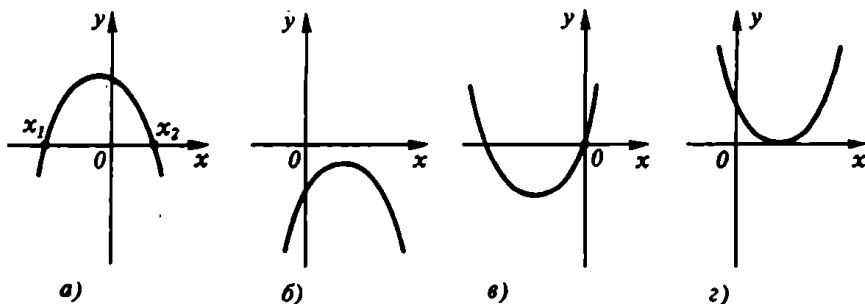


Рис. 1

Таким образом, задача сводится к решению уравнения $r^2 = 1$, откуда $r_1 = 1$, $r_2 = -1$.

4. Найдите необходимые и достаточные условия того, что корни x_1 и x_2 уравнения $f(x) = x^2 + px + q = 0$ больше 1 по абсолютной величине и различны по знаку.

Решение, основанное на применении известных формул для дискриминанта и корней квадратного уравнения, является трудоемким и технически сложным. Задача легко решается, если использовать геометрические соображения.

Найдем сначала необходимые условия. Пусть $x_1 < x_2$ (корни различны). По условию задачи $x_1 < -1$, $x_2 > 1$, т. е. отрезок $[-1; 1]$ лежит внутри промежутка $(x_1; x_2)$ (рис. 2). Последнее условие эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Подставляя 1 и -1 в выражение для $f(x)$, получаем необходимые условия:

$$\begin{cases} -p + q < -1, \\ p + q < -1. \end{cases} \quad (2)$$

Связь между найденными значениями p и q удобно представить графически, изобразив на координатной плоскости (p, q) множество точек, координаты которых удовлетворяют полученным неравенствам (рис. 3).

Покажем, что необходимые условия (2) являются достаточными, т. е. при выполнении неравенств (2) квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет такие корни x_1 и x_2 , что $x_1 < -1$, а $x_2 > 1$. Так как условия (2) эквивалентны условиям (1), в двух различных точках ($x = 1$ и $x = -1$) функция $y = f(x)$

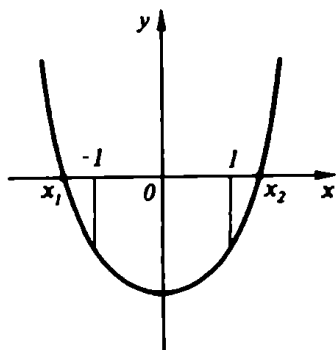


Рис. 2

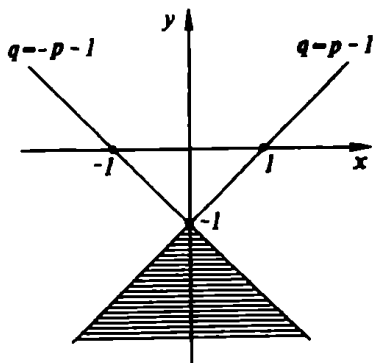
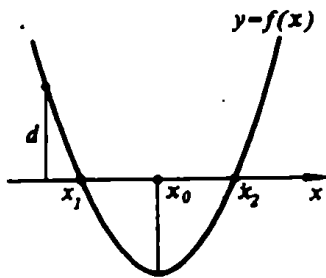
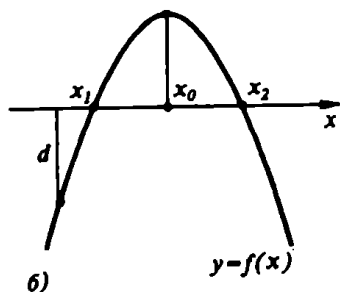


Рис. 3



а)



б)

Рис. 4

принимает отрицательные значения. Так как коэффициент при x^2 положителен, ветви параболы $y=f(x)$ направлены вверх. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в двух различных точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), причем точки -1 и 1 лежат на интервале $(x_1; x_2)$, т. е. $x_1 < -1$, $x_2 > 1$.

5. Найдите все значения r , при которых корни уравнения $(r-4)x^2 - 2(r-3)x + r = 0$ больше -1 .

Сначала отдельно рассмотрим случай $r=4$. Тогда уравнение имеет вид $-2x + 4 = 0$, откуда $x=2$. Так как $2 > -1$, значение $r=4$ нам подходит.

