

ВЫПУСК

125

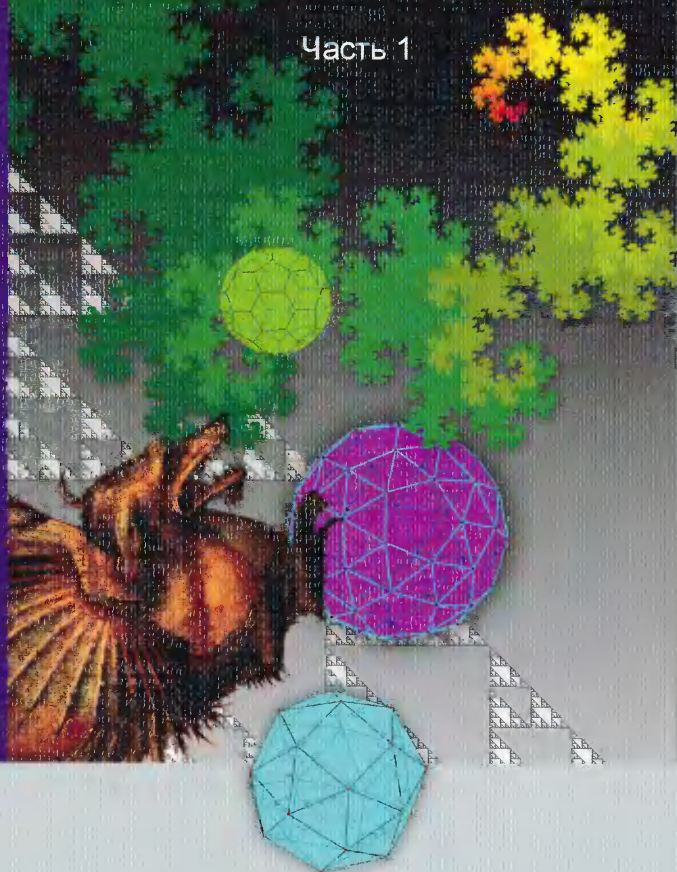


Библиотечка КВАНТ

Н.Б. ВАСИЛЬЕВ

Статьи из журнала «КВАНТ»

Часть 1



125

Библиотечка КВАНТ



БИБЛИОТЕЧКА

КВАНТ

В Ы П У С К

125

Приложение к журналу
«Квант» №4/2012

Н.Б. Васильев

СТАТЬИ ИЗ ЖУРНАЛА

«КВАНТ»

Часть 1

Москва

Издательство МЦНМО

2012

УДК 51(019)
ББК 22.1г
В19

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Редакционная коллегия:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев,
М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,
А.И.Черноуцан

В19 Васильев Н.Б.
Статьи из журнала «Квант». Часть 1. – М.: Издательство
МЦНМО, 2012. – с.176 (Библиотечка «Квант». Вып. 125.
Приложение к журналу «Квант» №4/2012.)

ISBN 978-5-4439-0306-4

Книга представляет собой сборник статей одного из лучших авторов
«Кванта» Н.Б.Васильева, опубликованных в журнале в разные годы.
Статьи сборника посвящены самым разным разделам математики, их
содержание иногда выходит за рамки школьной программы, но
изложение доступно школьникам старших классов

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий,
для руководителей и участников математических кружков, а также для
всех, кто интересуется математикой.

ББК 22 1г

ISBN 978-5-4439-0306-4



9 785443 903064 >

ОБ АВТОРЕ ЭТОЙ КНИГИ (вместо предисловия)

В этой книге собраны статьи Николая Борисовича Васильева, одного из «отцов-основателей» журнала «Квант», замечательного математика, неутомимо работавшего на благо математического просвещения нашей страны в течение почти сорока лет. Это был человек удивительной доброты, обаяния и неугасающей молодости. Все его звали по имени – Коля.

Коля Васильев родился в Москве 8 августа 1940 года в семье с глубокими интеллигентными корнями. Его отец Борис Федорович Васильев был известным инженером-строителем, основателем школы инженеров-строителей промышленных сооружений. Мать Коли, Нина Николаевна Лессиг, также была инженером-строителем, кандидатом технических наук.

Н.Б. Васильев родился и прожил всю свою жизнь в одном из красивейших уголков Москвы – на Софийской набережной, прямо напротив Кремля. Его детство прошло среди книг, в кругу широко образованных людей, любящих и глубоко знающих искусство, особенно музыку. В традициях этой семьи сохранялась даже такая диковинка для нашего времени, как домашнее музицирование.

Вся обстановка семьи и семейное окружение привили Коле безупречный вкус и тонкое понимание красоты. Он ценил красоту и в искусстве, и в математике, увлечение которой пришло к нему в старших классах. Коля занимался математикой самостоятельно, не испытывая постороннего влияния, не посещая математические кружки и не участвуя в олимпиадах.

Закончив с серебряной медалью школу в 1957 году и одновременно музыкальное училище при Московской консерватории, он оказался перед выбором – математика или музыка.

Победила математика, и Коля стал студентом первого курса механико-математического факультета МГУ. Все пять лет он учился блестяще.

Окончив университет в 1962 году, он сразу же поступил в аспирантуру мехмата МГУ, а после окончания аспирантуры стал работать в межфакультетской лаборатории математических методов в биологии МГУ, где и трудился до последних дней своей жизни.

Кружки и олимпиады

Начиная с 1 курса, Коля включился в работу Оргкомитета Московской математической олимпиады. И с тех пор все годы (за исключением 1980–1987 гг.) он был среди организаторов олимпиад.

Он придумывал задачи, участвовал в составлении вариантов, проверке работ, обсуждении результатов и присуждении премий.

Молодые математики (студенты и аспиранты), увлеченно работавшие со школьниками, всегда отличались большой свободой взглядов, независимостью суждений и огромной преданностью науке. Свободная атмосфера собраний оргкомитета олимпиады, независимость его от администрации часто вызывали недовольствие партийного и комсомольского начальства. Оно отказывалось считать олимпиадную деятельность общественной работой. Один из таких начальников прямо заявил: «Какая же это общественная работа, если вы ее делаете ради собственного удовольствия?»

В те годы Московская олимпиада как бы подводила итоги работы школьных математических кружков при МГУ в течение учебного года. Руководили кружками студенты и аспиранты, многие из которых стали ныне известнейшими математиками. Достаточно назвать В.И.Арнольда, А.А.Кириллова, Н.Н.Константинова, А.М.Олевского, Д.Б.Фукса. Почти все участники кружков почитали свои долгом явиться на олимпиаду и добиться там успеха. По окончании олимпиады кружковцы подсчитывали количество премий и сравнивали успехи своего кружка с успехами «конкурентов».

Осенью 1958 года Коля начал вместе с автором этой статьи вести одну из секций школьного математического кружка. Кружок оказался сильным. Во всяком случае, он хорошо выступал на олимпиадах, многие из его участников стали весьма успешно работающими математиками. Это С.Гельфанд, Р.Зигангиров, Д.Каждан, А.Каток, И.Д.Новиков и другие.

Биография Коли Васильева с 1958 до 1979 года неотделима от истории не только Московских, но и Всероссийских, а затем Всесоюзных олимпиад. Подробно с историей олимпиад можно познакомиться по предисловию к книге «Задачи Всесоюзных математических олимпиад». Работа в Оргкомитете Московской, а затем в жюри и методической комиссии Всероссийской и Всесоюзной олимпиад сблизила Колю Васильева с величайшим математиком современности А.Н.Колмогоровым. Андрей Николаевич долгие годы возглавлял методические комиссии матема-

тических олимпиад и неоднократно руководил жюри Олимпиады. Коле посчастливилось не раз быть заместителем Андрея Николаевича.

С середины 60-х годов Центральный оргкомитет Всесоюзной олимпиады рассылал в области и республики брошюры с задачами, рекомендованными для областных и республиканских олимпиад. Многие такие подборки были составлены Н.Б.Васильевым. Это, конечно, не значит, что все задачи были им придуманы. Его авторство – в их составлении. Это был огромный труд. В подборках содержались оригинальные задачи разных уровней – от легких до весьма трудных. Среди задач были задачи по алгебре и геометрии, не забывалась и традиционная «олимпиадная» тематика. Практически во всех областях и республиках СССР на олимпиадах использовались задачи из этих подборок. Мне кажется, что было бы полезно собрать вместе эти маленькие брошюры и издать их отдельной книжкой.

Журнал «Квант»

В 1970 году А.Н.Колмогоров стал первым заместителем главного редактора журнала «Квант», а Коля – членом редколлегии и руководителем раздела «Задачник Кванта» – одного из главных и, пожалуй, самых знаменитых разделов этого журнала.

Надо сказать, что идея создания популярного физико-математического журнала для школьников родилась еще в середине 60-х годов в коллективе математиков и физиков, объединившихся вокруг олимпиады. Коля Васильев был одним из самых настойчивых и упорных сторонников этой идеи, так что создание «Кванта» – это во многом и его заслуга.

Как руководитель «Задачника Кванта», он придумывал задачи, причем его задачи выделяются отточенностью формулировок и решений, глубиной и связями с «большой» математикой. Олимпиады и занятия математикой были тогда делом престижным, и очень многие школьники, студенты, преподаватели присылали в редакцию придуманные ими задачи. Поэтому он имел дело с огромной почтой. Естественно, большинство из присылаемых задач были, скажем так, не оригинальны и мало интересны. Однако среди них попадались и вполне достойные внимания. Коля как никто мог «обработать» задачу, найти наиболее привлекательную формулировку, обнаружить возможные обобщения и дальнейшее развитие сюжета задачи (очень часто задачи «Задачника» состоят из нескольких пунктов, последовательно усложняющих и развивающих фабулу задачи).

Наконец, часто бывало так, что авторские решения вполне хороших задач оказывались безыдейными и, что называется, тупыми – например, лобовой счет в задачах по геометрии, не позволяющий по-настоящему разобраться в существе дела.

После Колиной обработки многие задачи становились настоящими сокровищами (разумеется, под формулировками их условий стояла подпись автора, так что участие Коли оставалось «за кадром»). Очень многие написанные им решения сопровождаются комментарием и литературными отсылками для тех, кто захочет глубже разобраться в проблеме.

Колина работа в «Кванте» не ограничивалась «Задачником». Он – автор трех десятков статей, без сомнения, входящих в число лучших публикаций «Кванта». Эти статьи мы и предлагаем вниманию наших читателей в настоящем сборнике. Многие из них написаны Николаем Борисовичем в соавторстве с известными математиками. Часто бывало так, что присланная в редакцию статья была интересна по теме, но по исполнению никак не соответствовала ни уровню «Кванта», ни стилю этого журнала. В таких случаях Николай Борисович принимался за переделку, в результате которой появлялась яркая, интересная статья.

Умение видеть главное и тонкий вкус сочетались в нем с литературными способностями. Его статьи написаны превосходным языком. Коля обладал редкостным даром прозрачно и четко излагать самые сложные математические сюжеты. Зная это его умение, многие математики приносили в редакцию свои статьи и просили Колю помочь довести их «до ума». Он никогда в этом не отказывал, а в некоторых случаях полностью переписывал статью, причем нередко его роль настолько превышала чисто редакторскую, что авторы сами просили его стать их соавтором.

В то же время он умел, не причиняя обиды, но достаточно твердо отклонять статьи в тех случаях, когда они были малоинтересны или непригодны для публикации в журнале для школьников.

С первых дней существования «Кванта» не было ни одного крупного события в жизни журнала, в котором он не принимал бы участия. «Квант» был его вторым домом, а он был его душой.

Николай Борисович считал, что в системе научно-популярных изданий должен существовать журнал, промежуточный по своему уровню между «Квантом» и чисто научными журналами. Именно поэтому он стал одним из главных инициаторов возрождения сборников «Математическое просвещение», был держате-

лем гранта РФФИ, предназначенного для поддержки этого издания, вошел в редколлегию новой серии «Математического просвещения».

ВЗМШ и другие школы

Во второй половине 1963 года началась подготовка к созданию Всесоюзной заочной математической школы. Ее создатель И.М.Гельфанд привлек своего аспиранта Васильева к разработке программ и вступительного задания. С тех пор и до последних дней своей жизни Николай Борисович был без преувеличения ключевой фигурой в ВЗМШ. До последних дней своей жизни он был членом Научного совета и методической комиссии. Им написаны десятки учебных заданий и брошюр, огромное количество статей для учителей и школьников. Ежегодно в течение 35 лет под его руководством разрабатывались вступительные задания в ВЗМШ.

Книги Николая Борисовича, написанные для ВЗМШ, известны не только в России. В частности, книга «Прямые и кривые», написанная им вместе с В.Л.Гутенмахером, в 1980 году была переведена на английский и испанский языки издательством «Мир», а в 1982 году издана в Чехословакии на чешском языке. Книга Н.Б.Васильева, В.Л.Гутенмахера, Ж.М.Раббота и А.Л.Тоома «Заочные математические олимпиады» – превосходный образец популярной литературы для школьников. Книга тех же авторов «Задачи устного экзамена по математике» оказалась очень удачной. В течение нескольких лет она рассылалась ученикам ВЗМШ и сильно помогла им при подготовке к устным вступительным экзаменам в вузы самого высокого уровня. В дальнейшем она послужила образцом для других авторов, писавших на эту тему. К сожалению, эта книга с тех пор ни разу не переиздавалась и сейчас является чрезвычайной библиографической редкостью.

В течение многих лет Николай Борисович принимал участие во вступительных экзаменах в школу-интернат при МГУ (ныне школа им. А.Н.Колмогорова). Он придумывал задачи для экзамена, был одним из лучших доброжелательных экзаменаторов. Характеристики перспектив абитуриентов, даваемые им после экзамена, очень точны и практически всегда подтверждались при дальнейшем их обучении в школе.

В 70-е – 80-е годы Николай Борисович принял участие в работе многих летних школ: под Москвой, в Карелии, в Таджикистане и других. Он великолепно читал лекции и проводил занятия. Каждый раз он придумывал способ изложения, соот-

ветствующий уровню аудитории, но не наносящий ущерба глубине и содержанию лекции. Я неоднократно присутствовал на его лекциях и всегда получал истинное удовольствие от мастерства лектора.

Турнир Городов и другие соревнования

В 1979 году чиновники от просвещения разогнали все тогдашнее жюри Всесоюзной олимпиады. И тогда Н.Н.Константинов предложил проводить новую олимпиаду, организация которой была бы полностью в руках математической общественности и не зависела бы от произвола чиновников. Так родился Турнир Городов – ныне одно из самых уважаемых соревнований в нашей стране и за рубежом. Подробно о нем рассказано, например, в статье Н.Н.Константинова «Турнир городов и математическая олимпиада» (Математическое просвещение. М.: МЦНМО, сер. 3, вып. 1. 1997. С. 164–174.).

Николай Борисович сразу же подхватил идею и стал одним из ведущих организаторов этого международного турнира. Именно он сыграл основную роль в выработке формы проведения турнира, во многом определил стиль и уровень задач, неоднократно участвовал в работе летних конференций Турнира Городов.

В 1994–2000 годах в России проводилась Соросовская олимпиада школьников по математике, физике, химии и биологии. Николай Борисович до последних месяцев своей жизни активнейшим образом работал и в этой олимпиаде. Он придумал несколько красивых задач, принимал участие в составлении вариантов и проверке работ.

В последние десятилетия стали весьма популярными научные конференции школьников. Николай Борисович на многих таких конференциях был членом жюри. Его судейство всегда было доброжелательным и четким. Он всегда беседовал с докладчиками, объяснял им возможности развития тем их докладов. Наиболее интересные доклады по его представлению были опубликованы в журнале «Квант».

Статьи, вошедшие в эту книгу, посвящены самым разным темам – здесь и геометрия, и теория вероятностей, и комбинаторика. Надеемся, что вам доставит удовольствие знакомство с этими великолепными образцами научно-популярной литературы.

А.А. Егоров

КРИВЫЕ ДРАКОНА

Что такое кривая и ломаная дракона

Возьмите длинную полоску бумаги, сложите ее пополам и еще раз пополам. Сложенную полоску положите ребром на стол и разверните так, чтобы угол при каждом сгибе был равен 90° (рис.1). Если смотреть сверху, то видна ломаная линия, изображенная на рисунке 3, а или б.

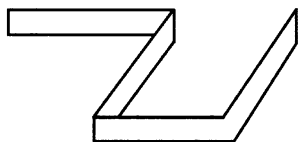


Рис. 1

При трех складываниях полоски пополам уже получаются существенно различные ломаные (рис.3, в или г) в зависимости от того, как складывается полоска. Если полоску складывать четыре раза и

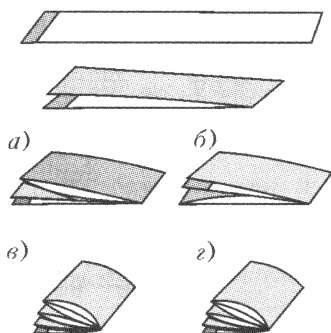


Рис. 2

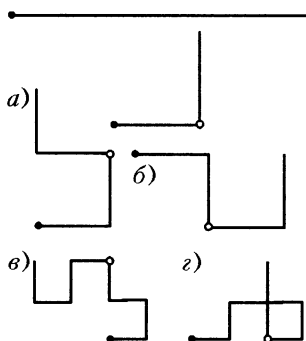


Рис. 3

больше, а затем разворачивать ее сгибы до прямых углов, можно получить много различных ломаных. На рисунке 4 показана одна из ломаных, получающихся при пяти складываниях пополам.

Практически вам не удастся сложить полоску бумаги больше семи раз – ведь уже при восьмом складывании получилось бы $2^8 = 256$ слоев! Однако мы скоро научимся рисовать довольно длинные такие ломаные, обходясь без полоски. На рисунке 5

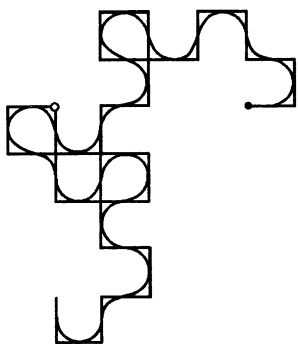


Рис. 4

нее углы (так, как показано на рис.4). Если проделать это для ломаной, изображенной на рисунке 4, то получится замыслова-

изображена одна из ломаных, которая получилась бы, если бы мы складывали полоску 12 раз. Он состоит из $2^{12} = 4096$ звеньев.

Легко убедиться в том, что если складывать полоску более трех раз, то после разворачивания некоторые ее углы обязательно будут «касаться» друг друга (рис.3,г и рис.4). Из-за многочисленных таких касаний на длинных ломаных местами получается сетка. Чтобы разобраться, как идет ломаная, можно закруглить у

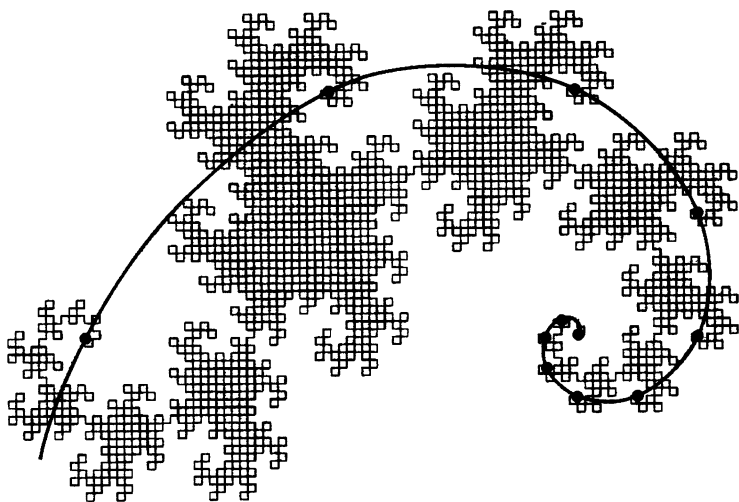


Рис5 Такая ломаная («Главная ломаная дракона») получается, если начиная с отрезка каждый раз поворачивать предыдущую ломаную в одну и ту же сторону (Это соответствует способу складывания пополам, показанному на рис.2,а, в; здесь полоска каждый раз загибается «справа вверх налево») На рисунке 4 изображено начало этой ломаной (32 звена), на этом рисунке — 4096 звеньев. Если ломаную продолжать таким же образом дальше, то она будет медленно обходить вокруг своего начала, делая один полный оборот за 8 «удвоений». Выделенные точки лежат на логарифмической спирали (для тех, кто знаком с полярной системой координат, мы можем написать ее уравнение $\varphi = \log_a r$, где r, φ — полярные координаты, $a = 2^{2\pi}$)

тая линия (рис.5). Этот рисунок и подсказал американскому физику Джону Хейвею (Heighway) название «*кривые дракона*». Тот, кто когда-нибудь видел дракона, мог бы подтвердить, что он выглядит именно так.

Как рисовать длинные ломанные дракона?

Мы будем называть любую ломаную, полученную из бумажки, сложенной пополам n раз, разворачиванием сгибов до 90° , *ломаной дракона ранга n* . Выясним, как устроены ломанные дракона и как их рисовать для достаточно больших n .

Первый способ. Ломаная дракона ранга n состоит из 2^n звеньев и соответственно имеет $2^n - 1$ вершин (не считая концов). Таким образом, у нее есть **средняя вершина** (при $n > 0$), поскольку число вершин нечетно. На рисунках 3 и 4 у каждой ломаной средняя вершина отмечена белым кружочком. Можно подметить, что каждая из этих ломаных состоит из двух одинаковых кусков, получающихся друг из друга поворотом на 90° . Оказывается, **это общая закономерность**.

Теорема 1. Если продолжить любую ломаную дракона ранга n с концом в точке O точно такой же ломаной, полученной из данной поворотом на 90° вокруг точки O , то получится ломаная дракона ранга $n + 1$, и обратно, любая ломаная дракона ранга $n + 1$ получается из некоторой ломаной ранга n этим способом.

В самом деле, допустим, мы хотим сложить полоску $n + 1$ раз пополам. Сложим ее сначала один раз пополам. Тогда две ее половинки совпадут и при дальнейших складываниях будут сгибаться пополам

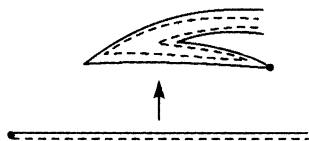


Рис. 6

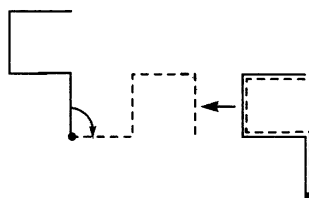


Рис. 7

совершенно одинаково (рис.6). Теперь развернем на 90° последние n сгибов полоски. Получим две совпадающие ломанные дракона ранга n ; остается развести их на 90° — и мы получим ломаную дракона ранга $n + 1$ (рис.7). Подумайте, как из этих соображений вывести оба утверждения теоремы 1.

Пользуясь теоремой 1, легко рисовать длинные ломанные дракона.

Поскольку любая ломаная дракона идет по линиям квадратной сетки, ее удобно рисовать на клетчатой бумаге.

Возьмем любую короткую ломаную дракона (например, просто отрезок). Условимся, что одна из ее крайних точек – начало, а другая – конец. Продолжим ее такой же ломаной, повернутой относительно ее конца на 90° по (или против) часовой стрелке. Полученную новую ломаную таким же способом продолжаем от конца; так проделываем столько раз, сколько захочется и сколько сможем. Это автоматически и быстро можно делать, если под рукой есть калька или, еще лучше, слегка прозрачная клетчатая бумага. (Подумайте, как!)

Очевидно, точно так же мы можем сразу рисовать и **кривые** дракона: нужно только каждый раз закруглять средний сгиб.

Замечательное свойство всех кривых дракона заключается в том, что *они сами себя не пересекают*, или, что то же самое, *ломаные дракона никогда не проходят по одному и тому же отрезку дважды*. Таким образом, хотя ломаная дракона может дважды проходить через одну и ту же точку (вершину сетки), но более двух раз она в одну и ту же точку не попадает.

Из теоремы 1 сразу не видно, как доказать, что ломаные дракона не проходят дважды по одному и тому же отрезку – наоборот, чем более длинные и запутанные ломаные или кривые рисуешь, тем более удивительно, как удачно их «выступы» и «впадины» подходят друг к другу (см. кривую дракона «паровоз» на с.19).

Однако нетрудно это доказать¹, используя другую теорему об «удвоении» ломаных дракона, которая, кстати, дает еще один способ рисовать длинные ломаные.

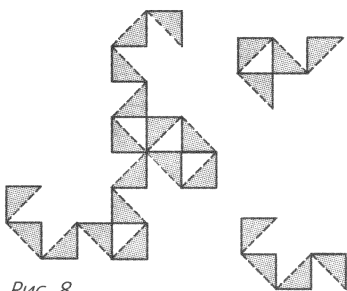


Рис. 8

Второй способ. На рисунке 8 вершины ломаных дракона соединены пунктирными отрезками через одну. Мы видим, что пунктирные отрезки снова составляют ломаные дракона. Оказывается, это тоже общая закономерность.

Чтобы точно ее сформулировать, заметим еще, что каждый пунктирный отрезок является гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого – звенья исходной ломаной (на рисунке треу-

¹ См. задачу 9 в конце статьи.

гольники слегка закрашены), причем каждые два соседних таких треугольника получаются друг из друга поворотом на 90° вокруг их общей вершины; другими словами, если идти вдоль пунктирной ломаной дракона, то эти треугольники будут встречаться поочередно то справа, то слева.

Теорема 2. Если на каждом звене ломаной дракона ранга n , как на гипотенузе, построить прямоугольный равнобедренный треугольник, причем так, чтобы для двух соседних звеньев эти треугольники получались один из другого поворотом на 90° относительно общей вершины, то катеты построенных треугольников составляют ломаную дракона ранга $n + 1$. И наоборот, каждую ломаную ранга $n + 1$ можно получить этим способом из некоторой ломаной ранга n .

В самом деле, проследим за **последним** складыванием полоски пополам. Для удобства мы будем ссылаться на условный рисунок 9. Мы хотим сложить полоску пополам $n + 1$ раз. Сложим ее сначала n раз и посмотрим на нее в профиль (пунктир на рис. 9). Затем сложим ее еще раз пополам и развернем этот последний сгиб на 90° (сплошная линия на том же рисунке²). Теперь бумажка идет от сгибов A к сгибам B и обратно не по гипотенузе, а по катетам равнобедренного прямоугольного треугольника ABC . Развернем теперь все остальные сгибы до 90° (на рисунке 10 показано, как разворачивается отдельный сгиб). Тогда катеты прямоугольных треугольников образуют ломаную дракона ранга $n + 1$, а гипотенузы – ранга n .

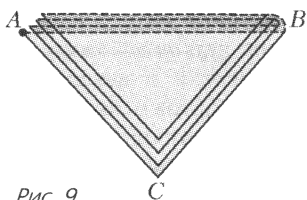


Рис. 9

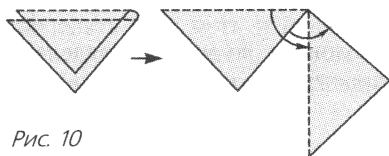


Рис. 10

Пользуясь этими соображениями, легко доказать оба утверждения теоремы 2. Вы можете попробовать дать другое доказательство: вывести теорему 2 из теоремы 1

С помощью теоремы 2 из каждой ломаной дракона ранга n можно получить две разные ломаные ранга $n + 1$: все зависит от того, по какую сторону от первого звена достроить треугольник.

Обратите внимание на то, что когда мы переходим от ломаной ранга n к ломаной ранга $n + 1$ по теореме 1, то ломаная

² На нашем рисунке сплошная линия в $\sqrt{2}$ раз длиннее пунктирной, но это не имеет значения, поскольку нас интересует форма ломаной, а не ее размеры.

получается вдвое длиннее, а длина каждого звена не меняется; если же мы пользуемся для «удвоения» теоремой 2, то длина ломаной увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, а длина звена уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Потренируйтесь теперь в рисовании ломаных дракона с помощью теоремы 2.

Слова

Свойство, о котором идет речь в теореме 2, можно объяснить совсем просто, если посмотреть на ломаные дракона (или, если угодно, на способы складывания бумажки) несколько с иной точки зрения.

Пусть по ломаной дракона ползет черепаха (рис.11). Каждый раз, когда она доползает до вершины, ей приходится поворачивать на 90° налево или направо. С точки зрения черепахи, ее путь будет определяться последовательностью поворотов. Например, для ломаной рисунка 3, *a* (начало в черной точке) эта последовательность будет выглядеть так: налево, налево, направо.

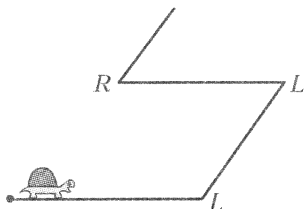


Рис 11

Будем поворот направо обозначать буквой *R*, поворот налево —

буквой *L*³. Тогда вся ломаная запишется таким «словом»:

LLR

(«словом» во многих разделах математики и логики называют просто любую последовательность букв). Точно так же можно записать словом из букв *L* и *R* любую ломаную дракона.

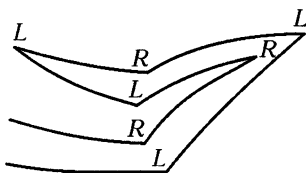


Рис 12

Чтобы получить из ломаной *a* ломаную *b* (см. рис.3), нужно бумажку сложить еще один раз «налево» (см. рис.2, *в* и рис.12). При этом между каждыми двумя вершинами ломаной *a* возникнет еще по одному повороту, причем на рисунке 12

хорошо видно, что эти новые повороты будут чередоваться;

³ Мы выбрали первые буквы английских слов right (правый) и left (левый), потому что русские буквы П и Л слишком похожи друг на друга (кстати, немецкие rechts и links начинаются с тех же букв).

таким образом, получим

$$\begin{array}{l} LLR \\ LRLR \end{array} \rightarrow LLRLLRR,$$

т.е. слово, являющееся записью ломаной v . При еще одном сгибе налево мы получили бы ломаную, характеризуемую словом

$$\begin{array}{l} LLRLLRR \\ LRLRLRLR \end{array} \rightarrow LLRLLRRLLLRLRLR.$$

Начертите эту ломаную. Это – Главная ломаная дракона ранга 4. Если хотите, закруглите у нее углы, как это предложил Хейвей.

Если вы проделаете над последним полученным словом ту же операцию еще раз (снова начав последовательность чередующихся букв с L), то получите слово из 31 буквы – запись Главной ломаной дракона ранга 5, изображенной на рисунке 4.

Разумеется, последовательность чередующихся букв можно начинать не с L , а с R – при этом получатся другие ломаные.

Легко видеть, что наш способ изготовления слова для ломаной ранга $n + 1$ из слова для ломаной ранга n в точности соответствует геометрическому способу удвоения, о котором идет речь в теореме 2 (новым буквам соответствуют достраиваемые треугольники). Вообще всю «теорию» ломаных дракона можно было бы строить не геометрически – с помощью поворотов, достраивания треугольников и т.п., а «алгебраически» – с помощью операций над словами из двух букв L и R , «записями» ломаных дракона⁴.

Читатель сможет частично проделать этот путь и познакомиться с целым рядом интересных закономерностей, которыми обладают слова-записи кривых дракона, решая нижеследующие задачи.

Задачи

1. Какой длины надо взять полоску, чтобы, сложив ее пополам 30 раз, получить расстояние между соседними сгибами равным 1 см? Больше или меньше расстояния от Земли до Луны?

2. Как изменится ломаная дракона, если полоску бумаги положить на стол другим ребром? Как изменится при этом слово, записывающее ломаную?

⁴ Именно такой способ изложения избрали канадские математики Кнут и Дэвис, по рукописи которых «Number representations and dragon curves» (Ch.Davis, D.E.Knuth) авторы статьи впервые познакомились с кривыми дракона. Из этой рукописи заимствован и ряд рисунков длинных кривых дракона.

3. а) Сколько существует различных (не подобных друг другу) ломаных дракона ранга 4? Нарисуйте их все. Напишите соответствующие им слова из букв L и R .

б) Сколько существует различных ломаных дракона ранга n ?

4. Допустим, что черепаха проползла по ломаной дракона и прочла слово из букв L и R . Какое слово она прочтет, если проползет по этой ломаной в обратном направлении?

5. Пусть s – некоторое слово из букв L и R . Обозначим через \bar{s} слово, которое получится из s , если переставить в нем буквы в обратном порядке и потом поменять L на R и R на L . (Например, если $s = LLR$, то $\bar{s} = LRR$).

Пусть s и t – некоторые слова из букв L и R . Будем обозначать через st слово, получающееся, если слова s и t написаны рядом. (Например, если $s = LLR$, $t = RL$, то $st = LLRRL$).

Докажите, что:

а) Для любых слов s и t

$$\overline{st} = \bar{t}\bar{s}.$$

б) Если s_{n+1} – слово, соответствующее ломаной дракона ранга $n + 1$, то

$$s_{n+1} = s_n x \bar{s}_n,$$

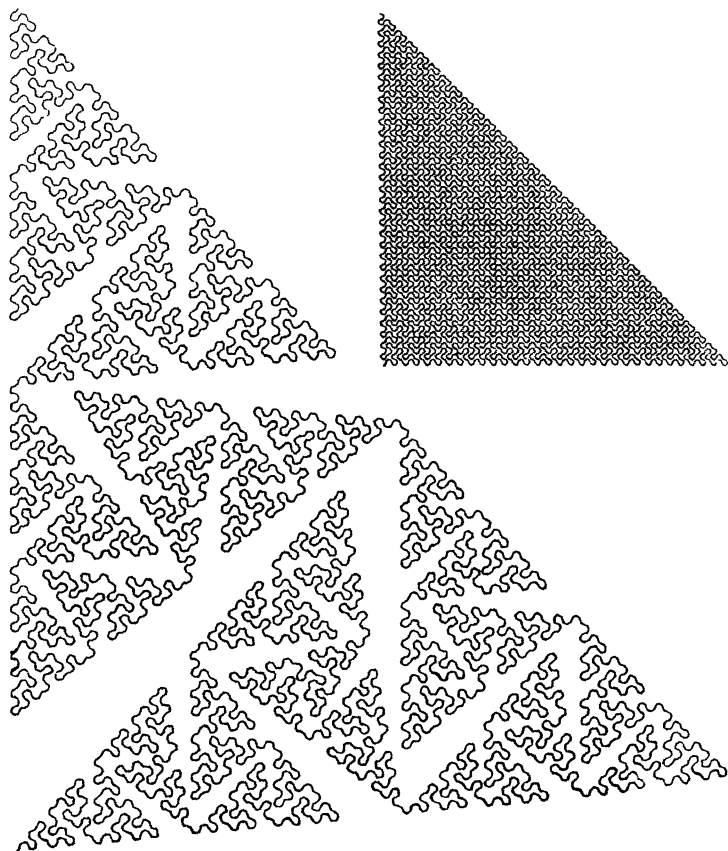
где s_n – некоторое слово, соответствующее ломаной дракона ранга n , а x – слово, состоящее из одной буквы.

в) Если s_n – слово, соответствующее ломаной дракона, то s_n отличается от \bar{s}_n только одной средней буквой.

г) Слово, записывающее ломаную дракона ранга n , можно и притом единственным образом построить, если задать произвольно n букв, которые должны стоять в этом слове на местах с номерами 2^k , где $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ (т.е. на первом, втором, четвертом, восьмом, ..., 2^{n-1} -м местах); после этого, чтобы найти, какая буква стоит на m -м месте, нужно представить m в виде $m = 2^k(2l + 1)$, где k и l целые; если l четно, то на m -м месте стоит та же буква, что и на 2^k -м, если l нечетно – противоположная.

д) Два слова s'_n и s''_n задают одинаковые по форме (подобные) ломаные дракона в том и только в том случае, если после вычеркивания средней буквы эти слова либо совпадают, либо одно получается из другого заменой L на R и R на L . (Например, слова $LLRLLRR$, $LLRRLRR$, $RRLRLL$, $RLLRLL$ задают одинаковые ломаные.)

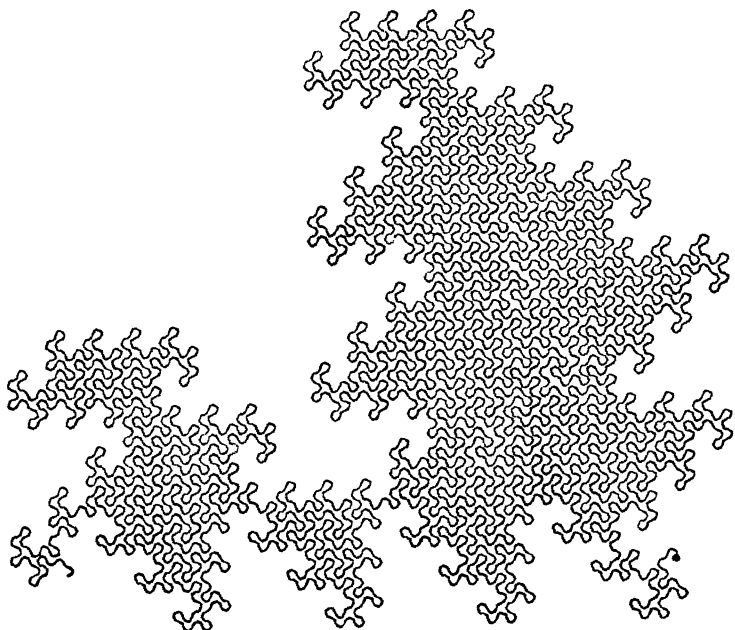
6. Пусть мы имеем ломаную дракона ранга n . Из нее можно получить две ломаные дракона ранга $n + 1$, пользуясь либо теоремой 1 (принимая за точку O тот или другой конец ломаной), либо теоремой 2 (достраивая треугольники в ту или другую сторону). Будут ли в обоих



Эта кривая получается, если, начиная с отрезка, повторять процесс «удвоения» 12 раз, причем чередовать повороты по и против часовой стрелки. Чтобы лучше показать, как идет эта кривая, мы поворачиваем каждый раз не на 90° , а на 95° (черная линия); если уменьшить углы до 90° , то получится кривая дракона, которая заполняет равномерным узором равнобедренный прямоугольный треугольник

случаях получаться те же самые две ломаные дракона ранга $n + 1$ или, вообще говоря, другие? Как получать их слова из слова данной ломаной ранга n ?

7. На плоскости даны две точки A и B . Начертим квадрат с центром в середине отрезка AB , одна из сторон которого равна $2AB$ и параллельна отрезку AB . Докажите, что любая ломаная дракона с концами в точках A и B лежит внутри этого квадрата. Докажите, что для любой



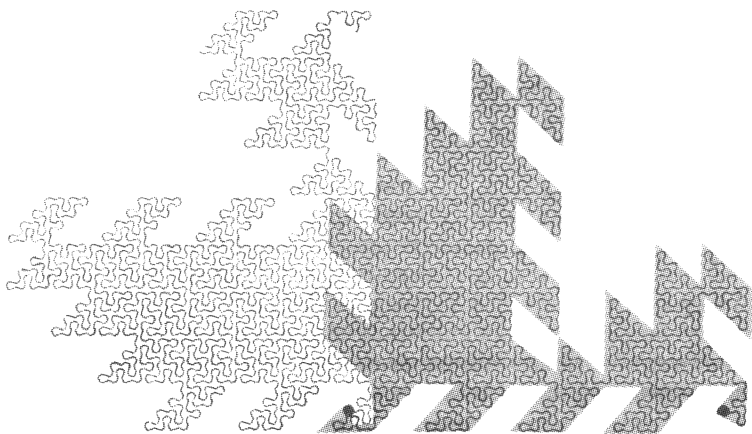
Эта кривая дракона ранга 12 имеет специальное название «Папа, мама и сын» Найдите ее середину Можете ли вы себе представить, что кривая разбивается этой точкой на два совершенно одинаковых куска, получающихся друг из друга поворотом на 90° ? Чтобы поверить в это, нам придется, вероятно, пройтись по кривой цветным карандашом от начала до середины.

точки M внутри этого квадрата и любого положительного числа ϵ можно найти такую ломаную дракона с концами A и B , которая проходит от точки M на расстоянии меньше ϵ (говоря математическим языком, «объединение всех ломаных дракона с концами в точках A и B всюду плотно в этом квадрате»).

8. Пусть черепаха ползет по плоскости из точки A с постоянной скоростью – вначале по направлению AB , а затем через каждые 15 минут поворачивает на 90° . Докажите, что вернуться в A черепаха может лишь через целое число часов и лишь по направлению, перпендикулярному к AB .

9. Докажите, что ломаная дракона никогда не проходит по одному и тому же отрезку более одного раза.

10. Докажите, что если ломаную дракона повернуть вокруг ее начала O на 90° , 180° , 270° , то из полученных четырех ломаных (включая исходную) никакие две не имеют общего отрезка.



Здесь одна из двух половин кривой (она называется «паровоз») нарисована на цветном фоне, чтобы показать, как эти две кривые «сцепляются» между собой. Одна половина, после поворота ее вокруг средней точки на 90° , совпадает с другой

11. Рассмотрим множество ломаных λ , обладающих такими свойствами: « λ имеет 2^n звеньев равной длины, и если ее разбить на 2^k кусков по 2^{n-k} звеньев в каждом куске, то два соседних куска получаются один из другого поворотом вокруг общей вершины на 90° (для любого k)». Докажите, что это множество ломаных в точности совпадает со множеством ломаных дракона ранга n .

12. Введем на клетчатой бумаге систему координат, направив оси по линиям сетки и взяв за единицу масштаба сторону клетки. Будем рисовать Главную ломаную дракона так, чтобы первыми тремя ее вершинами были точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ (см. рисунок 4).

Пользуясь теоремой 1, можно продолжать эту ломаную сколько угодно раз: мы будем получать последовательно ломаные ранга 1, 2, 3, 4, 5, ... Можно представить себе, что мы нарисовали их все и получили бесконечную ломаную дракона («Главную ломаную дракона ранга ∞ »). Ее первые 2^n звеньев образуют ломаную ранга n .

Докажите, что:

а) Конец такой ломаной ранга n будет находиться в точке

$$\left(2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}, 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{\pi n}{4} \right)$$

(выделенные точки на рисунке 5)

б) Слово, являющееся записью этой ломаной, можно быстро написать так. Сначала записываем чередующиеся буквы L и R , оставляя


$$L \ R \ L \ R \ L \ R \ L \ R \ L \ R \dots,$$

а затем поступаем следующим образом. Пальцем левой руки укажем на первую букву, а правой рукой запишем ее в первый промежуток, затем левой рукой укажем на вторую букву, а правой вставим ее во второй промежуток, левой на третью... и так последовательно по всем буквам (не пропуская вновь вставлен-

ных), а правой вносим каждую указанную букву в первый свободный промежуток:

$$LLRLLRLLRRLRRLLLRL\dots$$

в) Если, как в задаче 10, выпустить из одной точки четыре главных ломаных дракона ранга ∞ , то по каждому отрезку сетки пройдет ровно одно звено одной из этих ломаных (рис.13).

(Это – трудная теорема; ее впервые доказал Д.Кнут.)

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 км; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от Университета на Ленинских горах до Бескудников¹?» – он скорее всего ответит: «Часа полтора», – и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же Университета до Щелковской расстояние в километрах больше, а «расстояние» в минутах – меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

Еще один пример совсем другого рода. Рассмотрим три слова: *адсорбция*, *абсорбция* и *абerrация*. Каждое из этих слов содержит девять букв. Мы нарочно выбрали такие слова, точные значения которых, возможно, не вполне ясны читателям, – нас интересует сейчас только **написание** этих слов, а не их значение. Как вам кажется, какие из них больше похожи друг на друга, «ближе» друг к другу, а какие – «дальше»? Совершенно ясно, что первые два слова очень близки, а *абerrация* находится довольно далеко от них – несколько ближе к слову *абсорбция*. Можно ввести и количественную характеристику того, насколько два слова (из одинакового числа букв) близки друг к другу, – принять «расстояние» между словами равным числу мест, на которых в этих словах стоят разные буквы. Тогда «расстояние» *адсорбция* – *абсорбция* равно 1, *абсорбция* – *абerrация* – 3, *адсорбция* – *абerrация* – 4; *абстракция* и *обструкция* находятся на расстоянии 2, а *самолет* и *бегемот* – на расстоянии 6. Запишем это так: $\rho(\text{самолет, бегемот}) = 6$, $\rho(\text{адсорбция, абerrация}) = 4$, и т.п.

¹ Район на севере Москвы.

