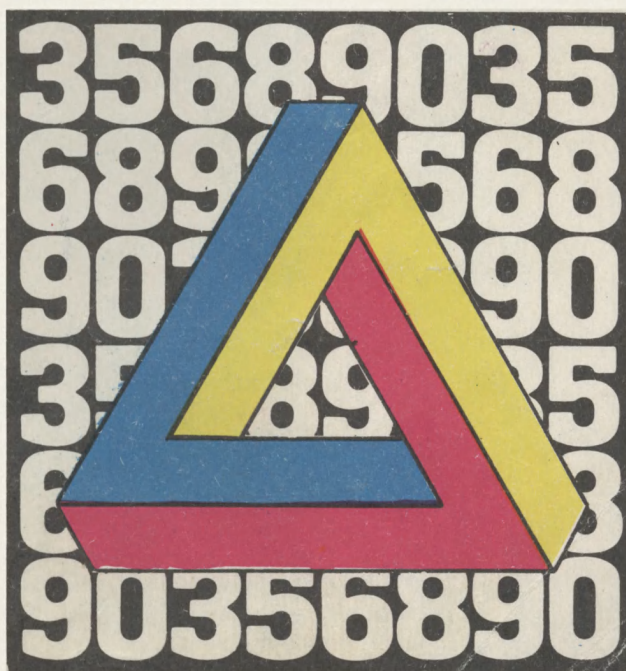




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •  
выпуск 83

Р. ХОНСБЕРГЕР

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗЮМИНКИ





**БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •**  
**выпуск 83**

---

**Р. ХОНСБЕРГЕР**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗЮМИНКИ**

Перевод с английского  
А. П. САВИНА и Л. А. САВИНОЙ



**МОСКВА «НАУКА»**  
**ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**  
**1992**



Scan AAW

ББК 22.10

X77

УДК 511 + 512 + 514(023)

Серия «Библиотечка «Квант»

основана в 1980 году

ROSS HONSBERGER

Mathematical morsels

The Mathematical association  
of America

1978

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Академик Ю. А. Осипьян (председатель), доктор физико-математических наук А. И. Буздин (ученый секретарь), академик А. А. Абрикосов, академик А. С. Боровик-Романов, академик Б. К. Вайнштейн, заслуженный учитель РСФСР Б. В. Воздвиженский, академик В. Л. Гинзбург, академик Ю. В. Гуляев, профессор С. П. Капица, академик А. Б. Мигдал, академик С. П. Новиков, академик АПН РФ В. Г. Разумовский, академик Р. З. Сагдеев, профессор Я. А. Смородинский

**Хонсбергер Р.**

X77 Математические изюминки: Пер. с англ.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.— 176 с.— (Б-чка «Квант». Вып. 83). ISBN 5-02-014406-1

Около 100 повелл, в каждой из которых излагается красивая математическая задача. Серьезные математические методы даны в легкой, запоминающейся форме, что способствует воспитанию интереса к математике.

Для школьников старших классов, преподавателей, студентов и всех, кто интересуется математическими задачами.

X 1602010000—091 153-92  
053(02)-92

ББК 22.10

ISBN 5-02-014406-1

©Наука. Физматлит,  
перевод на русский  
язык, 1992

# СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Предисловие . . . . .   | 5  |
| Задача 1. Шахматный турнир . . . . .  | 7  |
| Задача 2. Упорядоченные разбиения числа $n$ . . . . .                       | 8  |
| Задача 3. Области в круге . . . . .   | 9  |
| Задача 4. Паромы . . . . .  | 11 |
| Задача 5. Выпячивающаяся полуокружность . . . . .                           | 12 |
| Задача 6. Шоферская задача . . . . .  | 13 |
| Задача 7. Ширмы в углу . . . . .  | 15 |
| Задача 8. Раскрашивание плоскости . . . . .                                 | 17 |
| Задача 9. Очевидный максимум . . . . .                                      | 18 |
| Задача 10. $\cos 17x = f(\cos x)$ . . . . .                                 | 18 |
| Задача 11. Квадрат на решетке . . . . .                                     | 19 |
| Задача 12. Непрозрачный квадрат . . . . .                                   | 21 |
| Задача 13. Крестики-нолики . . . . .  | 23 |
| Задача 14. Удивительное свойство прямоугольных тре-<br>угольников . . . . . | 24 |
| Задача 15. Цифры числа $4444^{4444}$ . . . . .                              | 26 |
| Задача 16. $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$ . . . . .                | 28 |
| Задача 17. О $k$ -облаках . . . . .   | 29 |
| Задача 18. Сумма минимумов . . . . .  | 30 |
| Задача 19. Три последние цифры числа $7^{9999}$ . . . . .                   | 31 |
| Задача 20. Катящаяся игральная кость . . . . .                              | 32 |
| Задача 21. Протыкание куба . . . . .  | 33 |
| Задача 22. Двойная последовательность . . . . .                             | 35 |
| Задача 23. Окружности, разбивающие точечные множества . . . . .             | 38 |
| Задача 24. О длинах сторон треугольника . . . . .                           | 39 |
| Задача 25. Пожалуйста, не вычисляйте . . . . .                              | 44 |
| Задача 26. $a^b$ и $b^a$ . . . . .  | 45 |
| Задача 27. Математическая шутка . . . . .                                   | 46 |
| Задача 28. Карты на сфере . . . . .   | 49 |
| Задача 29. Выпуклые области на плоскости . . . . .                          | 52 |
| Задача 30. Система диофантовых уравнений . . . . .                          | 53 |
| Задача 31. Отраженные касательные . . . . .                                 | 53 |
| Задача 32. Элегантно разрушенная шахматная доска . . . . .                  | 58 |
| Задача 33. Снежки . . . . .   | 59 |
| Задача 34. Цифры чисел с единицы по миллиард . . . . .                      | 60 |
| Задача 35. Примыкающие непересекающиеся единичные<br>квадраты . . . . .     | 65 |
| Задача 36. Одно диофантово уравнение . . . . .                              | 67 |
| Задача 37. Последовательность Фибоначчи . . . . .                           | 70 |
| Задача 38. Неравенство Эрдеша . . . . .                                     | 72 |
| Задача 39. Разделенные целочисленные точки . . . . .                        | 74 |
| Задача 40. Совершенные числа . . . . .                                      |    |

|                                 |  |     |
|---------------------------------|--|-----|
| Задача 41.                      | Стороны четырехугольника . . . . .   | 76  |
| Задача 42.                      | Простые числа в арифметической прогрессии . . . . .                        | 76  |
| Задача 43.                      | О чевианах . . . . .   | 78  |
| Задача 44.                      | Коровы и овцы . . . . .  | 80  |
| Задача 45.                      | Последовательность квадратов . . . . .                                     | 81  |
| Задача 46.                      | Вписанный десятиугольник . . . . .   | 81  |
| Задача 47.                      | Красные и синие точки . . . . .  | 84  |
| Задача 48.                      | Метод Шаля . . . . .   | 85  |
| Задача 49.                      | О функции $\pi(n)$ . . . . .   | 86  |
| Задача 50.                      | Постоянная хорда . . . . .   | 88  |
| Задача 51.                      | Количество внутренних диагоналей . . . . .                                 | 89  |
| Задача 52.                      | Утяжеленные игральные кости . . . . .                                      | 91  |
| Задача 53.                      | Курьезная последовательность . . . . .                                     | 92  |
| Задача 54.                      | Длинные цепочки последовательных натуральных чисел . . . . .               | 95  |
| Задача 55.                      | Минимальный вписанный четырехугольник . . . . .                            | 96  |
| Задача 56.                      | Треугольные числа . . . . .  | 99  |
| Задача 57.                      | О правильном $n$ -угольнике . . . . .                                      | 104 |
| Задача 58.                      | Числа Ферма . . . . .  | 106 |
| Задача 59.                      | Неравенство обратных величин . . . . .                                     | 108 |
| Задача 60.                      | Четвертая степень . . . . .  | 108 |
| Задача 61.                      | Упакованные квадраты . . . . .   | 109 |
| Задача 62.                      | Красные и зеленые мячи . . . . .   | 114 |
| Задача 63.                      | Составные члены в арифметической прогрессии . . . . .                      | 115 |
| Задача 64.                      | Приложенные равносторонние треугольники . . . . .                          | 116 |
| Задача 65.                      | Тесты . . . . .  | 118 |
| Задача 66.                      | Приложение теоремы Птолемея . . . . .                                      | 119 |
| Задача 67.                      | Еще одно диофантово уравнение . . . . .                                    | 122 |
| Задача 68.                      | Необыкновенное свойство комплексных чисел . . . . .                        | 123 |
| Задача 69.                      | Цепочка окружностей . . . . .  | 123 |
| Задача 70.                      | Повторяющиеся цифры в конце квадрата . . . . .                             | 126 |
| Задача 71.                      | Биссектриса угла . . . . .   | 127 |
| Задача 72.                      | Система неравенств . . . . .   | 128 |
| Задача 73.                      | Неожиданное свойство правильного 26-угольника . . . . .                    | 128 |
| Задача 74.                      | Еще раз о полных квадратах . . . . .                                       | 130 |
| Задача 75.                      | Необыкновенный многочлен . . . . .   | 133 |
| Задача 76.                      | Центроиды на окружности . . . . .  | 134 |
| Задача 77.                      | Легконаходимый остаток . . . . .   | 137 |
| Задача 78.                      | Любопытное свойство числа 3 . . . . .                                      | 137 |
| Задача 79.                      | Квадрат внутри квадрата . . . . .  | 138 |
| Задача 80.                      | Всегда квадрат . . . . .   | 139 |
| Задача 81.                      | Группировка натуральных чисел . . . . .                                    | 139 |
| Задача 82.                      | Треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию . . . . . | 140 |
| Задача 83.                      | Дроби, полученные с помощью перестановки . . . . .                         | 141 |
| Задача 84.                      | О биномиальных коэффициентах . . . . .                                     | 142 |
| Задача 85.                      | Число Ферма $F_{73}$ . . . . .   | 143 |
| Задача 86.                      | Вписанный четырехугольник . . . . .  | 146 |
| Задача 87.                      | Специальные тройки натуральных чисел . . . . .                             | 147 |
| Задача 88.                      | Суммы простых чисел . . . . .  | 147 |
| Задача 89.                      | Еще одна курьезная последовательность . . . . .                            | 149 |
| Задача 90.                      | Эллипс и целочисленная решетка . . . . .                                   | 154 |
| Задача 91.                      | Архимедовы треугольники . . . . .  | 159 |
| Упражнения . . . . .            |  | 165 |
| Список задач по темам . . . . . |  | 171 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Математика изобилует яркими идеями. Независимо от того, как долго и сколь упорно занимаешься математикой, кажется, что никогда не иссякнут в ней удивительные сюрпризы. И никоим образом нельзя считать, что эти сюрпризы можно встретить лишь в трудных задачах, рассчитанных на подготовленных учащихся. Использование всех видов простых понятий требует выдумки и изобретательности. В этой книге обсуждаются десятки элементарных задач, которые были выбраны из публикаций журнала «American Mathematical Monthly» за период 1894—1975 гг. В них содержится множество изумительных идей, а двадцать из них просто прекрасны.

Поль Эрдеш считает, что у Бога есть книга, содержащая все математические теоремы с самыми красивыми доказательствами, и когда он хочет дать особо высокую оценку доказательству, он восклицает: «Это доказательство из Книги!». Возможно, что здесь было бы неуместно заявлять, что эта книга написана с той точки зрения, что все богатства жизни — это Божьи дары и что мы должны принимать их с радостью и благодарностью и делиться ими для Его хвалы и славы.

Для понимания большей части этой книги достаточно знаний в объеме средней школы. Изредка предлагаются и другие объекты обсуждения. Но даже и в этом случае, это почти всегда стандартные элементарные понятия, которые из-за отсутствия места в наших перегруженных учебных планах, изучаются существенно позже. Я имею в виду такие понятия, как теорема Пика и основы инверсии относительно круга. Однако не стоит тревожиться если вы не получили знаний об этих понятиях, так как это при необходимости легко наверстать. В таких случаях в тексте даются ссылки.

Большинство задач, рассматриваемых здесь, появилось в разделах задач хорошо известных математических журналов. Чтобы соблюсти справедливость по отноше-

нию ко всем заинтересованным лицам, следует отметить, что я часто брал лишь часть задачи или решения, причем, как правило, переписывал и улучшал изложение существенным образом. Утверждения многих задач были изменены, чтобы придать им более яркую форму. Это не сборник задач, предлагаемых для решения (хотя вы несомненно получите больше удовольствия, если прежде, чем прочесть решение, сами подумаете над задачей), а витрина маленьких математических чудес. Однако пару дюжин задач для упражнений я поместил в конце книги.

Для того чтобы помочь читателю определить местонахождение задачи в книге или найти интересующую его тему, в конце книги дается список задач, разбитый на три части:

- 1) алгебра, арифметика, теория чисел, последовательности, вероятность;
- 2) комбинаторика, комбинаторная геометрия (максимум и минимум);
- 3) геометрия (максимум и минимум).

Я очень благодарен профессору Ивану Нивену за то, что он тщательно просмотрел рукопись и внес много поправок и других улучшений в конечную редакцию. Я также хотел бы поблагодарить моего коллегу Лероя Дискей и профессора Е. Ф. Беккенбаха, Генри Адлера, Ральфа Боасе, Дональда Альбера и Г. Л. Александерсона за их конструктивную критику.

*Росс Хонсбергер*

## ЗАДАЧА 1. ШАХМАТНЫЙ ТУРНИР

В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в месте, для которого общее расстояние переездов между городами участников турнира было бы минимальным. Нью-йоркские мастера утверждают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что место соревнований в городе, находящемся в центре тяжести совокупности игроков, было бы лучше.

Где должен проводиться турнир?

**Решение.** Нью-йоркцы правы! Обозначим нью-йоркских мастеров буквами  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , а остальных игроков буквами  $O_1, O_2, \dots, O_t$ . Так как в Нью-Йорке находится больше половины игроков, то  $k > t$ . Если рассмотреть пары игроков  $(N_1, O_1), (N_2, O_2), \dots, (N_t, O_t)$ , то нью-йоркские мастера  $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$  не попадут ни в одну из пар.

Рассмотрим теперь пару  $(N_1, O_1)$ . При любом выборе города проведения турнира мастера  $N_1$  и  $O_1$  должны проехать в совокупности не меньше, чем расстояние  $N_1O_1$  по прямой, соединяющей эти города. Вместе же они проедут не меньше, чем

$$S = N_1O_1 + N_2O_2 + \dots + N_tO_t.$$

Если местом соревнований выбран Нью-Йорк, то  $S$  и будет суммой расстояний. Если же соревнования будут проводиться в другом месте, то  $t$  пар игроков проедут расстояние не меньше  $S$ , а ненулевая сумма расстояний для игроков  $N_{t+1}, N_{t+2}, \dots, N_k$  увеличит общую сумму. Следовательно, Нью-Йорк — наилучшее место для проведения соревнования.



Аналогичная задача была рассмотрена Дж. Г. Батчером и Лео Мозером в прекрасной статье «Пожалуйста, не вычисляйте», опубликованной в 1952 г. в журнале «Scripta Mathematica», с. 221—236.

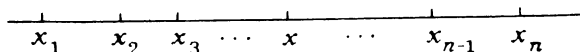


Рис. 1

Пусть  $n$  точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  лежат в указанном порядке на прямой. Где находится точка  $x$ , сумма расстояний которой до этих точек минимальна (рис. 1)?

Ясно, что расстояния  $x_1x$  и  $x_nx$  должны в сумме дать расстояние  $x_1x_n$ . Теперь разобьем на пары  $(x_1, x_n)$ ,  $(x_2, x_{n-1})$  и т. д., чтобы полученные интервалы были последовательно вложены друг в друга. Если  $n$  нечетно, то точка  $x_{(n+1)/2}$  остается без пары. Так как сумма расстояний до пары точек минимизируется любой точкой, находящейся между ними, то любая точка  $x$ , расположенная внутри всех этих интервалов, минимизирует все пары расстояний. Таким образом, для четного  $n$  мы имеем

$$S \geq x_1x_n + x_2x_{n-1} + \dots,$$

причем равенство выполняется для любой точки  $x$ , лежащей на самом внутреннем интервале. Если  $n$  нечетно, то минимум достигается в точке  $x_{(n+1)/2}$  (которая лежит в самом меньшем из интервалов), дополнительное расстояние в этом случае, а именно  $xx_{(n+1)/2}$ , равно нулю.

## ЗАДАЧА 2. УПОРЯДОЧЕННЫЕ РАЗБИЕНИЯ ЧИСЛА $n$

Число 3 может быть выражено в виде суммы одного или более натуральных чисел четырьмя способами, если при этом учитывать порядок членов:

$$3, 1+2, 2+1, 1+1+1.$$

Сколькими способами может быть выражено в виде суммы число  $n$ ?

**Решение.** Рассмотрим строчку из  $n$  единиц, расположенных в ряд. Любое расположение  $n-1$  или меньшего количества разделительных черточек в промежутках

между единицами соответствует разбиению числа на слагаемые и наоборот:

$$1\ 1\ |\ 1\ 1\ 1\ |\ 1\ |\ 1\ 1...1\ 1\ 1,$$

$$n = 2 + 3 + 1 + n - 6.$$

Так как мы можем в каждый из  $n - 1$  промежутков либо вставить делительную черточку, либо не вставлять, то существует ровно  $2^{n-1}$  способов расставить делительные черточки и такое же количество выражений для числа  $n$ .

### ЗАДАЧА 3. ОБЛАСТИ В КРУГЕ

Расположим  $n$  точек на окружности и соединим их попарно хордами. Предположим, что никакие три хорды не имеют общей точки внутри круга. На сколько областей разобьется круг этими хордами?

**Решение.** Предположим, что хорды мы будем проводить по одной последовательно. Новая хорда пересекает различные области, увеличивая число частей (рис. 2). Дополнительное число областей равно количеству отрезков, на которые делится новая хорда теми хордами, которые она пересекает. Поэтому это число на единицу больше числа точек таких пересечений. Из этого наблю-

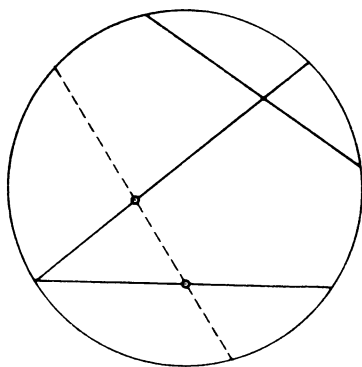


Рис. 2

дения легко доказать замечательную формулу, выражающую количество областей в круге, получающихся при проведении  $L$  хорд, никакие три из которых не пересекаются во внутренних точках круга и имеют  $P$  точек пересечения в этом круге. Количество областей равно

$$P + L + 1.$$

Для  $L = 1$  мы имеем  $P + L + 1 = 0 + 1 + 1 = 2$  (рис. 3). Новая линия, пересекающая первую, дает

$$P + L + 1 = 1 + 2 + 1 = 4,$$

а линия, не пересекающая первую, дает

$$P + L + 1 = 0 + 2 + 1 = 3.$$

Предположим, что значение  $P + L + 1$  справедливо для некоторого  $L \geq 2$ . Пусть дополнительная линия дает  $k$

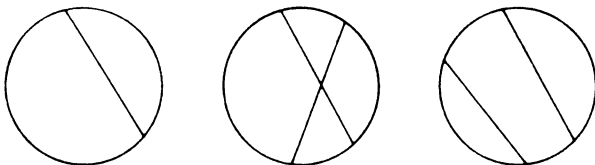


Рис. 3

новых точек пересечения. При пересечении  $k$  других линий она проходит через  $k + 1$  область, увеличивая их число на  $k + 1$ . Таким образом, для  $L + 1$  линий и  $P + k$  точек общее число областей равно

$$(P + L + 1) + (k + 1) = (P + k) + (L + 1) + 1.$$

Это доказательство формулы по индукции.

Ясно, что существует взаимнооднозначное соответствие между точками пересечения  $X$  и четверками  $(A, B, C, D)$  из  $n$  точек, взятых на окружности (рис. 4). Таким образом, количество точек пересечения равно  $C_n^4$  — количеству четверок. Так как количество хорд равно  $C_n^2$ , то число областей, полученных всевозможными попарными соединениями  $n$  точек, равно

$$P + L + 1 = C_n^2 + C_n^4 + 1.$$

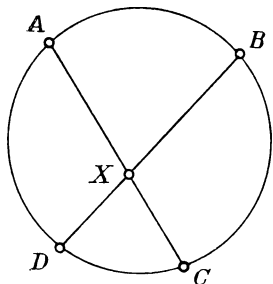


Рис. 4

(Мы наблюдаем, что этот результат применим для любой выпуклой области на плоскости и этот подход обобщается на более высокие размерности. Множество  $S$  точек называется выпуклым, если для каждой пары точек  $A$  и  $B$  в  $S$  отрезок  $AB$  целиком принадлежит  $S$ .)

Число, выражающее количество областей, может быть очень красиво выведено путем прослеживания количества областей, на которое уменьшается наше разбиение, если стирать линии одну за другой. Каждый отрезок ли-

нии разделяет две области, которые объединяются в одну при стирании этой линии. Тогда число исчезнувших областей будет на одну больше количества точек пересечения на этой линии. Так как каждая точка пересечения лежит на двух линиях, то при стирании одной из них она исчезает также с другой. Поэтому каждая точка пересечения фигурирует ровно один раз при процедуре стирания отрезков и для каждой линии число исчезнувших областей равно

(число исчезнувших точек пересечения на линии) + 1. После стирания всех  $L$  линий мы видим, что общее количество областей составляет  $P$  плюс еще по одной для каждой из  $L$  линий. Следовательно, исчезнет  $P + L$  областей. Так как в результате остается лишь внутренность круга, то вначале было  $P + L + 1$  областей.

#### ЗАДАЧА 4. ПАРОМЫ

Два парома снуют через реку с постоянными скоростями, поворачивая у берегов без потери времени. Они одновременно отправляются от противоположных берегов и в первый раз встречаются в 700 футах от

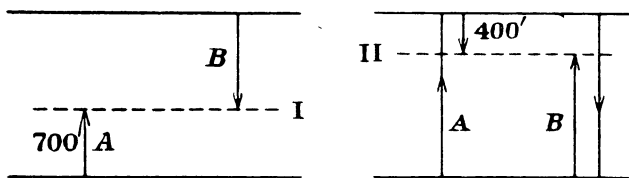


Рис. 5

одного из берегов, продолжают движение к берегам, возвращаются и встречаются во второй раз в 400 футах от противоположного берега. В качестве устного упражнения определите ширину реки. (В Великобритании и США фут обозначается штрихом: 700 футов — 700'.)

**Решение.** Общее расстояние, пройденное паромами к моменту первой встречи, как раз равняется ширине реки (рис. 5). Однако может несколько удивить тот факт, что к моменту их новой встречи общее пройденное ими расстояние равняется утроенной ширине реки. Так как скорости постоянны, то вторая встреча произойдет через

время, втрое большее, чем первая. До первой встречи паром  $A$ , скажем, прошел 700 футов. За время в три раза большее он прошел бы 2100 футов. Но ко второй встрече он доходит до берега реки и, повернув обратно, проходит еще 400 футов. Таким образом, ширина реки равна  $2100 - 400 = 1700$  футов.

### ЗАДАЧА 5. ВЫПЯЧИВАЮЩАЯСЯ ПОЛУОКРУЖНОСТЬ

Хорда  $AB$  окружности радиусом 1 с центром в  $O$  является диаметром полуокружности  $ACB$ , расположенной вне первой окружности (рис. 6). Ясно, что

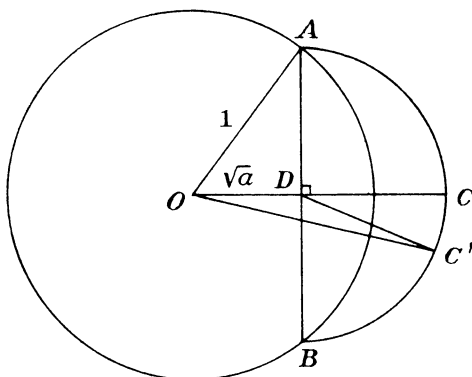


Рис. 6

точка  $C$  этой полуокружности, которая выпячивается дальше всего, лежит на радиусе  $ODC$ , перпендикулярном  $AB$ . (Для любой другой точки  $C'$  этой полуокружности мы имеем  $OC' < OD + DC' = OD + DC = OC$ .) Конечно же, длина отрезка  $OC$  зависит от выбора хорды  $AB$ . Определите  $AB$  так, чтобы отрезок  $OC$  имел максимальную длину.

**Решение.** Пусть  $OD = \sqrt{a}$ ; тогда радиус нашей полуокружности равен

$$AD = \sqrt{1 - a} = DC.$$

Таким образом,  $OC^2 = (OD + DC)^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{1 - a})^2 = a + 2\sqrt{a(1 - a)} + 1 - a$ . Получаем  $OC^2 = 1 + 2\sqrt{a(1 - a)}$ .

Это выражение максимально при максимальном значении величины  $a(1-a)$ . Но так как

$$a(1-a) = a - a^2 = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2,$$

то это имеет место для  $a = 1/2$ , при этом  $OD = \sqrt{a} = \sqrt{2}/2$ .

Для максимального отрезка  $OC$

$$AD = \sqrt{1 - OD^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

при этом  $AB = 2AD = \sqrt{2}$ . Таким образом,  $\triangle AOB$  имеет стороны 1, 1 и  $\sqrt{2}$ . Это означает, что на хорду  $AB$  опирается прямой угол с вершиной в точке  $O$ .

Следующий красивый подход дает альтернативное решение. Треугольник  $ADC$  — прямоугольный и равнобедренный, т. е.  $\angle DCA = 45^\circ$  (рис. 7). Теперь если  $CA$

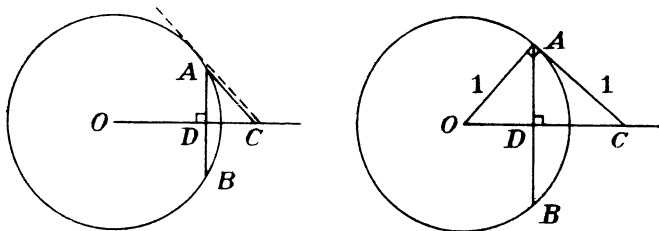


Рис. 7

не является касательной к данной окружности, то найдется хорда, для которой точка  $C$  будет лежать дальше вдоль прямой  $OD$ . Таким образом, для хорды, максимизирующей отрезок  $OC$ , прямая  $CA$  должна быть касательной к окружности, и в этом случае  $CA$  есть катет равнобедренного прямоугольного треугольника  $OAC$ . Отсюда  $CA = OA = 1$  и из равнобедренного прямоугольного треугольника  $DAC$  мы получаем, что

$$AD = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } AB = \sqrt{2}.$$

#### ЗАДАЧА 6. ШОФЕРСКАЯ ЗАДАЧА

Мистер Смит ежедневно приезжает на станцию поездом в 5 часов и тут же садится в подъезжающий автомобиль, который везет его домой.

Однажды он приехал поездом в 4 часа и пошел пешком домой. По дороге он встретил свой автомобиль, едущий к станции. Шофер развернул автомобиль и отвез Смита домой, при этом он оказался дома на 20 минут раньше, чем обычно.

На другой день Мистер Смит приехал неожиданно поездом в 4 ч 30 мин и также пошел пешком. Он вновь встретил автомобиль и снова оставшуюся часть пути проехал. На сколько раньше обычного приехал Смит домой в этот раз? (Предположим, что скорость ходьбы и езды постоянны и не было потери времени на посадку мистера Смита и на поворот автомобиля.)

**Решение 1.** Обычный метод решения этой задачи таков: в первый день шофер сэкономил 20 минут езды. Таким образом, мистер Смит сел в автомобиль в точке, находящейся в 10 минутах езды от станции (в одну сторону). Если бы шофер ехал как обычно, то он приехал бы на станцию в 5 ч. Десятиминутная экономия времени означает, что он подбирает Смита в 4 ч 50 мин. Следовательно, Смигу понадобилось 50 мин на то, чтобы пройти то расстояние, которое шофер проезжает за 10 мин. Отсюда мы видим, что автомобиль едет в 5 раз быстрее, чем идет Смит.

Теперь предположим, что во второй день Смит шел  $5t$  мин. Расстояние, пройденное им, автомобиль проезжает за  $t$  мин. Следовательно, Смит сел в автомобиль за  $t$  мин до 5 ч, т. е. через  $60 - t$  мин после 4 ч. Так как он начал идти в 4 ч 30 мин и шел  $5t$  мин, то он сел в автомобиль через  $30 + 5t$  мин после 4 ч. Следовательно,  $30 + 5t = 60 - t$  и  $t = 5$ . Таким образом, шофер сэкономил по 5 мин движения (в каждую сторону) и приехал к дому Смита на 10 мин раньше обычного.

Это — очень интересное решение задачи. Однако первокурсник одного из американских университетов Ричард Камерон во время соревнований предложил следующее решение.

**Решение 2.** Рассмотрим график зависимости «расстояния от станции» от «времени». На нем легко проследить движения Смита и шофера. Например, в обычный день мы имеем следующую ситуацию, начинающуюся, скажем, с 4 ч (рис. 8). Это так называемые «мировые линии».

Те же три путешествия, включая обычный день, построены вместе на следующем графике (рис. 9). Из постоянства скоростей ходьбы и езды на автомобиле следует, что соответствующие отрезки графика должны быть

параллельны. А так как момент 4 ч 30 мин делит пополам время между 4 и 5 ч, то из параллельности следует,



Рис. 8

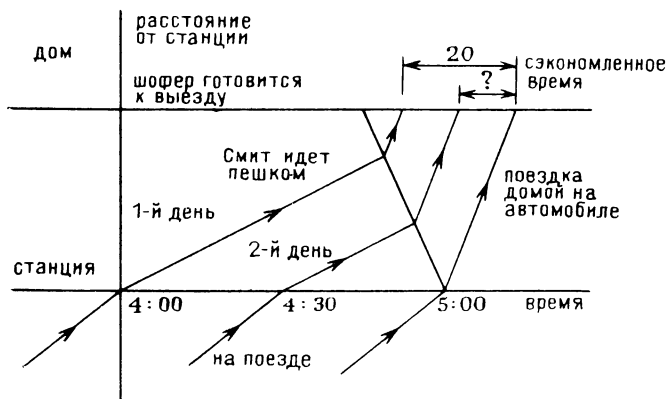


Рис. 9

что и время приезда во второй день делит сэкономленное время в отношении 1 : 1 и дает время, сэкономленное во второй день, равное  $\frac{1}{2} \cdot 20 = 10$  мин.

### ЗАДАЧА 7. ШИРМЫ В УГЛУ

Угол прямоугольной комнаты отражается двумя четырехфутовыми ширмами. При каком их положении отгороженная площадь будет наибольшей?

**Решение.** Решение основано на двукратном применении следующего хорошо известного результата.



**Лемма.** Во множестве треугольников с заданными основанием  $b$  и противолежащим ему углом  $\theta$  наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник. (Ясно, что это множество содержится внутри сегмента круга, а высота у равнобедренного треугольника больше, чем у других треугольников этого множества (рис. 10).)

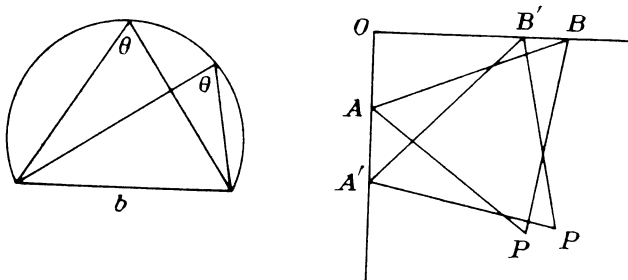


Рис. 10

Обозначим через  $O$  вершину угла комнаты, а точки касания ширмами сторон углов через  $A$  и  $B$ . Тогда площадь, отгороженная ширмами, равна сумме площадей треугольников  $AOB$  и  $ABP$ , где  $P$  — точка соприкосновения ширм. (Ясно, что при максимальной площади точка  $P$  будет граничной точкой обеих ширм.)

Теперь, если  $\triangle OAB$  не является равнобедренным ( $OA \neq OB$ ), то можно передвинуть ширмы в положение  $A'P'$  и  $B'P'$ , где  $OA' = OB'$  так, чтобы отрезок  $A'B'$  равнялся отрезку  $AB$ . Тогда треугольники  $A'B'P'$  и  $ABP$

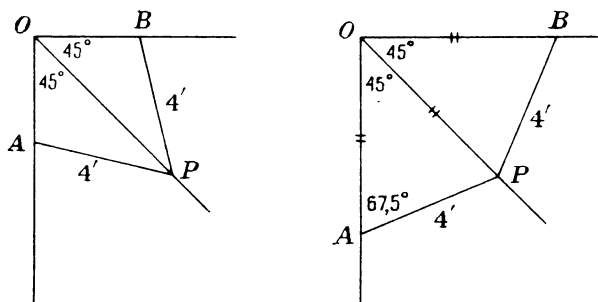


Рис. 11

равны, а по лемме площадь треугольника  $OA'B'$  больше площади треугольника  $OAB$ . Таким образом, при распо-

ложении, дающем максимальную площадь, отрезок  $OA$  должен быть равен отрезку  $OB$ .

Так как ширмы имеют равные длины, точка  $P$  всегда должна лежать на срединном перпендикуляре к отрезку  $AB$ , но если  $OA = OB$ , то срединный перпендикуляр к  $AB$  является биссектрисой прямого угла  $O$ . Таким образом, при наибольшей площади отрезок  $OP$  должен быть биссектрисой угла  $O$  (рис. 11). Следовательно, каждая ширма должна отрезать треугольник наибольшей площади от угла в  $45^\circ$ , стягиваемого этим отрезком. (Каково бы ни было наилучшее расположение.)

Так как длина отрезка  $AP$  постоянна, из леммы следует, что площадь треугольника  $OAB$  будет максимальной в случае его равнобедренности ( $OA = OP$ ). В этом случае  $\angle OAP = 67,5^\circ$  и решение становится очевидным. В качестве простого упражнения предлагаем построить отрезок  $OP$  с помощью циркуля и линейки.

## ЗАДАЧА 8. РАСКРАШИВАНИЕ ПЛОСКОСТИ

Предположим, что каждая точка плоскости окрашена в красный или голубой цвет. Покажите, что найдется прямоугольник, все вершины которого окрашены в один и тот же цвет.

**Решение.** Из семи точек не меньше четырех должны иметь одинаковый цвет. Выберем из семи точек на прямой четыре точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , окрашенные в один цвет, скажем, в красный. Рассмотрим еще две прямые, параллельные первоначальной и две четверки точек  $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$  и  $(R_1, R_2, R_3, R_4)$ , полученные проектированием выбранной четверки на эти прямые. Рассмотрим прямоугольники с вершинами в этих точках и в точках  $P_i$ . Теперь, если две из точек  $Q$  — красные, то все точки прямоугольника  $P_i P_j Q_i Q_j$  также красные. Аналогично и для двух красных точек из  $R$ . Если ни один из этих случаев не имеет места, то некоторые три (или более) точек из  $Q$  и три (или более) точек из  $R$  должны быть голубыми. Но эти тройки голубых точек расположены так, что среди них обязательно найдутся по паре точек, лежащих одна под другой и, таким образом, образующие голубой прямоугольник, откуда и следует утверждение задачи.

Отметим, что этот результат справедлив для любой области на плоскости, заключенной внутри сколь угодно

малой окружности. Этот вопрос возник из задачи, предложенной на 5-й математической олимпиаде США, проходившей весной 1976 г.

### ЗАДАЧА 9. ОЧЕВИДНЫЙ МАКСИМУМ

Пусть  $P$  — переменная точка на дуге окружности, стягиваемой хордой  $AB$ . Докажите следующее очевидное свойство: сумма длин отрезков  $AP$  и  $PB$  максимальна тогда, когда  $P$  — середина дуги  $AB$ .

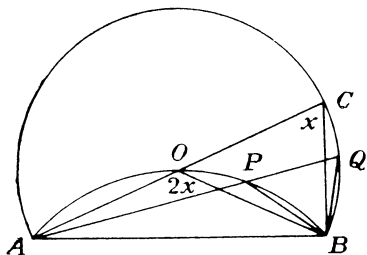


Рис. 12

**Решение.** Проведем вторую дугу  $AB$ , взяв за центр окружности точку  $O$  — середину первоначальной дуги  $AB$ . Пусть прямые  $AP$  и  $AQ$  пересекают эту дугу в точках  $Q$  и  $C$  (рис. 12).

Угол, стягиваемый хордой  $AB$ , с вершиной в точке  $O$ , вдвое больше, чем угол с вершиной в точке  $C$ .

Таким образом,  $\angle APB = 2\angle Q$ .

Но в треугольнике  $PQB$  внешний угол  $APB$  равен сумме внутренних углов с вершинами в точках  $Q$  и  $B$ . Таким образом,

$$2\angle Q = \angle Q + \angle QBP \quad \text{и} \quad \angle Q = \angle QBP.$$

Следовательно,  $\triangle PQB$  — равнобедренный и  $AP + PB = AP + PQ = AQ$  — хорде внешней дуги. Ясно, что эта хорда максимальна в том случае, когда она — диаметр, т. е. в том случае, если точка  $P$  есть точка  $O$ .

Отметим, что этот результат также следует из рассмотрения процесса увеличения размеров эллипса с фокусами  $A$  и  $B$ . Из симметрии следует, что последняя общая точка эллипсов и дуги окружности является серединой этой дуги. Эллипс, имеющий эту общую точку, — наибольший из тех, которые пересекаются с дугой и имеют наибольшую сумму фокальных радиусов.

### ЗАДАЧА 10. $\cos 17x = f(\cos x)$

Обозначим через  $f$  функцию от  $\cos x$ , выражающую  $\cos 17x$ , т. е.

$$\cos 17x = f(\cos x).$$

Покажите, что та же функция  $f$  выражает  $\sin 17x$  через  $\sin x$ :  $\sin 17x = f(\sin x)$ .

**Решение.** Пусть  $x = \frac{\pi}{2} - y$ . Тогда  $\sin x = \cos y$  и

$$\begin{aligned}\sin 17x &= \sin \left[ 17 \left( \frac{\pi}{2} - y \right) \right] = \sin \left( 8\pi + \frac{\pi}{2} - 17y \right) = \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - 17y \right) = \cos 17y = f(\cos y) = f(\sin x).\end{aligned}$$

Заметим, что число 17 может быть заменено любым целым числом вида  $4k + 1$ .

### ЗАДАЧА 11. КВАДРАТ НА РЕШЕТКЕ

Произвольный квадрат  $S$  размером  $n \times n$  на координатной плоскости покрывает  $(n + 1)^2$  целочисленных точек (точек, у которых обе координаты  $x$  и  $y$  — целые числа) в том случае, если один из его углов находится в целочисленной точке, а его стороны параллельны осям координат. Докажите интуитивно ясный результат, что при любом расположении этого квадрата  $S$  он покрывает не более  $(n + 1)^2$  точек.

**Решение.** Рассмотрим  $S$  в произвольном положении на плоскости. Предположим теперь, что граница квадрата  $S$  сделана из круглой резинки, а в каждой целочисленной точке вбит гвоздь в плоскость. Пусть резинка сжимается, окружая гвозди, находящиеся в точках решетки, попавшие в квадрат  $S$ . Многоугольник  $H$ , определяемый резинкой, называется «выпуклой оболочкой» целочисленных точек из  $S$  и является важнейшим понятием во многих геометрических исследованиях (рис. 13). Если в каждой вершине квадрата  $S$  находится по целочисленной точке, то  $H$  будет самым квадратом  $S$ . (См. Замечание в конце решения об определении выпуклой оболочки.)

Так как  $H$  содержится в  $S$ , то его площадь не может превышать площадь квадрата  $S$ :

$$\text{площадь } S \leq n^2.$$

В 1899 г. Джордж Пик открыл замечательную формулу для площади несамопересекающегося многоугольника  $Y$  с вершинами в целочисленных точках:

$$\text{площадь } Y = q + \frac{p}{2} - 1,$$

где  $q$  — количество целочисленных точек внутри многоугольника,  $p$  — число таких точек на его границе. (Сюда включаются вершины и остальные точки, лежащие на

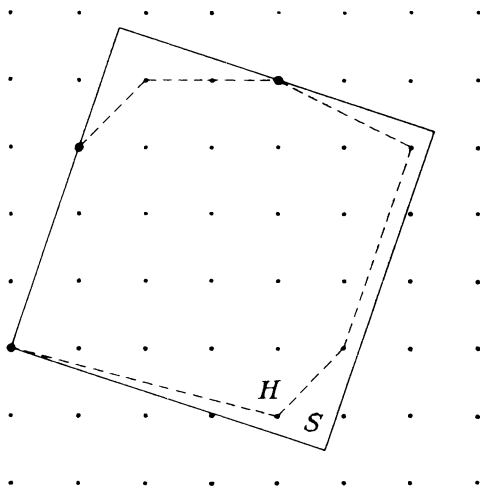


Рис. 13

его сторонах. См. Замечание.) По теореме Пика (см. задачу 39) получаем

$$\text{площадь } H = q + \frac{p}{2} - 1 \leq n^2$$

и

$$q + \frac{p}{2} \leq n^2 + 1.$$

Так как упругая граница квадрата  $S$ , сжимаясь, образует  $H$ , если она вообще движется, то периметр  $H$  не может превышать периметра  $S$ :

$$\text{периметр } H \leq 4n.$$

Ясно, что никакие две целочисленные точки не могут находиться ближе, чем на расстоянии 1, поэтому на границе  $H$  не может находиться больше, чем  $4n$  точек. Получаем

$$p \leq 4n \text{ и } \frac{p}{2} \leq 2n.$$

Подставляя это соотношение в ранее полученный результат  $q + p/2 \leq n^2 + 1$ , имеем, что число целочисленных точек, покрытых квадратом  $S$ ,

$$= p + q \leq n^2 + 1 + 2n = (n + 1)^2.$$

**Замечание.** Выпуклая оболочка  $H$  плоского множества точек  $S$  есть пересечение всех плоских выпуклых множеств, содержащих  $S$ . Поэтому множество  $H$  минимально в том смысле, что любое выпуклое множество, содержащее  $S$ , также содержит и  $H$ . Множество  $H$  не содержит лишних точек — оно расширено лишь до таких пределов, чтобы содержать множество  $S$  и быть выпуклым. Если множество  $S$  — выпукло, то, конечно же, множество  $H$  совпадает с  $S$ .

## ЗАДАЧА 12. НЕПРОЗРАЧНЫЙ КВАДРАТ

Множество прямолинейных отрезков внутри или на границе квадрата со стороной 1 называется «непрозрачным», если любая прямая, пересекающая квадрат, пересекается хотя бы с одним из этих отрезков. Например, две диагонали образуют непрозрачное множество

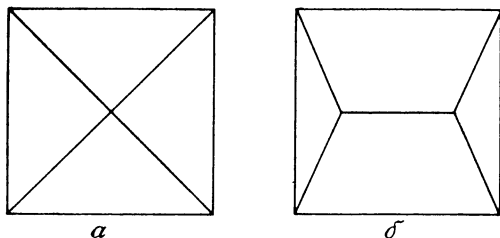


Рис. 14

(рис. 14, а). Другое непрозрачное множество показано на рис. 14, б. Общая длина диагоналей равна  $2\sqrt{2} \approx 2,82$ . Довольно легко с помощью элементарных вычислений показать, что минимальная сумма длин отрезков непрозрачного симметричного множества на рис. 14, б равна  $1 + \sqrt{3} \approx 2,73$ . Найдите непрозрачное множество с суммой длин отрезков меньшей, чем  $1 + \sqrt{3}$ .

**Решение.** Непрозрачное множество, состоящее из двух соседних сторон квадрата и отдаленной половины диагонали

между ними (рис. 15), имеет длину

$$2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{1,42}{2} = 2,71 < 1 + \sqrt{3}.$$

Стороны  $AB$  и  $BC$  имеют общую точку с любой прямой, пересекающей треугольник  $ABC$ . Если учесть полностью

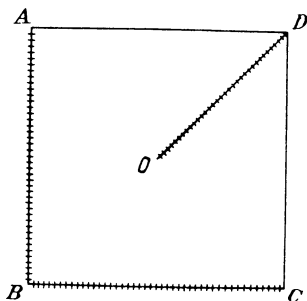


Рис. 15

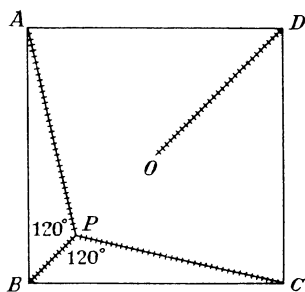


Рис. 16

треугольник  $ABC$ , то полудиagonали  $OD$  достаточно, чтобы сделать непрозрачной вторую половину квадрата.

Теперь рассмотрим более эффективный способ сделать непрозрачным  $\triangle ABC$ . Точка  $P$  внутри треугольника  $ABC$ , из которой каждая сторона видна под углом  $120^\circ$ , называется точкой Ферма этого треугольника и является

той точкой, для которой сумма ее расстояний до вершин треугольника минимальна (рис. 16):

$$XA + XB + XC$$

минимально для  $X \equiv P$ .

Минимальная сумма равна длине отрезка  $BB'$ , где  $B'$  — вершина равностороннего треугольника, построенного на внешности стороны  $AC$  (рис. 17). Ясно, что в рассматриваемом случае  $BB'$  — срединный перпендикуляр к  $AC$

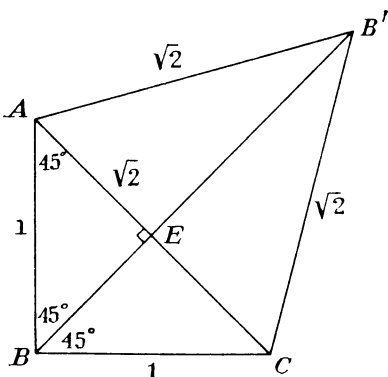


Рис. 17

и  $\triangle ABE$  — равнобедренный. Таким образом,

$$BE = AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

и

$$BB' = BE + EB' = \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{3}).$$

Включая полудиagonalь  $OD = \sqrt{2}/2$ , мы получаем непрозрачное множество с общей длиной

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (2 + \sqrt{3}) \approx 2,64.$$

Это прекрасное решение было предложено школьным учителем Морисом Пуаре из города Орлеан (в провинции Канады Онтарио).

### ЗАДАЧА 13. КРЕСТИКИ-НОЛИКИ

Рассмотрим игру в «крестики-нолики» на трехмерном кубе  $8 \times 8 \times 8$ . Сколько можно указать прямых, на которых лежат 8 значков в ряд?