Если $r \neq 4$, то уравнение является квадратным.

Решим задачу в более общем виде: найдем необходимые и достаточные условия, при которых корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ существуют и оба больше заданного числа d .

Геометрическое решение. Корни x_1 и x_2 должны существовать, поэтому

$$D = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (1)$$

Построим эскиз графика функции $y=f(x)$. Возможна одна из двух ситуаций, представленных на рисунке 4. Так как оба корня больше d , абсцисса вершины параболы больше d , т. е.

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} > d, \text{ или по формулам Виета}$$

$$-\frac{b}{2a} > d. \quad (2)$$

Точка $x=d$ должна лежать вне отрезка $[x_1; x_2]$. Это означает, что либо ветви параболы направлены вверх ($a > 0$) и $f(d) > 0$ (рис. 4, а), либо ветви параболы направлены вниз ($a < 0$) и $f(d) < 0$ (рис. 4, б). Следовательно, числа a и $f(d)$ — одного

знака, т. е.

$$af(d) > 0. \quad (3)$$

Проверьте самостоятельно, что условия (1) — (3) в совокупности являются не только необходимыми, но и достаточными.

Алгебраическое решение. Два действительных числа $x_1 - d$ и $x_2 - d$ положительны тогда и только тогда, когда их сумма и произведение положительны. Поэтому условие задачи равносильно совокупности следующих трех условий:

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac > 0, \\ (x_1 - d) + (x_2 - d) &> 0, \\ (x_1 - d)(x_2 - d) &> 0. \end{aligned}$$

Пользуясь формулами Виета, второе условие можно переписать в виде

$$x_1 + x_2 - 2d > 0, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} > d, \quad -\frac{b}{2a} > d.$$

Третье — переписывается так:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 - (x_1 + x_2)d + d^2 &> 0, \\ a(ad^2 + bd + c) &> 0, \quad af(d) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы вновь доказали, что совокупность условий (1) — (3) равносильна условиям рассмотренной общей задачи.

Возвращаясь к задаче 5, выпишем для нее условия (1) — (3). Получим систему неравенств

$$\begin{cases} (r-3)^2 - r(r-4) = 9 - 2r \geq 0, \\ \frac{r-3}{r-4} > -1, \\ (r-4)(4r-10) > 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $r < 5/2$, $4 < r \leq 9/2$. К этим решениям надо добавить решение $r = 4$.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{5}{2}\right) \cup \left[4; \frac{9}{2}\right].$$

Задачи для самостоятельного решения

6. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Найдите p и q , если известно, что $x_1 + 1$ и $x_2 + 1$ являются корнями уравнения $x^2 - p^2x + pq = 0$.

7. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает на двух

параллельных прямых отрезки AB и CD . Докажите, что прямая, проходящая через середины этих отрезков, параллельна оси ординат.

8. Известно, что квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $a - b + c < 0$. Определите знак c .

9. Пусть корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ различны. Докажите, что число x_0 находится между x_1 и x_2 тогда и только тогда, когда $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$.

10. Пусть уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет неотрицательных корней и $a < 0$. Определите знак c .

11. Пусть коэффициенты уравнений $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ связаны соотношением $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из этих уравнений имеет корни.

12. Может ли уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — рациональные числа, иметь следующие корни:

а) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$?

б) $x_1 = \sqrt{3} + 2$, $x_2 = 2 - \sqrt{3}$?

13. Докажите, что любой рациональный корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ с целыми коэффициентами p и q является целым числом.

14. Уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ с целыми коэффициентами p_i , q_i ($i = 1, 2$) имеют общий нецелый корень. Докажите, что $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

15. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $S_m = x_1^m + x_2^m$ (m — целое положительное). Докажите формулу

$$aS_m + bS_{m-1} + cS_{m-2} = 0.$$

Многие задачи, способные повергнуть в ужас человека неподготовленного, тем не менее, часто удается решить с помощью чрезвычайно простых соображений. В этой статье мы расскажем, что можно «вытащить» из общеизвестных условий разрешимости квадратных уравнений и неравенств.

Уравнения и системы

Начнем с задачи, иллюстрирующей метод, который мы и будем применять дальше.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Решение. Можно переписать это уравнение в виде

$$(x + y - 1)^2 + (2x - y)^2 = 0.$$

Однако додуматься до такого преобразования не очень просто. Поэтому мы поступим иначе: рассмотрим наше уравнение как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y :

$$5x^2 - 2(y + 1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем после преобразований

$$D/4 = (y + 1)^2 - 5(2y^2 - 2y + 1) = -9y^2 + 12y - 4 = -(3y - 2)^2,$$

откуда сразу следует, что $y = 2/3$ (иначе дискриминант отрицателен). Теперь без труда находим, что $x = 1/3$.

