



БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •

ВЫПУСК 44

Л. Е. САДОВСКИЙ

А. Л. САДОВСКИЙ

МАТЕМАТИКА И СПОРТ

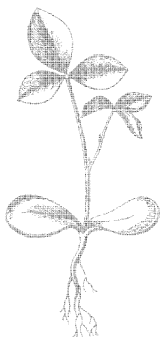




БИБЛИОТЕЧКА • КВАНТ •
выпуск 44

Л. Е. САДОВСКИЙ
А. Л. САДОВСКИЙ

МАТЕМАТИКА И СПОРТ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1985

ББК 22.1 + 75
С14
УДК 51 + 796/799(023)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Академик **И. К. Кикоин** (председатель), академик **А. Н. Колмогоров** (заместитель председателя), профессор **Л. Г. Асламазов** (ученый секретарь), член-корреспондент АН СССР **А. А. Абрикосов**, академик **Б. К. Вайнштейн**, заслуженный учитель РСФСР **Б. В. Воздвиженский**, профессор **С. П. Капица**, академик **С. П. Новиков**, академик **Ю. А. Осипьян**, академик АПН СССР **В. Г. Разумовский**, академик **Р. З. Сагдеев**, профессор **Я. А. Смородинский**, академик **С. Л. Соболев**, член-корреспондент АН СССР **Д. К. Фаддеев**, член-корреспондент АН СССР **И. С. Шкловский**.

Рецензент
академик АН УССР **Б. В. Гнеденко**

Садовский Л. Е., Садовский А. Л.
С 14 Математика и спорт. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 192 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 44).

Многие спортивные ситуации целесообразно рассматривать, анализировать и оценивать с математических позиций. Некоторые из таких ситуаций, подлающиеся изучению методами прикладной математики, рассмотрены в настоящей книге. Изложение ведется на двух уровнях. На одном — в описательной форме приведены постановки задач и указаны методы их решения. На другом уровне построены математические модели поставленных задач, рассмотрен, с той или иной степенью подробности и строгости, необходимый математический аппарат, знакомство с которым можно продолжить по специальной литературе.

Для школьников, спортсменов, тренеров, преподавателей математики и физкультуры.

С 1702000000 — 118 191-85
053(02)-85

ББК 22.1 + 75

© Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1985

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПОРТА И СПОРТ ДЛЯ МАТЕМАТИКИ (ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ)	5
2. ЧТО ТАКОЕ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА?	9
2.1. О «чистой» и «прикладной» математике	9
2.2. Каковы особенности прикладной математики?	12
2.3. Математические модели	16
2.4. Исследование операций	18
2.5. Об основных понятиях исследования операций	20
3. ПЯТЬ СЕТОВ. ПОЧЕМУ? (МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИГРЫ В ТЕННИС)	22
3.1. Немного истории	22
3.2. Аксиомы тенниса	24
3.3. Арифметика тенниса	25
3.4. Как долго следует играть?	27
3.5. Начальные понятия теории вероятностей	29
3.6. Модель игры — марковская цепь	31
3.7. Начнем играть!	33
3.8. Завершаем розыгрыш гейма	34
3.9. Воспользуемся векторными операциями	35
3.10. Продолжим игру до сета	37
3.11. Выясним отношения!	39
3.12. Играя — обучайся!	40
3.13. Модель тай-брейка (Завершим тай-брейк!)	42
3.14. Марковские процессы — с дошкольных лет	43
4. АХ, ЭТИ СУДЬИ!	46
4.1. Экспертиза — что это такое?	47
4.2. Ранжировки	49
4.3. О недостатках принципа большинства	50
4.4. О судействе в фигурном катании	53
4.5. Многоотуровые экспертизы и их моделирование	62
4.6. Иерархическая экспертиза (судейство в спортивной гимнастике)	64
4.7. Об экспертизе вообще (с позиций методологии наук точных и гуманитарных)	67
5. ПОГОВОРИМ О РЕКОРДАХ	73
5.1. Случайные величины и их характеристики	74
5.2. Быстрее!	77
5.3. Выше!	81
5.4. Сильнее!	86
5.5. Прыжок в XXI век?	90

6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СПОРТИВНЫХ ЗАДАЧАХ	92
6.1. Расстановка игроков в баскетбольной команде	92
6.2. Футбольные клубы и спортсмены	98
6.3. Некоторые основные понятия и факты	102
6.4. Задача о спортивном рационе	108
6.5. О задачах линейного программирования	111
6.6. Угловые точки и выпуклые комбинации	116
6.7. Угловые точки и допустимые решения	119
6.8. Симплекс-метод	122
6.9. Организация тренировочного процесса: на улице или в помещении?	124
6.10. Некоторые общие суждения	127
7. ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ	130
7.1. «Метеор» – «Вымпел» (на футбольную тему)	130
7.2. Немного о матричных играх	135
7.3. Задача о финишном рывке	144
7.4. Поговорим об «игре с природой»	149
7.5. Как смазать лыжи	150
7.6. Железная игра	154
7.7. Матричные игры и линейное программирование	160
7.8. «Полосатые ребята» – «Липовый лист» (на хоккейную тему)	161
7.9. Формирование команды пловцов	164
8. ОРГАНИЗАЦИЯ СОРЕВНОВАНИЙ – ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ	165
8.1. Олимпийская система	166
8.2. Круговая система	168
8.3. Схевенингенская система и латинские квадраты	171
9. О СПОРТИВНЫХ КЛАССИФИКАЦИЯХ	175
9.1. Принципы построения спортивных классификаций	175
9.2. Международная теннисная классификация	182
9.3. Отечественные системы классификаций теннисистов	183
10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	184
10.1. Предостережение от увлечений	184
10.2. Побуждения к исследованиям	185
10.3. Краткий обзор приложений	186
10.4. Собственно заключение	188
Список литературы	190

1. МАТЕМАТИКА ДЛЯ СПОРТА И СПОРТ ДЛЯ МАТЕМАТИКИ (ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ)

Математика и спорт, казалось бы, далеки друг от друга. Но это только на первый взгляд. Лишь по недоразумению многим юношам и девушкам занятия точными науками и спортом представляются малосовместимыми. Это происходит из-за отсутствия опыта или из-за того, что часто в школе с хорошо поставленным преподаванием точных наук уроки физической культуры организованы менее удачно. Во всяком случае, среди школьников, которых мы привыкли считать способными и умными, встречается несколько пренебрежительное отношение к физкультуре, спортивным играм, к регулярным физическим нагрузкам. В то же время многие представители различных наук и, в частности, математики и физики старшего поколения с большим вниманием относятся к своим спортивным занятиям. Знают они, что занятия спортом способствуют гармоническому развитию личности, что спорт закаляет человека физически и духовно.

За последние десятилетия произошли существенные изменения условий жизни, произошел качественный скачок в образовании, особенно в области точных наук. Возросший поток информации увеличил психологические нагрузки в сфере служебных обязанностей; занятия в школе и вузе стали более напряженными. Новые условия жизни, учебы и работы требовали от молодежи (и даже от людей взрослых) определенной психологической и физической устойчивости. Мы убеждены на основании наблюдений и собственного опыта, что такая устойчивость особенно необходима тем, кто занимается математикой и физикой. Ученым, занятым творческой работой, известны и радость открытия (одна из удивительных радостей жизни, не всем знакомая), и напряженный труд, и горечь отказа от некоторых развлечений, и усталость, которая сопутствует периодам напряженной работы. Норберт Винер

писал: «Интенсивная исследовательская работа изматывает до предела. Если ученый лишится возможности отдыхать с такой же полнотой, с которой он отдается работе, это сразу же скажется на качестве его статей» *).

Многие стремятся к «разрядке умственной напряженности». Однако разные люди эту разрядку обретают различными путями. Одни увлекаются бриджем (разве это не игра для математиков?!), другие шахматами (шахматное искусство достойно мудрых!), третьи — эпизодическими прогулками и очень немногие — физической культурой. Большинство считает, что ни бридж, ни шахматы, ни японская игра «го», ни другие игры, требующие умственного напряжения, не приносят настоящего отдыха. Бытует также (может быть, спорное) убеждение, что серьезные занятия одновременно математикой и шахматами невозможны. Приводят примеры, среди них один наиболее яркий: Э. Ласкер, став выдающимся шахматистом и чемпионом мира, ушел из математики, в которой раньше активно работал, и имел результаты, вошедшие в учебники.

Кое-кто из деятелей науки утверждает, что крепкие чаи и напитки приносят ясность мысли и некоторый творческий подъем. Полезно, однако, испробовать другие средства: регулярно заниматься посильными физическими упражнениями, пробежками, посещать плавательный бассейн или приобщиться к спортивным играм — теннису, баскетболу, бадминтону, волейболу и другим. Вновь сошлемся на Норберта Винера, который считал, что ему лучше всего писалось, когда умственная работа чередовалась с простыми, не требующими умственной нагрузки удовольствиями — прогулками, плаванием. Поклонникам интеллектуальных игр полезно знать, что в спорте и спортивных играх ум, образование, расчет — вещи далеко не лишние. Так, например, хороший теннисист должен обладать разнообразной и тонкой техникой ударов. Это требует огромного труда, сравнимого с трудом скрипача. Но, выходя на корт, теннисист встречается с соперником, который, как правило, не уступает ему в технике. И здесь уже все решает тактика, сметка, расчет и предвидение. Недаром подавляющая часть хороших теннисистов — образованные и умные люди, недаром среди ученых теннис — широко распространенная игра. Но теннис не исключение, аналогичные соображения можно было бы высказать относительно других спортивных игр: по мнению крупных авторитетов современный спорт вообще становится в последние годы все более интеллектуальным. Следует также иметь в виду, что не только

*) Винер Н. Я — математик. — М.: Наука, 1967, с. 123.

шашки, шахматы, карточные игры или бильярд служат источником многих интересных задач. Их можно встретить в спорте повсюду. Математические методы все шире используются в спорте. Подумайте, сколько еще нерешенных проблем возникает при рассмотрении взаимодействия мяча и ракетки, мяча с грунтом или травой. В этой книжке среди другого материала вы обнаружите обсуждение системы игры в теннис с позиций теории марковских процессов, судейства в фигурном катании — с позиции экспертных оценок и многое другое.

Известно, что методами математической статистики устанавливают перспективность спортсменов, условия, наиболее благоприятные для тренировок, их эффективность, обрабатывают показания датчиков, контролирующих нагрузки спортсменов. Теория информации позволяет оценить степень загруженности зрительного аппарата при занятиях различными видами спорта (горнолыжным, настольным теннисом и др.). Математика и физика помогают изыскивать наиболее удачные формы гребных судов и весел. Существует мнение, что идеи П. Л. Чебышева, касающиеся раскроя тканей, были использованы при конструировании суконной оплетки теннисного мяча *).

В то же время занятия спортом благотворно влияют на умственную деятельность и психику человека, укрепляют его волю. Этот факт бесспорен для многих ученых, занимающихся плаванием, теннисом, бегом, лыжами, альпинизмом.

Можно утверждать, что удивительное творческое долголетие многих наших выдающихся математиков и физиков обеспечивается их дружбой со спортом.

Следует назвать многих крупных ученых — Б. Понтекорво, Дж. Литлвуда, Р. Пэли — сочетавших науку со спортом. Нильс Бор и Харольд Бор играли в классной футбольной команде, Нильс Бор был отличным лыжником, Альберт Эйнштейн увлекался вождением яхт (а не только игрой на скрипке). О математиках и физиках — альпинистах следовало бы написать целую книгу. Как тут не вспомнить Чарли Чаплина, писавшего, что в минуты тяжелых переживаний и неприятностей он брал ракетку, отправлялся к тренировочной стенке

*) Профессор кафедры «Прикладная математика» МИИТ Е. С. Вентцель рассказала нам, что, будучи студенткой математического факультета Ленинградского университета, слышала от своих учителей о лекции по раскрою одежды, объявленной П. Л. Чебышевым. Среди слушателей было много портных. Лекцию П. Л. Чебышев начал словами: «Предположим, что человек имеет форму шара».

и бил о нее час — два мячом, пока не становилось легче на душе и не возвращалось спокойствие.

Если сравнить детей, получивших физическое воспитание, с детьми, которые не увлекались спортом, то можно заметить, что первые легче преодолевают трудности в жизни, учебе, успешнее борются с болезнями.

Существуют различные пути в любительский спорт, в жизнь, где учеба, а затем работа и творчество сочетаются с физическими нагрузками. Этими путями никогда не поздно воспользоваться.

Очень многое дает школа: уроки физической культуры, лыжные прогулки, посещение плавательных бассейнов, подготовка к сдаче норм ГТО. Кроме того, при отделах народного образования, дворцах пионеров, при спортивных обществах функционируют многочисленные детские спортивные школы. В них особенно охотно принимаются школьники младших классов.