**Решение.** Это нетрудная задача, она может быть решена простым счетом. Однако имеется блестящее решение, предложенное Лео Мозером. Оно состоит в том, что рассматривается куб  $10 \times 10 \times 10$ , полученный покрытием данного куба  $8 \times 8 \times 8$  слоем единичной толщины. Выигрывающая прямая во внутреннем кубе  $8 \times 8 \times 8$  пересекает два из единичных кубиков, окружающих этот куб, и каждый единичный куб в оболочке пересекается одной выигрывающей прямой. Таким образом, каждая выигрывающая прямая соответствует единственной паре единичных кубов во внешней оболочке и число выигрывающих прямых равно половине количества единичных кубиков в оболочке, а именно

$$\frac{10^3 - 8^3}{2} = \frac{1000 - 512}{2} = 244.$$

Этот подход является совершенно общим. Количество выигрывающих прямых для куба с ребром  $k$  в  $n$ -мерном пространстве равно

$$\frac{(k+2)^n - k^n}{2}.$$



## ЗАДАЧА 14. УДИВИТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Докажите, что если повернуть катеты вокруг их вершин так, чтобы они легли на гипотенузу, то длина их общей части равна диаметру вписанной окружности (рис. 18).

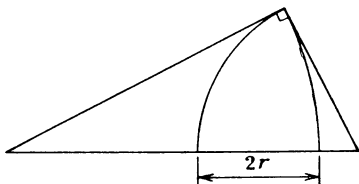


Рис. 18

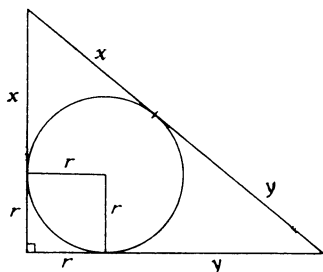


Рис. 19

**Решение.** Вообще говоря, размер вписанной в треугольник окружности является не очень простой функцией длин его сторон. Однако для прямоугольного треугольника имеется замечательное соотношение

диаметр = (сумма длин катетов) — (длина гипотенузы).

Это легко показать следующим образом. Радиусы, проведенные в точки касания окружности с катетами, спроектируем на каждый из катетов (рис. 19). Так как две

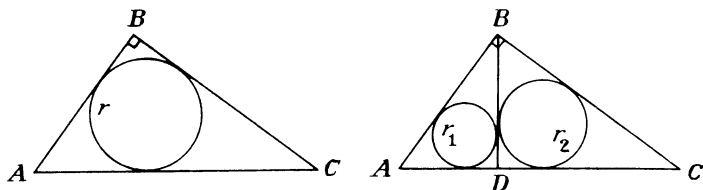


Рис. 20

касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны, то из чертежа получаем, что

(сумма катетов) — (гипотенуза) =

$$= [(x + r) + (r + y)] - (x + y) = 2r.$$

Ответ на задачу следует из наблюдения того, что длина общей части катетов есть просто (сумма катетов) — (гипотенуза).

Следующее соотношение также легко выводится. Если опустить высоту  $BD$  на гипотенузу, то сумма трех радиусов  $r, r_1, r_2$  вписанных окружностей в треугольник  $ABC$  и меньшие треугольники, на которые его разбивает высота  $BD$ , есть просто сама высота  $BD$  (рис. 20). Имеем

$$2r + 2r_1 + 2r_2 = (AB + BC - AC) + (AD + BD - AB) + \\ + (BD + DC - BC) = (AD + DC) - AC + 2BD = 2BD,$$

следовательно,  $r + r_1 + r_2 = BD$ .

#### ЗАДАЧА 15. ЦИФРЫ ЧИСЛА $4444^{4444}$

Сумма цифр десятичной записи числа  $4444^{4444}$  равна  $A$ . Сумма цифр числа  $A$  равна  $B$ . Какова сумма цифр числа  $B$ ?

**Решение.** Если десятичный логарифм натурального числа  $n$  лежит между  $k - 1$  и  $k$ , то число  $n$  имеет  $k$  цифр. Теперь

$$\lg 4444^{4444} = 4444 \lg 4444.$$

Используя обозначение  $[x]$  для наибольшего целого числа, не превосходящего  $x$ , мы видим, что количество цифр числа  $4444^{4444}$  есть

$$N = [4444 \lg 4444] + 1.$$

Так как  $4444 < 10^4$ , то  $\lg 4444 < 4$  и

$$N \leq 4444 \cdot 4 + 1 < 20\,000.$$

$A < 20\,000 \cdot 9 < 199\,999$  потому, что каждая из цифр не больше, чем 9. Но сумма цифр числа 199 999 больше суммы цифр любого меньшего натурального числа, поэтому

$$B = (\text{сумма цифр числа } A) < 1 + 5 \cdot 9 = 46.$$

Сумма цифр числа  $B$  не может превосходить числа 12, которое является наибольшей суммой цифр числа  $\leq 45$  (достигается для 39). Так как само число и его сумма цифр имеют один и тот же остаток при делении на 9, то числа  $A, B$  и  $S$  имеют один и тот же остаток при делении на 9, что обозначается так:

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv S \pmod{9}.$$

$$\begin{aligned}
 4444^{4444} &\equiv (-2)^{4444} \equiv 2^{4444} \equiv 2(2^3)^{1481} \equiv \\
 &\equiv 2(-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 \pmod{9}.
 \end{aligned}$$

Из того, что  $S \equiv 7 \pmod{9}$  следует, что  $S = 7$ , так как 7 — единственное число, не больше 12 и имеющее остаток 7 при делении на 9.

#### ЗАДАЧА 16. $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$

Часто отмечают, что замечательное уравнение  $e^{\pi i} = -1$  связывает четыре самых важных во всей математике числа. Лишь немного уступает ему уравнение

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n),$$

связывающее три наиболее важные функции элементарной теории чисел, где  $\sigma(n)$  — сумма положительных делителей числа  $n$ ,  $d(n)$  — количество положительных делителей числа  $n$ ,  $\varphi(n)$  — функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел  $m \leq n$ , взаимно простых с числом  $n$ , т. е.  $(m, n) = 1$ . Конечно, можно соединить любые функции, какие мы хотим, придумав соответствующее математическое соотношение. Однако докажите тот удивительный факт, что соотношение  $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$  является необходимым и достаточным условием того, что  $n$  — простое число.

**Решение.** 1) Предположим, что  $n$  — простое число. Тогда делителями  $n$  является 1 и  $n$  и поэтому  $\sigma(n) = n + 1$ ,  $\varphi(n) = n - 1$  и  $d(n) = 2$ . В этом случае

$$\sigma(n) + \varphi(n) = 2n = n \cdot d(n),$$

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n).$$

Следовательно, выполнение этого условия необходимо.

2) Предположим, что  $b(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$  и что  $n$  — не простое число. Соотношение не выполняется для  $n = 1$  ( $1 + 1 \neq 1 \cdot 1$ ). Будем считать, что  $n \geq 2$ .

Для  $n > 1$   $\varphi(n)$  не учитывает само число  $n$  и мы имеем

$$\varphi(n) < n.$$

Так как  $n$  — составное число, то оно имеет не менее трех делителей. Обозначим  $d(n)$  через  $k$ , а положительные

делители числа  $n$  через

$$d_1 = 1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Так как  $k = d(n) \geq 3$ , то делитель  $d_2$  не является наибольшим делителем, поэтому

$$d_2 < n \quad \text{и} \quad n - d_2 \geq 1.$$

Следовательно, получаем

$$\begin{aligned} n \cdot d(n) - \sigma(n) &= kn - (d_1 + d_2 + \dots + d_k) = \\ &= (n - d_1) + (n - d_2) + \dots + (n - d_k) \geq \\ &\geq (n - d_1) + (n - d_2) + (n - d_k) \geq \\ &\geq (n - 1) + 1 + 0 = n > \varphi(n); \end{aligned}$$

тем самым мы показали невозможность условия  $n \cdot d(n) - \sigma(n) = \varphi(n)$ . Полученное противоречие показывает, что  $n$  — не является простым числом.

Возможно, что самым знаменитым условием простоты числа является теорема Вильсона:

*Число  $n$  является делителем числа  $(n-1)! + 1$  тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.*

В 1965 г. журнал «American Mathematical Monthly» напечатал под номером E1702 следующую задачу, принадлежащую Дугласу Линду и решенную Кеннетом Крамером и Стивенем Минскером:

Докажите, что число  $n$  является делителем числа  $N = \sum_{r=1}^{n-3} r(r!)$  тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число.

**Решение.** Имеем  $N = 1(1!) + 2(2!) + \dots + (n-3) \times [(n-3)!]$ . Так как  $r(r!) = (r+1)r! - r! = (r+1)! - r!$ , то

$$\begin{aligned} N &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \dots \\ &\dots + [(n-2)! - (n-3)!] = (n-2)! - 1. \end{aligned}$$

Умножив на  $n-1$  и прибавив  $n$  к обеим частям равенства, получим

$$(n-1)N + n = (n-1)! + 1.$$

По теореме Вильсона  $n$  — простое число в том и только том случае, если  $n$  является делителем числа  $(n-1)! + 1$ , а последнее соотношение является верным тогда и только тогда, если  $n$  есть делитель числа  $N$ , так как числа  $n$  и  $n-1$  взаимно просты.

# ЗАДАЧА 17. О $k$ -ОБЛАКАХ

Круги единичного радиуса не имеют общих внутренних точек и лежат внутри полосы  $S$ , образованной двумя параллельными прямыми, отстоящими друг от

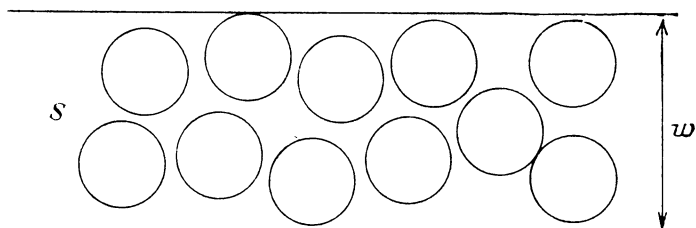


Рис. 21

друга на расстоянии  $w$ . Будем называть эти круги  $k$ -облаком, если каждая прямая, пересекающая  $S$ , пересекается не менее чем с  $k$  кругами.

Докажите, что для 2-облака  $w \geq 2 + \sqrt{3}$  (рис. 21).

**Решение.** Проведем через точку  $O$  — центр некоторого круга  $C$  из 2-облака прямую  $m$ , перпендикулярную прямым, ограничивающим полосу  $S$  (рис. 22). Тогда прямая  $m$  должна пересекаться с другим кругом  $A$ . Пусть  $Q$  —

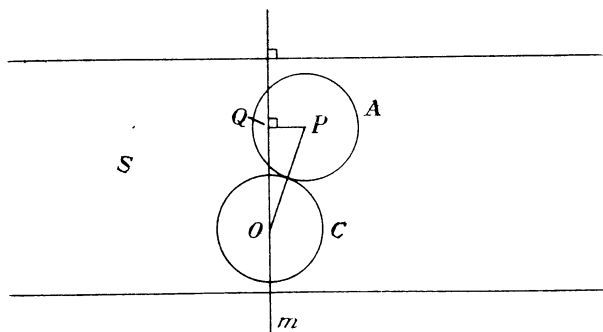


Рис. 22

основание перпендикуляра, опущенного из центра  $P$  круга  $A$  на прямую  $m$ .

Так как прямая  $m$  пересекает  $A$ , то длина  $PQ$  не больше радиуса. Следовательно,  $PQ \leq 1$ . А так как круги  $C$  и  $A$  не пересекаются, то  $OP \geq 2$ . По теореме Пифагора

имеем, что

$$OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} \geq \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Так как полоса  $S$  должна простирается по крайней мере на радиус круга в каждую сторону от концов отрезка  $OQ$ , чтобы содержать круги  $C$  и  $A$ , то ее ширина

$$w \geq 2 + OQ = 2 + \sqrt{3}.$$

### ЗАДАЧА 18. СУММА МИНИМУМОВ

Если образовывать наборы по  $k$  чисел  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  из множества чисел  $(1, 2, 3, \dots, n)$ , разрешая числа  $a_i$  повторяться, то таких наборов будет  $n^k$ . Для каждого такого набора отметим наименьшее из  $a_i$ . Докажите неожиданный результат, что сумма наименьших  $a_i$  во всех наборах равняется просто

$$1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

— сумме  $k$ -х степеней первых  $n$  натуральных чисел, т. е.

$$\sum \min(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{m=1}^n m^k.$$

**Решение.** Это прекрасное решение основано на очень простом факте, который настолько очевиден, что, как правило, не может помочь в решении других задач. При сложении последовательности натуральных чисел  $r_i$  можно распределить их члены  $\geq 1$ , члены  $\geq 2$  и т. д. Тогда  $\sum r_i = (\text{количество членов} \geq 1) + (\text{количество членов} \geq 2) + \dots$ . Таким образом, число  $r$  считается  $r$  раз, давая верный вклад в сумму. Например, число 3 можно сосчитать в слагаемых (количество членов  $\geq 1$ ), (количество членов  $\geq 2$ ), (количество членов  $\geq 3$ ) и ни в каких других слагаемых. Эта процедура эквивалентна прохождению по ряду, при которых вынимается по единичке из каждого члена (до тех пор пока там не останется ничего), и последующему сложению сумм, получающихся в результате таких прохождений. (Это похоже на представление числа  $r$  в виде кучки из  $r$  спичек.)

Оказывается, очень легко вычислить количество членов в рассматриваемой сумме, которые не меньше целого положительного числа  $t$ . Ясно, что

$$\min(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq t$$

тогда и только тогда, когда каждое  $a_i$  в  $k$ -наборе  $\geq t$ . Количество  $k$ -наборов, имеющих это свойство, просто равно количеству  $k$ -наборов из множества чисел  $(t, t+1, \dots, n)$ . Для каждого  $a_i$  можно указать  $n-t+1$  способ выбора соответственно, а количество  $k$ -наборов равно  $(n-t+1)^k$ . Поэтому

$$(\text{количество членов} \geq t) = (n-t+1)^k,$$

а сумма их всех равна

$$\begin{aligned} \sum \min(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{t=1}^n (\text{количество членов} \geq t) = \\ &= \sum_{t=1}^n (n-t+1)^k = n^k + n^{k-1} + \dots + 1^k. \end{aligned}$$

Профессор Иван Нивен дал прекрасное завершение проведенного рассуждения, продолжая от уже полученного результата, а именно, что количество  $k$ -наборов с минимумом  $\geq t$  равно  $(n-t+1)^k$ . Эта же формула дает, что количество  $k$ -наборов с минимумом  $\geq t+1$  равно  $(n-t)^k$ . Поэтому количество  $k$ -наборов с минимумом, равным ровно  $t$ , равно  $(n-t+1)^k - (n-t)^k$ , и эти наборы вносят в общую сумму вклад, равный  $t[(n-t+1)^k - (n-t)^k]$ . Складывая все такие выражения для  $t = 1, 2, \dots, n$ , видим, что общая сумма равна

$$\begin{aligned} 1[(n)^k - (n-1)^k] + 2[(n-1)^k - (n-2)^k] + \\ + 3[(n-2)^k - (n-3)^k] + \dots + n[1^k - 0^k] = \\ = n^k + n^{k-1} + n^{k-2} + \dots + 1^k. \end{aligned}$$

Дадим возможность читателю насладиться, вычисляя значение  $\sum \max(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

### ЗАДАЧА 19. ТРИ ПОСЛЕДНИЕ ЦИФРЫ ЧИСЛА $7^{9999}$

Каковы три последние цифры числа  $7^{9999}$ ?

**Решение.** Заметим, что  $7^4 = 2401$ . Поэтому

$$7^{4n} = (2401)^n = (1 + 2400)^n = 1 + n \cdot 2400 + C_n^2 \cdot 2400^2 + \dots,$$

где все члены этого биномиального разложения после второго оканчиваются по крайней мере на четыре нуля

и не влияют на последние три цифры результата. Эти последние определяются из равенства

$$1 + n \cdot 2400 = 24n \cdot 100 + 1.$$

Если  $m$  — последняя цифра числа  $24n$ , то имеем

$$24n \cdot 100 + 1 = (\dots m) \cdot 100 + 1 = \dots m01,$$

т. е.  $7^{4n}$  оканчивается на  $m01$ .

При  $n = 2499$  число  $24n$  оканчивается на 6 и мы видим, что

$$7^{4n} = 7^{9996} \text{ оканчивается на } 601.$$

Так как  $7^3 = 343$ , то мы получаем

$$7^{9999} = 7^{9996} \cdot 7^3 = (\dots 601)(343) = \dots 143.$$

Отсюда получаем последние цифры — 143 (с помощью прямого умножения).

С другой стороны, мы можем пойти следующим путем. Для  $n = 2500$  число  $24n$  оканчивается на 0 и мы видим, что  $7^{4n} = 7^{10000}$  оканчивается на 001. Таким образом,

$$7^{10000} = \dots 001 = \dots 000 + 1 = 1000k + 1$$

для некоторого целого числа  $k$ . Это дает  $7^{10000} = 1000(k - 1) + 1001$ . Деля на 7, мы получаем

$$7^{9999} = \frac{1000(k - 1)}{7} + 143.$$

Так как правая часть должна быть целым числом, то 7 должно нацело делить число  $1000(k - 1)$ , но 7 не делит 1000. Таким образом,  $k - 1$  должно делиться на 7, в результате получаем целое число  $q$ . И мы имеем  $7^{9999} = 1000q + 143$ . Так как  $1000q$  оканчивается на 000, то мы видим, что  $7^{9999}$  оканчивается на 143.

## ЗАДАЧА 20. КАТЯЩАЯСЯ ИГРАЛЬНАЯ КОСТЬ

Обычная игральная кость имеет на своих гранях числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ее бросают случайным образом до тех пор, пока сумма выпавших за время бросания очков не превысит числа 12.

Какая общая сумма очков будет наиболее вероятной?

**Решение.** Рассмотрим предпоследний бросок. После него общая сумма должна быть либо 12, 11, 10, 9, 8,



либо 7. Если она равна 12, то общий результат будет с равной вероятностью принимать значения 13, 14, 15, 16, 17, 18. Аналогично при сумме 11 конечный результат с равной вероятностью принимает значения 13, 14, 15, 16, 17 и т. д. Число 13 появляется как равный кандидат в каждом случае и является единственным числом такого рода. Таким образом, число 13 — наиболее вероятное.

В общем те же доводы показывают, что наиболее вероятная сумма, впервые превышающая  $n$  ( $n \geq 6$ ), есть  $n + 1$ .

### ЗАДАЧА 21. ПРОТЫКАНИЕ КУБА

Сплошной куб  $C$  размером  $20 \times 20 \times 20$  построен из 2000 кирпичей размером  $2 \times 2 \times 1$ . Докажите, что этот куб можно проткнуть прямой линией перпендикулярно грани куба, проходящей через куб и не прикалывающей ни один из кирпичей.

**Решение.** Рассмотрим 8000 единичных кубиков в  $C$ . На каждой грани куба  $C$  их ребра образуют решетку  $20 \times 20$ . Внутри грани находится  $19 \cdot 19 = 361$  узлов этой решетки.

Прямые, проведенные через эти 361 узел перпендикулярно грани куба, проходят по ребрам единичных кубиков в соответствующие узлы решетки противоположной грани. Общее число таких линий, протыкающих внутренность куба  $C$ , равно  $3 \cdot 361 = 1083$ . Пусть  $L$  — произвольный элемент из этого множества прямых.

Две плоскости, проходящие через  $L$  параллельно граням куба  $C$ , делят  $C$  на четыре параллелепипеда, каждый из которых имеет  $L$  в качестве ребра. Пусть  $A$  — любой из этих параллелепипедов (рис. 23). Так как одно из ребер  $A$  равно 20 (ребро куба  $C$ ), то  $A$  должен содержать четное число единичных кубов. Теперь заметим, что кирпич  $2 \times 2 \times 1$  может иметь в  $A$  1, 2 или 4 своих единичных куба, но ни один кирпич не может содержать в  $A$  ровно 3 единичных куба. Общий вклад в  $A$  кирпичей, пересекающихся с  $A$  по 2 или 4 единичных куба, состоит из четного числа единичных кубов. Поэтому должно быть четное число кирпичей, пересекающихся с  $A$  по 1 единичному кубу. Заметим, что кирпич, который пересекается с  $A$  по единичному кубу, должен пересекаться с  $L$  по своей середине вдоль ребра, общего всем

четырем составляющим его единичным кубам. Следовательно, прямая  $L$  должна протыкать четное число кирпичей.

Но каждый кирпич протыкается только одной прямой  $L$ . На самом же деле каждый кирпич протыкается

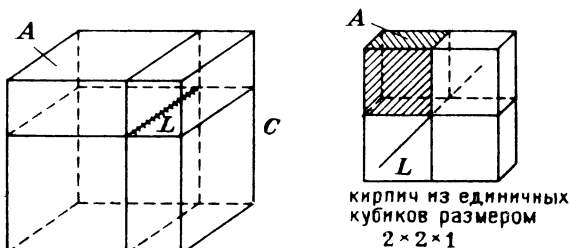


Рис. 23

одной и только одной прямой  $L$ , и мы получаем 2000 таких протыканий. А так как существует 1083 прямые  $L$ , каждая из которых протыкает четное число кирпичей, то найдутся прямые, которые будут протыкать менее двух кирпичей. По крайней мере 83 из прямых  $L$  не должны протыкать никакие кирпичи.

## ЗАДАЧА 22. ДВОЙНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Для некоторых натуральных чисел  $n$  можно построить последовательность, в которой каждое из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  встречается дважды, причем второе появление каждого из чисел  $r$  происходит на  $r$ -м месте после его первого появления. Например, для  $n = 4$

4, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 1.

Для  $n = 5$  имеем

3, 5, 2, 3, 2, 4, 5, 1, 1, 4.

Такое размещение невозможно для  $n = 6$  или 7. Для  $n = 8$  имеем

8, 6, 4, 2, 7, 2, 4, 6, 8, 3, 5, 7, 3, 1, 1, 5.

Докажите, что такая последовательность не существует, если остаток числа  $n$  при делении на 4 равен 2 или 3.

**Решение.** Занумеруем места в последовательности числами  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Предположим, что первое появление

ние числа 1 произойдет на месте с номером  $p_1$ , первое появление числа 2 — на месте с номером  $p_2$  и т. д. Тогда второе появление числа 1 случится на месте  $p_1 + 1$ , второе появление числа 2 — на месте  $p_2 + 2$  и т. д. Сумма всех чисел, являющихся номерами мест всех пар, равняется

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2n,$$

а, с другой стороны, равняется

$$(p_1 + p_1 + 1) + (p_2 + p_2 + 2) + \dots + (p_n + p_n + n).$$

Поэтому

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2(p_1 + p_2 + \dots + p_n) + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Обозначив  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = P$ , получим

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = 2P + \frac{n(n+1)}{2},$$

откуда

$$P = \frac{2n(2n+1) - n(n+1)}{4} = \frac{3n^2 + n}{4} = \frac{n(3n+1)}{4}.$$

Так как  $P$  — целое число, то  $n(3n+1)$  должно делиться на 4. Однако, если  $n$  при делении на 4 дает в остатке 2 или 3, то  $n(3n+1)$  при делении на 4 дает в остатке 2. Получим противоречие.

Д. Марч доказал, что в случае, если остаток при делении числа  $n$  на 4 равен 0 или 1, то требуемая последовательность всегда существует.

Рассмотрим теперь близкую задачу определения количества способов расставить в ряд числа 1, 2, ...,  $n$  так, чтобы при произвольно выбранном первом числе перед числом  $k$  стояло либо число  $k-1$ , либо число  $k+1$  (не обязательно непосредственно перед ним). Например, для  $n=6$  среди возможных расстановок имеются следующие: 4, 3, 5, 2, 6, 1 и 3, 4, 2, 1, 5, 6.

**Решение.** Предположим, что первое число есть  $r$ . Тогда числа 1, 2, ...,  $n$  разобьются на две группы:

$$A = (1, 2, \dots, r-1) \text{ и } B = (r+1, r+2, \dots, n).$$

Правило, требующее, чтобы перед числом  $k$  стояло либо число  $k-1$ , либо число  $k+1$ , влечет условие, что числа из  $A$  должны входить в ряд в порядке их убывания,

а числа из  $B$  в порядке их возрастания. Ясно, что первым числом из  $B$  не может быть, например, число  $r+2$ , потому что ему должно предшествовать либо число  $r+1$ , либо число  $r+3$ . Аналогично, первым числам из  $B$  после числа  $r$  не могут быть числа  $r+3, r+4, \dots, n$ . Продолжая такие рассуждения, нетрудно показать, что числа из  $B$  должны быть расположены в порядке  $r+1, r+2, \dots, n$ . Аналогичное рассуждение проводится и для множества  $A$ .

Поскольку требуется лишь, чтобы элементы из  $A$  и  $B$  располагались в их естественном порядке, то между собой эти группы могут перемешиваться. Например, так как  $r$  — первое число, то число  $r+1$  может стоять как следом за ним, так и после чисел  $r-1$  и  $r-2$ . Следовательно, количество рядов, которое начинается с числа  $r$ , равно количеству способов выбрать  $r-1$  место среди  $n-1$  места для всех  $r-1$  членов множества  $A$ , а именно, равно  $C_{n-1}^{r-1}$ . Расположение членов из  $B$  происходит автоматически на свободные места. Так как число  $r$  может быть выбрано из значений  $1, 2, \dots, n$ , то общее количество способов расстановки в ряд равно

$$C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

### ЗАДАЧА 23. ОКРУЖНОСТИ, РАЗБИВАЮЩИЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

На плоскости заданы  $2n+3$  точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой и никакие 4 — на одной окружности. Докажите, что всегда можно найти окружность, которая проходит через 3 из данных точек и разбивает остальные пополам, т. е. половина лежит внутри окружности, а половина вне нее.

**Решение 1** (предложенное Мюрреем Кламкином). Обозначим через  $A$  и  $B$  две вершины выпуклой оболочки  $H$  данного множества точек  $T$  (рис. 24). (Определение выпуклой оболочки дано в задаче 11.) Так как никакие три из точек множества  $T$  не лежат на одной прямой, то на отрезке  $AB$  не будет больше точек (кроме  $A$  и  $B$ ) из множества  $T$ . Пусть большая окружность  $C'$ , проходящая через точки  $A$  и  $B$ , имеет центр  $O$ , вне  $H$ . Сегмент  $AHB$  окружности  $C'$ , который лежит внутри  $H$ , может содержать некоторые из точек множества  $T$ . Однако увеличивая размер окружности  $C'$ , можно заставить ее

приблизиться к отрезку  $AB$  так близко, как мы хотим. При таком увеличении дуга  $AHB$ , приближаясь к  $AB$ , проходит через все (а их конечное число) точки из  $T$ , лежащие в первоначальном сегменте  $AHB$ . Таким образом, существует некоторое количество окружностей,

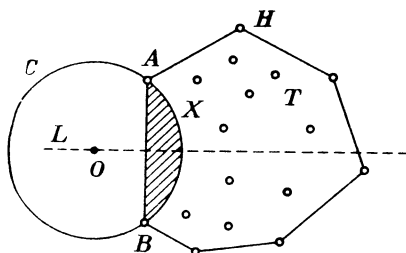


Рис. 24

проходящих через точки  $A$  и  $B$ , для которых сегмент  $AHB$ , включая его дугу, лишен точек из  $T$ . Обозначим такую окружность  $C$ , а ее центр буквой  $O$ .

Начнем с того, что имеется окружность  $C$ , проходящая ровно через две точки из множества  $T$ , а именно, через  $A$  и  $B$ , и не имеющая точек из  $T$  внутри себя. Будем преобразовывать  $C$ , передвигая ее центр к отрезку  $AB$  вдоль срединного перпендикуляра  $L$  отрезка  $AB$  и подбирая радиус так, чтобы  $C$  проходила все время через точки  $A$  и  $B$ . При приближении точки  $O$  к  $AB$  сегмент  $AHB$  увеличивается, захватывая все больше и больше точек из  $H$ . После пересечения точкой  $O$  отрезка  $AB$  сегмент  $AHB$  становится большим сегментом окружности  $C$  (определяемым отрезком  $AB$ ) и, в конце концов, увеличивается настолько, что покрывает все множество  $H$ , а следовательно, и все множество  $T$ . Так как никакие 4 точки из  $T$  не лежат на одной окружности, сегмент  $AHB$  должен захватывать точки из  $T$  по одной за раз. Когда  $(n+1)$ -я точка  $K$  окажется на окружности, то внутри нее окажется ровно  $n$  предыдущих точек из  $T$ , и она будет проходить через три точки  $A$ ,  $B$  и  $K$ . Остальные  $n$  точек из  $T$  будут все еще лежать вне окружности  $C$ , откуда следует утверждение задачи.

**Решение 2** (предложенное Л. Дж. Дики). Обозначим через  $O$  одну из данных точек и рассмотрим окружность  $R$  с центром в  $O$ . Рассмотрим инверсию данных точек относительно окружности  $R$ . (Определение инверсии можно прочесть в книге: *Коксетер, Грейцер. Новые встречи с геометрией.*— М.: Наука, 1978.— «Библиотека математического кружка».) Центр  $O$  при этом переходит в бесконечно удаленную точку и мы получим множество  $S$ , состоящее из  $2n+2$  конечных точек, являющихся образами заданных точек при такой инверсии (рис. 25).

Рассмотрим прямую  $t$  такую, что все множество  $S$  лежит по одну сторону от нее и начнем ее двигать к множеству  $S$  до тех пор, пока она не коснется его, скажем, в точке  $A'$  (или наоборот, обозначим через  $A'$  вершину

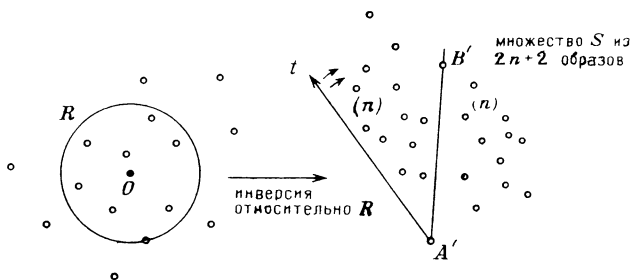


Рис. 25

выпуклой оболочки множества  $S$  и через  $t$  прямую, проходящую через точку  $A'$ , которая пересекается с этой выпуклой оболочкой только по точке  $A'$ ).

Пусть теперь один из лучей прямой  $t$  с вершиной в точке  $A'$  замечает множество  $S$ , поворачиваясь вокруг точки  $A'$ . Вскоре мы докажем, что замечающий луч  $t$  будет встречаться с точками из  $S$  по одной за раз. Следовательно, в конце концов он пройдет через точку  $B'$  такую, что  $A'B'$  делит остальные  $2n+2$  точки пополам.

Пусть  $A$  и  $B$  — точки из данного множества, являющиеся прообразами точек  $A'$  и  $B'$ . Заметим, что прямая  $A'B'$  не может проходить через точку  $O$  — центр инверсии, так как в таком случае точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  лежали бы на одной прямой, что противоречит условию. Поэтому прообраз прямой  $A'B'$  должен быть окружностью  $K$ , проходящей через точку  $O$  (рис. 26). Окружность  $K$  тогда проходит через три точки данного множества:  $A$ ,  $B$  и  $O$ . Итак, как при обратном преобразовании множества  $S$  в точки заданного множества, точки, лежавшие по одну сторону от  $A'B'$ , попадут внутрь окружности  $K$ , а точки, лежавшие по другую сторону, — во внешность этой окружности, то мы видим, что окружность  $K$  делит данное множество пополам. (Касательная к окружности  $K$  в точке  $O$  параллельна прямой  $A'B'$ .)

Мы не только решили задачу, но и показали, что через каждую точку  $O$  данного множества проходит искомая окружность. Из  $2n+3$  полученных таким образом окружностей имеется лишь  $(2n+3)/3$  различных, так

как окружность, проходящая через точки  $A$ ,  $B$  и  $O$ , при этом считается трижды. (Так как никакие четыре точки данного множества не лежат на одной окружности, то ни одна из полученных окружностей не может быть посчитана более чем три раза в этих  $2n+3$  решениях.) Для

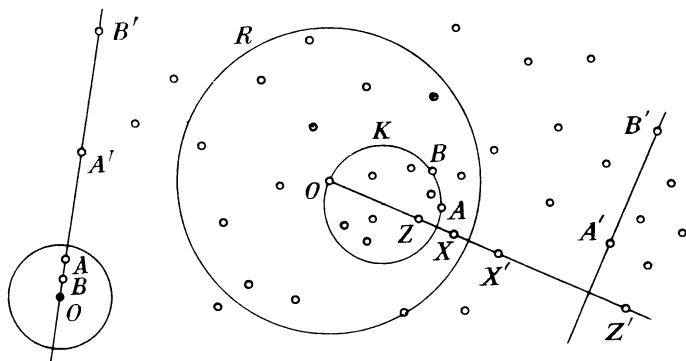


Рис. 26

любой из данных точек не является невозможным случаем, когда через нее проходит более одной искомой окружности.

В заключение мы докажем ранее приведенное утверждение о том, что заматающий луч  $t$  встречает точки из  $S$  по одной за раз. Сначала мы отметим, как и прежде, что всякий раз, когда луч встречает точку  $C'$ , то он не может в этом положении проходить также и через точку  $O$  — центр инверсии (в противном случае точки  $O$ ,  $C$  и  $A$  лежали бы на одной прямой). Таким образом, если бы луч встречал одновременно две (или более) точки, скажем  $C'$  и  $D'$ , то прообразом прямой  $A'C'D'$  была бы окружность, проходящая через точку  $O$  (так как прямая  $A'C'D'$  не проходит через  $O$ ) и содержащая четыре из данных точек  $O$ ,  $A$ ,  $C$  и  $D$ , что противоречит условию задачи.

#### ЗАДАЧА 24. О ДЛИНАХ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА

Если отрезки с длинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют треугольник, то для всех  $n = 2, 3, 4, \dots$  отрезки с длинами  $\sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{b}$ ,  $\sqrt[n]{c}$  также образуют треугольник.

**Решение.** Если отрезки с длинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют треугольник, то неравенство треугольника дает

$$a + b > c$$

и т. д. Поэтому мы имеем

$$\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}\right)^n > a + b > c = \left(\sqrt[n]{c}\right)^n,$$

откуда

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}.$$

Остальные случаи проверки неравенства треугольника рассматриваются аналогично, откуда и следует заключение.

### ЗАДАЧА 25. ПОЖАЛУЙСТА, НЕ ВЫЧИСЛЯЙТЕ

В 1952 г. Бухарт и Мозер опубликовали необычную статью «Пожалуйста, не вычисляйте» в популярном журнале «Scripta Mathematica» (с. 221—236). Мы рассмотрим здесь несколько представленных ими остроумных альтернативных вариантов обычным способом вычислений.

1. В первой задаче мы определим объем общей части двух прямых круговых цилиндров радиуса  $a$ , пересекающихся под прямым углом (т. е. их оси пересекаются

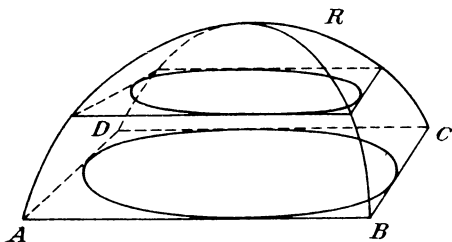


Рис. 27

под прямым углом). Это дает нам возможность моментально изобразить только что описанную область  $R$  пересечения цилиндров. В направлении одного из цилиндров  $R$  выглядит столь же круглой, как и цилиндр, из которого она вырезается. Верхняя половина  $R$  изображена на рис. 27. Ее объем легко найти, сравнивая эту фигуру



с вписанной в нее сферой. Ясно, что если вкатить сферу радиуса в каждый из этих цилиндров, то она будет вписана в их пересечение.

Слой из  $R$ , параллельный основанию  $ABCD$ , будет иметь квадратное основание в силу симметрии четвертого порядка тела  $R$ . Такой же слой вписанной сферы  $S$  имеет в основании круг, который является кругом, вписанным в соответствующее квадратное основание слоя из  $R$ . Отношение площадей квадрата и вписанного в него круга равно

$$\frac{(2r)^2}{\pi r^2} = \frac{4}{\pi}.$$

Суммируя сказанное, мы получаем, что объем  $R$  в  $4/\pi$  раз больше объема  $S$ . Таким образом,

$$\text{объем } R = \frac{4}{\pi} \left( \frac{4}{3} \pi a^3 \right) = \frac{16}{3} a^3.$$

Конечно, строгое обоснование того, что  $R = 4S/\pi$ , включает все основные вычисления, которых мы хотели избежать при таком подходе. В действительности в такой задаче нельзя обойти понятие предела. Тем не менее, сравнение  $R$  с  $S$  остроумно, вполне удовлетворительно, поскольку может быть строго обосновано.

2. Другая остроумная идея решает задачу определения прямой  $L$ , проходящей через точку  $P$  внутри выпуклой кривой  $C$ , которая отсекает от  $C$  область с наименьшей площадью. Если отрезок прямой  $L$ , заключенный

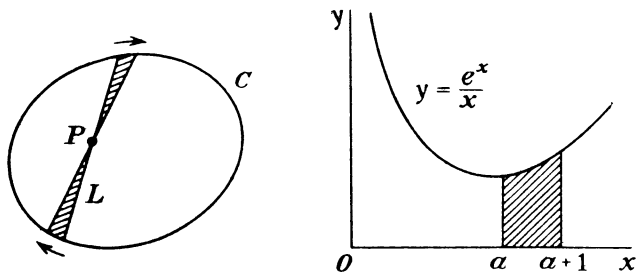


Рис. 28

в области  $C$ , не делится точкой  $P$  пополам, то, немного повернув эту прямую вокруг точки  $P$  в соответствующем направлении, мы ототрежем от области больший сектор, чем добавится с другой стороны от точки  $P$ . Это пока-

зывает, что данная область не является наименьшей (рис. 28). Эта старая идея находит применение в решении многих задач.

Очень привлекательно применение этой идеи к решению задачи о нахождении двух ординат кривой  $y = e^x/x$ , абсциссы которых отличаются на единицу, таких, что площадь, отсекаемая ими под кривой, была бы минимальна. Ясно, что если ординаты не равны, то, сдвигая их так, чтобы их длины выравнивались, получим лучший результат. Таким образом, для минимального положения должно найтись число  $a$  такое, что

$$\frac{e^a}{a} = \frac{e^{a+1}}{a+1}, \text{ откуда } a = \frac{1}{e-1}.$$

3. Мозер и Бухарт остроумно применили классический изопериметрический результат о том, что из всех простых  $n$ -угольников с данным периметром  $L$  наибольшую площадь имеет правильный  $n$ -угольник (многоугольник называется простым, если он не содержит самопересечений).

Новое лаконичное доказательство, в котором присутствует довольно обычное предположение о том, что такой  $n$ -угольник максимальной площади существует, было предложено покойным Ричардом де Маром в его выдающейся статье «Простой подход к изопериметрической задаче на плоскости» в журнале «Mathematics Magazine», 1975. Он рассматривает по отдельности два условия правильности многоугольника:

- 1) равенство сторон,
- 2) равенство углов.

Эти случаи рассматриваются с помощью блестящего соображения, которое проиллюстрируем, используя результат, полученный в п. 1.

Пусть  $K = ABCD \dots$  — простой многоугольник, не являющийся равносторонним (рис. 29). В этом случае длины некоторой пары последовательных сторон не будут равны. Предположим, что  $AB > BC$ . Выберем точку  $X$  между  $A$  и  $B$  так, чтобы  $BX > BC$ . Тогда угол  $u = \angle BCX$  превышает угол  $v = \angle BXC$ . Теперьотрежем треугольник  $BCX$  и перевернем его так, чтобы поменять точки  $X$  и  $C$ . В результате получим многоугольник  $K'$ . Так как  $u > v$ , то угол в точке  $X$  будет больше развернутого угла и  $K'$  не будет выпуклым. Заметим также, что  $K'$  будет уже не  $n$ -угольником, а  $(n+1)$ -угольником. Однако так как

он является невыпуклым, мы можем легко превратить его в  $n$ -угольник, при этом увеличив его площадь. Если мы соединим точку  $B'$  (новое положение точки  $B$ ) с точкой  $A$ , то мы получим  $n$ -угольник большей площади даже с меньшим периметром. Растягивая фигуру так, чтобы ее периметр стал равным  $L$ , мы еще увеличим ее площадь, откуда следует, что  $K$  не является многоугольником максимальной площади.

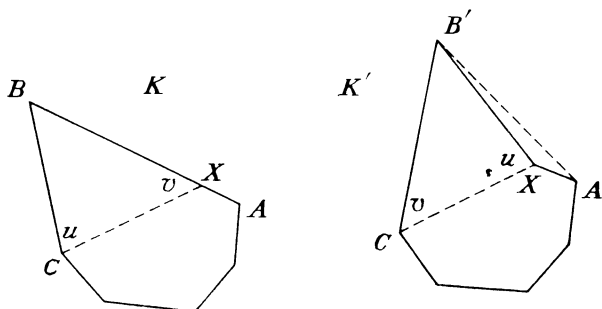


Рис. 29

Рассмотрим, как Вухарт и Мозер применяют эту изопериметрическую теорему к решению старой задачи максимизации площади прямоугольника, который с одной стороны ограничен фиксированной стеной, а с трех других сторон — забором с заданной общей длиной  $L$ . Для всех заборов  $ABCD$  четырехугольник  $B'BCC'$ , полученный с помощью отражения данного прямоугольника относительно стены, будет иметь постоянный периметр  $2L$

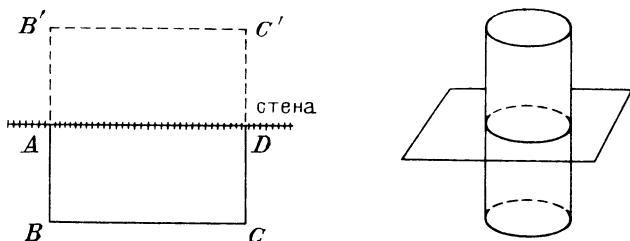


Рис. 30

(рис. 30). Таким образом, он будет максимальным, когда будет правильным, а именно, квадратом. Соответственно,

максимум «половины»,  $ABCD$ , должен быть в случае, когда его длина вдвое больше ширины, и эта задача решена.

Аналогичная задача нужна при нахождении размеров консервной банки максимального объема с заданной площадью поверхности. Если ее решение известно в одном из случаев «с крышкой» или «без крышки», то легко получить и решение в другом случае. Отражая открытую банку относительно плоскости, в которой лежит ее верхняя поверхность, получаем закрытую банку, которая обязана также иметь максимальный объем. Таким образом, каково бы ни было отношение  $h/r$  высоты к радиусу мы видим, что оно вдвое больше для «банки с крышкой», чем для «банки без крышки» (рис. 30).

4. Наконец, рассмотрим еще одно приложение изопериметрического результата, получая другое решение задачи № 7.

В углу прямоугольной комнаты требуется расположить две четырехфутовые ширмы так, чтобы отгородить участок пола максимальной площади. Определите их положение.

Пусть вершина угла и стены комнаты рассматриваются как начало системы координат и ее оси. Отразим ширмы относительно осей так, чтобы получился восьмиугольник  $PBP_1A_1P_2B_1P_3A$ , как показано на рис. 31. Для любого положения ширм периметр восьмиугольника будет постоянным и равняется  $8 \cdot 4 = 32$  фута. Решение мгновенно следует после того, как мы заметим, что максимальной площади в углу соответствует восьмиугольник максимальной площади. Так как он должен быть правильным восьмиугольником, то каждый из его углов равен

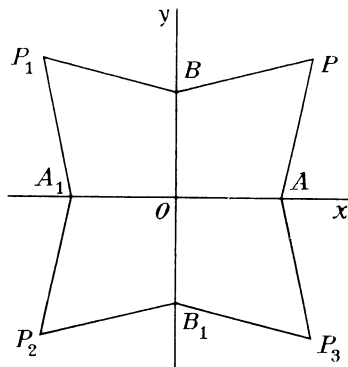


Рис. 31

$$\frac{1}{8} (8 - 2) \cdot 180 = 135 \text{ градусов}$$

и остальные элементы построения легко получаются.

# ЗАДАЧА 26. $a^b$ и $b^a$

Часто бывает нетрудно определить, что больше:  $a^b$  или  $b^a$ . Очевидно, что

$$2^3 < 3^2 \text{ и } 3^4 > 4^3.$$

Однако при рассмотрении двух чисел, одно из которых между 2 и 3, а другое между 3 и 4, решение этого вопроса бывает трудным. Что больше:

$$e^\pi \text{ или } \pi^e?$$

**Решение.** Для положительного  $x$  мы имеем

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots > 1 + x.$$

Так как  $\pi > e$ ,  $\pi/e > 1$  и  $x = \pi/e - 1 > 0$ . Таким образом,

$$e^{\pi/e-1} > 1 + \left(\frac{\pi}{e} - 1\right), \quad \frac{e^{\pi/e}}{e} > \frac{\pi}{e},$$

$$e^{\pi/e} > \pi, \quad e^\pi > \pi^e.$$

В качестве легкого упражнения предлагаю показать, что функция  $e^x - 1 - x$  имеет единственное минимальное значение в нуле (при  $x=0$ ). Таким образом, для всех вещественных значений  $x$  мы имеем

$$e^x \geq 1 + x.$$

При помощи этого соотношения Дьердь Поста построил следующее прекрасное доказательство знаменитого неравенства среднего арифметического и среднего геометрического. Обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  некоторые вещественные положительные числа, а через  $A$  и  $G$ , соответственно, их среднее арифметическое и среднее геометрическое, т. е.

$$A = \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad G = (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}.$$

Придавая  $x$  значения  $(a_i/A) - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , мы получим  $n$  соотношений

$$e^{(a_1/A)-1} \geq \frac{a_1}{A},$$

$$e^{(a_2/A)-1} \geq \frac{a_2}{A},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e^{(a_n/A)-1} \geq \frac{a_n}{A}.$$

Перемножая их, получим

$$e^{\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{A}-n} \geq \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{A^n},$$

что есть просто

$$e^{n-n} \geq \frac{G^n}{A^n} \quad \text{или} \quad 1 \geq \frac{G^n}{A^n},$$

откуда следует, что  $A \geq G$ .

Заметим, что  $A = G$  лишь в том случае, если равенство будет во всех  $n$  соотношениях. Это соответствует тому, что во всех случаях  $a_i/A - 1 = 0$ . Это показывает, что  $A = G$  только тогда, когда все  $a_i$  равны (числу  $A$ ).