Ответ: $(1/3; 2/3)$.

Теперь решим систему уравнений.

Задача 2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 10 = 0, \\ 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0. \end{cases}$$

Решение. Стандартными методами с этой задачей справиться трудно. Поэтому поступим так же, как мы уже делали в первой задаче — решим первое уравнение как квадратное относительно x . Его дискриминант равен

$$D/4 = -(y-3)^2.$$

Выходит, что уравнение имеет действительное решение лишь при единственном значении y , а именно при $y=3$. Теперь найдем, что $x=2$, и проверим полученное решение прямой подстановкой во второе уравнение.

Ответ: (2; 3).

В следующей системе число уравнений меньше числа неизвестных.

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3}, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Решение. Выразив x через y и z из первого уравнения, получим после подстановки во второе уравнение:

$$y^2 + (z - \sqrt{3})y + z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

Оно квадратное относительно y с коэффициентами, зависящими от z . Его дискриминант

$$D = -3z^2 + 2\sqrt{3}z - 1 = -(\sqrt{3}z - 1)^2$$

не может быть отрицателен, и поэтому $z = 1/\sqrt{3}$. Дальнейшее ясно.

Ответ: $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Задача 4. Решите уравнение

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = 3/2.$$

Решение. Преобразуя левую часть с помощью известных формул, приходим к уравнению

$$4 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1 = 0,$$

которое после замены $t = \cos \frac{x+y}{2}$ приводится к виду

$$4t^2 - 4 \cos \frac{x-y}{2} \cdot t + 1 = 0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем неравенство

$$D/4 = 4 \left(\cos^2 \frac{x-y}{2} - 1 \right) \geq 0,$$

из которого сразу следует, что $\cos^2 \frac{x-y}{2} = 1$.

Осталось решить две системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = -1, \\ \cos \frac{x+y}{2} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(\pm \frac{\pi}{3} + 2(k+n)\pi; \pm \frac{\pi}{3} + 2(k-n)\pi);$

$(\pm \frac{2\pi}{3} + \pi + 2(k+n)\pi; \pm \frac{2\pi}{3} - \pi + 2(k-n)\pi),$

$k, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 5. При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x; y)$, удовлетворяющая уравнению

$$ax^2 + (3a+2)y^2 + 4axy - 2ax + (4-6a)y + 2 = 0?$$

Решение. При $a=0$ получаем уравнение

$$2y^2 + 4y + 2 = 0,$$

единственный корень которого $y=1$.

Легко видеть, что в этом случае решениями исходного уравнения будут все пары $(x; -1)$, так что $a=0$ не удовлетворяет условию.

При $a \neq 0$, как и раньше, рассмотрим исходное уравнение как квадратное относительно x :

$$ax^2 + 2a(2y-1)x + (3a+2)y^2 + (4-6a)y + 2 = 0.$$

Для него

$$D/4 = a(a-2)(y+1)^2.$$

Если $a(a-2) < 0$, то $y=-1$, $x=3$ — единственное решение.

Если же $a(a-2) \geq 0$, исходное уравнение относительно x имеет решение при любом y .

Ответ: $0 < a < 2.$

Неравенства

Напомним, что неравенство

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a > 0)$$

выполнено при всех x тогда и только тогда, когда

$$b^2 - 4ac \leq 0.$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

имеет решения при $a > 0$ тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет 2 различных корня, т. е. при $D > 0$.

Решение следующей широко известной задачи достаточно хорошо иллюстрирует метод решения, основанный на перечисленных свойствах квадратичных неравенств.

Задача 6. Докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac,$$

где a, b, c — любые действительные числа. **Указание.** Неравенство

$$a^2 - a(b+c) + b^2 + c^2 - bc \geq 0$$

— квадратичное относительно a с коэффициентами, зависящими от b и c . Его дискриминант, равный $-3(b-c)^2$, не положителен и равен нулю при $b=c$, причем знак равенства в исходном неравенстве возможен лишь при $a=b=c$.

А вот несколько более сложная задача.