Под руководством кафедр физического воспитания и спорта проходят занятия в вузах. Помимо (а иногда и вместо) обязательных занятий можно тренироваться в специализированных секциях: плавания, борьбы, гимнастики, легкой или тяжелой атлетики, баскетбола, волейбола и др. При увлеченности и усердии достижимы спортивные разряды. Все это не только не мешает, но благоприятствует учебе. Следует лишь разумно распоряжаться бюджетом своего времени. Разнообразные возможности доставляют спортивные общества, повсюду имеющие свои секции. Таким образом, на пути в спорт очень многое зависит от нас самих. Спорт приносит уверенность в собственных силах и успехи в деле служения обществу, родине.

Возможно, что читатель, раскрывший эту книгу, верит в полезность спортивных занятий и находит для них место в своем бюджете времени.

Не исключено также, что спектр читателей окажется достаточно широким — от лиц, близких к точным наукам, но далеких от спорта, до тех, кто близок к спорту, но далек от наук точных (от математики — в первую очередь).

Хорошо известно, что спорт является неисчерпаемым источником весьма интересных и трудных проблем, к которым имеют прямое отношение многие науки: медицина, биомеханика, гидро- и аэродинамика, социология, статистика и другие. Эти проблемы изучают, решают, о них рассказывают специалисты из соответствующих областей знаний. Охватить их в достаточной общности в рамках небольшого издания невозможно; а для нас — и непосильно. В этой книге мы

попытаемся привлечь внимание читателя как к возможности изучения многих ситуаций в спорте с математических позиций, так и к целесообразности более обоснованных количественных и качественных оценок спортивных явлений. Мы рассмотрим лишь некоторые из спортивных ситуаций, поддающихся изучению методами молодой математической теории — «исследование операций». Возникшие в последние четыре десятилетия эти методы стали играть значительную роль в прикладной математике.

2. ЧТО ТАКОЕ ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА?

2.1. О «чистой» и «прикладной» математике

Трудно указать предмет, который вызвал бы в последние годы столь ожесточенные споры среди людей, имеющих отношение к математике. Пока идут эти споры, во всех промышленно развитых странах развернулась широкая подготовка специалистов в области прикладной математики; в частности, и в наших институтах специальность «прикладная математика» превращается в одну из наиболее популярных. В то же время многие выдающиеся специалисты утверждают, что никакой прикладной математики вообще нет...

Что же это за область, «которой нет»? И чем занимаются специалисты в этой (еще неизвестно, существующей ли) области?

Математика начала применяться еще до того, как стала наукой. Простые арифметические и геометрические понятия и закономерности проникали во все области человеческой деятельности. Во времена же расцвета античного мира произошло оформление математики как науки с ее характерным дедуктивным методом, согласно которому все ее утверждения выводятся по строгим логическим правилам из немногочисленных исходных положений, принимаемых без доказательства, как аксиомы. С этого периода началось построение грандиозного здания математики.

Попутно с развитием математики расширялся и круг ее приложений. Многие важные математические понятия и методы были созданы специально для решения прикладных задач и лишь затем анализировались, развивались и обобщались в «чисто математическом» плане. Отдельные дисциплины

лины — небесная механика, теоретическая электротехника, теория прочности, теоретическая физика и некоторые другие — оказались буквально «нашпигованными» математикой.

Однако до последних десятилетий сравнительно сложные разделы математики применялись все же лишь в небольшом числе традиционных областей науки и техники; да и там сложные задачи часто не удавалось довести до практически приемлемого решения.

В наше время электронные цифровые вычислительные машины в корне изменили представление о возможностях применения математики. С помощью ЭВМ были решены многие ранее поставленные математические задачи прикладного характера, а также и новые задачи и проблемы, относящиеся как к традиционным областям приложений, так и к новым областям, где ранее математика не находила применения. Оказалось, что не только конкретные математические результаты, но и сам строй математического мышления приносит неоценимую пользу в самых разных областях науки, техники, экономики, всей человеческой деятельности. Наступает качественно новый период развития математики — период «всеобщей математизации».

И вот стало отчетливо видно, что математика в процессе ее приложений приобретает ряд характерных особенностей, черт, родственных для различных областей приложения и в то же время порой существенно отличающихся от привычных черт «чистой» математики. Традиционное выдвижение на первый план логического совершенства, глубины и общности формулировок далеко не всегда отвечает жестким требованиям современных приложений — своевременности, эффективности, экономичности. Вследствие этого получилось, что специалисты в области «чистой» математики часто оказывались не в состоянии математику эффективно применять. Возникла настоятельная потребность в специалистах нового типа.

Прикладная математика призвана создавать, изучать, развивать и совершенствовать методы применения математики к задачам, возникающим за ее пределами. Таким образом, при достаточно широком взгляде на математику прикладная математика является неотъемлемой частью «математики вообще». При этом не следует представлять себе упрощенно, что будто бы математику можно отчетливо разделить на «чистую» и «прикладную» или что прикладная математика — это математическая дисциплина типа алгебры или геометрии.

Применяться могут самые разнообразные разделы математики, и огромное число математических понятий и методов являются как «чистыми», так и «прикладными» (или «преиму-

щественно чистый», «преимущественно прикладными» и т. п.), т. е. могут входить как в чисто математические, так и в прикладные исследования. Поэтому более правильно говорить о чистой и прикладной математике не как о разделах математики, а как о ее аспектах, подходах к ней, отвечающих, соответственно, тезисам «математика как цель» и «математика как средство». И оказывается, что многие понятия, методы, утверждения в этих двух подходах не только играют существенно различную роль, но порой наполняются и различным содержанием (см. 2.2).

Широко известен афоризм: «чистая математика делает то, что можно, так, как нужно, а прикладная — то, что нужно, так, как можно». В действительности не существует бесспорных признаков, по которым можно классифицировать математические конструкции на чистые и прикладные. Все относительно. Так, например, во времена Карла Гаусса (1777—1855) комплексные числа большинством математиков рассматривались как весьма абстрактные объекты. Но прошли годы, возникла теория функций комплексного переменного, и ее аппарат нашел приложения в гидро- и аэродинамике (в расчетах подъемной силы крыла самолета), в теоретической электротехнике и других областях. Абстрактная теория групп, ведущая свое начало от работ Жозефа Лагранжа (1736—1813), нашла изумительное применение в конкретных задачах кристаллографии, теоретической физики, в квантовой механике, в теории кодирования (математической теории передачи сообщений по каналам связи). Существование некоторых элементарных частиц было предвосхищено теорией групп задолго до их фактического обнаружения. Существование позитрона и мезона постулировалось в работах П. Дирака и Юкавы. Свойства этих частиц изучались математическими методами до экспериментального доказательства их существования. В терминах теории групп Феликс Клейн (1849—1925) классифицировал различные разделы геометрии. Понятие группы, наряду с понятиями множества, функции, предела, стало одним из основных в математике. Подобными примерами перерастания чистого в прикладное и обратными процессами история математики очень богата.

Об этом же писал Ф. Клейн*): «Чисто логические концепции должны составить, так сказать, твердый скелет организма математики, сообщаящий ей устойчивость и достоверность. Но самая жизнь математики, важнейшие наведения и

*) Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. — М.: ГТИ, 1934.

ее продуктивность относятся преимущественно к ее приложениям, т. е. к взаимным отношениям ее абстрактных объектов со всеми другими областями. Изгнать приложения из математики — это то же, что искать живое существо с одной только костной основой без мускулов, нервов, сосудов».

Пока дисциплин, основанных на систематическом применении математики, было немного, а сами методы этого применения были не слишком сложны, потребности в большом числе специалистов по прикладной математике не было. С легкими математическими задачами справлялись сами представители этих дисциплин, а более трудные и принципиально новые задачи изучали такие великие ученые, как Б. Риман, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунов и другие (которые были одновременно специалистами как по чистой, так и по прикладной математике!). Однако в период всеобщей математизации, когда прикладные математические задачи становятся все более сложными и разнообразными, такого сочетания усилий недостаточно: великих ученых не хватает на все задачи! В то же время существенный вклад в решение таких задач из самых разнообразных областей человеческой деятельности сейчас могут внести лишь специалисты с широким математическим образованием, владеющие методами применения математики и обладающие соответствующими интересами и навыками. Это и есть «прикладные» математики. В зависимости от темперамента и обстоятельств они могут специализироваться либо в какой-то определенной области приложения математики, например, использовать математические методы в задачах спорта, либо же, будучи в первую очередь математиками, переходить от одной области к другой; могут работать в составе групп или же самостоятельно.

И, наконец, отметим, что, несмотря на многовековую историю применения математики и огромный опыт такого применения к конкретным задачам, изучение принципов и общих методов этого применения только начинается. Возможно, некоторые из наших читателей примут участие в изучении, систематизации и совершенствовании этих принципов и методов, т. е. в оформлении своеобразной дисциплины — прикладной математики и в выходах ее в спортивную тематику.

2.2. Каковы особенности прикладной математики?

Говоря теперь о чистой и прикладной математике, мы будем, с одной стороны, иметь в виду «академическую» математику, изучаемую на математических факульте-

тах университетов и целиком основанную на дедуктивном методе, а с другой стороны — математику в том виде, который она приобретает в процессе приложений.

Естественно, что содержание многих понятий, утверждений, методов и в чистой, и в прикладной математике одинаково или почти одинаково (пример — теорема Пифагора). Однако сейчас мы сосредоточим внимание на различиях.

Существование решения. Вопрос «имеет ли данная задача решение» не так прост, как может показаться на первый взгляд; и зачастую «чистый» и «прикладной» математики дают на него прямо противоположные ответы. Не углубляясь в философские и логические дебри, поясним сказанное на примере.

Американские студенты увлекаются игрой в «гекс». Играют двое на четырехсторонней доске из правильных шестиугольников (в качестве доски, например, можно использовать кафельный пол) фишками двух цветов: «черными» и «полосатыми». Обычно размеры доски — 11×11 шестиугольников (см. рис. 1). Две противоположные стороны доски объявляются

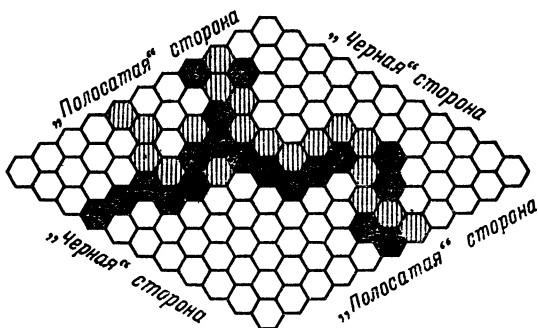


Рис. 1

«черными», две другие — «полосатыми». Игроки по очереди выкладывают свои фишки: один — «черные», другой — «полосатые», причем фишку можно класть на любое свободное поле. За каждым из игроков закреплена пара сторон доски — одинаковых по цвету с его фишками. Цель каждого игрока — соединить связным путем свои стороны своими фишками.

Естественно поставить вопрос: а существует ли выигрышная стратегия для первого или второго игроков («стратегия» состоит в указании хода в любом уже создавшемся положении)? На этот вопрос дал ответ известный американский математик Дж. Нэш: он доказал, что существует выигрыш-

ная стратегия для первого (начинающего) игрока и не существует для второго. Приведем схему его остроумного доказательства.

Прежде всего, можно доказать (мы предоставляем это читателю), что данная игра обязательно заканчивается выигрышем одного из игроков, т. е. ничьих не бывает. Считая это известным, докажем существование выигрышной стратегии для первого игрока методом «от противного», т. е. допустим, что такой стратегии нет. Это означает, что, как бы ни старался первый игрок, второй может уйти от поражения, т. е. в силу невозможности ничьих выиграть. Но тогда второй игрок имеет выигрышную стратегию (подумайте, почему это так?).

Пусть первый игрок играет таким образом. Он ставит на любое поле первую фишку и затем, не обращая на нее внимания, отвечает на ходы противника, пользуясь выигрышной стратегией второго игрока (как бы считая себя вторым игроком). Так он продолжает до тех пор, пока ему в силу этой стратегии не понадобится место, уже занятое первой фишкой. В этот момент он ставит фишку на любое свободное место, а дальше опять играет, не обращая на нее внимания, пользуясь выигрышной стратегией второго игрока и т. д. В результате после каждого своего хода первый игрок получает позицию, предусмотренную стратегией для второго игрока, да еще впридачу одно накрытое поле. Значит, его противник очередным ходом не может закончить партию, как бы он ни ходил. А так как ничья невозможна, то первый игрок обязательно доведет партию до своей победы, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает существование выигрышной стратегии для первого игрока; а отсюда ясно, что у второго игрока такой стратегии не может быть.

Казалось бы, задача о выигрышной стратегии полностью решена. Но тут приходит игрок и спрашивает у математика: «Как же я должен играть, чтобы наверняка выиграть?» Анализ проведенного доказательства позволяет дать только такой ответ: «Перебери все возможные стратегии (их конечное число); в силу сказанного среди них есть по крайней мере одна выигрышная — ею и пользуйся!» «Но как их перебрать? Их ведь так много...» «А это к математике не относится, — возможно, ответит математик, — пусть инженеры изготовят устройство для такого перебора. Я свое дело сделал».