Все «расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы не собираемся излагать эту теорию, а ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

Аксиомы и первые примеры

Пусть нам дано некоторое множество X . Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждому двум элементам a и b множества X сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho(a, b)$ — «расстояние от a до b », — причем

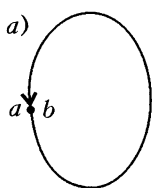
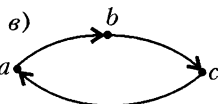


Рис. 1



выполняются следующие три условия (см. рис.1, а, б, в):

1°. $\rho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.

2°. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ для любых двух элементов a и b из X .

3°. $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$ для любых трех элементов a, b и c из X .

Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством*. Сами элементы x при этом называются обычно *точками* метрического пространства.

Прочтем еще раз формулировки аксиом, которым должна удовлетворять функция ρ от пар точек, задающая расстояние.

1°. Расстояние от a до b равно 0 тогда и только тогда, когда a совпадает с b .

2°. Расстояние от a до b равно расстоянию от b до a («аксиома симметрии»).

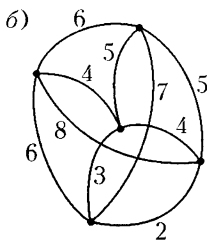
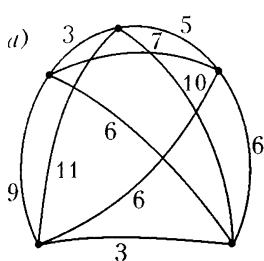
3°. Расстояние от a до c не больше суммы расстояний от a до b и от b до c («аксиома треугольника»).

Начнем с самых простых примеров метрических пространств.

Пример 1. X — числовая прямая, т.е. множество всех вещественных чисел.² Расстояние ρ определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (1)$$

² Это множество обычно обозначается буквой \mathbb{R}



На этих рисунках для каждой двух точек указано «расстояние» между ними. Выполняется ли для этого «расстояния» аксиома 3° метрического пространства?

Напомним, что $|a - b| = a - b$, если $a \geq b$, и $b - a$, если $b \geq a$, так что во всех случаях $\rho(a, b)$ равно длине отрезка числовой оси с концами a и b (рис.2, а).

Проверим, что ρ удовлетворяет всем трем требованиям 1°–3°. Очевидно, что $|a - b| = 0$ в том и только в том случае, если $a = b$, и что всегда $|a - b| = |b - a|$.

Неравенство 3° тоже почти очевидно (рис.2, б). В каждом из возможных случаев взаимного расположения точек a, b и c на прямой, включая такие, когда две из точек a, b и c совпадают, неравенство

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \quad (2)$$

легко доказать и формально, не ссылаясь на рисунок. Например, если $b \leq a \leq c$ (нижний рис.2, б), то

$$|a - c| = c - a,$$

$$|a - b| + |b - c| = a - b + c - b = a + c - 2b \geq a + c - 2a = c - a,$$

и поэтому верно (2).

Пример 2. X – любое множество,

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b, \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \quad (3)$$

Все аксиомы 1°–3°, очевидно, выполнены. Это, как говорят, «дискретное» пространство, в нем все точки стоят как бы отдельно, не слишком близко друг к другу.

Пример 3, о котором мы уже говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все

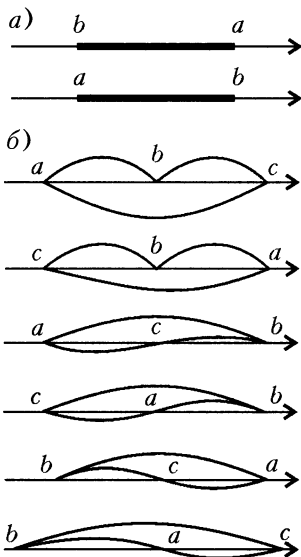


Рис. 2

остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно, трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух остановок a и b можно найти величину $t(a, b)$ – **минимальное** время, необходимое для того, чтобы попасть из a в b (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание, хотя и это можно сделать). Проверим, выполняются ли для функции t свойства 1°–3°; другими словами, будет ли множество всех остановок X с расстоянием t метрическим пространством. Свойство 1°, как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из a в c через b , поэтому **минимальное** время $t(a, c)$ заведомо не больше $t(a, b) + t(b, c)$. А вот свойство 2°, особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться. Проверьте, что для функции

$$t'(a, b) = \frac{t(a, b) + t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства 1°–3°.

Вот еще один пример, когда расстояние измеряется не в километрах.

Пример 3'. Пусть X – множество городов СССР, куда летают самолеты, и $\rho(a, b)$ – стоимость билета (в рублях) из города a в город b (по наиболее дешевому маршруту). Нетрудно видеть, что это – метрическое пространство.

Метрики на плоскости

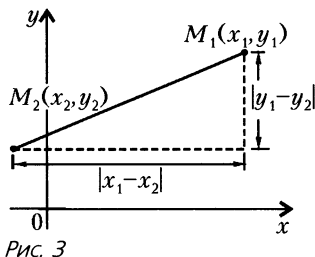
Занявшись несколько экзотическими примерами метрических пространств, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 4. X – множество всех точек плоскости, ρ – обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, т.е. $\rho(A, B)$ – длина отрезка, соединяющего две точки A и B . Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° здесь – не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других»³. При обычном построении курса геометрии это утверж-

³Случай, когда три точки лежат на одной прямой, мы уже разобрали выше (пример 1).

дение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выражается такой формулой (рис.3):



$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом: X – множество всех пар (x, y) вещественных чисел⁴, расстояние между парами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3° , пришлось бы доказывать такое неравенство:

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Попробуйте сделать это! Удобно ввести специальные обозначения: $x_1 - x_2 = u_1$, $x_2 - x_3 = u_2$, $y_1 - y_2 = v_1$, $y_2 - y_3 = v_2$; тогда $x_1 - x_3 = u_1 + u_2$, $y_1 - y_3 = v_1 + v_2$, и последнее неравенство записывается несколько короче:

$$\sqrt{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$$

(кстати, подобная замена обозначений сильно сократила бы и доказательство неравенства (2)). После двукратного возведения в квадрат и упрощения вы получите эквивалентное очевидное неравенство

$$u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 \geq 2u_1 u_2 v_1 v_2 \Leftrightarrow (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0.$$

Подумайте, когда это неравенство обращается в равенство? Что это означает на геометрическом языке?

В принципе все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще, – вместо «неравенства треугольника» нам пришлось доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

⁴ Это множество имеет специальное обозначение \mathbb{R}^2 и называется числовой плоскостью.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости \mathbb{R}^2 , отличных от (4).

Пример 5.

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \quad (5)$$

т.е. $\rho'(M_1, M_2)$ равно сумме длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy .

Пример 6.

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad (6)$$

(запись $\max\{a, b\}$ означает наибольшее из чисел a, b), т.е. $\rho''(M_1, M_2)$ равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy .

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для ρ'' :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_3| &\leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} |y_1 - y_3| &\leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leq \\ &\leq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + \max\{|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|\}, \end{aligned}$$

поэтому наибольшее из двух чисел $|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|$ не превосходит $\rho''(x_1, x_2) + \rho''(x_2, x_3)$.

Точно так же на множестве \mathbb{R}^3 всех наборов (x, y, z) из трех вещественных чисел расстояние между «точками» (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad (4')$$

$$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 + z_1 - z_2 \quad (5')$$

или

$$\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|\}. \quad (6')$$

В случае (4') мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные m -мерные пространства ($m = 2, 3, 4, \dots$) также полезны — с их помощью удобно строить всю теорию функций от m переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

Окрестности

Вернемся теперь в двумерное пространство – на плоскость \mathbb{R}^2 – и обсудим один наглядный способ сравнить разные расстояния (4)–(6).

Пусть точка $O = (0, 0)$ – начало координат. Найдем множество точек, находящихся от точки O на расстоянии, меньшем заданного числа r . Все знают, что это множество – внутренность круга с центром O радиуса r (рис.4,а); разумеется, речь идет о расстоянии (4), т.е. о множестве точек (x, y) , для которых $\sqrt{x^2 + y^2} < r$. А каковы будут «круги радиуса r », если расстояние определять по формуле (5) или (6)? Множество точек (x, y) , для которых $|x| + |y| < r$ – это внутренность квадрата с вершинами $(0, r)$, $(-r, 0)$, $(0, -r)$ и $(r, 0)$ (рис.4,б); а множество точек $\max\{x, y\} < r$, другими словами, множество точек, для кото-

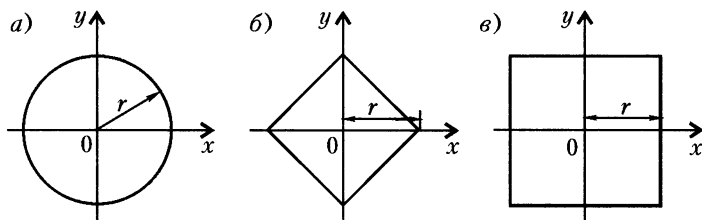


Рис 4

рых одновременно $|x| < r$ и $|y| < r$ – это, очевидно, квадрат с вершинами $(-r, -r)$, $(-r, r)$, $(r, -r)$ и (r, r) (рис.4,в).

Обычно, когда речь идет о метрических пространствах, вместо слов «круг радиуса r с центром a » говорят « r -окрестность точки a ».

Определение 1. Пусть X – метрическое пространство, ρ – расстояние в X , r – положительное число. Тогда r -окрестностью точки a называется множество всех точек m из X , для которых $\rho(m, a) \leq r$. Коротко это множество можно записать так: $\{m : \rho(m, a) \leq r\}$.

Таким образом, на рисунках 4, а, б, в изображены r -окрестности точки $(0, 0)$, если расстояние на плоскости задается соответственно формулами (4), (5) и (6); нетрудно сообразить, что r -окрестность любой другой точки (x_0, y_0) в этих метрических пространствах выглядит точно так же, как окрестность точки $(0, 0)$ – просто центр круга или квадрата сдвигается в точку (x_0, y_0) .

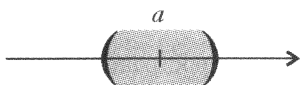


Рис. 5

$\{x; |x - a| \leq r\}$ – это отрезок длины $2r$, середина которого лежит в точке a (рис.5). В примере 3 20 -окрестность Москвы – это множество городов, куда можно улететь на самолете не более чем за 20 рублей; в примере 2 r -окрестность состоит всего из одной точки, если $r < 1$, и содержит все множество X , если $r \geq 1$.

Расстояние между функциями

Расстояние удобно определять не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот два примера из геометрии. На множестве всех *прямых, проходящих через данную точку O*, за

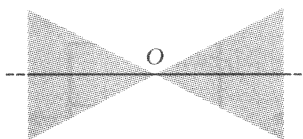


Рис. 6

расстояние между двумя прямыми можно принять величину меньшего из образуемых ими углов (на рисунке 6 показано, как выглядит окрестность одной из прямых). Расстояние между двумя *выпуклыми многоугольниками M_1 и M_2* на плоско-

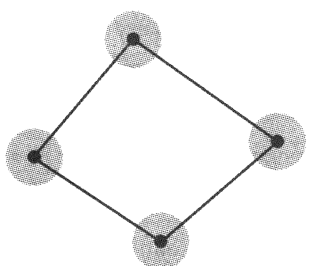


Рис. 7

сти можно определить так: для каждой вершины многоугольников M_1 и M_2 находим расстояние⁵ до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее; таким образом, в r -окрестность данного многоугольника M_0 (рис.7) попадают такие многоугольники M , у которых все вершины лежат в кружках радиуса r с центрами в вершинах M_0 , причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина M ; проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием – метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

⁵ Имеется в виду «обычное» расстояние (4).

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при x , близком к нулю, $\sin x$ приближенно равен x (здесь $\sin x$ означает синус числа x , т.е. синус угла в x радианов). Еще более точная формула: $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$.

Пусть, например, x изменяется на отрезке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Как оценить, насколько хорошо функция $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$ приближает функцию $f_2(x) = \sin x$, как велико «расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом x разность $f_1(x) - f_2(x)$, возьмем то $x = x_0$, где эта разность наибольшая (по модулю), и положим $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$.

Для наших конкретных функций

$$\rho(f_1, f_2) = \left| \sin \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{384} \right) \right| \approx 0,0025.$$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке $x = \frac{\pi}{4}$.)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями f_1, f_2 , определенными на отрезке $[a, b]$, величину

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \quad (7)$$

Проверьте, что аксиомы 1°–3° здесь выполнены! При этом r -окрестность данной функции (рис. 8) состоит из всех таких функций, графики которых лежат в полоске ширины $2r$ вокруг графика функции f .

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2), \quad (8)$$

где $s(f_1, f_2)$ – величина площади, заключенной между графиками f_1 и f_2 (рис.9) и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{S(f_1, f_2)}, \quad (9)$$

где $S(f_1, f_2)$ – величина площади, заключенной между графиком функции $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$ и осью Ox .

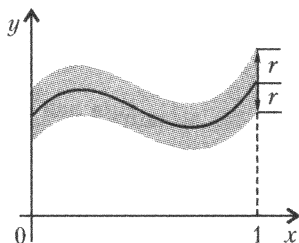


Рис. 8

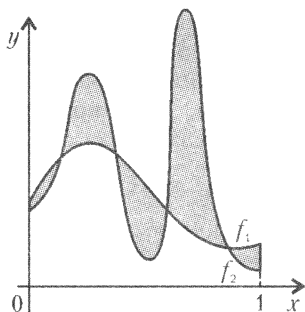


Рис 9

Расстояние (7) мало, когда значения функций f_1 и f_2 близки **для всех** значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции f_1 и f_2 близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени t ; тогда мощность, выделяющаяся на участке цепи между

этимися точками за промежуток времени $a \leq t \leq b$, пропорциональна $S(f_1, f_2)$ (сопротивление постоянное; мощность пропорциональна $(f_1(t) - f_2(t))^2$); таким образом, мощность тем больше, чем больше расстояние (9). А если нам важно, чтобы напряжение $f_1(t) - f_2(t)$ **все время** не превышало какой-то величины V , то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно чтобы величина $\max_{a \leq t \leq b} |f_1(t) - f_2(t)|$ не превосходила V .

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояния (8) и (9); то же самое относится и к расстоянию (7) – ясно, что оно определено не для любых, даже не для любых ограниченных функций. Например, если одна из функций $f_1(x) = 0$ для всех x , $0 \leq x \leq 1$, а другая $f_2(x) = x$, если $0 \leq x < 1$, и $f_2(1) = 0$, то нет такой точки x , где $|f_1(x) - f_2(x)|$ достигает максимума. Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа.

Еще два определения

Для математика термин « r -окрестность» звучит не очень привычно. Гораздо чаще говорят « ϵ -окрестность» или « δ -окрестность»; дело в том, что греческие буквы ϵ и δ обычно употребляются для обозначения положительных чисел, которыми оценивают небольшие отклонения или точность приближения, и по традиции фигурируют в определении основного понятия теории метрических пространств – понятия предела.

Определение 2. Точка A называется пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots , если для любого положительного числа ϵ существует такой номер n (зависящий от ϵ), что все члены последовательности, начиная с x_n , содержатся в

ε -окрестности точки A . (Здесь M_1, M_2, M_3, \dots и A – точки метрического пространства X .)

Подчеркнем, что это определение годится для **любого** метрического пространства, т.е. мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для прямых (проходящих через одну точку) на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция $f(x) = \sin x$, $a \leq x \leq b$, является пределом последовательности функций f_1, f_2, f_3, \dots , где

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$$

– независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли a и b .

Определение 3. Пусть X и Y – два метрических пространства, F – отображение множества X в Y ; x_0 – точка в X , $F(x_0) = y_0$. Тогда F называется непрерывным в точке x_0 , если для любого положительного числа ε найдется такое δ (зависящее от ε), что все точки из δ -окрестности x_0 отображаются в ε -окрестность точки y_0 .

Наглядно можно представить себе дело так: функция «рвется» в точке x_0 , если для точки x , даже очень близкой к x_0 , значение функции может оказаться далеко отстоящим от y_0 . Легко доказывается, что любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения E в числовую прямую, непрерывное в каждой точке E . Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили выше о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Используя только основные свойства расстояния 1° – 3° , можно доказать многие теоремы, связанные с понятиями предела и непрерывной функции.

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа (прекрасная книга *Mengenlehre* которого переведена на русский язык⁶, излагается сейчас в первых главах учебников с такими приблизительно названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа», «Топологические пространства». Разумеется, большая часть этой тео-

⁶ Ф.Хаусдорф. Теория множеств. – ОНТИ, 1934.

рии, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек. Но в то же время общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества; в частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в начале статьи, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающейся сейчас теории кодов, исправляющих ошибки. Тем, кто хочет более подробно познакомиться с теорией метрических пространств, рекомендуем прочитать книжку Ю.А.Шрейдера «Что такое расстояние».⁷

Упражнения

1. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D метрического пространства $\rho(A, C) + \rho(B, D) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, D) + \rho(D, A)$.

2. Докажите, что для любых n точек A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 3$) $\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \dots + \rho(A_{n-1}, A_n) \geq \rho(A_1, A_n)$.

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 км, из Витри до Шомона 80 км, из Шомона до Сэн-Кантена 236 км, из Сэн-Кантена до Ремса 86 км, из Ремса до Шалона 40 км. Вычислите в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек.⁸

4. а) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2) = r$ и $r_1 + r_2 < r$, то r_1 -окрестность точки M_1 не имеет общих точек с r_2 -окрестностью точки M_2

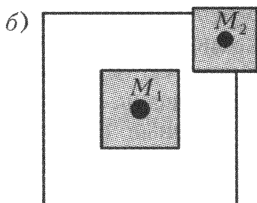
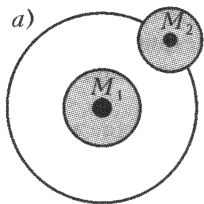


Рис 10

(рисунок 10 иллюстрирует этот факт для расстояний (4) и (6) на плоскости).

б) Докажите, что если $\rho(M_1, M_2) = r$ и $r_1 - r > r_2$, то r_2 -окрестность точки M_2 целиком содержится в r_1 -окрестности точки M_1 .

5. Множество E точек метрического пространства X называется ε -сетью, если ε -окрестности точек множества E (все вместе) целиком покрывают множество X ; другими словами, если для каждой

⁷ Ю.А.Шрейдер. Что такое расстояние. – М.: Физматгиз, 1963.

⁸ Г.Штейнгауз. Сто задач. – М.: Физматгиз, 1959 (задача №100).

точки x из X найдется хотя бы одна точка множества E , отстоящая от x не более чем на ε . (Здесь ε – некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 11, а является $\frac{1}{10}$ -сетью для отрезка числовой оси $0 \leq x \leq 1$ с обычным расстоянием (2).

Разумеется, оно является также ε -сетью при любом $\varepsilon > \frac{1}{10}$. На рисунке

11, б множество черных

точек является $\frac{1}{10}$ -сетью

для квадрата $0 \leq x \leq 1$,

$0 \leq y \leq 1$ на плоскости

Oxy с расстоянием (6).

Для каких ε это же мно-

жество является ε -сетью

в смысле расстояний (4)

и (5) на том же квадрате?

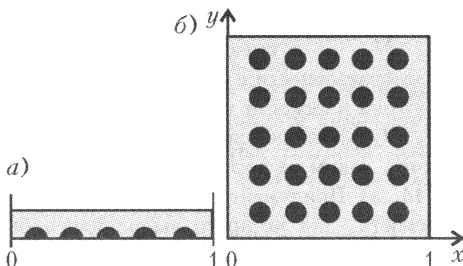


Рис 11

6. Метрическое пространство X называется

ограниченным, если существует такое число c , что расстояние между любыми двумя точками X не превосходит c .

Докажите, что если при каком-нибудь ε пространство имеет конечную ε -сеть, то оно ограничено.

7. Пусть $N(\varepsilon)$ – наименьшее число точек в ε -сети пространства X , $M(\varepsilon)$ – наибольшее число точек в X , расстояния между любыми двумя из которых не меньше ε .

Докажите, что $M(2\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq M(\varepsilon)$.

8. Пусть C – множество функций, определенных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения на том же отрезке, графики которых – ломаные линии. Будем определять расстояние в C по формуле (7).

Докажите, что можно выбрать бесконечное количество функций из C , все попарные расстояния между которыми равны единице. Выведите отсюда, что при $\varepsilon < \frac{1}{2}$ в C нельзя выбрать конечную ε -сеть.

9. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки A целиком содержится в 2-окрестности другой точки B и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

10. Докажите, что среди n -значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем $\frac{2^n}{n+1}$ чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

11. С помощью задачи 4 а) докажите, что две разные точки A и B не могут быть пределами одной и той же последовательности.

12. Постройте пример последовательности функций, определенных

на отрезке $[0, 1]$, которая стремится к пределу f_0 , если пользоваться расстоянием (8), и не имеет f_0 пределом, если пользоваться расстоянием (7).

13. Пусть ρ_1 и ρ_2 – два расстояния на некотором множестве X – обладают тем свойством, что $\rho_1(A, B) \leq k\rho_2(A, B)$ для любых двух точек A и B , где k – некоторое положительное число (одно и то же для всех A и B).

Докажите, что если P является пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots в смысле расстояния ρ_2 , то P будет пределом этой последовательности в смысле расстояния ρ_1 . Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности M_1, M_2, M_3, \dots является точка P » имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

14. а) Придумайте расстояние ρ на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек A_1, A_2, A_3, \dots и B_1, B_2, B_3, \dots имеют пределами две различные точки A и B , то последовательность прямых $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ имеет (в смысле расстояния ρ) пределом прямую AB .

б) Докажите, что подобное расстояние ρ нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

РАССТАНОВКА КУБИКОВ

В этой статье мы расскажем решение одной из задач, предлагавшихся на Всесоюзной математической олимпиаде 1971 года в Риге. Она формулировалась так.

Задача. *Куб с ребром длины n разбит на n^3 единичных кубиков. Выберем несколько кубиков и проведем через центр каждого из них три прямые, параллельные ребрам. Какое наименьшее число кубиков можно выбрать так, чтобы проведенные через них прямые перечеркнули все кубики?*

а) Укажите ответ для маленьких значений n : для $n = 2, 3, 4$.

б) Попробуйте найти ответ для $n = 10$.

в) Решите общую задачу. Если вам не удастся найти точный ответ, докажите какие-либо неравенства, оценивающие сверху и снизу число отмеченных кубиков.

г) Заметьте, что эту задачу можно сформулировать так. Рассмотрим всевозможные наборы (x_1, x_2, x_3) , где каждая из букв x_1, x_2, x_3 принимает одно из n значений $1, 2, \dots, n$. Какое наименьшее число наборов нужно выбрать, чтобы для каждого из остальных наборов среди выбранных нашелся такой, который отличался бы от него только в одном месте (значением только одной из координат x_1, x_2, x_3)? Попробуйте найти оценки для числа наборов в более общей задаче, когда рассматриваются наборы не из трех, а из четырех и большего количества букв.

Формулировка с ладьями

Чтобы не путаться в словах «куб», «кубик» и «выбранный кубик», удобно переформулировать задачу в других терминах. Весь куб $n \times n \times n$ мы назовем «пространственной шахматной доской», каждый из кубиков $1 \times 1 \times 1$ – «клеткой», каждый выбранный кубик – «клеткой, занятой ладьей». Будем считать, что ладья, стоящая в какой-то клетке x , держит под ударом все клетки, расположенные вдоль трех прямых, параллельных ребрам куба и проходящих через центр клетки x (в том числе будем считать, что ладья бьет и саму эту клетку x (рис.1)). Тогда вопрос, поставленный в условии, можно сформулировать

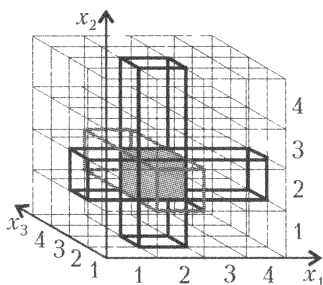


Рис.1 Ладья, стоящая на поле 222 (выделенный кубик), бьет десять полей. кроме самого поля 222, еще 122, 322, 422 (в направлении x_1 в «ширину»), 212, 232 и 242 (в направлении x_2 в «высоту»), 221, 223 и 224 (в направлении x_3 в «глубину»)

так: какое наименьшее число ладей можно расставить на доске $n \times n \times n$, чтобы они били всю доску (т.е. все клетки без исключения)?

Упражнение 1. Решите аналогичную задачу для «плоской» шахматной доски $n \times n$. (Ответ: n . Заметьте, что если на доске $n \times n$ стоит меньше чем n ладей, то найдутся горизонталь и вертикаль, свободные от ладей).

Первоначальные грубые оценки

Обозначим через A_n наименьшее количество ладей, которые могут побить всю доску $n \times n \times n$.

Поскольку на доске $n \times n \times n$ каждая ладья бьет $3n - 2$ клетки, а всего клеток n^3 , то, чтобы побить всю доску, нужно расставить по крайней мере $\frac{n^3}{3n - 2}$ ладей. Другими словами,

$$A_n \geq \frac{n^3}{3n - 2}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что

$$A_2 \geq 2, \quad A_3 \geq 4, \quad A_4 \geq 7, \quad A_5 \geq 10.$$

Легко придумать пример расстановки n^2 ладей, бьющих всю доску (их можно расставить в одном горизонтальном «слое»).

Это дает такую грубую оценку:

$$A_n \leq n^2. \quad (2)$$

Упражнение 2. Докажите, что

$$A_n \leq \frac{3n^2}{4}, \quad (3)$$

воспользовавшись следующим соображением: если расставить n_1 ладей вдоль ребра n_1 доски $n_1 \times n_2 \times n_3$, то после этого останется решить задачу для доски $n_1 \times (n_2 - 1) \times (n_3 - 1)$

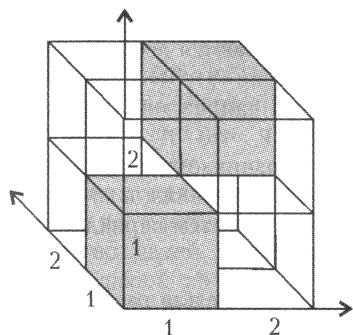


Рис.2. Ладьи 111 и 222 бьют всю доску $2 \times 2 \times 2$

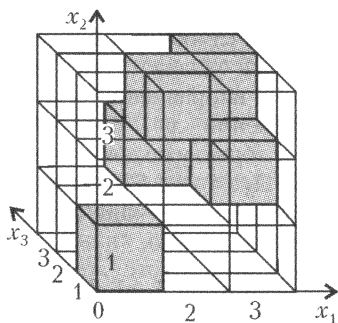


Рис.3. Ладьи 111, 223, 232, 322 и 333

Запись расстановок «в плане»

При $n = 2$, очевидно, двух ладей достаточно, чтобы держать под ударом все восемь клеток (рис.2), т.е. $A_2 = 2$. Несколько труднее исследовать случай $n = 3$. Пример нужной расстановки пяти ладей показан на рисунке 3.

В этом рисунке уже довольно трудно разобраться. С увеличением n дело еще ухудшится. Поэтому необходимо придумать более удобный способ описания расстановок ладей. Можно было бы, конечно, просто перечислять все «координаты» ладей, как это сделано в подписях под рисунками, но мы предложим более наглядный способ записи.

Будем называть *слоем* множество клеток, центры которых лежат в плоскости, параллельной одной из граней доски, и *линией* – множество клеток, центры которых лежат на одной прямой, параллельной ребру; слой состоит из n^2 клеток, линия – из n клеток. Нарисуем проекцию доски на одну из граней, скажем, на плоскость Ox_1x_2 (вид спереди) и на каждом поле полученной доски $n \times n$ напишем номер слоя, в котором встречается ладья, проектирующаяся на это поле. Тогда расстановка ладей, изображенная на рисунке 3, запишется так, как показано на рисунке 4 (ситуации, когда в одной линии стоит больше одной ладьи, у нас не будут встречаться, поэтому на каждом поле доски $n \times n$ будет записываться не более чем одно число). Заметьте,

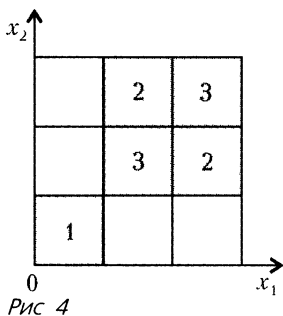


Рис 4

что на рисунке 4 для каждого пустого поля в строке и столбце, на пересечении которых оно стоит, встречаются все номера: 1, 2 и 3. Это и означает, что каждое поле доски $3 \times 3 \times 3$, которое не бьется в направлении x_3 , бьется или в направлении x_1 , или в направлении x_2 . Итак, мы убедились, что $A_3 \leq 5$. То, что $A_3 \geq 4$, было уже доказано (см. (1)). Возникает вопрос: чему же равно A_3 : 4 или 5? Мы предоставляем читателям возможность разобраться в случаях $n = 3$, $n = 4$ и т.д., а затем перейдем сразу к общему случаю.

Упражнение 3. а) Докажите, что 4 ладьи нельзя расставить так, чтобы они били всю доску $3 \times 3 \times 3$; б) укажите пример расстановки 8 ладей, которые бьют всю доску $4 \times 4 \times 4$; в) докажите, что $A_4 = 8$

Общий случай. Формулировка результата

В нашей задаче едва ли не самое трудное – выдвинуть правильную гипотезу: чему равно A_n . Зная ответ, уже значительно легче и построить пример (т.е. оценить A_n сверху), и доказать, что меньшим числом ладей обойтись нельзя. А ответ таков:

$$A_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{n^2 + 1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В частности, $A_4 = 8$, $A_5 = 13$, ..., $A_{10} = 50$.

Примеры «оптимальной» расстановки A_n ладей ясны из рисунков 5, а (n четно) и 5, б (n нечетно). Легко проверить, что

а)

					6	7	8	9	10
					7	8	9	10	6
					8	9	10	6	7
					9	10	6	7	8
					10	6	7	8	9
1	2	3	4	5					
2	3	4	5	1					
3	4	5	1	2					
4	5	1	2	3					
5	1	2	3	4					

$\frac{n}{2}$

б)

					$\frac{n+1}{2}$				
					5	6	7	8	9
					6	7	8	9	5
					7	8	9	5	6
					8	9	5	6	7
					9	5	6	7	8
1	2	3	4						
2	3	4	1						
3	4	1	2						
4	1	2	3						

$\frac{n-1}{2}$

Рис. 5

все поля, которые не бьются в направлении x_3 , бьются либо в направлении x_1 , либо в направлении x_2 : в каждом «кресте» — строке и столбце, на пересечении которых стоит пустое поле — встречаются все номера от 1 до n .

Осталось доказать, что в меньшем количестве ладьи не могут побить всю доску.

Первое доказательство. Пусть M ладей расставлены так, что они бьют все клетки доски. Выберем из всех слоев тот, в котором количество ладей минимально (если таких слоев несколько, возьмем любой из них). Можно считать, что он расположен параллельно плоскости Ox_1x_2 . Обозначим этот слой через S , а количество ладей в нем — через m . Пусть эти m ладей бьют m_1 рядов в направлении x_1 и m_2 рядов в направлении x_2 (можно считать, что $m_1 \geq m_2$; разумеется, $m \geq m_1$ и $m \geq m_2$). Тогда в слое S эти ладьи оставляют непобитыми $(n - m_1)(n - m_2)$ клеток, которые должны биться в направлении x_3 . (На рисунке 6 слой S — передний, клетки, занятые ладьями, — черные, $n = 9$, $m = m_1 = 4$, $m_2 = 3$).

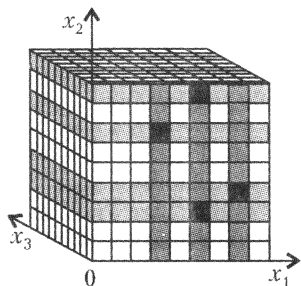


Рис. 6

Рассмотрим теперь все n «горизонтальных» слоев — слоев, параллельных плоскости Ox_1x_3 . В тех $n - m_1$ из них, которые не содержат ладей слоя S , как мы убедились, должно быть не менее $(n - m_1)(n - m_2)$ ладей. В каждом из остальных m_1 слоев (серых на рисунке 6) — не менее m ладей (по выбору m). Поэтому

$$M \geq (n - m_1)(n - m_2) + m m_1 \geq (n - m_1)^2 + m_1^2.$$

Но минимальное значение правой части при целом m_1 , как легко доказать, как раз равно $\frac{n^2}{2}$ при четном n и $\frac{n^2 + 1}{2}$ при нечетном n (график функции $f(x) = (n - x)^2 + x^2$ изображен на рисунке 7).

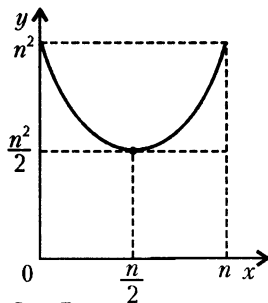


Рис. 7

Второе доказательство. Лемма. Пусть в таблице $n \times n$ стоят целые неотрицательные числа так, что если в каком-то поле стоит 0, то сумма всех чисел строки и столбца, на пересечении которых

стоит это поле, не меньше n . Тогда сумма всех чисел таблицы не меньше $\frac{n^2}{2}$ (и следовательно, если все числа в таблице целые, то при нечетном n эта сумма не меньше $\frac{n^2 + 1}{2}$).

Из леммы нужна оценка для A_n получается легко: достаточно спроектировать доску на одну из граней и написать в каждом поле полученной таблицы $n \times n$, сколько ладей в нее спроектировалось. Ясно, что условие леммы для полученной таблицы будет выполнено.

Итак, основная задача, о которой идет речь в пунктах а), б) и в) условия, решена.

Замечания по поводу обобщений

Что же касается более общей задачи, сформулированной в пункте г), – аналогичной задачи не для «трехмерной», а для « k -мерной» доски ($k \geq 4$), то здесь окончательный результат неизвестен. Для минимального числа A_n^k ладей, бьющих всю доску $n \times n \times \dots \times n$ (мы сохраняем шахматную терминологию, но напомним, что теперь клетка x – это набор из k чисел (x_1, x_2, \dots, x_k), где каждое k принимает значение от 1 до n), легко получить оценки, аналогичные (1), (2):

$$A_n^k \leq n^{k-1}, \quad A_n^k \geq \frac{n^k}{k(n-1)+1}.$$

Упражнение 4. Докажите эти неравенства. Постарайтесь улучшить оценку n^{k-1} , используя те же соображения, что и в упражнении 2.

Поскольку $A_n^2 = n$ и A_n^3 равно $\frac{n^2}{2}$ или $\frac{n^2+1}{2}$, напрашивается гипотеза, что A_n^k близко к $\frac{n^{k-1}}{k-1}$. Эту гипотезу, наряду с другими, обсуждали участники олимпиады и члены жюри не только во время олимпиады, но и после нее. Один из наиболее интересных результатов нам сообщили выпускник физико-математической школы при Ленинградском университете *Д. Григорьев* и наш читатель *Б. Гинзбург*: им (независимо) удалось доказать, что если M ладей бьют всю доску и при этом *никакие две не бьют друг друга*, то $M \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$ (доказательство мы помещаем в конце статьи). По-видимому, этот результат верен и без дополнительного предположения, выделенного курсивом, т. е. верно неравенство $A_n^k \geq \frac{n^{k-1}}{k-1}$, причем, как показывают примеры,

при $n > k$ эта оценка довольно близка к точной (или даже в точности совпадает с ней).

Однако оценка $\frac{n^{k-1}}{k-1}$ заведомо не является «очень точной» при всех n и k . Например, если $n = 2$, то $\frac{n^{k-1}}{k-1} = \frac{2^{k-1}}{k-1}$, и «грубая» оценка $\frac{n^k}{k(n-1)+1} = \frac{2^k}{k+1}$ оказывается лучше (при $k > 3$); при больших k число $\frac{2^k}{k+1}$ примерно в два раза больше, чем $\frac{2^{k-1}}{k-1}$.

Упражнение 5. Найдите A_2^4 , A_3^4 , A_2^5 .

Несколько слов про задачи о кодах

Одна задача, очень близкая к нашей по формулировке, является значительно более исследованной – прежде всего потому, что она важна для приложений. В «шахматных терминах» она звучит так: какое наибольшее число ладей можно расставить на k -мерной доске $n \times n \times \dots \times n$, чтобы они не били друг друга? (Другой вариант: чтобы никакое поле не билось двумя ладьями?) Иначе говоря: какое множество Y наборов $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ можно составить так, чтобы а) каждые два набора в Y отличались более чем в одной координате, или б) каков бы ни был набор $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, в множестве Y найдется не больше одного набора y , отличающегося от x лишь в одной координате? Сформулированные задачи прямо относятся к теории информации, точнее, к ее разделу – теории кодов, исправляющих ошибки. Эта теория занимается задачами такого типа: составить множество Y «слов» (y_1, y_2, \dots, y_k) такое, что если при передаче одного из этих слов (скажем, по телеграфу или по каналу связи в вычислительной машине) вкралась ошибка в какой-то «букве», то эту ошибку можно было бы обнаружить, а еще лучше – исправить, т.е. восстановить переданное «слово». Поэтому множество Y , удовлетворяющее условию а), называется «кодом, обнаруживающим одиночные ошибки», а удовлетворяющее условию б) – «кодом, исправляющим одиночные ошибки». Вы видите, что в математике слово «код» используется не совсем так, как в книгах про шпионов.

Упражнение 6. Пусть B_n^k – наибольшее число ладей, которые можно расставить на k -мерной доске $n \times n \times \dots \times n$ так, чтобы они не били друг друга. а) Какое число больше: B_n^k или A_n^k ? б) Найдите B_n^2 , B_n^3 , B_2^4 .

Теория кодов представляет собой, пожалуй, самый яркий пример применения современной алгебры в далекой от нее, на первый взгляд, области, прямо связанной с техническими приложениями. Ей посвящено много научных работ и несколько толстых книг, она быстро развивается и заслуживает специального знакомства.

Приложение

Теорема. Пусть X — множество всех наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$, где каждая из $k+1$ координат x принимает n значений. $1, 2, \dots, n$; Y — подмножество X такое, что (1) любые два набора из Y отличаются хотя бы двумя координатами и (2) для каждого x из X существует набор y из Y , отличающийся от x не более чем в одной координате. Тогда в Y не более n^k/k элементов.

Доказательство. Пусть $\alpha(x) = 1$, если x принадлежит Y , и $\alpha(x) = 0$, если нет. Положим

$$\beta(x) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq x_{k+1} \leq n} \alpha(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1});$$

$$\gamma_i(x) = \gamma_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) = \sum_{1 \leq x_i \leq n} \beta(x_1, \dots, x_k), \text{ где } i = 1, 2, \dots, k.$$

(«Укороченные» наборы из k и $(k-1)$ координат мы будем обозначать той же буквой x , помня, что у аргументов β всегда выброшено x_{k+1} , а у γ_i — x_{k+1} , и x_i .) По условию (1) $\beta(x) \leq 1$ для любого x . По условию (2), если $\beta(x) = 0$ для некоторого x , то $\sum_{1 \leq i \leq k} \gamma_i(x) \geq n$ для этого x . Поэтому для всех x без исключения

$$\sum_i \gamma_i(x)(1 - \beta(x)) \geq n(1 - \beta(x)).$$

Просуммируем все такие неравенства, соответствующие n^k различным наборам (x_1, x_2, \dots, x_k) . Это суммирование обозначим буквой Σ' , а суммирование по всем координатам, кроме x_i , — через Σ'_i . Пусть общее число элементов Y равно M . Тогда, поскольку $\Sigma'_i \beta(x) = M$ и $\Sigma'_i \gamma_i(x) = M$ для каждого i , получим

$$\sum_i (nM - \Sigma'_i \gamma_i^2(x)) \geq n^{k+1} - nM.$$

Поскольку сумма квадратов N вещественных чисел всегда не меньше квадрата их суммы, деленной на N , левая часть не больше

$$\sum_i (nM - \Sigma'_i \gamma_i^2(x)) \leq \sum_i \left(nM - \frac{(\Sigma'_i \gamma_i(x))^2}{n^{k-1}} \right) = knM - \frac{kM^2}{n^k - 1}.$$

Таким образом, верно неравенство $knM - \frac{kM^2}{n^k - 1} \geq n^{k+1} - nM$, откуда $M \leq n^k/k$.

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

Все знают, что любое целое положительное число можно разложить в произведение простых множителей; так, например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2, \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, \quad 290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Почему такое разложение единственно? Более простой факт: если произведение mn делится на 43, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 43. Как это доказать?

Эти факты считаются очевидными. Между тем доказать их не так просто. Это мы сделаем в конце статьи, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел, и расскажем о том, как найти наибольший общий делитель двух чисел, не раскладывая их на простые множители.

Всюду латинскими буквами (a, b, c, d и т.д.) мы обозначаем целые числа.

Делимость суммы, разности и произведения

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число k , что $a = kb$. В таком случае число b называется *делителем* числа a .

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. Если числа a и b делятся на c , то и их сумма $a + b$, и их разность $a - b$ делятся на c .

2°. Если a делится на c , $a b$ делится на d , то их произведение ab делится на cd .

Докажем 1°. Поскольку a делится на c , то $a = kc$, где k — некоторое целое число. Точно так же $b = md$, где m — целое число. Поэтому $a + b = (k + m)c$, $a - b = (k - m)d$, откуда следует, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c .

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда и следует утверждение 2°.

Задача 1. Докажите, что если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c .

Задача 2. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

а) если одно слагаемое делится на 6, а другое не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 6, то их сумма не делится на 6;

в) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то хотя бы одно из них не делится на 6;

г) если сумма двух слагаемых не делится на 6, то каждое слагаемое не делится на 6;

д) если произведение нескольких сомножителей делится на 6, то и один из сомножителей делится на 6?

Задача 3. Про целые числа a , b и c известно, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c . Следует ли отсюда, что каждое из чисел a и b делится на c ?

Задача 4. Докажите, что если $a^2 + ab + b^2$ делится на $a + b$, то $a^4 + b^4$ делится на $(a + b)^2$.

Деление с остатком

Все знают правило деления одного целого числа a на другое целое число b «столбиком». Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если $a = 1972$, а $b = 31$, то при делении получится частное 63 и остаток 19:

$$\begin{array}{r|l}
 1972 & 31 \\
 \hline
 186 & 63 \\
 \hline
 112 & \\
 - 93 & \\
 \hline
 19 &
 \end{array}$$

или $1972 = 31 \cdot 63 + 19$. Можно по этому поводу сформулировать следующее предложение (рис.1):

если a и b – целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q , что $a = bq + r$, где «остаток» r – целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r < b$.

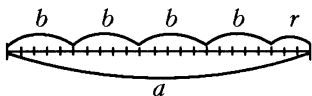


Рис 1

Задача 5. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры с номерами от 97 до 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира 211? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково.)

Задача 6. Было 5 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 5 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова

разрезали на 5 частей, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1971 кусок?

Задача 7. Найдите наименьшее шестизначное число, которое делится на 3, на 7 и на 13.

Задача 8. Какой остаток дает число 98 765 432 123 456 789:

- а) при делении на 4;
- б) при делении на 8;
- в) при делении на 9?

Наибольший общий делитель (НОД)

Пусть a и b – целые числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a , и b , и выберем из них наибольшее. Этот наибольший общий делитель чисел a и b мы будем обозначать через $\text{НОД}(a, b)$. Например, $\text{НОД}(4, 12) = 4$; $\text{НОД}(21, 91) = 7$; $\text{НОД}(15, 28) = 1$.

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 9. Произведение двух чисел равно 600. Какое наибольшее значение может иметь НОД таких чисел?

Задача 10. Докажите, что если $d = \text{НОД}(a, b)$, $a = kd$, $b = ld$, то $\text{НОД}(k, l) = 1$.

Задача 11. Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 264 белых и 192 красных тюльпанов?

Задача 12. а) На листке клетчатой бумаги нарисован прямоугольник размером 8×12 , на его диагонали лежат 5 узлов сетки (рис.2). Пусть имеется прямоугольник $m \times n$, стороны которого проходят по линиям сетки. Сколько узлов сетки лежит на его диагонали?

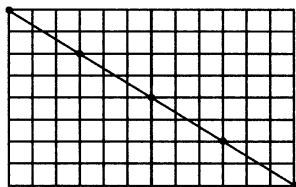


Рис. 2

б) Сколько решений в натуральных числах x, y имеет уравнение

$mx + ny = mn$, где m и n – данные натуральные числа? (Напомним, что натуральными называются целые положительные числа.)

Алгоритм Евклида

Для того чтобы найти НОД двух чисел, можно, конечно, действовать так: выписать все делители каждого из чисел, выбрать общие делители, а затем взять из них наибольший. Можно поступить иначе, не отыскивая отдельно делители каждого из чисел.