### ЗАДАЧА 27. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШУТКА

Человек купил на почте несколько одноцентовых марок, столько двухцентовых, что  $3/4$  их количества равняется числу одноцентовых, столько пятицентовых, что  $3/4$  их количества равняется числу двухцентовых, и пять восьмицентовых марок. Он заплатил за них одним банкнотом без сдачи. Сколько марок каждого достоинства он купил?

**Решение.** Предположим, что человек купил  $y$  одноцентовых марок. Тогда он купил  $3y/4$  двухцентовых марок и  $9y/16$  пятицентовых марок. Так как  $9y/16$  — целое число, то  $y$  делится на 16. Тогда для некоторого целого числа  $16x = y$  и покупка состояла из  $16x$  одноцентовых,  $12x$  двухцентовых,  $9x$  пятицентовых и 5 восьмицентовых марок. Предположим, что он расплатился за марки  $k$ -долларовым банкнотом. Таким образом, стоимость равна

$$16x + 2 \cdot (12x) + 5 \cdot (9x) + 8 \cdot 5 = 100k,$$

т. е.

$$85x + 40 = 100k,$$

$$17x = 20k - 8 \quad \text{и} \quad x = \frac{20k - 8}{17} = k + \frac{3k - 8}{17}.$$

Так как числа  $x$  и  $k$  — целые, то

$$\frac{3k - 8}{17} \text{ — также целое число.}$$

Но  $k$  должно быть одним из чисел 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100,

1000 или 10 000. Единственным из них значением  $k$ , при котором  $(3k - 8)/17$  — целое число, является  $k = 1000$ , что означает, что человек купил 18 816 одноцентовых, 14 112 двухцентовых, 10 584 пятицентовых и 5 восьмицентовых марок.

## ЗАДАЧА 28. КАРТЫ НА СФЕРЕ

Рассмотрим на сфере географическую карту  $M$ . Предположим, что в каждой вершине карты  $M$  сходится ровно три страны и что ни одна из границ стран не является петлей (т. е. каждая граница содержит не менее двух вершин). Карта окрашена красками  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  так, что граничащие страны окрашены в разные цвета. Мы используем термин «страна» для всех областей на карте независимо от того, являются ли они странами или водным пространством.

Будем называть страну четной или нечетной в зависимости от четности или нечетности числа ее границ. Докажем, что общее количество нечетных стран, которые окрашены в один из двух цветов, скажем, в  $A$  или  $B$ , является всегда четным числом.

**Решение.** Этот вопрос кажется очень трудным, потому что, даже зная, что страна окрашена в цвет  $A$ , мы не можем ее причислить к рассматриваемой совокупности, пока мы не знаем, четная она или нечетная.

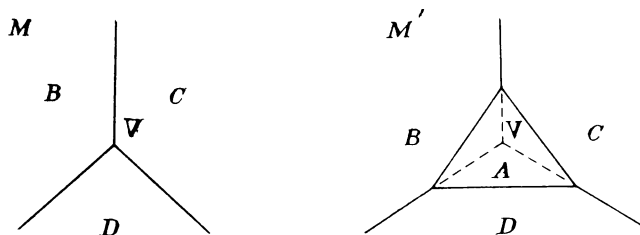


Рис. 32

На выручку приходит следующая великолепная идея. Каждую вершину  $V$  поместим внутрь маленького треугольника так, как показано на рис. 32 (вершина  $V$  и короткие части каждой из дуг, выходящих из этой

вершины, стираются, а свободные концы соединяются, при этом образуется треугольник). Конечно, это добавляет в каждой вершине новую треугольную страну, в результате чего получается новая карта  $M'$ . Хотя три из четырех цветов окружают вершину  $V$ , остается еще четвертый цвет для этого нового треугольника. Таким образом, эти треугольники можно окрасить, соблюдая правило, что соседние страны должны быть окрашены в различные цвета. Также заметим: на карте  $M'$  по-прежнему в каждой вершине сходятся три страны.

Построение карты  $M'$  имеет двойной эффект. Страна нового треугольника также является новой границей существующей страны, тем самым меняя ее четность: из четной в нечетную или наоборот. Таким образом, когда в вершине  $V$  построен новый треугольник, количество нечетных областей в каждом из трех цветов, окружавших вершину  $V$ , изменяется на единицу (увеличиваясь или уменьшаясь), но так как новый треугольник сам является нечетной страной четвертого цвета, мы видим, что количество нечетных стран меняется на единицу для каждого из четырех цветов. Тогда для любой пары цветов изменение общего количества нечетных стран, имеющих эти цвета, равно либо 2, либо 0, либо  $-2$  в зависимости от того, увеличивается или уменьшается количество нечетных стран с каждым из этих двух цветов. Во всех случаях общее изменение для любых двух цветов является четным числом. Поэтому количество нечетных стран, окрашенных в  $A$  или  $B$ , вначале и потом имеют одну и ту же четность. Все это сохраняется и при изменениях в каждой вершине. Таким образом, после построения карты  $M'$  общее количество нечетных областей, окрашенных в цвета  $A$  или  $B$ , имеет ту же четность, что и в карте  $M$ , рассмотренной вначале. Следовательно, мы можем получить необходимую информацию, рассматривая карту  $M'$ .

Кроме того, при построении карты  $M'$  количество сторон, окружавших страну на карте  $M$ , удваивается. Таким образом, на карте  $M'$  все страны, бывшие и на карте  $M$ , становятся четными, а нечетными будут лишь новые треугольники. Нам остается показать, что количество новых треугольников на карте  $M'$ , окрашенных в цвет  $A$  или  $B$ , четное.

Теперь нам в действительности уже не нужны нарисованные маленькие треугольники. Так как каждый из них окрашен в тот цвет, который не окружает вершину



$V$ , то мы получаем эквивалентную ситуацию, просто помечая каждую вершину на карте  $M$  тем цветом, который не окружает ее. Предположим, что мы сделали такую замену. Покажем, что общее количество вершин, помеченных цветами  $A$  или  $B$ , четно. С этой целью рассмотрим границу, разделяющую две страны, окрашенные в цвета  $C$  и  $D$ . Вершины в концах такого «разделителя»

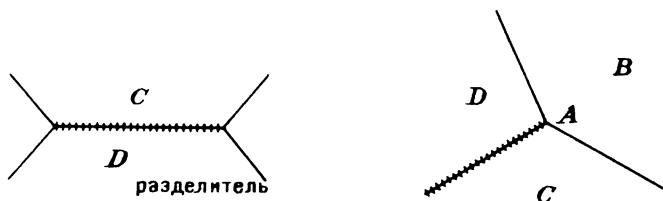


Рис. 33

не могут быть помечены ни цветом  $C$ , ни цветом  $D$ , так как эти цвета окружают каждую из них (рис. 33). Поэтому каждый из концов разделителя должен быть помечен цветом  $A$  или  $B$ . С другой стороны, если вершина помечена цветом  $A$  или  $B$ , то цвета  $C$  и  $D$  обязаны содержаться среди трех цветов стран, окружающих эту вершину. Следовательно, одно из ребер, выходящих из этой вершины, должно быть разделителем. Тогда мы имеем, что оба конца этого разделителя помечены цветами  $A$  или  $B$ , а разделители присутствуют у всех вершин, помеченных цветами  $A$  или  $B$ .

Завершает наши рассуждения доказательство того факта, что никакие два разделителя не могут иметь общего конца. Но это очевидно. Предположим, что два разделителя встречаются в некоторой вершине, помеченной, скажем, цветом  $A$ . Три страны, примыкающие к этой вершине, должны быть окрашены в цвета  $B$ ,  $C$  и  $D$ , но ребро между странами с цветами  $B$  и  $C$  не является разделителем, как не является разделителем и граница между странами, окрашенными в цвета  $B$  и  $D$ . Таким образом, из вершины, помеченной цветом  $A$ , выходит не более одного ребра, являющегося делителем.

Это означает, что разделители не пересекаются; таким образом, все вершины, помеченные цветом  $A$  или  $B$ , разбиваются на пары, откуда следует, что их общее число четно.

## ЗАДАЧА 29. ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Докажите, что всякая замкнутая выпуклая область на плоскости, имеющая площадь  $\pi$  или большую, содержит две точки, находящиеся на расстоянии 2 друг от друга (рис. 34).

**Решение.** Введем полярную систему координат так, чтобы полярная ось касалась этой области в центре системы координат. Предположим, что уравнение границы

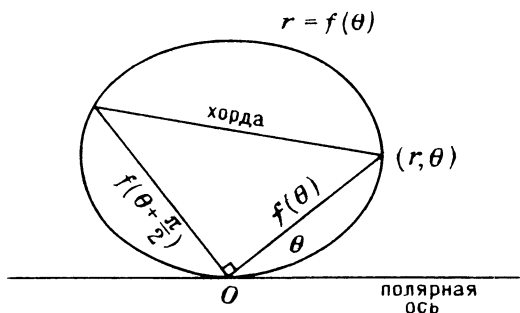


Рис. 34

области таково:  $r = f(\theta)$ . Тогда, используя обычную формулу площади, имеем

$$A = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Заменяя во втором интеграле  $\theta$  на  $\theta + \frac{\pi}{2}$ , мы видим, что он равен

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta.$$

Следовательно, площадь равна

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[ f^2(\theta) + f^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right] d\theta.$$

Подынтегральная функция здесь равна квадрату длины

искомой хорды. Если любые две точки отстоят на расстоянии, меньшее 2, то все хорды будут иметь длину, меньшую 2, а их квадраты будут меньше 4, и мы имеем

$$A < \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 4 d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi.$$

Получили противоречие, откуда следует справедливость утверждения задачи.

Мы замечаем, что если длина ни одной из хорд не превосходит 2, то площадь не превосходит  $\pi$ . Таким образом, если известно, что площадь превосходит  $\pi$ , то должна существовать некоторая хорда, длина которой превосходит 2.

Эта работа подводит к красивым результатам из комбинаторной геометрии. В 1911 г. Герман Минковский в работе, написанной незадолго до смерти, разразился серией поразительных результатов о выпуклых областях на плоскости. Там содержится и ныне знаменитая теорема:

*Если центрально-симметричная замкнутая область площади, большей 4, имеет свой центр в целочисленной точке, то она содержит еще не менее 2-х целочисленных точек.* (Центрально-симметричной фигурой называется фигура, содержащая точку  $O$ , поворот вокруг которой на  $180^\circ$ , приводит к совмещению фигуры с ее прежним положением.)

Эта теорема рассматривается в моей книге «Mathematical Gems», том 1, и я не буду повторять здесь ее доказательство. Однако мы можем легко доказать теорему, предложенную Джозефом Хаммером (АММ, 1968):

*Если центрально-симметричная замкнутая область  $R$  площади  $> \pi$  имеет свой центр в целочисленной точке, то она может быть повернута вокруг своего центра в положение, при котором будет содержать еще по крайней мере две целочисленные точки.*

**Доказательство.** Так как точка  $O$  — центр фигуры  $R$ , то она делит пополам каждую проходящую через нее хорду. Поэтому, если существует хорда  $AB$ , проходящая через точку  $O$  и имеющая длину  $\geq 2$ , то эта хорда будет простирается по крайней мере на 1 в обе стороны от точки  $O$  и, поворачивая ее вокруг точки  $O$ , мы можем привести ее в положение, при котором она будет покрывать две соседние целочисленные точки ( $C$  и  $D$ , или  $E$

и  $F$ ) на прямой, проходящей через точку  $O$  и принадлежащей целочисленной решетке (рис. 35).

Так как фигура  $R$  имеет площадь  $>\pi$ , то, как мы знаем, некоторая ее хорда имеет длину  $\geq 2$ . Таким образом, если хорда  $AB$  проходит через  $O$ , то утверждение справедливо. Если хорда  $AB$  не проходит через  $O$ , то

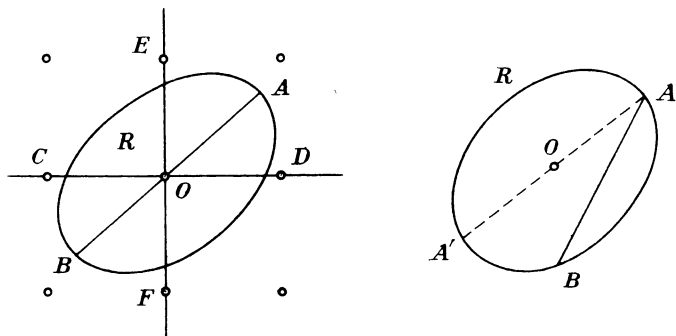


Рис. 35

точка отстоит даже более чем на  $AB/2$  от одного из концов, скажем,  $A$ . А поскольку фигура  $R$  центрально-симметрична, хорда  $AOA'$  даже длиннее, чем хорда  $AB$ , и доказательство закончено.

В точности та же идея подтверждает справедливость и второй теоремы из работы Хаммера:

*Если замкнутая выпуклая область  $R$  площади  $>\pi/2$  поворачивается вокруг произвольной точки  $P$  этой области, то в некотором положении она покрывает по крайней мере одну из целочисленных точек.*

**Доказательство.** Если фигуру преобразовать с помощью гомотетии  $P(\sqrt{2})$  (т. е. с центром  $P$  и коэффициентом  $\sqrt{2}$ ), то все ее линейные размеры увеличатся в  $\sqrt{2}$  раз, а площадь удвоится. Так как новая площадь будет поэтому превосходить  $\pi$ , то новая область будет содержать хорду длины  $>2$ . Это означает, что соответствующая хорда  $AB$  в области  $R$  имеет длину  $>2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ . Теперь, как ранее, любая точка  $P$  либо является серединой отрезка  $AB$ , либо отстоит более, чем на  $AB/2$  от точки  $A$  или точки  $B$ . В любом случае, один из отрезков  $PA$  или  $PB$  длиннее, чем  $\sqrt{2}/2$ , скажем, отрезок  $PA$ . Но каждая точка плоскости расположена на расстоянии не большем, чем  $\sqrt{2}/2$  от некоторой целочисленной

точки (центр  $C$  целочисленного единичного квадрата состоит ровно на  $\sqrt{2}/2$  от каждой из четырех его целочисленных вершин) (рис. 36). Таким образом, вращение

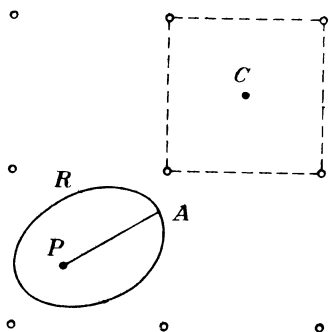


Рис. 36

вокруг точки  $P$  позволяет спице  $PA$  покрыть целочисленную точку, ближайшую к точке  $P$ .

Области, затронутые в теореме Минковского и первой теореме Хаммера, предполагались центрально-симметричными. Для центрально-симметричных фигур центр симметрии и центр масс совпадают. Таким образом, эти теоремы можно было бы сформулировать эквивалентно в терминах областей, имеющих свой центр тяжести в целочисленной точке. Если

теперь отбросить предположение о их центральной симметричности, то эти теоремы будут иметь смысл, но будут неверны. Однако, к нашему удивлению, их можно спасти, если увеличить рассматриваемую площадь на  $1/8$ :

*Замкнутая выпуклая область площади  $> 4 \frac{1}{2}$  с центром масс в целочисленной точке покрывает еще не менее двух целочисленных точек (предложено Э. Эрхартом).*

*Замкнутая выпуклая область площади  $> 9\pi/8$  с центром масс в целочисленной точке может быть повернута вокруг своего центра тяжести так, что будет покрывать еще не менее двух целочисленных точек (предложено Хаммером).*

### ЗАДАЧА 30. СИСТЕМА ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите следующую систему уравнений в натуральных числах:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 3abc,$$

$$a^2 = 2(b + c).$$

**Решение.** Так как  $3abc$  — положительное число, то  $a^3$  должно быть больше, чем сумма  $b^3$  и  $c^3$ ; таким образом,

имеем

$$b < a \quad \text{и} \quad c < a.$$

Складывая эти неравенства, получим, что  $b + c < 2a$ , следовательно,  $2(b + c) < 4a$ . Из второго уравнения получаем, что

$$a^2 < 4a \quad \text{и} \quad a < 4.$$

Но второе уравнение также показывает, что  $a$  — четное число. Таким образом,  $a$  должно быть равно 2, а меньшие числа  $b$  и  $c$  должны быть равны 1.

### ЗАДАЧА 31. ОТРАЖЕННЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ

Пусть  $A$  и  $B$  — две окружности, лежащие по одну сторону от прямой  $m$ . Постройте касательную к окружности  $A$ , которая после отражения от прямой  $m$  также коснется и окружности  $B$  (рис. 37 на с. 54).

**Решение.** Симметрично отразим окружность  $B$  относительно прямой  $m$  в положение  $B'$ . Тогда общие касательные к окружностям  $A$  и  $B'$  дают четыре возможных решения (касательные к окружности  $B'$  при отражении от прямой  $m$  переходят в касательные к окружности  $B$ ) (рис. 38).

### ЗАДАЧА 32. ЭЛЕГАНТНО РАЗРУШЕННАЯ ШАХМАТНАЯ ДОСКА

Если выбросить из обычной шахматной доски  $8 \times 8$  все черные клетки, то доска утрачивает способность размещения на ней хотя бы одной кости домино размером  $2 \times 1$ . Однако эта способность восстанавливается при возвращении хотя бы одной черной клетки. Уменьшенную подобным образом шахматную доску будем называть «элегантно разрушенной».

Для такого разрушения совершенно не обязательно выбрасывать все черные (или все белые) клетки. Вполне возможно выбросить некоторую смесь черных и белых клеток. 32 кости домино очевидным образом покрывают шахматную доску (рис. 39), поэтому, если не выброшена хотя бы одна клетка в каждой из образованных 32 пар клеток, то на оставшейся доске может расположиться хотя бы одна кость домино. Поэтому у доски,

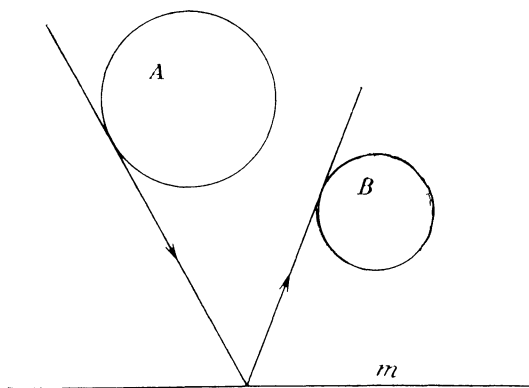


Рис. 37

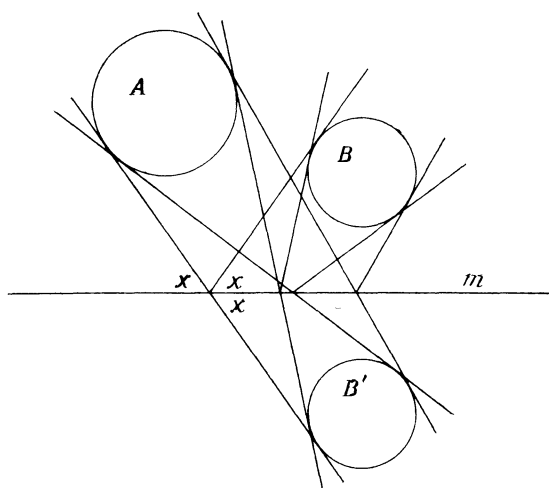


Рис. 38

разрушенной требуемым образом, должно быть выброшено не менее 32 клеток.

С другой стороны, оказывается возможным убрать более 32 клеток и при этом получить элегантно разрушенную доску. Конечно, многочисленные уменьшения доски будут ее разрушать. Фокус состоит в том, что их нужно расположить так, чтобы возвращение любой выброшенной клетки дало возможность расположить на полученной доске хотя бы одну кость домино. С точки зрения этого довольно строгого ограничения, максимальное количество клеток, которые можно выбросить, оказывается довольно большим. Найдите этот максимум.

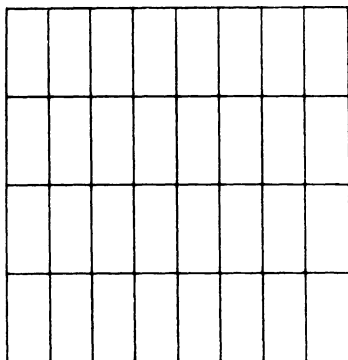


Рис. 39

**Решение.** Заштрихованные клетки на рис. 40 демонстрируют элегантно разрушенную доску, состоящую всего из 16 клеток. Мы покажем, что она не может состоять менее чем из 16 клеток, доказав, что при выборе более 48 клеток найдется хотя бы одна клетка, возвращение которой еще не даст возможности разместить на доске кость домино.

Если в каждой четверти доски находится не менее 4 клеток, то на всей доске будет их не менее 16. Если на доске осталось меньше 16 клеток, то в одной из четвертей, скажем, в верхней левой, будет не больше 3 клеток. Следовательно, в некоторой четверти от этой четверти доски будут выброшены все клетки. Мы

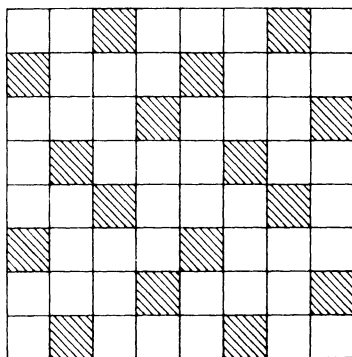


Рис. 40

поочередно рассмотрим четыре возможных положения *A*, *B*, *C*, *D* для пустой четверти этой четверти доски (рис. 41).



а) Если пустая четверть есть  $A$ , то, возвращая угловую клетку  $X$ , мы не сможем разместить кость домино (рис. 42).

б) Предположим, что выброшены четыре клетки  $E, F, G, H$  секции  $B$  и пометим клетки, окружающие  $B$  так,

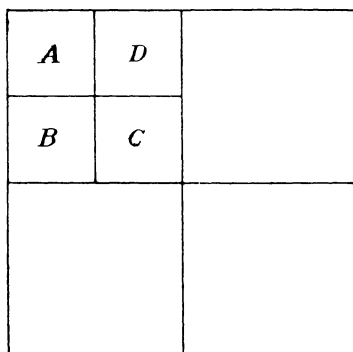


Рис. 41

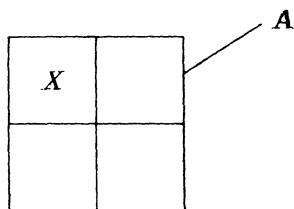


Рис. 42

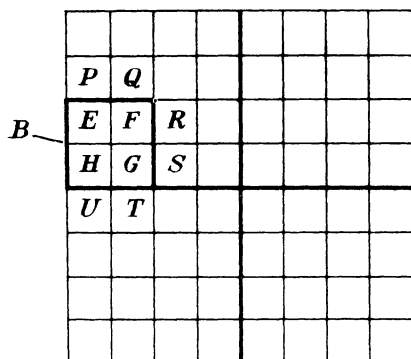


Рис. 43

как показано на рис. 43. Теперь, если клетка  $P$  выброшена, то возвращение клетки  $E$  не восстановит способности доски содержать кость домино, и наш поиск непопадающей клетки  $X$  будет закончен. Поэтому предположим, что клетка  $P$  осталась. В этом случае соседняя клетка  $Q$  должна была быть выброшена в силу правила разрушения доски.

Вокруг клетки  $F$  тогда мы имеем пустые клетки  $Q$ ,  $E$  и  $G$ , это означает, что либо  $X \equiv F$  и поиски окончены, либо клетка  $R$  была сохранена. Пусть  $R$  — сохраненная клетка, тогда соседняя с ней клетка  $S$  должна была быть выброшена. Рассматривая клетку  $G$ , мы находим, что искомая клетка  $X \equiv G$ , если клетка  $T$  не оставлена, но если это не так, то клетка  $U$  должна быть выброшена. Во всяком случае тогда мы имеем, что либо мы нашли искомую клетку  $X$ , либо получили, что клетка  $U$  выброшена. Это означает, что все три клетки, окружающие клетку  $H$ , выброшены. Это дает нам, что  $X \equiv H$ . Поэтому клетка  $X$  может быть найдена в любом случае.

|     |     |     |     |     |  |  |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|--|--|--|
| $O$ | $I$ |     |     |     |  |  |  |
| $P$ | $Q$ | $Y$ | $Z$ |     |  |  |  |
| $E$ | $F$ | $R$ | $V$ | $J$ |  |  |  |
| $H$ | $G$ | $S$ | $W$ | $K$ |  |  |  |
|     |     | $N$ | $M$ |     |  |  |  |
|     |     |     |     |     |  |  |  |
|     |     |     |     |     |  |  |  |
|     |     |     |     |     |  |  |  |
|     |     |     |     |     |  |  |  |

Рис. 44

Эквивалентный квадрат  $D$  рассматривается идентично.

в) Осталось рассмотреть лишь случай пустого квадрата в положении  $C$ . Продолжим обозначения, используемые на рис. 43 так, как показано на рис. 44. Участок  $C$  состоит из клеток  $R, S, W, V$ .

Рассмотрим сначала клетку  $R$ . Так как  $V$  и  $S$  — выброшены, то либо клетка  $F$ , либо клетка  $Y$  должна быть оставлена, в противном случае  $X \equiv R$ . Так как клетки  $F$  и  $Y$  одинаковым образом расположены относительно квадрата  $C$ , то эти случаи эквивалентны. Предположим для определенности, что клетка  $Y$  оставлена. В этом случае, мы можем применить тот же способ к рассмотрению квадрата  $C$ , как и в случае квадрата  $B$ , при этом либо клетка  $X$  находится среди клеток  $V, W$  и  $S$ , либо клетки  $Y, J, M$  и  $G$  должны быть сохранены, а клетки  $Z, K, N$  и  $F$  — выброшены. Таким образом, либо получаем искомую клетку  $X$ , либо две клетки  $Y$  и  $G$  должны сохраниться в верхней левой четверти доски. Но вспомним, что этой четверти доски оставляется не более трех клеток.

Если две из них — клетки  $Y$  и  $G$ , то в этой четверти доски может находиться еще не более одной клетки.

Если сохраняется угловая клетка  $O$ , то клетки  $P, E, H$  и  $F$  должны быть выброшены, откуда получаем, что  $X \equiv E$ . Если же клетка  $O$  выброшена, что наше рассуж-

дение легко закончить следующим образом. Если клетка  $P$  оставлена, то  $X \equiv I$ . Предположим тогда, что клетка  $P$  выброшена. Так как клетка  $Y$  оставлена, то клетка  $Q$  должна быть выброшена. В том случае, если клетка  $E$  выброшена, мы имеем, что  $X \equiv P$  (так как клетка  $O$  отсутствует). Если клетка  $E$  сохранена, то тройкой оставшихся клеток будут клетки  $Y$ ,  $Q$  и  $E$ , но тогда  $X \equiv I$ .

### ЗАДАЧА 33. СНЕЖКИ

Мальчик сделал два снежка, причем один из них имеет диаметр вдвое больший, чем другой. Он принес их в теплую комнату и дал возможность им таять. Так как только поверхность снежка подвергается действию теплого воздуха, то предположим, что скорость таяния пропорциональна площади поверхности. Когда растает половина объема большого снежка, то сколько останется от меньшего?

**Решение.** Мы докажем, что предположение о том, что скорость таяния снежка пропорциональна площади его поверхности, влечет поразительный результат, заключающийся в том, что радиус уменьшается с постоянной скоростью независимо от размеров снежка. Следовательно, оба радиуса будут уменьшаться на одну и ту же величину.

Объем и площадь поверхности соответственно равны  $V = 4\pi r^3/3$  и  $S = 4\pi r^2$ .

Обозначив через  $t$  время, получаем, что скорость таяния равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3} \pi \cdot 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Так как эта скорость пропорциональна площади поверхности  $S = 4\pi r^2$ , мы имеем

$$4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = k (4\pi r^2),$$

где  $k$  — константа. Отсюда

$$\frac{dr}{dt} = k,$$

как и утверждалось.

Предположим, что вначале радиусы равнялись  $2r$  и  $r$ . Тогда объем большого снежка равен

$$V = \frac{4}{3} \pi (2r)^3 = \frac{32}{3} \pi r^3.$$

После того, как растаяла его половина, он будет иметь объем

$$V = \frac{16}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (r \sqrt[3]{4})^3,$$

откуда его радиус равен  $r \sqrt[3]{4}$ . Каждый радиус при этом соответственно уменьшится на  $(2 - \sqrt[3]{4})r$ . Тогда меньший снежок будет иметь радиус

$$r - (2 - \sqrt[3]{4})r = r(\sqrt[3]{4} - 1),$$

а объем его будет равен

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 (\sqrt[3]{4} - 1)^3,$$

что очень близко к  $1/5$  первоначального объема  $((\sqrt[3]{4} - 1)^3 \approx 0,2027)$ .

#### ЗАДАЧА 34. ЦИФРЫ ЧИСЕЛ С ЕДИНИЦЫ ПО МИЛЛИАРД

Какова сумма всех цифр, используемых при записи всех чисел, первое из которых единица, а последнее миллиард?

**Решение.** Добавляя ноль, мы можем образовать полмиллиарда пар чисел:

$(0; 999999999), (1; 999999998), (2; 999999997), \dots$   
 $\dots, (499999998; 500000001), (499999999; 500000000).$

Сумма цифр в каждой паре будет  $9 \cdot 9 = 81$ .

Если добавить 1 в сумму цифр для неучтенного при этом числа 1 000 000 000, то мы получаем сумму совсем просто:

$$500\,000\,000 \cdot 81 + 1 = 40\,500\,000\,001.$$

### ЗАДАЧА 35. ПРИМЫКАЮЩИЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ЕДИНИЧНЫЕ КВАДРАТЫ

Зафиксируем на плоскости положение некоторого единичного квадрата  $S$ . Каково наибольшее количество единичных непересекающихся квадратов можно

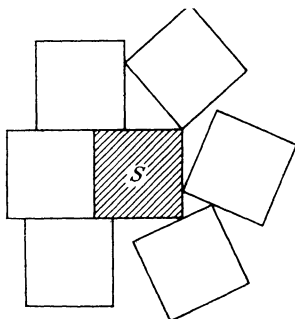


Рис. 45

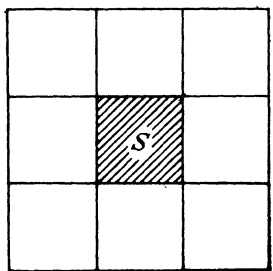


Рис. 46

расположить в плоскости так, чтобы они касались квадрата  $S$ , но не пересекались с ним (рис. 45)?

**Решение.** Шахматная доска  $3 \times 3$  дает пример с 8 примыкающими квадратами, и, конечно, кажется, что квадраты упакованы с наибольшей возможной плотностью (рис. 46). В течение долгого времени я чувствовал, что это действительно так, но доказать не мог. Однажды я был приятно удивлен, встретив чудесное доказательство Янга в 1939 томе журнала «American Mathematical Monthly».

Из чертежа (рис. 47) ясно, что

- 1) расстояние между центрами двух непересекающихся единичных квадратов  $\geq 1$  и
- 2) расстояние между центрами двух соприкасающихся единичных квадратов не превосходит  $\sqrt{2}$ .

Обозначим через  $A$  и  $B$  центры двух квадратов, которые примыкают к фиксированному квадрату  $S$  с центром в точке  $O$  (рис. 48). Пусть  $OA = x$ ,  $OB = y$  и  $AB = t$ . Тогда из 1) и 2) мы получаем, что

$$x, y, t \geq 1 \quad \text{и} \quad x, y \leq \sqrt{2}.$$

Так как между квадратами с центрами в точках  $A$  и  $B$  возможен промежуток, то расстояние  $t$  между этими точками может оказаться  $> \sqrt{2}$ . Однако из того, что ника-

кие квадраты не пересекаются, мы можем лишь заключить, что  $t \geq 1$ .

Теперь, если бы точки  $O$ ,  $A$  и  $B$  лежали на одной прямой, скажем, в этом порядке, то длина  $OB = y$  была

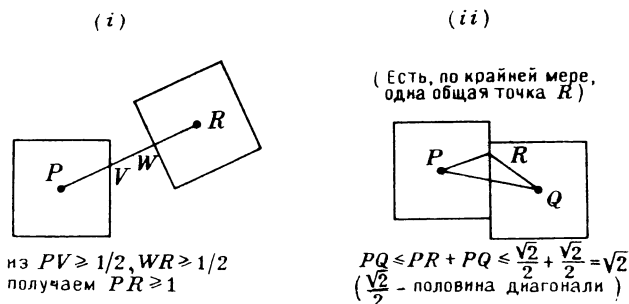


Рис. 47

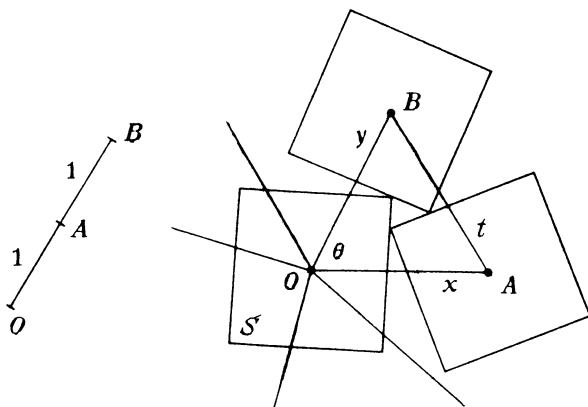


Рис. 48

бы не менее 2, что превышает ее предельное значение  $\sqrt{2}$ . Следовательно,  $OA$  и  $OB$  — различные лучи, выходящие из точки  $O$  (рис. 48). Последовательно соединяя точку  $O$  с центрами всех квадратов, соприкасающихся с квадратом  $S$ , мы получим веер различных отрезков, исходящих из точки  $O$ .

Теперь предположим, что  $OA$  и  $OB$  — последовательные отрезки в этом веере и обозначим через  $\theta$  угол меж-

ду ними, как показано. Применяя теорему косинусов к треугольнику  $OAB$ , получаем

$$t^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta,$$

откуда

$$\cos \theta = \frac{x^2 + y^2 - t^2}{2xy}.$$

Так как  $t \geq 1$ , то мы имеем, что

$$\cos \theta \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy}.$$

Эту функцию обозначим через  $f(x, y)$ . Вспоминая, что  $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$ , мы видим, что  $f(x, y)$  положительна. Теперь покажем, что для значений  $x$  и  $y$ , удовлетворяющих условиям, функция  $f(x, y)$  не больше  $3/4$ .

Для читателя, незнакомого с частными производными, обстоятельный элементарный вывод дается в приложении. Мы имеем

$$f'_x = \frac{2xy \cdot 2x - (x^2 + y^2 - 1) 2y}{(2xy)^2} = \frac{x(2x) - (x^2 + y^2 - 1)}{2x^2y} = \frac{x^2 - y^2 + 1}{2x^2y}.$$

Аналогично

$$f'_y = \frac{-x^2 + y^2 + 1}{2xy^2}.$$

При  $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$  ясно, что каждое из выражений  $f'_x$  и  $f'_y$  неотрицательно. Поэтому величина  $f$  не убывает как при возрастании  $x$ , так и при возрастании  $y$ , откуда следует, что  $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  не меньше, чем  $f(x, y)$  в любом из возможных случаев. Это означает, что

$$f(x, y) \leq f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \frac{2 + 2 - 1}{2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

Мы видим, что угол  $\theta$  между  $OA$  и  $OB$  таков, что

$$\cos \theta \leq \frac{3}{4}.$$

Однако из таблиц мы находим, что  $\cos 40^\circ = 0,76604\dots$  Таким образом,

$$\cos \theta < \cos 40^\circ.$$

Это означает, что  $\theta > 40^\circ$ , что, в свою очередь, ведет к тому, что 360-градусная развертка веера отрезков, соединяющих центры соприкасающихся квадратов с точ-

кой  $O$ , не может вместить 9 таких углов  $\theta$ , которые  $>40^\circ$ , откуда максимальное значение для числа соприкасающихся квадратов равно 8.

Аналогичная, но много более легкая задача была высказана в журнале «American Mathematical Monthly» (1962 г.) Ньюменом и Вейсблюмом:

Шесть замкнутых кругов расположены на плоскости так, что каждый из них не содержит центра другого круга. Докажите, что нет точки, общей для всех этих кругов.

**Решение.** Предположим, что некоторая точка  $O$  принадлежит всем этим кругам. Соединим эту точку с шестью центрами, образуя веер отрезков из точки  $O$ . Если два центра  $A$  и  $B$  лежат на одном и том же луче, выходящем из точки  $O$ , то, так как каждый из кругов содержит точку  $O$ , очевидно, что один из кругов должен содержать центр другого (противоречие). Таким образом, 6 различных отрезков образуют веер (рис. 49).

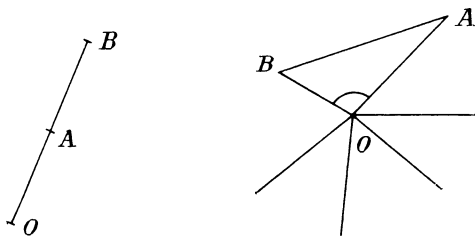


Рис. 49

Обозначим через  $A$  и  $B$  два таких центра, что отрезки  $OA$  и  $OB$  в этом веере соседние. Через  $r$  обозначим больший из радиусов кругов с центрами в точках  $A$  и  $B$  (или их общую величину, если они равны). Тогда, так как ни один из кругов не содержит центр другого, то длина отрезка  $AB$  не меньше, чем  $r$ . Но так как оба круга с центрами в точках  $A$  и  $B$  содержат точку  $O$ , то ни  $OA$ , ни  $OB$  не превосходят  $r$ . Таким образом, в треугольнике  $OAB$  сторона  $AB$  оказывается наибольшей, а следовательно, угол  $AOB$  больше остальных углов.

Следовательно:

$$\text{угол } AOB > 60^\circ.$$

Это означает, что веер из 6 отрезков содержит в сумме больше, чем  $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ , что невозможно.



которая лежит над квадратом  $1 \leq x, y \leq \sqrt{2}$  на плоскости  $(x, y)$ . Обозначим через  $K(a, b)$  произвольную точку в этом квадрате, а через  $P(a, b, z)$  — точку на поверхности  $G$ , расположенную над точкой  $K$ . Рассмотрим прямую  $L$  из точек квадрата, имеющих ту же координату  $y$ , что и точка  $K$ . Плоскость  $\pi$ , проходящая через  $L$  перпендикулярно

$$z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2xy}.$$
$$z = \frac{x^2 + b^2 - 1}{2xb}.$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{x^2 - b^2 + 1}{2bx^2}.$$

64

Проводя отрезок  $L$  и плоскость  $\pi$  параллельно оси  $y$ , мы аналогично получаем кривую  $C'$ , задаваемую соотношением

$$z = \frac{a^2 + y^2 - 1}{2ay}.$$

Для точек на  $C'$  мы имеем производную

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-a^2 + y^2 + 1}{2ay^2},$$

которая неотрицательна для рассматриваемых  $y$  и  $a$ , что показывается аналогично. Таким образом, функция не опускается к плоскости  $(x, y)$  при таком движении, при котором  $y$  возрастает, а  $x$  остается постоянным.

Итак, мы можем заключить, что если начать двигаться от некоторой точки  $K(a, b)$  в квадрате, то она не попадет никогда в часть поверхности  $G$ , расположенную ниже начального значения, если двигаться вдоль прямой  $L$  к точке  $M$ , а затем вдоль стороны квадрата к его вершине  $N$ . Следовательно, на поверхности  $G$  нет точки, удаленной от плоскости  $(x, y)$  больше, чем точка  $H$ , падающая над точкой  $N$ . Таким образом, точка  $N(x, y)$ , являющаяся точкой  $N(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , придает максимальное значение функции  $f(x, y)$  среди всех точек  $(x, y)$  в рассматриваемом квадрате, и это максимальное значение равно

$$\frac{2+2-1}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{4}.$$

### ЗАДАЧА 36. ОДНО ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ

Пусть  $a, b, c, d$  — целые числа и  $a \neq 0$ . Докажите, что если  $bc - ad \neq 0$ , то уравнение

$$axy + bx + cy + d = 0$$

имеет лишь конечное число решений в целых числах.

**Решение.** Умножив уравнение на  $a$ , получаем

$$a^2xy + abx + acy + ad = 0$$

и

$$(ax + c)(ay + b) = bc - ad.$$

Это означает, что каждый из сомножителей  $ax + c$  и  $ay + b$  является делителем числа  $bc - ad$ . Так как

$bc - ad \neq 0$ , то оно имеет только конечное число делителей, а следовательно, существует и конечное число возможных значений для  $ax + c$  и  $ay + b$  и соответствующее количество чисел  $x$  и  $y$ .

Графиком функции  $axy + bx + cy + d = 0$  является гипербола. Если  $bc - ad = 0$ , то уравнение сводится к такому:

$$(ax + c)(ay + b) = 0,$$

и гипербола вырождается в пару прямых, параллельных осям координат. Ясно, что целые решения нашего уравнения соответствуют целым точкам на графике. Поэтому даже если  $bc - ad = 0$ , то существует лишь конечное

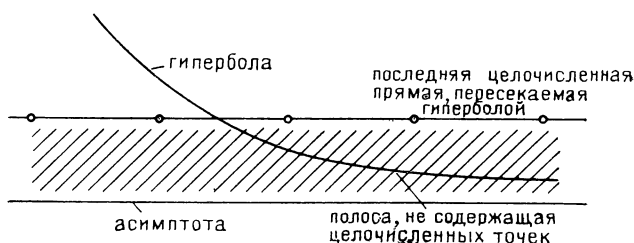


Рис. 51

число целочисленных решений, за исключением тех случаев, когда число  $a$  является делителем числа  $b$  или  $c$ , тогда прямая, принадлежащая вырожденной кривой, совпадает с прямой целочисленной решетки (параллельной координатной оси).

Следующее лаконичное решение этой задачи было указано моим коллегой Лероем Дикки. У гиперболы, задаваемой уравнением  $axy + bx + cy + d = 0$ , асимптоты оказываются параллельными осям координат. Это можно обнаружить, рассматривая параллельный перенос

$$x = X - \frac{c}{a}, \quad y = Y - \frac{b}{a},$$

преобразующий уравнение к виду

$$a\left(X - \frac{c}{a}\right)\left(Y - \frac{b}{a}\right) + b\left(X - \frac{c}{a}\right) + c\left(Y - \frac{b}{a}\right) + d = 0,$$

$aXY + k = 0$ , где  $k$  — константа. Получаем уравнение  $XY = \text{const}$ , являющееся стандартным уравнением гиперболы, у которой асимптотам соответствуют оси координат.

нат. Из-за этого, поскольку кривая приближается к своей асимптоте, в некоторый момент она пересечет прямую целочисленной решетки в последний раз, а затем будет находиться в полосе между двумя соседними прямыми решетки. Это верно даже в том случае, когда асимптота совпадает с прямой решетки, так как гипербола не пересекает своей асимптоты. Попад в такую полосу, бесконечный хвост кривой больше не встречается с целочисленными точками (рис. 51). Следовательно, целочисленные точки, содержащиеся на гиперболе, находятся в конечной части плоскости и поэтому их число конечно.

### ЗАДАЧА 37. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ФИБОНАЧЧИ

Последовательность натуральных чисел

$$\{f_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots,$$

где

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ и } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ для } n > 2,$$

называется последовательностью Фибоначчи и является одной из самых известных в математике. В действительности она настолько богата свойствами и обобщениями, что учрежден журнал «Fibonacci Quarterly», который публикует исследования по этой последовательности и по темам, связанным с ней.

Наша задача довольно проста: сколько членов последовательности Фибоначчи не превосходит заданного натурального числа  $N$ ?

**Решение.** Еще сто лет назад было известно, что  $n$ -й член последовательности Фибоначчи равен

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]^*.$$

Поскольку  $\sqrt{5}$  приблизительно равен 2,2, имеем

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,6.$$

Таким образом, число  $((1 - \sqrt{5})/2)^n$  будет положительным или отрицательным в зависимости от четности

---

\*) Доказательство этой формулы можно прочесть в книге: Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи.— М.: Наука, 1984.

числа  $n$ . Для всех  $n = 1, 2, \dots$  выражение

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

по абсолютной величине не превосходит  $1/2$ . Но  $f_n$  — целое число и так как

$$\left| -\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right| < \frac{1}{2},$$

то из формулы видно, что  $f_n$  должно быть ближайшим целым числом к числу

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Также ясно, что

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

отстоит меньше, чем на  $\frac{1}{2}$ , от ближайшего к нему целого числа. Поэтому не может быть справедливым равенство

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n = N + \frac{1}{2}.$$

Для чисел Фибоначчи  $f_n \leq N$  мы тогда должны иметь

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n < N + \frac{1}{2}.$$

(Чтобы ближайшее целое число не превышало  $N$ .) И наоборот ясно, что если

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n < N + \frac{1}{2},$$

то ближайшее целое число должно быть  $\leq N$ . Поэтому соотношение  $f_n \leq N$  выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n < N + \frac{1}{2}, \quad \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n < \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5},$$

$$n \lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) < \lg \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\}, \quad n < \frac{\lg \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\}}{\lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}.$$

Теперь легко видеть, что это отношение логарифмов никогда не будет целым числом. Предположим противное, т. е. что

$$\frac{\lg \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\}}{\lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)} = k - \text{целое число.}$$

Тогда

$$\lg \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\} = k \lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k,$$

$$\left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k \text{ и } \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k = N + \frac{1}{2},$$

что противоречит полученным выше результатам.

Так как  $n$  — целое число, то мы видим, что наибольшее число Фибоначчи, меньшее или равное  $N$  и соответствующее наибольшему допустимому значению  $n$ , есть член с номером

$$n = \left[ \frac{\lg \left\{ \left( N + \frac{1}{2} \right) \sqrt{5} \right\}}{\lg \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)} \right],$$

где  $[x]$  обозначает наибольшее целое число  $\leq x$ . Так как первые два члена одинаковы, мы видим, что количество различных значений среди этих чисел Фибоначчи на одно меньше, чем  $n$ .

Рассмотрим теперь задачу определения количества способов выбрать из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  набор, не содержащий пар последовательных чисел (пустое множество также рассматривается как набор).