Это — ответ «чистого» математика. «Прикладной» же математик не может не учитывать реальных обстоятельств при построении решения (в данном примере — выигрышной стратегии). Нетрудно проверить, что общее число S всевозможных

стратегий (для первого игрока во всяком случае) удовлетворяет оценке:

$$S > 121 \cdot 119^{120} \cdot 117^{118} \cdot 115^{116} \cdot \dots \cdot 101^{102}$$

(напомним, что поле на доске состоит из ста двадцати одного шестиугольника).

Правая часть этого неравенства заведомо превосходит $100^1 \cdot 100^{120} \cdot 100^{118} \cdot \dots \cdot 100^{102} = 10^{2222}$. Можно быть уверенным, что никогда никакое устройство не сможет осуществить перебор такого количества вариантов!

Итак, перед нами утверждение о существовании решения задачи, вполне правомерное с точки зрения «ортодоксальной» чистой математики, но с точки зрения прикладной математики — неприемлемое. Грубо говоря, расхождение этих двух подходов получилось из-за того, что «ортодоксально» конечное общее число стратегий оказалось практически... бесконечным. Поэтому, хотя абстрактное решение данной задачи и существует (доказано, что у первого игрока есть выигрышная стратегия), «прикладной» математик ответит, что у задачи игры в «гекс» решения нет (нельзя в общем случае указать практически реализуемый алгоритм нахождения этой выигрышной стратегии).

Способ рассуждений. В чистой математике нет понятий «не вполне строгое доказательство» и т. п.; в ней все «не вполне точно определенное» — не определено, «не вполне строго доказанное» — не доказано. При решении любой задачи в чистой математике переходить от одних утверждений к другим можно, исходя из условий этой задачи, только на основе правил строгой логики.

Не то в прикладной математике! Конечно, и в ней дедуктивные рассуждения играют весьма важную роль. Но здесь не менее важны и рассуждения иного рода, которые называют «эвристическими», «правдоподобными», «рациональными» и т. п. Это — рассуждения, неприемлемые с точки зрения чистой математики, но при разумном их применении приводящие к правильным практическим результатам. Такие рассуждения типичны для всех дисциплин (физика, химия, биология, медицина и т. д.), кроме чистой математики; так что в этом отношении прикладная математика находится как бы на стыке математики с этими дисциплинами.

Эвристические рассуждения могут включать аналогии, численные и физические эксперименты, общие выводы на основе анализа типичных случаев (это — так называемая «неполная индукция») и другие подобные способы рассуждений. Все эти способы в чистой математике доказательной силы не имеют,

однако в прикладных задачах они вполне правомерны и постоянно применяются.

В прикладных математических рассуждениях за математическими понятиями обычно стоят реальные объекты. Поэтому при решении прикладной математической задачи часто оказываются полезными сведения, не содержащиеся явно в формулировке задачи, но вытекающие из ее «физического смысла».

Однако в ряде случаев наиболее целесообразными, а порой и единственно возможными оказываются дедуктивные методы. Поэтому прикладная математика использует все способы рассуждений.

Почему же все-таки в прикладной математике далеко не всегда удается проводить все построения так же строго, как в чистой? Дело в том, что зачастую эвристическим путем можно получить решения задач именно в тех случаях, когда чисто дедуктивные методы не приводят к цели или требуют колоссальных, неоправданных усилий. Кроме того, переход от реального объекта к его математической модели (об этом см. ниже) всегда является эвристическим и осуществляется лишь с некоторой точностью. Решение математической задачи — это только часть полного исследования.

2.3. Математические модели

Специалист по прикладной математике все время имеет дело с математическими моделями. Моделями могут быть геометрические фигуры, числовые множества, различные уравнения и системы уравнений и т. п., описывающие какие-либо свойства изучаемого реального объекта или явления.

Рассмотрим простой пример. Пусть нас интересует объем жидкости, которую может вместить стоящий перед нами стакан. Этот объем можно найти, например, наполнив стакан и затем вылив воду в специальный сосуд с делениями. Но вот мы говорим, что стакан — это круглый цилиндр с диаметром основания d и высотой h .

Тем самым мы переходим к математической модели, которая дает возможность получить ответ: $h\pi d^2/4$ без эксперимента, но и без учета несовершенства реальной формы стакана, поверхностного натяжения и т. п.

Конечно, математическая модель описывает реальный объект лишь приближенно. Однако бывают случаи, когда принятая математическая модель описывает реальный объект совершенно неправильно, как говорят, модель оказывается неадекватной реальному объекту. Составление математической модели — дело очень ответственное. Реальный объект может

иметь много различных, неравносильных моделей; поиски адекватной и в то же время достаточно простой модели зачастую приобретают драматический характер. Кроме того, изучая модель, мы можем столкнуться с совершенно непредвиденными математическими трудностями.

Всякий научный подход связан с построением модели изучаемого явления. Модель в определенном смысле проще самого объекта; обычно она имитирует не все, а лишь наиболее важные (для данного исследования) его особенности (характеристики) и потому удобнее для изучения. Все зависит от изучаемого объекта (явления, ситуации) и от тех свойств, которые учитываются моделью. Так, математической моделью токов, протекающих в электрической цепи, служит система линейных алгебраических уравнений (например, знаковый из школьного курса физики закон Кирхгофа). Физической моделью, воспроизводящей работу водителя поезда (самолета); является автомашинист (автопилот). Физической моделью строительной конструкции может служить система упругих стержней, а математической моделью последней — система уравнений, связывающих напряжения в этих стержнях. Н. Випер и его сотрудники построили механическую, а затем математическую модель, имитирующую дрожание руки человека с нарушенной координацией движений.

Нет ничего необычного и в построении моделей: каждый инженерный, экономический и иной расчет, выполняемый с привлечением средств и языка математики, является, в сущности, математическим моделированием.

Один и тот же объект (явление, ситуация) может иметь несколько неэквивалентных моделей. Это определяется тем, какие характеристики объекта учитываются в модели. Но даже при учете одних и тех же характеристик возможны различные модификации.

Важнейшее требование к математической модели состоит в ее адекватности изучаемому реальному объекту, т. е. в правильном описании объекта по соответствующим характеристикам. Модель, адекватная по одной системе характеристик, может быть неадекватной по другой. Так, например, в § 3 строится математическая модель игры в теннис, адекватная игре по основной характеристике — по изменению счета в гейме (сете). Однако эта модель не учитывает эмоциональных, психологических факторов и адаптации к игре противника. Затем эта модель уточняется и вводится еще одна характеристика — адаптация или обучение в ходе игры. И все же эта модель остается неадекватной реальному процессу по другим особенностям.

Модель должна быть относительно простой: существующие методы, вычислительные средства (ЭВМ) должны дать возможность провести анализ модели по выбранным характеристикам. Как правило, чем модель адекватней реальному процессу, тем она сложнее. Поэтому требования простоты и адекватности в определенном смысле противоположны.

Характеристики моделирования распадаются, в первом приближении, на две категории. Одна из них состоит из величин, поддающихся достаточно точному измерению, управлению. Это — детерминированные величины. Другая категория охватывает величины стохастические, имеющие случайную природу и не поддающиеся точным измерениям. Упомянутая модель игры в теннис содержит стохастические характеристики и описывается в терминах теории вероятностей и случайных процессов. Стохастической является также модель прогнозирования спортивных результатов (§ 5). В то же время модель распределения игровых обязанностей в баскетбольной (хоккейной и т. п.) команде является детерминированной (§ 6).

Математическими моделями, цель которых обосновать принятие в данной ситуации того или иного из возможных решений, занимается важнейший раздел прикладной математики — исследование операций.

2.4. Исследование операций

Потребность в принятии решений «стара как мир». Задачи принятия решений рождаются у колыбели человека, возникают перед ним на протяжении всей жизни; они касаются вопросов образования, быта, работы, передвижения по населенному пункту и т. п. Принимать решения по огромному множеству вопросов необходимо обществу, его организациям, государственным органам.

Так возникают проблемы эффективного управления хозяйством, производственным объединением, предприятием; проблемы рационального управления запасами, проблемы организации движения транспорта, управления перевозками грузов, проблемы массового обслуживания в медицинских учреждениях, парикмахерских, пунктах технической профилактики и т. д. и т. п. Обычно решение этих проблем связано с удовлетворением требований максимального дохода, минимальных производственных затрат, наименьшего времени обслуживания, наибольшего быстрогодействия и т. д.

Необходимость принимать решение возникает во многих спортивных ситуациях: в организации тренировок и соревнований, в комплектовании спортивных команд, в распределе-

нии обязанностей игроков команды, в выборе тактики игры и т. п.

Несомненно также, что каждому приходится принимать решения чуть ли не каждую минуту: какую одежду надеть, как распределить дневной бюджет времени, как организовать питание, какой маршрут избрать при поездке на работу, в театр или в гости.

Очевидно, что решения вынуждены принимать не только люди, но и животные: при поисках пищи, при защите от хищников, при воспитании детенышей и в других ситуациях. Однако вряд ли можно утверждать, что заяц, спасаясь от преследования лисы, занимается... исследованием операций. По-видимому, способность обосновывать принятые решения — один из признаков, выделяющих *homo sapiens* среди животного мира. Но и про человека можно сказать, что он «занимается исследованием операций», только если он использует математические методы, применяет тот или иной математический аппарат. В жизни решения обычно принимаются или интуитивно (например, при самозащите), или на основании жизненного опыта (например, при выборе одежды, питания), или на базе сопоставления между собой (не всегда исчерпывающего и бесспорного) различных вариантов из некоторого обозримого множества, или иными путями, не требующими математических методов.

В то же время многочисленные ситуации (в частности, перечисленные ранее) столь сложны, а последствия принятых решений могут оказаться столь значительными, что предварительный количественный и качественный анализ становится обязательным. В этих случаях не обойтись без применения научных, в первую очередь математических, методов.

«Семь раз отмерь, один — отрежь» — говорит пословица. Исследование операций как раз и есть своеобразное математическое «примеривание» будущих решений, позволяющих экономить время, силы и материальные средства, избегать серьезных ошибок, на которых уже нельзя «учиться» (слишком дорого бы это обошлось). Чем сложнее, дороже, масштабнее планируемое мероприятие, тем менее допустимы в нем «волевые» решения и тем важнее становятся научные методы, позволяющие заранее оценить последствия каждого решения, заранее отбросить недопустимые варианты и рекомендовать наиболее удачные» [2].

Научная дисциплина «исследование операций» начала формироваться в начале второй мировой войны в связи с необходимостью выдачи рекомендаций по ряду военных проблем (перевоска войск к театрам военных действий, исполь-

зование вооружений, распределение средств военного воздействия по различным объектам и т. п.). В последующем в поле зрения исследования операций попали всевозможные задачи мирного характера: распределение материальных ресурсов, управление запасами, организация труда, всевозможные транспортные задачи и многое другое.

Решение проблемы методами исследования операций состоит из ряда этапов, среди которых отметим следующие (не отделяемые друг от друга не только что «китайской стеной», но даже более «легкими переворотками»).

1. Формулировка задачи, ситуации, процесса, описание исследуемого объекта на вербальном (словесном) уровне и их осмысливание.

2. Выбор метода исследования и построение математической модели (одной из возможных) задачи.

3. Изучение, анализ модели, формализация связей (установление математических зависимостей) между параметрами, характеристиками модели.

4. Построение критериев (функций цели), с помощью которых оцениваются возможные решения.

5. Оптимизация построенных критериев на множестве возможных (допустимых) решений, т. е. выбор оптимальных (предпочтительных в определенном смысле) решений.

6. Сопоставление построенной модели и полученных решений с реальным объектом.

7. Уточнение математической модели или построение иной, основанной на другом методе математической формализации.

8. Выдача рекомендаций.

9. Практическая реализация: принятие какого-либо из оптимальных решений; заметим, что этот последний шаг лежит уже за пределами теории исследования операций и реализуется лицом (группой лиц, административным органом и т. п.), ответственным за принятие решения. Все предшествующее этому последнему шагу имеет целью его облегчить и обосновать.

2.5. Об основных понятиях исследования операций

Уже давно пришло время разъяснить читателю некоторые понятия исследования операций, а также привести примеры.

Операцией принято называть всякое целенаправленное и управляемое мероприятие (т. е. систему действий, подчиненную единому замыслу, допускающую управление и направленную

на достижение определенных целей). Операция описывается определенным набором *параметров* (характеристик), а *управление* состоит в выборе значений этих параметров. Определение набора таких значений называется *решением* или *стратегией*. *Оптимальные решения (стратегии)* — это решения наиболее предпочтительные по тем или иным соображениям, т. е. те, которые *оптимизируют* так называемые *критерии качества* операции (сообщают им наибольшее или наименьшее значения).

Не так уж часто в результате изучения математической модели удается прийти к однозначному решению — найти единственное оптимальное решение. В подавляющем большинстве случаев удастся лишь сузить область поиска оптимальных решений (которых может быть несколько), выделить решения, близкие к оптимальным, практически равноценные. Однако и это оказывается успехом, ибо существенно облегчает задачу лица, ответственного за принятие решений, выбрать какое-либо из них.