Докажем следующую важную лемму.

Лемма 1. Пусть $a = bq + r$, тогда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

С этой целью покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r) . Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r , и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a .

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на k . Тогда bq делится на k (см. 2°) и $r = a - bq$ делится на k (см. 1°).

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на m , то bq делится на m и $a = bq + r$ делится на m (здесь мы опять пользовались утверждениями 1° и 2°).

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. Найдём, чему равен НОД(6069, 663).

Решение. Разделим 6069 на 663 с остатком:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Из леммы следует, что

$$\text{НОД}(6069, 663) = \text{НОД}(663, 102).$$

Ищем НОД(663, 102). Для этого делим 663 на 102:

$$663 = 102 \cdot 6 + 51.$$

Снова, применив лемму, получаем $\text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(102, 51)$. Но 102 делится на 51 без остатка:

$$102 = 51 \cdot 2,$$

поэтому $\text{НОД}(102, 51) = 51$, следовательно,

$$51 = \text{НОД}(102, 51) = \text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(6069, 663).$$

Ответ. $\text{НОД}(6069, 663) = 51$.

Метод отыскания наибольшего общего делителя, основанный на последовательном применении леммы 1, носит специальное название – *алгоритм Евклида*.

Задача 13. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 987 654 321 и 123 456 789; б) 7 777 777 777 и 777 777.

Задача 14. От прямоугольника 324×141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна из сторон меньше 141 см. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис.3).

На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите их размеры и количество.)

Итак, алгоритм Евклида – это простой метод нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Если у нас имеются числа a и b , причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток r_1 , который меньше, чем b . Затем мы делим число b на r_1 и находим остаток r_2 , который меньше, чем r_1 . Далее, при этом получаем остаток r_3 , меньше, чем r_2 , и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделит остаток (т.е. $r_{n+1} = 0$).

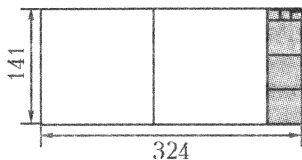


Рис. 3

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки – неотрицательные числа. Последний остаток r_n и есть НОД(a, b):

$$\begin{aligned} r_n &= \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \dots \\ &= \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(a, b). \end{aligned}$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 14. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида – алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис.4).

Задача 15. Найдите наибольшее число α такое, что числа $\frac{15}{28\alpha}$ и $\frac{6}{35\alpha}$ – целые. Другими словами, найдите длину отрезка α , являющегося наибольшей общей мерой отрезков длиной $\frac{15}{28}$ и $\frac{6}{35}$.

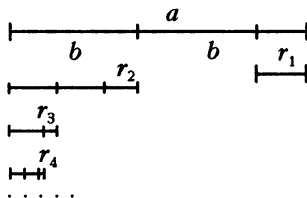


Рис.4. Пусть a и b – два отрезка, $a > b$. Отложим b на a столько раз, сколько возможно; получим остаток r_1 . Отложим r_1 на b столько раз, сколько возможно; получим остаток r_2 . Отложим r_2 на r_1 сколько возможно; получим остаток r_3 , и т.д.

Если, откладывая некоторое r_n на r_{n-1} , мы не получим остатка (т.е. $r_{n+1} = 0$), то отрезок r_n и есть наибольшая общая мера отрезков a и b . Если длины a и b — целые, то все остатки r_1, r_2, \dots также имеют целые длины, процесс откладывания оборвется и последнее r_n и есть НОД(a, b). Если процесс откладывания отрезков не оборвется, то отрезки a и b несоизмеримы (отношение a/b иррационально).

Линейное уравнение

С помощью алгоритма Евклида можно доказать одно важное свойство наибольшего общего делителя.

Лемма 2. Если $\text{НОД}(a, b) = d$, то можно найти такие целые числа x и y , что $d = ax + by$.

В самом деле, остаток r_1 при первом делении a на b записывается в виде $ax_1 + by_1$, так как $r_1 = a - bq_1$ (т.е. $x_1 = 1$, $y_1 = -q_1$). Следующий остаток r_2 при делении b на r_1 записывается в виде $ax_2 + by_2$, так как

$$r_2 = b - r_1q_2 = b - (ax_1 + by_1)q_2 = a(-x_1q_2) + b(1 - y_1q_2) = ax_2 + by_2.$$

Очевидно, такое же рассуждение применимо по отношению ко всем следующим остаткам, пока мы не придем к равенству $r_n = ax + by$, но $r_n = \text{НОД}(a, b)$. Лемма 2 доказана.

Вернемся к примеру, разобранным в предыдущем пункте, в котором мы нашли $\text{НОД}(6069, 663) = 51$. Найдём теперь такие числа x и y , что

$$51 = 6069x + 663y.$$

Наибольший общий делитель мы нашли из цепочки равенств:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102,$$

$$663 = 102 \cdot 6 + 51,$$

$$102 = 51 \cdot 2.$$

Из первого равенства

$$102 = 6069 - 663 \cdot 9.$$

Второе равенство даёт нам

$$51 = 663 - 102 \cdot 6 = 663 - (6069 - 663 \cdot 9)6 = -6069 \cdot 6 + 663 \cdot 55.$$

Итак, мы нашли числа $x = -6$ и $y = 55$ такие, что

$$6069x + 663y = 51.$$

Важным частным случаем леммы 2 является такое утверждение:

если числа a и b взаимно просты, то найдутся такие целые числа x и y , что

$$ax + by = 1.$$

Заметим, между прочим, что лемма 2 следует из этого

утверждения. Например, уравнение, которое мы решали:

$$6069x + 663y = 51,$$

можно было бы сразу сократить на 51 и решать эквивалентное уравнение

$$119x + 13y = 1.$$

Здесь числа 119 и 13 взаимно просты.

Решение $x = -6$, $y = 55$ годится для обоих уравнений.

Еще одно замечание. Мы привели способ, позволяющий находить только одно решение такого уравнения. На самом деле, если есть хотя бы одно решение, то их существует бесконечно много.

Например, числа

$$x = -6 + 13t, y = 55 - 119t \quad (*)$$

(t – любое целое число) также являются решениями обоих наших уравнений. В самом деле,

$$119(-6 + 13t) + 13(55 - 119t) = 1$$

и, конечно,

$$51 \cdot 119(-6 + 13t) + 51 \cdot 13(55 - 119t) = 51,$$

т.е.

$$6069(-6 + 13t) + 663(55 - 119t) = 51.$$

Формулы (*) дают все решения этих уравнений в целых числах. Докажем это. Пусть (x, y) – какое-то решение:

$$119x + 13y = 1.$$

Вычтем из этого уравнения почленно уже известное нам равенство

$$119 \cdot (-6) + 13 \cdot 55 = 1.$$

Получим

$$119(x + 6) + 13(y - 55) = 0,$$

или

$$119(x + 6) = 13(55 - y).$$

Поскольку левая часть последнего равенства делится на 13, а числа 119 и 13 взаимно просты, то число $x + 6$ должно делиться на 13: $x + 6 = 13t$, где t – некоторое целое число. Тогда $y = 55 - 119t$. Тем самым мы по существу выяснили, как находить решения любого линейного уравнения $ax + by = c$ в целых числах. В общем случае результат таков:

Для того чтобы уравнение $ax + by = c$ имело решения в целых числах (x, y) , необходимо и достаточно, чтобы c делилось на

$\text{НОД}(a, b) = d$. Если это условие выполнено и (x_0, y_0) – одно из решений этого уравнения, то все его решения задаются формулами

$$x = x_0 + b_1 t, \quad y = y_0 - a_1 t,$$

где

$$a_1 = \frac{a}{d}, \quad b_1 = \frac{b}{d}.$$

Задача 16. Найдите такие целые числа x и y , что $85x + 204y = 17$.

Задача 17. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $105x + 56y = 42$;

б) $104x + 65y = 43$?

Задача 18. а) Можно ли составить батарею напряжением 220 В, соединяя последовательно элементы двух типов: напряжением 6 В и 16 В, – и если можно, то сколько надо взять тех и других?

б) Тот же вопрос, если напряжение элементов 6 В и 15 В.

Задача 19. Можно ли разменять 45 рублей на рублевые, трехрублевые и пятирублевые купюры так, чтобы получить всего 20 купюр?

Основная теорема арифметики

До доказательства основной теоремы сделаем еще один шаг – докажем лемму.

Лемма 3. Если произведение ab делится на c , причем числа b и c взаимно просты, то a делится на c .

Действительно, поскольку у нас $\text{НОД}(b, c) = 1$, то по лемме 2 найдутся такие целые числа x и y , что $1 = bx + cy$. Умножая обе части равенства на a , получаем, что $a = abx + acy$. Так как по условию ab делится на c , то и abx , и, разумеется, acy делятся на c , а значит, и их сумма a делится на c .

Лемма 3 очень часто используется при решении задач, причем иногда совсем «незаметно». Мы, например, опирались на нее в предыдущем пункте при выводе формул, дающих все решения уравнения $119x + 13y = 1$ (там мы выделили соответствующую фразу курсивом).

Задача 20. Докажите, что если число a делится на взаимно простые числа b и c , то a делится на bc .

Задача 21. Какие из следующих утверждений верны:

а) если ab делится на 15, то хотя бы один из сомножителей делится на 15;

б) если ab делится на 17, то хотя бы один из сомножителей делится на 17;

в) если a делится на 6, а b делится на 10, то ab делится на 15;

г) если ab делится на 60, а b взаимно просто с 10, то a делится на 20.

Напомним теперь, что *натуральное число p называется простым, если оно имеет ровно два делителя: p и 1 .*

Если p просто, то для любого целого числа a верно одно из двух утверждений: либо a делится на p , либо a и p взаимно просты (потому что $\text{НОД}(a, p)$ может равняться только p или 1).

Лемму 3 можно сформулировать в частном случае так:

если произведение ab делится на простое число p , то или число a , или число b делится на число p .

Отсюда сразу выводится основная теорема арифметики:

каждое число разлагается на простые множители и притом единственным образом.

Действительно, пусть число раскладывается на несколько множителей и хотя бы один из них не является простым числом, тогда этот множитель сам разлагается на множители; если среди его множителей снова имеется не простой множитель, он опять разлагается на множители, и так далее. Поскольку каждый множитель числа меньше самого числа, такой процесс не может продолжаться бесконечно, и мы обязательно придем к разложению числа на простые множители.

Докажем теперь, что не может быть двух различных разложений числа на простые множители. Предположим, что имеются два разложения числа a : $a = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_k$ ($r \leq k$), где p_i и q_l – простые числа. Так как левая часть равенства делится на p_1 , то и правая его часть должна делиться на p_1 , и значит, одно из чисел q_l должно делиться на p_1 . Но q_l – простое число, значит, $q_l = p_1$. Сократив равенство на общий множитель $q_l = p_1$, обратимся к множителю p_2 и установим аналогично, что он равен некоторому множителю q_l . Сократив равенство на $p_2 = q_l$, обратимся к множителю p_3 и так далее. В конце концов слева сократятся все множители и останется 1 , а так как q_l – целые положительные числа, то и справа не может остаться ничего, кроме 1 . Итак, числа p_i и q_l будут соответственно равны и оба разложения тождественны.

Задача 22. Разложите числа 1971, 1972 и 1973 на простые множители.

Задача 23. а) Докажите, что если m и n взаимно просты и $am = bn$, то существует такое целое k , что $a = kn$, $b = km$

б) Докажите, что если m и n взаимно просты и $x^m = y^n$, то найдется такое целое число z , что $x = z^n$, а $y = z^m$.

ЧИСЛА C_n^k , МНОГОЧЛЕНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ (несколько подходов к одной задаче)

Напомним одну задачу из «Задачника «Кванта», элементарное решение которой было напечатано в «Кванте» № 12 за 1972 год.

М138. Докажите, что если m и n – целые числа и $1 < m < n$, то

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где C_n^k – биномиальные коэффициенты.

Разные доказательства этих тождеств послужат нам удачным поводом для того, чтобы познакомить читателя с некоторыми важными математическими понятиями и фактами, не входящими в школьную программу (конечные разности, интерполяционная формула для многочленов, производная многочлена, степенной ряд экспоненты). Вслед за определениями и теоремами в каждом параграфе читатель встретит слова «вернемся теперь к нашей задаче», а за ними – новое решение задачи М138.

Доказательства теорем можно пропустить, но лучше их разобрать, хотя сделать это нелегко, так как они написаны очень коротко.

Введение. Биномиальные коэффициенты и формулировка задачи

Мы перечислим несколько свойств чисел C_n^k . Каждое из свойств 0.1–0.3 можно принять за определение этих чисел.

0.1. C_n^k – коэффициенты многочлена

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^k a^{n-k} x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (1)$$

0.2. $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; для каждого $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (2)$$

0.3. Для всех n и k ($0 \leq k \leq n$)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (3)$$

где $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$; $0! = 1! = 1$.

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

б) Выведите 0.2 из 0.1, пользуясь тождеством $(a+x)^n = (a+x)^{n-1}(a+x)$.

в) Выведите 0.3 из 0.2, пользуясь методом математической индукции (т.е. проверьте, что если формула (3) верна для $n - 1$, то она верна для n).

г) Проверьте, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Многочлен $a + x$ иногда называют «биномом» (*бином* – то же, что *двучлен*), формулу (1) – формулой «бинома Ньютона», а числа C_n^k – «биномиальными коэффициентами».

Положим в равенстве (1) a равным 1. Получим

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n. \quad (4)$$

одставив сюда $x = -1$, получим

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (5)$$

кажется, что кроме соотношения (5) для чисел C_n^k верны и следующие равенства:

$$\begin{aligned} & -C_n^1 + 2C_n^2 - 3C_n^3 + \dots + (-1)^n n C_n^n = 0, \\ & -C_n^1 + 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + \dots + (-1)^n n^2 C_n^n = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & -C_n^1 + 2^{n-1} C_n^2 - 3^{n-1} C_n^3 + \dots + (-1)^n n^{n-1} C_n^n = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Именно эти равенства требовалось доказать в задаче M138; о них и будет идти речь в конце каждого параграфа.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться короткой записью сумм с помощью значка Σ . Например, формулу (1) можно

коротко записать так: $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^{n-k} x^k$, формулу (4) –

$$1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k, \text{ равенство (5) - } \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k C_n^k = 0 \text{ и, наконец,}$$

равенства (6), которые требуется доказать в задаче М138, —

$$\sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k = 0 \quad (6')$$

при каждом натуральном $m < n$.

§ 1. Последовательности и конечные разности

Пусть на множестве целых неотрицательных чисел $0, 1, 2, 3, \dots$ задана функция f . Это значит, что задана *последовательность*

$$f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$$

Если из каждого члена последовательности f , разумеется, кроме первого, вычесть предшествующий ему член последовательности, то мы получим новую последовательность – *последовательность разностей*

$$f(1) - f(0), f(2) - f(1), f(3) - f(2), \dots$$

Обозначим соответствующую ей функцию через Δf :

$$\Delta f(0) = f(1) - f(0);$$

$$\Delta f(1) = f(2) - f(1); \quad \Delta f(2) = f(3) - f(2) \dots$$

Если проделать эту же операцию – переход от f к Δf – с последовательностью Δf , то мы получим последовательность

$$f(2) - 2f(1) + f(0); \quad f(3) - 2f(2) + f(1), \dots$$

Обозначим ее через $\Delta^2 f$.

Эта последовательность называется *последовательностью вторых разностей для f* . Еще раз взяв разности, получим *последовательность третьих разностей* – $\Delta^3 f$:

$$f(3) - 3f(2) + 3f(1) - f(0), \quad f(4) - 3f(3) + 3f(2) - f(1),$$

и так далее.

Таким образом, по определению

$$\Delta^{n+1}f(x) = \Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x). \quad (7)$$

(Напомним, что аргумент x функций $f, \Delta f, \Delta^2 f, \dots$ принимает целые неотрицательные значения: $x = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим в качестве первого примера постоянную функцию f :

$$f(0) = f(1) = f(2) = \dots = a.$$

Для нее последовательность разностей Δf будет, очевидно, состоять из одних нулей. Кратко это запишем так: $\Delta f \equiv 0$ (при всех x).

Естественно, что и последовательности $\Delta^2 f, \dots, \Delta^n f$ также будут состоять из одних нулей, т.е. $\Delta^n f \equiv 0$.

Если f – линейная функция: $f(x) = ax + b$, т.е. если последовательность представляет собой арифметическую прогрессию

$b, a + b, 2a + b, 3a + b, \dots$, то все члены последовательности Δf будут равны одному и тому же числу a . Отсюда $\Delta^2 f \equiv 0$.

Если f – квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, то Δf – линейная функция (от номера x):

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+1) - f(x) = \\ &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + b.\end{aligned}$$

Тогда $\Delta^2 f$ – постоянная функция: $\Delta^2 f = 2a$. Следовательно, $\Delta^3 f = 0$ и, конечно, $\Delta^n f = 0$ для всех $n > 2$.

Упражнение 1. а) Пусть $f(x) = x^3$. Найдите Δf , $\Delta^2 f$, $\Delta^3 f, \dots$
б) Тот же вопрос, если $f(x) = 2^x$.

Наши наблюдения обобщаются в следующих двух теоремах.

1.1. Число $\Delta^n f(x)$ выражается через значения функции f по формуле

$$\begin{aligned}\Delta^n f(x) &= C_n^0 f(x+n) - C_n^1 f(x+n-1) + \dots + (-1)^n C_n^n f(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k f(x+n-k).\end{aligned}\quad (8)$$

1.2. Если $f(x)$ – многочлен степени $m < n$, то $\Delta^n f = 0$.

Оба утверждения 1.1 и 1.2 доказываются индукцией по n . Для $n = 1, 2, 3$ мы их уже проверили. Предполагая, что они верны для n , доказываем для $n+1$.

1.1. Используя (7), (8) и (2), получаем

$$\begin{aligned}\Delta^{n+1} f(x) &= \Delta^n f(x+1) - \Delta^n f(x) = \\ &= C_n^0 f(x+n+1) - C_n^1 f(x+n) + \dots + (-1)^n C_n^n f(x+1) - \\ &\quad - C_n^0 f(x+n) + \dots + (-1)^n C_n^{n-1} f(x+1) - (-1)^n C_n^n f(x) = \\ &= C_{n+1}^0 f(x+n+1) - C_{n+1}^1 f(x+n) + \dots - (-1)^{n+1} C_{n+1}^n f(x+1) + (-1)^{n+1} C_{n+1}^{n+1} f(x)\end{aligned}$$

1.2. Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_j x^j + \dots + a_m x^m$. Напишем m равенств (они следуют из (4))

$$(x+1)^j - x^j = C_j^1 x^{j-1} + C_j^2 x^{j-2} + \dots + C_j^{j-1} x + 1$$

(здесь $j = 1, 2, \dots, m$). Умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим. Получим: в левой части $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, в правой – некоторый многочлен от $g(x)$ степени не выше $m-1$. Если $m < n$, то $m-1 < n-1$ и по предположению индукции $\Delta^{n-1} g = 0$. Следовательно, $\Delta^n f = \Delta^{n-1}(\Delta f) = \Delta^n g = 0$.

Вернемся теперь к нашей задаче.

Равенство (6'), согласно 1.1, в точности означает, что $\Delta^n f(0) = 0$ для функции $f(x) = x^m$, а это следует прямо из утверждения 1.2.

Задача 1. Пусть $f(x) = a + a_1x + \dots + a_nx^n$. Найдите $\Delta^n f$. Пользуясь этим результатом, вычислите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^n C_n^k.$$

Задача 2. Докажите, что если $\Delta^{n+1}f(x)$ для всех x , то $f(x)$ — многочлен степени не выше n .

Задача 3. Найдите все последовательности f , для которых $\Delta f(x) = \lambda f(x)$, где λ — некоторое число.

§ 2. Многочлены и интерполяционная формула

Мы знаем, что через две точки можно провести единственную прямую. Другими словами, если заданы две пары чисел (α_0, β_0) , (α_1, β_1) , причем $\alpha_0 \neq \alpha_1$, то существует единственный многочлен степени не выше первой $P(x) = ax + b$ такой, что $P(\alpha_0) = \beta_0$ и $P(\alpha_1) = \beta_1$.

Этот факт обобщается следующим образом.

Пусть заданы $n + 1$ различных чисел $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $n + 1$ чисел $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$. Тогда справедливы следующие утверждения.

2.1. *Существует многочлен P степени не выше n такой, что*

$$P(\alpha_i) = \beta_i \text{ (для всех } i = 0, 1, \dots, n). \quad (9)$$

2.2. *Многочлен P определяется единственным образом.*

Для доказательства 2.1 достаточно предъявить такой многочлен. Для этого рассмотрим сначала многочлены

$$D_k(x) = \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1}) \dots (x - \alpha_n)}{(\alpha_k - \alpha_0)(\alpha_k - \alpha_1) \dots (\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \dots (\alpha_k - \alpha_n)} \quad (10)$$

(в числителе и знаменателе по n множителей). Ясно, что

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Умножим теперь $D_k(x)$ на число β_k и сложим все эти многочлены. Для полученного многочлена

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \beta_k D_k(x) \quad (11)$$

выполнены все равенства (9).

Для доказательства 2.2 нам понадобятся две важные теоремы о корнях многочленов.

2.3. Если многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (12)$$

степени не выше n имеет $n + 1$ различных корней, то этот многочлен равен 0, т.е. $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

2.4 (теорема Безу). Если α – корень многочлена $f(x)$, то многочлен $f(x)$ делится на $x - \alpha$, т.е.

$$f(x) = (x - \alpha)g(x), \quad (13)$$

где $g(x)$ – некоторый многочлен.

Доказательство 2.4. Напишем n тождеств

$$(x^j - \alpha^j) = (x - \alpha)(x^{j-1} + x^{j-2}\alpha + \dots + \alpha^{j-2}x + \alpha^{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

умножим их соответственно на коэффициенты a_j и сложим все эти тождества. Получим формулу, справедливую для любого многочлена (12) и любого числа α :

$$f(x) - f(\alpha) = (x - \alpha)g(x),$$

где $g(x)$ – некоторый многочлен. В частности, если $f(\alpha) = 0$, получаем (13).

Доказательство 2.3 проведем индукцией по n . Для $n = 1$ утверждение 2.3 очевидно. Докажем, что если оно верно для $n - 1$, то верно и для n . Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена (12). Тогда, согласно 2.4,

$$f(x) = (x - \alpha_n)g(x),$$

причем многочлен $g(x)$ имеет степень не выше $n - 1$ и имеет n различных корней $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. По предположению индукции, $g(x)$ равен нулю; из (14) следует, что $f(x)$ тоже равен нулю.

Доказательство 2.2. Пусть p_1 и p_2 – два многочлена, для каждого из которых верны равенства (9). Тогда их разность удовлетворяет условиям теоремы 2.3 (многочлен $f(x) = p_1(x) - p_2(x)$ степени не выше n имеет $n - 1$ корней $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$) и поэтому равна нулю, т.е. $p_1(x) = p_2(x)$.

Итак, мы доказали, что через $n + 1$ точку $(\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ можно провести единственную кривую вида

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

и даже привели формулу, позволяющую сразу написать нужный многочлен. Эта формула (11) называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

§ 3. Производная многочлена и кратные корни

Пусть $f(x)$ – многочлен степени n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_kx^k.$$

Тогда по определению многочлен степени $n - 1$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{k=n} ka_kx^{k-1}$$

называется *производной многочлена* $f(x)$. Оказывается верным следующее утверждение.

3.1. Если многочлен $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^{m+1}$, то многочлен $f'(x)$ делится на $(x - \alpha)^m$. Другими словами, если число α является корнем кратности $m + 1$ многочлена $f(x)$, то α является корнем кратности не менее m многочлена $f'(x)$.

Для доказательства 3.1 мы используем такую лемму.

3.2. Если $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, то

$$f'(x) = g(x) + (x - \alpha)g'(x). \quad (16)$$

Доказательство 3.2. Если $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0$, то, как нетрудно проверить, пользуясь определением производной многочлена, и правая, и левая часть равенства (16) равна

$$(b_0 - b_1\alpha) + 2(b_1 - b_2\alpha)x + \dots + (n-1)(b_{n-2} - b_{n-1}\alpha)x^{n-2} + nb_{n-1}x^{n-1}.$$

Доказательство 3.1 проведем индукцией по m . Проверим 3.1 при $m = 1$. Если $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^2$, то $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x - \alpha)$, и, как видно из (16), $f'(x)$ тоже делится на $(x - \alpha)$.

Докажем, что если 3.1 верно для $m - 1$, то оно верно и для m . Пусть $f(x)$ делится на $(x - \alpha)^{m+1}$. Тогда $f(x) = (x - \alpha)g(x)$, где $g(x)$ делится на $(x - \alpha)^m$, и из (16) следует, что $f'(x)$ делится на $(x - \alpha)^m$ ($g'(x)$ делится на $(x - \alpha)^{m-1}$ по предположению индукции).

Упражнение 3. а) Имеет ли многочлен $x^3 - x^2 - 8x + 12$ кратные корни? б) Найдите a, b и c такие, что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ делится на $(x + 1)^2$.

Вернемся теперь к нашей задаче. Равенство $(6')$ означает в точности, что многочлен $f_m(x) = \sum_{k=0}^{k=n} k^m C_n^k x^{k-1}$ имеет число $x = -1$ своим корнем. Докажем более сильное утверждение: *многочлен $xf_m(x)$ имеет число (-1) корнем кратности $n - m$, т.е. делится на $(x + 1)^{n-m}$ (если $m < n$).*

Для $xf_0(x) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k x^k = (1+x)^n$ это очевидно. Для $0 < m < n$ проведем индукцию по m . Пусть $xf_{m-1}(x)$ имеет число (-1) корнем кратности $n - (m-1)$. Тогда согласно 3.1 многочлен

$$(xf_{m-1}(x))' = \left(\sum_{k=0}^{k=n} k^{m-1} C_n^k x^k \right) = \sum_{k=0}^{k=n} k^m C_n^k x^{k-1} = f_m(x),$$

а следовательно, и многочлен $xf_m(x)$ имеет (-1) корнем кратности $n - (m-1) - 1 = n - m$.

Задача 6. Для того чтобы многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

делился на $(x+1)^m$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n = 0,$$

$$-a_1 + 2a_2 - 3a_3 + \dots + (-1)^n na_n = 0,$$

$$-a_1 + 2^2a_2 - 3^2a_3 + \dots + (-1)^n n^2a_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$-a_1 + 2^ma_2 - 3^ma_3 + \dots + (-1)^n n^ma_n = 0.$$

Докажите это.

§ 4. Степенные ряды и экспонента

Формальным степенным рядом называется выражение

$$A(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_mz^m + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — произвольная последовательность чисел (z — как и в записи многочлена, «переменная» буква). Тот же ряд коротко записывается так: $\sum_{m=0}^{m=\infty} a_mz^m$. В частности, если все a_m при $m > n$ равны 0, получается обычный многочлен степени n .

Так же как для многочленов, для степенных рядов естественно определяются операции сложения, умножения, замены переменной. А именно, пусть

$$A(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_mz^m, \quad B(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} b_mz^m, \quad C(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_mz^m,$$

λ — число. Тогда по определению

$$1^\circ) \quad A(z) + B(z) = C(z), \text{ если } a_m + b_m = c_m \text{ для всех } m;$$

$$2^\circ) \quad A(z) \cdot B(z) = C(z), \text{ если } a_mb_0 + a_{m-1}b_1 + \dots + a_{m-k}b_k + \dots$$

$\dots + a_0b_m = c_m$ для всех m ; в частности, $\lambda A(z) = C(z)$, если $\lambda a_m = c_m$;

3°) $A(\lambda z) = B(z)$, если $\lambda^m a_m = b_m$ для всех m .

Нетрудно проверить, что для определенных таким образом операций над формальными степенными рядами выполняются все основные свойства сложения и умножения, которые справедливы для чисел и для многочленов.

Упражнение 4. Найдите произведение:

а) $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)$;

б) $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$.

Назовем *экспонентой* степенной ряд

$$\text{Exp}(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^m}{m!} + \dots = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

Докажем основное свойство этого ряда.

4.1. Для любых двух чисел α и β

$$\text{Exp}((\alpha + \beta)z) = \text{Exp}(\alpha z) \cdot \text{Exp}(\beta z). \quad (17)$$

Нужно проверить, что коэффициенты при z^m (для каждого m) справа и слева совпадают (определение 2°), т.е. что

$$\frac{(\alpha + \beta)^m}{m!} = \frac{\alpha^m}{m!0!} + \frac{\alpha^{m-1}\beta}{(m-1)!1!} + \dots + \frac{\alpha^{m-k}\beta^k}{(m-k)!k!} + \dots + \frac{\beta^m}{0!m!}.$$

Но это равенство прямо следует из формул (1) и (3).

Пользуясь (17), индукцией по k легко доказать равенство

$$\text{Exp}(kz) = (\text{Exp}(z))^k.$$

Вернемся теперь к нашей задаче. Рассмотрим $n + 1$ формальных степенных рядов

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{k^m z^m}{m!} = \text{Exp}(kz) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Умножим k -й ряд соответственно на $(-1)^k C_n^k$ и сложим все эти ряды (для этого достаточно сложить коэффициенты при z^m для всех m). Получим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k \right) \frac{z^m}{m!} &= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \text{Exp}(kz) = \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^{n-k} (\text{Exp}(z))^k = \\ &= (\text{Exp}(z) - 1)^n = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)^n. \end{aligned}$$

Ясно, что этот ряд будет начинаться с члена z^n , т.е. коэффициенты при z^{n-1} , z^{n-2} , ..., z и свободный член этого ряда равны 0. Но это и означает, что верны равенства (6).

Задача 7. Пользуясь последним равенством, найдите сумму

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k k^n C_n^k.$$

Задача 8. По определению

$$A'(z) = \left(\sum_{m=0}^{m=\infty} a_m z^m \right)' = \sum_{m=1}^{m=\infty} m a_m z^{m-1}.$$

Докажите, что $(\text{Exp}(z))' = \text{Exp}(z)$.

Конечно, эта статья трудна для неискушенного читателя, впервые встретившегося с целым рядом непривычных понятий. Для того, чтобы освоиться с каждым из этих понятий, нужно проделать большое число упражнений и прочесть менее формальные и более подробные разъяснения.

Автор надеется, что у некоторых из начинающих читателей возникнет желание продолжить знакомство с этими понятиями, а у более искушенных — подумать, как связаны между собой приведенные четыре доказательства.

Литература

А.О.Гельфонд. Исчисление конечных разностей. — М.: «Наука», 1967.

УПАКОВКА КВАДРАТОВ

Эта заметка посвящена решению одной задачи из «Задачника «Кванта» (M155).

Дано несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площади 2.

Мы приведем два решения этой задачи, основанные на двух разных способах укладки квадратов, и обсудим некоторые ее обобщения. Итак, пусть нам дано несколько квадратов общей площадью 1. Занумеруем их в порядке убывания сторон, т.е. так, чтобы сторона k -го по номеру квадрата была не меньше, чем сторона $(k+1)$ -го ($k = 1, 2, 3, \dots$). Мы должны доказать, что все эти квадраты можно разместить в квадрате со стороной $\sqrt{2}$.

Первое решение. Проведем на плоскости горизонтальный отрезок длины $\sqrt{2}$, а из его концов – вертикальные лучи. В образовавшуюся «полуполосу» (рис.1) мы будем упаковывать квадраты.

Способ упаковки очень прост. Положим первый, самый большой квадрат в левый нижний угол (сторону этого квадрата мы обозначим через x), рядом с ним справа – второй по величине квадрат и так далее до тех пор, пока очередной квадрат не перестанет уместаться в пределах полуполосы. Закончив «первый этаж», строим «перекрытие» – продолжаем верхнюю сторону левого квадрата на всю ширину полосы, на полученном отрезке точно так же строим «второй этаж», затем – третий и так далее, пока не кончатся все квадраты (рис.2).

Теперь для того, чтобы доказать утверждение задачи, мы должны доказать, что высота h (см. рис.2) не превосходит числа $\sqrt{2}$. (Прежде чем читать решение дальше, попробуйте провести это доказательство сами!)

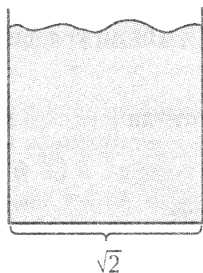


Рис. 1

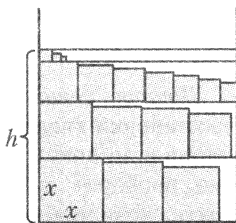


Рис. 2

Для этого, считая величины h и x заданными, оценим снизу сумму площадей квадратиков, упакованных в полуполосу. Пере-

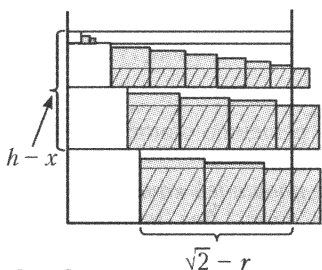


Рис. 3

несем мысленно каждый из квадратиков, прилежащих к левой «стене» (кроме самого нижнего квадрата $x \times x$), в конец предыдущего этажа, как показано на рисунке 3. Из способа построения этажей следует, что все эти квадраты вылезут за правую стену. Теперь продлим горизонтальные стороны каждого из этих новых квадратов влево вплоть до самого левого квадрата

соответствующего этажа (при этом образуются прямоугольники, которые выделены на рисунке 3). Ясно, что сумма площадей всех квадратов (кроме $x \times x$) не меньше, чем сумма площадей выделенных прямоугольников. Поскольку горизонтальное основание каждого из прямоугольников не меньше $\sqrt{2}-x$, а сумма их высот равна $h-x$, то сумма площадей всех прямоугольников не меньше $(\sqrt{2}-x)(h-x)$, следовательно, сумма площадей всех квадратов не меньше $x^2 + (\sqrt{2}-x)(h-x)$.

Но по условию сумма их площадей равна 1. Итак,

$$x^2 + (\sqrt{2}-x)(h-x) \leq 1,$$

откуда

$$h \leq \frac{1-x^2}{\sqrt{2}-x} + x = \sqrt{2} \left[3 - \left(y + \frac{1}{y} \right) \right],$$

где

$$y = 2 - x\sqrt{2}.$$

Следовательно, поскольку величина $y + 1/y$, стоящая в круглых скобках, при любом y не меньше 2,

$$h \leq \sqrt{2}.$$

Второе решение. Если в первом решении описать способ расстановки квадратов было очень легко, а основную трудность составляло доказательство нужной оценки, то во втором решении, наоборот, трудно описать способ упаковки (а оценка будет почти очевидной). Не вполне точные описания приводимой ниже упаковки предложили несколько читателей.

Мы опишем здесь способ упаковки совершенно формально. Описание «алгоритма» — предписания, согласно которому мы предлагаем упаковывать квадраты, — содержится в следующем

абзаце. После того как описанная там операция проделана k раз, в квадрате $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ оказываются размещенными первые k квадратов (мы по-прежнему считаем, что они занумерованы в порядке убывания сторон), а остальная часть квадрата $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ разбита на $(k + 1)$ прямоугольников, которым приписаны определенные номера (от 0 до k). Некоторые прямоугольники объявляются «закрытыми» (это означает, что больше в них не будут вставляться квадраты), а остальные – «открытыми» (в любой открытый прямоугольник помещается $(k + 1)$ -й квадрат). Вначале «прямоугольником № 0» объявляется весь квадрат $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Итак, алгоритм расстановки квадратов: k -й шаг ($k = 1, 2, 3, \dots$). Выбираем из всех не закрытых прямоугольников тот, у которого наибольший номер. (Пусть этот номер – m .) Размещаем в его углу k -й квадрат. Продолжаем сторону этого квадрата, параллельную меньшей стороне прямоугольника m (если стороны прямоугольника равны, выбираем любую из них) так, чтобы часть прямоугольника m , не занятая квадратом k , разбилась на два прямоугольника. Из этих двух прямоугольников мы присваиваем номер k тому, который составляет прямоугольник вместе с квадратом k , а номер m теперь сохраняем за оставшейся частью «бывшего» прямоугольника m (рис.4).

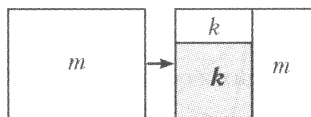


Рис 4

За всеми квадратами и прямоугольниками, кроме прямоугольников m и k , сохраняются старые номера. Если k -й квадрат, который мы разместили, – не последний, то проверим, помещается ли $(k + 1)$ -й квадрат в прямоугольник k и в прямоугольник m , и если нет, то объявляем соответствующий прямоугольник (или оба) закрытым.

(На рисунке 5 для примера показана возможная ситуация после 4-го шага. Для $k = 5$ номер m будет равен 2; темные прямоугольники закрыты).

Нужно еще доказать, что не может встретиться случай, когда окажутся закрытыми все прямоугольники, даже «номер 0». Прежде чем доказать это, заметим, что площадь закрытого прямоугольника номер k меньше, чем площадь квадрата номер k (это – основная идея нашего способа укладки!). Действительно, ясно, что до тех пор, пока меньшая сторона прямоугольника k равна

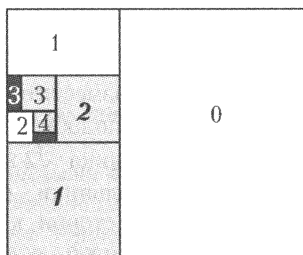


Рис 5

стороне квадрата k , он еще не может быть закрыт (в него влезает даже k -й квадрат).

Теперь предположим, что на некотором n -м шаге прямоугольник 0 , который имел до этого шага размеры $c \times d$ ($c \geq d$), закрыт. Ясно, что на n -м шаге $m = 0$, т.е. все прямоугольники с номерами $m > 0$ закрыты, и их площадь меньше площади соответствующих квадратов.

Пусть u и v – стороны квадратов с номерами n и $n + 1$. Если квадрат $v \times v$ не помещается в прямоугольник $d \times (c - u)$ (рис. 6), то $v \geq c - u$, поэтому

$$2(u^2 + v^2) \geq (u + v)^2 \geq c^2 \geq cd,$$

т.е. сумма площадей n -го и $(n + 1)$ -го квадратов не меньше половины площади прямоугольника $c \times d$. Получается, что уже первые $(n + 1)$ квадратов составляют больше половины площади квадрата $\sqrt{2} + \sqrt{2}$. Противоречие.

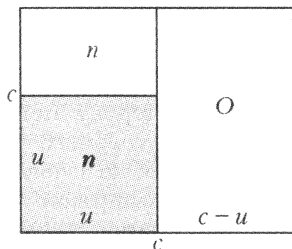


Рис 6

Предлагаем несколько задач, уточняющих и обобщающих утверждение задачи об упаковке квадратов.

1. Два равных квадрата со стороной a нельзя разместить без пересечения в квадрате, сторона которого меньше $2a$.

2. Квадраты, сумма площадей которых равна S и сторона наибольшего из которых равна x , можно упаковать в квадрат со стороной $x + \sqrt{S - x^2}$.

3. Эти квадраты можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geq x$, $b \geq x$ и $ab \geq 2S$.

4. Если любую систему квадратов общей площадью 1 можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, где $a \geq b$, то верно по крайней мере одно из двух условий: 1) $a \geq \sqrt{3}$ и $b \geq 1$; 2) $a \geq \sqrt{2}$ и $b \geq 2/\sqrt{3}$.

Д.Клейтман и М.Кригер доказали, что в прямоугольнике $1 \times \sqrt{3}$ можно разместить любую систему квадратов общей площади 1. Правдоподобно, что аналогичное утверждение верно и для прямоугольника $\sqrt{2} \times 2/\sqrt{3}$.

5. Прямоугольники, сумма площадей которых равна S и наибольшая из сторон которых равна x , можно упаковать в прямоугольник $a \times b$, если $a \geq x$ и $ab \geq 2S + a^2$ 8.

6. Кубы общим объемом V можно упаковать в куб объема $4V$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПРЫЖКОВ

В этой заметке мы решим задачу М190 из «Задачника Кванта» – задачу о блохе, прыгающей по двум прямым. Ее можно решать по-разному. Мы сведем эту задачу к такому вопросу: пусть задано два или несколько перемещений плоскости, оставляющих данную точку O неподвижной (это могут быть повороты или симметрии); какое преобразование плоскости получится, если последовательно выполнить данные преобразования одно за другим?

Поскольку этот вопрос интересен и сам по себе, а не только в связи с решением задачи про блоху, мы будем иногда отклоняться в сторону и предлагать упражнения, не относящиеся непосредственно к задаче М190.

Вначале напомним формулировку задачи.

На плоскости даны две пересекающиеся прямые a и b . В точке A_0 , находящейся на прямой a на расстоянии меньше 1 от прямой b , сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки $B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots$, руководствуясь следующими правилами (рис.1):

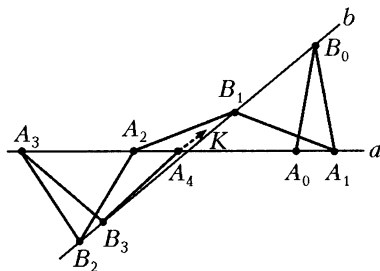


Рис. 1

1) точки A_0, A_1, A_2, \dots лежат на прямой a , точки B_0, B_1, B_2, \dots – на прямой b ;

2) $A_0B_0 = B_0A_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = \dots = 1$;

3) точка A_{n+1} не совпадает с A_n , кроме случая, когда $A_nB_n \perp a$ (и аналогично B_{n+1} совпадает с B_n только если $B_nA_{n+1} \perp b$).

(Условиями 1) – 3) последовательность прыжков определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми a и b измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, т.е. в некоторый момент она попадет в начальную точку A_0 и затем будет последовательно проходить те же самые точки B_0, A_1, B_1, \dots , как в начале пути; а если –

иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

Конечно, интересно разобраться не только в том, «зациклится» путь блохи или нет, но и вообще разобраться, как устроена последовательность точек

$$A_0, B_0, A_1, B_1, \dots, A_n, B_n, \dots, \quad (1)$$

например, научиться по номеру n определять положения точек A_n и B_n . В нашем решении будет получен ответ и на этот вопрос. В дальнейшем вместо слова «блоха» мы часто будем употреблять слово «точка».

Точка прыгает по двум прямым

Естественно начать с эксперимента: провести две прямые, вооружиться циркулем (еще удобнее – измерителем) и, взяв какую-то точку A_0 в качестве начальной, посмотреть, как выглядит «траектория» блохи. На рисунке 1 построен один такой пример: точки $A_0, B_0, A_1, B_1, \dots$ последовательно соединены отрезками, указывающими путь блохи. Можно повторить такой эксперимент, взяв другой угол между прямыми или другую начальную точку. После нескольких проб становится ясно, что точки A_n (и B_n) попадают то по одну, то по другую сторону от точки пересечения K прямых a и b . Правда, строгой периодичности тут нет: например, на рисунке 1 блоха

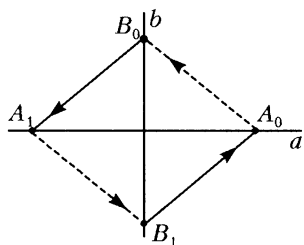


Рис 2

бывает на каждом из лучей с вершиной K иногда подряд два раза, иногда – три. И, конечно, эксперимент не позволяет узнать, попадает ли блоха через несколько шагов в начальную точку A_0 : ведь построения мы можем выполнять только приближенно, так что по чертежу мы никак не сможем уловить разницу между рациональным и иррациональным углом.

(Сразу ясен лишь случай, когда угол – прямой; рис.2.)

Но зато наши рисунки могут подсказать более простую закономерность, определяющую путь блохи, чем правила 1) – 3), сформулированные в условии задачи.

Направления прыжков

Последовательные звенья ломаной – траектории блохи – это векторы единичной длины

$$\overline{A_0B_0}, \overline{B_0A_1}, \overline{A_1B_1}, \overline{B_1A_2}, \dots \quad (2)$$

(Каждый вектор показывает, каков очередной прыжок.)

Заметим, что если мы знаем вектор $\mathbf{u} = \overline{A_nB_n}$ (пусть он нарисован где-то в стороне, на плоскости), то мы сможем определить, где лежат точки A_n и B_n .

Действительно, верна такая

Лемма. Пусть a и b – пересекающиеся прямые. Для любого вектора \mathbf{u} (на плоскости) найдутся две точки A (на прямой a) и B (на прямой b) такие, что вектор \overline{AB} равен данному вектору \mathbf{u} . Точки A и B определяются однозначно.