**Решение.** Обозначим через  $a_{n-1}$  количество наборов из чисел  $1, 2, 3, \dots, n-1$ . Тогда  $a_n$  — количество наборов из чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Такой набор либо содержит число  $n$ , либо не содержит его. Если он не содержит, то это будет один из  $a_{n-1}$  наборов из чисел  $1, 2, 3, \dots, n-1$ . Если же он содержит число  $n$ , то число  $n-1$  в нем не должно содержаться (так как числа  $n-1$  и  $n$  — последовательные). Это означает, что оставшаяся часть набора принадлежит к одному из  $a_{n-2}$  наборов из чисел  $1, 2, 3, \dots, n-2$ . Конечно, не обязательно выбирать кроме числа  $n$  еще какие-то числа. Это соответ-

стствует выбору пустого множества из чисел 1, 2, 3, ..., ...,  $n-2$  (вот поэтому пустое множество мы включаем в число наборов). Таким образом мы имеем в целом

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Так как легко вычислить, что  $a_1 = 2$  и  $a_2 = 3$ , то мы видим, что последовательность продолжается так: 2, 3, 5, 8... и  $a_n = f_{n+2}$  —  $(n + 2)$ -му члену последовательности Фибоначчи.

### ЗАДАЧА 38. НЕРАВЕНСТВО ЭРДЕША

Пусть  $ON$  — радиус круга с центром в точке  $O$ , пересекающий хорду  $AB$  в точке  $M$ , перпендикулярно этой хорде. Пусть  $P$  — произвольная точка на большей дуге  $AB$ , причем не являющаяся диаметрально противоположной точкой  $N$ . Отрезки  $PM$  и  $PN$  определяют, соответственно, точки  $Q$  и  $R$  на окружности и на хорде  $AB$  (рис. 52). Докажите, что  $RN$  всегда длиннее,

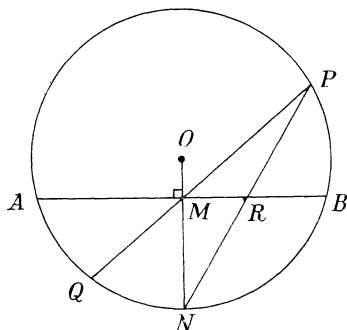


Рис. 52

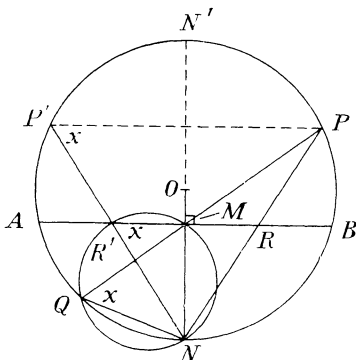


Рис. 53

чем  $MQ$ . (Удивительно, что многие, если их попросить быстро ответить, указывают на отрезок  $MQ$ , как на более длинный.)

**Решение I** (Полю Эрдеш). Симметрично отразим отрезок  $PN$  относительно диаметра  $NON'$  в положение  $P'N$  (рис. 53). Поскольку  $AB$  — перпендикуляр к  $ON$ , эта симметрия переводит точку  $R$  в точку  $R'$  пересечения отрезка  $P'N$  с хордой  $AB$ . Следовательно,  $RN = R'N$ .

Так как отрезок  $R'N$  стягивает прямой угол на этой описанной окружности (с вершиной в точке  $M$ ), то он — диаметр этой окружности. Однако угол, стягиваемый на описанной окружности хордой  $QM$ , а именно  $\angle MNQ$ , как легко видеть, не является прямым углом (так как  $NN'$  — диаметр данной окружности, то  $\angle NQN'$  — прямой, следовательно, в треугольнике  $QNN'$  угол  $QNM$  — не прямой). Поэтому хорда  $QM$  меньше диаметра  $R'N = RN$ .

**Решение II** (Питер Криппен). Обозначим через  $x$  и  $y$

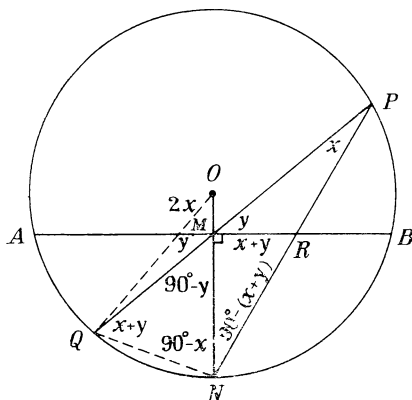


Рис. 54

$$\frac{QM}{\sin (90^{\circ}-x)}=\frac{MN}{\sin (x+y)},$$

а применяя ее к треугольнику  $MNR$ , получим

$$\frac{MN}{\sin (x+y)} = \frac{RN}{\sin 90^{\circ}}.$$



Таким образом,

$$\frac{QM}{\sin(90^\circ - x)} = \frac{RN}{1}.$$

Так как  $\sin(90^\circ - x) < 1$ , то отсюда следует, что  $QM < RN$ .

Еще одно великолепное решение было опубликовано подающим большие надежды школьником Марком Клейманом в журнале «Math. Mag.» № 49, 1976 г.

### ЗАДАЧА 39. РАЗДЕЛЕННЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТОЧКИ

Отрезок с концами в точках  $A(p, 0)$  и  $B(0, p)$  проходит через  $p-1$  целочисленную точку:  $(1, p-1), (2, p-2), \dots, (p-1, 1)$ . Если провести через эти точки отрезки, соединяющие их с началом координат — точкой  $O$ , то их будет  $p-1$ , и они разобьют  $\triangle OAB$  на  $p$  маленьких треугольников. Ясно, что два крайних треугольника имеют по стороне, лежащей на некоторой оси координат, и не имеют целочисленных точек плоскости внутри себя. Если  $p$  — простое число, то верно также то, что ни один из разделяющих отрезков, исходящих из начала координат, не содержат никакой целочисленной точки (рис. 55). Докажите, что для простого  $p$  все целочисленные точки, находящиеся внутри  $\triangle OAB$ , находятся внутри  $p-2$  маленьких треугольников, причем поровну в каждом из них.

**Решение.** Обозначим через  $C(a, b)$  целочисленную точку внутри  $\triangle OAB$ . Тангенс угла наклона прямой  $OC$  равен  $b/a$ . Если бы точка  $C$  лежала на разделяющем отрезке, скажем, на отрезке, ведущем в точку  $(i, p-i)$  ( $1 \leq i \leq p-1$ ), то тангенс угла наклона прямой  $OC$  также равнялся бы  $(p-i)/i$ :  $b/a = (p-i)/i$ . Но так как  $i < p$  и  $p-i$  — простое число, то  $i$  и  $p-i$  — взаимно-простые числа. Однако точка  $C$  ближе к точке  $O$ , чем точка  $(i, p-i)$ . Поэтому  $a$  и  $b$  соответственно меньше, чем  $i$  и  $p-i$ . Уравнение  $b/a = (p-i)/i$  тогда указывает, что у дроби  $(p-i)/i$  числитель и знаменатель не являются наименьшими возможными, поскольку имеется дробь  $b/a$ . Но это противоречит тому, что числа  $i$  и  $p-i$  — взаимно просты, и мы заключаем, что все целочисленные точки внутри  $\triangle OAB$  находятся во внутренних частях указанных  $(p-2)$  треугольников.

Заметим, что отрезок  $AB$  разделен целочисленными точками  $(i, p-i)$  на равные части. Отсюда следует, что все маленькие треугольники имеют одинаковую площадь. Так как каждая вершина является целочисленной

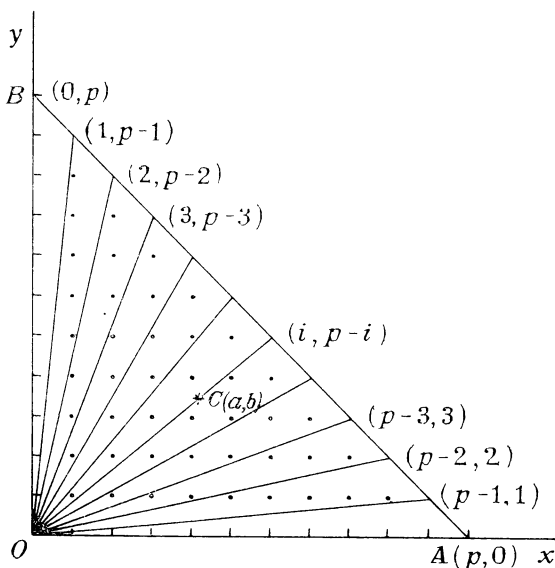


Рис. 55

точкой, то мы можем использовать теорему Пика для определения их площадей.

**Теорема Пика.** *Площадь многоугольника, вершины которого находятся в целочисленных точках (и не имеющие самопересечений), выражается в виде*

$$q + \frac{p}{2} - 1,$$

где  $q$  — количество целочисленных точек внутри многоугольника, а  $p$  — количество целочисленных точек на его границе (оно включает вершины и другие целочисленные точки на его сторонах).

Поскольку между точками  $(i, p-i)$  и  $(i+1, p-i-1)$  нет целочисленной точки, мы находим, что площадь каждого из внутренних маленьких треугольников равна

$$q + \frac{3}{2} - 1.$$

Так как эта величина одинакова для всех внутренних треугольников, то  $q$  должно быть одним и тем же для них всех, и получаем, что все внутренние целочисленные точки треугольника  $OAB$  распределяются поровну.

Легко вычислить значение  $q$ . Каждый маленький треугольник имеет площадь, равную  $1/p$  площади треугольника  $OAB$ , и площадь маленького треугольника равна

$$\frac{1}{p} \left( \frac{1}{2} \cdot p \cdot p \right) = \frac{p}{2}.$$

Таким образом,  $q + \frac{3}{2} - 1 = \frac{p}{2}$ , откуда

$$q = \frac{p-1}{2}.$$

#### ЗАДАЧА 40. СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Древние греки открыли, что некоторые натуральные числа  $n$  обладают замечательным свойством: сумма делителей числа  $n$  равна самому числу  $n$  (само число не считалось делителем). Например,  $n = 28$  дает

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.$$

Такие числа назывались «совершенными». Используя арифметическую функцию  $\sigma(n)$ , которая обозначает сумму всех положительных делителей числа  $n$  (включая и само число  $n$ ), можно написать, что число  $n$  совершенно в том случае, если  $\sigma(n) = 2n$ . Совершенные числа очень редки. Первые пять из них — это 6, 28, 496, 8128, 33 550 336. В 1976 г. было известно только 24 совершенных числа, причем наибольшее из них было  $2^{19936} \cdot (2^{19937} - 1)$ , содержащее около 6000 цифр\*).

В восемнадцатом веке Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число  $m$  может быть представлено в виде  $m = 2^{n-1} (2^n - 1)$ , где  $2^n - 1$  — простое число.

Докажите самостоятельно следующие два несложных утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

1)  $\sigma(n)$  является мультипликативной функцией, т. е.  $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$  при условии, что  $a$  и  $b$  — взаимно простые числа.

2) Если  $2^n - 1$  — простое число, то и число  $n$  — также простое.

---

\*) К 1989 г. их было найдено 52, наибольшее равнялось  $2^{56667} \cdot (2^{56667} - 1)$ . — Примеч. пер.

В свете этих предпосылок в данной задаче предлагается найти все совершенные числа  $n$ , для которых  $\sigma[\sigma(n)]$  также является совершенным числом.

**Решение.** Прежде всего предположим, что  $n$  — нечетное совершенное число. Тогда  $\sigma(n) = 2n$ , где 2 и  $n$  взаимно просты, и получаем

$$\sigma[\sigma(n)] = \sigma(2n) = \sigma(2)\sigma(n) = 3\sigma(n) = 3 \cdot 2n = 6n.$$

Ясно, что  $6n$  четно, а если оно также и совершенно, то для некоторого простого числа  $p$  мы должны иметь

$$6n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

( $p$  должно быть простым, поскольку  $2^p - 1$  — простое). Однако, поскольку  $n$  — нечетно, число  $6n$  содержит множитель 2 лишь единожды (в числе 6). Это означает, что

$$2^{p-1} = 2^1, \text{ откуда } p = 2.$$

Соответственно,

$$6n = 2(2^2 - 1) = 6, \text{ откуда } n = 1.$$

Но 1 не является нечетным совершенным числом, и мы пришли к противоречию. Таким образом, не существует нечетных совершенных чисел  $n$ , для которых  $\sigma[\sigma(n)]$  также является совершенным числом.

Предположим тогда, что  $n$  — четное совершенное число. В силу сказанного для некоторого простого числа  $p$  мы можем написать

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

где  $2^p - 1$  — простое число. В этом случае 2 и  $2^p - 1$  — взаимно просты и мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma[\sigma(n)] &= \sigma(2n) = \sigma[2^p(2^p - 1)] = \sigma(2^p) \cdot \sigma(2^p - 1) = \\ &= (2^{p+1} - 1) [(2^p - 1) + 1] = 2^p(2^{p+1} - 1), \end{aligned}$$

так как  $2^p - 1$  — простое.

Ясно, что это число четно и если оно также совершенное, то оно уже представлено в эйлеровой форме для таких чисел. Отсюда вытекает, что степень  $p+1$  должна быть простым числом. Таким образом, числа  $p$  и  $p+1$  должны быть оба простыми числами и, так как они последовательные, то они могут быть только 2 и 3. Следовательно,

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2 \cdot (2^2 - 1) = 6$$

и

$$\sigma[\sigma(n)] = \sigma[\sigma(6)] = \sigma(12) = 28.$$

Поэтому  $n = 6$  — единственное решение.

#### ЗАДАЧА 41. СТОРОНЫ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Докажите, что если длины всех сторон четырехугольника — целые числа (относительно некоторой единицы длины) и если длина каждой стороны является делителем суммы остальных трех сторон, то некоторые две из сторон равны.

**Решение.** Предположим, что никакие две стороны не равны. Тогда обозначим длины сторон  $s_1 > s_2 > s_3 > s_4$ , а через  $p$  обозначим периметр. Мы получаем, что  $p - s_i$  делится на  $s_i$  для  $i = 1, 2, 3, 4$ . В этом случае мы имеем также, что и  $p$  делится на  $s_i$ . Но при каких условиях  $p$  делится на  $s_i$ ?

Рассмотрим случай  $s_1$  — наибольшей стороны. Сумма любых трех сторон четырехугольника всегда больше четвертой стороны (три стороны составляют «длинный путь» вокруг четырехугольника от одного до другого конца его четвертой стороны). Таким образом,  $s_1$  не может быть больше половины периметра:  $s_1 < p/2$ . Однако  $s_1$  должно превосходить четверть периметра, так как это наибольшая сторона (в противном случае все четыре стороны в сумме не дадут  $p$ ). Следовательно,

$$\frac{p}{4} < s_1 < \frac{p}{2}.$$

Это означает, что частное при делении  $p$  на  $s_1$  больше 2, но меньше 4. Следовательно, оно равно 3, и мы имеем, что  $s_1 = p/3$ .

Так как  $s_2 < s_1$ , то частное от деления  $p$  на  $s_2$  больше, чем от деления на  $s_1$ , откуда  $p/s_2 \geq 4$  и  $s_2 \leq p/4$ . Вновь, так как  $s_3 < s_2$ , то  $p/s_3 \geq 5$  и  $s_3 \leq p/5$ . Аналогично  $s_4 \leq p/6$ . Поэтому

$$p = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \leq \frac{p}{3} + \frac{p}{4} + \frac{p}{5} + \frac{p}{6} = \frac{57}{60}p < p.$$

Получили противоречие. Следовательно, некоторые две стороны четырехугольника должны быть равны.

#### ЗАДАЧА 42. ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Покажите, что в любой арифметической прогрессии из натуральных чисел с разностью, меньшей 2000, не может находиться 12 последовательных членов, являющихся простыми числами.

**Решение.** Предположим, что все  $n$  последовательных членов арифметической прогрессии

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$$

являются простыми числами,  $n \geq 3$ . Если  $a < n$ , то одним из этих членов будет  $a + ad = a(1 + d)$ , которое не является простым числом, так как  $a$  и  $1 + d$  оба больше 1. Поэтому  $a \geq n \geq 3$ .

Обозначим через  $p$  некоторое простое число, меньшее  $n$ , и предположим, что  $p$  не является делителем числа  $d$ . Рассмотрим затем первые  $p$  членов:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (p - 1)d.$$

Обозначим через  $r_0, r_1, \dots, r_{p-1}$   $p$  остатков от деления их на  $p$ . Так как все члены — простые числа и  $p < n \leq a$  (наименьшего члена), то мы видим, что  $p$  не делит ни одного из этих членов и поэтому ни один из остатков не равен 0. Поскольку среди  $p$  остатков содержится только  $p - 1$  ненулевых остатков  $1, 2, \dots, p - 1$ , из «принципа Дирихле» следует, что некоторые два из них равны, скажем,  $r_i = r_j$  ( $i \neq j$ ). Это означает, что

$$a + id \equiv a + jd \pmod{p},$$

$$(i - j)d \equiv 0 \pmod{p},$$

т. е.  $p$  делит число  $(i - j)d$ . Но  $p$  — простое и не делит числа  $d$ , поэтому  $p$  должно делить  $(i - j)$ . Однако, так как  $i$  и  $j$  — положительные числа, меньшие, чем  $p$ , такая делимость возможна лишь в случае  $i - j = 0$ , что ведет к противоречию с условием  $j \neq i$ . Таким образом, простое число  $p < n$  должно делить  $d$ .

Ряд из  $n = 12$  последовательных простых членов должен иметь разность  $d$ , делящуюся на каждое простое число, меньшее 12, а именно, 2, 3, 5, 7 и 11. Соответственно, число  $d$  должно иметь множителем число  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$ , которое больше 2000, откуда и следует требуемый вывод.

Прекрасная книга В. Серпинского «Теория чисел» (1964 г.) содержит много интересных материалов на эту тему. Например, 10 последовательных членов арифметической прогрессии

$$199, 409, 619, \dots, 199 + 9 \cdot 210$$

все являются простыми числами, так же как и 13 членов  
 $4943 + k(60060), \quad k = 0, 1, \dots, 12$

все являются простыми числами.

Для того чтобы  $n = 5$  последовательных членов арифметической прогрессии были простыми числами, необходимо, чтобы 2 и 3 делили ее разность  $d$ . Поэтому разность  $d$  должна быть кратной 6. Для  $d = 6$  имеется пример:

$$5, 11, 17, 23, 29.$$

Однако это единственный случай, когда в арифметической прогрессии с разностью 6 пять последовательных членов являются простыми числами. Причиной этому является тот факт, что среди любых пяти последовательных членов такой прогрессии

$$a, a + 6, a + 2 \cdot 6, a + 3 \cdot 6, a + 4 \cdot 6$$

должен содержаться член, кратный 5. Мы имеем  $a + i6 \equiv a + i \pmod{5}$ . Независимо от того, делится  $a$  на 5 или нет, одно из значений при  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  дает  $a + i \equiv 0 \pmod{5}$ . Тогда для простоты членов один из них должен сам быть равным 5. На самом деле число 5 должно быть самым первым членом (так как  $5 - 6 = -1$  не может предшествовать числу 5) и в результате получаем числа 5, 11, 17, 23, 29.

#### ЗАДАЧА 43. О ЧЕВИАНАХ

Предположим, что  $BC$  — наибольшая из сторон треугольника  $ABC$ . Пусть точка  $O$  выбрана где-то внутри треугольника и прямые  $AO, BO, CO$  пересекают противоположные стороны в точках  $A', B', C'$  соответственно. Докажите, что

$$OA' + OB' + OC' < BC.$$

**Решение.** Отрезок, проходящий в треугольнике от его вершины до противоположной стороны, называется «чевианой». Ясно, что чевиана имеет меньшую длину, чем большая из двух сторон, выходящих из той вершины, из которой она проведена. Соответственно, наибольшая сторона треугольника превосходит все ее чевианы. Следовательно,  $BC$  больше, чем  $AA', BB', CC'$ .

Пусть отрезки  $OX$  и  $OY$  соответственно параллельны сторонам  $AB$  и  $AC$ , образуя треугольник  $OXU$ , подобный

треугольнику  $ABC$  (рис. 56). Так как  $BC$  — наибольшая из сторон треугольника  $ABC$ , то соответственная сторона  $XU$  — наибольшая сторона в треугольнике  $OXY$ . Таким образом,  $XU$  больше чевианы  $OA'$ .

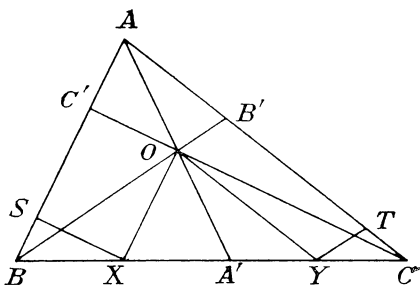


Рис. 56

Пусть отрезки  $XS$  и  $YT$  — параллельны, соответственно, отрезкам  $CC'$  и  $BB'$ . Тогда треугольник  $BXS$  подобен треугольнику  $BCC'$ . Ясно, что  $BC$  — наибольшая сторона треугольника  $BCC'$  и, соответственно, сторона  $BX$  — наибольшая в треугольнике  $BXS$ . Следовательно,

$$BX > SX = OC' \quad (\text{из параллелограмма } C'SXO).$$

Аналогично

$$YC > YT = OB'.$$

Складывая, получаем

$$OA' + OB' + OC' < XU + YC + BX = BC.$$

Только что было показано, что  $OA' + OB' + OC'$  меньше наибольшей стороны. Предположим, что  $AA'$  — наибольшая из трех чевиан  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Докажите тогда более сильный результат

$$OA' + OB' + OC' \leq AA'.$$

**Решение.** Положим, что

$$\frac{OA'}{AA'} = x, \quad \frac{OB'}{BB'} = y \quad \text{и}$$

$$\frac{OC'}{CC'} = z.$$

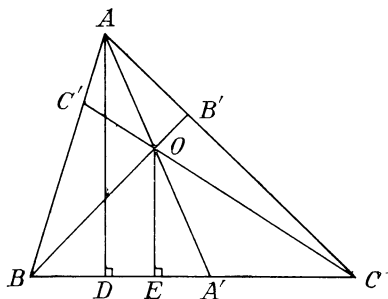


Рис. 57

Пусть  $AD$  и  $OE$  — перпендикуляры, опущенные на сторону  $BC$  (рис. 57). Тогда треугольники  $ADA'$  и  $OEA'$  подобны и

$$\frac{OE}{AD} = \frac{OA'}{AA'} = x.$$

Имеем

$$\frac{S(\triangle OBC)}{S(\triangle ABC)} = \frac{0,5BC \cdot OE}{0,5BC \cdot AD} = \frac{OE}{AD} = x,$$



получая отсюда  $S(\triangle OBC) = xS(\triangle ABC)$ . Подобным образом  $S(\triangle OCA) = yS(\triangle ABC)$  и  $S(\triangle OAB) = zS(\triangle ABC)$ . Поскольку  $S(\triangle ABC) = S(\triangle OBC) + S(\triangle OCA) + S(\triangle OAB) = (x + y + z)S(\triangle ABC)$ , мы получаем, что  $x + y + z = 1$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' &= xAA' + yBB' + zCC' \leq \\ &\leq x \cdot AA' + yAA' + zAA' = (x + y + z)AA' = AA'. \end{aligned}$$

Заметим, что равенство возможно только в случае

$$AA' = BB' = CC'.$$

#### ЗАДАЧА 44. КОРОВЫ И ОВЦЫ

Два человека совместно владели  $x$  коровами, которых они продали по  $x$  долларов за голову. На вырученные деньги они купили овец по 12 долларов за голову. Поскольку выручка от продажи коров не делилась на 12, они на оставшиеся деньги купили ягненка. Затем они разделили стадо так, чтобы у каждого из них было одинаковое количество животных. Человек с ягненком поэтому был отчасти обделен. Чтобы исправить положение, второй отдал ему свою губную гармошку. Сколько стоит гармошка?

**Решение.** Выручка от продажи равна  $x^2$  долларам. Если бы  $x$  делилось на 6, то  $x^2$  делилось бы на 36, а следовательно, на 12. Поскольку это не так, то  $x$  не делится на 6. В этом случае  $x = 12k + r$ , где  $|r| = 1, 2, 3, 4$  или 5. Соответственно,

$$\frac{x^2}{12} = \frac{(12k + r)^2}{12} = \frac{144k^2 + 24kr + r^2}{12} = 12k^2 + 2kr + \frac{r^2}{12}.$$

Теперь, так как оба человека имеют одинаковое количество животных, общее количество животных четно, откуда следует, что имеется нечетное количество овец и один ягненок. Поэтому частное от деления числа  $x^2$  на 12, которое равно количеству овец, купленных на  $x^2$  долларов, должно быть нечетным числом. Но  $12k^2 + 2kr$  — четное число. Поэтому число  $r^2/12$  должно давать нечетный вклад в частное. В силу этого  $r^2$  должно превосходить 12, откуда вытекает, что  $|r| = 4$  или 5. Для  $|r| = 5$  имеем

$$\frac{r^2}{12} = \frac{25}{12} = 2 + \frac{1}{12}.$$

давая четное число в качестве вклада в частное. Следовательно,  $|r|$  должно быть равным 4 и  $r^2 = 16$ . Таким образом,

$$\frac{r^2}{12} = \frac{16}{12} = 1 + \frac{4}{12}$$

и остаток равен 4 (но не  $-4$ ). Поэтому ягненок стоит 4 доллара. Следовательно, один человек имел 4-долларового ягненка, а другой 12-долларовую овцу и передача 4-долларовой гармошки выведет каждого из них на уровень 8 долларов.

#### ЗАДАЧА 45. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КВАДРАТОВ

Покажите, что каждый член последовательности

$$49, 4489, 444889, 44448889, \dots, \underbrace{44 \dots 4}_n \underbrace{88 \dots 89}_n$$

является полным квадратом.

**Решение.** Общий член равен

$$T = \underbrace{44 \dots 48}_n, \underbrace{8 \dots 89}_n = 9 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 10^2 + \dots$$

$$\dots + 8 \cdot 10^n + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 \cdot 10^{n+2} + \dots + 4 \cdot 10^{2n+1}.$$

Представляя 9 в виде  $1 + 4 + 4$ , а каждую восьмерку в виде  $4 + 4$ , имеем

$$\begin{aligned} T &= 1 + 4(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^n) + \\ &\quad + 4(1 + 10 + \dots + 10^{2n+1}) = \\ &= 1 + 4 \cdot \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^{2n+2} - 1}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} - 1}{9} = \\ &= \left( \frac{2 \cdot 10^{n+1} + 1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Это всегда квадрат целого числа, поскольку очевидно, что  $2 \cdot 10^{n+1} + 1$  делится на 3, так как сумма его цифр равняется  $2 + 1 = 3$ .

#### ЗАДАЧА 46. ВПИСАННЫЙ ДЕСЯТИУГОЛЬНИК

Задача о вписании правильного десятиугольника в круг вызывала острый интерес у математиков, начиная со времен Древней Греции. Об этом писал Евклид и,

в частности, дал очень красивый метод для вписывания десятиугольника. Сначала покажем, что сторона  $x$  правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса  $r$ , равна

$$x = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Заметим, что угол, под которым из центра  $O$  видна сторона  $AB = x$ , составляет  $36^\circ$  (рис. 58). Поэтому равнобедренный треугольник  $OAB$  имеет углы при основании,

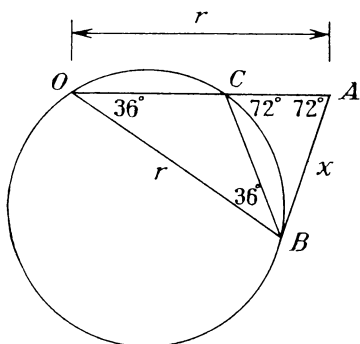


Рис. 58

равные  $72^\circ$ . Пусть  $BC$  — биссектриса угла  $B$ . Тогда треугольники  $ABC$  и  $OBC$  оба равнобедренные и  $x = AB = BC = OC$ . Соответственно  $AC = r - x$ .

Рассмотрим окружность, описанную вокруг треугольника  $OBC$ . Так как  $\angle ABC$  такой же, под каким хорда  $BC$  видна из точки  $O$  на этой описанной окружности, то прямая  $AB$  касается этой окружности. Следовательно, из рас-

смотрения касательной  $AB$  и секущей  $ACO$  мы получаем

$$x^2 = AO \cdot AC = r(r - x) = r^2 - rx,$$

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{5r^2}}{2}.$$

Так как  $x$  положительно, то

$$x = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1),$$

как и утверждалось.

Теперь обратимся к замечательной задаче доктора Банкова. Начнем с рассмотрения равностороннего треугольника  $KAB$ . Вокруг этого треугольника расположены шесть равных окружностей, три из которых касаются сторон в их серединах, а три проходят через вершины, а их центры лежат на продолжениях биссектрис углов треугольника. Эти окружности увеличиваются с одной и той же скоростью до тех пор, пока они не станут настолько боль-

шими, что коснутся друг друга и образуют кольцо из шести равных окружностей радиуса  $r$  вокруг заданного треугольника (рис. 59). Тогда, к нашему удивлению, радиус  $x$  окружности, вписанной в треугольник  $KAB$ , равен стороне правильного вписанного десятиугольника для каждой из окружностей кольца. (Удивительно, что любой мог бы сделать такое открытие.)

**Решение.** Нетрудно видеть, что радиус  $x$  окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен одной трети высоты (которая в то же время есть медиана и биссектриса). Обратившись к рисунку, мы видим, что

$$OB = \frac{2}{3} \text{ высоты} = 2x.$$

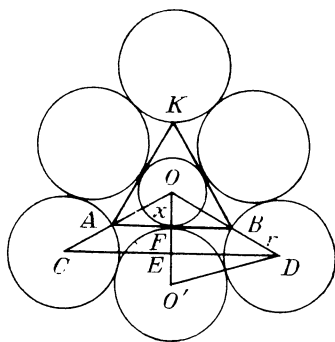


Рис. 59

Ясно, что отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельны. Поэтому

$$\frac{EF}{OF} = \frac{DB}{BO}, \quad \frac{EF}{x} = \frac{r}{2x}, \quad \text{откуда} \quad EF = \frac{r}{2}.$$

Тогда  $O'E = r/2$  — другой половине радиуса  $O'F$ .

Теперь из прямоугольного треугольника  $OED$  имеем

$$\begin{aligned} ED^2 &= OD^2 - OE^2 = (2x + r)^2 - \left(x + \frac{r}{2}\right)^2 = \\ &= 3x^2 + 3rx + \frac{3r^2}{4}. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника  $O'ED$  получаем

$$\begin{aligned} O'D^2 &= ED^2 + O'E^2, \\ 4r^2 &= \left(3x^2 + 3rx + \frac{3r^2}{4}\right) + \frac{r^2}{4}, \end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + rx,$$

$$x^2 + rx - r^2 = 0,$$

откуда, как и выше, следует

$$x = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

## ЗАДАЧА 47. КРАСНЫЕ И СИНИЕ ТОЧКИ

Рассмотрим точки, расположенные в форме квадрата из 20 столбцов и 20 строк, каждая из которых окрашена в красный или синий цвет. Всякий раз, когда две точки, окрашенные в одинаковый цвет, оказываются соседними в некоторой строке или столбце, они соединяются отрезком того же цвета. Соседние точки разного цвета соединяются отрезками черного цвета. Среди точек 219 красных, 39 из которых находятся на границе квадрата, но ни одна не находится в углу. Существует также 237 черных отрезков. Сколько синих отрезков?

**Решение.** В каждой строке находится 19 отрезков, таким образом, получаем  $19 \cdot 20 = 380$  горизонтальных отрезков. Столько же и вертикальных отрезков, в результате их общее число равно 760. Так как 237 из них — черные, то остальные 523 — синие или красные.

Обозначим через  $k$  количество красных отрезков и посчитаем, сколько раз красные точки являются концами отрезков. Каждый черный отрезок имеет один красный конец, а у каждого красного отрезка оба конца красные, поэтому всего

$$237 + 2k \text{ красных концов.}$$

Но 39 красных точек находятся на границе и являются концами трех отрезков, а каждая из остальных 180 красных точек находится внутри и является концом четырех отрезков. Таким образом, количество случаев, в которых красная точка является концом отрезка, равно

$$39 \cdot 3 + 180 \cdot 4 = 837.$$

Поэтому

$$237 + 2k = 837 \text{ и } k = 300.$$

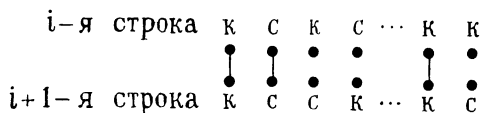
Количество синих отрезков тогда равно  $523 - 300 = 223$ .

Подобная задача была предложена в журнале «American Mathematical Monthly» (1971 г.) Т. С. Брауном и решена Стефаном Б. Маурером.

Рассмотрим прямоугольное расположение красных и синих точек с четным числом строк и четным числом столбцов. В каждой строке половина точек красные и половина — синие; аналогично и в столбцах. Всякий раз, когда две точки одинакового цвета оказываются соседними в строке или столбце, они соединяются отрезком того же

цвета. Покажите, что общее количество красных отрезков равно общему количеству синих отрезков.

**Решение:**



Рассмотрим две соседние строки из точек, скажем,  $i$ -ю и  $i+1$ -ю. Если две точки одинакового цвета находятся одна под другой, то эта пара соединяется отрезком. Назовем такие точки «спаренными», а пары разноцветных точек «неспаренными». Теперь вспомним, что в каждой строке половина точек красные, а другая половина синие. Поэтому в строчках одинаковое количество красных точек. Ясно, что соседние строки имеют одинаковое количество спаренных красных точек, поэтому в них и одинаковое количество неспаренных красных точек. Поскольку под каждой неспаренной красной точкой  $i$ -й строки стоит неспаренная синяя точка  $i+1$ -й строки, мы имеем, что

число неспаренных синих точек в  $i+1$ -й строке =

= числу неспаренных красных точек в  $i$ -й строке =

= числу неспаренных красных точек в  $i+1$ -й строке.

Тогда в  $i+1$ -й строке мы имеем одинаковое количество неспаренных красных точек и неспаренных синих точек. Так как в  $i+1$ -й строке находится одинаковое общее число красных и синих точек, то отсюда следует, что там будет одинаковое число спаренных красных точек и спаренных синих точек. Это влечет за собой равенство количества синих и красных отрезков, соединяющих строки. То же самое верно и для соседних столбцов, откуда вытекает окончательный вывод.

#### ЗАДАЧА 48. МЕТОД ШАЛЯ

Если дана окружность  $S$  некоторого круга, то несложно найти ее центр и определить радиус. Для этого обычно проводятся срединные перпендикуляры к двум хордам для того, чтобы получить центр, после чего определяется радиус. В то время как для определения средин-

ного перпендикуляра к хорде требуется провести пару дуг, при построении срединных перпендикуляров у двух соседних хорд можно ограничиться тремя дугами (используя одну и ту же дугу при построении каждого из двух перпендикуляров).

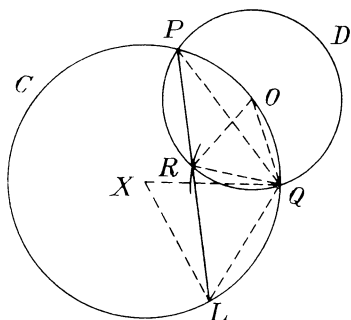


Рис. 60

При этом используется циркуль для проведения не менее трех дуг и дважды применяется линейка. Введем следующий метод построения радиуса, известный как «метод Шаля», в котором проводятся только две дуги и один раз используется линейка (рис. 60).

Взяв точку  $O$  окружности  $C$  как центр окружности  $D$ , найдем точки ее пересечения

$P$  и  $Q$  с окружностью  $C$ .

Проведем еще окружность с центром в точке  $Q$  того же радиуса и отметим точку  $R$  ее пересечения с окружностью  $D$ , находящегося внутри окружности  $C$ . Пусть прямая  $PR$  пересекается с окружностью  $C$  в точке  $L$ . Тогда  $QL$  — радиус окружности  $C$  (так же как и  $LR$ ).

**Решение.** Ясно, что все три стороны треугольника  $QOR$  являются радиусами окружности  $D$ , следовательно, он равносторонний и  $\angle ROQ = 60^\circ$ . Поэтому  $\angle RPQ = 30^\circ$  как вписанный (в обе окружности) и угол  $LXQ$  из центра  $X$  окружности  $C$  также равен  $60^\circ$ . Следовательно, треугольник  $XQL$  — также равносторонний и  $QL = r$ .

(Нетрудно доказать, что треугольники  $RQL$  и  $XOQ$  равны, откуда мы получаем, что  $RL = OX = r$ .)

#### ЗАДАЧА 49. О ФУНКЦИИ $\pi(n)$

Простые числа давно пользуются особым вниманием математиков. Одной из наиболее интересных функций, связанных с простыми числами, является функция  $\pi(n)$  — количество простых чисел, не превосходящих числа  $n$ .

**Задача.** Докажите, что  $\pi(n) \geq \frac{\ln n}{\ln 4}$ .

**Решение.** Выдающийся венгерский математик Поль Эрдеи нашел следующее элементарное решение этой задачи.

Обозначим через  $m$  некоторое натуральное число. Предположим, что  $k^2$  — наибольший квадрат, который является делителем числа  $m$ , т. е.  $m = k^2v$ . Тогда  $v$  не может иметь повторяющихся множителей, в противном случае полный квадрат, больший чем  $k^2$ , будет делителем числа  $m$ . (Число  $v$  называют «свободной от квадратов» частью числа  $m$ .)

Теперь зафиксируем натуральное число  $n$  и рассмотрим натуральные числа  $m \leq n$ . Пусть каждое из чисел  $m = 1, 2, \dots, n$  будет представлено в виде  $m = k^2v$ , где число  $v$  не имеет повторяющихся множителей. Так как в каждом случае мы имеем, что  $k^2 \leq m \leq n$ , то  $k$  должно быть одним из чисел  $1, 2, 3, \dots, [\sqrt{n}]$ , где  $[\sqrt{n}]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее числа  $\sqrt{n}$ . Так как  $0 \leq m \leq n$ , все простые делители числа  $v$  должны принадлежать совокупности простых чисел, которые не превосходят  $n$ , а именно,  $p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)}$ . Будучи произведением некоторых простых чисел из этой совокупности, число  $v$  должно быть одним из чисел вида

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{\pi(n)}^{\alpha_{\pi(n)}},$$

где каждый из показателей степени  $\alpha_i$  равен 0 или 1 (число  $v$  не имеет повторяющихся множителей). Так как каждое из чисел  $\alpha_i$  может равняться как 0, так и 1, то существует  $2^{\pi(n)}$  различных чисел такого вида.

Резюмируем сказанное. Для каждого числа  $m = k^2v$ , где число  $v$  не имеет повторяющихся множителей,  $k$  принадлежит множеству из  $[\sqrt{n}]$  чисел

$$X = (1, 2, \dots, [\sqrt{n}]),$$

а  $v$  должно принадлежать множеству из  $2^{\pi(n)}$  чисел

$$Y = (p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_{\pi(n)}^{\alpha_{\pi(n)}}, \alpha_i = 0 \text{ или } 1).$$

Теперь каждому числу  $m = 1, 2, \dots, n$  соответствуют число  $k$  из  $X$  и число  $v$  из  $Y$  такие, что  $m = k^2v$ . И наоборот, выбирая соответствующие числа  $k$  из множества  $X$  и  $v$  из множества  $Y$ , мы можем получить любое из чисел  $1, 2, \dots, n$  в виде  $k^2v$ . Следовательно, производя выбор чисел  $k$  из  $X$  и чисел  $v$  из  $Y$  всеми возможными способами и составляя числа  $k^2v$ , мы можем образовать множество чисел, включающее все  $n$  чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Но при этом образуется всего

$$[\sqrt{n}] \cdot 2^{\pi(n)} \text{ чисел.}$$



Соответственно, имеем

$$[\sqrt[n]{n}] \cdot 2^{\pi(n)} \geq n.$$

Но  $\sqrt[n]{n} \geq [\sqrt[n]{n}]$  по определению, и поэтому

$$\sqrt[n]{n} 2^{\pi(n)} \geq n, \quad 2^{\pi(n)} \geq \sqrt[n]{n},$$

$$\pi(n) \ln 2 \geq \frac{1}{2} \ln n, \quad \pi(n) \geq \frac{\ln n}{2 \ln 2} = \frac{\ln n}{\ln 4}.$$

В XIX столетии русский математик П. Чебышёв доказал более сильную теорему:

$$\pi(n) > \frac{n}{12 \ln n}.$$

Короткая задача о функции  $\pi(n)$  была предложена Полем Эрдешем в журнале «American Mathematical Monthly» в 1944 г. и решена Уитни Скобертом.

Докажите, что если  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n$  — произвольная последовательность натуральных чисел такая, что ни одно из  $\alpha_i$  не является делителем произведения других, то  $k \leq \pi(n)$ .

**Решение.** Каждое число  $\alpha_i \leq n$  и поэтому имеет разложение на простые множители

$$\alpha_i = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_{\pi(n)}^{q_{\pi(n)}}.$$

Для того чтобы число  $\alpha_i$  не являлось делителем произведения остальных чисел, оно должно содержать некоторый простой множитель  $p_i \in (p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)})$  в степени большей, чем сумма степеней  $p_i$  у всех остальных чисел  $\alpha$ . Таким образом, число  $\alpha_i$  должно содержать это  $p_i$  в степени большей, чем каждое другое отдельное  $\alpha$ . Каждое  $\alpha_i$  имеет такое число  $p_i$  и ясно, что никакие два числа  $\alpha$  не могут быть подобным образом связаны с одним и тем же числом  $p_i$ . Поэтому вы не сможете иметь чисел  $\alpha$  больше, чем простых чисел во множестве  $(p_1, p_2, \dots, p_{\pi(n)})$ , и таким образом,  $k \leq \pi(n)$ .

#### ЗАДАЧА 50. ПОСТОЯННАЯ ХОРДА

Предположим, что две окружности  $Q$  и  $R$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$  (рис. 61). Точка  $P$  лежит на дуге окружности  $Q$ , расположенной вне окружности  $R$ . Она проектируется через точки  $A$  и  $B$ , определяя хорду  $CD$  на окружности  $R$ . Докажите, что независимо от того,

где точка  $P$  взята на указанной дуге, длина хорды  $CD$  всегда одна и та же.

**Решение.** Обозначим через  $P$  и  $P'$  положения точки  $P$ , соответствующие хордам  $CD$  и  $C'D'$  (рис. 62). Мы имеем

$$\angle PAP' = \angle PBP',$$

$$\angle PAP' = \angle CAC',$$

$$\angle PBP' = \angle DBD',$$

что дает равенство  $\angle CAC' = \angle DBD'$ . Это означает, что дуга  $CC'$  равна дуге  $DD'$ . Прибавляя дугу  $CD'$  к каждой из

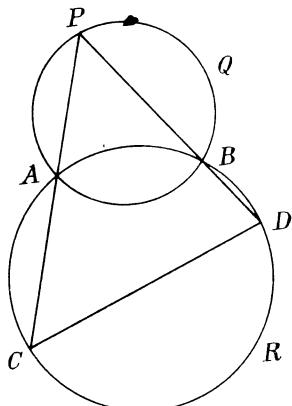


Рис. 61

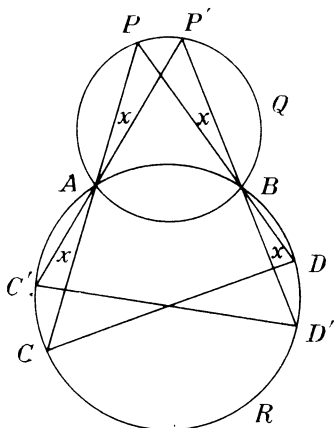


Рис. 62

них, получаем, что дуга  $C'D'$  равна дуге  $CD$ , откуда мы имеем, что и длины хорд тоже равны:

$$C'D' = CD.$$

#### ЗАДАЧА 51. КОЛИЧЕСТВО ВНУТРЕННИХ ДИАГОНАЛЕЙ

Простой многоугольник это такой, который сам себя не пересекает. Однако такой многоугольник может быть далеко не выпуклым и многие его диагонали будут лежать целиком или частично вне его. Докажите, что тем не менее, каждый простой  $n$ -угольник имеет не менее  $n - 3$  диагоналей, полностью лежащих внутри него.

**Решение.** Ясно, что это утверждение справедливо для четырехугольников (рис. 63). Предположим, что утверж-

дение справедливо для  $k$ -угольников ( $k = 4, 5, \dots, n$ ). Рассмотрим простой  $(n + 1)$ -угольник  $P$ . Заметим, что невозможен многоугольник, у которого нет диагоналей, расположенных внутри него. Этот результат доказан в моей

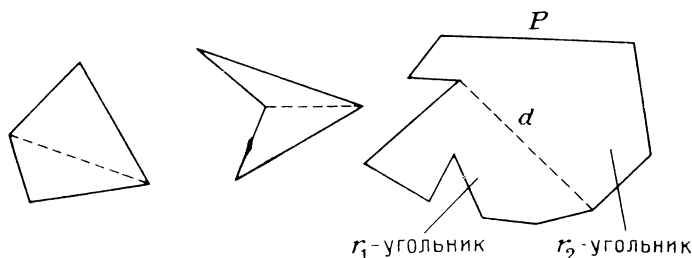


Рис. 63

книге «Ingenuity in Mathematics». Обозначим через  $d$  диагональ, полностью лежащую внутри многоугольника  $P$ . Предположим, что  $d$  делит многоугольник  $P$  на  $r_1$ -угольник

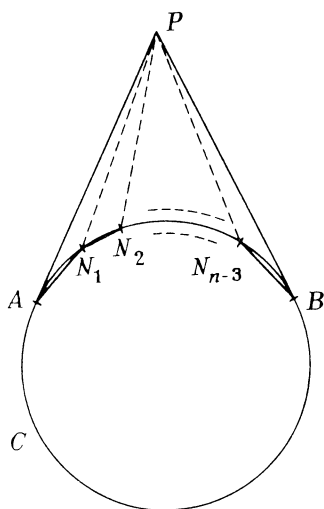


Рис. 64

и  $r_2$ -угольник. По предположению индукции мы имеем не менее  $r_1 - 3$  и  $r_2 - 3$  внутренних диагоналей многоугольника  $P$  в этих его двух частях. Добавляя саму диагональ  $d$ , получим, что должно быть не менее  $r_1 + r_2 - 5$  внутренних диагоналей у многоугольника  $P$ .

Общее число сторон у двух полученных многоугольников равно  $r_1 + r_2$ . Это число включает все  $n + 1$  стороны многоугольника  $P$  и дважды диагональ  $d$ . Поэтому имеем  $r_1 + r_2 = n + 3$ . Следовательно,  $P$  имеет не менее

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 - 5 &= n + 3 - 5 = \\ &= n - 2 = (n + 1) - 3 \end{aligned}$$

внутренних диагоналей. Отсюда по индукции следует утверждение задачи.