Несколько практических задач. Перечислим типичные задачи, которые могут быть рассмотрены методами теории исследования операций.

1. Распределение игровых амплуа в спортивной команде (баскетбольной, хоккейной и др.), обеспечивающее наибольший эффект в игре.

2. Системы организации чемпионатов, турниров и кубковых встреч (шахматных, теннисных, хоккейных и др.), обеспечивающие достижение определенных целей. Например, для выявления первого и второго призеров кубковой встречи (с соблюдением определенных условий). Или, например, для того чтобы в матче двух шахматных команд обеспечить следующие естественные условия:

а) все участники играют одинаковое число партий фигурами каждого цвета;

б) в каждом туре участники обеих команд играют одинаковое число партий белыми и черными;

3. Составление для спортсменов диеты, удовлетворяющей требованиям медиков и, в то же время, наиболее экономной и сохраняющей вес спортсмена в определенных рамках, а также подборка содержимого рюкзака с продуктами, обеспечивающая при наименьшем его весе необходимый рацион.

Эти примеры могут быть дополнены нескончаемым списком практических задач из самых различных областей человеческой деятельности. Назовем некоторые из них.

4. Задача об использовании сырья. Предприятие выпускает продукцию нескольких видов и использует различного типа

сырье. Известно, какое сырье и в каких количествах используется для изготовления единицы продукции каждого из видов. Известен также доход от реализации единицы каждого вида продукции. Требуется (при заданных запасах сырья) составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия оказался бы максимальным.

5. Задача об оптимальном использовании оборудования. При заданном плане производства по номенклатуре и при известной производительности имеющегося парка станков (по каждому из видов продукции) требуется составить план использования оборудования, т. е. указать, какое количество единиц продукции каждого вида следует изготовлять на каждом из станков с тем, чтобы в минимальное время был реализован заданный план.

6. Организация противовоздушной обороны некоторого объекта, обеспечивающая наибольшую эффективность при заданном уровне затрат или же требующая наименьших затрат при установленном уровне эффективности.

7. Медицинское обследование. Для профилактики сердечно-сосудистых заболеваний требуется организовать обследование жителей города. При заданных материальных средствах, оборудовании, медицинском персонале требуется разработать такой план обследования (число медицинских учреждений, их размещение, оснащение оборудованием, штаты специалистов и т. п.), при котором оно оказалось бы наиболее эффективным.

Построение математической модели задачи исследования операций может потребовать использования того или иного математического аппарата: алгебраических или дифференциальных уравнений, методов математического программирования, методов теории вероятностей, статистики, случайных процессов и многих других. Однако детальное рассмотрение всего этого комплекса вопросов выходит за рамки нашей книги. Мы отсылаем читателя к монографиям [1; 5; 28].

3. ПЯТЬ СЕТОВ. ПОЧЕМУ?

(МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИГРЫ В ТЕННИС)



3.1. Немного истории

Больше ста лет тому назад, в феврале 1874 г. английский майор в отставке У. Уингфилд запатентовал изобретенную им игру. Он назвал ее теннисом. Однако родословная тенниса очень древняя. По некоторым сведениям его

прошлое уходит во времена древнего Египта. В более поздние времена — в XIII веке во Франции — играли в мяч, перебрасываемый ладонями. Игру называли королевским теннисом или игрой рукой («же де пом»). В Англии в XIV — XVIII веках нашла широкое распространение игра, в которой участвовали двое. Один ударом ладони посылал мяч по направлению к стенке, а отскочивший от нее мяч уже ударял ладонью второй игрок, и так до первой ошибки кого-либо из них.

Игра в теннис в русской литературе впервые описана Л. Н. Толстым в романе «Анна Каренина». По-видимому, описание относится к середине 80-х годов прошлого столетия: «Игроки, разделившись на две партии, расстановились на тщательно выравненном и убитом *крокетграунде*, по обе стороны натянутой сетки... Свияжский и Вронский оба играли очень хорошо и серьезно. Они зорко следили за кидаемым к ним мячом, не торопясь и не мешкая, ловко подбегали к нему, выжидали прыжок, и, метко и верно подавая мяч ракеткой, перекидывали за сетку» (часть 6, гл. 22).

Теннис времен «Анны Карениной» мало походил на современный. Игра велась на случайных площадках и имела характер развлечения, требующего некоторых физических усилий. Костюмы для игры, особенно длинные женские платья, мешали успешно перемещаться по площадке, ракетки были слабо натянуты, струны толстые, мячи необшитые. Кстати, мячи в былые времена изготавливались из кусков материи и конского волоса. Около пяти веков назад Людовик XI распорядился покрывать мячи сверху кожей и шерстью. Затем для изготовления мячей стал использоваться каучук. В последние десятилетия мячи делают из резины и обклеивают специальным сукном.

Значительную роль в популяризации тенниса в России сыграло создание клубов. В 1860 г. был основан С.-Петербургский крикет и лаун-теннисклуб. В 1908 г. создан Всероссийский союз лаун-теннисклубов, объединивший 47 клубов. Начало тенниса как спортивной игры можно отнести, по-видимому, к 90-м годам прошлого столетия, когда были утверждены новые правила игры. В 1891 г. вышла в свет первая на русском языке книга, посвященная теннису, доктора медицины Е. М. Дементьева.

Теннис быстро получил широкое признание среди молодежи, учащихся гимназий. Объясняется это отчасти тем, что в те времена излюбленной игрой была русская лапта. Иногда лапта даже составляла элемент обязательных занятий во время уроков гимнастики. Играли также и в тамбурин.

В этой игре мяч перебрасывался через высокую сетку ударами круглых деревянных тарелочек.

В 1913 г. по предложению секретаря Союза лаун-тенниса Б. А. Ульянова была принята русская терминология судейских терминов («за», «больше», «меньше», «ровно» и т. п.).

В 1903 г. впервые в международных соревнованиях (в Стокгольме) участвовали представители России. В 1913 г. в нашей стране впервые был проведен международный теннисный турнир. Количество играющих в теннис было в те годы незначительным: в 1912 г. классифицированных игроков было 154, в 1913 г. — 203.

Сейчас этот вид спорта, ранее доступный лишь для избранных, стал массовым. Лишь в одной Москве классифицированных игроков около полутора тысяч, ранее состоявших в классификации и лиц, регулярно играющих, — несколько десятков тысяч. Отметим, что теннис, в который играет ныне 120 миллионов человек в 193 странах мира (заметим, что в футбол играет лишь 40 миллионов), превратился в один из самых полезных и увлекательных видов спорта. Теннис является несравненным средством против одной из особенностей нашего времени — неподвижного образа жизни. По темпам развития, росту популярности он уже ряд лет опережает все иные виды спорта. Теннис, являясь весьма подходящим видом спорта для людей, занимающихся различной деятельностью, способен в то же время давать огромное моральное и физическое удовлетворение. Недаром говорят, что в теннис играют руками, выигрывают головой. По словам одного известного теннисиста для игры высокого класса необходимы три составляющие: выносливость стайера, быстрота спринтера и стремительное мышление шахматиста, безошибочно играющего в глубоком цейтноте.

3.2. Аксиомы тенниса

В теннис играют на ровной площадке (корте) определенных размеров с нанесенными на ней линиями и разделенной пополам сеткой (рис. 2).

Игра начинается одним из играющих с подачи мяча в поле подачи противника (согласно правилам до удара по мячу подающий не должен переступить задней линии). Подают по диагонали: стоя на первой позиции подачи (I) — в первое поле подачи противника (I), стоя на второй (2) — во второе (II). Первая подача проводится с первой позиции подачи, а последующие — поочередно с каждой из позиций. Мяч, введен-

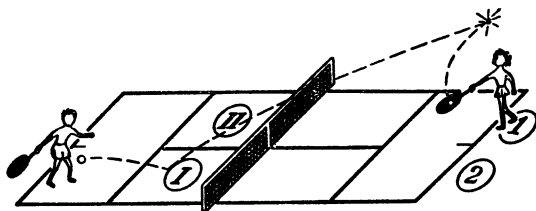


Рис. 2

ный в игру ударом ракетки, должен перелететь через сетку и удариться о площадку в пределах соответствующего поля подачи противника или коснуться линий, его ограничивающих (если при этом мяч задевает сетку, он переигрывается). С неправильно поданной подачи розыгрыш мяча не начинают. Если первая подача была неправильной, игрок должен повторно подать в то же поле. После второй неправильной подачи мяч считается для подающего проигранным.

Поданный мяч должен быть отражен ударом ракетки принимающего после первого (но до второго) приземления мяча. После приема подачи (во время розыгрыша) мяч разрешается отражать не только между первым и вторым приземлением, но и «с лета». Розыгрыш мяча состоит в том, что каждый из противников поочередно отражает направленный к нему мяч, не позволяя ему приземлиться на своей стороне более одного раза. Мяч находится в игре до первой ошибки какого-либо из противников. Ошибка тотчас фиксируется счетом. Если отражающий послал мяч в сетку или за пределы площадки, он его проиграл. Теннисная встреча разбивается на сеты (партии), сеты на геймы (игры), геймы формируются в результате розыгрыша отдельных мячей. В пределах одного гейма игра ведется до выигрыша одной из сторон не менее четырех мячей при условии, что эта сторона получила перевес не менее, чем на два мяча.

3.3. Арифметика тенниса

Счет мячей в гейме имеет особенности, сохранившиеся с тех времен, когда игра велась «на интерес». Во Франции ценой игры являлась монета в 60 су: она разменивалась на четыре по 15 су. Эти последние, по-видимому, составляли цену четырех ударов: 15, 30, 45, 60. Правда, в XX веке судьи стали лаконичнее, выкрикивая «сорок» вместо «сорок пять».

Итак, при выигрыше какой-либо стороной первого в гейме мяча счет становится 15:0 (или 0:15), при выигрыше той же

стороной второго мяча добавляется еще 15 и счет становится 30 : 0 в ее пользу. При выигрыше третьего мяча счет становится 40 : 0, выигрыш четвертого мяча дает 60 : 0 и приносит завершение гейма в пользу этой стороны.

Если одна из сторон после выигрыша первого мяча второй мяч проиграла, то 15 засчитывается противнику, и т. д. Следовательно, счет (первыми всегда указываются очки подающего) в гейме может быть только одним из следующих: 15 : 0, 30 : 0, 40 : 0, 0 : 15, 0 : 30, 0 : 40, 15 : 15, 30 : 15, 40 : 15, 15 : 30, 15 : 40, 30 : 30, 40 : 30, 30 : 40, «ровно», больше», «меньше», «игра».

Счет «ровно» имеет место при равенстве очков у противников, начиная с шестого разыгранного мяча; «больше» («меньше») — начиная с седьмого мяча, если подающий выиграл (проиграл) мяч после счета «ровно». «Игра» подающего имеет место, если при счете «больше» он выиграл следующий мяч; «игра» принимающего — если при счете «меньше» подающий проиграл следующий мяч.

По завершении первого гейма начинается розыгрыш второго гейма, при котором подача переходит к противной стороне, и т. д. до завершения сета (партии). Сет считается завершенным, если один из противников выиграл не менее шести геймов и получил перевес над другой стороной не менее, чем на два гейма. Следовательно, сет заканчивается, как только счет становится равным одному из следующих: 6 : 0, 6 : 1, 6 : 2, 6 : 3, 6 : 4, 7 : 5, 8 : 6 и т. п. По окончании сета разыгрывается второй сет и т. д., пока одна из сторон не выигрывает встречи — двух (из трех) или трех (из пяти) сетов в зависимости от условий соревнований. При выигрыше одной из сторон подряд двух (трех) сетов ей присуждается победа и остальные сетовы не играют. Следовательно, счет выигранной встречи может быть 2 : 0, 2 : 1 (соответственно 3 : 0, 3 : 1, 3 : 2).

Итак, читатель, мы ознакомились с основными правилами игры в теннис в объеме, достаточном для дальнейшего рассмотрения (более детально с особенностями игры можно познакомиться по книге [14]). Сама игра доставляет широкие возможности для разнообразия ударов по направлению, силе, глубине (дальности), высоте полета, по приданию мячу вращений с той или иной скоростью вокруг осей различной ориентации и т. п. Возникает возможность «скреживать ракетки» противникам разных возрастов и различных уровней физической подготовки, когда одна из сторон, за счет высокой техники выполнения ударов, их плавировки (направления мяча в определенное место поля противника), а также

за счет опыта может успешно противостоять более подвижному, выносливому, молодому противнику. Вот почему теннисисту возраст — не помеха для увлеченности соревнованиями, не говоря уже о возможности для обычных встреч подбирать для себя подходящего во всех отношениях партнера.

Вернемся, однако, к правилам игры и ведению счета. При всей их простоте они тщательно продуманы.