Доказательство (рис.3). Если мы хотим, чтобы начало вектора лежало на прямой a и этот вектор равнялся \mathbf{u} , то конец его должен попасть на прямую a' , полученную параллельным переносом прямой a на вектор \mathbf{u} (на рисунке 3 прямая a' проведена пунктиром). Поэтому точка B должна лежать в точке пересечения прямой b с прямой a' . После этого легко находится и точка A .

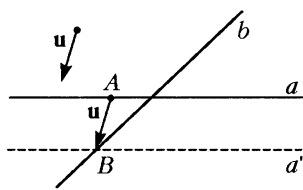


Рис. 3

Упражнение 1. Даны две точки C и D и две прямые a и b . Найдите на прямых a и b соответственно точки A и B такие, чтобы

- середины отрезков AC и BD совпадали;
- четырёхугольник $ABCD$ был трапецией, у которой основание AB вдвое больше основания CD .

Возьмем на плоскости точку O и будем все векторы последовательности (2) откладывать от этой точки. Эти векторы, равные соответственно векторам последовательности (2), обозначим так:

$$\overline{OC_0}, \overline{OD_0}, \overline{OC_1}, \overline{OD_1}, \dots \quad (3)$$

Из леммы следует, что, зная последовательность (3), мы можем восстановить последовательность точек (1): например, зная $\overline{OC_n}$, можно найти и A_n и B_n .

На рисунке 4 изображены «направления прыжков» (3) для последовательности, изображенной на рисунке 1. Заметьте, что

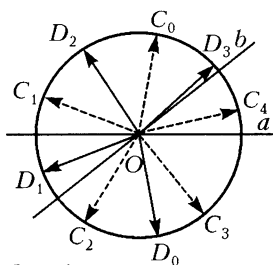


Рис 4

пунктирные векторы \overline{OC}_n (отвечающие прыжкам с прямой a на прямую b ; $n = 0, 1, 2, \dots$) образуют между собой равные углы. Оказывается, что это — общий факт, справедливый для любой последовательности прыжков. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема. Если угол между прямыми a и b равен γ , то угол между векторами \overline{OC}_n и \overline{OC}_{n+1} равен 2γ .

Это — основное соображение в задаче М190. Теорему можно доказать, пользуясь тем, что любые два соседних звена ломаной в последовательности (2) являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника, причем основание этого треугольника попеременно лежит то на прямой a , то на прямой b . Основная трудность доказательства связана с тем, что звенья ломаной могут быть по-разному расположены относительно данных прямых. Например, чтобы доказать теорему для $\gamma = 60^\circ$, пришлось

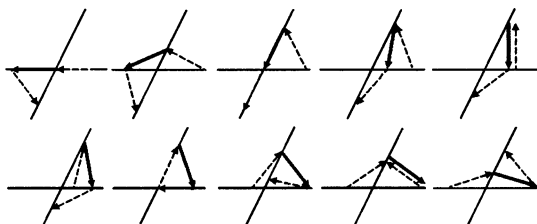


Рис 5

бы рассмотреть 10 случаев, схематично изображенных на рисунке 5 (остальные получаются из них симметрией относительно точки пересечения прямых a и b). Мы поступим иначе: пользуясь понятиями «преобразований», мы приведем общее доказательство, охватывающее сразу все случаи.

Точка прыгает по окружности

Сравним еще раз рисунки 1 и 4. Выделим из них фрагменты, состоящие из двух последовательных звеньев (те самые «равнобедренные треугольники», о которых шла речь выше; рис.6, a , b и 7, a , b). Глядя на эти рисунки, легко сформулировать простое правило, по которому строится последовательность (3).

Обозначим через p и q прямые, проходящие через точку O и параллельные соответственно прямым a и b ; тогда в последова-

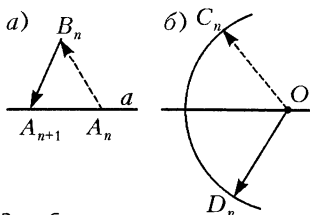


Рис 6

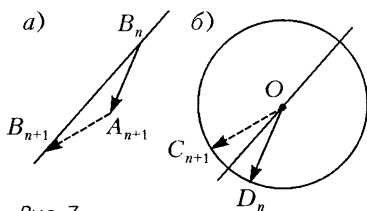


Рис 7

тельности (3) после вектора $\overline{OC_n}$ идет вектор $\overline{OD_n}$, симметричный ему относительно прямой p ; после вектора $\overline{OD_n}$ идет вектор $\overline{OC_{n+1}}$, симметричный ему относительно прямой q (здесь $n = 0, 1, 2, \dots$).

Упражнения

2. Проверьте, что это правило в точности соответствует правилам 1) – 3) в условии задачи (в том числе в «вырожденных» случаях).

3. а) Докажите, что если последовательность (1) попадает в точку A_0 более двух раз, то она будет периодической и при этом некоторая точка C_n совпадает с C_0 .

б) Приведите пример, когда последовательность попадает в точку A_0 дважды: A_1 совпадает с A_0 , но B_1 уже не совпадает с B_0 .

Указание. Для точки A на прямой a существует не более двух векторов, начинающихся в A , кончающихся на прямой b и имеющих длину 1.

Сформулируем теперь еще раз задачу М190 (вернее, ту задачу, к которой она свелась), но будем говорить не о преобразованиях векторов $\overline{OC_n}$ и $\overline{OD_n}$, а о преобразованиях их концов – точек, лежащих на единичной окружности.

Пусть p и q – две прямые, проходящие через точку O . Обозначим через S_p преобразование симметрии относительно прямой p и через S_q преобразование симметрии относительно прямой q . (Мы можем рассматривать эти преобразования, как преобразования всей плоскости на себя; например, S_p каждой точке X плоскости ставит в соответствие точку $S_p(X)$, симметричную точке X относительно прямой p . Но в дальнейшем нам потребуется рассматривать точки на единичной окружности с центром O . Ясно, что преобразования S_p и S_q отображают единичную окружность на себя.) Пусть C_0 – некоторая точка, находящаяся на расстоянии 1 от O , и

$$C_0, D_0, C_1, D_1, C_2, D_2, \dots \quad (4)$$

— последовательность, определяемая условиями

$$D_n = S_p(C_n), \quad C_{n+1} = S_q(D_n) \quad (5)$$

(рис.8). Мы должны доказать, что точка C_n при некотором n совпадает с C_0 в том и только в том случае, если угол γ между прямыми p и q выражается рациональным числом градусов.

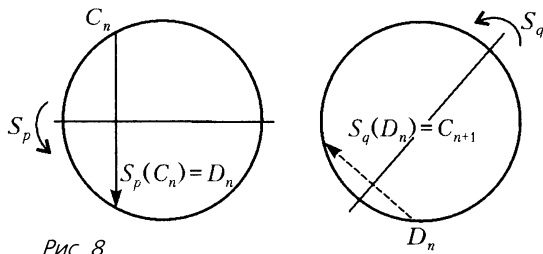


Рис 8

Итак, задача о прыжках по двум прямым свелась к задаче о прыжках по окружности.

А теорема, которую мы должны доказать в первую очередь, утверждает, что $\cup C_n C_{n+1} = 2\gamma$, где γ — угол между p и q .

Произведение преобразований

Наше правило перехода (5) еще упростится, если мы каждые два последовательных прыжка объединим в один: в последовательности

$$C_0, C_1, C_2, \dots \quad (6)$$

каждая последующая точка получается из предыдущей по такому правилу:

$$C_{n+1} = S_q(S_p(C_n)), \quad (7)$$

т.е. надо к C_n применить S_p , а затем к полученной точке — S_q .

Определение. Пусть K и L — два преобразования множества M на себя. *Произведением* преобразований K и L называется такое преобразование R , которое точке X из M ставит в соответствие точку $L(K(X))$. Таким образом, произведение преобразований K и L — это просто результат последовательного выполнения двух преобразований: сначала K , а затем L . Произведение R обозначается так: $R = L \circ K$. Запись K и L именно в таком порядке («справа налево») удобна тем, что для любой точки X имеет место равенство:

$$R(X) = L \circ K(X) = L(K(X)). \quad (8)$$

Мы специально уточнили, в каком порядке записываются «сомножители», потому что для умножения преобразований, вообще говоря, не выполняется равенство $L \circ K = K \circ L$ (см. ниже упражнение 4).

Точно так же определяется произведение трех и большего числа преобразований: $R = R_1 \circ R_2 \circ R_3$ означает, что нужно сделать сначала R_3 , затем R_2 , затем R_1 . Наконец, запись $R = (R_1)^n$ означает, что R — это результат n -кратного применения преобразования R_1 .

Вернемся к нашим S_p и S_q — преобразованиям симметрии относительно прямых p и q . Каково будет их произведение? (Сейчас нам удобнее считать, что S_p и S_q — преобразования всей плоскости на себя.) Ясно, что точка O останется при преобразовании $S_q \circ S_p$ на месте: она переходит в себя и при преобразовании S_p , и при преобразовании S_q . Что происходит с остальными точками?

Наглядно это преобразование можно представить себе так. При преобразовании S_p вся плоскость переворачивается вокруг прямой p и накладывается на себя «другой стороной». После второго преобразования S_q — симметрии относительно прямой q — плоскость снова переворачивается на прежнюю сторону. Ясно, что перемещением плоскости, имеющим неподвижную точку O и не меняющим «ориентации» плоскости (не переворачивающим плоскость на другую сторону), может быть только поворот вокруг точки O . Таким образом, $R = S_q \circ S_p$ — это поворот плоскости на некоторый угол вокруг точки O . На какой именно угол? Для того чтобы ответить на этот вопрос, достаточно взять одну какую-то точку и посмотреть, что произойдет с ней. Пусть угол от прямой p до прямой q равен γ (мы будем отсчитывать углы против часовой стрелки). Возьмем точку E на прямой p (рис.9) и найдем $R(E)$. Ясно, что $S_p(E) = E$: каждая точка прямой p при преобразовании S_p переходит в себя. А затем точка E попадет на прямую, симметричную прямой p относительно прямой q , т.е. повернется вокруг точки O на угол 2γ . Итак, если угол от p до q равен γ , то $R = S_q \circ S_p$ — поворот на угол 2γ . Отсюда следует наша основная теорема:

$$\cup C_n C_{n+1} = 2\gamma.$$

Упражнение 4. Убедитесь в том, что преобразование $S_p \circ S_q$ —

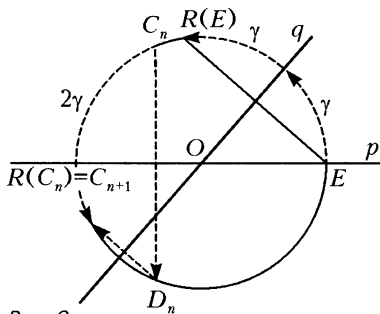


Рис 9

поворот на угол (-2γ) , т.е. поворот на 2γ по часовой стрелке (см. отрезки OD_i на рис.4). Таким образом, если угол γ отличен от нулевого или прямого угла, то $S_p \circ S_q \neq S_q \circ S_p$

Запись поворотов и симметрий окружности

Вычислять произведение преобразований можно и формально. Для этого нужно ввести координаты. Поскольку нас интересуют только перемещения плоскости, имеющие данную точку O неподвижной, мы можем вместо преобразований плоскости говорить об отображениях единичной окружности с центром O на себя — о поворотах и симметриях.

Координату на окружности введем так. Выберем начало отсчета E — одну из точек пересечения прямой p с единичной окружностью. Каждой точке X окружности поставим в соответствие величину угла EOX , отсчитываемого от OE против часовой стрелки и измеряемого в градусах (рис.10); при этом точке X соответствует множество чисел

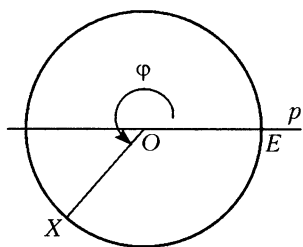


Рис. 10

$$\varphi, \varphi \pm 360^\circ, \varphi \pm 2 \cdot 360^\circ$$

— числам, отличающимся на целое кратное 360° , соответствует одна и та же точка окружности.

Упражнение 5. а) Преобразование S_p — симметрия относительно прямой p — задается формулой $S_p(\varphi) = -\varphi$.

б) Преобразование R^α — поворот на угол α (против часовой стрелки) — задается формулой $R^\alpha(\varphi) = \varphi + \alpha$.

в) Пусть прямая q составляет угол γ с прямой p . Преобразование S_q мы будем далее обозначать через S_γ , чтобы явно указывать, какой угол образует прямая q с «начальной» прямой p . (В частности, вместо S_p мы будем писать S_0 .) Тогда

$$S_\gamma(\varphi) = 2\gamma - \varphi.$$

Замечание. Конечно, $R^{\alpha+360^\circ n} = R^\alpha$ и $S_{\gamma+180^\circ n} = S_\gamma$ для любого целого n (угол, который составляет прямая q с прямой p , определен с точностью до прибавления любого кратного 180°). Это как раз соответствует тому, что φ определено с точностью до прибавления целого кратного 360° .

Упражнение 6. а) Докажите, что $R^\gamma \circ S_0 \circ R^{-\gamma} = S_\gamma$. Каков геометрический смысл этого равенства?

б) Докажите, что $S_{\gamma_1} \circ S_{\gamma_2} = R^{2\gamma_1 - 2\gamma_2}$ (отсюда, в частности, следует, что $S_0 \circ S_\gamma = R^{-2\gamma}$ и $S_\gamma \circ S_0 = R^{2\gamma}$).

в) Проверьте, что $R^\alpha \circ R^\beta = R^{\alpha+\beta}$.

г) Докажите, что $S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}$.

д) Чему равно произведение $R^\alpha \circ S_\gamma$?

Решим для примера задачу г). Пусть точке X соответствует число φ . Тогда точке $S_\gamma \circ R^\beta(X)$ соответствует число

$$S_\gamma(R^\beta(\varphi)) = S_\gamma(\varphi + \beta) = 2\gamma - (\varphi + \beta) = 2\left(\gamma - \frac{\beta}{2}\right) - \varphi,$$

поэтому, как мы знаем (упражнение 5, в)),

$$S_\gamma \circ R^\beta = S_{\gamma - \frac{\beta}{2}}.$$

Упражнение 7. Докажите, что а) $(R^\alpha)^n = R^{an}$; б) $(S_\gamma)^2 = I$, где I – тождественное преобразование (I оставляет все точки на месте).

Окончание решения задачи про блоху

Итак, мы выяснили, что в последовательности (6) точек каждая следующая получается из предыдущей поворотом на угол 2γ , где γ – угол между прямыми p и q . Поэтому C_n получается из C_0 поворотом на угол $2n\gamma$. Для того чтобы C_n и C_0 совпали, необходимо и достаточно, чтобы угол поворота был целым, кратным 360° . Ясно, что если $2n\gamma = 360^\circ k$, где k – целое, то γ измеряется рациональным числом градусов. Обратно, если $\gamma = \frac{p}{q}$ градусов, то для $n = 180^\circ q$ получим $2n\gamma = 360^\circ p$, где p – целое, поэтому $C_n = C_0$.

В заключение еще раз предлагаем вам поупражняться в «прыжках, поворотах и симметриях».

Несколько упражнений

Хотя большинство вопросов сформулировано ниже для конкретных чисел, очень советуем вам попытаться отвечать на аналогичные вопросы в общем виде (для произвольных значений параметров). Иногда это даже проще.

Упражнения

8. Пусть угол γ между прямыми a и b равен 60° , а угол отрезка $\overline{A_0B_0}$ с лучом KA_0 равен 7° . Какой угол будет составлять с этим лучом отрезок $\overline{A_{100}B_{100}}$? Отрезок $\overline{B_{100}A_{101}}$?

9. Пусть угол γ равен одному радиану и $KA_0 = 1$. Выясните, принадлежит ли точка A_{1973} лучу KA_0 или находится на другой половине прямой a .

10. Докажите, что период траектории блохи (наименьшее $n > 1$, при котором $A_n = A_0$) зависит только от угла γ , но не зависит от того, из

какой точки стартует блоха. Чему равен этот период, если $\gamma = 72^\circ$? Попробуйте проверить этот факт «экспериментально».

11. Пусть $\gamma = 37^\circ$. Сколько раз подряд точки последовательности A_0, A_1, A_2, \dots будут встречаться на луче KA_0 (укажите наибольшее и наименьшее значения)?

Если вы захотите решить в общем виде и следующие упражнения — про узоры в круге, — то вам придется, вероятно, воспользоваться той небольшой теорией, которая содержится в упражнениях 6 и 7. Под узором мы понимаем просто некоторое множество точек M , выделенное внутри единичного круга: можно считать, что круг белый, а это множество выкрашено черной краской. Мы говорим, что узор переходит сам в себя при преобразовании P , если $P(M) = M$.

Упражнения

12. Придумайте узор, который

а) переходит в себя при повороте на 180° , но не имеет ни одной оси симметрии;

б) имеет ось симметрии, но не переходит в себя ни при каком повороте (отличном от тождественного преобразования);

в) переходит в себя при повороте на 60° и не имеет оси симметрии;

г) переходит в себя при повороте на 60° и имеет ось симметрии; какое наименьшее число осей симметрии он может иметь?

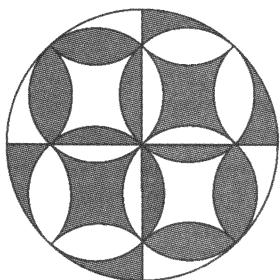


Рис. 11

13. а) Какое количество осей симметрии имеет правильный n -угольник? Узор на рисунке 11?

б) Узор переходит в себя при повороте на 48° . Можно ли утверждать, что он перейдет в себя при повороте на 12° ? На 18° ?

в) Узор имеет две оси симметрии, образующие угол 66° . Какое наименьшее число осей симметрии он может иметь? Перечислите все значения углов, при повороте на которые этот узор заведомо переходит в себя.

ЗАДАЧИ О ГРАФАХ, ИЛИ СКАЗКА «ИВАН-ЦАРЕВИЧ И СЕРЫЙ ВОЛК»

*Посвящается учительнице школы № 7
г. Батуми Медее Илларионовне Жгенти*

Похвальное слово Серому Волку

Читая сказку «Иван-Царевич и Серый Волк»¹, невольно удивляешься: Иван-Царевич практически ничего не делает, а ему достаются все сокровища – Жар-птица, конь златогривый и даже Елена Прекрасная. Все Ивану-царевичу добывает Серый Волк. Однако дело обстоит не совсем так, как кажется на первый взгляд.

Иван-Царевич выдерживает вступительный экзамен – он не спит ночью, как его братья, и благодаря этому видит Жар-птицу. Ему удается даже схватить Жар-птицу за хвост. Правда, в руке у него остается только одно перо.

Поэтому нам кажется, что Серый Волк не случайно обратил внимание на Ивана-Царевича и съел его коня.

Серый Волк – блестящий педагог. Он исподволь берется за обучение Ивана-Царевича. Сначала он заставляет самого Ивана-Царевича попробовать решить все задачи: заполучить Жар-птицу у царя Афрона, потом коня златогривого у царя Кусмана и, наконец, Елену Прекрасную у царя Далмата. Всякая задача становится по-настоящему привлекательной только после того, как попробуешь ее решить. Когда Иван-Царевич под руководством Серого Волка по достоинству оценил все сокровища, Серый Волк сам решает для него все задачи.

В результате Иван-Царевич получает все, что пожелал. Однако приходится ему выдержать еще одно испытание – быть убитым своими же братьями, завистливыми конкурентами, не сдавшими вступительного экзамена. Тут надо еще раз отдать должное Серому Волку, который в этот трудный час спасает Ивана-Царевича. Можно только пожелать каждому трудолюбивому ученику такого руководителя.

Написано в соавторстве с В.Гутенмахером.

¹ Имеется в виду русская народная сказка в пересказе А. Толстого (М., «Детская литература», 1973).

Метод обучения, принадлежащий Серому Волку, понравился нам, и мы хотим изложить несколько задач как продолжение этой сказки.

О том, как Серый Волк показывает, что не всякое желание выполнить можно

Итак, собрался Иван-Царевич жениться на Елене Прекрасной. Да не тут-то было. Съехалось на свадьбу много гостей, и вдруг царь Афрон, царь Кусман да царь Далмат пожаловали. Говорят они:

– Обманул ты нас, Иван-Царевич, все забрал. Ну, да ладно. Загадаем тебе загадки. А не разгадаешь – все назад возьмем.

Первым царь Афрон речь держал, и сказал он так:

– Соберется у меня завтра несколько гостей, да не все они друзья. Скажу только, что у каждого из них число друзей четное. Докажи, что смогу их посадить за круглыми столами так, чтобы каждый гость рядом с друзьями сидел.

Тут Иван-Царевич еще раз Серого Волка позвал, хотя и простился было с ним навечно. Спрашивает Серый Волк:

– Что, Иван-Царевич, сидишь – пригорюнился, голову повесил?

– Как же мне не печалиться, Серый Волк? Как мне гостей за круглыми столами усадить?

Серый Волк отвечает:

– Много я задач решал, да и много из них решил. Но эту задачу не всегда можно решить. Позови, Иван-Царевич, семь гостей твоих, покажу тебе контрпример.

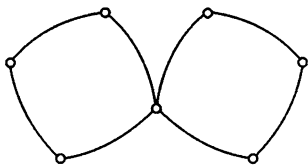


Рис. 1

Позвал Иван-Царевич семь гостей. Тут Серый Волк превратил каждого из них в точку, а эти точки дугами соединил. И увидел тут Иван-Царевич рисунок 1. А Серый Волк этот рисунок так пояснил:

– Если две точки дугой соединены, то, значит, гости, которые в эти точки превратились, друзьями будут. Так вот, знай, что всех этих гостей за круглыми столами никак рассадить нельзя.

Побежал Иван-Царевич к царю Афрону и контрпример Волка показал. Царь, как только контрпример увидел, с испугу где стоял, там и упал. А как пришел в себя, говорит:

– Забыл я сказать, что у всех моих гостей одно и то же число друзей.

С тем Иван-Царевич к Волку и отправился.

– Лиходей твой царь Афрон, – сказал Серый Волк и зубами щелкнул. – Да ладно уж, рассадим его гостей за круглыми столами. Только ты пойдй, узнай сначала, что царь Кусман и царь Далмат хотят. Может, это нам и поможет.

О том, как Иван-Царевич про «перешеек» забыл

Говорит царь Кусман:

– Сослужи мне, Иван-Царевич, службу. Всего в царстве у меня десять городов есть, некоторые из них дорогами соединены. От каждого города четное число дорог отходит. Ты, Иван-Царевич, из града стольного выезжай, все дороги по одному разу объезди и назад в столицу вернись.

Пуще прежнего пригорюнился Иван-Царевич. Пошел он снова к Серому Волку. А Серый Волк ему:

– Не тужи, Иван-Царевич, а послушай мои советы. Выезжай из столицы по одной дороге и дальше езжай, как хочешь, но только так, чтобы по одной и той же дороге два раза не проехать. Гляди, раньше времени в столицу не поворачивай, да еще гляди, чтобы никакая дорога для тебя *перешейком* не стала.

Обрадовался Иван-Царевич и не заметил, как в столице царя Кусмана очутился. Вскочил он на коня златогривого и поскакал по дорогам. Понравился ему совет Волка: езжай, как хочешь, – так и помчался, смотрел только, чтобы по своему следу не ехать!

Долго ли, коротко ли, а приезжает он снова в столицу. Смотрит, на всех дорогах из столицы он след оставил, значит, дальше ему ехать нельзя, а еще несколько дорог не пройдено. Вспомнил он тут последний совет Волка, да ведь забыл спросить, что тот «перешейком» называет! Так и вернулся ни с чем.

Стал ему Серый Волк выговаривать:

– Э, брат, с разумом поехал, да без разума приехал.

Превратил тут Волк города в точки, дугами их соединил так, как дороги идут, и неудачный путь Ивана-Царевича нарисовал. Увидел тут Иван-Царевич рисунок 2.

– Ну, прости же меня, прости, Серый Волк.

– То-то прости... Да уж ладно... Давай лучше послушаем, что царь Далмат скажет.

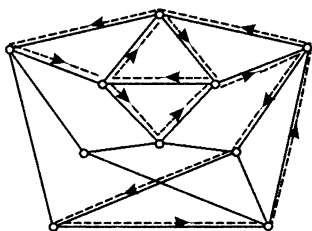


Рис 2

Про чередующиеся цепи

Говорит царь Далмат:

– Живут у меня в замке десять добрых молодцев и десять красных девиц. Знаю я, что каждый добрый молодец с двумя красными девицами знаком и каждая девица двух молодцев знает. Ты, Иван-Царевич, их всех посватай, да так, чтобы незнакомые сосватаны не оказались.

Пришел Иван-Царевич к Серому Волку и рассказывает:

– Дал мне царь Далмат задачу легче легкого.

Усмехнулся Серый Волк:

– Не спеши радоваться, сначала задачу реши, а потом уж говори.

Превратил Серый Волк добрых молодцев в черные точки, а красных девиц – в белые точки, да еще перенумеровал, чтобы не

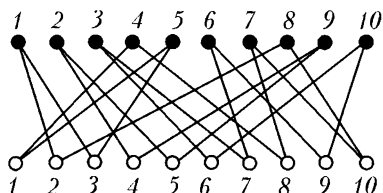


Рис 3

запутаться. Потом эти точки отрезками соединил так, что видно стало, кто с кем дружит. И увидел Иван-Царевич рисунок 3. Начал он молодцев и девиц, как придется, пунктирными линиями на пары разбивать, и получилось у него вот что (см. рис.

4,а): два молодца (7 и 10) одинокими остались и двух девиц (2 и 7) он обидел.

Схватился Иван-Царевич за голову и заплакал. Утешил его Серый Волк:

– Ничего, Иван-Царевич, я твоё решение исправлю. Откуда же знать тебе *метод чередующихся цепей*? Смотри лучше, что я делать буду. Сейчас я еще 7-го молодца посватаю.

Посмотрел Серый Волк рисунки 3 и 4 и начал новый рисунок рисовать. Взял 7-го молодца и со знакомой ему 10-й красной девицей волнистой линией соединил, снова взглянул на рисунок 3, и ее с 8-м женихом волнистым пунктиром связал. Потом от 8-го молодца сплошную волнистую линию провел. Привела эта линия ко 2-й девице, которая еще не посватана (см. рис. 4,б).

Получилась у Серого Волка такая цепь: сплошная волнистая линия, пунктирная волнистая, снова сплошная... Говорит Волк:

– Вот это чередующейся цепью и называется. Сейчас мы сплошные отрезки на пунктирные поменяем, а волнистый пунктир уберем. Остальных, как ты хотел, так и будем сватать. – И превратил Волк рисунок 4,а в 4,в.

— Теперь уж 7-й молодец и 2-я девица обижены не будут. Ну скажи сам, что нам с 10-м молодцем делать, как его посватать?

Взял тогда Иван-Царевич и рисунок 4, *з* нарисовал, а потом сватовство еще раз исправил. Получился у него рисунок 5.

Так Иван-Царевич всех и посватал.

Вдруг слышат они с Волком, как кто-то им с дуба человеческим голосом говорит. Посмотрели, а там Вороненок сидит, сын того Ворона, который живую воду раньше приносил.

— Карр, карр. Можно и проще эту задачу решить — сразу на рисунке 3 обводить отрезки, чтобы линии чередовались: сплошная, пунктирная, сплошная, пунктирная...

Подумал Серый Волк и говорит:

— Правильное замечание Вороненок сделал. Но мой метод тем и хорош, что годится для любых случаев, даже для такого, когда много молодцев и столько же девиц, каждый из них с m девицами знаком, а каждая девица m молодцев знает. Суть его в том, что сватай, как хочешь, а потом чередующимися цепями исправляй.

Потрепал ласково Волк Вороненка.

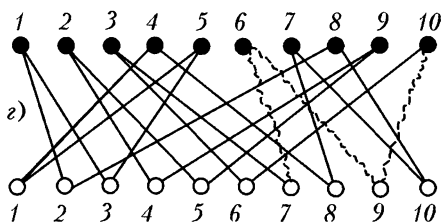
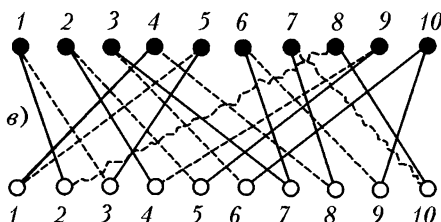
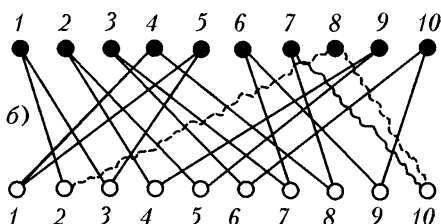
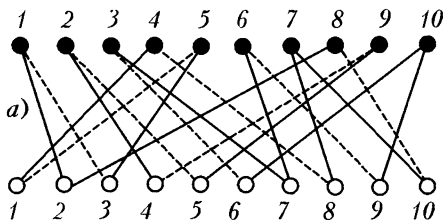


Рис. 4

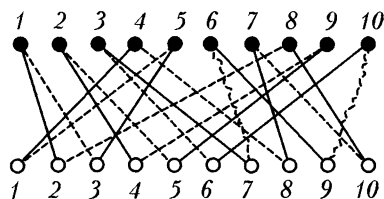


Рис. 5

– Оставайся с нами и слушай, что дальше будет.

Пошел Иван-Царевич к царю Далмату и рисунок 5 показал. Нечего делать, уехал царь Далмат восвояси.

О том, как Иван-Царевич сам догадался, что «перешейком» называется

– Дай-ка, Серый Волк, я сам подумаю, как мне кусманову задачу решить, – и снова Иван-Царевич на рисунок 2 посмотрел.

Долго думал Иван-Царевич и понял, наконец, какая дорога для него роковой стала. Если дороги, по которым он проехал, одну за другой с земли стирать (рис.6), то плохой та дорога оказывается, после «стирания» которой все царство на такие две части разбивается, что из одной в другую никак не проедешь. Значит, на дорогу-перешеек (ее Волк пунктиром нарисовал) сворачивать не надо было.

Стал Иван-Царевич на карте другой путь искать, такой, чтобы ни одна дорога перешейком не была, и нашел. «Эх, – подумал Иван-Царевич, – спасибо Волку, что карту нарисовал и советы хорошие дал». Пошел к царю Кусману, путь показал. Тот и уехал прочь.

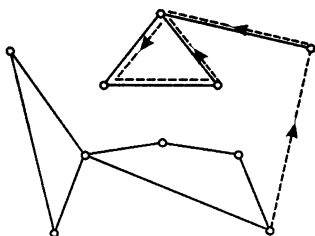


Рис. 6

Сказочное решение

Осталось Ивану-Царевичу первую задачу решить – ту, что царь Афрон загадал. Пошел он в чистое поле и додумался. Похвалил его Серый Волк, к царю Афрону отправил.

Говорит Иван-Царевич :

– Будут у тебя, царь Афрон, n гостей, у каждого из них $2m$ друзей. Объясню я тебе, как этих гостей за круглыми столами усадить.

– Построй каждому гостю город, а если два гостя дружат, то ты дорогу между этими городами проложи. Потом объезжай эти дороги так, как я царство Кусмана объехал. А где ехать будешь, там на дороге стрелку ставь (рис.7).

Получится у тебя, что у каждого города по m дорогам стрелки к нему ведут, а по другим m дорогам стрелки из него выходят. Это потому, что сколько раз ты из города выедешь, столько раз и въедешь.

Рассердился царь Афрон:
 – Не пойму тебя, Иван-Царевич. Мне гостей нужно за круглые столы усадить, а ты про какие-то города рассказываешь.

Отвечает ему Иван-Царевич:

– Потерпи, до конца дослушай. Пусть у каждого твоего гостя сестра есть, так что сколько гостей-добрых молодцев, столько и красных девиц будет. Теперь смотри; если от какого-нибудь города-гостя в другой город-гость стрелка идет, то ты этого гостя с сестрой второго познакомь.

Поскольку из каждого города m стрелок выходит, и в каждый город m стрелок входит, то окажется, что каждый гость с m девицами знаком, а каждая девица m молодцев знает.

Теперь посватай их всех так, как я у царя Далмата сватал. После этого можно и гостей рассаживать. Возьми любого гостя и за круглый стол посади. Справа рядом с ним того посади, с чьей сестрой первый гость посватан. Получится, что первый гость со своим шурином сидит. Справа от второго гостя тоже его шурина посади. Так дальше и рассаживай. Вот у тебя круглый стол и получится.

Если же так не всех гостей усадил, то еще один стол поставить придется. Снова какого-нибудь гостя бери, который за первый стол не попал, а рядом его шурина усаживай. А дальше все делай, как в первый раз.

И Иван-Царевич для наглядности три рисунка 7 показал.

Смотрел, смотрел царь Афрон, премудрости этой не понял, но на слово поверил. С тем к себе и уехал.

А Иван-Царевич поклонился Серому Волку и простился с ним навечно. Женился на Елене Прекрасной, и стали они жить-поживать, да горя не знать.

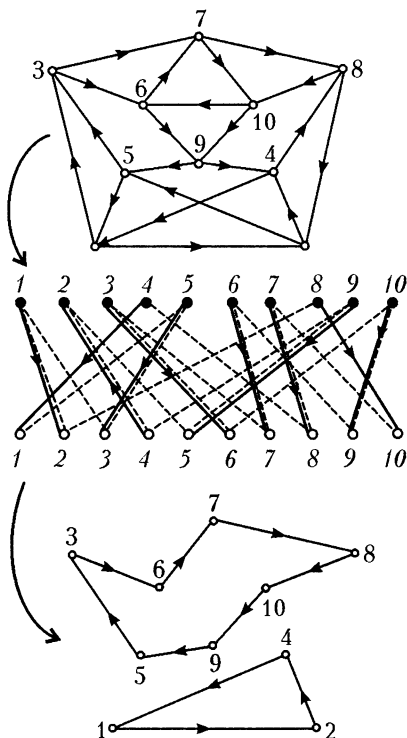


Рис. 7

Послесловие

Задачи, встречающиеся в сказке, относятся к важной области математики – теории графов. *Графом* обычно называется множество точек и соединяющих их дуг. Поводом для написания этой сказки послужила задача М250 из «Задачника «Кванта», представленная здесь как исправленная «задача царя Афрона». Тот факт, что эта задача всегда решается, известен в теории графов как *теорема Петерсена* (Petersen Y., 1891) Путь доказательства этой теоремы представляется нам настолько изящным, что мы назвали его «сказочным решением». Доказательство состоит в последовательном сведении задачи к «задаче царя Кусмана», а затем к «задаче царя Далмата». Утвердительные ответы для этих задач называются соответственно *теоремой Эйлера* и *теоремой «о паросочетании»*; эти теоремы являются основополагающими в теории графов.

В сказке от лица Серого Волка формулируются алгоритмы для решения «задач Кусмана и Далмата». Серый Волк указывает правила, по которым можно решать эти задачи. Однако в сказке нет доказательства того, что эти алгоритмы обязательно приводят к цели. Чтобы получилось полноценное решение задачи М250, нам необходимо иметь эти доказательства.

Докажем сначала *теорему «о паросочетании»* в том виде, в котором Серый Волк сформулировал ее в ответ Вороненку. При доказательстве мы будем пользоваться терминологией, принятой в сказке.

Допустим, что часть линий, соединяющих черные и белые точки, нарисованы пунктиром, однако несколько точек остались «свободными» (т.е. соответствующие им девицы и молодцы – непосватанными), причем все отрезки, выходящие из свободных точек, имеют общие концы с пунктирными линиями. Такую ситуацию можно исправить посредством чередующихся цепей. Поэтому нам нужно показать, что обязательно существуют чередующиеся цепи, ведущие от свободных черных точек к свободным белым точкам. Сейчас мы опишем алгоритм, позволяющий находить эти чередующиеся цепи.

I шаг. Отметим знаком «+» тех молодцев, которые остались непосватанными (т.е. свободные черные точки).

II шаг. Отметим знаком «-» всех знакомых девиц молодцев, помеченных знаком «+».

III шаг. Отметим знаком «+» всех женихов тех девиц, которые отмечены знаком «-».

Затем, не стирая уже поставленных пометок, будем чередовать II и III шаги до тех пор, пока это возможно.

Если в результате этих операций найдется непосватанная девица, помеченная знаком «-», то очевидно, что найдется чередующаяся цепь, ведущая от свободной черной точки к соответствующей свободной белой

точке. Изменяя цвет вдоль этой цепи, мы увеличим число пар «жених – невеста» на единицу. Очевидно, что таким образом мы постепенно посватаем всех девиц и всех молодцев.

Осталось доказать, что *всегда по крайней мере одна из непосватанных девиц окажется помеченной знаком «-»*. (Напомним, что у каждой девицы m знакомых молодцев и у каждого молодца m знакомых девиц.) Допустим противное, т.е. что все свободные белые точки оказались непомеченными. Обозначим через k число плюсов, а через l – число минусов. Ясно, что $l < k$: все помеченные девицы имеют женихов, эти женихи помечены знаком плюс, но кроме них есть еще непосватанные молодцы, также помеченные плюсом.

С другой стороны, должно быть $l \geq k$. В самом деле, число отрезков, отходящих от «плюсов», равно $k \cdot m$. Поскольку все белые концы этих отрезков помечены, то отрезков, отходящих «от «плюсов», должно быть не больше, чем число $l \cdot m$ отрезков, подходящих к «минусам», т.е. $l \geq k$. Итак, мы получили противоречие, и, значит, хотя бы одна помеченная минусом белая точка найдется.

Отметим еще, что эта на первый взгляд искусственная математическая задача является отправной точкой в теории транспортных сетей (см. статью Башмакова М.И. «Паросочетания и транспортные сети», «Квант», 1970, № 4).

Теперь докажем *теорему Эйлера* о том, что *все царство Кусмана можно объехать так, как нужно*. (Отметим, что в задаче Кусмана молчаливо предполагалось, что города царства соединены дорогами так, чтобы из каждого города в любой другой можно было по ним проехать (*связный граф*).)

Представим себе граф-карту царства: города – точки, дороги – дуги. Выйдем из столицы и пойдем по дорогам. Условимся стирать каждую дорогу, а также город, если мы прошли все его дороги.

Прежде чем перейти к доказательству, сделаем два замечания.

а) *Если выйти из столицы и идти по дорогам, пока это возможно, то остановиться можно только в столице.*

В самом деле, *придя* в любой город, мы можем *выйти* из него, так как по условию из каждого города исходит четное число дорог.

б) *На всякой карте городов, из которых выходит нечетное число дорог, – четное число.*

Правила Волка заключались в следующем:

1. *Если из города есть дорога, ведущая прямо в столицу, и есть еще дороги, то нужно идти не в столицу.*

2. *Нельзя идти по такой дороге, стерев которую, мы получим, что из какого-то города уже нельзя попасть в столицу.* (Такая дорога называется *перешейком*).

Если следовать правилу 2, то в любой момент не стертые еще дороги

и города образуют связный граф. Покажем, что всегда можно следовать правилу 2, т.е. что придя в любой город N , мы будем иметь в своем распоряжении дорогу, которая не является перешейком.

Заметим сначала, что если дорога из N оказалась перешейком, то есть еще дороги, выходящие из N . Допустим самое плохое – все эти дороги оказались в данный момент перешейками. Предположим, что мы стерли две из них; одна соединяла город N с городом N_1 другая – с городом N_2 . Очевидно, что в таком случае из города N_1 нельзя попасть в город N_2 , и из каждого из них в данный момент исходит нечетное число дорог. Рассмотрим две части царства: города, в которые можно пройти из N_1 , и города, в которые можно пройти из N_2 . В силу замечания б) в каждой из этих частей должен найтись еще один город с нечетным числом дорог. Но этого не может быть, так как к этому времени на карте с нечетным числом дорог, кроме городов N_1 и N_2 , остается только столица.

Докажем, наконец, что, следуя правилам 1 и 2, мы обязательно обойдем все дороги по одному разу. Допустим, что мы вернулись в столицу, не обойдя всех дорог. Это значит, что на карте остались нестертые города. Рассмотрим тот нестертый город M , который мы прошли последним. Очевидно, что дорога, по которой мы из него вышли, была перешейком: она не вела в столицу (иначе мы попали бы в столицу прямо из M , и город M был бы стерт на карте – см. правило 1), и, стерев эту дорогу, мы отрезали все пути из M в столицу. А в силу правила 2 мы по таким дорогам идти не можем. Получили противоречие.

Тем самым теорема Эйлера доказана полностью.

СЕМЕЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ n -УГОЛЬНИКОВ

Иногда размышления над искусственной частной задачей неожиданно приводят к любопытной и естественной теореме. Об одном таком случае, происшедшем с задачей М248 из «Задачника «Кванта», рассказывается ниже. Хотя задача эта – геометрическая, основными инструментами нам будут служить линейная и квадратная функции – главные орудия школьной алгебры.

...держитесь к задаче возможно ближе, но будьте готовы отойти от задачи настолько далеко, насколько вас вынуждают обстоятельства.

Д. Пойа. Математическое открытие

Формулировка задачи

Вокруг выпуклого n -угольника описан другой выпуклый n -угольник – так, что на каждой стороне второго лежит по одной вершине первого, а затем вокруг второго многоугольника описывается третий – так, что его стороны соответственно параллельны сторонам первого. (Для краткости мы будем говорить, что первый и третий многоугольники параллельны.) Пример такой ситуации изображен на рисунке 1. Требуется выяснить, какие значения может принимать площадь S промежуточного многоугольника, если площади внутреннего и внешнего многоугольников равны Q и P .

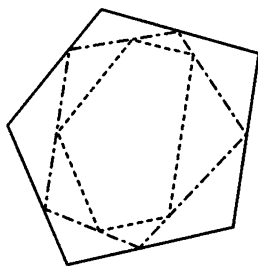


Рис 1

Разумеется, сразу можно утверждать, что $Q < S < P$. Но любые ли три положительных числа P , Q и S , связанные такими неравенствами, могут стать площадями трех многоугольников, описанных в условии?

Попробуем посчитать

Возьмем сразу довольно общий пример тройки четырехугольников, изображенный на рисунке 2. Симметрия рисунка позволяет сравнительно легко выразить все площади

Упражнения

1°. Вода, налитая в аквариум, постепенно испаряется.

а) Каков уровень воды сейчас, если h часов назад он равнялся b см (от дна), а через k часов будет a см?

б) Каков уровень воды в момент времени t , если при $t = 0$ он равен c см, а при $t = 1$ он равен d см?

Ответы. а) $a \frac{h}{h+k} + b \frac{k}{h+k}$. б) $c(1-t) + dt$.

2°. Купец знает, что продать t 100% своего товара он сможет только в том случае, если назначит цену не больше $2b - (a+b)t$ рублей за пуд (a и b – известные положительные числа). Как он может выручить побольше денег?

Ответ. Продать $\frac{b}{a+b}$ 100% товара по цене b рублей за пуд.

Итак, в нашем первом примере Q , P и S могут принимать любые значения, для которых выполнены неравенства $S < P$ и $QP \leq S^2$, или, что то же самое, $\sqrt{QP} \leq S < P$. Действительно, по заданным P и S ($S < P$) мы можем подобрать a , b , k , h так, чтобы выполнялись равенства (1) и (2), например, решив систему уравнений

$$a + b = k + h = \sqrt{P},$$

$$(b - a) \times (k - h) = 2S - P,$$

а затем (если только выполнено (4)!) выбрать t так, чтобы $Q = Q(t)$ приняло нужное значение.

Упражнения

3. Докажите, что если $QP = S^2$, то трапеции на рисунке 2 подобны.

4. Докажите, что если наши параллельные многоугольники – прямоугольники (рис.3), то тоже $Q \leq S^2 P$.

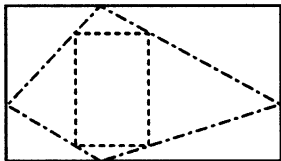


Рис 3

Неужели всегда будет выполняться это странное неравенство:

$$S^2 \geq QP \quad (5)$$

Попытка опровержения

Рассмотрим еще один, менее симметричный пример, когда многоугольник S вырождается в треугольник OAC , а многоугольники P и Q – в параллельные четырехугольники $OABC$ и $OGEH$ (рис.4). Условимся обозначать сами многоугольники теми же буквами, что и их площади: S , P и Q . (Можно представить себе, что на рисунке 4 изображены три n -угольника

щадь Q четырехугольника $OGEH$ (при фиксированных точках O, A, B, C) при этом положении $E = E^*$ максимальна.

Упражнение 5°. Через точку E на диагонали AC трапеции $ABCD$ проводится прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые стороны AB и CD в точках G и H . При каком положении точки E сумма площадей треугольников AGE и $EHС$ минимальна?