Так как для любого натурального числа  $n > 3$  можно указать  $n$ -угольник, имеющий ровно  $n - 3$  внутренних диа-

гоналей, то число  $n - 3$  является наибольшим числом внутренних диагоналей, которое можно гарантировать. Пусть касательные к окружности  $C$  в точках  $A$  и  $B$  пересекаются в точке  $P$  (рис. 64). Выбирая точки  $N_1, N_2, \dots, N_{n-3}$  вдоль той дуги  $AB$ , которая ближе к точке  $P$ , мы получим  $n$ -угольник  $PAN_1N_2\dots N_{n-3}B$ , который имеет в точности  $n - 3$  внутренних диагоналей  $PN_i$ , причем все они выходят из точки  $P$ .

Р. В. Эгглтон из Австралии установил, что простой  $n$ -угольник имеет в точности  $n - 3$  внутренние диагонали тогда и только тогда, когда никакие две его внутренние диагонали не пересекаются.

## ЗАДАЧА 52. УТЯЖЕЛЕННЫЕ ИГРАЛЬНЫЕ КОСТИ

Докажите, что невозможно так утяжелить пару игральных костей, чтобы каждая сумма 2, 3, ..., 12 стала бы равновозможной.

Как обычно полагаем, что кости различны (т. е. выпадение двойки на первой кости и четверки на второй отличается от выпадения четверки на первой кости и двойки на второй, хотя получается та же сумма).

**Решение.** Обозначим через  $p_i$  вероятность выпадения количества очков  $i$  на первой кости, а через  $q_i$  — вероятность его выпадения на второй кости. Вероятность получения суммы 2 в этом случае равняется  $p_1q_1$ , в то время как вероятность для суммы 12 равна  $p_6q_6$ . Если все одиннадцать вероятностей одинаковы, то каждая из них равна  $1/11$ . Вероятность суммы 7 равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} &= p_1q_6 + p_2q_5 + \dots + p_6q_1 \geq p_1q_6 + p_6q_1 = \\ &= p_1q_6 \left( \frac{q_1}{q_1} \right) + p_6q_1 \left( \frac{q_6}{q_6} \right) = p_1q_1 \left( \frac{q_6}{q_1} \right) + p_6q_6 \left( \frac{q_1}{q_6} \right) = \\ &= \frac{1}{11} \left( \frac{q_6}{q_1} \right) + \frac{1}{11} \left( \frac{q_1}{q_6} \right) = \frac{1}{11} \left( \frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6} \right). \end{aligned}$$

Поэтому мы получаем

$$\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6} \leq 1.$$

Но сумма положительного числа с числом обратным ему  $x + 1/x$  всегда не меньше 2. Поэтому предполагаемое утяжеление невозможно.

### ЗАДАЧА 53. КУРЬЕЗНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Предположим, что мы просматриваем все натуральные числа 1, 2, 3, ... и выбираем последовательность следующим образом:

первое нечетное число (а именно 1),  
 следующие два четных числа (2 и 4),  
 следующие три нечетных числа (5, 7, 9),  
 следующие четыре четных числа (10, 12, 14, 16),  
 следующие пять нечетных чисел (17, 19, 21, 23, 25)  
 и так далее, получая ряд 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, ...

Докажите, что  $n$ -й член  $u_n$  получается по формуле

$$u_n = 2n - \left\lceil \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rceil,$$

где  $[x]$  означает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**Решение.** Сравним последовательность  $U$  с последовательностью  $E$  четных чисел и пусть  $D$  — последовательность разностей между соответствующими членами  $D = \{d_n\}$ . Мы увидим, что последовательность  $D$  состоит из одной единицы, двух двоек, трех троек, ...,

$$\begin{aligned} E &= \{2n\} : 2, \quad | 4, 6, \quad | 8, 10, 12, \quad | 14, 16, 18, 20 \quad | 22, \dots, \\ U &= \{u_n\} : 1, \quad | 2, 4, \quad | 5, \quad 7, \quad 9, \quad | 10, 12, 14, 16, \quad | 17, \dots, \\ D &= \{d_n\} : 1, \quad | 2, 2, \quad | 3, \quad 3, \quad 3, \quad | 4, \quad 4, \quad 4, \quad 4, \quad | 5, \dots, \end{aligned}$$

и  $n$  чисел, равных  $n$ , ... Члены последовательности  $U$  распределены по группам из одного члена, из двух членов, трех членов и т. д. Внутри группы все члены либо четные, либо нечетные, возрастающие на 2, как и последовательность четных чисел. Поэтому последовательность разностей  $D$  будет состоять из одинаковых членов в каждой группе. При переходе к следующей группе в последовательности четных чисел член продолжает увеличиваться на 2, в то время как в данной последовательности и при переходе от четных чисел к нечетным (или наоборот) возрастание будет лишь на 1. Соответственно разность, которая будет сохраняться в следующей группе, увеличива-

ется на 1 и члены из  $D$  будут такими, как указывалось выше. Найдя формулу для  $d_n$ , мы получим формулу для  $u_n$  из соотношения

$$u_n = 2n - d_n.$$

Попробуем определить  $d_n$  для конкретного значения  $n$ . Как мы видели, члены из  $D$  распадаются на группы с постоянным значением:

$$(1), (2, 2), (3, 3, 3), \dots, \underbrace{(k-1, k-1, \dots)}_{k-1 \text{ раз}}, \underbrace{(k, k, \dots)}_{k \text{ раз}}, \dots$$

Нам нужно найти группу, которая содержит наш данный член  $d_n$ . Если он содержится в  $k$ -й группе, то его значение равно  $k$ . Заметим, что перед  $k$ -й группой стоят одна единица, две двойки, три тройки, ...,  $k-1$  чисел  $k-1$ , а всего

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2} \text{ членов.}$$

Если  $d_n$  находится в  $k$ -й группе, то, будучи  $n$ -м членом в последовательности  $D$ , он порождает соотношения

$$\frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n < \frac{[(k+1)-1](k+1)}{2} + 1.$$

Например, если  $d_n$  находится в 10-й группе, то

$$\frac{(10-1) \cdot 10}{2} + 1 \leq n < \frac{(11-1) \cdot 11}{2} + 1.$$

Конечно, в этом случае мы также имеем  $(9-1)9/2 + 1 \leq n$ ,  $(8-1)8/2 + 1 \leq n$ , ...,  $(1-1)1/2 + 1 \leq n$ . Из всех целых чисел  $(m-1)m/2 + 1$  при  $m = k$  получаем наибольшее значение  $\leq n$ . Таким образом, мы имеем, что число  $k = d_r$  есть наибольшее из чисел  $m$ , удовлетворяющих условию  $(m-1)m/2 + 1 \leq n$ , или

$$m^2 - m + 2(1-n) \leq 0.$$

Но трехчлен  $m^2 - m + 2(1-n)$  неположителен для всех значений  $m$ , лежащих на замкнутом интервале между корнями соответствующего уравнения  $n^2 - m + 2(1-n) = 0$ , которые таковы:

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1-8(1-n)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{8n-7}}{2} \quad (\text{рис. 65}).$$

Таким образом,  $k$  есть наибольшее целое число в промежутке

$$\frac{1 - \sqrt{8n-7}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}.$$

Так как  $k$  — целое число, то мы имеем

$$d_n = k = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor,$$

а по выведенной формуле

$$u_n = 2n - \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

Натан Мендельсон обратил внимание на дополнительную последовательность  $V = \{v_n\}$  натуральных чисел, не входящих в  $U$ :

$$V = \{v_n\}: 3, 6, 8, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 27, \dots$$

Он установил, что члены этой последовательности тоже

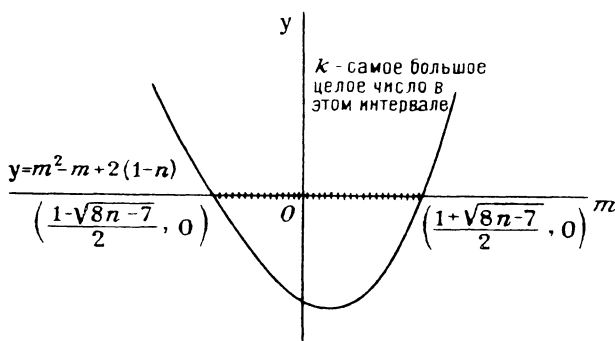


Рис. 65

образуют группы в один член, два члена, три члена и т. д., и что формула для  $v_n$  получается не вычитанием  $d_n$  из  $2n$ , как в случае  $u_n$ , а его прибавлением:

$$v_n = 2n + d_n = 2n + \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$

Это немедленно следует из того, что  $v_n + u_n = 4n$ . Этот результат не очень трудно доказать. Он предлагается в качестве упражнения.

#### ЗАДАЧА 54. ДЛИННЫЕ ЦЕПОЧКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Хотя существует бесконечное количество простых чисел, промежутки между последовательными простыми числами в последовательности натуральных чисел могут быть сколь угодно большими. Это легко видеть, если рассмотреть для всех натуральных чисел  $n$  набор чисел

$$(n+1)!+2, (n+1)!+3, \dots, (n+1)!+(n+1),$$

содержащий  $n$  последовательных составных чисел.

Докажите, что также существуют сколь угодно длинные цепочки последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет в качестве делителя число, отличное от 1 и являющееся полным квадратом.

**Решение.** Мы докажем по индукции, что для всех натуральных чисел  $n$  существует множество из  $n$  последовательных чисел, каждое из которых имеет делителем полный квадрат  $>1$ .

1) Для  $n=1$ , любой квадрат  $>1$  удовлетворяет нашему условию.

2) Предположим, что для  $n \geq 1$  имеется последовательность из  $n$  натуральных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

каждое из которых имеет делителем полный квадрат  $>1$ . Мы найдем  $n+1$  последовательное натуральное число с тем же свойством.

Обозначим через  $s_i$  полный квадрат  $>1$ , который является делителем числа  $a_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , и через  $L$  обозначим произведение этих чисел  $s_i$ . Поскольку числа  $a_i$  являются последовательными, то  $a_2 = a_1 + 1$  и т. д. Придерживаясь этих обозначений, число  $a_n + 1$  обозначим как  $a_{n+1}$  и получаем  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$  — цепочку из  $n+1$  последовательных чисел. Число  $a_{n+1}(L+2)L$  обозначим через  $A$ . Число  $A$  делится на каждое из чисел  $s_i$ , поскольку имеет сомножителем число  $L$ . Теперь рассмотрим последовательность из  $n+1$  натуральных чисел

$$A + a_1, A + a_2, \dots, A + a_{n+1}.$$

Для  $i=1, 2, \dots, n$  оба числа  $A$  и  $a_i$  делятся на  $s_i$ , откуда следует, что первые  $n$  из этих чисел имеют в качестве де-



лителей квадраты  $>1$ . Для последнего же числа получаем

$$\begin{aligned} A + a_{n+1} &= a_{n+1}(L+2)L + a_{n+1} = \\ &= a_{n+1}(L^2 + 2L + 1) = a_{n+1}(L+1)^2. \end{aligned}$$

Так как  $s_i > 1$ , то  $L > 1$  и  $(L+1)^2$  является квадратом  $>1$ . Таким образом, все  $n+1$  чисел делятся на квадраты  $>1$ , и по индукции получаем наше утверждение.

Таким же образом можно показать, что для любого натурального числа  $n$  существует  $n$  последовательных чисел, каждое из которых делится на  $m$ -ю степень некоторого натурального числа  $>1$ , где  $m > 2$ . Для этого нужно только взять в качестве  $s_i$   $m$ -ю степень числа  $>1$ , а в качестве числа  $A$  число

$$A = a_{n+1} [(L+1)^m - 1].$$

Заметим, что предложенный метод не только показывает существование описанной выше последовательности, но и дает итеративный способ построения такой последовательности. Так как единственным используемым свойством числа  $L$  является его делимость на каждое из чисел  $s_i$ , то вместо того чтобы в качестве  $L$  брать произведение всех  $s_i$ , мы можем взять их наименьшее общее кратное. Это поможет нам уменьшить число  $L$  и, соответственно, сократить вычисление.

Это означает, что, согласно замечанию, я смогу указать в некотором месте натурального ряда триллион чисел (или столько, сколько вы захотите), каждое из которых делится на число, являющееся триллионной степенью натурального числа  $>1$ , и что при наличии достаточного времени я смогу в действительности выписать для вас такую цепочку чисел.

#### ЗАДАЧА 55. МИНИМАЛЬНЫЙ ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Пусть диагонали четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, пересекаются в точке  $X$ , а точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $X$  на стороны четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что из всех четырехугольников, имеющих вершины на каждой из сторон четырехугольника  $ABCD$ , наименьший периметр имеет четырехугольник  $PQRS$ .

**Решение.** Начнем с доказательства того, что отрезки  $PS$  и  $PQ$  образуют равные углы с прямой  $AB$  (рис. 66):

$$\angle APS = \angle BPQ.$$

Мы получим этот результат из того, что они имеют равные дополнения:

$$\angle SPX = \angle QPX.$$

Из рассмотрения прямых углов в четырехугольнике  $PBQX$  мы получаем, что он вписанный, откуда  $\angle QPX = \angle QBX$ . Аналогично, четырехугольник  $APXS$  — тоже вписанный и  $\angle SPX = \angle SAX$ . Однако в данной окружности углы  $CBD$  и  $CAD$  опираются на одну и ту же дугу и, следовательно, равны, поэтому  $\angle QPX = \angle SPX$  и мы получаем доказательство нашего утверждения. Аналогично, в каждой вершине четырехугольника  $PQRS$  стороны образуют равные углы с соответствующими сторонами четырехугольника  $ABCD$ .

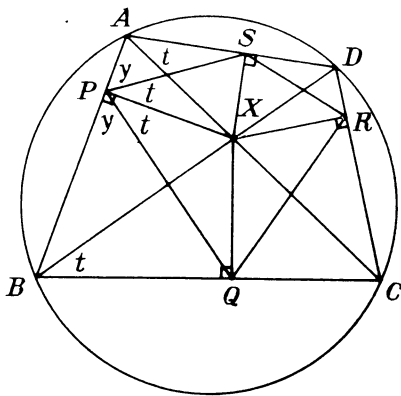


Рис. 66

Вследствие этого при отражении четырехугольника  $PQRS$  относительно стороны четырехугольника  $ABCD$  образ каждой из сторон, которые пересекаются с осью симметрии, является в точности продолжением другой стороны (рис. 67). Серией из трех отражений I, II и III можно выпрямить периметр четырехугольника  $PQRS$ , как изображено на рис. 68. Здесь показаны четыре примыкающих одинаковых изображения четырехугольника  $PQRS$  внутри четырехугольника  $ABCD$ . Поэтому  $A_2S_3 = AS$ , а так как противолежащие углы  $D_2S_3R_2$  и  $ASP$  равны (каждый из них равен углу  $DSR$ ), то  $A_2S_3$  и  $AS$  также и параллельны. Поэтому  $A_2ASS_3$  — параллелограмм, в котором выпрямленный периметр  $SS_3$  четырехугольника  $PQRS$  равен отрезку  $AA_2$ .

Теперь произведем такие же отражения, разворачивающие периметр, для произвольного четырехугольника,

имеющего вершины на каждой из сторон четырехугольника  $ABCD$ . Если  $Y$  — вершина на стороне  $AD$ , а  $Y_3$  — ее образ на отрезке  $A_2D_2$ , то, поскольку  $A_2Y_3$  и  $AY$  равны и

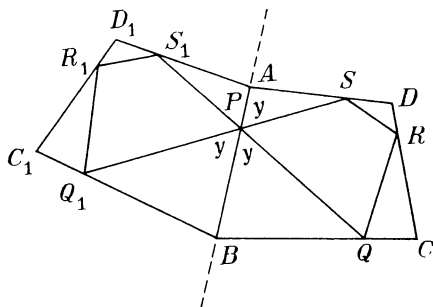


Рис. 67

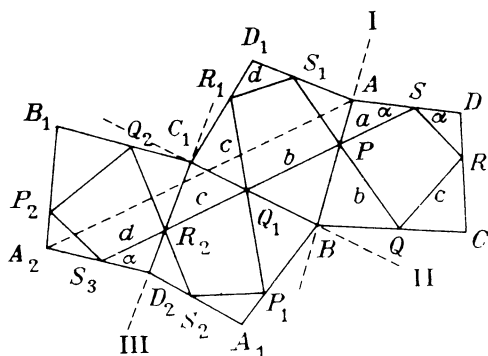


Рис. 68

параллельны, мы снова видим, что  $A_2AYY_3$  — параллелограмм (рис. 69). Поэтому  $YY_3 = AA_2$ . Однако развернутый периметр расположен между точками  $Y$  и  $Y_3$ . Если это ломаная, то она длиннее, чем  $YY_3$ . В случае, когда периметр наименьший, ломаная должна совпадать с отрезком  $YY_3$ , равным отрезку  $AA_2$  — периметру четырехугольника  $PQRS$ . Таким образом, четырехугольник  $PQRS$  имеет наименьший периметр.

Заметим, что если  $E$ ,  $F$  и  $G$  — точки на отрезке  $YY_3$ , в которых он пересекает отрезки  $AB$ ,  $BC_1$  и  $C_1D_2$  соответственно, то эти точки  $E$ ,  $F$  и  $G$  соответствуют точкам на трех других сторонах четырехугольника  $ABCD$ , определяя

вписанный в него четырехугольник  $T$ . Развертка четырехугольника  $T$  дает просто отрезок  $YY_3$  в качестве выпрямленного его периметра. Таким образом, для любой точки

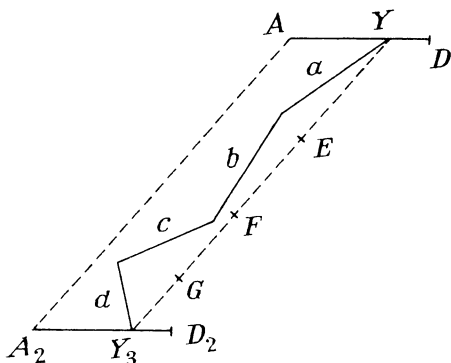


Рис. 69

$Y$  на отрезке  $AD$  существует четырехугольник, вписанный в  $ABCD$ , который имеет  $Y$  своей вершиной и обладает минимальным периметром.

#### ЗАДАЧА 56. ТРЕУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Количество кругов, расположенных в виде треугольника (рис. 70), определяет последовательность

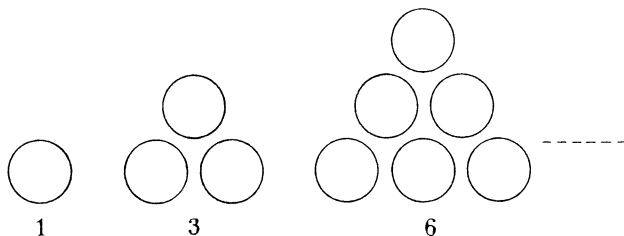


Рис. 70

треугольных чисел. Она начинается с чисел 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ...;  $n$ -е число равно

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как  $t_n = t_{n-1} + n$ , то легко вычислить в уме первую пару дюжин членов:

1, (плюс 2) 3, (плюс 3) 6, (плюс 4) 10, (плюс 5) 15, (плюс 6) 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, ...

В этой части мы рассмотрим семь маленьких задач о треугольных числах.

1) Докажите, что всякое нечетное число, являющееся полным квадратом, будучи записано в восьмеричной системе счисления (с основанием 8), оканчивается на 1 и, если отделить эту единицу, то оставшаяся часть всегда будет треугольным числом.

**Решение.** Заметив, что одно из двух последовательных чисел  $n$  и  $n + 1$  четно, получим, что

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 8k + 1$$

для некоторого целого числа  $k$ . Отсюда следует, что в восьмеричной системе счисления нечетный квадрат оканчивается на 1.

Отделив последнюю цифру 1 от числа  $m$ , записанного в восьмеричной системе счисления, мы получим число  $(m - 1)/8$ . Таким образом, указанное стирание цифры дает

$$\frac{(2n + 1)^2 - 1}{8} = \frac{4n(n + 1)}{8} = \frac{n(n + 1)}{2} = t_n,$$

$n$ -е треугольное число.

2) Докажите, что при основании 9 каждое число, записываемое лишь с помощью единиц, является треугольным числом:

1, 11, 111, 1111, ....

**Решение.** Ясно, что первое число 1 является треугольным. Пусть теперь 1 поставлена после числа  $k$ , записанного при основании 9, тогда получится число  $9k + 1$ . Если число  $k$  оказалось треугольным, т. е. имеет вид  $n(n + 1)/2$ , то при указанной процедуре получаем

$$9 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} + 1 = \frac{9n^2 + 9n + 2}{2} = \frac{(3n + 1)(3n + 2)}{2},$$

которое также является треугольным числом. Отсюда по индукции получаем наше утверждение.

Заметим, что приписывание 01 к числу  $k$ , записанному в троичной системе счисления также дает число  $9k + 1$ . Поэтому приписывание 01 к треугольному числу в троичной системе счисления также образует другое треугольное число.

При основании 25 приписывание цифры 3 к треугольному числу  $n(n+1)/2$  дает

$$25 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 3 = \frac{25n^2 + 25n + 6}{2} = \frac{(5n+2)(5n+3)}{2}$$

— треугольное число. Следовательно, приписывание 3 при основании 25 или, что эквивалентно, 03 при основании 5 к треугольному числу дает также треугольное число.

И вообще, если к треугольному числу, написанному в системе счисления с основанием  $(2k+1)^2$  приписать цифру  $\frac{1}{2}k(k+1)$ ; или в системе счисления с основанием  $(2k+1)$ ,  $k \leq 3$  приписать 0 и цифру  $\frac{1}{2}k(k+1)$ ; или в системе счисления  $(2k+1)$ ,  $k > 3$  приписать число  $\frac{1}{2}k(k+1)$ , которое оказывается в этом случае двузначным, то полученное число является треугольным.

3) Пусть число  $N = 0,1360518\dots$  образовано последними цифрами треугольных чисел. Будет число  $N$  рациональным или иррациональным?

**Решение.** Продолжим последовательность треугольных чисел

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, ...

Отсюда мы видим, что число  $N$  при этом продолжении

$$N = 0,13605186556815063100136051$$

наводит на мысль о существовании периода из 20 цифр. Продолжая обозначать  $n$ -е треугольное число через  $t_n$ , мы получим в общем случае, что

$$\begin{aligned} t_{n+20} - t_n &= \frac{(n+20)(n+21)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 41n + 420 - n^2 - n) = 10(2n + 21). \end{aligned}$$

Это число оканчивается на 0. Таким образом, числа  $t_{10+20}$  и  $t_n$  должны иметь одну и ту же последнюю цифру, подтверждая предположение о периодичности числа  $N$ . Следовательно, число  $N$  рационально.

Заметим, что период числа  $N$  является почти палиндромом (читается одинаково слева направо и справа

налево). В действительности число

$$\frac{N}{10} = 0,013605186556815063100136051$$

имеет в качестве периода палиндром.

Отметим, что можно доказать и такой результат: число  $N$ , образованное аналогичным образом наборами по  $k$  последних цифр треугольных чисел, будет рациональным для любого  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Треугольные числа являются частичными суммами арифметической прогрессии  $1, 2, 3, \dots$ . Нетрудно показать, что число  $N$ , построенное с помощью последних  $k$  цифр частичных сумм произвольной арифметической прогрессии из натуральных чисел, является рациональным числом.

4) Мы можем заметить, что треугольные числа 1 и 36 также являются и полными квадратами. Докажите, что треугольных чисел, являющихся полными квадратами, бесконечно много.

**Решение.** При внимательном рассмотрении можно обнаружить, что число  $t_{4n(n+1)}$  является полным квадратом всякий раз, когда  $t_n$  является полным квадратом. Действительно, если  $t_n = n(n+1)/2 = k^2$ , то  $4n(n+1) = 8k^2$  и

$$\begin{aligned} t_{4n(n+1)} &= t_{8k^2} = \frac{8k^2(8k^2 + 1)}{2} = \\ &= 4k^2(8k^2 + 1) = 4k^2[4n(n+1) + 1] = 4k^2(4n^2 + 4n + 1) = \\ &= 4k^2(2n + 1)^2, \end{aligned}$$

т. е. является полным квадратом.

5) Докажите, что разность между квадратами двух последовательных треугольных чисел всегда является кубом целого числа:

$$\{t_n\}: 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

$$\{t_n^2\}: 1, 9, 36, 100, 225, 441, \dots$$

$$\{\text{разности}\}: 8, 27, 64, 125, 216, \dots$$

**Решение.** Хорошо известно, что сумма кубов первых  $n$  натуральных чисел равна

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = t_n^2.$$

Таким образом,  $t_{n+1}^2 - t_n^2 = (n+1)^3$ , что и требовалось.

6) Докажите, что сумма чисел, обратных к треугольным, равна 2:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots = 2.$$

**Решение.** Очаровательное геометрическое решение получается с помощью двух гипербол

$$y_1(x) = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \frac{1}{x-1} \quad (\text{рис. 71}).$$

Для целых значений  $x = n \geq 2$  разность  $a_n$  между ординатами этих кривых равна

$$a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t_{n-1}} \right).$$

Таким образом,  $1/t_{n-1} = 2a_n$ , а искомая сумма есть

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots = 2(a_2 + a_3 + \dots).$$

Заметим теперь, что значение функции  $y_2(x)$  при  $x = n$  такое же, как и значение функции  $y_1(x)$  при

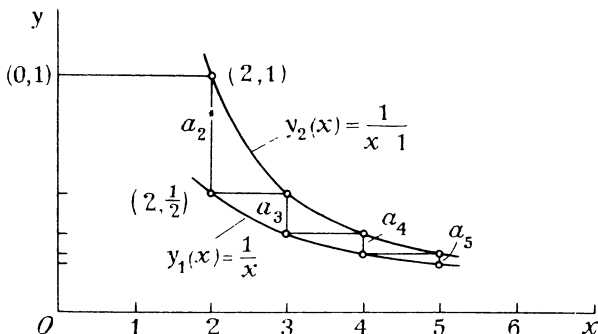


Рис. 71

$x = n - 1$ . Следовательно, проекции отрезков  $a_n$  на ось  $y$  прикладываются «конец к концу», образуя отрезок, идущий от точки  $(0, 1)$  вниз, к началу координат. Так как обе гиперболы асимптотически приближаются к оси  $x$ , то эти проекции полностью заполняют единичный отрезок до начала координат, что дает

$$a_2 + a_3 + \dots = 1,$$

откуда немедленно следует желаемый вывод.



Кроме этого геометрического решения существует следующий элегантный алгебраический подход:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots = \\ &= 2 \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots \right) = \\ &= 2 \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right] = 2. \end{aligned}$$

7) Наша последняя задача состоит в исследовании возможности выбора такой бесконечной последовательности треугольных чисел, чтобы все ее частичные суммы сами были треугольными числами.

**Решение.** Предположим, что мы уже построили часть такой последовательности, причем она обладает дополнительным свойством: сумма ее членов до  $t_k$  равна  $t_{k+1}$ . В этом случае, добавляя к последовательности член  $t_{t_{k+1}-1}$  получим последовательность с тем же свойством. Действительно, так как  $t_n + (n+1) = t_{n+1}$ , то отсюда следует, что для  $n = t_{k+1} - 1$  новая сумма равна  $t_{t_{k+1}-1} + t_{k+1} = t_{t_{k+1}}$ .

Примером такой последовательности является последовательность  $t_3, t_5, t_{20}, t_{230}$ . Ее частичными суммами являются числа  $(t_3), t_6, t_{21}$  и  $t_{231}$ . В действительности можно построить такую последовательность, начиная с любого треугольного числа, кроме второго; данное правило продолжения дает возможность составить бесконечную последовательность с требуемым свойством.

В заключение мы отметим, что также можно выбрать бесконечную последовательность треугольных чисел, обладающую тем свойством, что все ее частичные суммы являются полными квадратами. Такой является, например, последовательность  $t_1, t_2, t_6, t_{18}, \dots, t_{2 \cdot 3^k}, \dots$ , для которой

$$t_1 + t_2 + t_6 + \dots + t_{2 \cdot 3^k} = \left( \frac{3^{k+1} + 1}{2} \right)^2.$$

#### ЗАДАЧА 57. О ПРАВИЛЬНОМ $n$ -УГОЛЬНИКЕ

Обозначим через  $A_1 A_2 \dots A_n$  правильный  $n$ -угольник. Докажите, что независимо от того, где взята точка  $O$  внутри многоугольника, хотя бы один из углов

$A_iOA_j$  отличается от развернутого угла меньше, чем на  $1/n$  часть развернутого угла:

$$\pi - \frac{\pi}{n} \leq \angle A_iOA_j \leq \pi.$$

**Решение.** Обозначим через  $A_1$  ту вершину, для которой расстояние  $OA_i$  минимально, т. е.  $OA_1 \leq OA_i$  для  $i = 2, 3, \dots, n$  (рис. 72). Соединим точку  $A_1$  со всеми

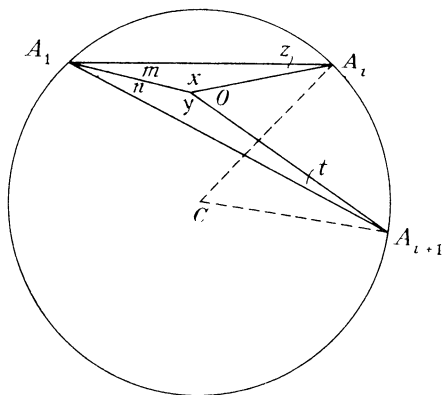


Рис. 72

остальными вершинами. Если точка  $O$  лежит на диагонали  $A_1OA_i$ , то мы непосредственно получаем, что  $\angle A_1OA_i = \pi$ . Предположим тогда, что точка  $O$  лежит между последовательными диагоналями  $A_1A_i$  и  $A_1A_{i+1}$ . Углы в треугольниках  $A_1OA_i$  и  $A_1OA_{i+1}$  обозначим через  $x, y, z, t, m, n$ , как на рисунке. Так как  $A_1O \leq OA_i$ , то  $z \leq m$ . Аналогично из  $A_1O \leq OA_{i+1}$  следует, что  $t \leq n$ . Отсюда  $z + t \leq m + n$ . Но правильный многоугольник вписан в окружность. Обозначим через  $C$  центр окружности, описанной вокруг нашего многоугольника. Тогда дуга  $A_iA_{i+1}$ , соединяющая соседние вершины, видна из центра  $C$  под углом  $2\pi/n$ , а из точки на описанной окружности под углом вдвое меньшим, и мы имеем  $n + m = \pi/n$ . Поэтому  $z + t \leq \pi/n$ .

Однако сумма шести углов двух треугольников равна  $2\pi$ :

$$(m + n) + (z + t) + x + y = 2\pi,$$

$$\frac{\pi}{n} + (z + t) + x + y = 2\pi.$$

Так как  $z + t \leq \pi/n$ , то

$$\frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + x + y \geq 2\pi,$$

или

$$x + y \geq 2 \left( \pi - \frac{\pi}{n} \right).$$

Таким образом,  $x$  и  $y$  не могут быть оба меньше, чем  $\pi - (\pi/n)$  (иначе их сумма была бы меньше указанной), и мы получаем наше утверждение.

### ЗАДАЧА 58. ЧИСЛА ФЕРМА

Числа  $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , называются числами Ферма в честь великого французского математика Пьера Ферма (1601—1665). Последовательность чисел Ферма начинается с чисел

3, 5, 17, 257, 65537, ...

Они удовлетворяют рекуррентному соотношению  $F_n = F_0 F_1 \dots F_{n-1} + 2$ . Это легко устанавливается по индукции. Однако имеется другой более короткий путь.

Заметим, что  $2^{(2^0)} - 1$  есть просто число 1. Тогда

$$1 \cdot F_0 F_1 \dots F_{n-1} = [2^{(2^0)} - 1] [2^{(2^0)} + 1] [2^{(2^1)} + 1] \dots$$

$$\dots [2^{(2^{n-1})} + 1] = [2^{(2^1)} - 1] [2^{(2^1)} + 1] [2^{(2^2)} + 1] \dots$$

$$\dots [2^{(2^{n-1})} + 1] = [2^{(2^2)} - 1] [2^{(2^2)} + 1] \dots [2^{(2^{n-1})} + 1] = \\ = [2^{(2^{n-1})} - 1] [2^{(2^{n-1})} + 1] = 2^{(2^n)} - 1 = F_n - 2.$$

Из этого соотношения совсем просто показать, что каждая пара чисел Ферма взаимно проста. Если  $m < n$ , то

$$F_n = F_0 F_1 \dots F_m \dots F_{n-1} + 2.$$

Следовательно, любой общий делитель чисел  $F_n$  и  $F_m$  должен быть делителем числа 2. Такой общий делитель должен быть равен либо 1, либо 2. Но он не может быть равен 2, так как все числа Ферма нечетны.

Следовательно, он должен быть только 1, откуда получаем, что  $F_m$  и  $F_n$  взаимно просты.

Таким образом, так как каждое  $F_n > 1$ , то каждое число Ферма имеет простой делитель, который не является делителем никакого другого числа Ферма. Посколь-

ку чисел Ферма бесконечно много, мы получили еще одно доказательство бесконечности количества простых чисел. Наш результат также позволяет немедленно решить следующую задачу:

Покажите, что  $2^{(2^n)} - 1$  делится по крайней мере на  $n$  различных простых чисел.

**Решение.**  $2^{(2^n)} - 1 = [2^{(2^{n-1})} + 1] - 2 = F_n - 2 = F_0 F_1 \dots \dots F_{n-1}$ . Так как это — произведение  $n$  различных чисел Ферма, то оно имеет не менее  $n$  различных простых делителей, поскольку числа Ферма взаимно просты.

Довольно легко можно доказать следующие свойства рассматриваемых нами чисел Ферма: среди чисел Ферма нет квадратов, нет кубов и нет треугольных чисел, кроме  $F_0 = 3$ .

1) Число  $F_n$  не может быть квадратом.

Ясно, что

$$(F_n - 1)^2 = [2^{(2^n)}]^2 = 2^{(2^{n+1})} = F_{n+1} - 1.$$

Поэтому  $F_{n+1} = 1 + (F_n - 1)^2$ .

Следовательно, если  $F_n \equiv 2 \pmod{3}$ , то и  $F_{n+1} \equiv 2 \pmod{3}$ . Но  $F_1 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$ , откуда имеем для  $n > 0$ , что все  $F_n \equiv 2 \pmod{3}$ . Однако ни один из квадратов не имеет остаток 2 при делении на 3 (для  $n$ , имеющих остатки 0, 1 или  $-1$  при делении на 3, остатки для числа  $n^2$  равны 0, 1 и 1). Так как  $F_0 = 3$  не является полным квадратом, то из сказанного следует, что ни одно из  $F_n$  не является полным квадратом.

2) Число  $F_n$  не может быть кубом. Легко видеть, что остатки при делении куба на 7 будут 0, 1 или  $-1$ .

$$n \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1,$$

$$n^3 \equiv 0, 1, 1, -1, 1, -1, -1.$$

Для чисел Ферма мы имеем  $F_0 = 3$  и  $F_1 = 5$ . Из соотношения

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$$

мы видим, что

$$\text{если } F_n \equiv 3 \pmod{7}, \text{ то } F_{n+1} \equiv 5 \pmod{7}$$

и

$$\text{если } F_n \equiv 5 \pmod{7}, \text{ то } F_{n+1} \equiv 3 \pmod{7}.$$

Следовательно, значения чисел Ферма по модулю 7 попеременно равны 3 и 5 и никогда не принимают значения 0, 1 или  $-1$ . Таким образом, среди чисел Ферма не существует кубов.

3) Ни одно из  $F_n > 3$  не является треугольным числом.

Треугольное число  $t_n = n(n+1)/2$ , поэтому  $2t_n = n(n+1)$ . Рассмотрим  $n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$ . Если  $n \equiv 0$  и  $2 \pmod{3}$ , то либо  $n$ , либо  $n+1$  делится на 3 и мы получаем, что  $t_4 \equiv 0 \pmod{3}$ . С другой стороны, если  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $2t_n = n(n+1) \equiv 2 \pmod{3}$ . Однако за исключением случая  $t_n \equiv 1$  такого не может быть. Тогда во всех случаях  $t_n \equiv 0$  или  $1 \pmod{3}$ , что, как было показано выше, неверно для чисел Ферма, больших 3.

Утверждение доказано.

#### ЗАДАЧА 59. НЕРАВЕНСТВО ОБРАТНЫХ ВЕЛИЧИН

Для  $n$  натуральных чисел  $> 1$  покажите, что

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n^2} &> \frac{1}{n} + \\ &+ \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} (n^2 - n) = \\ &= \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

#### ЗАДАЧА 60. ЧЕТВЕРТАЯ СТЕПЕНЬ

Докажите, что произведение 8 последовательных натуральных чисел никогда не может быть четвертой степенью целого числа.

**Решение.** Обозначим через  $x$  наименьшее из 8 последовательных натуральных чисел. Тогда их произведение может быть записано так:

$$\begin{aligned} P &= [x(x+7)] [(x+1)(x+6)] [(x+2)(x+5)] \times \\ &\times [(x+3)(x+4)] = (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6) \times \\ &\times (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12). \end{aligned}$$

Обозначая  $x^2 + 7x + 6$  через  $a$ , имеем

$$\begin{aligned} P &= (a - 6)a(a + 4)(a + 6) = \\ &= (a^2 - 36)(a^2 + 4a) = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = \\ &= a^4 + 4a(a^2 - 9a - 36) = a^4 + 4a(a + 3)(a - 12). \end{aligned}$$

Так как  $a = x^2 + 7x + 6$  и  $x \geq 1$ , то мы имеем  $a \geq 14$  и  $(a - 12)$  — положительное число. Следовательно,

$$P > a^4.$$

Однако  $P = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a$ , что указывает на то, что  $P < (a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ . Следовательно,

$$a^4 < P < (a + 1)^4.$$

Таким образом,  $P$  всегда находится между двумя последовательными четвертыми степенями и поэтому никогда само не может быть ею.

#### ЗАДАЧА 61. УПАКОВАННЫЕ КВАДРАТЫ

Поскольку гармонический ряд расходится, множество квадратов со сторонами  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$ , приставленных друг к другу на прямой  $L$  (рис. 73), будет простираться бесконечно далеко по этой прямой.

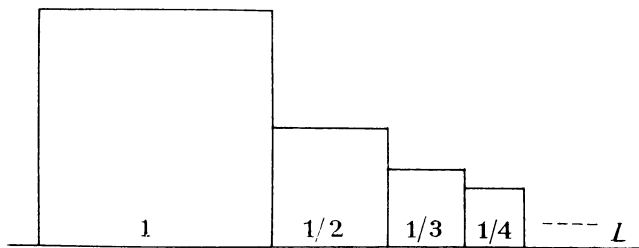


Рис. 73

Докажите, что, однако, можно все квадраты, начиная со второго, уложить в первый квадрат без наложений.

**Решение.** Разделим квадраты на группы вдоль прямой  $L$  так, что количество квадратов в группе равно 2 в степени номера группы:  $(1/2, 1/3), (1/4, 1/5, 1/6, 1/7), \dots$

Сумма длин сторон квадратов в  $n$ -й группе равна

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} < \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ раз}} = 1.$$

Поэтому квадраты  $n$ -й группы укладываются в прямоугольник с высотой  $1/2^n$  и шириной 1. Укладывая эти прямоугольники, содержащие группы квадратов, в стопку

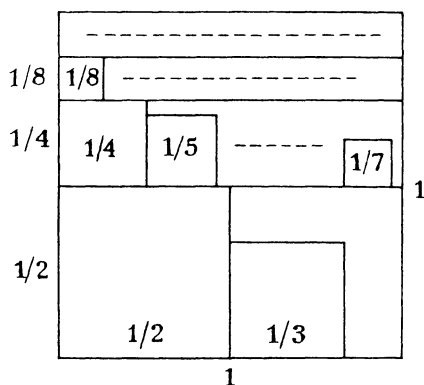


Рис. 74

один на другой, получим прямоугольник с шириной 1 и высотой, равной

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 \quad (\text{рис. 74}).$$

Поскольку стопка располагается внутри единичного квадрата, требуемая упаковка выполнена.

Наш главный интерес будет обращен к следующей задаче:

Рассмотрим множество (конечное или бесконечное) квадратов с общей площадью 1. Докажите, что какими бы ни были их стороны, можно все их уложить в квадрат  $S$  со стороной  $\sqrt{2}$ .

**Решение.** Так как квадрат с площадью  $1/2$  имеет сторону  $\sqrt{2}/2$ , то не существует квадрата со стороной, меньшей, чем  $\sqrt{2}$ , который был бы способен вместить в себя два квадрата площадью  $1/2$  каждый (рис. 75). Следова-

тельно, «универсальный» квадрат, способный вместить описанное множество, должен иметь сторону не меньшую, чем  $\sqrt{2}$ .

Пусть квадраты из данного множества расположены в порядке убывания размеров, и длины их сторон обозначим так:

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq \dots$$

Будем называть квадрат со стороной  $S_i$  просто квадратом  $S_i$ . Пусть стороны вмещающего квадрата  $S$  расположены горизонтально и вертикально. Начнем укладывать

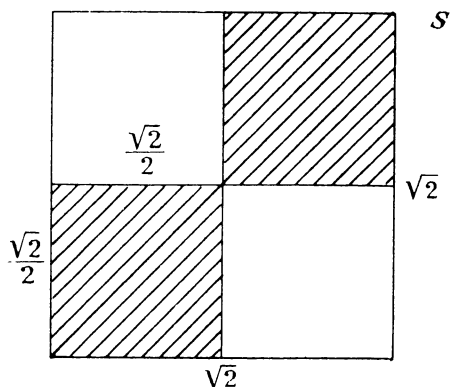


Рис. 75

квадраты  $S_1, S_2, \dots$ , начиная с нижнего левого угла в этом порядке до тех пор, пока очередной квадрат уже не будет помещаться на нижнем основании. Продолжим верхнее ребро первого и одновременно наибольшего квадрата  $S_1$ ; полученный отрезок между сторонами квадрата  $S$  отделит уже упакованные квадраты (рис. 76). Теперь начнем укладывать второй ряд на этом отрезке, начиная вновь слева и в порядке их уменьшения. Уложив столько квадратов, сколько их уместится в этом втором ряду, вновь продолжим верхнее ребро первого из них в этом ряду, которое пройдет над всеми ними. Мы увидим, что, продолжая процесс ряд за рядом таким же образом, мы сможем уложить полностью все множество в квадрат  $S$ .

Предположим, что в  $r$ -м ряду находится  $n_r$  квадратов. Тогда распределение квадратов по рядам будет следующим:



1-й ряд имеет квадраты  $S_1, S_2, \dots, S_{n_1}$ ;

2-й ряд имеет квадраты  $S_{n_1+1}, S_{n_1+2}, \dots, S_{n_1+n_2}$ ;

3-й ряд имеет квадраты

$$S_{n_1+n_2+1}, S_{n_1+n_2+2}, \dots, S_{n_1+n_2+n_3};$$

Мы покажем, что укладка, выполненная таким образом, никогда не выйдет за пределы квадрата  $S$ , откуда будет

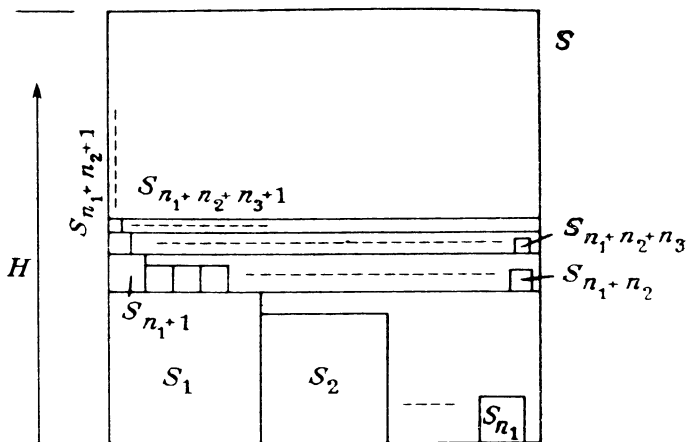


Рис. 76

следовать, что  $S$  может вместить все квадраты. Для этого мы должны доказать, что высота  $H$  стопки рядов, измеряемая вдоль левого ребра квадрата  $S$ , никогда не превосходит  $\sqrt{2}$ :

$$H = S_1 + S_{n_1+1} + S_{n_1+n_2+1} + \dots \leq \sqrt{2}.$$

Так как общая площадь квадратов равна 1, то

$$1 \geq S_1 \geq S_2 \dots,$$

что показывает возможность разместить в квадрате  $S$  первый ряд. Если одного ряда окажется достаточно, то у нас нет проблем. Поэтому рассмотрим общий случай, в котором требуется более, чем один ряд. Конечно, мы должны использовать тот факт, что общая площадь рав-

на 1. Мы начнем тогда с вывода некоторых соотношений, содержащих величины  $S_i^2$ .

Первый квадрат второго ряда расположен там потому, что он слишком велик для установки в конце первого ряда. Поэтому мы имеем

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{n_1} + S_{n_1+1} > \sqrt{2}$$

и

$$S_2 + \dots + S_{n_1+1} > \sqrt{2} - S_1.$$

Умножая это неравенство на  $S_{n_1+1}$ , получаем

$$S_2 S_{n_1+1} + S_3 S_{n_1+1} + \dots + S_{n_1+1} S_{n_1+1} > (\sqrt{2} - S_1) S_{n_1+1}.$$

Так как  $S_2 \geq S_3 \geq S_4 \geq \dots \geq S_{n_1+1}$ , то

$$\begin{aligned} S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_{n_1+1}^2 &= \\ &= S_2 S_2 + S_3 S_3 + \dots + S_{n_1+1} S_{n_1+1} \geq \\ &\geq S_2 S_{n_1+1} + S_3 S_{n_1+1} + \dots + S_{n_1+1} S_{n_1+1} > \\ &> (\sqrt{2} - S_1) S_{n_1+1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\boxed{S_2^2 + S_3^2 + \dots + S_{n_1+1}^2 > (\sqrt{2} - S_1) S_{n_1+1}.}$$

Аналогично для второго ряда мы имеем

$$S_{n_1+1} + S_{n_1+2} + \dots + S_{n_1+n_2} + S_{n_1+n_2+1} > \sqrt{2}$$

и

$$S_{n_1+1} + \dots + S_{n_1+n_2} + S_{n_1+n_2+1} > \sqrt{2} - S_{n_1+1}.$$

Умножая на  $S_{n_1+n_2+1}$  и отмечая, что  $S_{n_1+2} \geq \dots \geq S_{n_1+n_2+1}$ , мы получаем в точности таким же образом, как и для первого ряда,

$$\begin{aligned} S_{n_1+2}^2 + S_{n_1+3}^2 + \dots + S_{n_1+n_2+1}^2 &> \\ &> (\sqrt{2} - S_{n_1+1}) S_{n_1+n_2+1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $S_1 \geq S_{n_1+1}$ , мы отсюда получаем, что

$$\boxed{S_{n_1+2}^2 + S_{n_1+3}^2 + \dots + S_{n_1+n_2+1}^2 > (\sqrt{2} - S_1) S_{n_1+n_2+1}.}$$

Аналогичным способом для третьего ряда мы получаем, что

$$\boxed{S_{n_1+n_2+2}^2 + \dots + S_{n_1+n_2+n_3+1}^2 > (\sqrt{2} - S_1) \cdot S_{n_1+n_2+n_3+1}}.$$

и так далее для всех рядов... Складывая эти неравенства, мы имеем в целом

$$S_2^2 + S_3^2 + \dots > (\sqrt{2} - S_1)(S_{n_1+1} + S_{n_1+n_2+1} + \dots).$$

Так как общая площадь равна 1, а второй сомножитель в правой части есть просто  $H - S_1$ , мы получаем

$$1 - S_1^2 > (\sqrt{2} - S_1)(H - S_1),$$

$$H - S_1 < \frac{1 - S_1^2}{\sqrt{2} - S_1}$$

и

$$H < \frac{1 - S_1^2}{\sqrt{2} - S_1} + S_1.$$

С помощью небольшого преобразования легко покажем, что

$$\sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}S_1)^2}{\sqrt{2} - S_1} = \frac{1 - S_1^2}{\sqrt{2} - S_1} + S_1,$$

отсюда мы видим, что

$$H < \sqrt{2} - \frac{(1 - \sqrt{2}S_1)^2}{\sqrt{2} - S_1} \leq \sqrt{2},$$

что и дает  $H < \sqrt{2}$ .