Действительно, требования иметь преимущество не менее, чем в два мяча (при завершении гейма), не менее, чем в два гейма (при завершении сета) ставят обе стороны в равные условия (учтите атакующий характер подачи, право которой переходит по завершении каждого гейма к ранее принимавшему подачу игроку, а также попеременную реализацию ее в разные поля). При этом розыгрыш каждого мяча имеет существенное (а иногда — решающее) значение для встречи, тогда как ее ход колеблется, подобно тарелкам рычажных весов, благоприятствуя то одной, то другой стороне.

3.4. Как долго следует играть?

Теперь мы смогли бы начать играть: Вы (ЧИТАТЕЛЬ) и один из авторов (АВТОР). Если АВТОР играет значительно сильнее ЧИТАТЕЛЯ, то его преимущество выявится быстро — в первом же сете. Если же разница в силе не столь велика, то счет в каждом гейме и сете будет неустойчивым. Именно так обстоит дело при встречах игроков, входящих в мировую элиту, например, на турнирах серии «Гран при» или неофициальном первенстве мира (профессионалов и любителей) в Уимблдоне (Англия). Все сильнейшие игроки мира классифицированы по силе игры (о принципах классификации следует говорить специально, см. § 9 *). Каждый из них имеет свои достоинства (почти при полном отсутствии слабых мест), и встречи между ними проходят, так сказать, «на равных», а исходы зависят обычно от дополнительных обстоятельств: психологической подготовки, самочувствия, эмоционального настроения, покрытия корта (грунт, трава, пластик), погоды и т. п.

Какова же должна быть структура встречи примерно равных по силе игроков с тем, чтобы выявился победитель? Естественно, что чем продолжительнее встреча, тем четче

*) Имеются также национальные (региональные) классификации теннисистов различных возрастных групп. Так, в частности, регулярно обновляются всесоюзная классификация (женщин, мужчин, девушек, юношей), республиканская, московская городская и другие.

будет проявляться преимущество одной из сторон. В теннисных соревнованиях ничьих не бывает, игра ведется до победы одной из сторон. Однако физические возможности игроков даже экстракласса все же ограничены. Как показывает опыт, пятисетовые (и даже трехсетовые) встречи зачастую длятся до трех-четырех часов.

Вот несколько ярких примеров. В 1976 г. в полуфинальном матче на Кубок Девиса лидер команды СССР Александр Метревели встретился со вторым игроком широкой классификации 1975 г. Мануэлем Орантесом и выиграл в пятом сете четырехчасового матча.

Матч между шведом Бьерном Боргом (пять лет подряд выигрывавшим неофициальное первенство мира — Уимблдонский турнир) и американцем Джоном Маккинроем в финале Уимблдонского турнира 1979 г. длился 3,5 часа и завершился победой Маккинроя, ставшего теннисистом № 1 в классификации 1981 г. На протяжении всей встречи сохранялся высокий темп игры — до 66 ударов в минуту (на подачах Маккинроя). В финале 1980 г. выиграл Борг. В 1983 и 1984 гг. Маккинрой вновь стал победителем этого турнира. За четыре года (1978 — 1981) эти высочайшего класса теннисисты встречались 18 раз и каждый из них побеждал по 9 раз.

До 1983 г. во встречах первых двух теннисисток мира — Крисс Эверт-Ллойд и Мартины Навратиловой — 29 раз побеждала Ллойд и 31 — Навратилова.

Для того чтобы решить судьбу полуфинального поединка Уимблдонского турнира 1983 г. между К. Курреном (15-е место классификации) и К. Льюисом (91-е место) потребовалось сыграть 61 гейм, что заняло четыре часа. В решающем пятом сете удача сопутствовала Льюису. В финале Маккинрой легко обыграл Льюиса в трех сетах.

Для выхода в финал открытого чемпионата Франции 1981 г. Б. Боргу пришлось играть на корте 14 ч 8 мин, а его сопернику И. Лендлу — 17 ч 21 мин. В финальной пятисетовой встрече соперники сыграли 41 гейм.

Подобного рода чрезмерные нагрузки отягощаются тем, что зачастую, кроме одиночных игр, теннисисты в тот же день должны участвовать в парных и смешанных соревнованиях. Вот почему в последние годы введено новое правило tie-break («тай-брейк» — нарушение равновесия), согласно которому розыгрыш сета не продолжается до достижения одной из сторон преимущества минимум в два гейма. По этому правилу при счете геймов 6:6 играется тай-брейк (решающий тринадцатый гейм), в котором, однако, счет очков ведется иначе, чем при розыгрыше обычного гейма: для победы в нем

требуется выиграть не менее семи мячей с преимуществом не менее, чем в два *).

Иными словами, за каждый выигранный мяч засчитывается одно очко. Сторона, выигравшая семь очков, выигрывает тринадцатый гейм и сет, если при этом соперником набрано не более пяти очков. В ином случае игра продолжается, пока одна из сторон не достигнет перевеса в два очка. Хотя теоретически и в этом случае спор сторон может продолжаться сколь угодно долго, но практически он завершается довольно быстро.

3.5. Начальные понятия теории вероятностей

Построим математическую модель игры в теннис и с ее помощью разберемся в некоторых вопросах, касающихся структуры теннисного матча.

Прежде всего: что принять за показатель качества игры отдельного теннисиста? По-видимому, долю мячей, которые он в среднем выигрывает. Здесь нам придется воспользоваться рядом понятий и элементарных фактов теории вероятностей. О них можно прочитать в [7; 8]. Тем не менее напомним их.

В качестве испытания J рассмотрим розыгрыш отдельного мяча. Это испытание может иметь для рассматриваемого игрока два взаимно исключающих исхода: мяч выигран (событие A) или мяч проигран (событие B).

Частотой случайного события A (соответственно B) в рассматриваемой серии из n испытаний принято называть отношение m/n числа m тех испытаний, в которых наступило событие A (соответственно B), к их общему числу n . Естественно, что розыгрыш различных мячей осуществляется в различных условиях. Но даже если эти условия оказались бы одинаковыми, трудно было бы найти закономерность по результату розыгрыша отдельного мяча (испытания J). В то же время, как показывают эксперименты, при рассмотрении каждой достаточно длинной последовательности из n испытаний частота m/n появления некоторого исхода A мало отличается от некоторой величины $P(A)$. В этом факте проявляется свойство так называемой статистической устойчивости частоты. При этом величина $P(A)$ принимается за *вероятность* события A .

*) Подсчет очков по системе тай-брейк предложен Джимми Ван Аленом (США), опробован впервые в 1970 г. на открытом чемпионате США в Филадельфии и введен ныне в правила проведения соревнований во многих странах, в том числе и в СССР.

Чем большее число испытаний n проводится, тем меньше частота m/n отклоняется от вероятности $P(A)$. Этот неоднократно проверенный экспериментально факт находит математическое подтверждение в теореме Бернулли (одной из форм закона больших чисел) (см. [3], с. 69). Вот почему при проведении большого числа испытаний частоту m/n принимают за приближенное значение вероятности $P(A)$. Заметим, что всегда $0 \leq P(A) \leq 1$.

Будем считать, что для каждого игрока известны вероятность $P(A)$ того, что мяч им будет выигран, и вероятность $P(B)$ того, что мяч будет проигран*).

Естественно, что

$$P(A) + P(B) = 1. \quad (1)$$

Суммой (объединением) $A + B$ (или $A \cup B$) событий называют событие, которое реализуется как при исходах, приводящих к A , так и при исходах, приводящих к B . При этом исходы, которые приводят к A и B одновременно, считаются один раз.

Произведением (пересечением) AB (или $A \cap B$) двух событий называется событие, реализующееся при тех и только тех исходах, которые приводят как к A , так и к B .

События A и B несовместны, если их произведение является событием невозможным: его вероятность равна нулю.

В нашем случае испытание J приводит лишь к двум несовместным исходам (выигрыш или проигрыш мяча). Их сумма $A + B$ — событие достоверное: его вероятность равна единице: $P(A + B) = 1$, а произведение AB — событие невозможное: $P(AB) = 0$.

Формула (1) — частный случай теоремы сложения вероятностей: если исходы A и B испытания J несовместны, то вероятность суммы $A + B$ исходов A и B равна сумме вероятностей этих исходов: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Теорема сложения вероятностей обобщается на тот случай, когда испытание приводит к любому конечному числу B_1, \dots, B_k попарно несовместных исходов (т. е. каждое произведение $B_i B_j$ при $i \neq j$ — событие невозможное):

$$P(B_1 + B_2 + \dots + B_k) = P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_k).$$

Для дальнейшего важно понятие условной вероятности $P(A/B)$ события A при условии, что имеет место событие B : условной вероятностью $P(A/B)$ называют отношение числа тех

*) В рассматриваемой ситуации вероятность $P(A)$ является, конечно, величиной относительной: она зависит от того, с кем данный игрок встречается.

исходов испытания J , приведших к A , которые приводят и к B , к числу всех исходов, приводящих к B . Из определения следует, что $P(A/B) = P(AB)/P(B)$.

Событие A называется *независимым* от события B , если условная вероятность $P(A/B)$ равна безусловной вероятности $P(A)$, т. е. $P(A/B) = P(A)$. Из предыдущего вытекает, что для независимых событий справедлива *теорема умножения вероятностей*:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Для зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Напомним, наконец, необходимую нам в дальнейшем *формулу полной вероятности*. Пусть события B_1, \dots, B_k попарно несовместны и событие A имеет место, когда возникает по крайней мере одно какое-либо из событий B_1, \dots, B_k . Тогда справедливо тождество

$$A = A(B_1 + \dots + B_k) = AB_1 + \dots + AB_k$$

и формула полной вероятности

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_k),$$

или

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_k)P(A/B_k).$$

3.6. Модель игры — марковская цепь

Теперь перейдем к построению математической модели игры в теннис между АВТОРОМ (А) и ЧИТАТЕЛЕМ (Ч), предполагая известными вероятности $P(A)$ и $P(Ч)$ выигрыша мяча АВТОРОМ и ЧИТАТЕЛЕМ соответственно. Пусть для определенности $P(Ч) = 0,4$; $P(A) = 0,6$ (АВТОР играет несколько лучше ЧИТАТЕЛЯ). Не случайно, что $P(Ч) + P(A) = 0,4 + 0,6 = 1$ (проигрыш мяча одной стороной означает выигрыш его другой стороной). На рис. 3 показано, как последовательно может изменяться счет в гейме. Числа рядом со стрелками указывают, с какой вероятностью может произойти соответствующее изменение счета. Например, при счете 15:15 с вероятностью 0,6 мяч выиграет АВТОР, т. е. счет станет 30:15, а с вероятностью 0,4 мяч выиграет читатель, т. е. счет станет 15:30.

Будем говорить, что мы имеем *систему* — игру в теннис. *Состояния* системы определяются счетом в пределах гейма. При этом переход из одного состояния (счета) в после-

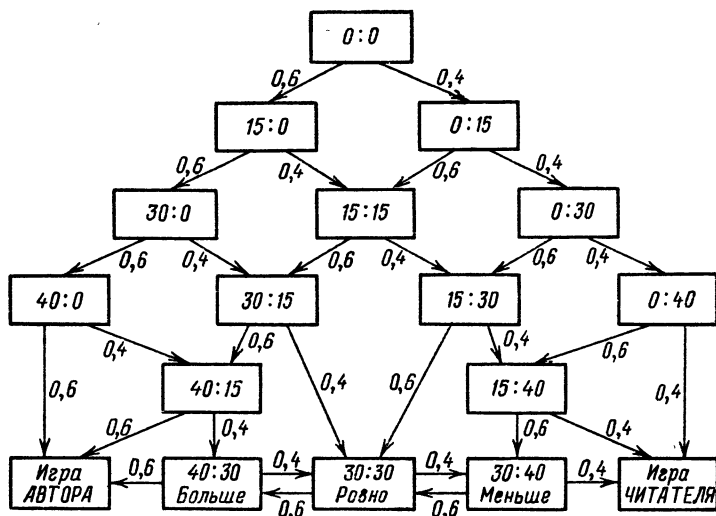


Рис. 3

дующее зависит только от настоящего состояния и, конечно, от вероятности перехода (от чисел у стрелок), однако он не зависит от предшествующих состояний*). Отметим, что любая система, в которой переход из одного состояния в другое не зависит от предыстории процесса, а зависит только от текущего состояния, называется в теории вероятностей *марковской цепью* или *цепью Маркова* (А. А. Марков, 1856 – 1922). В общем случае конечную марковскую цепь можно задать в виде геометрической схемы (так называемого *ориентированного графа*), где прямоугольники (*вершины графа*) изображают состояния, а соединяющие их стрелки (*ребра графа*) указывают на переходы из одного состояния в другое. Рядом с каждой стрелкой записана вероятность соответствующего перехода. Следовательно, рис. 3 дает нам конкретный пример графа конечной марковской цепи, описывающего состояния системы – игры в теннис в рамках гейма.