Ответ. Когда $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC}$, т.е. когда точка E совпадает с точкой пересечения диагоналей (и $GE = EH$).

Итак, мы знаем, что для $E = E_0$ выполнено равенство $Q = S^2/P$, а для $E = E^*$ площадь больше!

Неудача в попытке построить пример, опровергающий неравенство (5), может постигнуть нас только в том случае, если всегда, при любом выборе точки B внутри треугольника ADC , точка E^* совпадает с E_0 , т.е. выполняется равенство

$$\frac{AE_0}{E_0C} = \frac{M_2}{M_1} \quad (7)$$

(где $M_1 = S_{\Delta AH'C}$, $M_2 = S_{\Delta AG'C}$).

Казалось бы, почему эти отношения должны быть связаны друг с другом?

Подтверждение гипотезы

Однако оказывается, что равенство (7) всегда верно. Докажем его, используя понятие центра тяжести.

Поместим в вершинах параллелограмма $OADC$ массы так, чтобы центр тяжести масс m_A и m_D попал в точку G' , масс m_C и m_O – в точку H' , масс m_O и m_D – в середину диагонали параллелограмма: возьмем

$$m_D = m_O = 1,$$

$$m_A = \frac{M - M_2}{M_2}, \quad m_C = \frac{M - M_1}{M_1},$$

где $M = S_{\Delta ADC}$, M_1 и M_2 – такие, как в (7). Тогда центр тяжести трех масс m_A , m_D , m_C окажется в точке B пересечения прямых AH' и CG' , а значит, центр тяжести всех четырех масс лежит на отрезке OB . С другой стороны, пару m_O и m_D можно заменить парой масс, тоже единичных, расположенных в вершинах A и C параллелограмма $OADC$, поэтому центр тяжести всех четырех масс m_A , m_D , m_O , m_C совпадет с центром тяжести двух $\frac{M}{M_2}$ и $\frac{M}{M_1}$, помещенных соответственно в точки

А и С, и делит отрезок AC в отношении $M_2 : M_1$. Итак, мы доказали, что отрезок OB делит отрезок AC в отношении $M_2 : M_1$, т.е. $E^* = E_0$.

Упражнение 6°. Пусть прямая l пересекает стороны AB и AD параллелограмма $ABCD$ в точках G и H , диагональ AC – в точке E . Докажите, что

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AG} + \frac{AD}{AH}.$$

Таким образом, наша попытка построить пример, опровергающий неравенство (5), провалилась. Но можно взглянуть на ситуацию и с другой точки зрения: из гипотезы, что неравенство (5) всегда выполняется, мы получили неожиданное следствие – равенство (7) – и смогли его доказать. Это обстоятельство, конечно, сильно укрепляет веру в справедливость такой гипотезы.

Мы рассказали только о некоторых попытках опровергнуть неравенство (5). На самом деле их было гораздо больше – здесь выбраны только те, которые удалось изложить коротко (упражнения со значком °, хотя и не имеют прямого отношения к задаче, призваны выделить основные соображения, используемые в наших доказательствах). Последняя попытка, приведшая к равенству (7), в действительности стала переломным моментом в решении задачи: сомнений, что неравенство $S^2 \geq PQ$ всегда выполняется, уже не оставалось, и все силы были направлены на то, чтобы это доказать. Однако и здесь далеко не первая выбранная тропинка вела к цели.

Заманчивые тупики

Вот, например, попытки доказать утверждение задачи, использующие разбиение n -угольника на треугольники и четырехугольники.

Упражнения

7. Из произвольной точки внутреннего многоугольника Q проведем лучи, проходящие через все вершины многоугольника S , и обозначим через S_i , P_i , Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) части площадей S , P и Q , заключенные в углах между соседними лучами (рис.7). Докажите, что для каждого i верно неравенство $S_i^2 \geq Q_i P_i$.

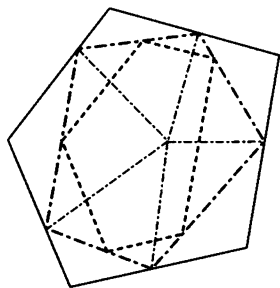


Рис. 7

8. Разобьем «зазор» между контурами многоугольников P и Q на n трапеций T_i (рис.8). а) Докажите, что Q можно разбить на части Q'_i так, что Q'_i лежит между продолжениями боковых сторон трапеции T_i . б) Докажите, что при таком разбиении

для площадей Q'_i , $P'_i = Q'_i \cup T_i$ и $S'_i = (S \cap T_i) \cup Q'_i$ выполняется неравенство $(S'_i)^2 \geq Q'_i P'_i$.

9. Пусть $S_i^2 \geq P_i Q_i$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$. Следует ли отсюда, что $(\Sigma S_i)^2 \geq (\Sigma P_i)(\Sigma Q_i)$?²

Ответ. Нет, не следует.

Попробуем перевести задачу на язык алгебры и доказать полученное неравенство.

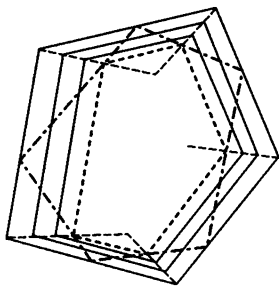


Рис 8

Средний – лишний

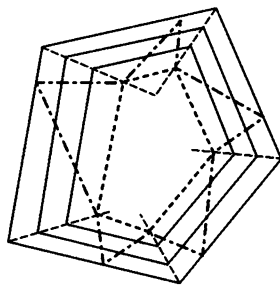
В одном отношении эта попытка оказывается успешной: она позволяет упростить нашу задачу, выбросив из нее упоминание о «промежуточном» многоугольнике S и оставив только P и Q . Вот как это получается.

Обозначим стороны внутреннего многоугольника Q через a_i , параллельные им стороны P – через b_i ($i = 1, 2, \dots, n$; теми же буквами мы будем обозначать и длины сторон); расстояния между прямыми, на которых лежат a_i и b_i , – через h_i . Тогда

$$S = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad P = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i. \quad (8)$$

Уже отсюда видно, что n -угольник S особенно не нужен: если его вершины двигать по сторонам b_i (от этого он превратится в $2n$ -угольник, рис.9), то площадь S не меняется. Введем такие обозначения:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i. \quad (9)$$



Тогда гипотетическое неравенство (5) Рис. 9 запишется так:

$$(Q + R)^2 \geq Q(Q + T),$$

или, после упрощений:

$$R^2 \geq Q(T - 2R).$$

² Здесь Σx_i обозначает сумму $x_1 + \dots + x_n$.

Введем еще одно обозначение:

$$K = T - 2R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) h_i ; \quad (10)$$

и тогда наше неравенство примет тот же вид, что и (5):

$$R^2 \geq QK , \quad (11)$$

— но с той приятной разницей, что теперь все величины относятся только к двум параллельным многоугольникам и их взаимному расположению.

Упражнение 10. Верно ли, что $T > 2R$, т.е. $K > 0$?

Ответ. Не всегда. (Впрочем, если $K < 0$, неравенства (11), а следовательно, и (5) очевидны.)

Попытаемся теперь доказать, что *для любых параллельных выпуклых n -угольников, один из которых лежит внутри другого, неравенства (11) выполняется.*

Сразу же отметим, что это утверждение, по крайней мере на первый взгляд, значительно более сильное, чем (5): ведь не всегда между двумя параллельными многоугольниками можно вставить третий: «щель» между ними может оказаться слишком большой (см. рис.9). Правдоподобно ли предположение (11) во всех случаях?

Из пары – семейство

Мы сейчас увидим, что наше обобщение довольно удачно: неравенство (11) выражает некоторое естественное свойство целого *семейства* параллельных многоугольников.

Получается это семейство из данных двух многоугольников Q и P очень просто. Представим себе, что n точек, совпадавших в момент времени $t = 0$ с вершинами многоугольника Q , начали двигаться — каждая со своей постоянной скоростью — так, чтобы в момент времени $t = 1$ попасть в соответствующие вершины многоугольника P (рис.10). В любой момент времени t (по крайней мере между 0 и 1) эти n точек будут, очевидно, вершинами выпуклого многоугольника, параллельного Q и P . Обозначим этот многоугольник (а также его площадь) через $F(t)$. Поскольку длины сторон n -угольника $F(t)$ и их расстояния от параллельных сторон Q изменяются

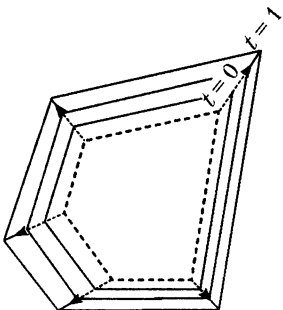


Рис 10

со временем равномерно, имеем

$$F(t) = Q + \sum_{i=1}^n \frac{(a_i(2-t) + b_i t) h_i t}{2} = Q + 2Rt + Kt^2. \quad (12)$$

Мы видим, что $F(t)$ выражается, как функция времени t , квадратным трехчленом; неравенство же (11) означает, что дискриминант этого трехчлена $R^2 - QK$ должен быть больше или равен нулю. Неотрицательность дискриминанта эквивалентна утверждению, что трехчлен $F(t)$ имеет вещественный корень (но, конечно, этот корень никак не может оказаться на отрезке $[0, 1]$, где $F(t) > 0$ по самому определению).

Упражнения

11. Докажите, что дискриминант квадратного трехчлена

$$F^*(t) = F(\alpha + \beta t) = (Q + 2R\alpha + K\alpha)^2 + 2(R + K\alpha)\beta t + K\beta^2 t^2$$

имеет тот же знак, что и дискриминант $F(t)$ (здесь α и β — любые числа, $\alpha \neq 0$).

Замечание. Замена t на $\alpha + \beta t$ означает просто выбор другого начала отсчета и другой единицы масштаба на оси t . Отсюда следует, что неотрицательность дискриминанта — это свойство всего семейства $F(t)$ параллельных многоугольников, не зависящее от того, какие именно два из них $Q = F(0)$ и $P = F(1)$ соответствуют $t = 0$ и $t = 1$.

12°. Со дна колодца глубиной h рабочий бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью v . Вылетит ли камень из колодца?

Ответ. Да, если дискриминант трехчлена $y(t) = -h + vt - (gt^2)/2$ положителен (g — ускорение свободного падения камня): $v^2 > 2gh$.

Итак, мы облекли нашу гипотезу (5) в форму следующей теоремы:

Пусть прямые, на которых лежали стороны выпуклого n -угольника, в момент времени $t = 0$ начинают равномерно двигаться — так, что каждая перемещается со своей скоростью, оставаясь параллельной первоначальному положению, и все они до момента $t = 1$ по-прежнему являются сторонами выпуклого n -угольника $F(t)$. Тогда:

1) Площадь $F(t)$ как функция t выражается квадратным трехчленом:

$$F(t) = Q + 2Rt + Kt^2 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

2) Дискриминант этого трехчлена неотрицателен:

$$R^2 - QK \geq 0.$$

3) Дискриминант равен нулю в том и только том случае,

если n -угольник не меняет со временем своей формы (остается подобным первоначальному).

Теорему-то мы сформулировали... Но вот верна ли она – хотя бы для треугольников?

Семейство треугольников

Два треугольника с параллельными сторонами обязательно подобны, а три прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке (рис.11).

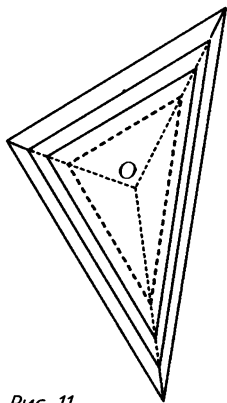


Рис. 11

Последнее утверждение становится очевидным, если представить себе, что одни из треугольников приподнят иад плоскостью чертежа – перенесен в параллельную плоскость: тогда три плоскости, проходящие через пары параллельных сторон треугольников, – плоскости граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат наши треугольники, – пересекаются в одной точке. В этой точке будут пересекаться и прямые, соединяющие вершины треугольников, – продолжения боковых ребер усеченной пирамиды. Спроектировав всю картину вновь на плоскость чертежа, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке O .

Семейство параллельных треугольников, заданное для моментов времени t от 0 до 1, можно естественным образом продолжить на всю ось t «от минус бесконечности до плюс бесконечности»: в некоторый момент $t = t_0$ треугольник обрат-

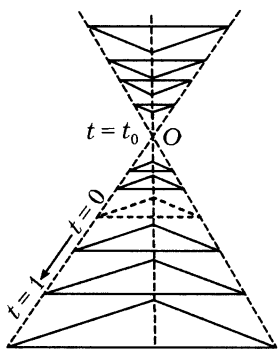


Рис. 12

тится в точку O , а затем будет вновь расти; при этом его положения до момента t_0 и после t_0 соответственно симметричны относительно точки O . (На рисунке 12 изображен случай, когда точка O лежит вне треугольников; наши рассуждения применимы и к этому случаю: в формулировке теоремы мы предусмотрительно не оговаривали того, в какую сторону – вне или внутрь многоугольника – должны двигаться прямые; позже мы увидим, что это несущественно.) Площадь треугольника в момент времени

$t = t_0$ обращается в нуль, а при любом t пропорциональна квадрату линейных размеров, т.е. пропорциональна квадрату разности $(t - t_0)$: $F(t) = c(t - t_0)^2$, где c – постоянное положительное число.

Дискриминант такого квадратного трехчлена равен нулю, и, значит, все три пункта нашей теоремы в случае $n = 3$ выполняются безоговорочно.

Упражнения

13. Докажите, что прямые, соединяющие соответствующие вершины двух параллельных многоугольников, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда многоугольники подобны.

14°. Четыре точки движутся по плоскости равномерно и прямолинейно (каждая – по своей прямой и со своей скоростью). Известно, что первая и вторая точки встречаются с каждой из остальных. Докажите, что третья и четвертая точки встречаются между собой.

15. Проверьте справедливость теоремы для случая, когда исходный многоугольник – параллелограмм.

16°. Проверьте, что нашу теорему можно сформулировать так: если в аквариуме с плоскими наклонными стенками (каждая из $n \geq 3$ стенок имеет свой наклон) вода равномерно испаряется, то скорость испарения воды $S(t)$ в момент времени t выражается квадратным трехчленом от t ; его дискриминант неотрицателен, причем равен 0 в том и только в том случае, если плоскости стенок пересекаются в одной точке.

Осталось самое главное (и трудное): доказать теорему для произвольного $n \geq 4$.

Было бы очень соблазнительно и в общем случае – для любого n – продолжить нашу положительную функцию $F(t)$, определенную первоначально для $t \in [0, 1]$, на всю ось t и доказать, что при некотором $t = t'$ ее значение будет отрицательным или равным нулю – отсюда следовало бы, что дискриминант трехчлена $F(t)$ неотрицателен. Но сделать это сразу для произвольного n трудно. Поэтому воспользуемся индукцией.

Приклеим уголок

Предположим, что при некотором $n \geq 3$ наша теорема доказана, и докажем ее справедливость для семейства параллельных $(n + 1)$ -угольников, представив $(n + 1)$ -угольник как n -угольник с отрезанным углом.

Лемма. У любого m -угольника ($m \geq 4$), за исключением параллелограмма, найдутся два соседних угла, сумма которых больше 180° .

Действительно, выписав все m сумм двух соседних углов многоугольника и сложив эти m слагаемых, мы получим удвоенную сумму всех m углов: $2 \cdot 180^\circ (m-2)$; поэтому хотя бы одно из m слагаемых не меньше

$$2 \cdot 180^\circ \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 180^\circ \left(2 - \frac{4}{m}\right) \geq 180^\circ.$$

Равенство возможно только если $m = 4$ и каждое из (четырех) слагаемых равно 180° .

Возьмем теперь любой $(n+1)$ -угольник из данного семейства.

Можно считать, что наш $(n+1)$ -угольник — не параллелограмм (этот простой случай разобран в упражнении 15). Пользуясь леммой, продолжим две стороны $(n+1)$ -угольника так, чтобы снаружи образовался треугольник, составляющий вместе с $(n+1)$ -угольником выпуклый n -угольник (рис. 13). Обозначим площади $(n+1)$ -угольника, треугольника и их объединения в момент времени t ($0 \leq t \leq 1$) через $F_{n+1}(t)$, $F_\Delta(t)$ и $F_n(t)$ соответственно. Тогда

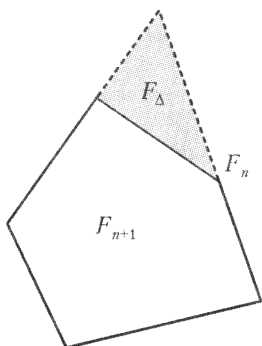


Рис 13

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) - F_\Delta(t). \quad (14)$$

По доказанному, $F_\Delta(t)$ — квадратный трехчлен, неотрицательный при всех вещественных t . По предположению индукции $F_n(t)$ — квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом, т.е. существует t' , при котором $F_n(t') \leq 0$. Значит, $F_{n+1}(t)$ — тоже квадратный трехчлен от t (причем равенство (14) позволяет определить его для всех значений t !) и $F_{n+1}(t') \leq 0$, т.е. дискриминант его неотрицателен.

Этот дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда все три трехчлена имеют один и тот же кратный корень $t = t_0$ (см. (13)). При этом, по предположению индукции, n -угольник $F_n(t)$ остается подобным самому себе, стало быть, величина $\sqrt{F_n(t)}$ и длины всех сторон n -угольника $F_n(t)$ пропорциональны $|t - t_0|$. То же самое верно и для $F_\Delta(t)$, а следовательно, и для $F_{n+1}(t)$. Обратное очевидно: если сохраняет форму

$F_{n+1}(t)$, то ее сохраняет каждый из многоугольников $F_n(t)$ и $F_\Delta(t)$. Теорема доказана.

Упражнения

17. Постройте пример семейства невыпуклых пятиугольников, для которых дискриминант трехчлена $F(t)$ будет неположительным.

18°. Докажите, что:

а) для любых вещественных $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$

$$(p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n)^2 \leq (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2);$$

б) $(p_1q_1 - p_2q_2 - \dots - p_nq_n)^2 \geq (p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2)(q_1^2 - q_2^2 - \dots - q_n^2)$,

если обе скобки справа неотрицательны.

В каких случаях достигаются равенства?

19. Каков ответ в задаче, сформулированной в начале статьи?

20. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника $P^2 > 4\pi S$, где P – периметр, S – площадь многоугольника («изопериметрическое неравенство»).

В заключение отметим, что теорема, к которой мы пришли, имеет целый ряд интересных обобщений и следствий. Многие из них, относящиеся к пространству любой размерности (теорема Брунна, 1887 г.; неравенства Брунна–Минковского), обсуждаются в книге *Г. Хадвигера* «Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии» («Наука», 1966 г.), где наши семейства параллельных многоугольников называются *линейными семействами или линейными пучками* множеств.

Чтобы оценить площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если S – площадь многоугольника, N_1 – число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и N_2 – число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хотя одну общую точку, то $N_1 \leq S \leq N_2$. (Этот факт можно использовать для того, чтобы дать точное определение площади многоугольника и других фигур.)

Мы будем рассматривать ниже только такие многоугольники, все вершины которых лежат в *узлах* клетчатой бумаги – в точках, где пересекаются линии сетки. Оказывается, что для таких многоугольников можно указать простую формулу:

$$S = \frac{r}{2} + i - 1,$$

где S – площадь, r – число узлов, которые лежат на границе многоугольника (т.е. на сторонах и в вершинах), i – число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

Эту формулу называют иногда «*формулой Пика*» – по имени математика, открывшего ее в 1899 году. (Впрочем, нельзя быть уверенным в том, что эту естественную формулу, допускающую целый ряд различных доказательств, не придумал никто раньше.)

В нашей заметке и доказательство, и применения формулы Пика отчасти будут связаны с некоторыми задачами из «Задачника «Кванта».

Простые треугольники

Напомним, что мы рассматриваем только многоугольники, – в частности, треугольники – с вершинами в узлах клетчатой бумаги; каждый раз это специально не оговаривается. Лист клетчатой бумаги мы считаем бесконечным во всех направлениях, клетки – квадратами со стороной 1.

Площадь любого треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив ее как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников,

стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершины нарисованного треугольника. Прodelав это, например, для треугольников, изображенных на рисунке 1, вы убедитесь, что площадь получается всегда равной «полуцелому» числу – числу вида $m/2$, где m – целое.

Назовем треугольник *простым*, если ни внутри него, ни на его сторонах нет узлов сетки, за исключением вершин. (Такое название выбрано потому, что любой другой треугольник можно составить из простых; это одно из тех утверждений, которые понадобятся нам ниже.) Обратите внимание, что все простые треугольники на рисунке 1 имеют площадь $1/2$. Мы увидим, что это не случайно.

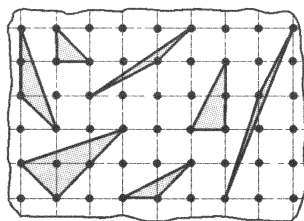


Рис. 1

В решении задачи М226, опубликованной в «Кванте» №6 за 1974

год, читателям предлагалось подумать над такой задачей. *Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 2; ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги).* В каких

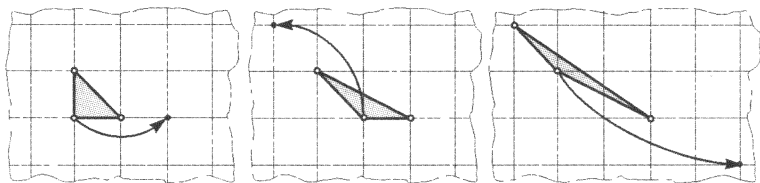


Рис. 2

тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

Назовем треугольник *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трех вершинах одной клетки; *прыжком* будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

Теорема 1. *Следующие три свойства треугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги эквивалентны друг*

другу:

- 1) *треугольник имеет площадь $1/2$;*
- 2) *треугольник прост;*
- 3) *треугольник достижим.*

В справедливости этой теоремы вы можете убедиться, доказав следующие 12 утверждений. Звездочкой отмечены те, к доказательству которых имеются указания в конце книги. Остальные – почти очевидны, если доказывать их в таком порядке:

$$\begin{array}{ccccc} 3 \Rightarrow 4 & & 1 \Rightarrow 2 & & 10 \\ & \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow \\ 5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 12 \end{array}$$

1. Площадь треугольника при прыжке не меняется.

2. Любой достижимый треугольник имеет площадь $1/2$.

3*. Если достроить простой треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то ни внутри, ни на сторонах этого параллелограмма не будет узлов (не считая вершин).

4*. Из простого треугольника при прыжке получается простой.

5*. У простого треугольника один из углов – тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольника, у которого три вершины принадлежат одной клетке; такой простой треугольник – со сторонами $1, 1, \sqrt{2}$ – мы будем называть *минимальным*).

6. Из любого простого не минимального треугольника можно одним прыжком получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

7*. Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный.

8. Любой простой треугольник достижим.

9. Любой простой треугольник имеет площадь $1/2$.

10*. Любой треугольник можно разрезать на простые.

11. Площадь любого треугольника равна $m/2$, причем при любом разрезании его на простые их количество равно m .

12. Любой треугольник площади $1/2$ – простой.

Ясно, что из утверждений 2, 8 и 12 вытекает теорема 1.

Докажите еще несколько свойств простых треугольников.

13. Для любых двух узлов A и B решетки, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC – простой.

14. Узел C в предыдущей задаче можно всегда выбрать так, что угол ACB будет тупым или прямым.

15. Параллелограмм тогда и только тогда порождает решетку, состоящую из всех узлов клетчатой бумаги, когда каждый из треуголь-

ников, на которые его делит диагональ, – простой.

То же самое свойство можно сформулировать так.

16. Треугольник ABC – простой тогда и только тогда, когда всевозможные треугольники, полученные из ABC параллельными переносами, переводящими узел A в различные узлы решетки, не накладываются друг на друга (рис.3).

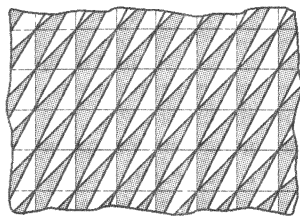


Рис. 3

Вернемся, теперь к задаче про трех кузнечиков. Пусть кузнечики в начальном положении занимают какой-то определенный (а не произвольный) минимальный треугольник – в первоначальной формулировке задачи именно это и предполагалось. Поскольку каждый кузнечик смещается при прыжке обязательно на четное число клеток по горизонтали и вертикали, то он обязательно попадает в узел «своей» решетки с размером клеток 2×2 . На рисунке 4 три из четырех «подрешеток», составляющих всю решетку, раскрашены в разные цвета (каждый кузнечик прыгает в узлы своего цвета), а четвертая – того же цвета, что и линии сетки.

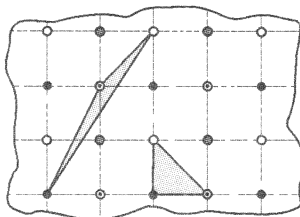


Рис. 4

Согласно теореме 1 кузнечики могут одновременно попасть в вершины простого треугольника.

Отсюда вытекает еще одно интересное свойство этих треугольников.

17. Если решетку – узлы клетчатой бумаги – разбить на четыре подрешетки с клетками 2×2 (рис.4), то вершины простого треугольника обязательно попадут в три *разные* подрешетки (все три имеют *разный* цвет).

Теперь уже нетрудно доказать следующие два утверждения, дающие ответ к задаче о трех кузнечиках (в том случае, когда начальный треугольник фиксирован; рис.4).

18. Три кузнечика могут одновременно попасть в те и только те тройки точек, которые служат вершинами простого треугольника и имеют тот же цвет, что и соответствующие вершины начального треугольника.

19. Два кузнечика могут одновременно попасть в те и только те пары узлов соответствующих цветов, на отрезке между которыми нет других узлов.

Триангуляция многоугольника

Мы подробно изучили частный вид многоугольников на клетчатой бумаге, которому в формуле Пика соответствуют значения $i = 0$, $r = 3$, $S = 1/2$. Но от этого частного случая можно перейти сразу к самому общему, воспользовавшись теоремой о разрезании на треугольники произвольного многоугольника (клетчатая бумага больше не нужна).

Пусть на плоскости задан некоторый (не обязательно выпуклый) многоугольник и некоторое конечное множество K точек,

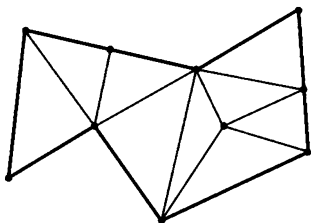


Рис 5

лежащих внутри многоугольника и на его границе (причем все вершины многоугольника принадлежат множеству K). *Триангуляцией с вершинами K* называется разбиение данного многоугольника на треугольники с вершинами в множестве K такое, что каждая точка из K служит вершиной каждому из тех треугольников триангуляции, которым эта точка принадлежит (т.е. точки из K не попадают внутрь или на стороны треугольников, см. рис.5).

Теорема 2. а) *Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на треугольники, причем количество треугольников будет равно $n - 2$. (Это разбиение – триангуляция с вершинами в вершинах n -угольника.)*

б) *Пусть на границе многоугольника отмечено r точек (включая все вершины), внутри – еще i точек. Тогда существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках, причем количество треугольников такой триангуляции будет равно $r + 2i - 2$.*

Разумеется, а) – частный случай б), когда $r = n$, $i = 0$. Доказательство этой теоремы мы снова разобьем на ряд простых утверждений.

20*. Из вершины наибольшего угла n -угольника ($n > 3$) всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

21. Если n -угольник разрезан диагональю на p -угольник и q -угольник, то $n = p + q - 2$.

22. Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на $n - 2$ треугольника.

23. Сумма углов n -угольника равна $180^\circ (n - 2)$.

24. Для любого треугольника, внутри и на границе которого отмечено несколько точек (в том числе – все три его вершины), существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках.

25. То же самое верно и для любого n -угольника.

26. Число треугольников триангуляции равно $r + 2i - 2$, где i и r – количество отмеченных точек соответственно внутри и на границе многоугольника.

Отсюда вытекает теорема 2.

27. Выведите из теорем 1 и 2 формулу Пика: $S = r/2 + i - 1$.

Прием, который удобно использовать в доказательстве утверждения 26 – подсчет суммы углов, – помогает и при решении других комбинаторных задач по геометрии, в частности, задач про разбиение многоугольника. Приведем еще два примера.

Назовем разбиение n -угольника на несколько многоугольников *правильным*, если каждая вершина одного из многоугольников разбиения служит вершиной всех других многоугольников разбиения, которым она принадлежит.

28. Если из вершин k -угольников, на которые разбит правильным образом n -угольник, i вершин лежат внутри и r – на границе k -угольника, то количество k -угольников равно

$$m = \frac{r + 2i - 2}{k - 2}.$$

29 (вариант «теоремы Эйлера»).

Если N_0 точек плоскости и N_1 отрезков с концами в этих точках образуют многоугольник, правильно разбитый на N_2 многоугольников, то (рис.6) $N_2 - N_1 + N_0 = 1$.

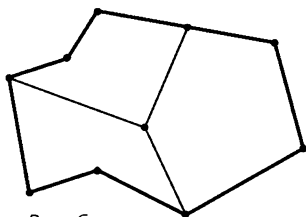


Рис 6

Несколько задач

Применения формулы Пика в основном связаны не с подсчетом площадей конкретных многоугольников, а с различными задачами и теоремами о ломаных на клетчатой бумаге.

30. Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так обстоит дело, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы вершины лежали в узлах.

31. Пусть A и B – два узла клетчатой бумаги, из которых второй на p клеток правее и на q – выше первого (т.е. расстояние между узлами равно $\sqrt{p^2 + q^2}$). Чему равно расстояние до прямой AB от ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

32. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую наибольшую длину она может иметь?

б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1.)

Задача а) разбиралась в «Кванте» №5 за 1974 год – она имеет номер М220 в «Задачнике «Кванта». Здесь мы приведем другое решение. Но начнем с задачи б)

Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей; по условию все они лежат на границе многоугольника). Перейдем к задаче а). На рисунке 7 приведен пример пути короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может.

На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим, как на диагонали, квадрат 1×1 . Одна половинка

этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но общая площадь, занятая такими половинками, не превышает $49 - 31 = 18$, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги. Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

Итак, *ответы* к задаче 32:

а) $28 + 36\sqrt{2}$; б) 31.

33. Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать? (рис.8).

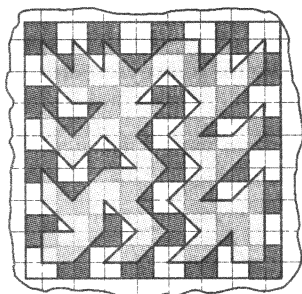


Рис. 7

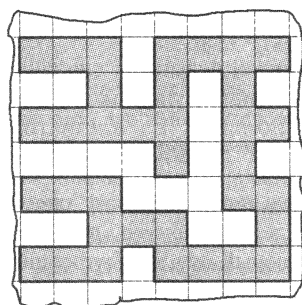


Рис. 8

В этой заметке рассказано о некоторых любопытных последовательностях дробей и решена задача М298 из «Задачника «Кванта». Хотя в конце от читателя требуется знакомство с методом координат, векторами и принципом математической индукции, но большая часть заметки будет понятна даже тем, кто лишь недавно познакомился с дробями. Автор надеется, что старшеклассники и учителя найдут здесь удобный материал для занятий с учениками 5–6 классов. Упражнения включают существенную часть содержания статьи.

1. Ряды Фарея. Наблюдения

Выпишем все правильные дроби, у которых знаменатель не больше 7:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$$

(мы пропустили *сократимые* дроби: $\frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$ и $\frac{4}{6}$ – из дробей, представляющих одно и то же число, мы выбираем одну дробь, а именно ту, у которой числитель и знаменатель наименьшие).

Теперь запишем те же дроби в порядке возрастания:

$$\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}. \quad (1)$$

Проверьте, что в ряду (1) каждая дробь действительно больше предыдущей:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{6 \cdot 7}, \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5 \cdot 6}, \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5}, \quad \frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 7}, \dots$$

При этом соблюдается интересная закономерность: *числитель разности двух соседних дробей всегда получается равным единице, точнее,*

А. Для любых двух соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ $\left(\text{где } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \right)$ выполняется равенство

$$bc - ad = 1.$$

Какие еще закономерности присущи ряду дробей (1)?

Нетрудно обнаружить, что сумма двух дробей, симметрично стоящих в этом ряду, равна 1. Интересно, заметил ли читатель, что

Б. Каждая дробь получается из соседних с ней двух дробей следующим образом: надо сложить их числители и разделить полученное число на сумму знаменателей.

В самом деле,

$$\frac{1}{6} = \frac{1+1}{7+5}, \quad \frac{1}{5} = \frac{1+1}{6+4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{1+2}{5+7}, \quad \frac{2}{7} = \frac{1+1}{4+3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{2+2}{7+5},$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1+3}{3+7}, \quad \frac{3}{7} = \frac{2+1}{5+2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{3+4}{7+7}$$

– и так далее!

Таблица 1. Ряды Фарея

F_1																			
F_2	$\frac{0}{1}$											$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{1}$				
F_3	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$				
F_4	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$				
F_5	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$		
F_6	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$			$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$		
F_7	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

Точно так же, как выписана строчка (1) из правильных дробей со знаменателем, не превосходящим 7, можно выписать в порядке возрастания дроби со знаменателем, не превосходящим n . Расположим подряд такие строчки для $n = 1, 2, \dots, 7$ в виде таблицы 1.

Первая строка и «боковые стены» из дробей $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ придадут нашей таблице более законченный вид.

Упражнение 1. Проверьте, что закономерности А и Б, которые мы заметили в седьмой строчке таблицы, имеют место и во всех предыдущих строчках.

Мы выделили в каждой строчке новые дроби.

Для новых дробей наблюдение **Б** можно уточнить: у дроби, возникающей между двумя старыми, числитель равен сумме их числителей, знаменатель – сумме знаменателей. Таким образом, можно предложить простое правило, по которому получается новая n -я строчка.

В. Нужно отметить $(n-1)$ -й строчке все такие пары соседних дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, у которых сумма знаменателей равна n , и между ними вставить дроби $\frac{a+c}{b+d}$ (они всегда получаются несократимыми).

Прделаем эту операцию с седьмой строчкой. Отметим пары соседних дробей, у которых сумма знаменателей равна 8. Это такие пары:

$$\frac{0}{1} \text{ и } \frac{1}{7}; \frac{1}{3} \text{ и } \frac{2}{5}; \frac{3}{5} \text{ и } \frac{2}{3}; \frac{6}{7} \text{ и } \frac{1}{1}.$$

Вставим между ними соответственно дроби $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$ и получим восьмую строчку

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{3} & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & \mathbf{5} & 2 & 5 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 7 & 3 & \mathbf{8} & 5 & 7 & 2 & 7 & 5 & \mathbf{8} & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 & 7 & \mathbf{8} & 1 \end{array}$$

Упражнения

2. Прделаайте аналогичную операцию с восьмой строчкой и проверьте, что таким образом получается строчка всех несократимых дробей со знаменателем не больше 9, идущих в порядке возрастания.

3. Проверьте, что в восьмой и девятой строчках выполняются закономерности **А** и **Б**.

Строчка всех несократимых дробей $\frac{p}{q}$, у которых $1 \leq p \leq q \leq n$ (n – данное натуральное число), расположенных в возрастающем порядке, имеет в теории чисел специальное название – *ряд Фарей*, и обозначается иногда через F_n . Имя математика Фарей таким строчкам присвоил великий французский математик Коши. Фарей заметил интересные закономерности в этом ряду дробей, а Коши, обратив внимание на наблюдения Фарей, в 1816 году опубликовал их доказательство. Однако вполне возможно, что эти закономерности были известны математикам и раньше.

Дадим два определения, связанные с нашими наблюдениями.

Определение 1. Назовем две дроби $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *близкими*, если $bc - ad$ равно 1 или -1 .

Упражнение 4. Выберите из дробей (1) все пары близких дробей.

Определение 2. Назовем *медиантой* двух дробей $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ дробь $\frac{a+c}{b+d}$.

(Медианта несократимых дробей может оказаться сократимой дробью; приведите пример.)

2. Свойства близких дробей

Теперь наши гипотезы можно сформулировать коротко так: в любом n -м ряду Фарея (n -й строке таблицы 1)

А. Соседние дроби близки друг другу.

В. Каждая новая дробь t/n является медиантой соседних с ней дробей.

В задаче М298 из «Задачника «Кванта» как раз и требовалось доказать свойство **А**: если $p/q < r/s$ – соседние дроби ряда F_n , то $qr - ps = 1$. Но оказывается, что значительно легче доказывать одновременно оба свойства – и **А**, и **В**. Мы наметим ниже целых три различных доказательства: одно – в пунктах **3–4**, второе – в пункте **5**, третье – в пункте **6**. Укажем несколько простых свойств, характеризующих близкие дроби и медианты.

а) Для любых двух дробей a/b и c/d их разность по модулю не меньше $1/bd$:

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| \geq \frac{1}{bd}, \quad (2)$$

причем знак равенства в (2) получается в том и только в том случае, если дроби a/b и c/d близки. (Это объясняет выбор термина: *близкие дроби*.)

б) Медианта двух дробей всегда заключена между ними, т.е. если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}. \quad (3)$$

в) Если две дроби близки друг к другу, то обе они несократимы.

г) Если две дроби близки друг к другу, то их медианта близка к каждой из них.

д) Если две дроби близки друг к другу, то их знаменатели взаимно просты и их числители взаимно просты².

е*) Из всех дробей, заключенных между двумя близкими дробями, наименьший знаменатель имеет их медианта.

² Целые числа a и b называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, больших 1.

Упражнение 5. Докажите свойства а)–д).

Допустим теперь, что читатель не только проделал упражнение 2 – получил из восьмой строчки девятую – но, продолжая действовать дальше по правилу **В**, получает десятую строчку, одиннадцатую и так далее.

Из свойств **б)**, **в)**, **г)** следует, что во всех новых строчках сохраняются такие закономерности:

- 1) дроби-медианты, которые мы вставим, будут несократимы;
- 2) дроби идут в порядке возрастания;
- 3) любые две соседние дроби близки друг другу.

Оставшийся более трудный вопрос состоит в следующем. Попадут ли по правилу **В** в n -ю строчку все несократимые дроби со знаменателем n или может оказаться, что какие-то будут пропущены? Оказывается, что все такие дроби будут обязательно вставлены, т.е. мы действительно получим строчку F_n целиком. На этом месте мы советуем читателю остановиться и попробовать придумать доказательство самостоятельно (один из путей – доказать свойство **е)**, отмеченное звездочкой).

Мы же пока сделаем небольшое отступление и обсудим вопрос: сколько всего дробей в n -й строчке нашей таблицы?

3. Функция Эйлера. Число выделенных дробей

Пусть у нас имеется натуральное число n . Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие n , и выберем из них те, которые взаимно просты с числом n . Количество этих чисел обозначим через $\varphi(n)$.

Например, для $n = 8$ такими числами будут 1, 3, 5, 7, и тем самым $\varphi(8) = 4$.

Итак, каждому натуральному числу n сопоставлено число $\varphi(n)$. Это соответствие φ называется *функцией Эйлера*.

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:

- 1) $\varphi(n) < n$.
- 2) Если $n = p$ – простое число, то $\varphi(n) = p - 1$.
- 3) Для $n > 2$ число $\varphi(n)$ четно.
- 4) Если $n = p^d$ – степень простого числа p , то

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

5*) Если m и n взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

6) Общая формула для $\varphi(n)$ такова:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right);$$

здесь p_1, p_2, \dots, p_r – все простые числа, на которые делится n . (Эта формула доказана, например, в статье «Малая теорема Ферма» в «Кванте» № 10 за 1972 г.)

Доказать все эти свойства мы предлагаем читателю. Объясним только свойство 3). Все числа, меньшие n и взаимно простые с n , можно разбить на пары: каждая пара состоит из таких чисел q, s , что $q + s = n$. Таким образом, число $\varphi(n)$ четно.

Число выделенных нами дробей в n -й строчке F_n , очевидно, равно $\varphi(n)$, так как несократимых дробей m/n ($0 \leq m < n \leq 1$) со знаменателем n столько же, сколько натуральных чисел m , меньших, чем n , и взаимно простых с n .

Вопрос о том, сколько всего членов содержит n -й ряд Фарея $\Phi(n)$, обсуждает в своем письме читатель «Кванта» А. Китаев из Ленинграда. Ясно, что это число – обозначим его $\Phi(n)$ – равно

$$\Phi(n) = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n),$$

поскольку $\Phi(1) = 2$ и $\Phi(n) = \Phi(n-1) + \varphi(n)$ (см. таблицу 2) Простой

Таблица 2. Функция Эйлера и число дробей $F(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16...
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8...
$\Phi(n)$	2	3	5	7	11	13	19	23	29	33	43	47	59	65	73	81...

формулы для $\Phi(n)$, видимо, не существует. Но интересно, что, несмотря на крайне нерегулярное поведение функции Эйлера $\varphi(n)$ (отношение $\frac{\varphi(n)}{n}$ бывает сколь угодно близко и к 0, и к 1), для $\Phi(n)$ можно доказать такое предельное соотношение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} \approx 0,305\dots,$$

т.е. $\Phi(x)$ при больших x возрастает «приблизительно по параболе»: $\Phi(x) \approx \frac{3}{\pi^2} x^2$.

Это – одна из красивых теорем, полученных австрийским математиком Ф.Мертенсом (1874 г.).

4. Соседние знаменатели

Вернемся теперь к вопросу, поставленному в конце пункта 2, и объясним, почему, действуя по правилу В, мы получим все $\varphi(n)$ несократимых дробей со знаменателем n . Сделаем еще одно наблюдение.

Обратим внимание на знаменатели дробей в таблице 1. Составим для удобства из них новую таблицу 3. Правило В

Таблица 3. Знаменатели рядов Фарея

1																1												
1																1												
1					2					1					1													
1				3	2	3				1					1													
1			4	3	2	3	4			1					1													
1			5	4	3	5	2	5	3	4	5			1														
1			6	5	4	3	5	2	5	3	4	5	6	1														
1			7	6	5	4	7	3	5	7	2	7	5	3	7	4	5	6	7	1								
1			8	7	6	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	6	7	8	1				
1	9	8	7	6	5	9	4	7	3	8	5	7	9	2	9	7	5	8	3	7	4	9	5	6	7	8	9	1

позволяет продолжать «таблицу знаменателей» (не заботясь о числителях) следующим образом.

В'. Нужно отметить в $(n-1)$ -й строчке все пары q, s соседних чисел, сумма которых равна n , и между ними поставить n .

Как мы уже говорили, соседние знаменатели в таблице 1 – т.е. соседние числа q и s в таблице 3 – взаимно просты (см. свойство д), п.2). Заметим теперь, что, вставляя суммы $q + s = n$ в n -ю строчку, мы встречаем *каждое* из $\varphi(n)$ возможных представлений n в виде суммы взаимно простых чисел (причем ровно один раз). Например, в девятой строчке:

$$9 = 1 + 8, 9 = 5 + 4, 9 = 7 + 2, 9 = 2 + 7, 9 = 4 + 5, 9 = 8 + 1.$$

Упражнение 6. Напишите еще три строчки таблицы 3 и проверьте, что все $\varphi(n)$ представлений знаменателя n в виде суммы двух соседних знаменателей $n = q + s$ встречаются ровно по одному разу.

Наблюдение, сделанное в упражнении 6, сформулируем так.

Г. В n -й строчке таблицы 3 *каждое* число, взаимно простое с n , бывает «соседом» ровно дважды: один раз слева и один раз справа.

Упражнение 7. Докажите, что если свойство Г выполняется во всех предыдущих строчках таблицы 3, то оно должно выполняться и в n -й строчке, полученной по правилу В'.

Из упражнения 7 вытекает (согласно принципу математической индукции), что если новые строчки таблицы 3 получать по правилу В', то во всех строчках свойство Г будет выполняться, а следовательно, в n -й строчке будет ровно $\varphi(n)$ новых членов!

Упражнение 8. Пусть мы, начав со строчки $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$, несколько раз проделываем такую операцию: между двумя уже написанными дробями вставляем их медиану. Докажите, что для любой строчки, которую можно таким образом получить, выполняются свойства **А** и **Б**.

Из результата этой задачи, в частности, следует, что свойства **А** и **Б** выполняются для каждой строчки таблицы 4, где между *каждыми* двумя дробями в следующей строчке вставляется медианта.

Упражнение 9. Докажите, что в таблице 4 в каждой строчке, начиная с n -й, встречаются все несократимые дроби со знаменателем n , причем каждая – один раз.