Задача 7. Докажите неравенство

$$6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc},$$

где $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

Решение. Положив $t = \sqrt{a}$, запишем неравенство как квадратичное относительно t :

$$6t^2 - (5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})t + 4b + 5c - 3\sqrt{bc} \geq 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства равен

$$(5\sqrt{b} + 7\sqrt{c})^2 - 24(4b + 5c - 3\sqrt{bc}) = -71(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2,$$

т. е. отрицателен при $b \neq c$ и равен нулю при $b=c$.

Таким образом, левая часть этого неравенства всегда неотрицательна и может быть равна нулю лишь при $b=c=a$.

Задача 8. При каких значениях a неравенство

$$-1 < \frac{ax^2 + x + 2}{x^2 + 1} < 3$$

выполнено при всех x ?

Решение. Из условия сразу следует переформулировка задачи: при каких a каждое из неравенств

$$ax^2 + x + 2 < 3x^2 + 3$$

и

$$ax^2 + x + 2 > -x^2 - 1$$

выполняется для всех x ?

Для первого из них, $(a-3)x^2 + x - 1 < 0$, получаем условие

$$\begin{cases} a < 3, \\ a < 11/4, \end{cases}$$

т. е. $a < 11/4$. Аналогично, для второго неравенства имеем $a > -11/12$.

Ответ: $-11/12 < a < 11/4$.

Задача 9. При каких действительных значениях a неравенство

$$1 - \log_{1/7}(x^2 + 1) \geq \log_7(ax^2 + 4x + a)$$

выполняется при всех x ?

Решение. Исходное неравенство равносильно системе

$$7(x^2 + 1) \geq ax^2 + 4x + a > 0,$$

или

$$\begin{cases} (7-a)x^2 - 4x + 7-a \geq 0, \\ ax^2 + 4x + a > 0. \end{cases}$$

Последняя система выполняется при всех x тогда и только тогда, когда каждое из квадратичных неравенств выполняется при всех x , т. е. при условиях

$$\begin{cases} 0 < a < 7, \\ 4 - (7-a)^2 \leq 0, \\ 4 - a^2 < 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, приходим к ответу.

Ответ: $2 < a \leq 5$.

В следующей задаче, прежде чем пустить в ход наш метод, приходится предварительно «обработать» условие.

Задача 10. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$$

выполняется при любых значениях x .

Решение. Если $\cos x = 0$, неравенство принимает вид

$$|a + 3| \leq 3.$$

Его решения дают нам ограничения на a : $-6 \leq a \leq 0$.

При $\cos x \neq 0$ поделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и выполним замену $t = \operatorname{tg} x$. В результате получим (воспользовав-

шись формулой $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$) неравенство

$$|(a+3)t^2 + 2at + a + 1| \leq 3(1+t^2),$$

которое должно выполняться при всех t .

Это неравенство эквивалентно системе

$$-3 - 3t^2 \leq (a+3)t^2 + 2at + a + 1 \leq 3(1+t^2).$$

При $a=0$ все неравенства справедливы. При $a \neq 0$, выписывая, как и раньше, условия, при которых эти неравенства выполняются при всех t , приходим к системе неравенств относительно a и, решив ее, получим ответ.

Ответ: $-12/5 \leq a \leq 0$.

Область значений функции. Минимум и максимум

При нахождении области значений функции часто оказывается полезным такое

Замечание. Пусть дана некоторая функция $y=f(x)$. Рассмотрим уравнение $f(x)=a$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда число a принадлежит области значений функции f .

В следующих задачах применение условия разрешимости квадратных уравнений и неравенств упрощает дело и оказывается более удобным, чем исследование функции f средствами анализа.

Задача 11. Найдите область значений функции $y=x/(x-1)^2$.

Решение. Задача немедленно сводится к такой: при каких a уравнение $x/(x-1)^2=a$, или $ax^2-(2a+1)x+a=0$, имеет корни?

Прежде всего при $a=0$ есть корень $x=0$. Если $a \neq 0$, все сводится к решению неравенства $D=4a+1 \geq 0$.

Ответ: $[-1/4; +\infty)$.

Теперь несколько более трудных задач.

Задача 12. Найдите наименьшее значение функции

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Указание. Поскольку $y=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$, выполним замену $t=x^2+3x$.

Уравнение $t(t+2)=a$ имеет корни при $a \geq -1$, причем левая часть равна -1 при $t=-1$. Осталось убедиться в том, что уравнение $x^2+3x=-1$ имеет корни.

Ответ: -1 .