Отметим, что на рис. 3 по понятным причинам счет 40:30 объединен со счетом «больше», счет 30:30 – со счетом «ровно», а счет 30:40 – со счетом «меньше».

*) Мы несколько идеализируем ситуацию, не учитывая некоторые иные обстоятельства, например, фактор подачи, психологические факторы, адаптацию к стилю игры партнера, т. е. процесс «обучения» в ходе игры.

В марковской цепи могут существовать состояния различных типов [25]. Во-первых, *невозвратное* состояние, т. е. такое, выйдя из которого система вновь попасть в него не может. В нашем случае таких состояний довольно много, среди них, например, состояния 15:30 или 40:0 и т. п. Во-вторых, *возвратное* состояние — всякое состояние, не являющееся невозвратным. Такими у нас являются состояния «больше», «равно», «меньше». Следующий важный тип состояний — *поглощающее*. Состояние называется *поглощающим*, если, попадая в него, система и впредь остается в нем, не имея возможности перейти ни в какое иное состояние. В нашем примере таких состояний два: «игра АВТОРА» и «игра ЧИТАТЕЛЯ».

3.7. Начнем играть!

Итак, 0:0! Подает АВТОР. Вероятность счета 15:0 после розыгрыша первого мяча равна 0,6, а вероятность счета 0:15 равна 0,4. Найдем вероятность перехода из состояния 0:0 в состояния 30:0, 15:15, 0:30. Счет 30:0 может возникнуть после того, как АВТОР выиграл два мяча подряд, т. е. с вероятностью (согласно теореме умножения) $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$. Вероятность счета 0:30 после розыгрыша двух мячей равна $0,4 \cdot 0,4 = 0,16$. Счет 15:15 может возникнуть следующим образом: АВТОР выиграл первый мяч, а ЧИТАТЕЛЬ — второй или ЧИТАТЕЛЬ выиграл первый мяч, а АВТОР — второй. Пусть H_1 — гипотеза, согласно которой АВТОР выиграл первый мяч, а H_2 — гипотеза о выигрыше второго мяча ЧИТАТЕЛЕМ. Тогда $P(H_1) = 0,6$ — вероятность осуществления первой гипотезы, $P(H_2) = 0,4$ — вероятность осуществления второй гипотезы. Рассмотрим случайное событие Q , состоящее в том, что счет стал 15:15. При этом условные вероятности $P(Q/H_2) = 0,6$ и $P(Q/H_1) = 0,4$ известны. По формуле полной вероятности находим

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(H_1)P(Q/H_1) + P(H_2)P(Q/H_2) = \\ &= 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,48. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятности возможного счета после розыгрыша двух мячей равны: $P(30:0) = 0,36$; $P(15:15) = 0,48$; $P(0:30) = 0,16$. Найдем теперь вероятности возможного счета после розыгрыша трех мячей. Легко определить, что

$$\begin{aligned} P(40:0) &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 = 0,22; \\ P(0:40) &= 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,06. \end{aligned}$$

Вероятности двух других реализаций счета находим по формуле полной вероятности аналогично тому, как это было

сделано при счете 15:15. А именно,

$$P(30:15) = P(30:0) \cdot 0,4 + P(15:15) \cdot 0,6 = 0,43;$$

$$P(15:30) = P(15:15) \cdot 0,4 + P(0:30) \cdot 0,6 = 0,29.$$

Обобщим полученные результаты: для того чтобы найти вероятность счета, отмеченного на рис. 3 в каком-либо прямоугольнике, надо составить сумму произведений вероятностей, проставленных у стрелок, входящих в этот прямоугольник, на вероятности счета, указанные в соответствующих прямоугольниках, из которых эти стрелки выходят.

3.8. Завершаем розыгрыш гейма

После розыгрыша четырех или пяти мячей наша «система» обязательно окажется в каком-нибудь из состояний, указанных в нижней строке рис. 3. Вероятности этих состояний находятся по известному уже правилу и после розыгрыша четырех мячей составят: P (игра АВТОРА) = 0,13; $P(40:15) = 0,35$; $P(30:30) = 0,35$; $P(15:40) = 0,15$, P (игра ЧИТАТЕЛЯ) = 0,02. После розыгрыша пяти мячей их значения станут равными: $p_1^0 = P$ («игра АВТОРА») = $0,6^4(1 + 4 \cdot 0,4) = 0,33$; $p_2^0 = P$ («больше») = $4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,15$; $p_3^0 = P$ («ровно») = $6 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,33$; $p_4^0 = P$ («меньше») = $4 \cdot 0,6^2 \times 0,4^3 = 0,10$, $p_5^0 = P$ («игра ЧИТАТЕЛЯ») = $0,4^4(1 + 4 \cdot 0,6) = 0,09$.

В дальнейшем ситуация несколько усложняется, ибо возможно так называемое *случайное блуждание* (в пределах трех состояний)*), а попросту говоря, игра на «больше — меньше». Поэтому, чтобы окончательно выяснить, каковы же вероятности выигрыша гейма АВТОРОМ и ЧИТАТЕЛЕМ, рассмотрим отдельно нижнюю строку на рис. 3, где проставлены номера соответствующих состояний.

Составим следующую таблицу.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0,6	0	0,4	0	0
3	0	0,6	0	0,4	0
4	0	0	0,6	0	0,4
5	0	0	0	0	1

В таблице на пересечении i -й строки и j -го столбца указана вероятность перехода из состояния i в состояние j .

*) С весьма интересной задачей о симметричном случайном блуждании можно познакомиться по книге [9].

Например, единица на пересечении первой строки и первого столбца означает, что состояние «игра автора» — поглощающее, т. е. гейм уже разыгран и счет меняться в нем не будет. На пересечении третьей строки и второго столбца стоит 0,6, т. е. с вероятностью 0,6 счет из «ровно» станет «больше», число 0,4 на пересечении той же строки с четвертым столбцом показывает, что счет с вероятностью 0,4 из «ровно» станет «меньше». Естественно, что сумма вероятностей, записанных в одной строке, равна единице, так как после розыгрыша каждого мяча счет должен измениться в пользу одного из игроков.

Перепишем таблицу в так называемой матричной форме:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрицу T называют *матрицей переходов* марковской цепи, изображенной на рис. 4. Вероятности состояний после

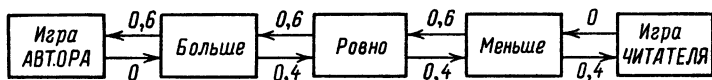


Рис. 4

розыгрыша пяти мячей примем в качестве компонент вектора $p^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0, p_4^0, p_5^0)$ и назовем его *вектором начального* (до периода случайного блуждания) *распределения вероятностей* соответствующих состояний. В нашей игре числовые значения $p_i^0 (i = 1, \dots, 5)$ уже подсчитаны.

3.9. Воспользуемся векторными операциями

Пусть $x = (x_1, \dots, x_5)$ — некоторый пятимерный вектор, а A — заданная матрица пятого порядка. Произведением вектора x на матрицу A называют (по определению) вектор-строку $x' = (x'_1, \dots, x'_5)$, в которой каждая координата x'_i равна скалярному произведению вектора x на i -й вектор-столбец матрицы A . Например, при умножении вектора x на нашу матрицу перехода T получим

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0,6 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0, \\ x'_2 &= x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0,6 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0, \\ x'_3 &= x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0,4 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 0,6 + x_5 \cdot 0, \end{aligned}$$

$$x'_4 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0,4 + x_4 \cdot 0 + x_5 \cdot 0,$$

$$x'_5 = x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 + x_4 \cdot 0,4 + x_5 \cdot 1.$$

Пусть, далее, $p^0 = (p_1^0, \dots, p_5^0)$ — наше начальное распределение вероятностей для состояний, показанных на рис. 4, а T — матрица переходов. Какова вероятность того, что после первого шага (розыгрыша первого очередного мяча) счет станет, например, «ровно»?

Из состояния «игра АВТОРА» в состояние «ровно» переход осуществляется с вероятностью 0 (гейм завершен), из состояния «больше» — с вероятностью 0,4, из «ровно» — с вероятностью 0, из «меньше» — с вероятностью 0,6, из «игра ЧИТАТЕЛЯ» — с вероятностью 0. По формуле полной вероятности находим, что после первого шага

$$p_3^1 = P(\text{«ровно»}) = p_1^0 \cdot 0 + p_2^0 \cdot 0,4 + p_3^0 \cdot 0 + p_4^0 \cdot 0,6 + p_5^0 \cdot 0.$$

Таким образом, $p_3^{(1)}$ оказывается скалярным произведением вектора p^0 начального распределения на третий столбец матрицы T .

Проводя аналогичные рассуждения для остальных четырех состояний, заключаем, что после первого разыгранного мяча вероятности вновь возникающих состояний можно найти как соответствующие компоненты вектора

$$p^0 T = p^{(1)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, p_4^{(1)}, p_5^{(1)}).$$

Повторяя те же операции над векторами $p^0 T = p^{(1)}$, $p^{(2)} = p^{(1)} T, \dots$ получаем, что после n разыгранных мячей соответствующие вероятности окажутся компонентами $(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)}, p_4^{(n)}, p_5^{(n)})$ вектора *)

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} T = (p^0 T) T \cdot \dots \cdot T = p^0 T^n.$$

Можно найти **) так называемые предельные вероятности p_1^* и p_3^* (вероятности выигрыша гейма АВТОРОМ и ЧИТАТЕЛЕМ при неограниченном возрастании n), которые в нашем примере равны 0,736 и 0,264 соответственно.

Заметим, что при произвольных вероятностях p и q ($p + q = 1$) выигрыша мяча АВТОРОМ и ЧИТАТЕЛЕМ соответственно, используя те же рассуждения, можно установить, что после розыгрыша четырех или пяти мячей пред-

*) T^n — матрица T , возведенная в n -ю степень.

**) В теории марковских цепей (при некоторых предположениях о матрице переходов T) доказывается существование предельных вероятностей.

шестью периоду случайного блуждания вероятности равны:

$$p_1^0 = p^4(1 + 4q); \quad p_2^0 = 4p^3q^2;$$

$$p_3^0 = 6p^2q^2; \quad p_4^0 = 4p^2q^3; \quad p_5^0 = q^4(1 + 4p).$$

Если, например, $p = q = 1/2$, то $p_1^0 = 3/16$; $p_2^0 = 1/8$; $p_3^0 = 3/8$; $p_4^0 = 1/8$; $p_5^0 = 3/16$ и вектор $p^0 = (3/16, 1/8, 3/8, 1/8, 3/16)$.

3.10. Продолжим игру до сета

Итак, мы нашли вероятности выигрыша одного гейма каждой из сторон. Перейдем теперь к определению вероятностей выигрыша сета. С этой целью выпишем всевозможные изменения счета в пределах сета в виде соответствующего ориентированного графа (рис. 5).

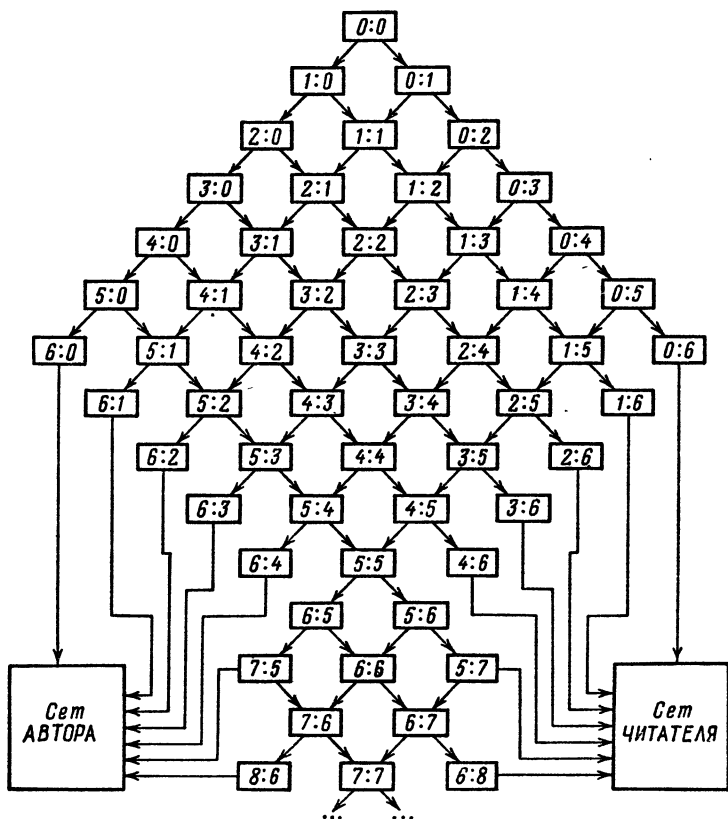


Рис. 5

Рассматривая вновь возникшую конечную марковскую цепь (рис. 5), видим, что после розыгрыша одиннадцати или двенадцати геймов возникает процесс случайного блуждания. Он определен требованием иметь для победы в сете преимущество не менее, чем на два гейма. Граф этого случайного блуждания представлен на рис. 6.