Таблица 4 тесно связана с таблицей целых чисел, которая рассматривалась в задаче М233 Г.А.Гальперина из «Задачника «Кванта». Эта таблица 5 появляется не только в знаменателях дробей таблицы 4, но

Таблица 4. «Ускоренный» ряд Фарея

$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$											$\frac{1}{2}$						$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{3}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$									
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$	

Таблица 5. Ряды Гальперина

1																1		
1											2						1	
1					3					2					3			1
1	4	3	5	2	5	3	4	1										
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1		

и в их числителях (во второй «половине» таблицы 4 – начиная со второй строчки, во второй «четверти» – начиная с третьей строчки и так далее)!

5. Второе доказательство

Приведем короткое доказательство свойств **А** и **В** рядов Фарея F_n , опирающееся на свойство а) близких дробей (такое доказательство приведено в книге [21]).

Доказательство тоже проводится по индукции. Предположим, что для всех строчек F_1, F_2, \dots, F_{n-1} , предшествующих F_n , свойства **A** и **B** доказаны. Пусть некоторая дробь m/n (со знаменателем n) заключена между соседними дробями p/q и r/s из F_{n-1} , $p/q < r/s$ (значит, $qr - ps = 1$).

Тогда

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{qn} \quad \text{и} \quad \frac{r}{s} - \frac{m}{n} \geq \frac{1}{sn}. \quad (3)$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} \geq \frac{q+s}{nqs}; \quad \frac{q+s}{n} \leq qr - ps = 1; \quad q+s \leq n.$$

Строгое неравенство $q+s < n$ и выполняться не может: в этом случае дробь $(p+r)/(q+s)$ встречалась бы между p/q и r/s уже в F_{n-1} (даже в F_{q+s}).

Следовательно,

$$n = q + s, \quad (4)$$

а поэтому неравенства (3) также должны быть равенствами, откуда

$$mq - np = 1, \quad nr - ms = 1. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что $m = p + r$.

Итак, мы доказали, что m/n — медианта дробей p/q и r/s и близка к каждой из них. (По существу, мы здесь доказали свойство **e**) близких дробей.) Значит, свойства **A** и **B** верны и для F_n .

Упражнения

10. Докажите, что:

а) если дроби m/n и p/q , где $q < n$, близки, то они — соседние дроби в F_n ;

б) любая дробь, близкая к m/n , равна одной из дробей $(m+kr)/(n+ks)$, либо $(m+kp)/(n+kq)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, а p/q и r/s — соседи m/n в F_n .

11. Пусть в последовательности дробей $\frac{0}{1} \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_N \leq \frac{1}{1}$ каждые две соседние дроби близки друг к другу. Докажите, что эту последовательность можно получить процедурой, описанной в упражнении 8.

Геометрическая интерпретация, к которой мы переходим, значительно прояснит простые причины закономерностей **A** и **B**, а заодно подскажет идею еще одного доказательства.

6. Решетки и параллелограммы

Возьмем лист клетчатой бумаги и введем на нем систему координат. Две перпендикулярные линии сетки примем за оси координат, а сторону клетки — за единицу масштаба.

Поставим в соответствие каждой дроби m/n ($0 \leq m/n \leq 1$, $n > 0$) точку с координатами (n, m) . (На рисунке 1 – это черные точки.) Вместо «точка» мы иногда будем говорить «дробь».

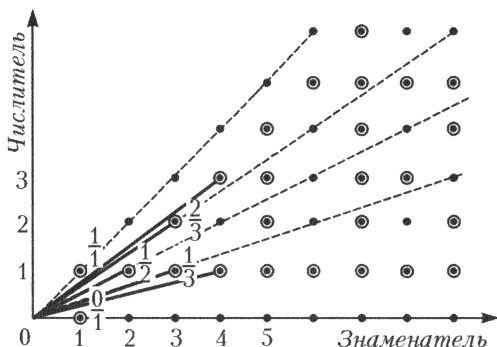


Рис. 1

Несократимые дроби на рисунке 1 обведены кружками, а те из них, знаменатели которых не больше 4, соединены отрезками с началом координат O .

Сформулируем несколько свойств дробей на геометрическом языке. Пусть p/q и r/s – две дроби, $A(q, p)$ и $B(s, r)$ – соответствующие им точки.

а) $p/q = r/s$ в том и только том случае, если точки A и B лежат на одном луче с началом O . Ближайший к O узел на этом луче соответствует несократимой дроби.

Дальше мы считаем, что $p/q \neq r/s$.

б) $p/q > r/s$, если луч OA составляет больший угол с горизонтальной осью координат, чем луч OB .

в) Дробь $(p+r)/(q+s)$ соответствует четвертой вершине $C(p+r, q+s)$ параллелограмма $OACB$ (рис.2). Для тех, кто знаком с векторами, запишем это так: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. (Мы видим, что созвучность терминов «медианта» и «медиана» не случайна: отрезок OC идет как раз по медиане треугольника OAB .)

г) $|qr - ps|$ равно удвоенной площади $\triangle AOB$, т.е. площади параллелограмма $OACB$.

д*) Внутри и на сторонах этого параллелограмма $OACB$ в том и только в том случае нет узлов (за исключением вершин), когда $|qr - ps| = 1$.

е*) В этом случае точка C – ближайший к O узел сетки, лежащий внутри угла AOB .

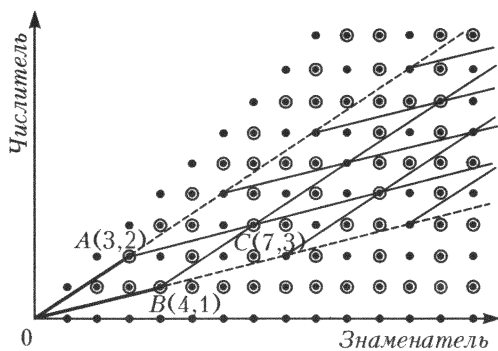


Рис. 2

Упражнение 12. Докажите свойства а)–г).

Ключ к объяснению закономерности ряда Фарея – свойства д*) и е*).

Посмотрим внимательно на рисунки 2 и 3. На них внутренность угла AOB разрезана прямыми на параллелограммы, равные параллелограмму $OACB$. Все их вершины лежат в узлах клетчатой бумаги. Но на рисунке 2 (где площадь $OACB$ больше 1) многие узлы внутри угла AOB не являются вершинами этих параллелограммов. А на рисунке 3 (здесь площадь $OACB$ равна 1) *любой* узел внутри угла AOB – вершина такого параллелограмма, т.е. для любого такого узла $M(n, m)$ найдутся натуральные числа x и y , для которых

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}. \quad (6)$$

Векторное равенство (6) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} px + ry = m, \\ qx + sy = n. \end{cases} \quad (7).$$

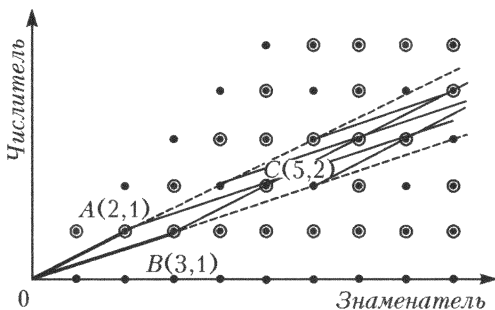


Рис. 3

Упражнение 13. а) Докажите, что если $|qr - ps| = 1$, где p, q, r, s – целые числа, то система (7) при любых целых m и n имеет решения в целых числах x и y .

б*) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

в) Выведите из а), что для двух близких дробей $p/q < r/s$ любую дробь m/n , где $p/q < m/n < r/s$, можно представить в виде $\frac{px + ry}{qx + sy}$, где x и y – натуральные числа.

г) Докажите свойства **е*)** из пунктов **2** и **5** и выведите отсюда закономерности **А** и **В** рядов Фарея.

Заключение

Мы наметили несколько путей построения небольшой, но красивой теории рядов Фарея.

Эту теорию можно строить в самом начале изучения целых чисел, не опираясь на основную теорему арифметики (о единственности разложения на простые множители). Сама эта теорема может быть выведена из свойств рядов Фарея. Из этих свойств легко получить также решения в целых числах уравнения $ax - by = 1$, где a и b взаимно просты: достаточно рассмотреть дробь $\frac{a}{b}$ и взять любую из соседних с ней дробей в ряду Фарея.

Ряды Фарея, а также изображение дробей на решетке полезны и в более тонких вопросах приближения вещественных чисел дробями с небольшими знаменателями.

Литература

1. *Н.Б.Васильев*. Решение задачи М233. – «Квант» №7 за 1974 г.
2. *И.М.Виноградов*. Основы теории чисел. – М.: «Наука», 1965.
3. *К.Чандрасекхаран*. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: «Мир», 1974.
4. *Д.Б.Фукс, М.Б.Фукс*. «О наилучших приближениях». – «Квант» №№6 и 11 за 1971 г.

СЛОЖЕНИЕ ФИГУР

По-видимому, каждый из читателей поймет, что от него требуется, если его попросят *сложить* из трех одинаковых треугольников трапецию или из четырех уголков – уголок вдвое большего размера. Но в нашей заметке пойдет речь о «сложении» совсем другого рода. Суммой двух треугольников у нас будет, как правило, выпуклый шестиугольник, суммой двух одинаковых кругов – круг вдвое большего радиуса, а суммой двух отрезков – параллелограмм. Чтобы отличить операцию, о которой мы будем рассказывать, от обычного «объединения», ее называют «векторной суммой» или «суммой Минковского» – по имени изучившего ее замечательного немецкого математика Германа Минковского (1864–1909). Наиболее интересные применения этого понятия относятся к выпуклым телам в трехмерном и вообще n -мерном пространстве. Но мы будем иметь дело главным образом с плоскими фигурами.

Поводом для этой заметки послужила задача М330 из «Задачника «Кванта», которую мы здесь решим. Вот ее формулировка.

На плоскости расположены два выпуклых многоугольника F и G . Обозначим через H множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит F , второй – G . Докажите, что H – выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь H , если F имеет их n_1 , а G – n_2 ?

б) Каков может быть периметр H , если периметр F равен P_1 , а G – P_2 ?

в) Какова может быть площадь H , если площадь F равна S_1 , а площадь G – S_2 ?*

§ 1. Множество середин

Начнем с разбора более простой задачи.

Задача 1. *Даны два отрезка: AB и CD . Найдите множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого P лежит на AB , а другой конец Q – на CD .*

Решение. Рассмотрим сначала общий случай, когда отрезки AB и CD не параллельны. (Частный случай $AB \parallel CD$ мы обсудим ниже.) Обозначим середину отрезка PQ через M . Зафикси-

руем сначала положение точки Q . Если P пробегает весь отрезок AB , то при этом M пробегает среднюю линию треугольника QAB (рис.1,а) – отрезок с концами в серединах отрезков QA и QB . Если теперь заставить точку Q пройти весь отрезок CD , то средняя линия треугольника QAB , очевидно, заметет целый

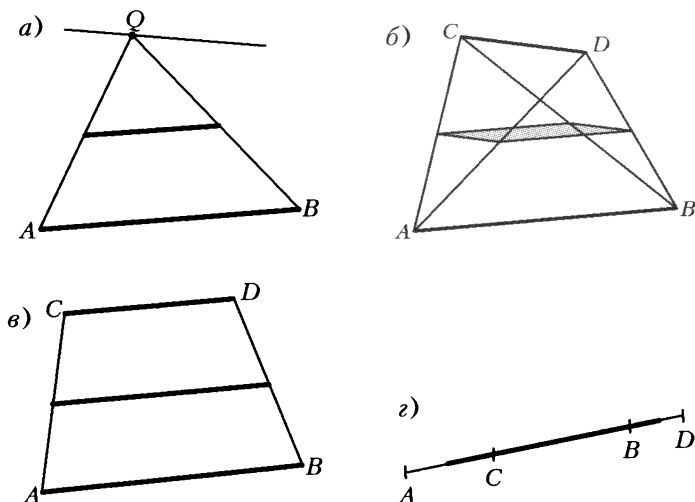


Рис. 1

параллелограмм (рис.1,б)– вершинами его будут середины отрезков AC , AD , BC и BD .

Заметим, что если AB и CD пересекаются, то искомое множество – параллелограмм с вершинами в серединах сторон выпуклого четырехугольника $ACBD$, а если AB и CD не лежат в одной плоскости, то наш параллелограмм получится в сечении тетраэдра $ABCD$ плоскостью, параллельной AB и CD и проходящей посередине между ними.

Выясним, во что превратится этот параллелограмм, когда отрезки AB и CD параллельны. (Можно считать, что они и одинаково направлены.) Если AB и CD принадлежат различным параллельным прямым, то $ABDC$ – трапеция, а середины M отрезков PQ заполняют среднюю линию этой трапеции (рис.1,в) – отрезок с концами в серединах отрезков AC и BD .

Такой же ответ получается и в том случае, когда AB и CD принадлежат одной прямой. Здесь, чтобы не разбирать различных расположений точек A, B, C, D на прямой, удобно перевести задачу на язык алгебры. Будем считать, что наша прямая –

числовая ось, координаты данных точек – k_A, k_B, k_C, k_D ($k_A < k_B, k_C < k_D$), и воспользуемся таким фактом: множество чисел $(x_P + x_Q)/2$, где $x_P \in [k_A, k_B], x_Q \in [k_C, k_D]$ – отрезок $[(k_A + k_B)/2, (k_C + k_D)/2]$ (рис.1,з). Заметим, что длина полученного отрезка равна $(AB + CD)/2$.

Задача 1 полностью решена. В дальнейшем мы не будем столь пунктуальны в изложении решений и доказательств – многие детали оставлены читателям.

Условимся, что граничные точки всех рассматриваемых фигур (многоугольников, кругов, полуплоскостей) принадлежат этим фигурам. Следующее определение позволит нам избежать повторения слов: «отрезок», «середина», «конец».

Определение 1. Пусть заданы две фигуры F и G (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовем *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит F , а другой – G . Обозначим это множество так: $F * G$.

Пример 1. а) Если F и G состоят из одной точки: $F = \{P\}, G = \{Q\}$, то $F * G$ – тоже одна точка (середина отрезка PQ). Будем обозначать ее $P * Q$.

б) Если F – отрезок, G – одна точка ($F = AB, G = \{Q\}$, рис.1,а), то $F * G$ – отрезок длины $AB/2$.

в) Если F и G – параллельные отрезки AB и CD , то $F * G$ – параллельный им отрезок длины $(AB + CD)/2$ («средняя линия», рис.1,в, 1,з).

г) Если F и G – непараллельные отрезки: $F = AB, G = CD$, то $F * G$ – параллелограмм с вершинами $A * C, A * D, B * D, B * C$ (рис.1,б).

Пример 2. Полусумма двух прямоугольников F и G размерами $a \times b$ и $c \times d$, у которых стороны a и c параллельны, – прямоугольник размерами $(a + c)/2 \times (b + d)/2$ (рис.2).

Действительно, в системе координат Oxy , у которой ось Ox параллельна сторонам a и c , координаты x точек прямоугольников F и G пробегают отрезки длиной a и c , координаты y – отрезки длиной b и d , а полусуммы этих координат – отрезки соответственно длиной $(a + c)/2$ и $(b + d)/2$. (Здесь вновь пригодился тот «очевидный факт», который мы использовали в конце решения задачи 1.)

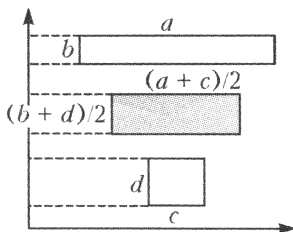


Рис. 2

Задача 2. Найдите полусумму следующих двух фигур:

- а) двух непараллельно расположенных прямоугольников;
- б) правильного треугольника и его стороны;
- в) двух треугольников, на которые квадрат разрезается диагональю;
- г) квадрата и правильного треугольника, имеющих одну общую сторону;
- д) отрезка и круга;
- е) двух окружностей разного радиуса;
- ж) полуокружности с самой собой;
- з) полуокружностей, составляющих вместе окружность;
- и) одна фигура – две соседние стороны правильного пятиугольника, другая – три остальные его стороны.

Решение задачи 2а). Будем действовать так же, как при решении задачи 1. Зафиксируем точку P прямоугольника F (рис.3). Тогда множество точек $P * Q$, где Q пробегает G , – прямоугольник $\{P\} * G$, гомотетичный G с коэффициентом $1/2$ (и с центром гомотетии P). Мы должны теперь взять объединение всех прямоугольников $\{P\} * G$, где P пробегает F . Нетрудно видеть, что нужное объединение $F * G$ (фигура, заштрихованная черным прямоугольником на рисунке 3, когда выделенная нижняя вершина пробегает темно-серый прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику F с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$) – выпуклый восьмиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам.

Сопоставляя задачу 2а) с предшествующим ей примером 2, мы видим, что форма фигуры $F * G$ может существенно измениться при повороте одной из фигур F или G .

Восемь ответов к пунктам б) – и) задачи 2 в беспорядке приведены на рисунке 4.

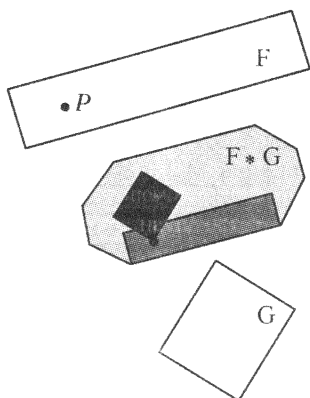


Рис. 3

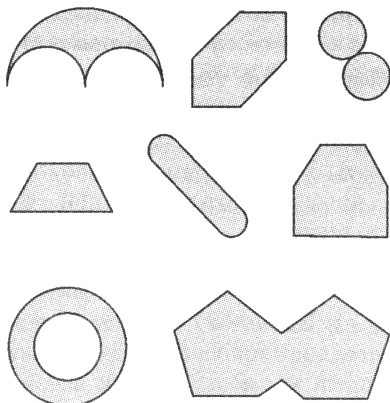


Рис. 4

Задача 3. Найдите полусумму следующих фигур в пространстве:

- а) двух параллельно расположенных прямоугольных параллелепипедов;
- б) отрезка и многоугольника, не лежащих в параллельных плоскостях;
- в) окружности и шара;
- г) двух противоположных граней правильного октаэдра (рис.5);
- д) двух половинок шара, разрезанного диаметральной плоскостью.

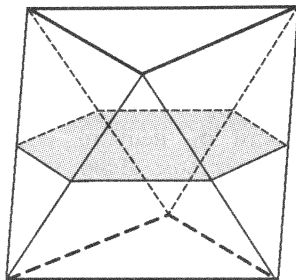


Рис. 5

§ 2. Полусумма выпуклых многоугольников

Напомним, что множество точек F называется *выпуклым*, если для любых двух точек P и Q из F весь отрезок PQ содержится в F .

Возможно, вы заметили, что находить полусумму выпуклых фигур проще, чем не выпуклых, причем *если F и G – выпуклые фигуры, то $F * G$ – тоже выпукло*.

Докажем это. Пусть M_1 и M_2 – произвольные точки из $F * G$. Тогда $M_1 = P_1 * Q_1$, $M_2 = P_2 * Q_2$ при некоторых $P_1 \in F$, $P_2 \in F$, $Q_1 \in G$, $Q_2 \in G$.¹ Поскольку F и G выпуклы, то $P_1P_2 \subset F$ и $Q_1Q_2 \subset G$. Тогда $(P_1P_2 * Q_1Q_2) \subset F * G$. Но, как мы знаем (пример 1), полусумма отрезков – параллелограмм, причем точки M_1 и M_2 – его вершины (параллелограмм может вырождаться в отрезок, содержащий точки M_1 и M_2). Раз фигура $F * G$ содержит этот параллелограмм, она содержит и отрезок M_1M_2 : $F * G \supset (P_1P_2 * Q_1Q_2) \supset M_1M_2$.

Из примеров, встретившихся в задачах 2 а) – и), видно, что полусумма выпуклых многоугольников F и G – многоугольник, стороны которого параллельны сторонам F и G , но вдвое короче. Доказать этот факт (и даже точно его сформулировать) проще всего, представив выпуклый многоугольник как пересечение полуплоскостей.

Будем говорить, что две полуплоскости σ_1 и σ_2 имеют *одинаковое направление*, если $\sigma_1 \supset \sigma_2$ или $\sigma_2 \supset \sigma_1$. Разумеется, края таких полуплоскостей l_1 и l_2 – параллельные прямые, а их полусумма $\sigma_1 * \sigma_2$ – полуплоскость того же направления, край

¹ Мы используем обычные обозначения: $F \cap G$ – пересечение фигур F и G , $F \cup G$ – их объединение, $G \subset F$ (или $F \supset G$) означает, что G содержится в F , $P \in F$ – что точка P принадлежит F .

которой — прямая $l_1 * l_2$, расположенная посередине между l_1 и l_2 . (Докажите это аккуратно!)

Назовем полуплоскость σ_F *опорной* для многоугольника F , если $\sigma_F \supset F$ и пересечение F с граничной прямой l_F полуплоскости σ_F непусто. Это пересечение $l_F \cap F$ назовем *опорным* множеством. Ясно, что для каждого *направления* σ есть своя опорная полуплоскость. Соответствующее ей опорное множество — либо одна точка (вершина многоугольника), либо отрезок (сторона многоугольника). Опорное множество мы обозначим F_σ .

Пусть F и G — два выпуклых многоугольника, σ_F и σ_G — их опорные полуплоскости одного и того же направления, F_σ и G_σ — соответствующие опорные множества. Легко найти опорное множество того же направления для полусуммы $F * G$: оно равно полусумме опорных множеств F_σ и G_σ , т.е.

$$(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma.$$

Действительно (рис.6), середина M любого отрезка PQ , где $P \in F$, $Q \in G$, лежит в полуплоскости $\sigma_F * \sigma_G = \sigma_{F * G}$, причем на граничную прямую полуплоскости $\sigma_{F * G}$ точка M может попасть в том и только в том случае, если одновременно $P \in F_\sigma$ и $Q \in G_\sigma$.

Теперь мы можем сформулировать удобное правило, позволяющее найти полусумму $F * G$ выпуклых многоугольников F и G .

Нужно рассмотреть каждое такое направление σ , для

*которого хотя бы одно из соответствующих опорных множеств F_σ и G_σ является отрезком (стороной F или G), и построить полусумму F_σ и G_σ — отрезок $F_\sigma * G_\sigma$ (пользуясь примерами 1,6), в)). Объединение всех этих отрезков $F_\sigma * G_\sigma$ по разным направлениям σ — граница фигуры $F * G$.*

Применение этого правила иллюстрирует рисунок 6. Ясно, что опорные множества F_σ , G_σ , а значит, и $(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma$ для остальных «промежуточных» направлений состоят из отдельных точек (вершин соответствующих многоугольников).

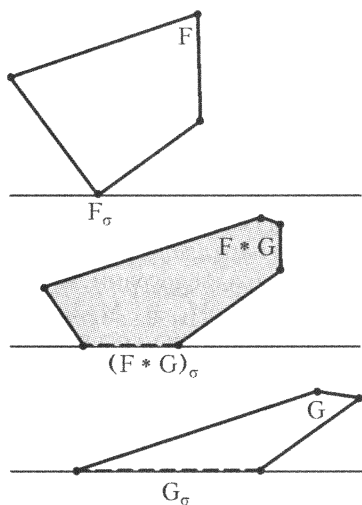


Рис. 6

Мы уже доказали, что фигура $F * G$ выпукла. Теперь, найдя ее границу, мы видим, что $F * G$ – выпуклый *многоугольник*, причем направления его сторон – те же, что у F и G .

Задача 4. а) Докажите, что если σ и τ – полуплоскости разных направлений, то $\sigma * \tau$ – вся плоскость.

б) Попробуйте решить задачи 2а)–г), пользуясь правилом, сформулированным выше.

в) Приведите пример пятиугольника F и треугольника G , для которых $F * G$ имеет 5, 6, 7 и 8 сторон.

Теперь уже легко дать ответы на вопросы а) и б) задачи М330:

а) количество сторон полусуммы n_1 -угольника и n_2 -угольника может быть любым числом, которое не больше $n_1 + n_2$ и не меньше, чем наибольшее из чисел n_1, n_2 ;

б) периметр $F * G$ равен полусумме периметров F и G .²

Найти ответ на вопрос в) задачи М330 и обосновать его намного труднее. Мы узнаем его в § 4. А пока расскажем о том, что такое *сумма* и *линейная комбинация* фигур.

§ 3. Суммы и линейные комбинации фигур

Мы очень много раз использовали слово «полусумма» и заменяющий его значок $*$. Пора сказать, что такое *сумма* двух фигур.

Зафиксируем некоторую точку O (*начало отсчета* или *полюс*).

Определение 2. Множество всех концов M векторов

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ},$$

где P и Q – произвольные точки фигур F и G соответственно, называется *суммой* (или *суммой Минковского*) фигур F и G (рис.7). Сумма F и G обозначается $F + G$.

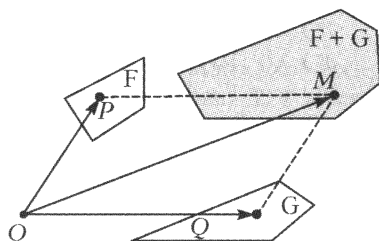


Рис. 7

Определение 3. Множество всех концов M векторов

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP},$$

где P – произвольная точка фигуры F , λ – данное положитель-

² Действительно, если длину точки считать равной 0, то длина $(F * G)_\sigma$ равна полусумме длин F_σ и G_σ для каждого направления σ .

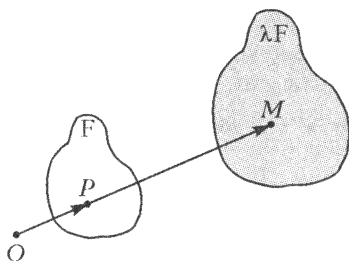


Рис. 8

ное число, называется *произведением* F на λ (рис.8). Эта фигура обозначается λF .

Пример 3. «Полусумма» $F * G$ (определение 1) есть как раз $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$: ведь условие $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ})$ означает, что M – середина отрезка PQ .

Фигуру $\lambda F + \mu G$, где λ и μ – положительные числа, мы будем называть *линейной комбинацией* фигур F и G .

Пример 4. Линейная комбинация $\lambda F + \mu G$ прямоугольников $a \times b$ и $c \times d$, у которых стороны a и c параллельны (как в примере 2), – прямоугольник $(\lambda a + \mu c) \times (\lambda b + \mu d)$.

Задача 5. Как выглядят линейные комбинации $\lambda F + \mu G$ тех фигур F и G , полусуммы которых требовалось найти в задачах 2–4?

Задача 6. Докажите следующие свойства введенных операций:

1°) $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$;

2°) $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$;

3°) $\lambda(\mu F) = (\lambda\mu)F$;

4°) $\lambda(F_1 + F_2) = \lambda F_1 + \lambda F_2$;

5°) если $F_1 \subset F_2$, $G_1 \subset G_2$, то $\lambda F_1 + \mu G_1 \subset \lambda F_2 + \mu G_2$;

6°) $\lambda F + \mu F \supset (\lambda + \mu)F$; если F выпукло, то $\lambda F + \mu F = (\lambda + \mu)F$;

7°) $\lambda(F \cup G) = \lambda F \cup \lambda G$ и $H + (F \cup G) = (H + F) \cup (H + G)$;

8°) $\lambda(F \cap G) = \lambda F \cap \lambda G$ и $H + (F \cap G) = (H + F) \cap (H + G)$;

9°) если F и G – выпуклые многоугольники на плоскости периметров P_F и P_G , то $\lambda F + \mu G$ – выпуклый многоугольник периметра $\lambda P_F + \mu P_G$;

10°) если $\lambda + \mu = 1$, то линейная комбинация $\lambda F + \mu G$ не зависит от того, в какой точке O помещен «полус».

Вообще говоря, при другом выборе полюса O и при параллельном переносе данных фигур F и G линейная комбинация $\lambda F + \mu G$ меняется, но не существенно – она просто подвергается параллельному переносу. Таким образом, если условиться две фигуры, получающиеся друг из друга параллельными переносами, не различать, считать эквивалентными, то можно не указывать, где выбран полюс – результат $\lambda F + \mu G$ будет однозначно определен.

Заметим, что любая линейная комбинация $\lambda F + \mu G$ фигур F и G получается из «нормированной» комбинации

$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} F + \frac{\mu}{\lambda + \mu} G$ (такой, у которой сумма коэффициентов равна 1) умножением на число $(\lambda + \mu)$, т.е. просто гомотетией. Таким образом, линейные комбинации с $\lambda + \mu \neq 1$ не дадут новых по форме фигур.

Опишем один способ представить себе все нормированные линейные комбинации двух выпуклых многоугольников F и G . Перенесем один из них (не поворачивая) в параллельную плоскость и построим «выпуклую оболочку» F и G – выпуклый многогранник, все вершины которого совпадают с вершинами F и G (например, правильный октаэдр на рисунке 5 – выпуклая оболочка верхнего и нижнего треугольников; его «среднее сечение» – полусумма этих треугольников). Тогда сечения этого многогранника плоскостями, параллельными F и G , дадут как раз линейные комбинации $\lambda F + \mu G$, где $\lambda + \mu = 1$; отношение λ/μ равно отношению расстояний от секущей плоскости до плоскостей F и G .

Следующие пять задач с разных сторон иллюстрируют понятие «суммы Минковского».

Задача 7. Из точки O , лежащей на границе полуплоскости, внутрь полуплоскости направлено n векторов длины 1. Докажите, что если n нечетно, то длина их суммы не меньше 1.

Задача 8. Пусть F – выпуклый многоугольник, S – его площадь, P – периметр, K – круг радиуса 1 с центром O . Докажите, что площадь фигуры $F + \rho K$ (ρ -окрестности многоугольника F) равна $S + \rho P + \rho^2 \pi$. Напишите аналогичную формулу для объема ρ -окрестности выпуклого многогранника.

Задача 9. Докажите, что следующие три свойства выпуклого многоугольника F эквивалентны: (1) F имеет центр симметрии; (2) F можно разрезать на параллелограммы; (3) F есть сумма нескольких отрезков.

Задача 10. Докажите, что следующие два свойства выпуклого многогранника эквивалентны: (1) все грани F – параллелограммы; (2) F есть сумма нескольких отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Сколько граней имеет такой многогранник, если количество отрезков – k ?

Задача 11. От незагащенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени t_1 со скоростью \vec{v}_1 , затем t_2 – со скоростью \vec{v}_2 , ..., t_n – со скоростью \vec{v}_n . Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем эти участки продолжают гореть). Какой участок выгорел за это время? А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью \vec{u} ? (А.Савин)

§ 4. Площадь суммы фигур

Площадь фигуры F будем обозначать через S_F . Теорема о площадях гомотетичных фигур гласит:

$$S_{\lambda F} = \lambda^2 S_F. \quad (1)$$

Посмотрим, что можно сказать о площади суммы и, вообще, линейной комбинации двух фигур. Начнем с частного случая, когда F и G – прямоугольники $a \times b$ и $c \times d$, причем стороны длины a и c параллельны. Тогда $\lambda F + \mu G$ – прямоугольник $(\lambda a + \mu c) \times (\lambda b + \mu d)$ и

$$\begin{aligned} S_{\lambda F + \mu G} &= (\lambda a + \mu c)(\lambda b + \mu d) = \\ &= \lambda^2 ab + \mu^2 cd + \lambda\mu(ad + bc) \geq \lambda^2 ab + \mu^2 cd + 2\lambda\mu\sqrt{abcd} = \\ &= (\lambda\sqrt{ab} + \mu\sqrt{cd})^2, \end{aligned}$$

т.е.

$$S_{\lambda F + \mu G} \geq (\lambda\sqrt{S_F} + \mu\sqrt{S_G})^2 \quad (2)$$

(мы воспользовались неравенством $p + q \geq 2\sqrt{pq}$. Получить какие-то еще, кроме неравенства (2), ограничения на величину $S_{\lambda F + \mu G}$ при заданных S_F и S_G нельзя. Действительно, положив в (2) $b = a$, $c = ke$, $d = e/k$ (k – какое-то положительное число), мы получим: $S_F = a^2$, $S_G = e^2$,

$$\begin{aligned} S_{\lambda F + \mu G} &= \lambda^2 a^2 + \mu^2 e^2 + \lambda\mu ae \left(k + \frac{1}{k} \right) = \\ &= (\lambda a + \mu e)^2 + \left(k + \frac{1}{k} - 2 \right) \lambda\mu ae. \end{aligned}$$

При фиксированных a , e и λ , μ вторая скобка принимает любое неотрицательное значение (в зависимости от k), поэтому $S_{\lambda F + \mu G}$ может принять любое значение, не меньшее $(\lambda\sqrt{S_F} + \mu\sqrt{S_G})^2$.

Теперь мы можем, наконец, привести ответ на вопрос в) задачи М330: *площадь полусуммы выпуклых многоугольников площадей S_1 и S_2 , может принимать любое значение, большее или равное $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2/4$.*

Тот факт, что меньшее значение площадь полусуммы принимать не может, вытекает из следующей замечательной теоремы.

Теорема Брунна–Минковского. *Неравенство (2) выполнено для любых двух выпуклых фигур F , G и любых положительных чисел λ , μ .*

Доказательство. Прежде всего, используя соображения подобия и формулу (1), легко свести дело к случаю, когда площади данных фигур равны, а линейная комбинация – нормированная. Для этого случая неравенство (2) выглядит очень просто:

$$\text{если } S_F = S_G = S \text{ и } \lambda + \mu = 1, \text{ то } S_{\lambda F + \mu G} \geq S. \quad (3)$$

Покажем, как из (3) выводится неравенство (2) для любых F, G, λ и μ . Рассмотрим вместе с F и G гомотетичные им фигуры площади S :

$$F^* = \sqrt{S/S_F} F, \quad G^* = \sqrt{S/S_G} G.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda F + \mu G &= \lambda \sqrt{S_F/S} F^* + \mu \sqrt{S_G/S} G^* = \\ &= (\lambda \sqrt{S_F/S} + \mu \sqrt{S_G/S}) (\lambda^* F^* + \mu^* G^*), \end{aligned}$$

где $\lambda^* + \mu^* = 1$. Применяя (3) к $\lambda^* F^* + \mu^* G^*$ и пользуясь еще раз (1), получим (2):

$$\sqrt{S_{\lambda F + \mu G}} \geq (\lambda \sqrt{S_F/S} + \mu \sqrt{S_G/S}) \sqrt{S} = \lambda \sqrt{S_F} + \mu \sqrt{S_G}.$$

Вот основное соображение, используемое при доказательстве неравенства (3). Если фигура F разбита горизонтальной прямой l на две части: верхнюю F_v и нижнюю F_n , и аналогично, G другой горизонтальной прямой m разделена на две части G_n и G_v , то множества $\lambda F_v + \mu G_v$ и $\lambda F_n + \mu G_n$ не налегают друг на друга: первое лежит выше прямой $\lambda l + \mu m$, второе – ниже.

Теперь доказательство в двух словах можно закончить так.

Разобьем многоугольники F и G на N узких горизонтальных полосок и занумеруем их по порядку сверху вниз: $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_N = F$, $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N = G$. Каждую полоску можно считать прямоугольником площади S/N (если N велико, это «с точностью до сколь угодно малого ε » не влияет на площади фигур F, G и $\lambda F + \mu G$). Но для прямоугольников с параллельными сторонами основное неравенство (2) уже доказано, поэтому площадь каждой из полосок $\lambda F_i + \mu G_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ (мы складываем лишь полоски с одинаковыми номерами!), не меньше S/N . А поскольку эти N полосок не налегают друг на друга и, разумеется, содержатся в $\lambda F + \mu G$, то площадь $S_{\lambda F + \mu G}$ не меньше S .

Итак, неравенство Брунна–Минковского доказано. Приведем здесь только одно его следствие. Это – знаменитая **изопериметрическая теорема**: *площадь любой фигуры с периметром P не больше, чем площадь круга с длиной окружности P* . Докажем

ее для выпуклого многоугольника F . Используя обозначения и результат задачи 8, применим к сумме $F + K$ (K – круг единичного радиуса) неравенство Брунна. Получим:

$$\sqrt{S + P + \pi} \geq \sqrt{S} + \sqrt{\pi},$$

или, после упрощений, $S \leq P^2/4\pi$. Это и есть нужное неравенство!

Задача 12. а) Докажите, что для площадей линейной комбинации двух выпуклых многоугольников верна формула $S_{\lambda F + \mu G} = S_F \lambda^2 + 2S_{F,G} \lambda \mu + S_G \mu^2$, где число $S_{F,G}$ зависит только от F и G (это число называется *смешанной площадью* фигур F и G). Найдите $S_{F,G}$ для фигур F, G из задач 2а)–д).

б) Докажите, что всегда $S_{F,G}^2 \geq S_F S_G$, причем равенство имеет место, только если многоугольники F и G гомотетичны.

Задача 13. Докажите, что неравенство (2) верно для произвольных фигур (не обязательно выпуклых). Подумайте, как сформулировать и доказать аналогичную теорему для объемов пространственных фигур.

В заключение нашего беглого знакомства с суммой Минковского перечислим некоторые книги и статьи, в которых рассказано о сложении фигур, применении этой операции к теории выпуклых множеств, в частности, о различных доказательствах неравенства Брунна–Минковского, его обобщениях и геометрических следствиях.

Литература

1. *И.М.Яглом, В.Г.Болтянский.* Выпуклые фигуры (книга из серии «Библиотека математического кружка», вып.4). – Гостехтеориздат, 1951 г.
2. *Л.А.Люстерник.* Выпуклые фигуры и многоугольники. – Гостехтеориздат, 1956 г.
3. *Б.Н.Делоне.* Доказательство неравенства Брунна–Минковского. – Успехи математических наук, вып. II (1936 г.).
4. *Н.Б.Васильев.* Семейство параллельных n -угольников. – «Квант» №11 за 1974 г., см. стр. 87–99 этой книги; решение задачи М295, «Квант» №6 за 1975 г.
5. *Г.Хадвигер.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. – М.: «Наука», 1966 г.

В этой заметке мы обсудим характерные соображения, возникающие при решениях задач, где на последовательность или функцию наложены некоторые локальные ограничения – ей запрещено резко меняться или круто поворачивать – и требуется оценить, насколько большим может оказаться ее колебание в целом.

Игра в «гонки» и вторые разности

Вероятно, многие из наших читателей знают игру «гонки», описанную в книге М.Гарднера «Математические новеллы». Напомним правила игры. На клетчатой бумаге рисуется более-менее произвольная изогнутая область (трек), у одного края трека для каждого игрока отмечается своя точка старта, у другого края – линия финиша. Автомобилисты по очереди делают ходы в один из узлов сетки, причем изменять скорость разрешается только на единицу: если предыдущий ход автомобиля был \overline{AB} , то следующий ход \overline{BC} либо точно такой же ($\overline{BC} = \overline{AB}$), либо заканчивается в одном из восьми соседних с C узлов. Ходить можно только по отрезкам, целиком лежащим в пределах трека: тот, кто слишком «разогнался» и вылетел за границу, пропускает ход и начинает с единичной скоростью (так же проводится и старт, рис.1).

По сравнению с другими играми на клетчатой бумаге (например, с «морским боем») эта игра замечательна не только близостью к реальной ситуации, но и разнообразием: ведь каждый новый трек – это новая игра.

Найти наиболее удачный путь в сложном треке – задача далеко не простая. Такие задачи очень характерны для теории оптимального управления – сравнительно молодой и быстро развивающейся области математики. Мы не будем касаться общих соображений, относящихся к этой теории, а рассмотрим одну конкретную задачу, навеянную игрой «гонки».

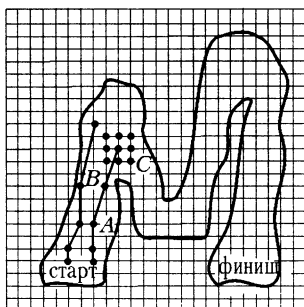


Рис 1

Задача 1. На клетчатой бумаге на одной горизонтальной линии сетки l отмечен отрезок A_0A_1 длины 1 (сторона одной клетки). Нужно, начав с этого отрезка, построить путь, в котором:

1) каждый следующий шаг A_kA_{k+1} либо такой же, как предыдущий ($A_kA_{k+1} = A_{k-1}A_k$), либо отличается от него на одну единицу вверх или вниз (в отличие от «гонок», скорость смещения вправо всегда остается одинаковой: 1 клетка за каждый шаг);

2) последний отрезок A_nA_{n+1} лежит на той же прямой, что и первый A_0A_1 .

На какую наибольшую высоту, при заданном n , может подняться такой путь над прямой l ?

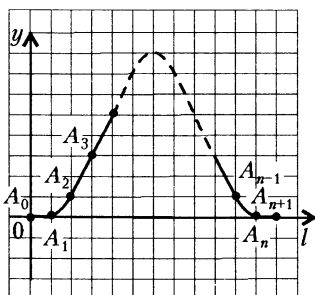


Рис 2

Эту задачу легко, конечно, сформулировать и без клетчатой бумаги. Если считать, что отрезки A_0A_1 и A_nA_{n+1} – это отрезки $[0, 1]$ и $[n, n + 1]$ оси Ox (рис.2), то путь вполне определяется последовательностью координат $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}$ точек $A_k = (k; y_k)$, причем эта последовательность должна удовлетворять таким условиям:

а) разность разностей $y_{k+1} - y_k$ и $y_k - y_{k-1}$ соседних членов последовательности, т.е. *вторая разность* $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = (y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$ при каждом $k, 1 \leq k \leq n$, не превосходит 1;

б) $y_0 = y_1 = y_n = y_{n+1} = 0$, а все другие y_k – целые числа. В задаче спрашивается, какое наибольшее значение может иметь наибольший член этой последовательности.

Путь, о котором говорится в первой формулировке, – в некотором смысле «график» последовательности $\{y_k\}$. Даже если бы мы начали сразу с алгебраической формулировки, его очень полезно было бы «выдумать»: он помогает наглядно представить смысл условия а).

Перейдем к решению задачи.

Чтобы удовлетворить условию 1), «верхушка» ломаной A_mA_{m+1} должна быть горизонтальной. Ясно, что можно рассматривать только симметричные пути: если A_mA_{m+1} – самое верхнее звено, то более длинную из частей $A_1 \dots A_m$ и $A_{m+1} \dots A_n$ можно укоротить, заменив ее симметричным отражением другой части относительно серединного перпендикуляра к отрезку A_mA_{m+1} .

Итак, достаточно рассматривать лишь участок подъема (отведя на него не более $n/2 - 1$ наклонных шагов) – спуск будет точно таким же.

Кстати, отсюда видно, что для четного n максимальная высота подъема – обозначим ее h_n – будет такой же, как и для следующего за ним нечетного числа: $h_n = h_{n+1}$.

Если подниматься и опускаться под углом 45° , то максимальная высота, как нетрудно проверить, будет $[n/2] - 1$. Но такой способ будет наилучшим лишь до $n = 7$ (рис.3,а). На рисунке 3,б показан путь для $n = 8$, который поднимается на высоту 4 (а не на $[8/2] - 1 = 3$).

Найти оптимальный путь нам еще раз помогут соображения симметрии. Ясно, что поначалу выгодно максимальным образом наращивать скорость подъема: $1 + 2 + 3 + \dots$; но – чтобы успеть затормозить – так можно поступать лишь до середины участка подъема $[1; m]$ (рис.4, 5).

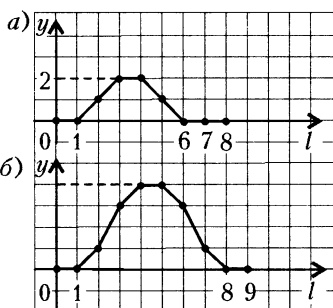


Рис. 3

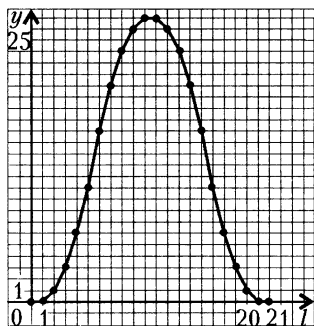


Рис. 4

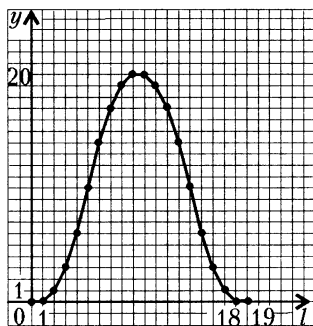


Рис. 5

Эти соображения можно строго оформить так. Оценим разности одновременно с двух сторон участка:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= 0, & y_{m+1} - y_m &= 0, \\ y_2 - y_1 &\leq 1, & y_m - y_{m-1} &\leq 1, \\ y_3 - y_2 &\leq 2, & y_{m-1} - y_{m-2} &\leq 2, \\ y_4 - y_3 &\leq 3, & y_{m-2} - y_{m-3} &\leq 3, \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить оценку для наибольшей высоты h_n подъема, т.е. величину $y_m - y_0 = y_{m+1} - y_0$, нужно сложить оценки первых разностей. Таким образом, для $n = 4k - 2$ (например, $n = 18$, рис.4)

$$h_n \leq 1 + 2 + \dots + (k-1) + (k-1) + \dots + 2 + 1 = k(k-1);$$

для $n = 4k$ (например, $n = 20$, рис.5)

$$h_n \leq 1 + 2 + \dots + (k-1) + k + (k-1) + \dots + 2 + 1 = k(k-1) + k = k^2.$$

Ясно – из тех же рисунков, – что эти оценки точные, т.е. что такую высоту подъема можно реализовать. В частности, $h_{18} = 20$, $h_{20} = 25$.