## ЗАДАЧА 62. КРАСНЫЕ И ЗЕЛЕННЫЕ МЯЧИ

В сумке находятся 6 красных и 8 зеленых мячей. Случайным образом вынимаются 5 из них и помещаются в красную коробку, остальные 9 мячей помещаются в зеленую коробку. Какова вероятность, что количество красных мячей в зеленой коробке плюс количество зеленых мячей в красной коробке не является простым числом?

**Решение.** Обозначим через  $g$  количество зеленых мячей в красной коробке. Так как мячей 6 красных и

8 зеленых, то цвета должны быть распределены по коробкам так, как показано на рис. 77. Поэтому число красных мячей в зеленой коробке плюс количество зеленых мячей в красной коробке равно  $(g+1)+g=2g+1$  — нечетному числу. Число  $g$  не превосходит 5 —



Рис. 77

общего количества мячей в красной коробке. Поэтому  $1 \leq 2g+1 \leq 11$ .

Единственное составное нечетное число в этих пределах есть 9. Однако мы должны также включить и число 1, которое не является ни простым, ни составным. Для того чтобы получить не простое значение, величина  $2g+1$  должна равняться 1 или 9, откуда  $g$  равно 0 или 4. Вероятность получить выборку с  $g=0$  или 4 равна

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\text{количество способов иметь 5 красных})}{\text{общее число выборов}} + \\
 & + \frac{(\text{количество способов иметь 4 зеленых и 1 красный})}{\text{общее число выборов}} = \\
 & = \frac{C_6^5 + C_8^4 C_6^1}{C_{14}^5} = \frac{6 + 420}{2002} = \frac{213}{1001}.
 \end{aligned}$$

### ЗАДАЧА 63. СОСТАВНЫЕ ЧЛЕНЫ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

В задаче 54 мы показали, что в последовательности натуральных чисел существуют сколь угодно длинные интервалы из последовательных чисел, каждое из которых является составным. Здесь мы докажем, что существуют произвольно длинные арифметические последовательности, члены которых попарно взаимно просты и при этом состоят из составных чисел.

**Решение.** Покажем, что для всех натуральных чисел  $n > 1$  существуют  $n$  составных чисел, образующих арифметическую прогрессию и попарно взаимно простых.

Выберем произвольное простое число  $p$ , большее заданного числа  $n$ . Затем образуем еще большее число  $p + (n - 1)n!$  и выберем целое число  $N$  такое, что

$$N > p + (n - 1)n!$$

Тогда мы утверждаем, что  $n$  (видимо, очень больших) чисел

$$N! + p, N! + p + n!, N! + p + 2n!, \dots, N! + p + (n - 1)n!$$

удовлетворяют требуемому условию. Ясно, что они образуют арифметическую прогрессию с разностью  $n!$ . Поскольку мы выбрали  $N > p + (n - 1)n!$ , для  $r = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ , мы имеем  $p + in! < N$ , следовательно,  $(p + in!)$  является делителем числа  $N!$ . Таким образом, число  $N! + p + in!$  для  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  делится, как минимум, на  $p + in!$  (которое больше 1) и поэтому является составным.

Теперь предположим, что пара членов

$$N! + p + in! \text{ и } N! + p + jn!, \quad i > j$$

имеет общий простой делитель  $q$ . Тогда он должен быть делителем их разности  $(i - j)n!$ . Но  $|i - j| < n$ , поэтому каждый простой делитель числа  $(i - j)n!$  тоже  $\leq n$ . Следовательно,  $q \leq n$ . Поэтому  $n!$  делится на  $q$ . Но  $N > n$  и  $q$ , поэтому является делителем и большего числа  $N!$ . Являясь делителем числа  $N! + p + in!$ , число  $q$  должно быть делителем числа  $p$ , но это невозможно, так как числа  $p$  и  $q$  оба простые и  $q \leq n < p$ . Отсюда следует утверждение задачи.

#### ЗАДАЧА 64. ПРИЛОЖЕННЫЕ РАВНОСТОРОННИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Равносторонние треугольники со сторонами  $1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots$  расположены вдоль прямой линии, как показано на рис. 78. Покажите, что все их вершины, не лежащие на этой прямой, лежат на параболе, а их фокальные радиусы являются целыми числами.

**Решение.** Обозначим вершины, указанные в условии, по порядку  $A_1, A_2, \dots$  и расположим координатные оси так, чтобы заданная прямая была осью  $x$ , а ось  $y$  про-

ходила через точку  $A_1$ . Тогда  $A_1$  имеет координаты  $(0, \sqrt{3}/2)$ . Поскольку длина основания  $n$ -го треугольника равна  $2n - 1$ , координата  $x$  вершины  $A_n$  равна

$$x = \frac{1}{2} + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + \frac{1}{2} (2n - 1),$$

откуда легко вывести, что  $x = n(n - 1)$ . Координата  $y$

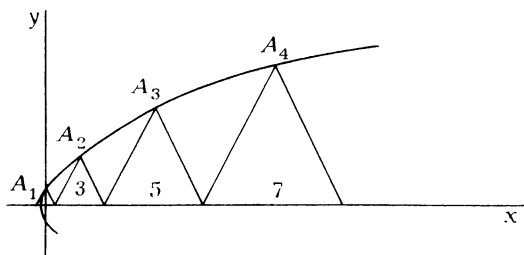


Рис. 78

вершины  $A_n$  есть просто в  $2n - 1$  раз увеличенная координата точки  $A_1$ :

$$y = (2n - 1) \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из этого мы получаем

$$n = \frac{1}{2} \left( \frac{2y}{\sqrt{3}} + 1 \right), \quad \text{что дает} \quad (n - 1) = \frac{1}{2} \left( \frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 \right).$$

Поэтому

$$x = \frac{1}{2} \left( \frac{2y}{\sqrt{3}} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{2y}{\sqrt{3}} - 1 \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{4y^2}{3} - 1 \right),$$

$$12x = 4y^2 - 3 \quad \text{или} \quad 4y^2 = 12x + 3,$$

что является уравнением параболы с осью, расположенной вдоль оси  $x$  и вершиной в точке  $(-1/4, 0)$ .

Параллельный перенос осей в отрицательном направлении на  $1/4$ , задаваемый формулами

$$X = x + \frac{1}{4}, \quad Y = y,$$

приводит уравнение параболы к виду

$$4Y^2 = 12 \left( X - \frac{1}{4} \right) + 3 = 12X, \quad \text{или} \quad Y^2 = 3X.$$

У этой параболы вершина находится в начале координат, а фокус в точке  $(3/4, 0)$ . Следовательно, первоначально парабола имела фокус в точке  $(1/2, 0)$  (в вершине первого треугольника). Заметим, что тогда фокальный радиус точки  $A_n$  равен

$$\sqrt{\left[n(n-1) - \frac{1}{2}\right]^2 + \left[(2n-1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2} = n^2 - n + 1,$$

что является целым числом.

### ЗАДАЧА 65. ТЕСТЫ

Три студента  $A$ ,  $B$ ,  $C$  проходят проверку с помощью серии тестов. Занявший первое место получает  $x$  очков, занявший второе место —  $y$  очков, а занявший третье —  $z$  очков. Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  — натуральные и  $x > y > z$ . Ни в одном из тестов не было дележа мест. Студент  $A$  набрал 20 очков за все тесты, студент  $B$  — 10 очков, студент  $C$  — 9 очков. Студент  $A$  был вторым в тесте по алгебре. Кто был вторым в тесте по геометрии?

**Решение.** Общая сумма набранных очков равна  $20 + 10 + 9 = 39$  очкам. Так как числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  — различные натуральные числа, то в каждом из тестов сумма набранных очков не меньше, чем  $1 + 2 + 3 = 6$ . В то же время число  $x + y + z$  должно быть делителем числа 39 — общей суммы очков. Поскольку в условии задачи упоминаются два различных теста, то  $x + y + z \neq 39$ . Так как у числа 39 делителями являются лишь числа 1, 3 и 13, и делитель  $x + y + z \geq 6$ , то мы должны иметь

$$x + y + z = 13,$$

откуда количество тестов равно 3.

Так как студент  $A$  был вторым в тесте по алгебре, то эта часть в сумме набранных им очков равна  $y$ . Если он имел еще и  $z$  очков, то в лучшем случае он в оставшемся тесте получил бы  $x$  очков, что дало бы общее количество  $x + y + z = 13$ . Но так как  $A$  получил 20 очков, то он не может иметь  $z$  очков за тест. Следовательно, набранные 20 очков выражаются как  $3y$ , или  $x + 2y$  или  $2x + y$ . Так как 20 не делится на 3, то  $3y$  исключается. Если сумма очков равна  $x + 2y$ , то

$$x + 2y = x + y + y = 20,$$

в то же время

$$x + y + z = 13.$$

Вычитая, получаем  $y - z = 7$ . Так как  $x > y > z$ , то  $y \geq 8$  и  $x \geq 9$ . Тогда  $x + y \geq 17$ , что противоречит тому, что  $x + y + z = 13$ . Таким образом, сумма набранных очков студентом  $A$  должна быть равна  $2x + y = 20$ .

Из этого соотношения следует, что  $y$  — четное число. Так как из условия  $y \geq 6$  следует, что  $x \geq 7$  и  $x + y \geq 13$ , не оставляя ничего для  $z$  в соотношении  $x + y + z = 13$ , то  $y$  равно либо 2, либо 4.

Для  $y = 2$  значение  $z$  минимально,  $z = 1$ , откуда  $x = 10$  из соотношения  $x + y + z = 13$ . Однако в этом случае число набранных очков студентом  $A$   $2x + y = 22$ , а не 20. Поэтому  $y = 4$  и из  $2x + y = 20$  получаем, что  $x = 8$ , а из  $x + y + z = 13$  имеем  $z = 1$ .

Существует только один способ распределить эти очки так, чтобы суммы равнялись 20, 10 и 9.

|     | I | II | III | Сумма |
|-----|---|----|-----|-------|
| $A$ | 8 | 8  | 4   | 20    |
| $B$ | 1 | 1  | 8   | 10    |
| $C$ | 4 | 4  | 1   | 9     |

Так как студент  $C$  был вторым всюду, где не был вторым студент  $A$ , то он был вторым в тесте по геометрии.

#### ЗАДАЧА 66. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея утверждает, что произведение длин диагоналей четырехугольника, вписанного в окружность, равно сумме произведений длин пар его противоположных сторон (доказательство можно найти почти в любом учебнике высшей геометрии). Из нее непосредственно следует следующий результат.

Обозначим через  $A_1, A_2, A_3$  вершины равностороннего треугольника, вписанного в окружность. Покажите, что для любой точки  $P$  на окружности сумма длин двух меньших отрезков среди отрезков  $PA_1, PA_2, PA_3$  равняется длине третьего.

**Доказательство.** Обозначим через  $s$  длину стороны данного равностороннего треугольника. В соответствии с рис. 79 по теореме Птолемея имеем

$$s \cdot PA_2 = s \cdot PA_1 + s \cdot PA_3$$

и

$$PA_2 = PA_1 + PA_3.$$



В этой части мы рассмотрим два обобщения этого утверждения.

1) Обозначим через  $A_0, A_1, \dots, A_{3n-1}$  вершины правильного  $3n$ -угольника, вписанного в окружность. Соединим произвольную точку  $P$  на окружности хордами со

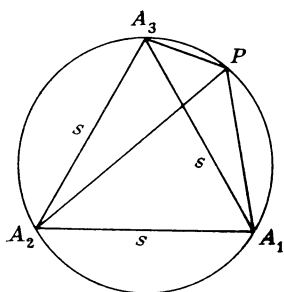


Рис. 79

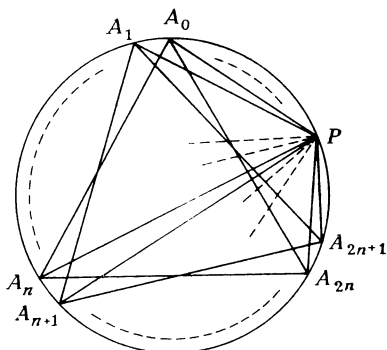


Рис. 80

всеми  $3n$  вершинами (рис. 80). Докажите, что сумма длин  $n$  длиннейших хорд из них равна сумме длин остальных  $2n$  коротких хорд.

**Решение.** Вершины правильного  $3n$ -угольника, взятые по 3, определяют  $n$  правильных треугольников, вписанных в окружность. Среди трех хорд, связанных с каждым из этих треугольников, сумма длин двух кратчайших равна длине третьей. Заметим, что длина каждой из двух коротких хорд  $\leq s$  (длины стороны равностороннего треугольника), в то время, как длина большей хорды  $\geq s$ . Таким образом, взяв длиннейшие хорды из каждой тройки, мы получим  $n$  длиннейших хорд из всего множества, а оставшиеся  $2n$  хорд будут кратчайшими хордами. Из изложенного выше основного результата сумма длин  $n$  длиннейших хорд такая же, как и сумма длин остальных  $2n$  хорд.

2) Предположим, что  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — вершины правильного  $n$ -угольника, где  $n$  нечетно, и  $P$  — произвольная точка на окружности, описанной вокруг этого многоугольника. Введем обозначения так, чтобы точка  $P$  лежала на дуге  $A_nA_1$ . Обозначим длину хорды  $PA_i$  через  $a_i$ . Тогда попеременно прибавляя и вычитая расстояния от точки

$P$  до вершин многоугольника,

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - \dots + a_n,$$

мы обязательно получим значение 0 (рис. 81).

**Решение.** Для  $n=3$  это в точности наш основной результат, описанный выше. В то время как тогда теорема

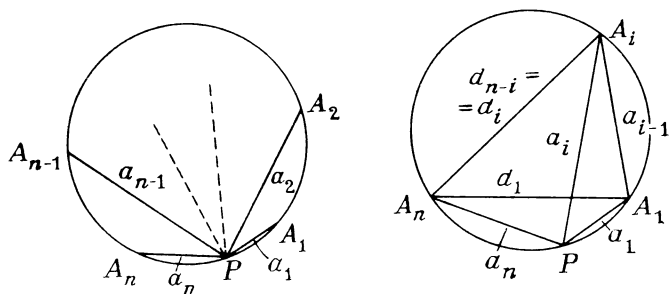


Рис. 81

Птолемея применялась лишь один раз, при доказательстве данного обобщения она будет применена многократно.

Обозначим через  $d_i$  длину диагонали, соединяющей  $i$ -ю вершину многоугольника с  $n-i$ -й. Тогда  $d_i = d_{n-i}$  для всех  $i$ . Заметим, что  $d_1$  есть просто длина стороны многоугольника. Рассмотрим четырехугольник  $A_nPA_1A_i$ . Его стороны и диагонали указаны на рис. 81. По теореме Птолемея имеем

$$d_1 a_i = d_i a_1 + d_{i-1} a_n.$$

Придавая  $i$  значения 2, 3, ...,  $n-1$ , мы получим  $n-2$  соотношений. Добавив тождество  $d_1 a_1 = d_1 a_1$  и его следствие  $d_1 a_n = d_{n-1} a_n$ , получим систему из  $n$  уравнений:

$$d_1 a_1 = d_1 a_1,$$

$$d_1 a_2 = d_2 a_1 + d_1 a_n,$$

$$d_1 a_3 = d_3 a_1 + d_2 a_n,$$

$$d_1 a_4 = d_4 a_1 + d_3 a_n,$$

. . . . .

$$d_1 a_{n-1} = d_{n-1} a_1 + d_{n-2} a_n,$$

$$d_1 a_n = d_{n-1} a_n.$$

Поочередно прибавляя и вычитая из верхнего уравнения остальные, мы получаем

$$d_1(a_1 - a_2 + \dots - \dots + a_n) = \\ = (a_1 - a_n)(d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \dots - \dots + d_{n-2} - d_{n-1})$$

(причем именно  $-d_{n-1}$ , так как  $n-1$  четно). Но  $d_1 = d_{n-1}$ ,  $d_2 = d_{n-2}$  и так далее, что дает  $d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \dots - \dots + d_{n-2} - d_{n-1} = 0$ .

Поэтому

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots - \dots + a_n = 0.$$

### ЗАДАЧА 67. ЕЩЕ ОДНО ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ

Пусть натуральные числа  $y$  и  $z$  удовлетворяют соотношению

$$y^3 + 4y = z^2.$$

Докажите, что  $y$  есть удвоенный квадрат.

**Решение.** Обозначим через  $k^2$  наибольший квадрат, являющийся делителем числа  $y$ , и положим  $y = nk^2$ . Тогда  $n$  не имеет повторяющихся делителей, иначе квадрат, больший чем  $k^2$ , был бы делителем числа  $y$ . Тогда

$$y^3 + 4y = z^2$$

дает

$$y(y^2 + 4) = z^2, \\ nk^2(y^2 + 4) = z^2.$$

Значит,  $z^2$  делится на  $k^2$  и, таким образом,  $z$  делится на  $k$ . Пусть  $z = mk$ . Тогда  $nk^2(y^2 + 4) = m^2k^2$  и  $n(y^2 + 4) = m^2$ , что говорит о том, что  $n(y^2 + 4)$  — полный квадрат. Но число  $n$  не имеет повторяющихся делителей. Поэтому все делители числа  $n$  вновь встречаются в числе  $y^2 + 4$ . Это означает, что  $y^2 + 4$  делится на  $n$ . Так как  $y = nk^2$ , то  $n^2k^4 + 4$  делится на  $n$  и 4 делится на  $n$ . Отсюда  $n = 1, 2$  или  $4$ . Так как  $n$  не имеет повторяющихся делителей, то  $n \neq 4$ . Если  $n$  было бы 1, то из  $n(y^2 + 4) = m^2$  мы получили бы  $y^2 + 4 = m^2$ .

Но не существует двух квадратов, отличающихся на 4. Следовательно,  $n$  должно равняться 2 и для любого

решения уравнения, если оно существует,  $y$  будет удвоенным квадратом.

Отметим, что  $y = 2 (= 2 \cdot 1^2)$ ,  $z = 4$  есть решение. В действительности можно показать, что это единственное решение в натуральных числах.

#### ЗАДАЧА 68. НЕОБЫКНОВЕННОЕ СВОЙСТВО КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Для  $x = 1 + i\sqrt[3]{3}$ ,  $y = 1 - i\sqrt[3]{3}$  и  $z = 2$ , где  $i = \sqrt{-1}$  выполняются следующие соотношения:

$$x^5 + y^5 = z^5, \quad x^7 + y^7 = z^7, \quad x^{11} + y^{11} = z^{11}.$$

Докажите удивительное обобщение этого факта, что при указанном выборе чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равенство

$$x^p + y^p = z^p$$

справедливо для всех простых чисел  $p > 3$ .

**Решение.** Легко вычислить, что и  $x^6$ , и  $y^6$  равны  $2^6$ . Так как  $6n$ ,  $6n + 2$ ,  $6n + 3$  и  $6n + 4$  никогда не бывают простыми, то простое число  $p > 3$  должно иметь вид  $6n + 1$  или  $6n - 1$ .

Для  $p = 6n + 1$  имеем

$$\begin{aligned} x^p + y^p &= x^{6n+1} + y^{6n+1} = (x^6)^n x + (y^6)^n y = \\ &= 2^{6n} \cdot x + 2^{6n} \cdot y = 2^{6n} (x + y). \end{aligned}$$

Но  $x + y = 2$ , и мы получаем

$$x^p + y^p = 2^{6n} \cdot 2 = 2^{6n+1} = z^p.$$

Заметив, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} = \frac{1}{z},$$

мы можем легко показать, что равенство выполняется и для  $p = 6n - 1$ .

#### ЗАДАЧА 69. ЦЕПОЧКА ОКРУЖНОСТЕЙ

Окружность  $C_0$  радиуса 1 км касается прямой  $L$  в точке  $Z$  (рис. 82). Окружность  $C_1$  радиуса 1 мм касается и окружности  $C_0$ , и прямой  $L$  справа от  $C_0$ .

Семейство окружностей  $C_i$  строится дальше наружу вправо так, что каждая из окружностей  $C_i$  касается окружности  $C_0$ , прямой  $L$  и предыдущей окружности  $C_{i-1}$ .

В конце концов элементы этого семейства станут настолько большими, что увеличивать его далее будет невозможно. Сколько окружностей может быть построено до тех пор, пока это не случилось?

**Решение.** Расстояния, будучи выраженными в миллиметрах, дадут для радиуса окружности  $C_1$   $r_1 = 1$ , а для

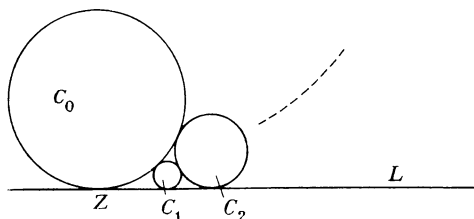


Рис. 82

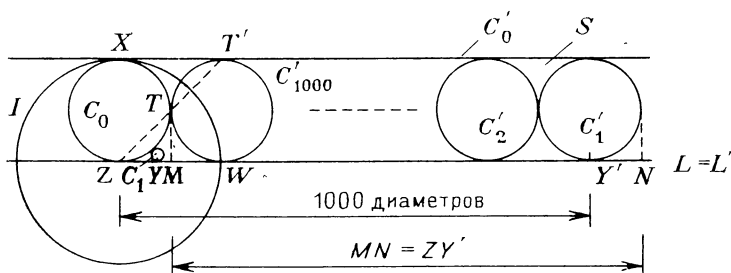
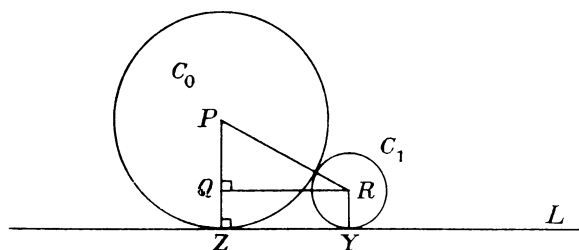


Рис. 83

$C_0$   $r_0 = 10^6$ . Совершим инверсию этой цепочки окружностей относительно окружности  $I$  с центром в точке  $Z$  и радиуса  $2 \cdot 10^6$  (рис. 83). (Описание инверсии см. в книге Коксетера и Грейтцера «Новые встречи с геометрией» М.: Наука, 1978.) Так как прямая  $L$  проходит через центр инверсии, то при этом она переходит сама в себя. Пусть окружность  $I$  касается окружности  $C_0$ , скажем, в точке  $X$ . Так как окружность  $C_0$  проходит через  $Z$ , то она переходит в прямую  $C'_0$ , причем касающуюся одновременно окружностей  $I$  и  $C_0$  (в точке  $X$ ). Тогда  $L$  и  $C'_0$  касаются окружности  $C_0$  в диаметрально противоположных точках. Поэтому они параллельны и определяют полосу  $S$  на плоскости.

Так как каждая из окружностей  $C_i$  касается  $C_0$  и  $L$ , то ее образ  $C'_i$  касается сторон полосы  $S$ . Так как ни одна из этих окружностей, за исключением  $C_0$ , не проходит через точку  $Z$ , то все образы  $C'_i$  являются окружностями. Следовательно, образы попарно касающихся окружностей в цепочке составляют ряд равных касающихся



$$PR = 10^6 + 1, PQ = 10^6 - 1, \text{ откуда следует, что } ZY = QR = \sqrt{(10^6 + 1)^2 - (10^6 - 1)^2} = \sqrt{4 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^3$$

Рис. 84

окружностей, ограниченных сторонами полосы  $S$ . Все образы окружностей имеют тот же размер, что и окружность  $C_0$ . Так как окружность  $C_1$  находится внутри круга инверсии  $I$  вблизи от центра  $Z$ , то ее образ находится внутри полосы вне этого круга, вдали от круга  $I$ . Так как  $i$  пробегает значения  $1, 2, 3, \dots$ , то ряд образов окружностей продвигается в обратном направлении вдоль полосы  $S$ , а именно по направлению к окружности  $C_0$ .

Предположим, что окружности  $C_1$  и  $C'_1$  касаются прямой  $L$  в точках  $Y$  и  $Y'$  соответственно. Используя теорему Пифагора, легко можно найти, что  $ZY = 2 \cdot 10^3$  (рис. 84). Тогда из соотношения инверсии получаем

$$\begin{aligned} ZY \cdot ZY' &= (2 \cdot 10^6)^2, \\ 2 \cdot 10^3 (ZY') &= 4 \cdot 10^{12}, \\ ZY' &= 2 \cdot 10^9 = 1000 \cdot (2 \cdot 10^6), \end{aligned}$$

что равно 1000 диаметров окружности  $C'_i$ .

Следовательно, между окружностями  $C'_1$  и  $C_0$  размещается ровно 1000 образов окружностей. Это означает, что окружность  $C'_{1000}$  в точности касается окружности  $C_0$ .

Теперь нетрудно увидеть, что окружность  $C'_{1000}$  является образом самой себя при инверсии относительно ок-

ружности  $I$ . Так как радиус окружности  $I$  вдвое больше как радиуса окружности  $C_0$ , так и радиуса окружности  $C'_{1000}$ , которые касаются в точке  $T$ , то образ  $T'$  этой точки, лежащий на прямой  $C'_0$ , будет находиться на прямой, проходящей через точки  $T$  и  $Z$ , и расположен в точности над точкой  $W$  касания окружности  $C'_{1000}$  с прямой  $L$ , являющейся также точкой пересечения окружности  $I$  с прямой  $L$ . Поэтому инверсия переводит три точки  $T$ ,  $T'$  и  $W$  окружности  $C_{1000}$  соответственно в точки  $T'$ ,  $T$  и  $W$ , откуда следует, что окружность  $C'_{1000}$  переходит сама в себя. В результате получаем, что окружность  $C_{1000}$ , совпадающая с окружностью  $C'_{1000}$ , имеет тот же диаметр, что и окружность  $C_0$ . Поэтому при построении цепочки окружностей они будут увеличиваться в размерах до тех пор, пока одна из них, а именно  $C_{1000}$ , не станет равной первоначальной окружности  $C_0$ . Поэтому невозможно продолжить цепочку далее и окружность  $C_{1000}$  будет в ней последней. (Отметим, что наше семейство окружностей является частью штейнеровской цепочки окружностей относительно  $C_0$  и  $L$ , если  $L$  рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса.)

#### ЗАДАЧА 70. ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ЦИФРЫ В КОНЦЕ КВАДРАТА

Определите количество цифр в длиннейшей последовательности ненулевых одинаковых цифр, которой может оканчиваться полный квадрат, и найдите наименьший квадрат, который оканчивается на такую максимальную последовательность.

**Решение.** Так как для каждого натурального числа  $n$

$$n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \text{ или } 5 \pmod{10},$$

то

$$n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 6 \text{ или } 5 \pmod{10}.$$

Поэтому никакой квадрат не оканчивается на 2, 3, 7 или 8. Таким образом, мы будем иметь дело лишь с цифрами 1, 4, 5, 6 и 9. Далее, число  $n$  может быть либо четным, либо нечетным. Следовательно,

$$n^2 = (2a)^2 = 4a^2 \text{ или } n^2 = (2a+1)^2 = 4(a^2+a)+1,$$

откуда  $n^2 \equiv 0$  или  $1 \pmod{4}$ . Так как число

$$ab \dots cxy = ab \dots c00 + xy \equiv xy \pmod{4},$$

то мы видим, что квадрат не может оканчиваться на 11, 55, 66 или 99, поскольку каждое из них  $\equiv 2$  или  $3 \pmod{4}$ . Таким образом, единственно возможной повторяющейся ненулевой цифрой на конце квадрата может быть только четверка.

Если квадрат оканчивается не менее, чем на четыре четверки, то  $n = ab \dots c4444 = ab \dots c0000 + 4400 + 44$ . Так как числа 10 000 и 4400 делятся на 16, то мы получаем, что  $n^2 \equiv 12 \pmod{16}$ . Но по модулю 16  $n \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7$  или 8 и  $n^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 0, 9, 4, 1$  или 0, но никогда не с 12.

Следовательно, квадрат может иметь на конце не более трех повторяющихся ненулевых цифр. Так как число 444 не является полным квадратом, то, обнаружив, что

$$1444 = 38^2,$$

мы показали, что возможны квадраты, оканчивающиеся на три четверки, и указали наименьший из таких квадратов.

#### ЗАДАЧА 71. БИСЕКТРИСА УГЛА

В треугольнике  $ABC$   $AC = BC$ . Проведена окружность  $K$  с центром в точке  $C$  и радиусом, меньшим

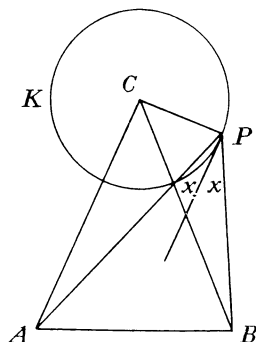


Рис. 85

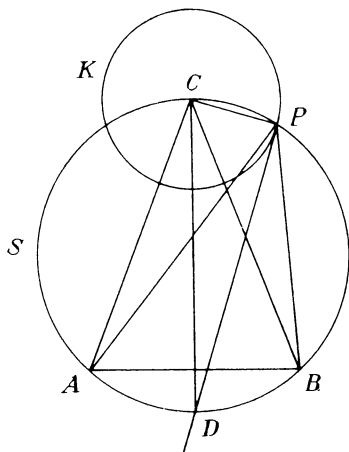


Рис. 86

$AC$  (рис. 85). Найдите точку  $P$  на окружности  $K$ , для которой касательная делит пополам угол  $APB$ .



**Решение.** Сюрприз здесь состоит в том, что для всех окружностей  $K$  точка  $P$  лежит на окружности  $S$ , описанной вокруг треугольника  $ABC$  (рис. 86). Пусть  $CD$  — диаметр окружности  $S$ , проходящий через точку  $C$ . Тогда  $\angle CPD$  — прямой, откуда следует, что  $PD$  — касается окружности  $K$  в точке  $P$ , но так как  $AC = BC$ , то  $CD$  — биссектриса угла  $C$ , и поэтому точка  $D$  делит пополам дугу  $AB$ . Таким образом,  $\angle APD = \angle DPB$ .

## ЗАДАЧА 72. СИСТЕМА НЕРАВЕНСТВ

Каково наибольшее целое число  $n$ , для которого существует число  $x$ , одновременно удовлетворяющее неравенствам

$$k < x^k < k + 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n),$$

$$1 < x < 2,$$

$$2 < x^2 < 3,$$

$$3 < x^3 < 4,$$

$$4 < x^4 < 5,$$

$$\dots$$

**Решение.** Наибольшее возможное  $n$  равно 4. Если некоторое число  $x$  удовлетворяет не менее чем первым пяти из этих неравенств, то из третьего имеем  $3 < x^3$ , а из пятого  $x^5 < 6$ . Отсюда следует

$$3^5 < x^{15} < 6^3,$$

это означает, что  $243 < 216$ . Поэтому  $n \leq 4$ .

Так как  $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ , то любое  $x$  между  $\sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt[4]{4}$  удовлетворяет первым четырем неравенствам.

## ЗАДАЧА 73. НЕОЖИДАННОЕ СВОЙСТВО ПРАВИЛЬНОГО 26-УГОЛЬНИКА

Правильный 26-угольник  $A_1A_2 \dots A_{26}$  вписан в окружность с центром в точке  $O$  (рис. 87). Пусть  $O_1$  — точка, симметричная точке  $O$  относительно хорды  $A_{25}A_1$ , а  $O_2$  — точка, симметричная точке  $O$  относительно хорды  $A_2A_6$ . Докажите замечательное свойство, что длина отрезка  $O_1O_2$  равна стороне правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

**Решение.** Возьмем в качестве единицы длины радиус окружности. Заметим, что равносторонний треугольник, вписанный в окружность, получается путем соединения через одну из вершин вписанного правильного шестиугольника, который получается, если двигаться вокруг

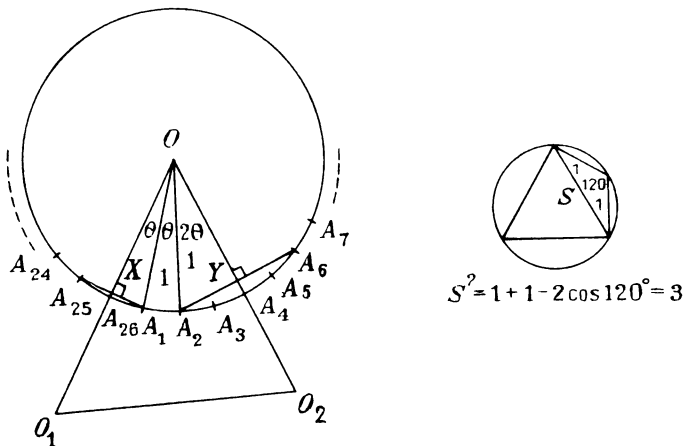


Рис. 87

окружности с шагом, равным радиусу описанной окружности. Из теоремы косинусов находим, что сторона правильного треугольника в единичном круге равна  $\sqrt{3}$ . Затем мы покажем, что  $O_1O_2 = \sqrt{3}$ .

Поскольку отрезок  $OO_1$  является срединным перпендикуляром к отрезку  $A_{25}A_1$ , он проходит через вершину  $A_{26}$ . Аналогично отрезок  $OO_2$  проходит через вершину  $A_4$ . Обозначим угол, под которым из центра видна сторона 26-угольника, через  $\theta$ . Тогда  $\theta = 2\pi/26 = \pi/13$ . Поэтому  $\angle A_1OA_2 = \theta$  и, обозначив середины отрезков  $A_{25}A_1$  и  $A_2A_6$  через  $X$  и  $Y$  соответственно, мы получим, что  $\angle A_1OX = \theta$  и  $\angle A_2OY = 2\theta$ . Так как радиусы  $A_1O$  и  $A_2O$  равны 1, то  $OX = \cos \theta$ ,  $OY = \cos 2\theta$ , а вдвое большие отрезки соответственно равны  $OO_1 = 2 \cos \theta$ ,  $OO_2 = 2 \cos 2\theta$ .

Из теоремы косинусов, примененной к треугольнику  $OO_1O_2$ , получаем

$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= OO_1^2 + OO_2^2 - 2(OO_1)(OO_2) \cos 4\theta = \\ &= 4 \cos^2 \theta + 4 \cos^2 2\theta - 2(2 \cos \theta)(2 \cos 2\theta)(\cos 4\theta). \end{aligned}$$

Окончательные рассуждения проведем лишь с использованием известных тригонометрических формул. Из того, что  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ , получаем  $4 \cos^2 x = 2 + 2 \cos 2x$ , и тогда

$$\begin{aligned} O_1 O_2^2 &= (2 + 2 \cos 2\theta) + (2 + 2 \cos 4\theta) - 8 \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta = \\ &= 4 + 2 \cos 2\theta + 2 \cos 4\theta - 8 \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Умножим все на  $\sin \theta$ :

$$\begin{aligned} O_1 O_2^2 \cdot \sin \theta &= 4 \sin \theta + 2 \sin \theta \cdot \cos 2\theta + 2 \sin \theta \cdot \cos 4\theta - \\ &- 8 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} 8 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta &= 4 \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta \cos 4\theta = \\ &= 2 \sin 4\theta \cdot \cos 4\theta = \sin 8\theta. \end{aligned}$$

Для любого натурального числа  $n$

$$2 \sin \theta \cdot \cos n\theta = \sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} O_1 O_2^2 \sin \theta &= 4 \sin \theta + (\sin 3\theta - \sin \theta) + \\ &+ (\sin 5\theta - \sin 3\theta) - \sin 8\theta. \end{aligned}$$

Однако  $\theta = \pi/13$ , откуда  $13\theta = \pi$  или  $5\theta + 8\theta = \pi$ , что дает нам соотношение  $\sin 5\theta = \sin 8\theta$ . Поэтому

$$O_1 O_2^2 \sin \theta = 3 \sin \theta \text{ и } O_1 O_2 = \sqrt[3]{3}.$$

#### ЗАДАЧА 74. ЕЩЕ РАЗ О ПОЛНЫХ КВАДРАТАХ

Докажите, что выражение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

будет полным квадратом только при следующих целых значениях  $x$ :  $-1, 0, 3$ .

**Решение.** (Эта задача оставалась нерешенной в течение 7 лет с момента ее опубликования до тех пор, пока профессор Беннет не предпринял прямую атаку, основанную на известном методе «дополнения до полного квадрата».)

Мы ищем целые решения уравнения

$$y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

Попробуем выразить  $y$  через  $x$ . Мы видим, что

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4}.$$

Это дает нам два из требуемых членов. Выражение  $x^2 + \frac{x}{2} + 1$  совсем близко к нужному. Мы имеем

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1 = y^2 + \frac{5}{4}x^2,$$

что всегда больше требуемого, кроме случая  $x = 0$ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 &= \\ &= x^2 + x^3 + \frac{2\sqrt{5}-1}{4}x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}x + \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \\ &= y^2 - \frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 < y^2, \end{aligned}$$

поскольку число  $(5-2\sqrt{5})/4$  положительно и  $x \neq -(3+\sqrt{5})/2$ , являющемуся иррациональным числом. Таким образом, мы имеем оценки величины  $y$ , одна из которых больше, а другая меньше его. Величина  $y$  тогда должна лежать в пределах, определенных этими приближениями:

$$x^2 + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} < |y| \leq x^2 + \frac{x}{2} + 1,$$

т. е.

$$x^2 + \frac{x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{2} < |y| \leq x^2 + \frac{x+2}{2}.$$

Для некоторого числа  $k$  в пределах  $(\sqrt{5}-1)/2 < k \leq 2$  величина  $y$  должна в точности совпадать с

$$|y| = x^2 + \frac{x+k}{2}.$$

Но  $x$  и  $y$  — целые числа, поэтому  $(x+k)/2$  должно быть целым числом, откуда число  $x+k$  — четное целое, тогда  $k$  также должно быть целым. Но в указанных пределах для  $k$  находятся лишь два целых числа 1 и 2 (так как число  $(\sqrt{5}-1)/2$  лежит между 0 и 1). Поэтому  $k=1$  или 2.

Для  $k=2$  мы имеем

$$|y| = x^2 + \frac{x}{2} + 1$$

и из равенства

$$\left(x^2 + \frac{x}{2} + 1\right)^2 = y^2 + \frac{5}{4}x^2,$$

полученного ранее, выводим  $y^2 = y^2 + \frac{5}{4}x^2$ , откуда  $x = 0$ .

Для  $k = 1$  имеем

$$|y| = x^2 + \frac{x+1}{2}.$$

Однако легко удостовериться, что

$$y^2 = \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

Тогда для  $k = 1$  имеем

$$y^2 = y^2 - \frac{(x-3)(x+1)}{4}.$$

Отсюда следует  $(x-3)(x+1) = 0$ , что дает  $x = 3$  или  $-1$ . Тем самым установлена справедливость утверждения, что целые значения для  $y$  получаются лишь при  $x = -1$ ,  $0$  или  $3$ .

Долгое время я считал, что это прекрасное доказательство является значительным достижением, поэтому я был приятно удивлен, найдя похожее, но гораздо более элегантное решение в «Mathematical Digest» — скромной публикации для школьников, живущих в окрестностях Кейптауна (ЮАР), размноженной на mimeографе. Его издателем является проф. Джон Уэбб из Кейптаунского университета. В июльском номере за 1973 г. было помещено следующее решение.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 &= \\ &= x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - \left(\frac{3x^2}{4} + x + 1\right) = \\ &= y^2 - \frac{1}{4}(3x^2 + 4x + 4).\end{aligned}$$

Поскольку дискриминант трехчлена  $3x^2 + 4x + 4$  (а именно  $4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = -32$ ) отрицателен, значение трехчлена  $3x^2 + 4x + 4$  положительно для всех вещественных чисел  $x$ .

Поэтому

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 < y^2,$$

откуда

$$\left|x^2 + \frac{x}{2}\right| < |y|.$$

Так как  $x^2 + x/2 = x(x + 1/2)$  неотрицательно при всех целых  $x$ , мы имеем

$$\left|x^2 + \frac{x}{2}\right| = x^2 + \frac{x}{2},$$

откуда

$$x^2 + \frac{x}{2} < |y|.$$

Теперь, если  $x$  — четное целое число, то  $x^2 + (x/2)$  — целое число и  $|y|$  должно его превосходить не менее чем на 1; если  $x$  нечетно, то  $x^2 + (x/2)$  лежит между двумя последовательными целыми числами и  $|y|$  может превышать это выражение не более чем на  $1/2$ . В любом случае мы имеем

$$|y| \geq \left(x^2 + \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2},$$

откуда

$$\begin{aligned} y^2 &\geq x^4 + x^3 + \frac{5x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \\ &+ \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = y^2 + \frac{1}{4}(x^2 - 2x - 3). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &\leq 0, \\ (x + 1)(x - 3) &\leq 0, \end{aligned}$$

что ограничивает  $x$ , позволяя принимать лишь следующие значения:  $-1, 0, 1, 2, 3$ . Решение заканчивается отбрасыванием чисел  $x = 1$  и  $x = 2$  с помощью прямой проверки этих значений.

#### ЗАДАЧА 75. НЕОБЫКНОВЕННЫЙ МНОГОЧЛЕН

Если  $P(x)$  — такой многочлен степени  $n$ , что  $P(x) = 2^*$  для  $x = 1, 2, \dots, n + 1$ , то чему равняется  $P(n + 2)$ ?

**Решение.** Из разложения бинома получаем, что

$$2^m = (1 + 1)^m = C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^n \text{ для } m = \\ = 1, 2, \dots, n + 1, \dots$$

Зафиксируем некоторое произвольное натуральное число  $n$  и рассмотрим многочлен

$$f(x) = 2(C_{x-1}^0 + C_{x-1}^1 + \dots + C_{x-1}^n).$$

Слагаемое, имеющее наибольшую степень относительно  $x$  в  $f(x)$ , есть

$$2C_{x-1}^n = 2 \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}.$$

Поэтому  $f(x)$  является многочленом степени  $n$ . Для  $x = 1, 2, \dots, n + 1$  имеем

$$f(x) = 2[(1 + 1)^{x-1}] = 2^x \text{ (для } m < n \text{ } C_m^n = 0).$$

Таким образом,  $f(x)$  и искомый многочлен  $P(x)$  оба имеют степень  $n$  и совпадают в  $n + 1$  точке  $x = 1, 2, \dots, n + 1$ . Поэтому  $f(x)$  совпадает с  $P(x)$ , и мы имеем

$$P(n + 2) = 2[C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+1}^n] = \\ = 2[2^{n+1} - C_{n+1}^{n+1}] = 2^{n+2} - 2.$$

Аналогично получаем

$$P(n + 3) = 2[2^{n+2} - C_{n+2}^{n+1} - C_{n+2}^{n+2}] = \\ = 2[2^{n+2} - (n + 2) - 1] = 2^{n+3} - 2n - 6.$$

## ЗАДАЧА 76. ЦЕНТРОИДЫ НА ОКРУЖНОСТИ

Пусть  $A, B, C, D$  — четыре точки на окружности, а  $G_A, G_B, G_C, G_D$  — центроиды (центры масс) треугольников  $BCD, ACD, ABD, ABC$  соответственно (рис. 88). Докажите, что точки  $G_A, G_B, G_C, G_D$  также лежат на одной окружности.

**Решение.** Расположим в каждой из точек  $A, B, C, D$  единичные массы и обозначим через  $G$  центр масс этой системы. Единичные массы в точках  $A, B$  и  $C$  эквивалентны массе 3 в точке  $G_D$ . Поэтому вся система эквивалентна массе 3 в точке  $G_D$  и массе 1 в точке  $D$ . Следовательно, точка  $G$  должна лежать на отрезке  $G_D D$  и делить его в отношении 1 : 3 (рис. 89).

Аналогично, точка  $G$  должна лежать на каждом из отрезков  $G_A A$ ,  $G_B B$  и  $G_C C$  и делить каждый из них в отношении  $1:3$ . Следовательно, гомотетия с коэффициентом  $(-1/3)$  и центром в точке  $G$  переводит точки  $A, B,$

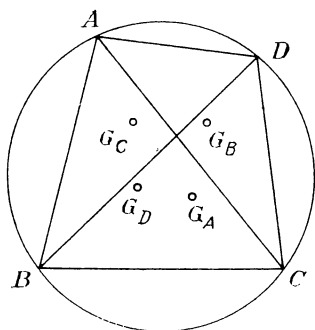


Рис. 88

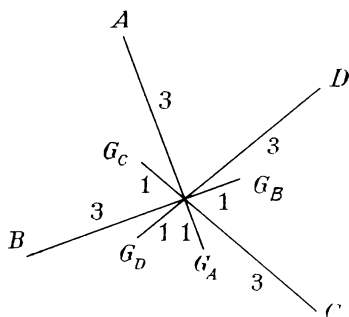


Рис. 89

$C, D$  соответственно в точки  $G_A, G_B, G_C, G_D$ . Но при гомотетии окружность переходит в окружность, поэтому из того, что точки  $A, B, C, D$  лежат на одной окружности, то же самое верно и для точек  $G_A, G_B, G_C$  и  $G_D$ .