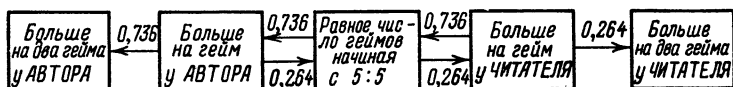


Рис. 6

Используя те же методы, что и при нахождении вероятностей выигрыша гейма, можно найти вероятности выигрыша сета:

$$P(\text{сет АВТОРА}) = 0,966, \quad P(\text{сет ЧИТАТЕЛЯ}) = 0,034.$$

Как видим, вероятность выигрыша сета АВТОРОМ близка к единице. Этого, в общем, и следовало ожидать, ведь АВТОР выигрывает отдельный мяч с вероятностью в полтора раза большей, чем ЧИТАТЕЛЬ. Подсчет показывает (проверьте сами!), что матч из трех сетов АВТОР выигрывает с вероятностью 0,996, а из пяти — с вероятностью 0,9996, т. е. практически — наверняка. Ясно поэтому, что более трех сетов играть в этом случае нецелесообразно.

Но допустим теперь, что класс игроков практически одинаков, например, вероятность выигрыша мяча АВТОРОМ составляет 0,51, а ЧИТАТЕЛЕМ — 0,49. Иными словами, из ста разыгранных мячей ЧИТАТЕЛЬ выигрывает в среднем лишь на два меньше, чем АВТОР. В этом случае можно найти, что вероятность выигрыша сета АВТОРОМ составит 0,573, а ЧИТАТЕЛЕМ 0,427. Таким образом, при разнице вероятностей выигрыша мяча в 0,02 разница в вероятностях

выигрыша сета возрастает в 7 раз. Тем не менее при розыгрыше одного сета преимущество сильной стороны оказывается не очень убедительным: из десяти встреч в среднем АВТОР выиграет шесть раз, ЧИТАТЕЛЬ — четыре.

Вероятность выигрыша каждой стороной по одному сету, т. е. вероятность счета 1:1, велика и составляет 0,488 (подсчитайте ее, используя граф на рис. 7).

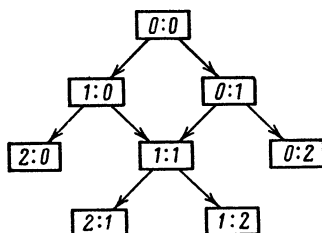


Рис. 7

3.11. Выясним отношения!

Из предыдущего ясно, что для «выяснения отношений» в матче соперников примерно одного класса следует играть не менее трех сетов. Однако и в этом случае (когда $P(A) = 0,51$, $P(Ч) = 0,49$) картина останется не очень убедительной: счет 2:1 или 2:0 в пользу АВТОРА может возникнуть соответственно с вероятностями 0,255 или 0,328. Следовательно, в пользу АВТОРА матч может завершиться с вероятностью 0,583.

В пятисетовом матче вероятность выигрыша АВТОРА составляет уже 0,625, а ЧИТАТЕЛЯ — 0,375. И хотя разность этих величин в 12,5 раз больше разности вероятностей в выигрыше отдельного мяча, тем не менее можно было бы желать увеличения разыгранных сетов до семи. Но это желание не укладывается ни в рамки физиологических возможностей, ни в приемлемые масштабы времени*). В среднем в сете разыгрывается 9 — 10 геймов. Гейм обычно длится 3 — 4 минуты, а порой до 10 минут. Трехсетовый матч занимает в среднем 2,5 часа, пятисетовый — 4 часа**).

Теперь можно понять, что сложившаяся традиция, согласно которой на крупнейших теннисных соревнованиях с участием лучших игроков мира финальные, полуфинальные (а иногда и предшествующие им) матчи проводятся из пяти (реже из трех) сетов, оправдана не только экспериментально, но имеет определенные теоретические основания.

Теоретически оправдана также практика организации соревнований по олимпийской системе (см. § 8), когда фаворитов (игроков, стоящих у вершины классификации) рассеивают по таблице с тем, чтобы исключить их взаимные встречи в начале соревнований. В первом и ближайших к нему кругах соревнований «посеянные» встречаются с уступающими им по классу противниками в трехсетовых матчах. По мере продвижения к финалу напряженность встреч растет, класс игроков выравнивается, и для выявления победителя переходят к пятисетовым матчам.

До 1976 г. в системе «Гран при» количество турниров, проводимых из трех и пяти партий, было примерно равным (34 и 38 соответственно). К 1982 г. из 93 турниров 62 проводились трехсетовыми встречами.

*) Встречи женщин и юниоров проводятся только в трех сетах.

**) К тому же при равном примерно классе игры и семисетовый матч не принесет значительного изменения вероятностного результата. Известно, что количество матчей, в которых победитель определяется в пятом сете, составляет 20 — 30 %.

3.12. Играя — обучайся!

В процессе игры каждый теннисист учитывает свои ошибки технического и тактического характера, приспосабливается к манере, темпу, стилю игры противника, короче говоря, обучается и совершенствует свою игру.

Это обстоятельство может быть учтено в модели, построенной в терминах уже известного читателю математического аппарата — цепей Маркова. Можно, в частности, считать, что в марковских цепях, описывающих розыгрыш гейма (сета), вероятности переходов из одного состояния в последующее меняются по тем или иным законам.

Начнем с рассмотрения ситуации, которая возникает при розыгрыше мячей в тай-брейке.

Предположим, что игрок (АВТОР) после выигранного мяча (состояние S_1) следующий мяч выигрывает с вероятностью $p = 0,5$ (его внимание и усердие находятся в норме — они обычные). Но вот после проигранного мяча (состояние S_2) АВТОР более собран, более внимателен, проявляет большее усердие. Поэтому естественно считать, что следующий мяч он выиграет с большей вероятностью, например, с вероятностью $q = 0,7$. Тем самым возникает следующая матрица переходов из состояния S_i в S_j ($i, j = 1, 2$):

$$T = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix}$$

и соответствующий ей граф состояний (рис. 8).

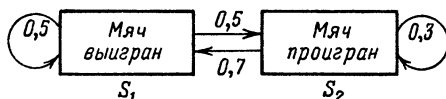


Рис. 8

При розыгрыше первого мяча по системе тай-брейк подает тот теннисист, чья очередь подавать при счете 6:6. Его соперник подает при розыгрыше второго и третьего мячей. В последующем каждый теннисист подает поочередно при розыгрыше двух следующих мячей, пока не будет завершен гейм (а с ним и сет). Предположим, что АВТОР начал тай-брейк с выигранного мяча. Вероятность выигрыша им второго мяча в нашем примере составит $p_1 = 0,5$, вероятность проигрыша $q_1 = 0,5$. Будем считать (p_1, q_1) начальным

распределением вероятностей. Каковы вероятности того, что следующий, третий мяч им будет выигран и соответственно проигран?

Обозначим соответствующие вероятности через p_2 и q_2 и найдем: $p_2 = 0,5^2 + 0,5 \cdot 0,7 = 0,60$, $q_2 = 0,5^2 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,40$. Другими словами, распределение (p_2, q_2) вероятностей исхода розыгрыша третьего мяча дается произведением начального распределения (p_1, q_1) на матрицу T :

$$(p_2, q_2) = (p_1, q_1) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Повторяя эти рассуждения, найдем, что распределение вероятностей исхода розыгрыша $(n+1)$ -го мяча составит

$$(p_n, q_n) = (p_{n-1}, q_{n-1}) T = (p_1, q_1) T^{n-1}.$$

Так, в частности, $p_3 = p_2 \cdot 0,5 + q_2 \cdot 0,7 = 0,580$, $q_3 = p_2 \cdot 0,5 + q_2 \cdot 0,3 = 0,420$; $p_4 = 0,584$; $p_5 = 0,5832$; $p_6 = 0,58336$; $q_4 = 0,416$; $q_5 = 0,4168$; $q_6 = 0,41663$ и т. д. Наконец, можно установить значения предельных вероятностей:

$$p^* = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 7/12,$$

$$q^* = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 5/12.$$

Предположим теперь, что АВТОР начал тай-брейк с проигранного мяча. В этом случае начальным распределением будет $p'_1 = 0,7$, $q'_1 = 0,3$, а распределение результатов розыгрыша третьего мяча составит

$$p'_2 = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,56,$$

$$q'_2 = 0,7 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,3 = 0,44.$$

Для $(n+1)$ -го мяча получим распределение

$$(p'_n, q'_n) = (p'_{n-1}, q'_{n-1}) T = (p'_1, q'_1) T^{n-1}.$$

Так, в частности,

$$p'_3 = 0,588; \quad p'_4 = 0,5824; \quad p'_5 = 0,58352;$$

$$q'_3 = 0,412; \quad q'_4 = 0,4176; \quad q'_5 = 0,41648;$$

$$p'_6 = 0,583296; \quad q'_6 = 0,416704.$$

Предельные вероятности принимают прежние значения

$$p'^* = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n = 7/12, \quad q'^* = \lim_{n \rightarrow \infty} q'_n = 5/12.$$

3.13. Модель тай-брейка (завершим тай-брейк!)

Таким образом, вне зависимости от того, чем закончился розыгрыш первого мяча, вероятности выигрышей следующих мячей очень быстро стабилизируются: начиная с третьего-четвертого мяча они уже почти не отличаются. Вот почему после возникновения в тай-брейке счета «по шести» при дальнейшем рассмотрении игры (до достижения одной из сторон превосходства в два мяча) можно считать вероятности выигрыша АВТОРОМ и ЧИТАТЕЛЕМ очередного мяча постоянными и равными, соответственно, $7/12$ и $5/12$.

Граф возможных изменений счета разыгранных мячей в тай-брейке таков же, как и при изменении счета геймов в сете (рис. 5). Отличие лишь в числовых значениях вероятностей перехода из рассматриваемого состояния в другое возможное.

Используя граф, изображенный на рис. 5, можно подсчитать (аналогично тому, как это сделано при розыгрыше гейма — см. с. 34) распределение $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_5^0)$ вероятностей достижения после розыгрыша одиннадцати или двенадцати мячей каждого из пяти состояний: «тай-брейк АВТОРА», «больше АВТОРА», «ровно», «меньше АВТОРА» (или «больше ЧИТАТЕЛЯ»), «тай-брейк ЧИТАТЕЛЯ». Граф марковской цепи с этими пятью состояниями изображен на рис. 9. Распреде-



Рис. 9

ление p^0 примем в качестве начального для периода случайного блуждания. Введем переходную матрицу рассматриваемой цепи:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7/12 & 0 & 5/12 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда распределение вероятностей p^1 достижения упомянутых пяти состояний после розыгрыша следующего мяча найдется как произведение вектора p^0 на матрицу T : $p^1 = p^0 T$. Распределение вероятностей после очередного мяча составит

$p^2 = p^1 T$ и т. д., пока не стабилизируются значения координат вектора $p^n = p^{(n-1)} T$ распределения вероятностей.

Рассмотренную ситуацию можно несколько усложнить, предположив, что и противник АВТОРА (ЧИТАТЕЛЬ) также усиливает свои игру, внимание, собранность после проигранного мяча, и принять, что вероятность выигрыша им следующего мяча составит не 0,5, а, например, 0,6. В таком случае матрица переходов примет вид

$$T' = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом можно в некоторой степени учитывать психологические, эмоциональные и им подобные факторы.

Для этой усложненной ситуации читатель может самостоятельно подсчитать предельные вероятности p^* и q^* , с которыми обе стороны придут к завершающей фазе тайбрейка.

3.14. Марковские процессы — с дошкольных лет

Как это ни парадоксально звучит, но с марковскими процессами мы знакомы еще с дошкольного возраста. Каждому известна детская игра, в которой фишки участников должны переместиться из начального пункта A_0 («старт») в конечный A_k («финиш»). Попад в тот или иной промежуточный пункт A_j , фишка может либо приблизиться к финишу (за счет «льготы», предусмотренной условиями игры), либо удалиться от него (за счет «штрафа»).

Число шагов, на которое фишка перемещается из занимаемого ею пункта A_i в пункт A_j , определяется числом очков, выпавшим на брошенной игровой кости. Поэтому вероятность того, что фишка из пункта A_i переместится в A_j , не зависит от того, каким путем фишка оказалась в позиции A_i , а определяется лишь вероятностью p_{ij} выпадения соответствующего числа очков на грани кости. Возникает ситуация, в точности характерная для марковского процесса с дискретным (конечным) множеством состояний $A_0, A_1, \dots, A_j, \dots, A_k$ и дискретным временем. Счет моментов переходов из одного состояния в другое заменяется счетом числа самих переходов. Позиции $A_i (i = 0, \dots, k)$ ассоциируются с состояниями системы S игры. Тогда карту игры с изображенными на ней позициями и вероятностями

переходов из каждой позиции в последующие можно считать графом соответствующей цепи. Граф этот, как правило, куда сложнее изменения счета в гейме или сете.