Итак, мы нашли наибольшую высоту h_n при любом n . Проверьте, что ответ можно записать в такой компактной форме:

$h_n = [n/4] \cdot [(n+2)/4]$, или, еще короче, $h_n = \left[\frac{[n/2]^2}{4} \right]$. (Напомним, что $h_{n+1} = h_n$ при четном n .) Значит, при любом n достаточно точную оценку сверху для h_n дает неравенство $h_n \leq n^2/16$.

Заметим еще, что вершины *оптимальной траектории* в каждой ее четвертой части лежат на одной параболе. Это происходит не случайно. Ведь если последовательность x_0, x_1, \dots, x_m – арифметическая прогрессия (в частности, отрезок натурального ряда), а у последовательности y_0, y_1, \dots, y_m вторые разности $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}$ равны между собой, то точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_m; y_m)$ лежат на одной параболе. Именно так обстоит дело в нашем случае (рис.4, 5): в первой и последней четвертях траектории $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 1$, а в средних четвертях $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = -1$.

Мы увидим, что и в других задачах, где ограничения накладываются на вторые разности, оптимальная траектория также склеена из парабол.

Непрерывный аналог. Скорости и ускорения

Задача 2. *Электровоз, стоявший в точке О, тронулся с места, но, дав «задний ход», через n секунд снова вернулся в точку О и остановился в ней. На какое наибольшее расстояние h он мог удалиться за это время от точки О, если абсолютная величина его ускорения ни в какой момент не превышала a см/с²?*

Эта задача – полный аналог задачи 1, с той разницей, что вместо дискретной последовательности y_0, y_1, \dots, y_n теперь речь идет о функции $y(t)$ непрерывного аргумента t (здесь $t -$

время; будем считать, что t пробегает отрезок от 0 до n). Аналогом первых разностей является скорость (первая производная $y'(t)$ от координаты $y(t)$), аналогом вторых разностей – ускорение (вторая производная $y''(t) = (y'(t))'$). Мы решим эту задачу, пользуясь физическими терминами; те, кто уже знаком с производной и интегралом, легко переведут условие задачи и ее решение на язык математического анализа.

Докажем, что ответ в этой задаче таков: $an^2/16$ (см).

Пусть электровоз достиг самого далекого от точки O положения M в некоторый момент времени m , $0 \leq m \leq n$. Ясно, что скорость его в этот момент равна нулю. Можно считать, что $m \leq n/2$ (в случае $m > n/2$ мы будем следить за движением электровоза на отрезке времени от m до n , а не от 0 до m – ведь до и после момента m движение происходит совершенно аналогично).

Оценим скорость электровоза $v(t)$ при $0 \leq t \leq m$. Поскольку $v(0) = 0$, то $v(t) \leq at$. С другой стороны, поскольку $v(m) = 0$, то $v(t) \leq a(m-t)$. Отсюда следует, что перемещение $h = OM$ – площадь под графиком скорости $v(t)$ на отрезке времени $[0, m]$ – не превышает площади треугольника с основанием m и высотой $am/2$, т.е. $h \leq am^2/4 \leq an^2/16$. Ясно, что эта оценка – точная, причем график оптимального перемещения в каждой четверти отрезка $0 \leq i \leq n$ – парабола (рис.6, а–в).

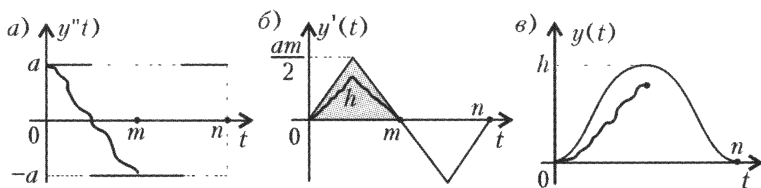


Рис. 6

Мы видим, что для «непрерывного» варианта (задачи 2) ответ и решение получаются более простыми, чем для «дискретного» (задачи 1).

Большинство реальных задач оптимального управления при их математическом оформлении также допускают и непрерывный, и дискретный варианты. При этом непрерывные модели обычно легче исследовать теоретически, и результаты имеют более красивую форму. Но иногда дискретность задачи диктуется существом дела или упрощает корректную постановку математической задачи; да и для расчетов на ЭВМ приходится переходить

дить обычно к некоторому дискретному приближению непрерывной задачи.

В следующем пункте мы вновь вернемся к дискретной задаче, но теперь числа последовательности будут расположены на окружности.

Числа на окружности. Формулировка результата

Задача 3. На окружности расположены n действительных чисел, одно из которых равно 1, а сумма всех равна 0. Докажите, что:

а) найдутся два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$;

б) найдется число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $16/n^2$.

Далее мы очень кратко изложим решение, позволяющее получить для каждого n точные оценки в утверждениях а) и б). Эти наилучшие возможные оценки таковы:

а) максимальная из разностей между соседними числами не меньше $\frac{4}{n}$, если n четно, и не меньше $\frac{4n}{n^2-1}$, если n нечетно (заметим, что $\frac{4n}{n^2-1} > \frac{4}{n}$);

б) максимальное отклонение числа от среднего арифметического двух его соседей не меньше соответственно $\frac{16}{n^2}$, $\frac{16n}{n^3+n-2}$, $\frac{16}{n^2+4}$ или $\frac{16n}{n^3+n+2}$, если n дает при делении на 4 остаток 0, 1, 2 или 3.

На рисунках 7 и 8 изображены оптимальные последовательности (при $n = 30$): для последовательности на рисунке 7 разность между любыми соседними числами не меньше $2/15$ (это — $4/n$ при $n = 30$); для последовательности на рисунке 8 отклонение каждого числа от среднего

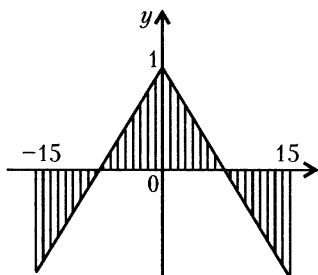


Рис. 7

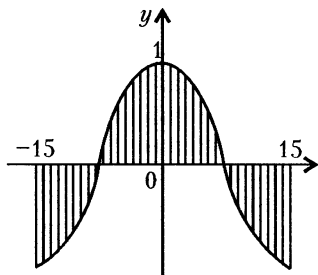


Рис. 8

арифметического двух соседей не меньше $2/113$ и, как и в первой задаче, точки в каждой четверти отрезка лежат на одной параболе. Доказательство результатов а) и б) мы проведем ниже лишь для $n = 30$ (для других n оно примерно такое же). Тем самым мы получим решение цикла задач М398 из «Задачника «Кванта».

Обозначим данные числа через $y_{-14}, y_{-13}, \dots, y_{15}$ так, что $y_0 = 1$. Для задачи а) получить нужную оценку нетрудно: если $|y_{k+1} - y_k| \leq \alpha$ для всех $k = -14, \dots, 15$, то, суммируя оценки разностей, как и в задаче 1, получим $y_k \geq 1 - |k|\alpha$. Но сумма Σy_k равна нулю, поэтому

$$0 = \Sigma y_k \geq 30 - 2(1 + 2 + \dots + 14)\alpha - 15\alpha = 30 - 15^2\alpha,$$

откуда $\alpha \geq 2/15$.

Перейдем к задаче б). Заметим, что величина $\frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} - y_k$, которую мы должны оценить, — это просто половина «второй разности» $(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})$.

Нормировка и повторение. Попробуем действовать с помощью двукратного применения задачи а).

Пусть $y_{k+1} - y_k = y'_k$, $\max_k y'_k = \alpha$.¹

Согласно а), $\alpha \geq 2/15$. К последовательности $z_k = y'_k \alpha$ мы можем вновь применить а) (нетрудно убедиться, что сумма всех 30 чисел z_k равна нулю и что максимальное из z_k равно единице); поэтому $\max_k z_{k+1} - z_k \geq 2/15$, а следовательно,

$$\max_k \frac{|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}|}{2} = (\alpha/2) \max_k |z_k - z_{k-1}| \geq (1/15)\alpha \geq 2/225.$$

Эта оценка примерно вдвое хуже требуемой (в общем случае так же получится оценка $8/n^2$ вместо $16/n^2$).

Идея более тонкой оценки проста: нужно, исходя из оценки $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$ для вторых разностей, точнее оценить первые разности, затем оценить сами числа y_k (пользуясь тем, что $y_0 = 1$) и, наконец, из равенства $\Sigma y_k = 0$ получить оценку снизу для β .

Симметризация и комбинированная оценка. Прежде чем перейти к осуществлению нашего плана, заметим, что можно ограничиться рассмотрением лишь симметричных последовательностей: таких, для которых $y_k = y_{-k}$. В самом деле, из любой последовательности y_k , удовлетворяющей условиям $y_0 = 1$, $\Sigma y_k = 0$, $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$, мы

¹ Здесь и ниже k пробегает значения $14 \leq k \leq 15$. Для $k = 15$ мы полагаем $y_{k+1} = y_{-14}$, ведь соседнее с y_{15} число на окружности — это y_{-14} .

можем получить симметричную последовательность $z_k = \frac{y_k + y_{-k}}{2}$, удовлетворяющую, как нетрудно проверить, всем этим условиям. (В наших обозначениях $y_0 = y_{-0} = y_{15} = y_{-15} = 1$.)

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} y_0 - y_1 &= (2y_0 - y_1 - y_{-1})/2 \leq \beta, & y_{14} - y_{15} &\leq \beta, \\ y_1 - y_2 &\leq 3\beta, & y_{13} - y_{14} &\leq 3\beta, \\ y_2 - y_3 &\leq 5\beta, & y_{12} - y_{13} &\leq 5\beta, \\ & \dots & & \dots \\ y_6 - y_7 &\leq 13\beta, & y_7 - y_8 &\leq 15\beta, & y_8 - y_9 &\leq 13\beta. \end{aligned}$$

Из первых семи неравенств находим

$$y_k \geq 1 - k^2\beta \quad \text{при } 0 \leq k \leq 7;$$

из остальных

$$y_k \geq 1 - (7^2 + 8^2)\beta + (15 - k)^2\beta \quad \text{при } 7 \leq k \leq 15.$$

Суммируя все y_k (напомним, что $y_k = y_{-k}$), найдем $0 \geq 30 - 15(7^2 + 8^2)\beta$, откуда $\beta \geq 2/113$.

В заключение — несколько задач, в том или ином отношении связанных с рассмотренными выше.

1. В последовательности a_0, a_1, \dots, a_n числа a_0 и a_n равны нулю, а модуль разности между каждым числом и средним арифметическим двух его соседей не превосходит единицы. Докажите, что $a_k \leq k(n - k)$.

2. Известно, что a_0, a_1, \dots — натуральные числа, $a_1 > a_0$, и $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$ при всех $k > 1$. Докажите, что $a_{100} > 2^{99}$.

3. Даны числа a_1, \dots, a_7 . Известно, что их сумма равна нулю и что наибольшее из них по абсолютной величине $a_1 = 2$. Оцените максимум абсолютной величины вторых разностей.

4. Дан некоторый набор чисел a_1, \dots, a_n . Известно, что

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2a_1, \quad 0 \leq a_2 \leq a_3 \leq 2a_2,$$

и т.д. Докажите, что в сумме $S = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ можно выбрать знаки так, чтобы выполнялось неравенство: $0 \leq S \leq a_1$.

5. а) Пусть x_0, x_1, \dots, x_n и y_0, y_1, \dots, y_n — две последовательности такие, что их «вторые разности» постоянны: $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = a$, $y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = b$ ($1 \leq k \leq n-1$). Докажите, что точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, ..., $(x_n; y_n)$ лежат на одной прямой или на одной параболе в плоскости Oxy .

б) Докажите, что точки $(x; y)$, где $x = at^2 + b_1t + c_1$, $y = a_2t^2 + b_2t + c$, лежат на одной прямой или на одной параболе.

6. Пусть функция f определена на отрезке $[0, n]$, $f(0) = f(n) = 0$.

Какого наибольшего значения может достигать f , если а) $|f'(x)| \leq M_1$,

б) $|f''(x)| \leq M_2$? (Производные непрерывны всюду, кроме конечного числа точек; f непрерывна на $[0, n]$.)

7. Пусть функция f периодична с периодом T , имеет первую (а в задаче б) – вторую) производную, непрерывную при всех x . Пусть

$$\int_0^T f(x) dx = 0, \quad \max_x |f(x)| = M_0.$$

а) Докажите, что если $\max_x |f'(x)| = M_1$, то $M_0 \leq (M_1 T)/4$.

б) Докажите, что если $\max_x |f''(x)| = M_2$, то $M_0 \leq (M_2 T^2)/16$.

Во многих математических теориях и прикладных задачах, а также в математических играх и головоломках возникают вопросы такого рода: можно ли перейти от одной позиции к другой с помощью некоторых «допустимых» операций (ходов)? Как найти нужную цепочку ходов, если она существует, или доказать, что переход невозможен? В этой статье мы разберем несколько задач такого типа. Их объединяет еще и внешнее сходство: в каждой из них фигурируют целые числа, а «препятствия» переходам, как правило, имеют арифметическую природу.

Примеры, с которых начинается обсуждение каждой задачи, вполне доступны даже ученикам младших классов. Упражнения «со звездочкой» и доказательства общих результатов требуют от читателя серьезных размышлений. Заканчивается статья трудными олимпиадными задачами, последняя из которых примыкает к неэлементарной, бурно развивающейся сейчас теории арифметических групп.

Задача о коне

Задача 1. *Даны натуральные числа m и n . На одном из полей бесконечной шахматной доски стоит фигура, которая ходит «буквой Г» на m полей в одном из направлений и на n в перпендикулярном; назовем ее $\{m; n\}$ -конем. На какие поля доски этот конь может попасть?*

Обычный шахматный конь ($\{1; 2\}$ -конь) может из любого начального поля O попасть на любое другое: за три хода он может попасть на соседнее с O поле, а такими элементарными шагами можно, конечно, прийти куда угодно.

А вот $\{1; 3\}$ -конь, несколько ходов которого показаны на рисунке 1, никак не может попасть на соседнее (по горизонтали) с начальным поле. На шахматной доске очень легко объяснить, что препятствует такому переходу: $\{1; 3\}$ -конь всегда ходит по полям одного цвета. С другой стороны, нетрудно показать, что $\{1; 3\}$ -конь может обойти все поля одного цвета: за три хода он может сдвинуться по диагонали на соседнее

Статья написана в соавторстве с В.Гутенмахером.

поле того же цвета (рис.1), а такими элементарными шагами уже легко обойти все одноцветные поля.

Попробуйте решить задачу 1 для чисел

а) 2 и 5; б) 3 и 7; в) 10 и 25; г) 19 и 79.

Оказывается, $\{m; n\}$ -конь может попасть на любое поле в том и только том случае, когда m и n имеют разную четность и их наибольший общий делитель равен 1.

Полный ответ к задаче 1 приведен в конце раздела «Алгоритм Евклида» (упражнение 10). Сейчас мы займемся более простым вопросом. Результат, который мы получим, полезен и для задачи о коне, и для более серьезных математических задач.

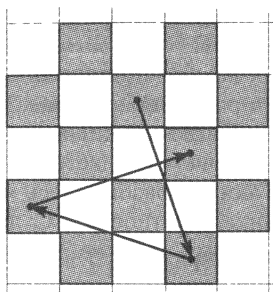


Рис.1 $\{1; 3\}$ -конь может попасть на соседнее (по диагонали) поле того же цвета, такими шагами он может обойти все одноцветные поля

Представление НОД

Задача 2. Даны натуральные числа a и b . За один ход разрешается прибавить к некоторому целому числу одно из чисел a , b или вычесть из него одно из этих чисел. Можно ли таким образом из числа 0 получить число c ?

В этой задаче множество «позиций» — это множество \mathbb{Z} всех целых точек числовой прямой.

Начнем с конкретного примера. Предположим, что у покупателя и кассира есть только купюры в 10 и 25 рублей, причем (чего не бывает в математических задачах!) в неограниченном количестве. Ясно, что покупатель может заплатить кассиру c рублей в том и только том случае, когда c кратно 5.

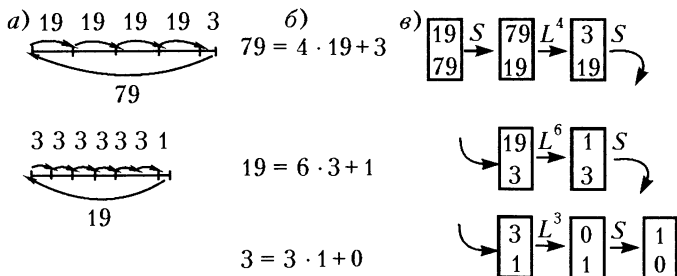


Рис.2. Числа 19 и 79 взаимно просты, поэтому после нескольких делений с остатком получается остаток $1 = \text{НОД}(19, 79)$

Еще пример. Пусть на множестве \mathbb{Z} разрешены ходы ± 19 и ± 79 . С помощью этих ходов можно получить любое целое число: их комбинация позволяет сдвинуться на расстояние 3, а затем и на расстояние 1 (рис.2,а).

Более сложный пример: $a = 819$, $b = 357$. В этом случае тем же приемом удастся найти кратчайший сдвиг – на 21 (рис.3,а). Таким образом, здесь можно устроить переход на любое расстояние, кратное 21. С другой стороны, и a , и b делятся на 21, поэтому никакие другие переходы невозможны.

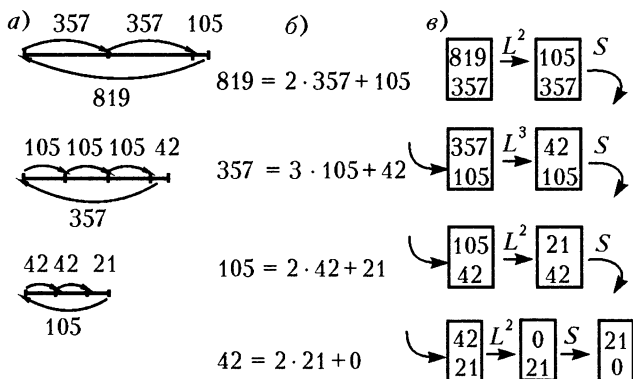


Рис.3. Чтобы найти $\text{НОД}(819, 357) = 21$ с помощью алгоритма Евклида, надо сделать четыре шага

Заметим, что 21 – наибольший общий делитель чисел 819 и 357 (проверьте это!).

Упражнение 1. а) Докажите, что если у покупателя и кассира есть (в неограниченном количестве) трешки и пятерки, то покупатель может заплатить любое число рублей.

б) Можно ли перейти от 0 к 1000, если $a = 123$, $b = 456$? если $a = 589$, $b = 1984$?

в) Какие переходы возможны при $a = 18$, $b = 81$?

Теперь сформулируем ответ к задаче 2 в общем виде. Пусть наибольший общий делитель (НОД) чисел a и b равен d . Тогда переход от 0 к s возможен в том и только том случае, когда число s делится на d .

Попробуйте доказать это.

В несколько иной форме мы получим этот результат в следующем пункте.

Упражнения

2. Докажите, что ответ к задаче 2 не изменится, если число a разрешается только прибавлять, а b – только вычитать.

3. Можно ли на чашечных весах с помощью гирь 36 г и 60 г (эти гири имеются в неограниченном количестве, и их можно класть на обе чашки весов) отвесить а) 150 г; б) 132 г?

Алгоритм Евклида

В следующей задаче позициями будут пары целых чисел.

Задача 3. Три автомата печатают на карточках пары целых чисел. Каждый автомат, прочитав некоторую карточку, выдает новую карточку: первый автомат, прочитав карточку с парой $(x; y)$, выдает карточку $(x - y; y)$, второй – карточку $(x + y; y)$, третий – карточку $(y; x)$.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(1; 2)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку $(19; 79)$? $(819; 357)$?

Какие вообще карточки можно получить, если первоначально имеется карточка с парой чисел $(a; b)$?

Обозначим операции, которые проделывают автоматы, соответственно через L , R и S . Начнем опять с числовых примеров.

Пару $(19; 79)$ из пары $(1; 2)$ операциями L , R , S получить можно. Чтобы осуществить нужный переход, удобнее не подниматься от $(1; 2)$ к $(19; 79)$, а спускаться в обратном направлении (рис.4).

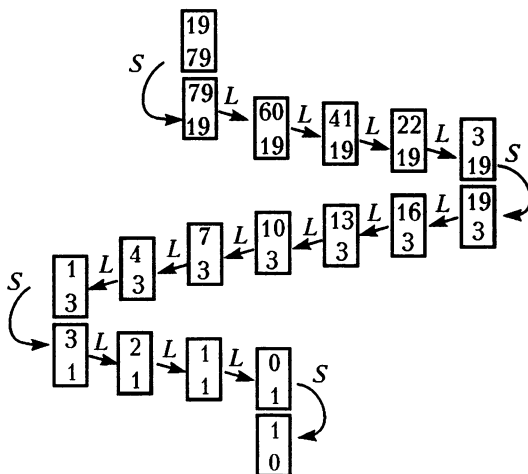


Рис.4. Каждый «марш» этой лестницы – один шаг алгоритма Евклида

Записав получившуюся цепочку в обратном порядке (и, конечно, заменяя при этом L и R), получим «подъем» от $(1; 2)$ к $(19; 79)$.

На рисунке 4 «спуск» от $(19; 79)$ к $(1; 2)$ мы продолжили до пары $(1; 0)$; сокращенная запись этого «спуска» приведена на рисунке 2, в (L^k означает, что операция L продлевается k раз подряд). Собственно говоря, тот же спуск мы уже продлевали в соответствующем примере к предыдущей задаче (рис. 2, а).

Спуск, начинающийся с пары $(819; 357)$, сокращенно записан на рисунке 3, в – запишите его подробно. Здесь пара $(1; 2)$ (или $1; 0$) не получается. И не удивительно – тому есть препятствие: *все получаемые числа делятся на 21*. В каком бы порядке мы ни применяли операции L, R, S , избавиться от этого препятствия не удастся, поскольку, как нетрудно доказать, эти операции сохраняют общие делители чисел на карточке: $\text{НОД}(x - y, x) = \text{НОД}(x + y, y) = \text{НОД}(x, y)$. Поэтому перейти от пары $(819; 357)$ к паре $(1; 2)$ или обратно нельзя.

Упражнение 4. Можно ли с помощью операций L, R, S перейти а) от пары $(1; 10)$ к паре $(5; 25)$? б) от $(18; 81)$ к $(36; 63)$? в) от $(589; 1984)$ к $(31; 1953)$?

Теперь мы можем сформулировать ответ на последний, общий вопрос задачи 3: *пару $(a; b)$ можно перевести в пару $(p; q)$ в том и только том случае, когда $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(p; q)$* . Это условие необходимо, поскольку, как мы уже говорили, наши операции сохраняют НОД. Но оно также и достаточно: если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p, q) = d$, то каждую из этих пар операциями L, R, S можно привести к паре $(d; 0)$; проделав спуск от $(a; b)$ к $(d; 0)$ и затем подъем от $(d; 0)$ к $(p; q)$, мы получим цепочку от $(a; b)$ к $(p; q)$.

Покажем, почему от любой пары $(a; b)$ можно перейти к паре $(d; 0)$. Заметим, что если один из элементов пары отрицателен, то его легко сделать положительным (рис. 5). А пару $(a; b)$ с натуральными a и b

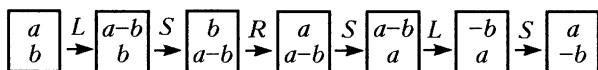


Рис.5 Операциями L, R, S можно поменять знак y одного числа на карточке

можно привести к паре $(d; 0)$ тем же способом, который мы применили в примерах: на каждом шаге (кроме перестановок-симметрий) больший элемент пары уменьшается до тех пор, пока мы не придем к финалу $\rightarrow (d; d) \rightarrow (0; d) \rightarrow (d; 0)$.

Решая задачу 3, мы получили удобный способ отыскания наибольшего общего делителя двух чисел: от пары $(a; b)$, где $a > b > 0$, переходим к паре $(b; r)$, где r – остаток от деления a на b , и повторяем эту операцию до тех пор, пока не получим пару $(d; 0)$. Последний не равный нулю остаток d и есть НОД($a; b$) (рис.2,6, 3,6). Этот способ называется алгоритмом Евклида.

Упражнения

5. Докажите, что из пары (1357; 2468) нельзя получить пару (1234; 5678); из пары (123; 457) нельзя получить (7890; 1979).

6. Приведите примеры, показывающие, что операции задачи 3 не терестановочны: $LS \neq SL$, $RS \neq SR$ (разумеется, $LR = RL$).

7. Найдите с помощью алгоритма Евклида НОД(589, 1984), НОД(123456789, 987654321).

Целочисленной решеткой \mathbb{Z}^2 называется множество всех точек плоскости с целыми координатами.

Следующее упражнение и рисунок 6 проясняют геометрический смысл задачи 3:

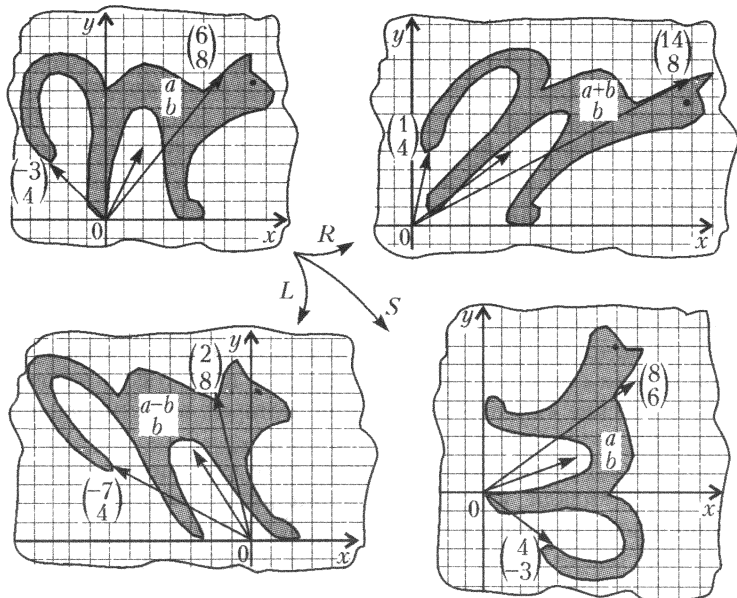


Рис.6 «Левый перекосяк» $L(x; b) \rightarrow (x - b; b)$, «правый перекосяк» $R(x; b) \rightarrow (x + b; b)$, «симметрия» $S(x; b) \rightarrow (b, x)$ – линейные преобразования плоскости, осуществляющие взаимно однозначные отображения целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 на себя

8. Докажите, что если отрезок OA , где O – начало координат, A – узел целочисленной решетки \mathbb{Z}^2 , разбивается другими узлами на d частей, то операциями L , R и S узел A можно перевести в узлы $(d; 0)$ и $(-d; 0)$ и нельзя перевести ни в какие другие точки оси Ox .

Упражнения 9 и 10 обобщают задачи 1 и 2:

9*. Пусть заданы n натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Докажите, что целое число c можно получить из 0 ходами $\pm a_1, \pm a_2, \dots, \pm a_n$ тогда и только тогда, когда c делится на $\text{НОД}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

10*. а) Пусть на плоскости Oxy заданы n векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ с целочисленными координатами. Докажите, что множество точек D плоскости, в которые можно попасть из точки O ходами $\pm \vec{v}_1, \pm \vec{v}_2, \dots, \pm \vec{v}_n$, представляет собой множество вершин некоторой косоугольной решетки (так называется множество вершин параллелограммов, на которые два семейства равноотстоящих параллельных прямых разрезают плоскость).

б) Пусть вместе с каждым вектором \vec{v}_i в семействе векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ имеется равный ему по длине и перпендикулярный. Тогда множество «достижимых» точек D будет множеством вершин некоторой квадратной решетки.

Теперь уже нетрудно найти ответ к задаче 1: пусть $m = dm_1, n = dn_1$, где $d = \text{НОД}(m, n)$; тогда, если $m_1 + n_1$ нечетно, достижимы все поля $(dx; dy)$, где x и y – произвольные целые числа (решетка с шагом d); если же $m_1 + n_1$ четно – поля $(dx; dy)$, где $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$ и $x + y$ четно (решетка с шагом $d\sqrt{2}$, повернутая на угол 45° по отношению к линиям доски).

Некоторые итоги

В заключительной части статьи мы познакомим вас еще с двумя довольно трудными задачами. Но прежде, оглянувшись назад, попробуем высказать общие соображения, которые помогли нам – и помогут в дальнейшем – выяснять, возможен ли переход от одной «позиции» к другой, и назовем математические «имена» тех понятий, которые встретились нам в задачах.

1°. Чтобы доказать невозможность того или иного перехода, мы обнаруживали некоторое препятствие – характеристику позиции, сохраняющуюся (как говорят, *инвариантную*) при всех допустимых ходах, но различную для начальной и конечной позиций; таким образом, доказательство невозможности того или иного перехода сводилось к отысканию подходящего *инварианта*. Таким инвариантом в задаче о $\{1; 3\}$ -коне является цвет поля, в задаче 2 – остаток от деления числа на $\text{НОД}(a, b)$, в задаче 3 – НОД пары чисел на карточках.

2°. Чтобы построить цепочку переходов на решетке, часто бывает полезно найти какой-то элементарный «ключевой» ход (или комбинацию ходов), либо свести дело к какой-то простейшей канонической позиции, а затем уже сформулировать общее правило (алгоритм) отыскания переходов. Так, в задаче о $\{1; 3\}$ -коне достаточно научиться делать ход по диагонали, в задаче 2 – сдвиг на $d = \text{НОД}(a, b)$, в задаче 3 – «спуск» к канонической позиции $(d; 0)$.

3°. Во всех рассмотренных пока задачах переходы были обратимы: если от позиции A можно было перейти к позиции B , то можно было вернуться и обратно – от B к A . В таких задачах все множество позиций разбивается на *классы эквивалентности*: внутри одного класса от каждой позиции можно перейти к любой другой, а никакие переходы между позициями из различных классов невозможны.

Сейчас мы рассмотрим задачу, в которой такой обратимости нет, но зато в ней прекрасно работают соображения 1° и 2°.

Избавление от двоек

Задача 4. *Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом: первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a + 1; b + 1)$; второй автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только в том случае, когда оба числа a и b четны); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.*

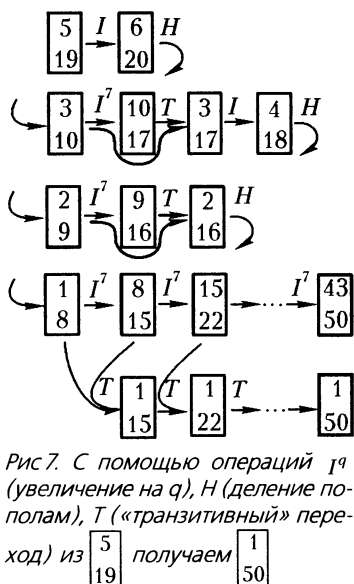
Пусть первоначально имеется карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку $a) (1; 50); б) (1; 100)$?

Пусть первоначально имеется карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

Эта задача предлагалась на XII Всесоюзной математической олимпиаде ученикам 8–10 классов. Впрочем, даже пятиклассникам хватит знаний, чтобы решать ее.

Обозначим операции, которые выполняют наши новые автоматы, соответственно, через I , H и T . На рисунке 7 показано, как из карточки $(5; 19)$ получить «простейшую» карточку $(1; 8)$ и затем – карточку $(1; 50)$ (вместо « k раз применить операцию I » мы снова пишем I^k). Таким образом, в задаче а) ответ утвердительный.

А вот карточку $(1; 100)$, про которую спрашивается в задаче



используя автоматы I , H и T ,

- а) из карточки (3; 33) получить карточки (5; 29), (1; 101), (1; 1978);
- б) из карточки (5; 29) получить (3; 33), (1; 100), (1; 1979)?

Сформулируем теперь ответ на последний, общий вопрос задачи 4: из карточки $(a; b)$, в которой $b - a = 2^m d$, где $d > 0$ и нечетно, можно получить те и только те карточки $(p; q)$, в

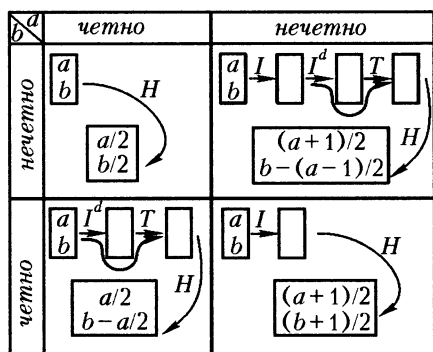


Рис. 8. Больше число b на карточке $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ можно уменьшить ($d = b - a$; $a > 1$ или $a = 1$, b нечетно)

б), из карточки (5; 19) получить не удастся. Препятствие можно обнаружить, внимательно изучив тот же рисунок 7: разность чисел на каждой карточке делится на 7. В каком бы порядке мы ни применяли автоматы, избавиться от этого свойства не удастся – его сохраняют операции I , H и T . (Для I это очевидно. Для H : если a и b – четные и $b - a$ делится на 7, то и $b/2 - a/2$ делится на 7. Для T : если разности $b - a$ и $c - b$ делятся на 7, то и $c - a = (c - b) + (b - a)$ делится на 7.) Но разность $100 - 1 = 99$ на 7 не делится, так что ответ к б) отрицательный.

Упражнение 11. Можно ли, используя автоматы I , H и T ,

которых разность $p - q > 0$ делится на d . Таким образом, можно избавиться от всех двоек в разложении $b - a$, но нечетный делитель разности $b - a$ служит непреодолимым препятствием.

В самом деле, как мы уже говорили (для $d = 7$), из карточек, у которых разность делится на нечетное число d , с помощью операций I , H , T получаются только карточки, обладающие тем же

свойством. С другой стороны, от карточки $(a; b)$, где $b - a = 2^m d$ (d нечетно), можно перейти к карточке $(1; d + 1)$. (Один шаг такого перехода показан на рисунке 8.) Получив карточку $(1; d + 1)$, легко изготовить любую карточку $(1; kd + 1)$ (как в задаче а) – из карточки $(1; 8)$) и затем – любую карточку $(l; kd + 1)$ с разностью чисел, кратной d .

Упражнения

12. а) Предположим, что автомат, выполняющий операцию T , сломался. Какие карточки можно получить из $(5; 19)$? из $(5; 29)$?

б) Пусть сломался автомат, выполняющий операцию H . Какие карточки можно получить из карточки $(a; b)$?

13*. Какие карточки можно получить операциями I, H, T из n данных карточек $(a_1; b_1), (a_2; b_2), \dots, (a_n; b_n)$?

Задача 4 выглядит довольно искусственной. Поэтому, возможно, вам будет интересно узнать, что она возникла из леммы в одной серьезной математической книге (С.Улам, «Нерешенные математические задачи»).

Пары векторов

Следующая задача продолжает задачу 3. Здесь фигурируют те же три операции L, R и S , но в задаче 3 они применялись к парам целых чисел, а теперь «позициями» будут пары векторов $(a; b)$ и $(c; d)$ с целыми координатами, и эти операции будут применяться одновременно к обоим векторам пары. Координаты обоих векторов удобно записывать в два столбика – получится табличка $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ из четырех чисел; такие таблички в математике называются *матрицами*.

Задача 5. С матрицей $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ разрешается проделывать следующие операции:

$$L: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$R: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$S: \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Можно ли этими операциями из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ получить следующие матрицы: а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Какие вообще матрицы можно получить из данной матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$?

Будем называть две матрицы *эквивалентными*, если одну из них операциями L , R и S можно перевести в другую (здесь переходы обратимы, так что все матрицы разбиваются на классы эквивалентных).

В решении очень трудной задачи 5 нам встретится несколько препятствий. Будем преодолевать их последовательно.

а) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ не эквивалентны; второй вектор $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ никак нельзя перевести в $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, поскольку $\text{НОД}(5, 7) \neq \text{НОД}(3, 9)$. Вообще, из результата задачи 3 сразу вытекает условие, необходимое для эквивалентности двух матриц $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(p, q), \\ \text{НОД}(c, d) = \text{НОД}(r, s). \end{cases} \quad (*)$$

Однако, как мы сейчас увидим, это условие не достаточно для эквивалентности матриц. Во всяком случае, если это условие выполнено, мы можем разделить каждый столбец матрицы на его НОД и далее рассматривать такие *сокращенные* матрицы (ведь НОД каждого столбца сохраняется при всех операциях)¹.

б) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ не эквивалентны, потому что при любом преобразовании L , R , S из матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ получится матрица с одинаковыми столбцами $\begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix}$.

¹ Термин «сокращенная» естественно возникает, если смотреть на матрицу $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ как на пару дробей $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$.

в) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ тоже не эквивалентны; тут возникает новое препятствие: величина

$$\Delta = \Delta \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = |ad - bc|.$$

Она сохраняется при всех преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Проверим это для L : $(a - b)d - b(c - d) = ad - bc$. (Для R и S проведите проверку сами.) Поскольку $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 3$, а $\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, эти матрицы не эквивалентны.

Заметим, что $\Delta \begin{pmatrix} p & p \\ q & q \end{pmatrix} = 0$.

Величина $ad - bc$ очень часто возникает в разных задачах про матрицы и называется *определителем* матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

г) Матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ эквивалентны: цепочка преобразований, приводящих первый вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ к каноническому виду $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, и небольшие дополнительные ухищрения приводят к цели (рис.9). На рисунке 9 хорошо виден и наш инвариант Δ : это – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Осталось еще выяснить,

д) эквивалентны ли матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Оказывается, нет, хотя указать препятствие здесь не так просто. Его геометрический смысл ясен из рисунков 9 и 10.

Теперь мы можем дать ответ на общий вопрос задачи 5. Любую сокращенную матрицу операциями L, R, S можно преобразовать к *каноническому виду*

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}, \text{ где } 0 \leq r < \Delta, \quad (1)$$

$$\text{НОД}(r, \Delta) = 1,$$

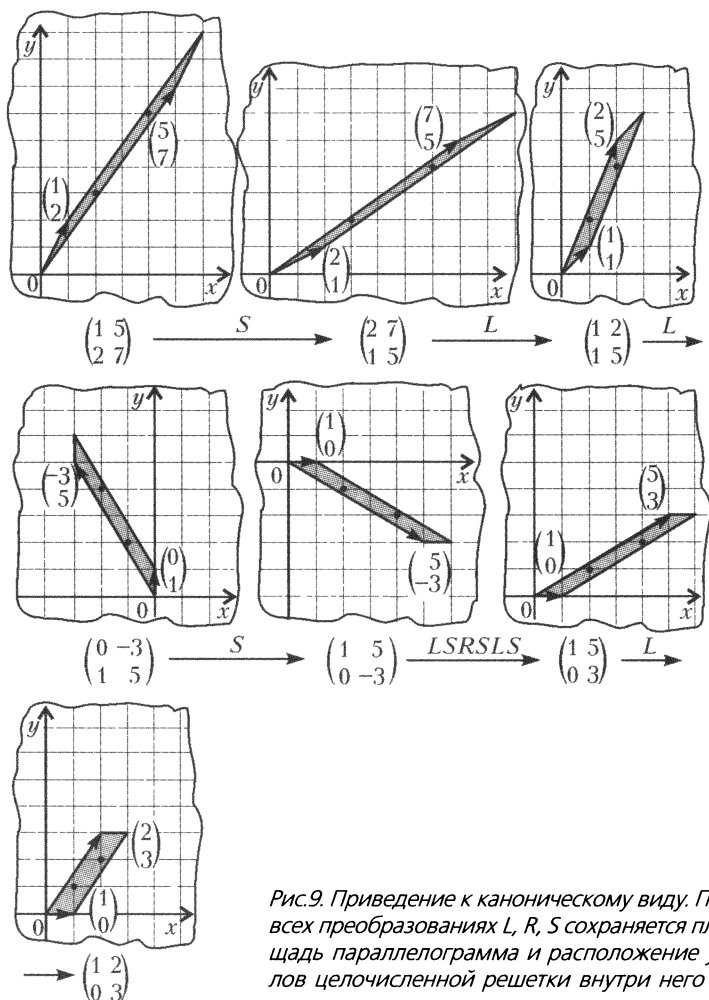


Рис.9. Приведение к каноническому виду. При всех преобразованиях L , R , S сохраняется площадь параллелограмма и расположение узлов целочисленной решетки внутри него

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (если } \Delta = 0 \text{)}. \quad (2)$$

Две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) и соответствующие сокращенные матрицы имеют один и тот же канонический вид. (Несколько иначе критерий эквивалентности сформулирован в упражнении 20.)

В самом деле, любую сокращенную матрицу можно преобразовать к каноническому виду так же, как раньше мы преобразовали матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ (см. рис.9). Тот факт, что r является инвариантом, вытекает из упражнений 14, 15.

Упражнения

14*. Пусть матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

имеет канонический вид (1).

Тогда внутри параллелограмма $OABC$, построенного на векторах $\overline{OA} = (a; b)$ и $\overline{OC} = (c; d)$, лежит $\Delta - 1$ целая точка. Все эти точки $M_1, M_2, \dots, M_{\Delta-1}$ могут быть получены при помощи векторных равенств:

$$\overline{OM}_j = \{j/\Delta\}\overline{OC} + \{j(1-r/\Delta)\}\overline{OA},$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x .

15. Пусть $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(c, d) = 1$, $\Delta = |ad - bc| \neq 0$. Тогда существует единственное r такое, что $0 \leq r < \Delta$, $\text{НОД}(r, \Delta) = 1$ и оба числа $ra - c$, $rb - d$ делятся на Δ , причем это r сохраняется при преобразованиях L, R, S матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Это упражнение удобно для конкретных вычислений числа r , если Δ невелико.

16. Какие матрицы среди следующих эквивалентны, а какие – нет:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 17 & 39 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 19 & 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 & 1 \\ 79 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 & 60 \\ 50 & 77 \end{pmatrix}?$$

17. Выше мы не рассматривали матрицы, у которых один из столбцов нулевой. В каком случае такие матрицы эквивалентны?

18. Докажите, что любые две матрицы, у которых $\Delta = 1$, эквивалентны.

19*. Сколько существует всего классов неэквивалентных матриц с $\Delta = 3$, $\Delta = 4$, $\Delta = 5$, $\Delta = 10$, $\Delta = 12$? Сколько среди них сокращенных? Нарисуйте для каждого класса матриц расположение узлов в соответствующем параллелограмме (как на рисунке 10).

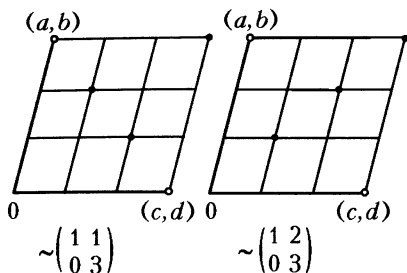


Рис.10. В параллелограммах для матриц $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ расположение узлов целочисленной решетки различно

20. Докажите, что для любой матрицы существует единственная эквивалентная ей матрица $\begin{pmatrix} k & l \\ 0 & m \end{pmatrix}$, где $k \geq 0$, $m \geq 0$, $l \geq 0$ и $l < m$ при $m \neq 0$.

Другой возможный подход к задачам 3 и 5 – выяснить, какие вообще преобразования целочисленной решетки можно получить композициями операций L , R , S (подобно тому, как в задаче 2 мы выяснили, какие вообще сдвиги можно получить композициями сдвигов $\pm a$, $\pm b$). Оказывается, все эти преобразования решетки имеют вид $(x; y) \rightarrow (ax + by; cx + dy)$, где a, b, c, d – целые числа и $|ad - bc| = 1$. Но это уже – тема отдельной статьи, посвященной линейной алгебре.