Отметим, что  $n$  вершин любого многоугольника аналогично определяют многоугольник, вершины которого являются центрами масс множеств из  $(n-1)$  вершин. Аналогичное условие выполняется и в трехмерном пространстве.

«Механический» подход часто обеспечивает легкое решение геометрических задач значительной трудности. С его помощью довольно просто показать существование в треугольнике таких точек, как центр масс, центр вписанной окружности, точек Жергона и Нагеля, а также доказать такие теоремы, как теоремы Чевы и Менелая.

Рассмотрим следующую задачу, которая предлагалась на конкурсе по решению задач элементарной математики в Румынии.

Пусть  $A, B, C$  — заданные точки на плоскости, а  $A', B', C'$  — переменные точки на другой плоскости  $\pi$ . Середины отрезков  $AA', BB', CC'$  обозначим через  $L, M, N$ . Каково геометрическое место  $S$  центроидов треугольников  $LMN$ ?

Поместим по единичной массе в каждую из точек  $A, B, C, A', B', C'$ . Массы в точках  $A$  и  $A'$  эквивалентны



массе 2 в середине  $L$  отрезка между ними. Аналогично рассуждая, получим, что вся система масс эквивалентна системе из трех масс 2 в точках  $L$ ,  $M$  и  $N$ . Следовательно, центроид  $S$  треугольника  $LMN$  является центром масс всей системы.

Теперь заметим, что массы в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  эквивалентны массе 3 в точке  $G$  — центроиде треугольника

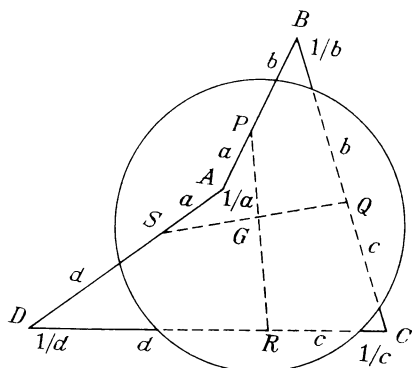


Рис. 90

$ABC$ . Аналогично массы в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  эквивалентны массе 3 в точке  $G'$  — центроиде треугольника  $A'B'C'$ . В результате центр масс  $S$  должен делить пополам отрезок  $GG'$ . Поскольку точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — произвольные точки на плоскости  $\pi$ , их центроид также может быть произвольной точкой этой плоскости. Точка  $G$  фиксирована на своей плоскости. Поэтому геометрическое место точек  $S$  есть плоскость, которая получается из плоскости  $\pi$  в результате гомотетии с центром в точке  $G$  и коэффициентом  $1/2$ .

Заключительная задача была предложена Мюрреем Клампином из университета в Ватерлоо (Канада).

Докажите, что точки касания  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  пространственного четырехугольника, описанного вокруг данной сферы, лежат на одной окружности.

Все касательные к сфере из одной точки имеют одинаковую длину. Пусть  $AP = AS = a$ ,  $BP = BQ = b$ ,  $CQ = CR = c$ ,  $DR = DS = d$  (рис. 90). Расположим в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  соответственно массы  $1/a$ ,  $1/b$ ,  $1/c$ ,  $1/d$ . Моменты масс в точках  $A$  и  $B$  относительно точки  $P$  равны и противоположны. Поэтому они эквивалентны массе  $(1/a) + (1/b)$  в точке  $P$ . Аналогично, массы в точках  $C$

и  $D$  эквивалентны некоторой массе в точке  $R$ . Следовательно, центр масс  $G$  всей системы масс должен располагаться где-то на отрезке  $PR$ . Аналогично, рассматривая пары масс в точках  $B$  и  $C$ , а также в точках  $A$  и  $D$ , мы видим, что точка  $G$  также должна лежать на отрезке  $QS$ . А это значит, что отрезки  $PR$  и  $QS$  должны пересекаться (в точке  $G$ ).

Следовательно, они определяют некоторую плоскость  $\pi$ . Ясно, что точки касания  $P, Q, R, S$  принадлежат окружности, получающейся при пересечении сферы плоскостью  $\pi$ .

### ЗАДАЧА 77. ЛЕГКО НАХОДИМЫЙ ОСТАТОК

Чему равен остаток при делении многочлена  $x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$  на  $x^3 - x$ ?

**Решение.** Имеем

$$\begin{aligned} \frac{x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x}{x^3 - x} &= \frac{x^{80} + x^{48} + x^{24} + x^8 + 1}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{(x^{80} - 1) + (x^{48} - 1) + (x^{24} - 1) + (x^8 - 1) + 5}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Так как  $x^{2n} - 1$  делится на  $x^2 - 1$ , то кажется, что остаток есть число 5. Вспоминая, что числитель и знаменатель сокращались на  $x$ , получаем, что остаток равен  $5x$ , так как

$$\frac{5}{x^2 - 1} = \frac{5x}{x^3 - x}.$$

### ЗАДАЧА 78. ЛЮБОПЫТНОЕ СВОЙСТВО ЧИСЛА 3

Докажите, что если  $m$  и  $n$  — два натуральных числа, то одно из чисел  $\sqrt[n]{m}$ ,  $\sqrt[m]{n}$  не больше, чем  $\sqrt[3]{3}$ .

**Решение.** Предположим, что  $m = n$ . В этом случае мы хотим показать, что  $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ , т. е.  $n^{1/n} \leq 3^{1/3}$ , или  $n^3 \leq 3^n$ . Это, как мы сейчас увидим, легко устанавливается по индукции. Ясно, что утверждение верно для  $n = 1, 2$  и  $3$ . Предположим, что мы имеем  $n^3 \leq 3^n$  для не-

которого  $n \geq 3$ . Тогда

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \geq$$

$$\geq 3 \cdot n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2-3)n > \\ > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

Таким образом, утверждение верно для  $m = n$ .

Казалось бы, мы рассмотрели только частный случай, а общий случай это  $m \neq n$ , однако как раз все наоборот.

Так как, если скажем,  $m < n$ , то  $\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ .

Заметим, что равенство имеет место в единственном случае  $m = n = 3$ .

### ЗАДАЧА 79. КВАДРАТ ВНУТРИ КВАДРАТА

В квадрате проведены отрезки, соединяющие его вершины с серединами сторон, как показано на рис. 91. Докажите неожиданный результат, что площадь меньшего квадрата равна  $1/5$  площади данного квадрата.

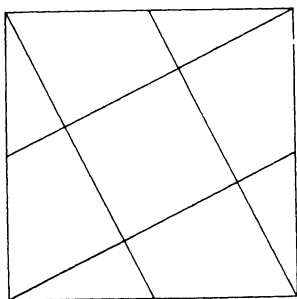


Рис. 91

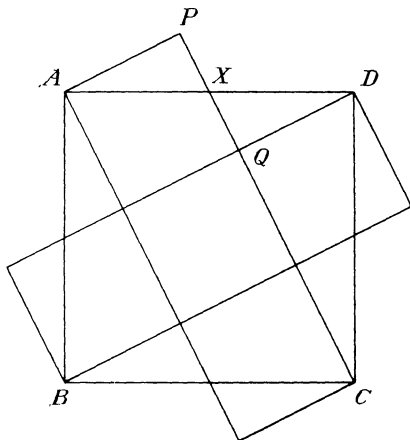


Рис. 92

**Решение.** Очевидно, что в «кресте», содержащем 5 равных квадратов, как показано на рис. 92, прямая  $AD$  пересекает отрезок  $PQ$  в его середине — точке  $X$  и что треугольники  $APX$  и  $XQD$  равны. Теперьотрежем треугольник  $APX$  и положим его на треугольник  $XQD$ . Выполнив такую перестановку с каждой из точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , нетрудно видеть, что мы получим квадрат.

При этом площадь не изменилась, откуда следует, что центральный квадрат имеет площадь равную  $1/5$  площади данного квадрата.

### ЗАДАЧА 80. ВСЕГДА КВАДРАТ

Четное количество единиц, записанных друг за другом, образует число  $A$ , а вдвое меньшее количество четверок — число  $B$ . Докажите, что число  $A + B + 1$  всегда является полным квадратом.

**Решение.** Предположим, что в числе  $A$  содержится  $2m$  цифр, а в числе  $B$  —  $m$  цифр. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{3B}{4}\right)^2 &= \left[\frac{3}{4}(\underbrace{44 \dots 4}_m)\right]^2 = \\ &= (\underbrace{33 \dots 3}_m)(\underbrace{33 \dots 3}_m) = (\underbrace{11 \dots 1}_m)(\underbrace{99 \dots 9}_m) = \\ &= (\underbrace{11 \dots 1}_m)(10^m - 1) = \underbrace{11 \dots 1}_m \underbrace{00 \dots 0}_m - \underbrace{11 \dots 1}_m. \end{aligned}$$

Складывая это число с числом  $\frac{1}{2}B$ , которое равно  $\underbrace{22 \dots 2}_m = 2(\underbrace{11 \dots 1}_m)$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{3B}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}B &= \\ &= \underbrace{11 \dots 1}_m \underbrace{00 \dots 0}_m + \underbrace{11 \dots 1}_m = \underbrace{11 \dots 1}_{2m} = A. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A + B + 1 &= \left[\left(\frac{3B}{4}\right)^2 + \frac{B}{2}\right] + B + 1 = \left(\frac{3B}{4}\right)^2 + \frac{3B}{2} + 1 = \\ &= \left(\frac{3B}{4} + 1\right)^2 = (\underbrace{33 \dots 34}_m)^2. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧА 81. ГРУППИРОВКА НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Предположим, что натуральные числа разделены на группы следующим образом:

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15)$$

и что каждая вторая группа отброшена. Докажите, что сумма чисел в первых  $k$  оставшихся группах всегда равна  $k^4$ . Например, для  $k = 3$  имеем

$$1 + (4 + 5 + 6) + (11 + 12 + 13 + 14 + 15) = 81 = 3^4.$$

**Решение.** Перед  $n$ -й группой находится  $(n - 1)$  групп, которые содержат первые

$$1 + 2 + 3 + \dots + n - 1 = \frac{(n - 1)n}{2} \text{ чисел.}$$

Поэтому первое число  $n$ -й группы равно  $n(n - 1)/2 + 1$ , подобным образом последнее число в  $n$ -й группе равно  $n(n + 1)/2$ . Следовательно, сумма  $S(n)$  чисел в  $n$ -й группе равна

$$S(n) = \frac{n}{2} \left[ \frac{(n - 1)n}{2} + 1 + \frac{n(n + 1)}{2} \right] = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Группа, имеющая номер  $k$  после выбрасывания, имела  $(2k - 1)$  в первоначальной последовательности. Итак, мы хотим доказать, что

$$S(1) + S(3) + \dots + S(2k - 1) = k^4.$$

Используем для этого метод индукции, заметив, что  $S(1) = 1$ . Если  $S(1) + S(3) + \dots + S(2k - 1) = k^4$ , то  $S(1) + S(3) + \dots + S(2k + 1) = k^4 + S(2k + 1) = k^4 + \frac{(2k + 1)[(2k + 1)^2 + 1]}{2}$ , что приводится к виду  $(k + 1)^4$ .

## ЗАДАЧА 82. ТРЕУГОЛЬНИКИ, СТОРОНЫ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ АРИФМЕТИЧЕСКУЮ ПРОГРЕССИЮ

Докажите, что если стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то прямая, соединяющая его центроид с центром вписанной окружности, параллельна одной из его сторон.

**Решение.** Пусть в треугольнике  $ABC$  стороны удовлетворяют неравенству  $c < b < a$  ( $a$  — длина стороны, противоположной вершине  $A$  и т. д.). Тогда  $a + c = 2b$ , так как стороны образуют арифметическую прогрессию.

Обозначим через  $I$  центр вписанной окружности и через  $r$  — ее радиус (рис. 93). Запишем площадь треугольника  $ABC$ :

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= S(\triangle IAC) + S(\triangle IBC) + S(\triangle IAB) = \\ &= \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} r(a + b + c). \end{aligned}$$

Но площадь треугольника  $ABC$  равна  $\frac{1}{2} BD \cdot b$ , где  $BD$  — высота, опущенная из вершины  $B$ . Следовательно,  $\frac{1}{2} BD \cdot b = \frac{1}{2} r(a + b + c)$ , и мы имеем

$$\frac{r}{BD} = \frac{b}{a + b + c} = \frac{b}{3b} = \frac{1}{3}.$$

Это говорит о том, что точка  $I$  лежит на прямой  $L$ , которая параллельна отрезку  $AC$ , причем расстояние прямой  $L$  до прямой  $AC$  равняется  $1/3$  расстояния от точки

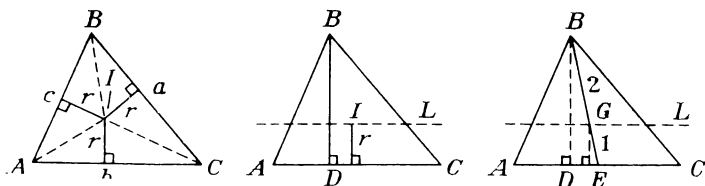


Рис. 93

$B$  до  $AC$ . Но центроид  $G$  делит медиану  $BE$  в отношении  $2:1$ , отсюда следует (если рассмотреть подобные треугольники), что точка  $G$  также лежит на прямой  $L$ . Таким образом, прямая  $GI$  определяет прямую  $L$  и поэтому представляет прямую, параллельную стороне  $AC$ .

### ЗАДАЧА 83. ДРОБИ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕСТАНОВКИ

Пусть  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — некоторая перестановка вещественных положительных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Докажите, что

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

**Решение.** Так как среднее арифметическое набора из  $n$  положительных чисел не меньше их среднего геометрического, то

$$\frac{1}{n} \left[ \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right] \geq \left[ \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n} \right]^{1/n} = 1,$$

откуда немедленно следует наше утверждение.

## ЗАДАЧА 84. О БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

Чему равен  $g$  — наибольший общий делитель следующих чисел:

$$C_{2n}^1, C_{2n}^3, C_{2n}^5, \dots, C_{2n}^{2n-1}?$$

**Решение.** Любой общий делитель набора чисел делит и их сумму. Ключом к решению является соотношение

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

Его можно вывести следующим образом. Из разложения в бином Ньютона имеем

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Положив  $x=1$ , мы видим, что сумма всех коэффициентов равна  $2^{2n}$ , а положив  $x=-1$ , мы видим, что сумма коэффициентов  $C_{2n}^r$  с четным  $r$  равна сумме коэффициентов с нечетным  $r$ . Таким образом, сумма данных чисел равна половине общей суммы, а именно,  $2^{2n-1}$ . Вследствие этого, искомый наибольший общий делитель должен быть делителем числа  $2^{2n-1}$  и поэтому сам должен быть степенью числа 2.

Предположим, что  $2^k$  — это наибольшая степень числа 2, на которую делится число  $n$ . Тогда  $n = 2^k \cdot q$ , где  $q$  — некоторое нечетное число, и мы имеем  $C_{2n}^1 = 2n = 2^{k+1}q$ . Так как число  $g$  является делителем числа  $C_{2n}^1$  и является степенью числа 2, то  $g$  не может превосходить числа  $2^{k+1}$ . Мы покажем, что  $g = 2^{k+1}$ , доказав, что  $2^{k+1}$  является делителем каждого из чисел  $C_{2n}^r$ ,  $r=1, 3, 5, \dots, 2n-1$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} C_{2n}^r &= \frac{(2n)!}{(2n-r)! r!} = \\ &= \frac{2n}{r} \left[ \frac{(2n-1)!}{(2n-r)! (r-1)!} \right] = \frac{2n}{r} C_{2n-1}^{r-1} = \frac{2^{k+1}q}{r} C_{2n-1}^r. \end{aligned}$$

Так как  $r$  — нечетное, а  $C_{2n-1}^r$  — целое число, то множитель  $2^{k+1}$  в числителе должен сохраниться и после упрощения этого выражения. Отсюда следует искомое утверждение.

## ЗАДАЧА 85. ЧИСЛО ФЕРМА $F_{73}$

Об определении чисел Ферма см. задачу 58.  
Вот первые пять из них:

$$3, 5, 17, 257, 65\,537, 4\,294\,967\,297.$$

Вы можете представить огромную величину числа  $F_{73} = 2^{(2^{73})} + 1$ . Эта задача поднимает вопрос о том, смогли ли бы все книги всех библиотек всего мира вместить в себя обычную десятичную запись этого гигантского числа  $F_{73}$ . Отвечая на этот вопрос, мы можем использовать очень завышенную оценку количества книг в библиотеках:

один миллион библиотек, в каждой  
по одному миллиону книг, по 1000 страниц каждая,  
по 100 строк на странице, по 100 знаков  
на строчке.

В качестве второй части задачи мы зададимся вопросом: каковы три последние цифры рекордсмена  $F_{73}$ ?

**Решение. 1.** В данных предположениях общая вместимость библиотек мира составила бы

$$(100)(100)(1000)(1\,000\,000)(1\,000\,000) = 10^{19} \text{ цифр.}$$

Таково это громадное количество цифр. Ясно, что наша задача свелась к нахождению количества цифр в числе  $F_{73}$ . Так как

$$2^{10} = 1024 > 10^3,$$

то

$$2^{73} = 8 \cdot 2^{70} > 8 \cdot 10^{21}$$

и

$$2^{(2^{73})} > 2^{8 \cdot 10^{21}} = (2^8)^{10^{20}} = [(2^{10})^8]^{10^{20}} > 10^{24 \cdot 10^{20}}.$$

Таким образом, число  $F_{73}$  содержит более, чем  $24 \cdot 10^{20} = 240 \cdot (10^{19})$  цифр и потребуется более 240 библиотечных систем, подобных той, которую мы предложили, чтобы записать это число.

2. При нахождении трех последних цифр числа  $F_{73}$  мы будем использовать без доказательства два замечательных открытия:

а) квадрат натурального числа и его 22-я степень всегда имеют одни и те же последние две цифры:

$$n^{22} = n^2 \pmod{100};$$



б) куб натурального числа и его 103-я степень всегда имеют одни и те же последние три цифры

$$n^{103} = n^3 \pmod{1000}.$$

Для неотрицательного  $k$  свойство а) означает (по модулю 100), что

$$n^{k+22} = n^k \cdot n^{22} \equiv n^k \cdot n^2 = n^{k+2}.$$

Поэтому можно вычитать 20 из показателя степени  $\geq 22$  без изменения оставшегося числа (по модулю 100). Повторное применение этой операции позволяет многократно уменьшать на 20 показатель степени до тех пор, пока степень остается  $\geq 2$ . Аналогично, свойство б) позволяет многократно уменьшать показатель степени на 100 до тех пор пока степень остается  $\geq 3$ .

Таким образом, мы имеем

$$2^{73} = 2^{60+13} = 2^{13} \pmod{100}.$$

Также (по модулю 100) мы имеем

$$2^{73} = 2^{13} = 2^3 \cdot 2^{10} = 8(1024) = 8 \cdot 24 = 192 \equiv 92.$$

Следовательно, для некоторого целого числа  $q$  мы имеем

$$2^{73} = 100q + 92.$$

Используя свойство б), получаем

$$2^{(2^{73})} = 2^{100q+92} \equiv 2^{92} \pmod{1000}.$$

Применяя лишь простую арифметику, вычисляем

$$2^{92} \equiv 896 \pmod{1000}.$$

Поэтому

$$F_{73} = 2^{(2^{73})} + 1 \text{ оканчивается на } 897.$$

Ст. Джерман и Стин с помощью компьютера нашли 40 последних цифр числа  $F_{73}$ , это

$$8947301518995672165296243935786246864897.$$

Одним из наиболее замечательных достижений современной арифметики является установление того, что чудовищно большое число

$$F_{1945} = 2^{(2^{1945})} + 1$$

является составным. Число  $F_{73}$  микроскопически мало по сравнению с этим колоссом. Однако, используя при-

веденный выше метод, определить последние три цифры числа  $F_{1945}$  даже легче, чем у числа  $F_{73}$ . Возможно, читатель получит удовольствие, показав, что число  $F_{1945}$  оканчивается на 297.

3. Мы завершаем этот раздел другим, полностью обоснованным выводом последних трех цифр числа  $F_{73}$ .

Ясно, что

$$2^{10} = 1024 = 25t - 1 \quad (\text{для } t = 41) \equiv -1 \pmod{25}.$$

Используя разложение бинома, получаем

$$\begin{aligned} 2^{100} &= (2^{10})^{10} = \\ &= (25t - 1)^{10} = (25t)^{10} - 10 \cdot (25t)^9 + \dots - 10(25t) + 1. \end{aligned}$$

Так как каждый член, за исключением последнего, в этом разложении делится на 125, получаем

$$2^{100} \equiv 1 \pmod{125}.$$

Теперь

$$2^{73} = (2^{10})^7 \cdot 2^3 \equiv (-1)^7 \cdot 2^3 \pmod{25} \equiv -8 \pmod{25},$$

откуда  $2^{73} = 25k - 8$  для некоторого целого числа  $k$ . Также очевидно: из того, что  $2^{73}$  делится на 4, следует

$$2^{73} \equiv 0 \equiv -8 \pmod{4} \quad \text{и} \quad 2^{73} = 4r - 8$$

для некоторого целого числа  $r$ . Тогда

$$25k - 8 = 4r - 8, \quad 25k = 4r,$$

откуда  $k$  делится на 4. Записав  $k = 4k_1$ , мы получаем

$$2^{73} = 100k_1 - 8 \equiv -8 \equiv 92 \pmod{100}$$

и для некоторого целого числа  $q$  имеем

$$2^{73} = 100q + 92.$$

Таким образом,

$$2^{(2^{73})} = 2^{100q+92} = 2^{92} (2^{100})^q \equiv 2^{92} (1^q) \pmod{125}$$

и

$$2^{(2^{73})} \equiv 2^{100} \equiv 1 \pmod{125}.$$

Пусть  $2^{92} \equiv x \pmod{125}$ , тогда

$$2^8 x = 2^{100} \equiv 1 \pmod{125},$$

и мы имеем

$$2^8 x = 256x \equiv 6x \pmod{125} \quad \text{и} \quad 6x \equiv 1 \pmod{125}.$$

Отсюда

$$6x \equiv 126 \pmod{125} \quad \text{и} \quad x \equiv 21 \equiv -104 \pmod{125}.$$

Следовательно

$$2^{(2^{73})} \equiv x \equiv -104 \pmod{125}.$$

Однако очевидно, что  $2^{(2^{73})}$  делится на 8, поэтому

$$2^{(2^{73})} \equiv 0 \equiv -104 \pmod{125}$$

и

$$2^{(2^{73})} = 125s - 104 = 8w - 104,$$

откуда легко вывести, что  $s$  делится на 8, т. е.  $125s$  делится на 1000 и

$$2^{(2^7)} = 1000v - 104 \equiv -104 \pmod{1000} \equiv 896 \pmod{1000}.$$

Таким образом, число  $F_{73}$  оканчивается на 897.

#### ЗАДАЧА 86. ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Продолжим противоположные стороны вписанного четырехугольника  $ABCD$  до пересечения в точках  $P$  и  $Q$  (рис. 94). Докажите, что четырехугольник  $EFGH$ ,

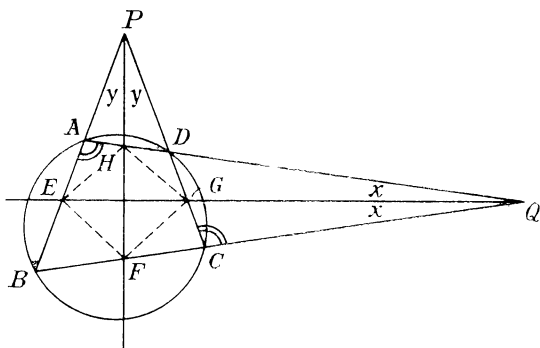


Рис. 94

определяемый на  $ABCD$  биссектрисами углов  $P$  и  $Q$ , всегда является ромбом.

**Решение.** Поскольку четырехугольник  $ABCD$  — вписанный, внешний угол  $DCQ$  равен внутреннему углу в противоположной вершине  $A$ . Так как прямая  $QE$  — биссектриса угла  $Q$ , то углы треугольника  $AQE$  соответственно равны углам треугольника  $CQG$ . Следовательно,

$$\angle CGQ = \angle AQE.$$

Но

$$\angle CGQ = \angle PGE \text{ (как вертикальные).}$$

Поэтому

$$\angle PEG = \angle PGE \text{ и } \triangle PEG \text{ — равнобедренный.}$$

Соответственно, биссектриса угла  $P$  является срединным перпендикуляром к отрезку  $EG$ . Поэтому точки  $H$  и  $F$ , расположенные на этом перпендикуляре, равноудалены от точек  $E$  и  $G$ . Аналогично точки  $E$  и  $G$  равноудалены от точек  $H$  и  $F$  и  $EFGH$  — ромб.

### ЗАДАЧА 87. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ТРОЙКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Найдите все тройки различных натуральных чисел  $x, y, z$ , попарно взаимно простых и таких, что сумма любых двух из них делится на третье.

**Решение.** Предположим, что числа в такой тройке обозначены так, что  $x < y < z$ . Тогда

$$x + y < z + z = 2z,$$

откуда следует, что частное при делении  $x + y$  на  $z$  меньше, чем 2. Поэтому оно должно равняться 1 и  $x + y = z$ .

В таком случае  $x + z = 2x + y$ . Так как это выражение делится на  $y$ , то  $2x$  делится на  $y$ . Но  $2x < 2y$ , следовательно,  $y$  содержится в  $2x$  менее двух раз. Таким образом, как и раньше,  $y$  должен равняться  $2x$  и мы имеем

$$x = x, \quad y = 2x, \quad z = x + y = 3x.$$

Так как эти числа должны быть попарно взаимно просты, то  $x$  должен равняться 1 и мы получаем единственный ответ (1, 2, 3).

### ЗАДАЧА 88. СУММЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Введем обозначение суммы первых  $n$  простых чисел через  $S_n$ :

$$S_n = 2 + 3 + 5 + \dots + p_n.$$

Докажите, что между числами  $S_n$  и  $S_{n+1}$  всегда существует число, являющееся полным квадратом.

**Решение.** Утверждение легко проверяется для  $n = 1, 2, 3$  и  $4$ . Рассмотрим  $n \geq 5$ . Ясно, что если между квадратными корнями из  $x$  и  $y$  ( $x < y$ ) находится целое число  $m$ , то  $m^2$ , являющееся полным квадратом, будет лежать между  $x$  и  $y$ :

если  $\sqrt{x} < m < \sqrt{y}$ , то  $x < m^2 < y$ .

Если  $\sqrt{y} - \sqrt{x} > 1$ , то интервал между числами  $\sqrt{x}$  и  $\sqrt{y}$  настолько велик, что обязательно содержит некоторое целое число, независимо от того, где этот интервал находится на числовой прямой. Это эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}\sqrt{y} &> 1 + \sqrt{x}, \\ y &> 1 + 2\sqrt{x} + x, \\ y - x &> 1 + 2\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Таким образом, желаемое заключение будет получено если покажем, что для всех  $n$

$$S_{n+1} - S_n > 1 + 2\sqrt{s_n}.$$

Итак,

$$S_n = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + \dots + p_n.$$

Оценим  $S_n$  при  $n \geq 5$ . Заметим, что если в сумме  $2 + 3 + 5 + 7 + 11$  исключить 2 и добавить недостающие нечетные числа 1 и 9, то получим, что все числа будут нечетными, причем сумма увеличится на  $1 + 9 - 2 = 8$ . Поэтому

$$S_n < 1 + 3 + 5 + \dots + p_n,$$

где справа стоит сумма всех нечетных чисел с 1 по  $p_n$ .

Но сумма всех нечетных чисел с 1 по  $2k - 1$  равняется

$$1 + 3 + \dots + (2k - 1) = \frac{k}{2} [1 + (2k - 1)] = k^2.$$

Для  $p_n = 2k - 1$  мы получим  $k = \frac{1}{2}(1 + p_n)$ . Поэтому сумма всех нечетных чисел с 1 по  $p_n$  равна  $\frac{1}{4}(1 + p_n)^2$ . Соответственно,

$$S_n < \frac{1}{4}(1 + p_n)^2$$

и

$$\sqrt{S_n} < \frac{1}{2}(1 + p_n)$$

или

$$2\sqrt{s_n} < 1 + p_n.$$

Заметим, что  $p_{n+1}$  всегда не меньше, чем  $p_n + 2$  (так как числа  $p_n$  и  $p_{n+2}$  не могут быть последовательными). Отсюда

$$S_{n+1} - S_n = p_{n+1} \geq p_n + 2 = 1 + (1 + p_n) > 1 + 2\sqrt{s_n}.$$

Утверждение доказано.

### ЗАДАЧА 89. ЕЩЕ ОДНА КУРЬЕЗНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

В этой задаче рассматривается курьезный способ образования последовательности натуральных чисел. Начиная, скажем, с числа 2520, мы будем получать

$$2520, 25, 11, 12, 8, 7, 8, \dots$$

Каждый из членов определяется следующим образом: к сумме простых делителей предыдущего члена прибавляется единица, причем каждое простое число берется в сумме такое число раз, какое стоит в показателе степени этого числа в разложении на простые множители соответствующего члена последовательности.

Так как

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$$

то второй член равен

$$1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 + 7 = 25;$$

а так как  $25 = 5^2$ , то отсюда следует, что третий член равен  $1 + 2 \cdot 5 = 11$  и так далее.

Если число  $n$  разложено на простые множители  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ , то член, следующий за числом  $n$ , который мы будем обозначать через  $f(n)$ , равен

$$f(n) = 1 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_k p_k.$$

Так как  $f(7) = 8$  и  $f(8) = 7$ , то мы видим, что как только в последовательности появится число 7 или 8, начнется бесконечное чередование 8, 7, 8, 7, ... Наша задача состоит в том, чтобы показать, что последовательность, у которой начальный член  $n$  больше 6, всегда содержит 7 или 8 и таким образом, начиная с некото-

рого места, будет продолжаться бесконечным повторением чисел 8, 7, 8, 7, ...

**Решение.** Пример, рассмотренный в постановке задачи, является последовательностью, уменьшающейся от 2520 до 25 на первом шаге и еще уменьшающейся до 11 на следующем шаге. Соблазнительно предположить, что  $f(n)$  всегда меньше, чем  $n$ . Однако за 11 следует 12, и мы видим, что это не так. В действительности, для простого числа  $p$  имеет место соотношение  $f(p) = p + 1$ . Тем не менее мы правы, считая, что, вообще говоря,  $f(n)$  меньше, чем  $n$ . Мы увидим, что эта последовательность увеличивается лишь после членов, являющихся простыми числами, при этом только на 1, и что в остальных случаях, исключая  $n = 8$ , последовательность уменьшается на каждом шагу не менее чем на 2:

для составного числа  $n$ ,  $f(n) \leq n - 2$   
за исключением  $n = 8$ , для которого  
уменьшение равно только 1.

Утверждение задачи легко следует из этого основного результата.

На некоторой стадии доказательства мы должны показать, что для  $n > 6$  всегда имеет место  $f(n) > 6$ . Это следует из рассмотрения нескольких простых случаев.

1) Если число  $n$  имеет простой делитель, больший 7, то  $f(n)$ , будучи больше любого простого делителя числа  $n$ , принимает значение, большее 6. Поэтому нам необходимо рассмотреть только числа, простыми делителями которых являются 2, 3, и 5:

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c.$$

2) Если  $c \geq 2$ , то  $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 5 > 6$ .

Если  $c = 1$ , то для того, чтобы  $n$  было больше 6, хотя бы одно из чисел  $a$  и  $b$  должно быть отличным от нуля, откуда  $f(n) \geq 1 + 5 + 2 > 6$ . Остались лишь числа вида

$$n = 2^a \cdot 3^b, \text{ соответствующие случаю } c = 0.$$

3) Если  $b \geq 2$ , то  $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 3 > 6$ . Если  $b = 1$ , то для того, чтобы  $n$  было больше 6, необходимо, чтобы  $a$  было не меньше 2, и мы имеем  $f(n) \geq 1 + 2 \cdot 2 + 3 > 6$ . Осталось рассмотреть только числа вида  $n = 2^a$ .

4) Для  $n > 6$  число  $a$  должно быть не меньше 3, и мы получаем  $f(n) \geq 1 + 3 \cdot 2 > 6$ .

Здесь мы имеем возможность увидеть общий ход доказательства. Если  $n$  находится во множестве чисел, боль-

ших 6, то и  $f(n)$  принадлежит этому множеству. Для простого числа  $p$ , которое является нечетным,  $f(p) = p + 1$ , которое четно и поэтому составное. Следовательно, пара последовательных членов в нашей последовательности может быть отнесена к одному из следующих трех типов (не может иметь место случай, когда за простым числом следует вновь простое число):

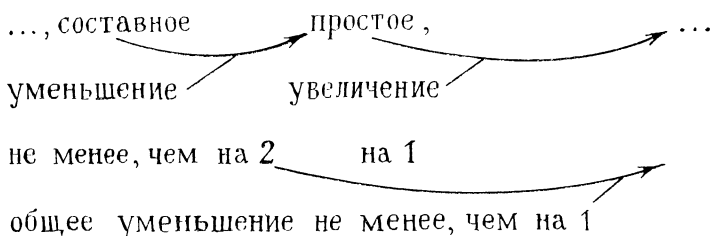
..., простое, составное, ...

..., составное, простое, ...

..., составное, составное, ...

Если один из членов пары равен 8, то осцилляция уже началась и для этой последовательности выполняется наша гипотеза. Из того, что  $f(n)$  по крайней мере на 2 меньше, чем  $n$  для составных  $n \neq 8$ , мы видим, что во всех трех типах пар после двух последовательных шагов происходит суммарное уменьшение по крайней мере на 1.

Например,



Таким образом, беря через один члены нашей последовательности, получим подпоследовательность, которая вплоть до появления числа 8 будет строго уменьшаться. При этом все эти члены остаются большими 6. Следовательно, за конечное число шагов они придут к наименьшему значению. В общем, это означает, что число 7 достигается, и в первоначальной последовательности наступает осцилляция. Единственный способ избежать этого состоит в том, чтобы прекратить уменьшение на 1 в паре членов, что возможно лишь при наличии среди них числа 8. Однако и это также приводит к осцилляции, что завершает доказательство. Нам остается обосновать основной результат:

для составного числа  $n > 6$ ,  $n \neq 8$   $f(n) \leq n - 2$ , т. е.  
 для составного числа  $n \geq 9$   $f(n) \leq n - 2$ .



Мы будем действовать по индукции. Так как  $f(9) = 7$ , то это свойство имеет место для числа 9. Обозначим через  $n$  составное натуральное число, большее 9, и допустим, что по предположению индукции это свойство выполнено для всех меньших составных натуральных чисел, которые также не меньше 9. Покажем, что тогда это свойство унаследует и само число  $n$ .

Так как  $n$  — составное число, оно имеет по крайней мере одно нетривиальное разложение на множители

$$n = k_1 \cdot k_2, \text{ где } 1 < k_1, k_2 < n.$$

Если хотя бы один из этих множителей  $k_i$  является простым числом, то  $f(k_i) = k_i + 1$ . Если число  $k_i$  — составное, не меньшее 9, то оно попадает в условия индукционного предположения, и мы имеем, что  $f(k_i) \leq k_i - 2$ . В остальных случаях  $k_i$  равно 4, 6 или 8 и  $f(k_i)$  соответственно равняется 5, 6 или 7. В любом случае мы видим, что  $f(k_i)$  никогда не бывает больше, чем  $k_i + 1$ . Поэтому  $f(k_1) \leq k_1 + 1$  и  $f(k_2) \leq k_2 + 1$ .

Предположим, что

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Разложение на множители  $n = k_1 k_2$  осуществляется разделением простых делителей числа  $n$  на две непустые группы:

$$n = \underbrace{(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_k^{b_k})}_{k_1} \underbrace{(p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} \dots p_k^{a_k-b_k})}_{k_2}.$$

Вспомним, что

$$f(t) = 1 + \left( \begin{array}{l} \text{сумма простых делителей} \\ \text{числа } t, \text{ каждый из которых берется} \\ \text{соответствующее число раз} \end{array} \right).$$

В соответствии с этим сумма соответствующее число раз повторенных простых делителей числа  $k_1$  равняется  $f(k_1) - 1$ . Аналогично для чисел  $k_2$  и  $n$  мы имеем, соответственно,  $f(k_2) - 1$  и  $f(n) - 1$ . Однако, поскольку  $n = k_1 k_2$ , мы имеем:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} \text{сумма простых делителей числа } n, \text{ взятых} \\ \text{соответствующее число раз} \end{array} \right) = \\ & = \left( \begin{array}{l} \text{сумме простых делителей числа } k_1, \\ \text{взятых соответствующее число раз} \end{array} \right) + \\ & + \left( \begin{array}{l} \text{сумма простых делителей числа } k_2, \\ \text{взятых соответствующее число раз} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Это дает

$$f(n) - 1 = f(k_1) - 1 + f(k_2) - 1$$

и

$$f(n) = f(k_1) + f(k_2) - 1.$$

Поскольку  $f(k_1) \leq k_1 + 1$  и  $f(k_2) \leq k_2 + 1$ , мы получаем

$$f(n) \leq k_1 + 1 + k_2 + 1 - 1$$

и

$$\boxed{f(n) \leq k_1 + k_2 + 1}.$$

Теперь мы знаем, что  $k_1$  и  $k_2$  не меньше 2, а их произведение не меньше 9. Следовательно, мы легко можем вывести, что произведение  $(k_1 - 1)(k_2 - 1)$  не меньше 4:

1) Если одно из чисел  $k_1, k_2$  принимает минимально возможное значение 2, откуда  $k_i - 1 = 1$ , тогда, поскольку  $n = k_1 k_2 \geq 9$ , другое число  $k_i \geq 5$ . В этом случае имеем  $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \geq 1 \cdot 4 = 4$ .

2) С другой стороны, если каждое  $k_i \geq 3$ , то  $k_i - 1 \geq 2$ , и их произведение  $\geq 4$ .

Окончание доказательства основано на том, что между числами  $k_1 + k_2 + 1$  и  $(k_1 - 1)(k_2 - 1)$  легко увидеть следующее соотношение:

$$\begin{aligned}(k_1 - 1)(k_2 - 1) &= k_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1 = \\ &= k_1 k_2 - (k_1 + k_2 + 1) + 2.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}k_1 + k_2 + 1 &= k_1 k_2 + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1) = n + 2 - \\ &\quad - (k_1 - 1)(k_2 - 1).\end{aligned}$$

Из приведенного выше неравенства мы имеем

$$f(n) \leq n + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1).$$

Так как  $(k_1 - 1)(k_2 - 1) \geq 4$ , то получаем

$$f(n) \leq n + 2 - 4$$

и

$$f(n) \leq n - 2.$$

## ЗАДАЧА 90. ЭЛЛИПС И ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ РЕШЕТКА

Независимо от того как мы расположим круг радиуса 5 на целочисленной решетке, мы не сможем избежать того, чтобы не покрыть некоторое число целочисленных точек. (Мы считаем, что наши фигуры включают их границы, т. е., что они — замкнутые множества.) Конечно, очень маленький круг может вообще не содержать целочисленных точек. Так как любая точка плоскости расположена не дальше, чем на  $\sqrt{2}/2$  от некоторой целочисленной точки ( $\sqrt{2}/2$  — это половина диагонали единичной квадратной клетки, из которых составлена решетка), то, независимо от расположения центра круга радиуса  $r \geq \sqrt{2}/2$ , оказавшегося на плоскости, этот круг будет простирается столь далеко, что обязательно покроет хотя бы одну целочисленную точку. Гораздо труднее показать, что прямоугольник  $a \times b$ , случайным образом расположенный на решетке, обязательно покроет хотя бы одну целочисленную точку в том и только том случае, если  $a \geq 1$  и  $b \geq \sqrt{2}$ . Также очень трудной задачей является установление того факта, что треугольник всегда покроет хотя бы одну целочисленную точку тогда и только тогда, когда его площадь не меньше  $c^2/2(c-1)$ , где  $c$  — длина его наибольшей стороны. Однако наибольший интерес представляет рассмотрение эллипса.

У эллипса бесконечное число форм. Тем не менее условием того, что он обязательно покроет хотя бы одну целочисленную точку, является следующее: в стандартном положении (центр — в начале координат, а оси расположены вдоль осей координат) он покрывает точку  $(1/2, 1/2)$ . Докажем эту теорему.

**Решение.** Пусть данный эллипс задается уравнением  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Условие того, что он покрывает точку  $(1/2, 1/2)$  запишется так:

$$\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 \leq a^2b^2 \text{ или } a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2.$$

Тогда теорема утверждает, что эллипс всегда покрывает хотя бы одну целочисленную точку тогда и только тогда, когда  $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$ .

а) Достаточность.

Предположим, что  $a^2 + b^2 \leq 4a^2b^2$ . Рассмотрим теперь целочисленную решетку  $L$  точек  $(u, v)$ , определенную заданными осями  $u$  и  $v$ . Пусть наш эллипс  $E$  расположен

некоторым образом на этой решетке  $L$  (рис. 95). Мы хотим проводить вычисления в системе координат  $x$  и  $y$ , оси которых совпадают с осями эллипса  $E$ . В этой системе координат эллипс  $E$  находится в стандартном положении

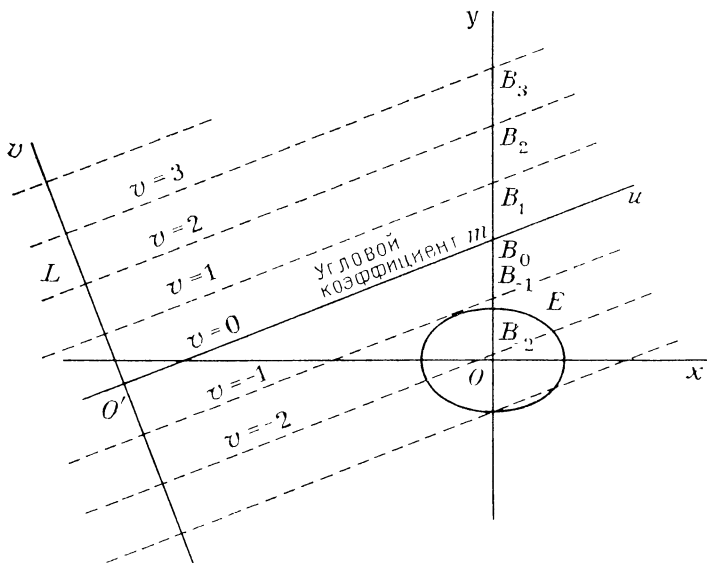


Рис. 95

и имеет уравнение  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ . Линии решетки  $L$  могут пересекать нашу плоскость  $(x, y)$  под произвольным углом. Так как оси  $u$  и  $v$  перпендикулярны, то из четырех их направлений одно имеет тангенс угла наклона  $m$  относительно плоскости  $(xy)$ , заключенный в пределах  $-1 \leq m \leq 1$ . Будем считать, что это направление имеет ось  $u$ . Линии решетки  $v = n$ , где  $n$  — целое число, составляют множество равноудаленных параллельных прямых, тангенс угла наклона которых равен  $m$  в системе координат  $(x, y)$ , и они пересекают ось  $y$  во множестве равноудаленных точек  $B_n$ .

Начнем с нахождения расстояния  $B_n B_{n+1}$  между последовательными пересечениями оси  $y$ . Пусть точка  $P$ , взятая на прямой  $T$ , проведенной через начало координат  $O$  с угловым коэффициентом  $m$ , имеет координату  $x$ , равную 1 (рис. 96). Пусть ордината точки  $P$  будет  $PN$ . Так как угловой коэффициент  $PN/ON = m$ , то мы имеем

$PN = m$  и  $OP = \sqrt{1 + m^2}$ . Теперь опустим перпендикуляр  $B_{n+1}S$  на прямую  $v = n$ . Так как соответствующие углы  $B_{n+1}B_nS$  и  $B_nOP$  равны, мы имеем равные дополнительные углы  $SB_{n+1}B_n$  и  $PON$ . Следовательно, треугольники  $B_{n+1}B_nS$  и  $PON$  равны ( $B_{n+1}S = ON = 1$ ) и получаем соотношение

$$B_n B_{n+1} = OP = \sqrt{1 + m^2}.$$

Тогда точки  $B_n$  расположены на оси  $y$  с шагом  $\sqrt{1 + m^2}$ . Поэтому некоторая точка  $B_n = (0, y)$  должна иметь координату  $y$  в интервале  $-\frac{1}{2} \sqrt{1 + m^2} < y < \frac{1}{2} \sqrt{1 + m^2}$ ,

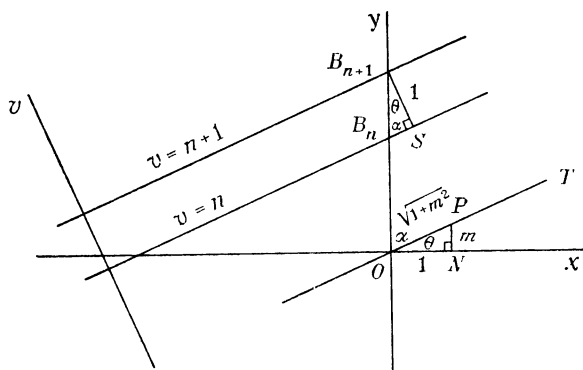


Рис. 96

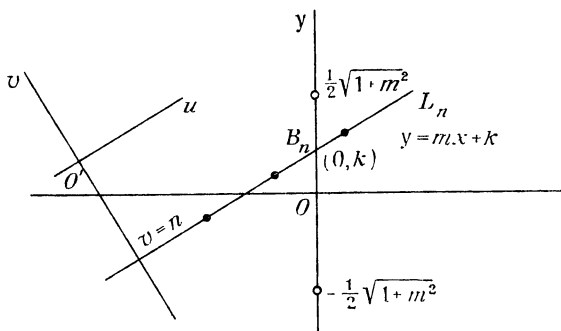


Рис. 97

который получается, если центр шага взять в начале координат (он слишком велик, чтобы точки  $B_n$  могли через него перешагнуть) (рис. 97). Если точка  $B_n$  имеет коор-

динаты  $(0, k)$ , то уравнение прямой  $L_n$  точек решетки ( $v = n$  на  $L$ ) имеет вид

$$y = mx + k, \text{ где } -\frac{1}{2} \sqrt{1+m^2} < k \leq \frac{1}{2} \sqrt{1+m^2}.$$

Пока мы не имеем гарантий, что прямая  $L_n$  будет пересекать наш эллипс  $E$ . Однако из их уравнений мы находим

$$\begin{aligned} y &= mx + k, \\ b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2, \\ b^2 x^2 + a^2 (mx + k)^2 &= a^2 b^2, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$x = \frac{-mka^2 \pm ab \sqrt{b^2 + a^2 m^2 - k^2}}{b^2 + a^2 m^2}.$$

Так как эллипс  $E$  содержит точку  $(1/2, 1/2)$ , то мы имеем, что  $a^2 + b^2 \leq 4a^2 b^2$ , и поэтому  $\left(\frac{1}{b^2}\right) + \left(\frac{1}{a^2}\right) \leq 4$ , откуда  $1/b^2 < 4$  и  $1/a^2 < 4$ , так как  $a$  и  $b$  оба отличны от нуля. Поэтому  $b^2 > \frac{1}{4}$  и  $a^2 > \frac{1}{4}$ . В результате мы имеем

$$k^2 \leq \left(\frac{1}{2} \sqrt{1+m^2}\right)^2 = \frac{1}{4} (1+m^2) = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{4} < b^2 + a^2 m^2.$$

Поэтому величина, расположенная под знаком квадратного корня, а именно  $b^2 + a^2 m^2 - k^2$ , положительна; это означает, что прямая  $L_1$  должна пересечь наш эллипс  $E$ .