Задача 13. Найдите наибольшее из значений z , для которого существуют числа x, y , удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Решение. Дискриминант квадратного уравнения относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z , должен быть неотрицателен, т. е. должно выполняться неравенство

$$D = (y + z)^2 - 16y^2 - 8yz - 8z^2 + 32 \geq 0,$$

или

$$15y^2 + 6yz + 7z^2 - 32 \leq 0.$$

Квадратичное неравенство относительно y имеет решения лишь тогда, когда

$$9z^2 - 105z^2 + 15 \cdot 32 \geq 0,$$

т. е. при $z^2 \leq 5$.

Итак, $-\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5}$, так что z не может быть больше, чем $\sqrt{5}$. Если $z = \sqrt{5}$, то неравенство имеет единственное решение относительно y . Но тогда существует и x (тоже единственный) такой, что тройка $(x; y; z)$ удовлетворяет уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Следующая задача, хотя внешне и отличается от предыдущей, без труда к ней сводится.

Задача 14. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 2y + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

Указание. Пусть $t = 2x + y - z$. Тогда после подстановки $z = 2x + y - t$ в уравнение приходим к задаче, отличающейся от предыдущей только значениями коэффициентов. Предоставляем читателям проделать все необходимые вычисления самостоятельно.

Ответ: $t_{\max} = \frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Аналогично может быть решена и

Задача 15. Найдите наименьшее значение, принимаемое выражением $x + 5y$, если $x > 0$, $y > 0$ и $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$.

Указание. Пусть $t = x + 5y$, тогда $x = t - 5y$. После подстановки и преобразований приходим к задаче об отыскании наименьшего положительного значения t , для которого соответствующее квадратичное относительно y неравенство будет иметь решение.

Когда оно будет найдено, следует убедиться в существовании положительных x и y , дающих полученное значение t .

Ответ: $7\sqrt{3}$.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

1. Решите уравнения и системы:

а) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2x - 2y + 2 = 0$;

б) $\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2xy - z^2 = 16; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8 \sin x \cos y \sin(x+y) + 1 = 0, \\ y + z = x. \end{cases}$

2. Докажите неравенства

а) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$;

б) * $x(1+y) + y(1+z) + z(1+x) \geq 6\sqrt{xyz}$.

3. Найдите наименьшее значение функции

а) $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$;

б) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{3x^2 + 11x + 12}$.

4. Найдите область значений функции

$$y = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

5. При каких значениях a следующие неравенства выполняются при всех x :

а) $-1 < \frac{ax^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} < 1$;

б) $\frac{x-2}{ax^2 - 2x + a - 2} < 1$;

в) $|5 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a + 1| \leq 6$?

6. Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

7. Числа a, b, c таковы, что

$$2a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

8. Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственная тройка чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющая равенствам

$$x + y + z = x^2 + 4y^2$$

$$x + 2y + 3z = a.$$

9. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$?

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$x^2 - xy + y^2, \text{ если } 2x^2 + 2xy + y^2 = 2.$$

11. Найдите все значения b , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 10y^2 = b^4 - 6b^3 + 9b^2 - 19 + \sqrt{85}, \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
<i>Г. Гальперин</i> ПРОСТО О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ	4
<i>А. Егоров</i> ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И СРАВНЕНИЯ ПО МОДУЛЮ	14
<i>А. Егоров, А. Котова</i> НЕОБЫКНОВЕННЫЕ АРИФМЕТИКИ	23
<i>Ю. Соловьев</i> НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ	32
<i>Н. Фельдман</i> АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА	41
<i>Ю. Соловьев</i> КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА	50
<i>Н. Васильев, В. Гутенмахер</i> АРИФМЕТИКА И ПРИНЦИПЫ ПОДСЧЕТА	64
<i>Ю. Ионин</i> СКОЛЬКО ВАРИАНТОВ?	73
<i>В. Гутенмахер</i> НЕРАВЕНСТВА С ФИКСИРОВАННОЙ СУММОЙ	87
<i>К). Ионин, В. Некрасов</i> МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ	92

<i>А. Власов</i> СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ	99
<i>В. Болтянский</i> КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ	104
<i>А. Болибрух, В. Уроев, М. Шабунин</i> КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН	111
<i>А. Егоров</i> О ДИСКРИМИНАНТЕ	117

Арифметика и алгебра

Приложение к журналу «Квант» № 2/94

Редактор А. Ю. Котова

Литературный редактор Л. В. Кардасевич

Художник С. А. Стулов

Технический редактор Е. С. Потапенкова

ИБ № 4

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская,
2/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Формат 84×108 1/32. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 30 000 экз.

Заказ 2126. Цена договорная.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г. Чехов Московской области