Читать эту статью (или проводить на ее основе занятие математического кружка) можно по-разному. Простейший способ – разобрать решения предложенных в ней задач, пропустив мелкий шрифт, а затем закрепить продемонстрированные приемы, перерешав предложенные в конце статьи упражнения. Но если вас заинтересовала та или иная задача или серия задач, можно поступить и иначе: внимательно прочитать помещенный вслед за ней мелким шрифтом текст и, пользуясь указанной автором дополнительной литературой, более глубоко разобраться в существе затронутых вопросов.

Читателю, вероятно, известны на первый взгляд трудные геометрические задачи, которые мгновенно решаются, если заменить одну данную точку другой, симметричной ей относительно какой-то прямой. Соображения симметрии очень важны и в алгебре.

В этой статье мы рассмотрим ряд ситуаций, в которых число вида $a + b\sqrt{d}$ полезно заменить сопряженным $a - b\sqrt{d}$. Мы увидим, как этот простой прием – замена знака перед радикалом – помогает в решении разнообразных задач алгебры и анализа – от нехитрых оценок и преобразований до трудных олимпиадных задач и замысловатых придумок составителей конкурсных экзаменов.

Большинство наших примеров может служить первым знакомством с глубокими математическими теориями (кое-где мы указываем статьи и книги для продолжения знакомства). Среди задач, включенных в статью, две – из «Задачника «Кванта» и несколько – из писем читателей, уже испытавших удовольствие от трюков с радикалами и желающих поделиться ими с другими.

Пары сопряженных чисел появляются вполне естественным образом, когда мы решаем квадратное уравнение, а корень из дискриминанта не извлекается: скажем, уравнение $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет пару «сопряженных» корней: $\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

К этому мы еще вернемся, а начнем с примеров другого рода: займемся «перебросками»...

...Из числителя в знаменатель (и обратно)

Если в книжке указан ответ к задаче $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$, а у вас получилось $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ – не спешите искать ошибку в решении: ответ правильный – эти числа равны, потому что

$$(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=3^2-7=2.$$

Вот несколько характерных примеров, где полезно перенести «иррациональность» из числителя в знаменатель или наоборот.

1. Найдите сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Эта сумма мгновенно «сворачивается», если переписать ее так:

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\dots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=-1+10=9.$$

По выражению из статьи [1] «остаются крайние» (см также [5]).

2. Докажите, что для любых натуральных m и n

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|\geq\frac{1}{\alpha n^2}, \quad (1)$$

где $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Подобный факт использован в решении трудной задачи М514 ([2]).

В самом деле, всегда

$$\left|\frac{m-n\sqrt{2}}{n}\right|=\frac{|m^2-2n^2|}{(m+n\sqrt{2})n}\geq\frac{1}{(m+n\sqrt{2})n}, \quad (2)$$

поскольку число $|m^2-2n^2|$ – целое и отлично от 0 (равенство $m^2=2n^2$ невозможно – подумайте, почему!). Если бы выполнялось неравенство, противоположное (1), то должно было бы быть

$$m< n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}$$

и

$$\begin{aligned} n(m+n\sqrt{2})&<n\left(2n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}\right)=2n^2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}= \\ &=2n^2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}\leq n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\alpha n^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Но из (2) и (3) следует (1). Значит, наше предположение неверно, т.е. (1) выполнено.

Неравенство (1) показывает, что число $\sqrt{2}$ сравнительно плохо приближается дробями с небольшими знаменателями; аналогичное неравенство (только с другим коэффициентом α)¹ выполнено не только для $\sqrt{2}$, но и для любой «квадратичной иррациональности». Вопросы о приближениях квадратичных иррациональностей рациональными числами – далеко продвинутая и важная для приложений область теории чисел ([3], [4]); с приближениями числа $\sqrt{2}$ мы еще встретимся ниже (см. упражнение 4).

3. Найдите предел последовательности $a_n = (\sqrt{n^2 + 1} - n)n$.
Преобразуем a_n так:

$$(\sqrt{n^2 + 1} - n)n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 1/n^2}}.$$

Теперь ясно, что a_n убывает и стремится к пределу $1/2$.

В противоположность предыдущему примеру здесь мы имеем дело с хорошим приближением: $\sqrt{n^2 + 1} - n < 1/(2n)$.

4 (М532). Даны две последовательности $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ и $b_n = \sqrt{4n+2}$. Докажите, что

а) $[a_n] = [b_n]$;

б) $0 < b_n - a_n < 1/(16n\sqrt{n})$.

В разности $b_n - a_n$ появляется «тройная иррациональность»; к таким иррациональностям мы еще вернемся (см. задачу 8), но пока мы будем рассматривать $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = a_n$ как одно целое. Заметим, что величина $a_n^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}$, очевидно, заключена между $4n + 1$ и $4n + 2 = b_n^2$, поскольку $n < \sqrt{n(n+1)} < n + 1$. Итак, мы уже получили $a_n < b_n$ – левое неравенство в б). Кроме того, число $b_n^2 = 4n + 2$, дающее при делении на 4 в остатке 2, не может быть полным квадратом (проверьте!), поэтому квадрат целого числа $[b_n]$ не больше $4n + 1$; из неравенств $[b_n] \leq \sqrt{4n+1} < a_n < b_n$ вытекает а). Теперь осталось оценить разность $b_n - a_n$ сверху. Посмотрите, как здесь дважды работает

¹ Разумеется, (1) выполнено и при всех $\alpha > \sqrt{3} + \sqrt{2}$, но константа $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ здесь не наименьшая из возможных.

переброска «сопряженного» числа в знаменатель:

$$\begin{aligned}\sqrt{4n+2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} &= \frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{4n+2} + \sqrt{n} + \sqrt{n+1})} \frac{1}{(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} \leq\end{aligned}$$

(тут, конечно, нам повезло: разность квадратов $(2n+1)^2 - 4n(n+1)$ равна 1)

$$\leq \frac{1}{(2\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n})(2n+2n)} = \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

Заметим, что и эта оценка очень точная. Но убедиться в этом (и вообще исследовать поведение функции с многими радикалами) лучше уже не с помощью алгебраических преобразований, а средствами анализа – заменить переменную n на $h = 1/n$ и воспользоваться формулой Тейлора $\sqrt{1+h} = 1 + h/2 - h^2/8 + \dots$ (См. [6].)

Заменим плюс на минус

Мы уже говорили о пользе симметрии в геометрических задачах. Своего рода симметрией в *алгебре* является замена плюса на минус.

Так, если какое-либо выражение от \sqrt{d} равно $p + q\sqrt{d}$ и мы всюду в этом выражении заменим \sqrt{d} на $-\sqrt{d}$, то естественно ожидать, что новое выражение окажется равным сопряженному числу $p - q\sqrt{d}$. Мы будем пользоваться таким очевидным частным случаем этого свойства (a и b – рациональны, \sqrt{d} – нет):

$$(a + b\sqrt{d})^n = p + q\sqrt{d} \Rightarrow (a - b\sqrt{d})^n = p - q\sqrt{d}. \quad (4)$$

5. Докажите, что уравнение

$$(x + y\sqrt{5})^4 + (z + t\sqrt{5})^4 = 2 + \sqrt{5}$$

не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t .

Можно, конечно, найти отдельно сумму членов левой части, не содержащих $\sqrt{5}$ (она должна быть равна 2), и отдельно – коэффициент при $\sqrt{5}$ (он должен равняться 1). Но что делать с полученной громоздкой системой, неясно. Вместо этого воспользуемся (4) и заменим плюс перед $\sqrt{5}$ на минус!

$$(x - y\sqrt{5})^4 + (z - t\sqrt{5})^4 = 2 - \sqrt{5}.$$

Слева стоит неотрицательное число, справа – отрицательное.

6. Докажите, что существует бесконечно много пар $(x; y)$ натуральных чисел, для которых x^2 отличается от $2y^2$ на 1:

$$|x^2 - 2y^2| = 1. \quad (5)$$

Несколько таких пар с небольшими $(x; y)$ легко найти подбором: это $(1; 1)$, $(3; 2)$, $(7; 5)$, $(17; 12)$, ... (рис.1). Как продолжить этот набор? Можно ли записать общую формулу для этих решений?

Найти ответы на эти вопросы нам поможет число $1 + \sqrt{2}$. Закономерность, позволяющая получать все новые и новые решения $(x; y)$, указана в таблице:

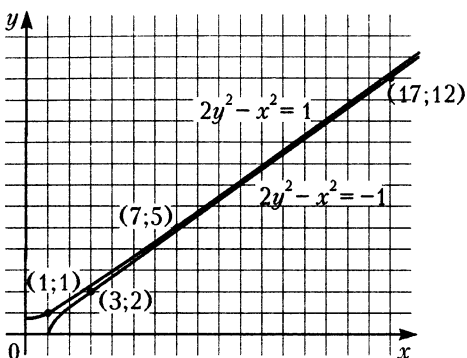


Рис.1. Проходят ли эти гиперболы через бесконечное число узлов клетчатой бумаги?

n	$(1 + \sqrt{2})^n$	x_n	y_n	$x_n^2 - 2y_n^2$	$(1 - \sqrt{2})^n$
1	$1 + \sqrt{2}$	1	1	$1 - 2 = -1$	$1 - \sqrt{2}$
2	$3 + 2\sqrt{2}$	3	2	$9 - 8 = 1$	$3 - 2\sqrt{2}$
3	$7 + 5\sqrt{2}$	7	5	$49 - 50 = -1$	$7 - 5\sqrt{2}$
4	$17 + 12\sqrt{2}$	17	12	$289 - 288 = 1$	$17 - 12\sqrt{2}$
5	$41 + 29\sqrt{2}$	41	29	$1681 - 1682 = -1$	$41 - 29\sqrt{2}$
...

Какой будет шестая строчка?

Видно, что коэффициенты x_n , y_n в числе

$$x_n + y_n \sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$$

будут давать нужную пару. Доказать это поможет колонка таблицы из сопряженных чисел (мы снова применяем (4)):

$$x_n - y_n \sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n.$$

Перемножив два последних равенства, получим

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = ((1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}))^n = (-1)^n,$$

и интересующее нас выражение попеременно равно то 1, то -1 . Складывая и вычитая эти же два равенства, мы получим явное выражение для x_n и y_n :

$$x_n = \left((1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \right) / 2,$$

$$y_n = \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right) / 2\sqrt{2}.$$

Можно ли в решении этой задачи про целые числа обойтись без иррациональных чисел $1 + \sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{2}$? Теперь, зная ответ, мы можем легко выразить $(x_{n+1}; y_{n+1})$ через предыдущую пару $(x_n; y_n)$: из $x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$ вытекает

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n, \quad y_{n+1} = x_n + y_n. \quad (6)$$

До этого рекуррентного соотношения можно было, видимо, догадаться по нескольким первым решениям, а потом проверить, что

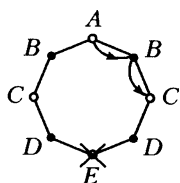
$$|x_n^2 - 2y_n^2| = |x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2|.$$

Добавив начальное условие $x_1 = 1, y_1 = 1$, отсюда (по индукции) можно было бы заключить, что $|x_n^2 - 2y_n^2| = 1$ для любого n . Далее, выразив обратно $(x_n; y_n)$ через $(x_{n+1}; y_{n+1})$, «методом спуска» ([8]) можно доказать, что найденной серией исчерпываются все решения уравнения (5) в натуральных числах $(x; y)$. Подобным же образом решается любое «уравнение Пелля» $x^2 - dy^2 = c$ (а к уравнениям такого типа сводится любое квадратное уравнение в целых числах x, y), но у исходного уравнения может быть несколько серий решений ([7]).

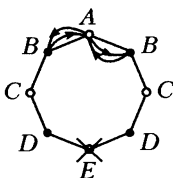
Рекуррентные соотношения типа (6) возникают не только в теории чисел, но и в разных задачах анализа, теории вероятности. Вот характерный пример комбинаторной задачи такого типа (она предлагалась на международной олимпиаде в Лондоне):

7 (M595). *В вершине A правильного восьмиугольника сидит лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, противоположной A, она может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попад в E, лягушка останавливается и остается там. Найдите количество e_m различных способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в E ровно за m прыжков.*

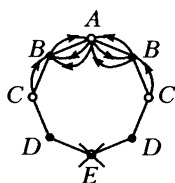
Если раскрасить вершины восьмиугольника через одну в черный и белый цвет (рис.2), сразу станет ясно, что $e_{2k-1} = 0$ при любом k : цвет вершин при каждом прыжке меняется. Обозначим через a_n и c_n количество способов, которым лягушка может за $2n$ прыжков попасть из вершины A, соответственно, в вершину A и в одну из вершин C (из соображений симметрии ясно, что в



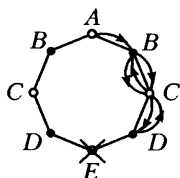
а) $c_1 = 1$



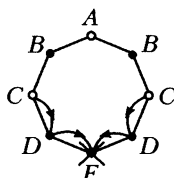
б) $a_1 = 2$



в) $a_{n+1} = 2a_n + 2c_n$



г) $c_{n+1} = a_n + 2c_n$



д) $e_{2n} = 2c_{n-1}$

Рис.2. а) Из A в C за два прыжка можно попасть только одним способом: $c_1 = 1$.

б) Из A в A за два прыжка можно попасть двумя способами: $a_1 = 2$.

в) В A можно попасть из C двумя способами и из A двумя способами: $a_{n+1} = 2a_n + 2c_n$.

г) В C можно попасть из A одним способом и из C — двумя: $c_{n+1} = a_n + 2c_n$.

д) В E можно попасть из C двумя способами: $e_{2n} = 2c_{n-1}$

каждую из вершин, обозначенных на рисунке буквой C , можно попасть одним и тем же числом способов). Как легко проверить (см. рисунки 2, а, б, в, г)),

$$a_1 = 2, \quad c_1 = 1;$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 2c_n, \\ c_{n+1} = a_n + 2c_n. \end{cases} \quad (7)$$

А интересующее нас число e_{2n} равно, очевидно, $2c_{n-1}$ (рис.2, д).

Как же найти явную формулу для a_n и c_n ? Запишем наше рекуррентное соотношение (7) так:

$$a_{n+1} + c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + c_n\sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) \quad (8)$$

и — как вы уже, конечно, догадались — еще так:

$$a_{n+1} - c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n - c_n\sqrt{2})(2 - \sqrt{2}). \quad (9)$$

Отсюда по индукции, пользуясь (7), получаем:

$$a_n + c_n\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^{n-1} (a_1 + c_1\sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^n;$$

$$a_n - c_n\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^{n-1} (a_1 - c_1\sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^n.$$

Поэтому $c_n = \left[(2 + \sqrt{2})^n - (2 - \sqrt{2})^n \right] : 2\sqrt{2}$, а так как $e_{2n} = 2c_{n-1}$, получаем окончательно

$$e_{2n} = \left[(2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \right] / \sqrt{2}; \quad e_{2n-1} = 0.$$

Задача решена. Неясно только, как в этой задаче (и в предыдущей задаче 6) можно было додуматься до формул, содержащих $\pm\sqrt{2}$, — ведь в задаче речь идет о целых числах! (Для участников олимпиады и читателей «Кванта» задача 7 была облегчена тем, что в формулировке указывался ответ — см. «Квант» № 11 за 1979 г., М595).

Однако «сопряженные числа» возникли бы совершенно автоматически, если бы мы владели началами линейной алгебры (см. [12]) и применили стандартные правила этой науки к решению уравнений (7). Эти правила предлагают сначала выяснить, какие геометрические прогрессии ($a_n = a_0\lambda^n$, $c_n = c_0\lambda^n$) удовлетворяют данному рекуррентному соотношению. Значения, для которых такие прогрессии существуют, — они называются *характеристическими значениями* или *собственными числами* — определяются из некоторого уравнения (оно тоже называется *характеристическим*). Для (7) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2 - 4\lambda = 0$, его корни — как раз $2 + \sqrt{2}$ и $2 - \sqrt{2}$. Зная эти корни, любое решение рекуррентного соотношения мы можем получить как «линейную комбинацию» соответствующих геометрических прогрессий ([11]). «Начальное условие» (в нашем случае $a_1 = 2$, $c_1 = 1$) определяет нужное нам решение однозначно.

Неудивительно, что даже самые простые рекуррентные целочисленные последовательности, для которых характеристическое уравнение — квадратное с целыми коэффициентами (примеры — те же (6) и (7) или последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8..., $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ — см. [9], [10]), выражаются, как функции номера, с помощью «сопряженных» квадратичных иррациональностей.

Заметим, что большее характеристическое число определяет скорость роста последовательности: при больших n в задаче 7 $e_n \approx (2 + \sqrt{2})^n / \sqrt{2}$. Можно сказать это еще так: $\lim_{n \rightarrow \infty} (e_{n+1}/e_n) = 2 + \sqrt{2}$. Для задачи 6 аналогичное наблюдение: $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = \sqrt{2}$ — показывает, что оба члена суммы $x_n + y_n\sqrt{2}$ при больших n примерно равны друг другу. Интересное продолжение этого факта мы увидим в следующей задаче с большим числом «сопряженных» иррациональностей.

Поочередно меняем все знаки

8 (М520). Пусть

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n и t_n — целые числа. Найдите пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n/q_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n/q_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n/q_n$.

Конечно, мы здесь можем выразить $(q_{n+1}; r_{n+1}; s_{n+1}; t_{n+1})$ через $(q_n; r_n; s_n; t_n)$, пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} q_{n+1} + r_{n+1}\sqrt{2} + s_{n+1}\sqrt{3} + t_{n+1}\sqrt{6} = \\ = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}). \end{aligned}$$

Но, наученные опытом, мы уже знаем, что более простые формулы получаются не для самих чисел q_n, r_n, s_n, t_n , а для некоторых их комбинаций. Одну такую комбинацию мы уже знаем: это $q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6} = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Нетрудно сообразить, каковы будут другие. Рассмотрим вместе с данным числом $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ еще три «сопряженных»: $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$, $\lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6} &= \lambda_2^n, \\ q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6} &= \lambda_3^n, \\ q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6} &= \lambda_4^n. \end{aligned}$$

Мы можем выразить q_n, r_n, s_n, t_n , через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$:

$$\begin{aligned} q_n &= (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n)/4, \\ r_n &= (\lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_3^n - \lambda_4^n)/4\sqrt{2}, \\ s_n &= (\lambda_1^n + \lambda_2^n - \lambda_3^n - \lambda_4^n)/4\sqrt{3}, \\ t_n &= (\lambda_1^n - \lambda_2^n - \lambda_3^n + \lambda_4^n)/4\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что $\lambda_1 > |\lambda_2|$, $\lambda_1 > |\lambda_3|$, $\lambda_1 > |\lambda_4|$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\lambda_2/\lambda_1)^n + (\lambda_3/\lambda_1)^n - (\lambda_4/\lambda_1)^n}{1 + (\lambda_2/\lambda_1)^n + (\lambda_3/\lambda_1)^n + (\lambda_4/\lambda_1)^n} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично найдем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n/q_n = 1/\sqrt{3}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n/q_n = 1/\sqrt{6}$.

Мы говорили выше, что сопряженные числа $a \pm b\sqrt{d}$ возникают часто как корни *квадратного* уравнения с целыми коэффициентами. В связи с последней задачей возникает такое желание:

9. Написать уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Возникает подозрение, что вместе с этим числом λ_1 уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряженные, которые в решении предыдущей задачи мы обозначили $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Нужное уравнение можно записать так:

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)(x - \lambda_3)(x - \lambda_4) = 0,$$

т.е.

$$(x - 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0;$$

после преобразований получаем

$$((x - 1)^2 - 5 - 2\sqrt{6})((x - 1)^2 - 5 + 2\sqrt{6}) = 0,$$

$$(x^2 - 2x - 4)^2 - 24 = 0,$$

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0.$$

Именно такое уравнение получилось бы в предыдущей задаче в качестве характеристического, если бы мы применяли упомянутую в предыдущем разделе мелким шрифтом общую теорию к исследованию линейного преобразования $(q_n; r_n; s_n; t_n) \rightarrow (q_{n+1}; r_{n+1}; s_{n+1}; t_{n+1})$. Заметим, кроме того, что мы на самом деле получили уравнение *наименьшей* степени (с целыми коэффициентами) с корнем $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Попробуйте это доказать!

Алгебраическое послесловие

Мы разобрали несколько примеров, в которых затрагивались пограничные вопросы алгебры, математического анализа и теории чисел. (Каждому направлению, которое мы наметили, можно было бы посвятить более подробную статью в «Кванте»!) В заключение покажем еще, как можно смотреть на основных героев статьи — «сопряженные числа» — с чисто алгебраической точки зрения.

Предположим, что у нас есть множество P чисел (или выражений с буквами, или еще каких-то элементов), с которыми можно выполнять четыре действия арифметики с соблюдением обычных арифметических правил. Такое множество называется *полем*; поля образуют, например, рациональные и действитель-

ные числа. Если в поле P не разрешимо, скажем, уравнение $x^2 - d = 0$, то можно *расширить* его, рассматривая элементы вида $p + q\sqrt{d}$, где $p, q \in P$, а \sqrt{d} – новый символ, который при умножении сам на себя дает d , т.е. $\sqrt{d}\sqrt{d} = d$, так что $(p + q\sqrt{d})(p' + q'\sqrt{d}) = (pp' + qq'd) + (pq' + qp')\sqrt{d}$. Подробно эта конструкция, для $d = 2$ и $d = -1$, описана в статье С.Ашманова «Числа и многочлены» («Квант» №2 за 1980 г.). Во втором случае, т.е. при $d = -1$, расширением поля вещественных чисел получаются *комплексные числа*.

В новом поле P_1 – «квадратичном расширении» поля P – есть интересное отображение $\lambda = p + q\sqrt{d} \rightarrow \bar{\lambda} = p - q\sqrt{d}$ (своеобразная «алгебраическая симметрия»), называемое *сопряжением*, с такими свойствами:

1°. Все элементы старого поля P переходят в себя;

2°. Все равенства, содержащие арифметические операции, при этом отображении сохраняются:

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}; \quad \overline{\lambda \mu} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}. \quad (10)$$

Это отображение является частным случаем так называемых *автоморфизмов Галуа* расширения P_1 поля P .

В задачах 8 и 9 мы видели пример «двукратного» расширения – присоединения $\sqrt{2}$ и затем $\sqrt{3}$, – в результате которого получилось поле с большим количеством автоморфизмов Галуа: кроме тождественного отображения, их уже три ($\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}$; $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$, $\sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3}$; $\sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}$, $\sqrt{3} \rightarrow -\sqrt{3}$), и их «взаимодействие» устроено так же, как во множестве самосовмещений прямоугольника.

Оказывается, к основному полю можно присоединять корни *любого* алгебраического уравнения. Автоморфизмы возникающего нового поля – предмет одной из красивейших ветвей алгебры XIX–XX века, *теории Галуа*, которая позволяет, в частности, исследовать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах ([13], [14]).

Мы закончим эту статью набором задач, в основном продолжающих уже затронутые темы, но требующих иногда и новых соображений, и обещанным списком литературы.

Упражнения

1. Что больше: $\sqrt{1979} + \sqrt{1980}$ или $\sqrt{1978} + \sqrt{1981}$?

2. Докажите, что при всех положительных x

$$|\sqrt{x^2 + 1} - x - 1/2x| < 1/8x^3.$$

3. Постройте график функции $y = \sqrt{x^2 - 1}$ и докажите, что при $|x| \geq 1$

$$0 < |x| - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1/|x|.$$

4. В формуле $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ заменим $\sqrt{2}$, стоящий в правой части (в знаменателе), по той же формуле

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}}.$$

В этой формуле снова заменим нижний $\sqrt{2}$ на $1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$, и т.д. n раз. Если теперь нижний корень заменить на 1 или на 2, мы получим два рациональных числа p_n , q_n . Докажите, что $\sqrt{2}$ лежит между ними и $\lim p_n = \lim q_n = \sqrt{2}$. (Не встречались ли мы с этими числами в одной из задач?)

5. Докажите, что уравнения а) $x^2 - 3y^2 = 1$, б) $x^2 - 3y^2 = 2$ имеют бесконечное множество решений в целых числах.

6. Докажите, что функция $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$ — нечетная, и постройте ее график.

7. а) Докажите, что для любого натурального n

$$2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

б) (С. Майзус, Запорожье) Докажите, что последовательность

$$U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} - 4\sqrt[4]{n}$$

убывает и стремится к пределу.

8. а) (В. Комов, Александров) Докажите, что последовательность $\left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\}$ сходится, и найдите ее предел.

б) Каковы первые 100 десятичных знаков после запятой в записи числа $(\sqrt{50} + 7)^{100}$?

9. Докажите, что для любого натурального d , не являющегося полным квадратом, найдется такое α , что для любых m и n

$$|m/n - \sqrt{d}| \geq 1/\alpha n^2.$$

10 (И. Жук, Минск). Докажите, что при любом натуральном n число $\left[(35 + \sqrt{1157})^n / 2^n \right]$ делится на 17, и вообще для любых натуральных k и n число $\left[(2k + 1 + \sqrt{4k^2 + 1})^n / 2^n \right]$ делится на k .

11 (С.Манукян, с Малый Памач, Грузия). Докажите, что для любого числа $p > 2$ найдется такое число β , что для каждого n

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2 + p}}}}}_{n \text{ радикалов}} = \beta^{2^n} + \beta^{-2^n}.$$

12 (И.Жук, Минск) Докажите, что последовательность $b_m = 1 + 17m^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

13. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого $(3 + \sqrt{5})/4$.

14. Составьте уравнение 4-й степени с корнями $\pm\sqrt{p} \pm \sqrt{q}$ и решите его как биквадратное уравнение. Сравнивая ответ с данными корнями, докажите популярные формулы для двойных радикалов:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (A^2 \geq B > 0, A > 0).$$

15 (А.Земляков, Москва) Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}; \text{ б) } \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{21} + \sqrt{15}}.$$

16. Лягушка может прыгнуть из каждой вершины правильного треугольника ABC в любую из двух других вершин. Найдите число a_n способов, которым она может совершить прогулку из n прыжков, начинающуюся и заканчивающуюся в вершине A . Докажите, что существует предел $\lim a_{n+1}/a_n$, и найдите его.

Список дополнительной литературы

1. Л.Курляндчик, А.Лисицкий. Суммы и произведения. – «Квант» № 10 за 1978 г.

2. Второе решение задачи М514. – «Квант» № 5 за 1979 г., с.26.

3. Р.Нивен. Числа рациональные и иррациональные. – М.: Мир, 1966.

4. Д.Фукс, М.Фукс. О наилучших приближениях. – «Квант» № 6, 11 за 1971 г.; Д.Фукс, М.Фукс. Рациональные приближения и трансцендентность. – «Квант» № 1 за 1973 г.

5. Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер. Прямые и кривые. – М.: Наука, 1978 г., с.103–105.

6. А.Н.Маркушевич. Ряды. – М.: Наука, 1979.

7. Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly. – М.: Мир, 1977 г., с.560–561.

8. Л.Курляндчик, Г.Розенблюм. Метод бесконечного спуска. – «Квант» № 1 за 1978 г.

9. В.Березин. Филлотаксис и последовательность Фибоначчи. – «Квант» № 5 за 1979 г., с.53.

10. *Н.Н.Воробьев*. Числа Фибоначчи. (Популярные лекции по математике, вып.6). – М.: Наука, 1978.
11. *А.И.Маркушевич*. Возвратные последовательности. (Популярные лекции по математике, вып.1). – М.: Наука, 1978.
12. *Л.И.Головина*. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М.: Наука, 1979.
13. *М.М.Постников*. Теория Галуа. – М.: Физматгиз, 1963.
14. *Б.Л.Ван дер Варден*. Алгебра. – М.: Наука, 1976.

Кривые дракона

1. Меньше: 2^{30} см = 1024^3 см = $(1,024)^3 \cdot 10^9$ см $\approx 1,07 \cdot 10^9$ см = 10 700 км, а до Луны примерно 384 000 км.

2. Ломаная заменится зеркально симметричной. В записывающем ее слове каждая буква изменится на противоположную: R на L , а L на R .

3. 6) 2^{n-2} (при $n \geq 2$). Ср. с задачей 5, г), д).

4. Черепаха прочтет слово, которое получается из исходного слова, если записать его буквы в обратном порядке, а затем всюду поменять L на R , а R на L . Это утверждение верно для любой ломаной. Для ломаных дракона новое слово из старого получается совсем просто – надо только заменить в исходном слове среднюю букву на противоположную (см. задачу 5).

5. Используйте теоремы 1, 2 и задачу 3.

6. Вообще говоря, другие (например, для ломаной $RLLLRLLLLRRLRLL$).

7. Используйте теорему 2.

9. Можно провести индукцию по n (рангу ломаной), доказав с помощью задачи 8, что достраиваемые согласно теореме 2 треугольники не могут располагаться так, как показано на рисунке 1.

10. То, что две соседние ломаные (получающиеся друг из друга поворотом на 90°) не имеют общего отрезка, вытекает из теоремы 1 и задачи 9. Чтобы строго доказать, что две симметричные друг другу относительно точки O ломаные не могут иметь общего отрезка, можно использовать теорему

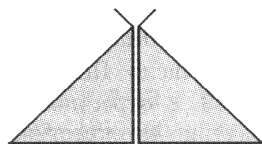


Рис 1

Жордана: «замкнутая несамопересекающаяся линия делит плоскость на две такие области (внутреннюю и внешнюю), что любая линия, один конец которой лежит во внешней области, а другой – во внутренней, пересекает данную линию»; при этом, поскольку наши ломаные дракона приходят в некоторые вершины по два раза, удобнее перейти к кривым дракона.

11. а) Проверьте, пользуясь теоремой 1 (индукция по n).

б) Ср. с задачей 7.

Метрические пространства

2. Воспользуйтесь индукцией.

4. б) Предположим, что нашлась такая точка P , которая лежит внутри r_2 -окрестности M_2 и вне r_1 -окрестности M_1 , т.е. $\rho(P, M_2) \leq r_2$ и $\rho(P, M_1) > r_1$. Тогда (мы воспользуемся аксиомой треугольника 3°)

$$r_2 + r \geq \rho(P, M_2) + \rho(M_2, M_1) \geq \rho(P, M_1) > r_1,$$

откуда $r_2 + r > r_1$, или $r_1 - r < r_2$.

5. $\varepsilon \geq \sqrt{2}/10$ для расстояния (4) и $\varepsilon \geq 1/5$ для расстояния (5).

7. Воспользуйтесь тем, что расстояние между любыми двумя точками из ε -окрестности не превосходит 2ε .

8. Например, годятся такие функции $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$): каждая из них при $0 \leq x \leq 1/(n+1)$ равна 0, при $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$ равна $n(n+1)x - n$ и при $1/n \leq x \leq 1$ равна 1.

9. Да, может быть. Например, пусть наше пространство – отрезок $-2 \leq x \leq 2$ с обычным расстоянием. Тогда 3-окрестность точки $x = 2$ – отрезок $-1 \leq x \leq 2$, а 2-окрестность точки $x = 0$ – весь отрезок $-2 \leq x \leq 2$. Утверждать, что R -окрестность точки A не может составлять часть r -окрестности точки B , можно только в том случае, если $R \geq 2r$.

10. Всего существует 2^n n -значных чисел из двух цифр (на первом месте может стоять 1 или 2, на втором – в каждом из этих случаев – тоже 1 или 2, и т.д.). Введем на множестве этих чисел такое расстояние: $\rho(a, b)$ равно количеству разрядов, в которых a и b различаются. Предположим, мы выбрали S слов, попарные расстояния между которыми не меньше 3. Тогда 1-окрестности этих слов не пересекаются (задача 4, а), каждая из них содержит $n+1$ число. Поэтому $S(n+1) \leq 2^n$.

13. ε -окрестность точки A в X с расстоянием ρ_2 содержится внутри $k\varepsilon$ -окрестности точки A в X с расстоянием ρ_1 . На плоскости достаточно рассмотреть точки $(0, 0)$ и (x, y) и доказать соответствующие неравенства для расстояний (4), (5), (6), а именно:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &\leq |x| + |y|, \quad |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \sqrt{x^2 + y^2} &\leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}, \quad \max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \\ |x| + |y| &\leq 2 \max\{|x|, |y|\}, \quad \max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики

1. По условию $a = kb$ и $b = lc$. Отсюда $a = (kl)c$.

2. а) Верно. Докажем это. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 6, а b не делится на 6. Докажем, что c не делится на 6. Предположим противное: пусть c делится на 6. Но тогда $b = c - a$ делится на 6 (см. 1°). Мы получили противоречие.

б) Неверно. Для опровержения достаточно привести противоречащий пример: $7 + 5 = 12$. Здесь каждое из слагаемых не делится на 6, в то время как их сумма делится на 6.

в) Верно. г) Неверно. Например, $6 + 5 = 11$. д) Неверно. Например, $2 \cdot 3 = 6$.

3. Нет, не следует. Противоречащий пример: $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$; тогда $a + b = 4$ делится на 2, и $a - b$ делится на 2, но ни a , ни b не делятся на 2.

4. Из равенств $ab = (a+b)^2 - (a^2 + ab + b^2)$, $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ следует, что ab и $a^2 + b^2$ делятся на $a+b$. Из равенства $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$ следует, что $a^4 + b^4$ делится на $(a+b)^2$.

5. Так как на одном из этажей в каком-то подъезде находится 6 квартир (с 97-й по 102-ю), то и на всех этажах находится по 6 квартир в каждом подъезде. Так как в каждом подъезде 8 этажей, то всего в подъезде $6 \cdot 8 = 48$ квартир. Поскольку $211 = 48 \cdot 4 + 19$, то квартира 211 находится в 5-м подъезде, а так как $19 = 6 \cdot 3 + 1$, то эта квартира находится на 4-м этаже.

6. При разрезании одного куска на 5 частей число всех кусков увеличивается на 4. Таким образом, число кусков будет всегда иметь вид $4k + 1$, т.е. давать при делении на 4 остаток 1. Однако $1971 = 4 \cdot 492 + 3$, и ответ отрицательный.

7. Шестизначное число должно делиться на $3 \cdot 7 \cdot 13 = 273$, а $100\,000 = 366 \cdot 273 + 82$. Можно добавить 191, получится $100\,191 = 367 \cdot 273$.

8. а) 1; б) 5; в) 8.

9. Пусть a и b – данные числа, $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = kd$, $b = md$, где числа k и m взаимно просты. Из того, что $ab = 600$, следует, что $kmd^2 = 600$. Но наибольший квадрат целого числа, на который делится число 600, есть число 100, поэтому наибольшее значение d равно 10. Пример: $a = 60$, $b = 10$.

11. 24 букета.

12. а) $\text{НОД}(m, n) + 1$; б) $\text{НОД}(m, n) - 1$.

13. а) $987\,654\,321 = 8 \cdot 123\,456 + 9$; $123\,456\,789$ делится на 9 и $\text{НОД}(987\,654\,321, 123\,456\,789) = 9$; б) 77.

14. Два квадрата размером 141×141 , три 42×42 , два 15×15 , один 12×12 , четыре 3×3 . НОД(324, 141) = 3, поэтому меньших квадратов не будет.

15. $\alpha = 3 / 140$.

16. После деления на НОД(85, 204) = 17 получим: $5x + 12y = 1$. Но $12 = 2 \cdot 5 + 2$, $5 = 2 \cdot 2 + 1$, откуда $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$.

Одно решение: $x = 5$, $y = -2$. Общее решение: $x = 5 + 12t$, $y = -2 - 5t$, где t – любое целое число.

17. а) Да; б) нет.

18. а) Мы должны найти такие целые числа x и y , чтобы выполнялось равенство

$$6x + 16y = 220, \text{ или } 3x + 8y = 110.$$

Одно из решений: $x_1 = 330$, $y_1 = -110$. Общее решение можно записать так:

$$x = 330 - 8t, \quad y = -110 + 3t, \quad (*)$$

где t – любое целое число. Теперь естественно выбрать такое t , чтобы x и y были неотрицательными. (Можно, конечно, подключать аккумуляторы «в обратную сторону» – «плюс» к «плюсу», но мы постараемся обойтись без этого).

Учтем это требование:

$$330 - 8t \geq 0, \text{ т.е. } t \leq \frac{330}{8} = 41 \frac{1}{4},$$

$$-110 + 3t \leq 0, \text{ т.е. } t \geq \frac{110}{3} = 36 \frac{2}{3}.$$

Подставляя $t = 37, 38, 39, 40, 41$ в формулы (*), получаем 5 вариантов:

батарей по 6 В	34	26	18	10	2
батарей по 16 В	1	4	7	10	13

б) Здесь дело сводится к решению уравнения $6x + 15y = 220$. Однако НОД (6, 15) = 3, а 220 не делится на 3. Поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

19. Сумма четного числа нечетных чисел четна, поэтому 45 рублей нельзя разменять указанным способом.

20. Поскольку $a = bd$ и делится на c , а НОД (b, c) = 1, то по лемме 3 число d делится на c .

21. б), в) и г) верны; а) неверно.

22. $1971 = 3^3 \cdot 43$, $1972 = 4 \cdot 17 \cdot 29$, 1973 простое.

23. а) Если am делится на n и $\text{НОД}(m, n) = 1$, то $a = kn$, поэтому $b = km$.

б) Пусть в разложении x на простые множители некоторое простое p входит в степени a , а в разложении y – то же p в степени b . Тогда из теоремы о единственности разложения на простые множители $am = bn$ и из задачи а) следует, что $a = kn$, $b = km$. В разложение t на простые множители включим ps показателем k , и так – для всех простых множителей чисел x и y .

Семейство параллельных n -угольников

5. Указание. См. равенство (6), где $M_1 = S_{\triangle ABC}$,

$$M_2 = S_{\triangle ACD}.$$

6. Указание. Поместите в вершины A, B, D массы так, чтобы их центр тяжести оказался в точке E ($m_B = m_D = 1$, $m_A = \frac{GB}{GA} + \frac{HD}{HA}$), а затем перебросьте массы m_B и m_D в вершины A и C .

8. Указание. Для каждой точки $M \in Q$ найдите номер i , для которого отношение расстояний от M до i -х сторон многоугольников Q и P наименьшее.

9. Нет, не следует. По существу, дело сводится к вопросу о том, для любых ли положительных $p_i = \sqrt{P_i}$, $q_i = \sqrt{Q_i}$ справедливо неравенство

$$\Sigma p_i q_i = (\Sigma p_i^2)(\Sigma q_i^2).$$

Но легко убедиться на примерах, что это неверно – см. упражнение 18.

10. Указание. Возьмите в примере, изображенном на рисунке 2 статьи, $a = h = 1$, $b = k = 100$, $t = 0,001$.

14. Указание. «Поднимитесь» в пространство, введя ось времени, перпендикулярную данной плоскости.

15. Указание. Представьте себе, что движение каждой прямой продолжено на все значения $t \in (-\infty, +\infty)$.

Пусть совпадение одной пары параллельных сторон происходит в момент времени $t = t_1$, а «схлопывание» другой пары происходит при $t = t_2$. Тогда график площади $F(t) = |c(t - t_1)(t - t_2)|$ состоит из трех кусков парабол, каждая из которых имеет корни $t = t_1$ и $t = t_2$, т.е. неотрицательный дискриминант. Точки $t = 0$ и $t = 1$ лежат на одном из интервалов $(-\infty, t_1)$, (t_1, t_2) , $(t_2, +\infty)$ – ведь между ними не происходит «схлопываний».

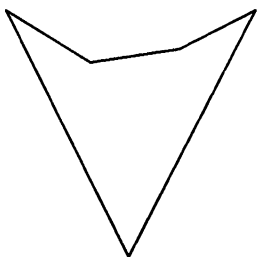


Рис 2

Правда, может случиться так, что параллельные стороны параллелограмма остаются с течением времени на одном и том же расстоянии друг от друга. Тогда квадратный трехчлен $F(t) = Q + 2Rt + Kt^2$ «вырождается»: коэффициенты K и даже R могут обращаться в нуль. Но неравенство $R^2 - QK \geq 0$ и в этом случае остается верным.

17. Указание. Постройте семейство, содержащее пятиугольник, приведенный на рисунке 2.

18. Указание. Рассмотрите дискриминанты трехчленов:

а) $\sum_{i=1}^n (p_i t - q_i)^2$;

б) $(p_1 t - q_1)^2 - \sum_{i=2}^n (p_i t - q_i)^2$.

19. Для $n = 3$ всегда $S = \sqrt{PQ}$. Для $n \geq 4$ S может принимать любые значения в интервале $\sqrt{PQ} \leq S < P$.

20. Если стороны многоугольника отодвигать во внешнюю сторону с одинаковой единичной скоростью, то его площадь будет равна $Kt^2 + Pt + S$, где $K > \pi$; согласно теореме, $P^2 \geq 4KS$, откуда $P^2 \geq 4\pi S$.

Вокруг формулы Пика

3. Пусть M – середина отрезка с концами в узлах. Тогда точка, симметричная узлу относительно точки M , – тоже узел.

4. Пусть при прыжке вершина A треугольника ABC переходит в узел A' , B – середина AA' . Параллелограмм $ABCD$ получается из параллелограмма $BA'EC$ параллельным переносом, который все узлы переводит в узлы так, что внутри и на сторонах $BA'EC$ не может быть узлов.

5. Проведем через все вершины треугольника линии сетки и рассмотрим прямоугольник, образуемый четырьмя из этих линий, заключающий данный треугольник ABC . Можно считать, что A – вершина этого прямоугольника (все точки A, B, C не могут лежать не в вершинах прямоугольника). Если вершины B и C не лежат в вершине E прямоугольника $ADEF$ – скажем, $B \in DE$, $C \in EF$, – то перпендикуляры, восстановленные в B и C к прямым DE и EF , пересекаются в узле решетки, лежащем внутри или на границе треугольника ABC . Если же одна из

вершин B или C – скажем. B – совпадает с E , то угол ACB тупой или прямой.

7. Длины отрезков, соединяющих узлы, могут принимать лишь такие значения, квадрат которых – натуральное число. Поэтому убывающая последовательность таких длин обязательно конечна.

10. Прodelайте в любом порядке такие операции: один из узлов, лежащих внутри или на границе треугольника (одного из уже полученных треугольников разбиения), соединяется с вершинами этого треугольника.

20. Для выпуклого многоугольника это очевидно. В невыпуклом наибольший угол больше 180° . Проведите его биссектрису «до упора» и затем сдвигайте полученную точку по стороне, пока отрезок, соединяющий ее с вершиной угла, не встретит какую-то вершину многоугольника.

СОДЕРЖАНИЕ

Об авторе этой книги (вместо предисловия)	3
Кривые дракона	9
Метрические пространства	21
Расстановка кубиков	35
Алгоритм Евклида и основная теорема арифметики	43
Числа C_n^k , многочлены, последовательности (несколько подходов к одной задаче)	52
Упаковка квадратов	63
Последовательность прыжков	67
Задачи о графах, или Сказка «Иван-Царевич и Серый Волк»	77
Семейство параллельных n -угольников	87
Вокруг формулы Пика	100
Близкие дроби	107
Сложение фигур	119
Плавные последовательности	131
Арифметические препятствия	140
Сопряженные числа	155
Отеты, указания, решения	169

Николай Борисович Васильев

СТАТЬИ ИЗ ЖУРНАЛА «КВАНТ»

Часть 1

Библиотечка «Квант». Выпуск 125

Приложение к журналу «Квант» №4/2012

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 5,5 печ.л. Тираж: 1-й завод 900 экз.

Заказ № 11099

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal, phys@kvantjournal

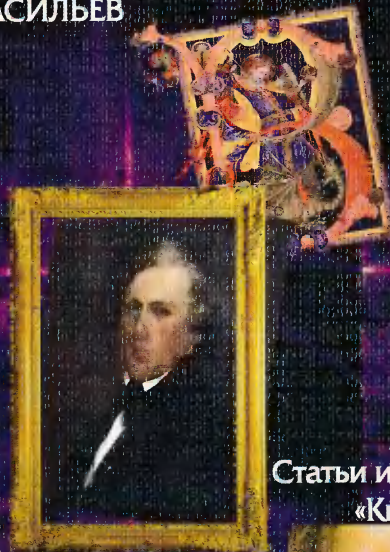
Отпечатано «ТДДС-СТОЛИЦА-8»

Тел.: 8(495)363-48-86, <http://capitalpress.ru>



Библиотечка КВАНТ

Н.Б. ВАСИЛЬЕВ



Статьи из журнала
«Квант»



$$e+k+f=2$$



ВЫПУСК

125