Теперь найдем длину  $d$  пересечения прямой  $L_n$  с эллипсом  $E$ . Если мы покажем, что  $d$  не меньше 1, то из целочисленных точек на  $L_n$ , расположенных с интервалом 1, хотя бы одна должна попасть внутрь эллипса  $E$ .

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — абсциссы точек пересечения эллипса  $E$  с прямой  $L_n$ . Так как прямая  $L_n$  в координатах  $(x, y)$  имеет уравнение  $y = mx + k$ , то точками пересечения будут точки  $(x_1, mx_1 + k)$  и  $(x_2, mx_2 + k)$ . Поэтому

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 (1 + m^2).$$

Рассматривая ранее найденные значения координат точек пересечения, мы видим, что значения  $x_1$  и  $x_2$  равны

$$\frac{-mka^2 \pm ab \sqrt{b^2 + a^2 m^2 - k^2}}{b^2 + a^2 m^2}.$$

Тогда квадрат их разности равен

$$\left[ \frac{2ab \sqrt{b^2 + a^2 m^2 - k^2}}{b^2 + a^2 m^2} \right]^2 = \frac{4a^2 b^2 (b^2 + a^2 m^2 - k^2)}{(b^2 + a^2 m^2)^2}.$$

Поэтому

$$d^2 = \frac{4a^2 b^2 (b^2 + a^2 m^2 - k^2) (1 + m^2)}{(b^2 + a^2 m^2)^2}$$

и

$$d^2 (b^2 + a^2 m^2)^2 = 4a^2 b^2 (b^2 + a^2 m^2 - k^2) (1 + m^2).$$

Вычитая  $(b^2 + a^2 m^2)^2$  из каждой стороны, получаем

$$(d^2 - 1) (b^2 + a^2 m^2)^2 =$$

$$= 4a^2 b^2 (b^2 + a^2 m^2 - k^2) (1 + m^2) - (b^2 + a^2 m^2)^2.$$

Показав, что правая часть этого неравенства неотрицательна, мы получим, что  $d^2 - 1 \geq 0$ , и  $d \geq 1$ , т. е. то, что мы хотели получить. Теперь, заметив, что из  $0 \leq (a - b)^2$  следует условие  $2ab \leq a^2 + b^2$ , мы из неравенства

$$\boxed{a^3 + b^3 \leq 4a^2 b^2}$$

получаем, что  $2ab \leq 4a^2 b^2$ , т. е.  $1 \leq 2ab$ . Поэтому  $1 \leq 2ab < a^2 + b^2$  и

$$\boxed{a^3 + b^3 - 1 \geq 0}.$$

Так как также имеет место неравенство  $k^2 \leq (1 + m^2)/4$ , мы получаем

$$4a^2 b^2 (b^2 + a^2 m^2 - k^2) (1 + m^2) - (b^2 + a^2 m^2)^2 \geq$$

$$\geq 4a^2 b^2 \left( b^2 + a^2 m^2 - \frac{1 + m^2}{4} \right) (1 + m^2) - (b^2 + a^2 m^2)^2 =$$

$$= (m^4 a^2 + b^2) (4a^2 b^2 - a^2 - b^2) + 4m^2 a^2 b^2 (a^2 + b^2 - 1).$$

Правильность последнего шага можно увидеть, если сделать все перемножения. Из вышеприведенных неравенств мы имеем

$$4a^2 b^2 - a^2 - b^2 \geq 0 \text{ и } a^2 + b^2 - 1 \geq 0.$$

Таким образом, результат неотрицателен и достаточность установлена.

б) Необходимость.

Теперь предположим, что эллипс  $E$  всегда покрывает целочисленную точку. Нетрудно показать, что в таком

случае этот эллипс, находясь в стандартном положении, покрывает точку  $(1/2, 1/2)$ .

Предположим противное, т. е. что это не происходит. Тогда совершим параллельный перенос начала координат в точку  $(1/2, 1/2)$ . В результате такого переноса целочисленные точки перейдут в центры единичных квадратов

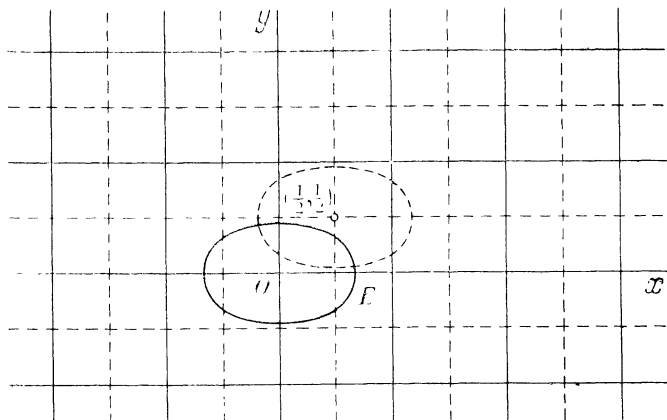


Рис. 98

нашей решетки (рис. 98). Если некоторая область покрывала целочисленную точку, то после этого преобразования она будет покрывать центр единичного квадрата и наоборот. Если эллипс  $E$  не покрывает точку  $(1/2, 1/2)$ , то из его симметрии следует, что он не покрывает ни одного из центров квадратов. Таким образом, когда мы передвинем систему координат, то он не будет покрывать ни одной целочисленной точки, что противоречит тому, что эллипс  $E$  всегда покрывает хотя бы одну целочисленную точку на решетке (определяемой в данном случае центрами единичных квадратов). Поэтому эллипс  $E$  должен покрывать точку  $(1/2, 1/2)$ , и теорема доказана.

#### ЗАДАЧА 91. АРХИМЕДОВЫ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Одним из замечательных достижений великого Архимеда является нахождение площади сегмента параболы (т. е. ее части, отсекаемой хордой). Он нашел, что площадь сегмента, порождаемого хордой  $AB$ , равняется  $2/3$  площади треугольника  $PAB$ , который опреде-



ляется касательными в точках  $A$  и  $B$ . Такой треугольник  $PAB$  называется «архимедовым» треугольником (рис. 99).

Можно показать, что медиана  $PT$ , опущенная на хорду архимедова треугольника, параллельна оси параболы, и пересекает параболу в точке  $C$ , такой, что касательная

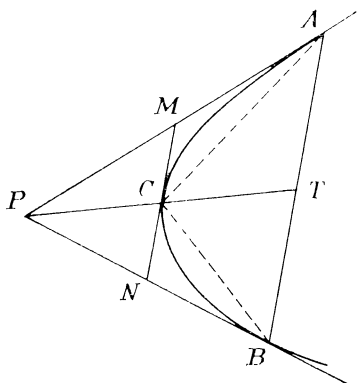


Рис. 99

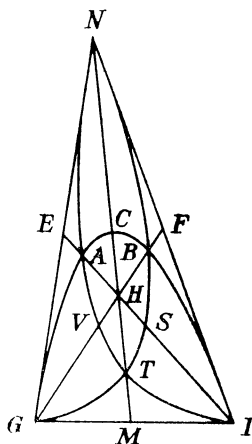


Рис. 100

$MCN$  параллельна хорде  $AB$ . Также оказывается, что точки  $M$  и  $N$  являются серединами отрезков  $PA$  и  $PB$ . Поэтому треугольник  $CAB$  имеет то же основание, что и треугольник  $PAB$ , а высоту вдвое меньшую, откуда площадь  $\triangle CAB = \frac{1}{2}$  площади  $\triangle PAB$ . Следовательно,

$$\text{площадь параболического сегмента} = \frac{2}{3} S_{\triangle PAB} = \frac{4}{3} S_{\triangle CAB}.$$

Рассмотрим теперь треугольник, являющийся архимедовым для трех парабол, каждая из которых касается двух его сторон в вершинах. Архимедов треугольник со своими тремя параболками образует конфигурацию, богатую интересными свойствами (рис. 100).

1) Параболы всегда пересекаются на медианах треугольника (например,  $NTM$  — медиана).

2) Эти точки пересечения всегда отсекают  $1/9$  длины медианы (считая от середины стороны) (т. е.  $MT = (1/9)MN$ , или  $MT : TN = 1 : 8$ ).

3) Параболы и проведенные между ними медианы делят треугольник на 18 частей, 12 из которых ограничены двумя отрезками прямых и одной дугой, а 6 огра-

ничены двумя дугами и одним отрезком. Эти 12 частей имеют одинаковую площадь ( $5/162$  площади треугольника), а 6 частей также имеют одинаковую площадь ( $17/162$  площади треугольника).

4) Касательные к параболам в точке их пересечения (например, в точке  $T$ ) делят на три равные части примыкающую к ним сторону (т. е. точки  $P$  и  $Q$  делят на три равные части отрезок  $GI$ ) (рис. 101).

5) «Окружность девяти точек» (проходящая через середины сторон) пересекает медиану и высоту, выходящие из одной вершины (например,  $GF$  и  $GK$ ) в двух

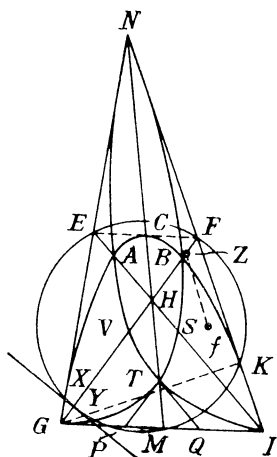


Рис. 101

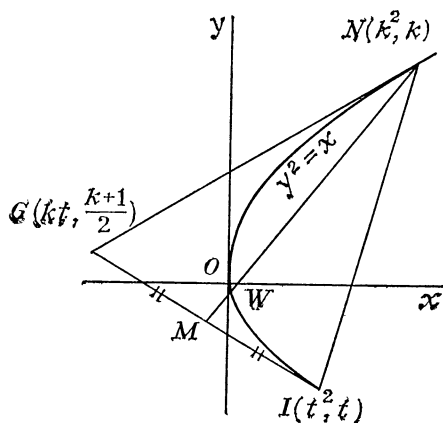


Рис. 102

точках  $X$  и  $Y$ , которые определяют прямую, перпендикулярную медиане, откуда следует, что она перпендикулярна и оси (соответствующей) параболы и поэтому параллельна ее директрисе. На самом деле эта прямая ( $XY$ ) является самой директрисой.

6) Прямая, проходящая через фокус  $f$  параболы параллельно стороне треугольника, которой эта парабола не касается, отсекает от медианы ( $GF$ ) к этой стороне отрезок ( $ZF$ ), который равен отрезку медианы от вершины треугольника ( $G$ ) до директрисы (т. е.  $GX = ZF$ ).

Здесь мы завершаем наше собрание рассказов о задачах рассмотрением свойств 1), 2) и половины свойства 3).

Рассмотрим 1) и 2). Эти свойства устанавливаются одновременно с показом того, что точка  $W$ , которая делит

медиану  $MN$  в отношении  $1:8$ , лежит на каждой из парабол, касающихся стороны  $GI$  (рис. 102). Так как эти параболы совершенно эквивалентны, мы рассмотрим только одну из них, проходящую через точки  $N$  и  $I$ . Предположим, что ее уравнение есть  $y^2 = x$  и что координаты точек  $N$  и  $I$  соответственно  $(k^2, k)$  и  $(t^2, t)$ . Тогда касательные  $GN$  и  $GI$  имеют уравнения

$$x - 2ky + k^2 = 0 \text{ и } x - 2ty + t^2 = 0.$$

Решая их совместно, получаем координаты точки  $G(kt, (k+t)/2)$ . (Кстати мы отметим, что ордината  $(k+t)/2$  точки  $G$  такая же, что и у середины отрезка  $MI$ , отсюда следует, что медиана к хорде  $NI$  параллельна оси параболы.)

Координаты точки  $M$  — середины отрезка  $GI$  равны  $(t(k+t)/2, (k+3t)/4)$ . Точка, которая делит отрезок  $MN$  в отношении  $1:8$ , имеет координаты

$$\left( \frac{k^2 + 8\left(\frac{t(t+k)}{2}\right)}{9}, \frac{k + 8\left(\frac{k+3t}{4}\right)}{9} \right),$$

или

$$\left( \frac{1}{9} [k^2 + 4t(k+t)], \frac{1}{9} [k + 2(k+3t)] \right).$$

Для этой точки мы имеем

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{81} [k + 2(k+3t)]^2 = \frac{1}{81} (3k + 6t)^2 = \\ &= \frac{1}{9} (k + 2t)^2 = \frac{1}{9} (k^2 + 4kt + 4t^2) = \frac{1}{9} [k^2 + 4t(k+t)] = x, \end{aligned}$$

что показывает ее принадлежность параболе.

3) Центроид  $H$  отсекает треть у медиан  $EI$  и  $FG$ . Так как  $EA = \frac{1}{9} EI$ , то  $EA = \frac{1}{3} EH$ . Аналогично,  $FB = \frac{1}{3} FH$ . Поэтому прямая  $AB$  параллельна  $EF$ . Как было ранее замечено, прямая  $EF$  касается параболы, проходящей через точки  $G$  и  $I$ , в точке  $C$  пересечения параболы с медианой  $MN$ .

Теперь вспомним свойство «диаметра» параболы (рис. 103):

Геометрическое место середин параллельных хорд параболы называется ее диаметром, и все диаметры параболы параллельны ее оси; кроме того, касательная в «конце» диаметра параллельна множеству хорд, деля-

щихся пополам этим диаметром. Поэтому прямая  $PQ$ , исходящая из точки  $P$  на параболу, параллельна ее оси и делит пополам каждую ее хорду, параллельную касательной в точке  $P$ .

Теперь, как мы только что видели, хорда  $AB$  параллельна касательной  $ECF$ , где  $CO$  — часть медианы  $NM$ ,

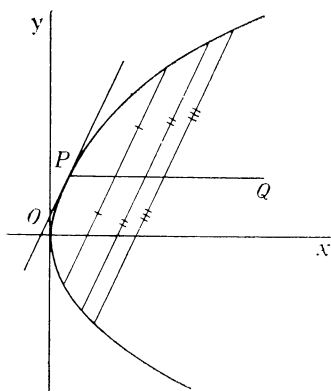


Рис. 103

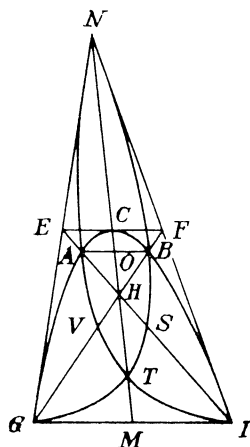


Рис. 104

параллельной оси параболы (рис. 104). Соответственно,  $CO$  является диаметром и  $CO$  делит пополам все хорды, параллельные прямой  $EF$  (и  $AB$ ). Тогда отсюда мы заключаем, что прямая  $CO$  делит пополам *площадь* сегмента  $ABC$ .  $AB$  является одной из хорд, которые делятся пополам диаметром  $CO$ . Поэтому  $OH$  делит пополам площадь треугольника  $ABH$ , и мы видим, что  $CH$  делит пополам площадь фигуры  $AHBC$ . Поэтому площадь фигуры  $AHC$  равна половине площади фигуры  $AHBC$  и равна половине суммы площади сегмента  $ABC$  и площади треугольника  $ABH$ . Теперь мы приступим к вычислению площадей сегмента  $ABC$  и треугольника  $ABH$ .

Поскольку отрезки  $EF$  и  $AB$  параллельны, треугольники  $EFH$  и  $ABH$  подобны. Поэтому

$$\frac{S_{\triangle ABH}}{S_{\triangle EFH}} = \left(\frac{AH}{EH}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\text{и } S_{\triangle ABH} = \frac{4}{9} S_{\triangle EFH}.$$

Из того, что отрезок  $EF$  параллелен отрезку  $GI$ , мы получаем, что треугольники  $EFH$  и  $HGI$  подобны. Так как отношение соответствующих сторон равно  $1/2$ , то

$$S_{\triangle EFH} = \frac{1}{4} S_{\triangle HGI}.$$

Однако центр тяжести  $H$  отсекает треть медианы  $MN$ , откуда следует (из подобия треугольников), что соответствующие высоты, опущенные на  $GI$  в треугольнике  $HGI$  и треугольнике  $NGI$ , также относятся как  $1:3$ . Следовательно, площадь треугольника  $HGI$  равна одной трети площади треугольника  $NGI$  и

$$S_{\triangle EFH} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} S_{\triangle NGI} \right) = \frac{1}{12} S_{\triangle NGI}.$$

Соответственно

$$S_{\triangle ABH} = \frac{4}{9} S_{\triangle EFH} = \frac{4}{9} \left( \frac{1}{12} S_{\triangle NGI} \right) = \frac{1}{27} S_{\triangle NGI}.$$

Наконец, площадь сегмента  $ABC$  равняется  $\frac{4}{3}$  площади треугольника  $ABC$ . Так как точки  $A$  и  $B$  делят отрезки  $EH$  и  $FH$  в отношении  $1:2$ , расстояние между параллельными прямыми  $EF$  и  $AB$ , которое является высотой треугольника  $ABC$ , опущенной на основание  $AB$ , является половиной высоты, опущенной из точки  $H$  на  $AB$  в треугольнике  $ABH$ . Поэтому площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади треугольника  $ABH$ , и мы имеем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{27} S_{\triangle NGI} \right) = \frac{1}{54} S_{\triangle NGI}.$$

Следовательно,

площадь сегмента  $ABC =$

$$= \frac{4}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{54} S_{\triangle NGI} \right) = \frac{2}{81} S_{\triangle NGI}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \text{площадь области } ACH &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{81} S_{\triangle NGI} + \frac{1}{81} S_{\triangle NGI} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{81} + \frac{1}{54} \right) S_{\triangle NGI} = \frac{5}{162} S_{\triangle NGI}. \end{aligned}$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1. Пассажирский поезд, двигающийся со скоростью, в  $x$  раз большей скорости товарного поезда, обгоняет его. Если бы поезда двигались навстречу друг другу, то время прохождения одного поезда мимо другого было бы в  $x$  раз меньше, чем в первом случае. Найдите  $x$ .

2. Даны две окружности. Из центра каждой из этих окружностей проведены касательные к другой окружности (рис. 105). Докажите, что эти касательные высекают на окружностях равные хорды.

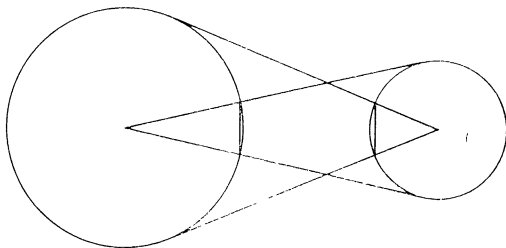


Рис. 105

3. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее тем свойством, что сумма его цифр не является делителем суммы кубов его цифр.

4. Обозначим через  $A$ ,  $B$  и  $C$  три точки на параболе, ось которой вертикальна (т. е. параллельна оси  $y$ ). Обозначим через  $m_A$  тангенс угла наклона касательной к параболе в точке  $A$ , через  $m_{AB}$  — тангенс угла наклона хорды  $AB$  и т. д. Докажите следующее неожиданное свойство:

$$m_A = m_{AB} + m_{AC} - m_{BC}.$$

5. Докажите, что «магическая постоянная» магического квадрата  $3 \times 3$  всегда делится на 3.

6. Некто получил чек на некоторое количество долларов и центов. Когда он получал деньги по чеку, кассир сделал ошибку, уплатив столько долларов, сколько было указано центов, и наоборот. Позже, истратив 3,5 доллара, клиент обнаружил, что у него осталось вдвое больше денег, чем было указано на чеке. На какую сумму был выписан чек?

7. Покажите, что у каждого тетраэдра найдется хотя бы одна вершина, в которой все углы примыкающих к ней граней — острые.

8. Дан многочлен  $f(x)$  с целыми коэффициентами, нечетное число  $a$  и четное число  $b$  такие, что  $f(a)$  и  $f(b)$  оба нечетны. Докажите, что уравнение  $f(x) = 0$  не имеет целых корней.

9. Ни в одной из вершин простого многогранника  $P$  не сходятся ровно 3 ребра. Докажите, что не меньше 8 граней многогранника  $P$  — треугольники.

10. Докажите, что любая степень  $a^n$  числа  $a$ , где  $a$  и  $n$  — натуральные числа и  $n > 1$ , является суммой  $a$  последовательных нечетных чисел.

11. Хорда постоянной длины скользит вдоль данной окружности. Концы хорды проектируются (ортогонально) на фиксированный диаметр окружности. Основания проекций и середина хорды образуют вершины треугольника. Докажите, что этот треугольник — равнобедренный и не меняет своей формы при скольжении хорды вдоль окружности.

12. Игрок  $A$  объявляет двузначное число от 01 до 99. Игрок  $B$  меняет местами его цифры и полученное число прибавляет к сумме его цифр. Полученный результат он объявляет игроку  $A$ . Игрок  $A$  проделывает с этим числом ту же процедуру, и так они продолжают поступать поочередно, объявляя числа. Все числа берутся по модулю 100 и поэтому объявляются лишь двузначные числа. Какие числа может объявить игрок  $A$  на начальном шаге, чтобы игрок  $B$  в некоторый момент объявил число 00?

13. Докажите, что из пяти четных цифр, а также из пяти нечетных цифр невозможно составить число, являющееся полным квадратом.

14. Переменная окружность проходит через две фиксированные точки и пересекает фиксированную окружность в двух точках. Докажите, что общие хорды фиксированной окружности и переменных окружностей при продолжении проходят через одну точку (или все параллельны).

15. Найдите максимальное и минимальное возможное количество пятниц в году, которые одновременно являются 13-ми числами.

16. Найдите два натуральных числа таких, что их сумма будет делителем их произведения.

17. Дана окружность с центром  $O$  и точка  $P$ , не лежащая на этой окружности. Прямая, проходящая через точку  $P$ , пересекает окружность в двух точках и в них строятся касательные к окружности. Эти касательные пересекают в точках  $C$  и  $D$  прямую, проходящую через точку  $P$  перпендикулярно прямой  $OP$ . Докажите, что точка  $P$  — середина отрезка  $CD$ .

18. Докажите, что для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$   $(1^5 + 2^5 + \dots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \dots + n^7) = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n)^4$ .

19. Докажите, что если провести из оснований высот треугольника перпендикуляры к двум другим сторонам, то шесть оснований этих перпендикуляров лежат на одной окружности.

20. Покажите, что натуральное число однозначно определяется по произведению всех его делителей.

21. Докажите, что если в треугольнике две медианы перпендикулярны, то треугольник, составленный тремя медианами исходного треугольника, прямоугольный и в нем третья медиана является гипотенузой.

22. Пусть  $f_n$  —  $n$ -й член последовательности, определяемой следующим образом:

$$f_n = -f_{n-1} - 2f_{n-2}, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = -1.$$

Докажите, что  $2^{n+1} - 7f_{n-1}^2$  — всегда полный квадрат.

23. У фермера Джона есть телега с квадратными колесами. Однако она может двигаться по дорожной колее без подпрыгивания. Опишите профиль дорожной колеи, если колеса движутся без проскальзывания.

24. Найдите все значения  $r$ , для которых ни одно из чисел  $n!$  не оканчивается на  $r$  нулей.

25. Если центр окружности лежит на равнобочной гиперболы и симметричная ему относительно центра гиперболы точка лежит на окружности, то остальные три из четырех точек пересечения окружности с гиперболой образуют равносторонний треугольник (рис. 106).

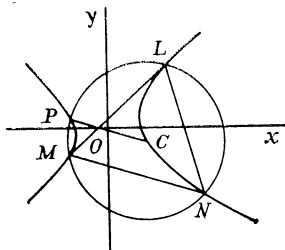


Рис. 106

26\*). Несколько тракторов вспахивают поле в 300 га за целое число дней, причем каждый трактор вспахивает в день 15 га. Сколько тракторов потребуется дополнительно для того, чтобы выполнить работу на 6 дней раньше?

27. В ромбе  $ABCD$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ . На стороне  $CD$  взята точка  $M$ , а на стороне  $AD$  — точка  $N$  так, что в треугольнике  $BNM$  один из углов равен  $60^\circ$ . Докажите, что тогда и остальные углы этого треугольника содержат по  $60^\circ$ .

28. Найдите два семизначных числа такие, что их сумма, их разность и сумма цифр одного из них являются факториалами некоторых чисел.

29. В треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ , а прилежащие к нему стороны равны 2 и 3. Разрежьте его на три куса так, чтобы из них можно было сложить правильный шестиугольник.

30. Найдите пять чисел, если известно, что их суммы по 3 соответственно равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17.

31. У лифта на 1-м этаже 18-этажного дома собрались 17 школьников, которым нужно подняться вверх, причем на разные этажи. Лифтер же согласен сделать лишь один рейс на любой этаж, а дальше пусть они идут пешком. Лифт способен вместить всех школьников. Известно, что все школьники с одинаковым неудовольствием спускаются на один этаж и с двойным неудовольствием поднимаются пешком на один этаж. Какой этаж нужно выбрать, чтобы суммарное неудовольствие было наименьшим?

32. Найдите четырехзначное число, сумма цифр которого равна разности между числом 2011 и самим числом.

33. В левой части равенства  $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 7$  расставьте скобки так, чтобы равенство стало верным.

34. Дорожная шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Пусть имеется еще комплект домино, каждая кость которого покрывает ровно две соседние клетки доски. Можно ли уложить комплект домино на этой доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски?

\*) Задачи 26—67 добавлены переводчиками из публикаций журнала «Квант» за 1991—1992 гг.



35. Число 1,5 интересно тем, что оно в 4 раза меньше суммы своих цифр. Найдите число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр.

36. 50 гангстеров стреляют одновременно. Каждый стреляет в ближайшего к нему гангстера (или в одного из ближайших, если несколько человек находятся на одинаковом расстоянии от него) и убивает его наповал. Найдите наименьшее возможное число убитых.

37. Замените буквы цифрами так, чтобы соотношение оказалось верным (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные):  $\text{ХРУСТ} \cdot \text{ГРОХОТ} = \text{РРРРРРРРРР}$ .

38. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катетах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CB$  и  $BM = CN$ . Докажите, что угол между отрезками  $AN$  и  $CM$  равен  $45^\circ$ .

39. Один чудачковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часа они идут нормально, показывая верное время, но затем часовая стрелка начинает идти со скоростью минутной, а минутная со скоростью часовой. Через час стрелки вновь менялись скоростями, и так каждый час. Укажите все моменты времени, когда часы показывают верное время.

40. Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз.

41. На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекала границу полосы в четырех точках. В четырехугольнике, вершины которого находятся в этих точках, проведены диагонали. Докажите, что угол между ними равен  $45^\circ$ .

42. Калиф Гарун-ар-Рашид одарил троих придворных астрологов десятью кошельками. Мудрецы, сев подсчитывать доход, обнаружили, что один из кошельков пуст, во втором лежит одна таньга, в третьем — две, и так далее, до десятого, в котором оказалось девять таньга. Гусейн Гуслия взял себе два кошелька. Абдурахман ибн Хоттаб и его брат Омар Юсуф поделили оставшиеся кошельки так, что более заслуженный и умудренный годами Абдурахман получил большую сумму денег. По дороге на Омара Юсуфа напали разбойники и отняли четыре кошелька, так что от подарка калифа осталось лишь 10 таньга. Какие кошельки достались Гусейну Гуслия?

43. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 20, 50, копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в  $A$  копеек можно уплатить  $B$  монетами. Докажите, что сумму в  $B$  рублей можно уплатить  $A$  монетами.

44. В футбольном турнире участвовали 15 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли случиться, что число побед у каждой команды оказалось равным числу ее ничьих? Какой будет ответ, если в турнире участвовали 16 команд? 17 команд?

45. Равносторонние треугольники  $ABC$  и  $PQR$  расположены так, что вершина  $C$  лежит на стороне  $PQ$ , а вершина  $R$  на стороне  $AB$ . Докажите, что четырехугольник  $ABPQ$  — трапеция.

46. Используя каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, составьте такие два пятизначных числа, чтобы их произведение было максимальным.

47. Шахматную доску покрыли костяшками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костяшек покрывают клетки одной из диагоналей доски; при этом одни костяшки покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку ниже диагонали. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костяшек будет поровну.

48. По поверхности стола перекачивают кубик, переворачивая его через ребра. Можно ли его перевернуть 12 раз так, чтобы он перевернулся по одному разу через каждое ребро и в результате оказался на прежнем месте?

49. Имеется лист бумаги. Его можно разрезать на 6 или 12 частей. Каждый новый кусок можно разрезать на 6 или 12 частей или оставить целым и так далее. Можно ли таким образом разрезать лист на 40 частей? Докажите, что можно получить любое число частей, большее 40.

50. Найдите такое десятизначное число, состоящее из всех десяти цифр, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на три, и так далее до того, что само число делится на 10.

51. Докажите, что число  $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 1990 \cdot 1992 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 1989 \cdot 1991$  делится на 1993.

52. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не меньше двух фигур. Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фигуре? Исследуйте вопрос в случае, если на каждой горизонтали и вертикали первоначально стоят ровно по две фигуры.

53. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

54. Имеются 9 кг крупы и чашечные весы с двумя гирями в 50 и 200 г. Попробуйте за три взвешивания отвесить 2 кг этой крупы. Можно ли это сделать, если имеется лишь одна гиря в 200 г?

55. Докажите, что высота треугольника, опущенная на большую сторону, не больше суммы длин перпендикуляров, опущенных из произвольной точки этой стороны на две другие стороны этого треугольника.

56. Если вечером на Поле Чудес закопать золотые монеты, то к утру на их месте вырастут одинаковые деревья с золотыми монетами на ветвях. Буратино пришел на Поле Чудес в понедельник, имея 5 золотых монет. Он хочет получить не меньше 1992 монет. Вырастив первые деревья, он понял, что сможет добиться своего не раньше среды, но не позже пятницы. Сумеет ли он оказаться владельцем ровно 1992 монет?

57. Целые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $ab + bc + ca = 0$ . Докажите, что число  $abc$  может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

58. Правильный треугольник со стороной  $n$  разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной единица. Сколько существует различных равносторонних треугольников, вершины которых являются вершинами этих единичных треугольников? (Заметим, что при  $n = 1$  это число равно 1, при  $n = 2$  оно равно 5, а при  $n = 3$  равно 15.)

59. Гавиал, бегемот, пеликан и кашалот съели в общей сложности 37 рыб, причем кашалот съел во столько же раз больше пеликана, во сколько пеликан съел больше гавиала. Сколько рыб съел каждый?

60. Когда закончился волейбольный турнир (в один круг), оказалось, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и все побежденные ею команды. Сколько команд участвовало в турнире?

61. Внутри треугольника отмечена точка  $M$ . Пусть  $L$  — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку  $M$  с вершинами, а  $l$  — длина наименьшего из отрезков, соединяющих точку  $M$  с серединами сторон. Докажите, что  $L \geq 2l$ .

62. Нетрудно проверить, что

2 делится на  $2^1$

3 · 4 делится на  $2^2$

4 · 5 · 6 делится на  $2^3$ .

Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

63. Тетрадный лист имеет размеры  $33 \times 41$  клеток. Можно ли в его клетки записать все числа от 1 до  $33 \times 41 = 1353$  так, чтобы в каждом квадратике  $2 \times 2$  сумма записанных в нем четырех чисел была одна и та же?

64. Таксомоторный парк решил устроить ученикам подшефной школы экскурсию. Когда к дверям школы подъехала колонна микроавтобусов и «Волг», то ребята быстро расселись по 12 человек в каждом «Рафике» и по 7 человек в каждой «Волге». Когда подъехали еще три машины, то школьники пересели так, что в каждой «Волге» стало 6 человек, а в каждом «Рафике» 11. Можно ли заказать еще несколько машин так, чтобы в каждой «Волге» было по 5 школьников, а каждом «Рафике» по 10?

65. В 1988 г. телевидение Анчурии начало демонстрацию телесериала «По колено в слезах», причем в каждом году, начиная с 1989-го, было показано либо на 40 % больше, либо на 40 % меньше серий, чем в предыдущем. Чтобы не наносить большого ущерба экономике страны, ежедневно показывали не больше двух серий. При просмотре 1230-й серии зрители были опечалены ссорой главных героев, но ровно через два года, в 1992 г., порадовались их счастливому примирению в последней серии. Сколько серий содержал этот замечательный телефильм?

66. Укажите хотя бы одно шестизначное число, являющееся кубом, такое, что все числа, получающиеся из него циклическими перестановками цифр, делятся на кубический корень из этого числа.

67. Каждая грань кубика разбита на четыре квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24 полученных квадратов окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

# СПИСОК ЗАДАЧ ПО ТЕМАМ

---

## I. Алгебра, арифметика, теория чисел, последовательности, вероятность

| Номер задачи | Название   | Страница   |
|--------------|--|------------|
| 4.           | Паромы   | 11         |
| 6.           | Шоферская задача                                   | 13         |
| 10.          | $\cos 17x = f(\cos x)$                             | 18         |
| 15.          | Цифры числа $4444^{4444}$                          | 25         |
| 16.          | $\sigma(n) + \varphi(n) = n \cdot d(n)$            | 26         |
| 18.          | Сумма минимумов                                    | 29         |
| 19.          | Три последние цифры числа $7^{9999}$               | 30         |
| 20.          | Катящаяся игральная кость                          | 31         |
| 22.          | Двойная последовательность                         | 33         |
| 26.          | $a^b$ и $b^a$                                      | 44         |
| 27.          | Математическая шутка                               | 45         |
| 30.          | Система диофантовых уравнений                      | 52         |
| 33.          | Снежки   | 58         |
| 34.          | Цифры чисел с единицы по миллиард                  | 59         |
| 36.          | Одно диофантово уравнение                          | 65         |
| 37.          | Последовательность Фибоначчи                       | 67         |
| 40.          | Совершенные числа                                  | 74         |
| 41.          | Стороны четырехугольника                           | 76         |
| 42.          | Простые числа в арифметической прогрессии          | 76         |
| 44.          | Коровы и овцы                                      | 80         |
| 45.          | Последовательность квадратов                       | 81         |
| 49.          | О функции $\pi(n)$                                 | 86         |
| 52.          | Утяжеленные игральные кости                        | 91         |
| 53.          | Курьезная последовательность                       | 92         |
| 54.          | Длинные цепочки последовательных натуральных чисел | 95         |
| 56.          | Треугольные числа                                  | 99         |
| 58.          | Числа Ферма  | 106        |
| 59.          | Неравенство обратных величин                       | 108        |
| 60.          | Четвертая степень                                  | 108        |
| 62.          | Красные и зеленые мячи                             | 114        |
| 63.          | Составные члены в арифметической прогрессии        | 115        |
| 65.          | Тесты  | 118        |
| 67.          | Еще одно диофантово уравнение                      | 122        |
| 68.          | Необыкновенное свойство комплексных чисел          | 123        |
| 70.          | Повторяющиеся цифры в конце квадрата               | 126        |
| 72.          | Система неравенств                                 | 128        |
| 74.          | Еще раз о полных квадратах                         | 130        |
|              |  | <b>171</b> |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 75. | Необыкновенный многочлен                 | 133 |
| 77. | Легконаходимый остаток                   | 137 |
| 78. | Любопытное свойство числа 3.             | 137 |
| 80. | Всегда квадрат                           | 139 |
| 81. | Группировка натуральных чисел            | 139 |
| 83. | Дроби, полученные с помощью перестановки | 141 |
| 84. | О биномиальных коэффициентах             | 142 |
| 85. | Число Ферма $F_{73}$                     | 143 |
| 87. | Специальные тройки натуральных чисел     | 147 |
| 88. | Суммы простых чисел                      | 147 |
| 89. | Еще одна курьезная последовательность    | 149 |

## II. Комбинаторика, комбинаторная геометрия (максимумы и минимумы)

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.  | Шахматный турнир                                | 7   |
| 2.  | Упорядоченные разбиения числа $n$               | 8   |
| 3.  | Области в круге                                 | 9   |
| 8.  | Раскрашивание плоскости                         | 17  |
| 11. | Квадрат на решетке                              | 19  |
| 13. | Крестики-нолики                                 | 23  |
| 21. | Протыкание куба                                 | 32  |
| 23. | Окружности, разбивающие точечные множества      | 35  |
| 28. | Карты на сфере                                  | 46  |
| 29. | Выпуклые области на плоскости                   | 49  |
| 32. | Элегантно разрушенная шахматная доска           | 53  |
| 35. | Примыкающие непересекающиеся единичные квадраты | 60  |
| 39. | Разделенные целочисленные точки                 | 72  |
| 47. | Красные и синие точки                           | 84  |
| 51. | Количество внутренних диагоналей                | 89  |
| 61. | Упакованные квадраты                            | 109 |
| 69. | Цепочка окружностей                             | 123 |
| 90. | Эллипс и целочисленная решетка                  | 154 |

## III. Геометрия (максимумы и минимумы)

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 5.  | Выпячивающаяся полуокружность                     | 12  |
| 7.  | Ширмы в углу                                      | 15  |
| 9.  | Очевидный максимум                                | 18  |
| 12. | Непрозрачный квадрат                              | 21  |
| 14. | Удивительное свойство прямоугольных треугольников | 24  |
| 17. | О $k$ -облаках                                    | 28  |
| 24. | О длинах сторон треугольника                      | 38  |
| 25. | Пожалуйста, не вычисляйте                         | 39  |
| 31. | Отраженные касательные                            | 53  |
| 38. | Неравенство Эрдеша                                | 70  |
| 43. | О чевианах  | 78  |
| 46. | Вписанный десятиугольник                          | 81  |
| 48. | Метод Шаля  | 85  |
| 50. | Постоянная хорда                                  | 88  |
| 55. | Минимальный вписанный четырехугольник             | 96  |
| 57. | О правильном $n$ -треугольнике                    | 104 |

|     |  |     |
|-----|--|-----|
| 64. | Приложенные равносторонние треугольники                          | 116 |
| 66. | Приложение теоремы Птолемея                                      | 119 |
| 71. | Биссектриса угла   | 127 |
| 73. | Неожиданное свойство правильного 26-угольника                    | 128 |
| 76. | Центроиды на окружности  | 134 |
| 79. | Квадрат внутри квадрата  | 138 |
| 82. | Треугольники, стороны которых образуют арифметическую прогрессию | 140 |
| 86. | Вписанный четырехугольник  | 146 |
| 91. | Архимедовы треугольники  | 159 |

Научно-популярное издание

ХОНСБЕРГЕР Росс (США)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗЮМИНКИ

---

Библиотечка «Квант», выпуск 83

Заведующий редакцией *Н. А. Носова*  
Редактор *Г. С. Куликов*  
Художник *Б. М. Рябышев*  
Художественный редактор *Г. М. Коровина*  
Технический редактор *Е. В. Морозова*  
Корректоры *Т. С. Вайсберг, В. П. Сорокина*

ИБ № 41078

Сдано в набор 08.06.92. Подписано к печати 23.11.92. Формат  $84 \times 108^{1/32}$ .  
Бумага типографская № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая.  
Усл. печ. л. 7,59. Усл. кр.-отт. 7,94. Уч.-изд. л. 8,38. Тираж 55 450 экз.  
Заказ № 261. С—091.

Издательско-производственное объединение «Наука».  
Главная редакция физико-математической литературы.  
117071, Москва, Ленинский проспект, 15.

Новосибирская типография № 4 ВО «Наука».  
630077, г. Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»**  
**ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ В СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

- Вып. 1. М. П. Бронштейн. Атомы и электроны.  
Вып. 2. М. Фарадей. История свечи.  
Вып. 3. О. Оре. Приглашение в теорию чисел.  
Вып. 4. Опыты в домашней лаборатории.  
Вып. 5. И. Ш. Слободецкий, Л. Г. Асламазов. Задачи по физике.  
Вып. 6. Л. П. Мочалов. Головоломки.  
Вып. 7. П. С. Александров. Введение в теорию групп.  
Вып. 8. В. Г. Штейнгауз. Математический калейдоскоп.  
Вып. 9. Замечательные ученые.  
Вып. 10. В. М. Глушков, В. Я. Валах. Что такое ОГАС?  
Вып. 11. Г. И. Копылов. Всего лишь кинематика.  
Вып. 12. Я. А. Смородинский. Температура.  
Вып. 13. А. Е. Карпов, Е. Я. Гик. Шахматный калейдоскоп.  
Вып. 14. С. Г. Гиндикин. Рассказы о физиках и математиках.  
Вып. 15. А. А. Боровой. Как регистрируют частицы.  
Вып. 16. М. И. Каганов, В. М. Цукерник. Природа магнетизма.  
Вып. 17. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии: Планиметрия.  
Вып. 18. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. Беседы о преломлении света.  
Вып. 19. А. Л. Эфрос. Физика и геометрия беспорядка.  
Вып. 20. С. А. Пикин, Л. М. Блинов. Жидкие кристаллы  
Вып. 21. В. Г. Болтянский, В. А. Ефремович. Наглядная топология.  
Вып. 22. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. Задачи по математике: Алгебра и анализ.  
Вып. 23. А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. Введение в теорию вероятностей.  
Вып. 24. Е. Я. Гик. Шахматы и математика.  
Вып. 25. М. Д. Франк-Каменецкий. Самая главная молекула.  
Вып. 26. В. С. Эдельман. Вблизи абсолютного нуля.  
Вып. 27. С. Р. Филонович. Самая большая скорость.  
Вып. 28. Б. С. Бокштейн. Атомы блуждают по кристаллу.  
Вып. 29. А. В. Бялко. Наша планета — Земля.  
Вып. 30. М. Н. Аршинов, Л. Е. Садовский. Коды и математика.  
Вып. 31. И. Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии: Стереометрия.  
Вып. 32. В. А. Займовский, Т. Л. Колупаева. Необычайные свойства обычных металлов.  
Вып. 33. М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин. Знакомство с полупроводниками.  
Вып. 34. В. Н. Дубровский, Я. А. Смородинский, Е. Л. Сурков. Релятивистский мир.  
Вып. 35. А. А. Михайлов. Земля и ее вращение.  
Вып. 36. А. П. Пурмаль, Е. М. Слободская, С. О. Травин. Как превращаются вещества.  
Вып. 37. Г. С. Воронов. Штурм термоядерной крепости.  
Вып. 38. А. Д. Чернин. Звезды и физика.  
Вып. 39. В. Б. Брагинский, А. Г. Полнарев. Удивительная гравитация.  
Вып. 40. С. С. Хилькевич. Физика вокруг нас.  
Вып. 41. Г. А. Звенигородский. Первые уроки программирования.



- Вып. 42. Л. В. Тарасов. Лазеры: Действительность и надежды.
- Вып. 43. О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов. Международные физические олимпиады школьников.
- Вып. 44. Л. Е. Садовский, А. Л. Садовский. Математика и спорт.
- Вып. 45. Л. Б. Окунь  $\alpha, \beta, \gamma, \dots Z$  (Элементарное введение в физику элементарных частиц).
- Вып. 46. Я. Е. Гегузин. Пузыри.
- Вып. 47. Л. С. Марочник. Свидание с кометой.
- Вып. 48. А. Т. Филиппов. Многоликий солитон.
- Вып. 49. К. Ю. Богданов. Физик в гостях у биолога.
- Вып. 50. Занимательно о физике и математике.
- Вып. 51. Х. Рачлис. Физика в ванне.
- Вып. 52. В. М. Липунов. В мире двойных звезд.
- Вып. 53. И. К. Кикоин. Рассказы о физике и физиках.
- Вып. 54. Л. С. Понтрягин. Обобщения чисел.
- Вып. 55. И. Д. Данилов. Секреты программируемого микрокалькулятора.
- Вып. 56. В. М. Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах.
- Вып. 57. А. А. Силин. Трение и мы.
- Вып. 58. Л. А. Ашкинази. Вакуум для науки и техники.
- Вып. 59. А. Д. Чернин. Физика времени.
- Вып. 60. Задачи московских физических олимпиад.
- Вып. 61. М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. Геометрия масс.
- Вып. 62. Р. Фейнман. Характер физических законов.
- Вып. 63. Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов. Удивительная физика.
- Вып. 64. А. Н. Колмогоров. Математика — наука и профессия.
- Вып. 65. М. Е. Левинштейн, Г. С. Симин. Барьеры (от кристалла до интегральной схемы).
- Вып. 66. Р. Фейнман. КЭД — странная теория света и вещества.
- Вып. 67. Я. Б. Зельдович, М. Ю. Хлопов. Драма идей в познании природы (частицы, поля, заряды).
- Вып. 68. И. Д. Новиков. Как взорвалась Вселенная.
- Вып. 69. М. Б. Беркинблит, Е. Г. Глаголева. Электричество в живых организмах.
- Вып. 70. А. Л. Стасенко. Физика полета.
- Вып. 71. А. С. Штейнберг. Репортаж из мира сплавов.
- Вып. 72. В. Р. Полищук. Как исследуют вещества.
- Вып. 73. Л. Кэрролл. Логическая игра.
- Вып. 74. А. Ю. Гросберг, А. Р. Хохлов. Физика в мире полимеров.
- Вып. 75. А. Б. Мигдал. Квантовая физика для больших и маленьких.
- Вып. 76. В. С. Гетман. Внуки Солнца: Астероиды, кометы, метеорные тела.
- Вып. 77. Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. Математические бильярд: Бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики.
- Вып. 78. В. Е. Белонучкин. Кеплер, Ньютон и все, все, все...
- Вып. 79. С. Р. Филонович. Судьба классического закона.
- Вып. 80. М. П. Бронштейн. Солнечное вещество; Лучи икс; Изобретатели радиотелеграфа.
- Вып. 81. А. И. Буздин, А. Р. Зильберман, С. С. Кротов. Раз задача, два задача...
- Вып. 82. Я. И. Перельман. Знаете ли вы физику?
- Вып. 83. Р. Хонсбергер. Математические изюминки.
- Вып. 84. Ю. Р. Носов. Дебют оптоэлектроники.