В студенческую пору и в зрелом возрасте те, кому привелось заниматься стохастическими задачами исследований операций, вновь обращаются к случайным процессам, развитие и исход которых зависят от ряда случайных факторов. Важную роль во многих задачах играют так называемые марковские случайные процессы.

В таких процессах «будущее зависит от прошлого только через настоящее». Или иначе: случайный процесс называют *марковским*, если при любом его состоянии S_0 вероятностные характеристики процесса в *последующем* зависят только от *настоящего* состояния S_0 и не зависят от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Уточним данное определение. Рассмотрим некоторую систему S , которая в любой момент времени может находиться только в одном из n несовместных состояний S_1, \dots, S_n . В нашем примере — это состояния счета в процессе игры в теннис. Пусть состояние системы меняется в зависимости от некоторого параметра t , причем переход из состояния в состояние зависит от вмешательства случая. Параметр t можно условно назвать временем и считать, что он изменяется либо непрерывно, либо принимает некоторую последовательность t_1, t_2, \dots, t_n значений (в нашем примере — это моменты завершения розыгрыша очередного мяча).

Процесс, описывающий поведение такой системы, называют *конечной цепью Маркова* при выполнении следующего условия: если в данный момент времени τ система находится в состоянии S_i , то в следующий момент $t > \tau$ система будет находиться в состоянии S_j с некоторой вероятностью $P_{ij}(\tau, t)$, которая не зависит от поведения системы до момента τ .

Таким образом, конечная цепь Маркова — это случайный процесс, протекающий на конечном множестве состояний некоторой системы, для которого вероятность системы попасть в то или иное состояние зависит только от состояния, предшествующего данному. Вероятности $P_{ij}(\tau, t)$ называются *переходными вероятностями*. Марковская цепь называется *однородной*, если переходные вероятности зависят только от разности $t - \tau$, т. е. если $P_{ij}(\tau, t) = P_{ij}(t - \tau)$.

Если принять $\tau = 0$ и в процессах с дискретным временем моменты t_1, \dots, t_n, \dots отождествить с индексами $1, 2, \dots, n, \dots$, то можно упростить обозначения: $P_{ij}(\tau, t_k) = P_{ij}(0, k) = P_{ij}(k)$ и $P_{ij}(t_l, t_k) = p_{ij}(k - l)$. В частности, для любых соседних моментов времени l и $l + 1$ имеем $P_{ij}(t_l, t_{l+1}) =$

$= P_{ij}(1)$. Эти величины и есть *вероятности перехода* из любого состояния S_i в другое S_j (включая вероятность $P_{ii}(1)$ задержки в состоянии S_i) за один шаг. Переходные вероятности $P_{ij}(1) \equiv P_{ij}$ образуют *матрицу переходов конечной марковской цепи*:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

В каждой i -й строке матрицы находятся вероятности переходов из одного и того же состояния S_i в любое возможное S_j . Естественно, что сумма переходных вероятностей в каждой строке равна единице:

$$P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{in} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Примером такой матрицы может служить матрица T переходных вероятностей для периода случайного блуждания при завершении гейма (см. с. 35). Зная матрицу переходов \mathcal{P} , можно подсчитать вероятности переходов системы из состояния S_i в состояние S_j за n шагов. Так, в частности, переходные вероятности $P_{ij}(2)$ за два шага составляют матрицу \mathcal{P}_2 , которая получается возведением в квадрат матрицы \mathcal{P} : $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}^2$. Переходные вероятности $P_{ij}(n)$ за n шагов образуют матрицу, равную n -й степени \mathcal{P} : $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^n$. Именно так мы поступали, рассматривая завершающую фазу розыгрыша гейма, а также тай-брейка.

Итак, на примере моделирования игры в теннис мы познакомились со *случайным марковским процессом с дискретными состояниями*; переход из состояния в состояние в таких процессах происходит мгновенно. Если же система не скачком (мгновенно), а постепенно, с течением времени переходит из одного состояния в другое, то говорят о *процессе с непрерывными состояниями*. В том случае, когда переходы реализуются в заранее фиксированные моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, говорят о *процессе с дискретным временем*; при возможности переходов в случайные моменты времени — о *процессах с непрерывным временем**).

*) В некоторых практических задачах случайные процессы в первом приближении могут считаться марковскими (хотя, строго говоря, ими не являются). В некоторых случаях, путем искусственного «брикетирования» всего «прошлого» и включения его в «настоящее» состояние S_0 , удастся поместить случайный процесс в рамки марковского. Однако такой прием приводит к значительному усложнению модели и затрудняет ее изучение.

Работа всякого технического устройства, собранного из отдельных составляющих элементов, может быть описана в терминах марковского процесса с дискретным множеством состояний и непрерывным временем. Дело в том, что узлы устройства могут выходить из строя (а затем и восстанавливаться) в случайные моменты времени. При описании подобных процессов используют вероятности $P_i(t)$ того, что в момент времени t система находится в состоянии S_i . Эти вероятности состояний находят как решения системы линейных дифференциальных уравнений (уравнений Колмогорова).

Некоторые из процессов могут протекать весьма длительно и при неограниченном возрастании времени t приобретать стационарный характер. В этом режиме вероятности состояний оказываются постоянными (не зависящими от времени) и называются *финальными*. Финальные вероятности находят уже из системы линейных алгебраических уравнений, в которые превращаются в этом случае дифференциальные. Обширные приложения марковские процессы нашли в теории массового обслуживания — одного из разделов теории исследования операций. Заинтересовавшегося читателя отсылаем к уже упомянутым монографиям [1; 25].

4. АХ, ЭТИ СУДЬИ!

Известный олимпийский лозунг «Быстрее! Выше! Сильнее!» следовало бы в настоящее время дополнить словом «Красивее!». Вспомним фигурное катание, художественную и спортивную гимнастику, прыжки в воду. И если скорость измеряют временем, затрачиваемым на преодоление определенной дистанции (будь то бег на 100 метров или марафон), прыжки измеряют расстоянием, а силу сильных — поднятыми килограммами, то как «измерить» красоту, как оценить прекрасное?

Судейство в гимнастике, фигурном катании и прыжках в воду (а именно об этих видах спорта пойдет речь в дальнейшем) осуществляется группами судей, являющихся знатоками своего вида спорта. Судьи оценивают в баллах не только сложность исполняемых элементов, но чистоту (гармоническую целостность), красоту и артистичность исполнения. Естественно, что кроме требований, регламентируемых правилами того или иного вида спорта, каждый судья при оценке упражнений пользуется своими субъективными критериями в понимании красоты упражнения, его соответ-

ствия тем или иным нормам. Ведь давно известно, что «на вкус и цвет товарищей нет».

У спортсменов и болельщиков не так уж часто возникает вопрос о том, почему в таком-то виде спорта принято судить именно так, а не иначе. Чаще возникает вопрос, лежащий на поверхности: как осуществляется судейство? Как формируются его результаты? Нам кажется, что даже далеко не все судьи могут объяснить, почему одна система судейства для данного вида спорта лучше другой. Как правило, ссылаются на традиционность системы судейства того или иного вида спорта.

Проблемами, подобными спортивному судейству, — так называемыми *экспертными оценками* — занимается возникший в последние десятилетия новый раздел прикладной математики. Этот раздел изучает модели и методы организации экспертиз, обработку информации, получаемой от экспертов, и тому подобными вопросами. Ниже мы поговорим об экспертных оценках и о том, какое место они находят в современном спорте.

4.1. Экспертиза — что это такое?

Известно, что человеку легче сказать, какой из двух предметов тяжелее, чем указать их вес в граммах или в килограммах.

Как показали многочисленные эксперименты, человек более точно и с меньшими затруднениями отвечает на вопросы качественного, например сравнительного, характера, чем на вопросы, требующие количественной оценки. Правда, весьма часто за ответами на качественные вопросы кроются представления об отношениях между числами, т. е. соображения количественной природы.

Под *экспертизой* понимается процедура, при которой одна группа людей, называемая «лицом, принимающим решение» (обозначается ЛПР), выясняет суждения по тому или иному вопросу другой группы лиц, называемых *экспертами*, в целях выработки и принятия по этому вопросу соответствующего решения. Весьма часто обе участвующие в экспертизе группы совпадают, т. е. все члены группы высказывают свое мнение, а затем на основе этих личных мнений принимается общее групповое решение.

Ярким примером экспертизы является судейство в фигурном катании, при котором девять судей высказывают свое мнение, после чего, в результате обработки судейских оценок, получается итоговый результат.

Группу экспертов, как правило, составляют специалисты по тому вопросу, по которому нужно принять решение. Довольно очевидно, что на суждение каждого эксперта накладывается его субъективное восприятие ситуации, поэтому очень важно организовать экспертизу таким образом, чтобы влияние субъективных факторов было минимальным.

В каком же виде эксперты могут сообщать качественную информацию?

Существует несколько видов информации, используемой при работе с экспертной группой.

Во-первых, экспертной группе можно сообщить некоторую шкалу числовых значений оцениваемого фактора. Так, например, в гимнастике используется десятибалльная шкала с шагом 0,1 балла, и эксперт высказывает свое суждение в виде соответствующего числа в рамках предложенной ему шкалы.

Во-вторых, можно предложить экспертам расставить оцениваемые объекты по местам (рангам): первое место, второе и т. д. Такая упорядоченная расстановка называется *ранжировкой*.

В-третьих, эксперты, руководствуясь какими-либо признаками, могут разбить всю совокупность объектов на отдельные классы (подмножества). В этом случае речь идет о классификации объектов. Примером может служить разбиение перед соревнованиями спортсменов или команд на группы по территориальному или игровому признакам.

Возможно, в-четвертых, также попарное сравнение оцениваемых объектов, при котором эксперт сообщает, какой из двух объектов по его мнению предпочтительнее другого.

Перечисленные выше четыре типа качественной информации являются в настоящее время основными при проведении экспертиз. Однако при решении различных специализированных задач возможны и другие типы получаемой от экспертов информации.

Суждение, сообщаемое экспертом, будь то оценка в баллах или ранжировка, принято называть более общим термином — *отношение*.

Задача, стоящая перед ЛПР, заключается в выборе такого отношения, которое в том или ином смысле — в зависимости от ситуации — является средним из отношений, предложенных экспертами.

Сейчас мы рассмотрим некоторые типы отношений, методы выбора средних из них и применение в спортивном судействе.

4.2. Ранжировки

Предположим, что n заданных объектов должны быть оценены N экспертами. Каждый эксперт обязан сообщить отношение в виде вектора рангов, т. е. указать, какой из оцениваемых объектов имеет по его мнению ранг, равный единице, какой ранг — равный двум и т. д. Такое отношение, как уже отмечалось выше, называют ранжировкой. Нетрудно убедиться, что число различных возможных ранжировок равно $n!$. Обозначим множество всех возможных ранжировок через R . Ранжировку, сообщаемую i -м экспертом, будем обозначать буквой $r_i = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in})$, где r_{im} — ранг (место) m -го объекта ($m = 1, \dots, n$), указанный i -м экспертом.

Пусть, например, двое судей после выступления четырех спортсменов A, B, C, D должны указать в итоговом протоколе их расстановку по местам. Предположим, что судьи выдали ранжировки $r_1 = (3, 1, 2, 4)$ и $r_2 = (2, 1, 3, 4)$. Это означает, что первый судья отвел первое место спортсмену B , второе — спортсмену C , третье — A и четвертое место — D . В то же время второй судья присудил первое место спортсмену B , второе — A , третье — C , четвертое — D . Значит, в принятых нами обозначениях $r_{11} = 3, r_{12} = 1, r_{13} = 2, r_{14} = 4, r_{21} = 2, r_{22} = 1, r_{23} = 3, r_{24} = 4$.

Прежде чем показать, каким образом выбирается средняя оценка, введем понятие расстояния (метрики) $d(r_i, r_j)$ между ранжировками. Естественно потребовать, чтобы, подобно обычному расстоянию, расстояние между ранжировками удовлетворяло следующим требованиям (вспомним элементарную геометрию!).

1. Расстояние между ранжировками не может быть отрицательным: $d(r_i, r_j) \geq 0$; расстояние равно нулю тогда и только тогда, когда ранжировки тождественно равны: $d(r_i, r_j) = 0$ влечет за собой $r_i = r_j$ и обратно.

2. Расстояние симметрично: $d(r_i, r_j) = d(r_j, r_i)$.

3. Расстояние подчиняется неравенству треугольника: $d(r_i, r_j) \leq d(r_i, r_k) + d(r_k, r_j)$.

Учитывая нужды экспертизы, к этим трем аксиомам были присоединены еще следующие:

4. Пусть ранжировки r'_i и r'_j получены соответственно из ранжировок r_i и r_j в результате некоторого переобозначения объектов; тогда

$$d(r'_i, r'_j) = d(r_i, r_j).$$

5. Минимальное положительное расстояние между ранжировками равно 1.

6. Если ранжировка r_k лежит между ранжировками r_i и r_j , то

$$d(r_i, r_j) = d(r_i, r_k) + d(r_k, r_j).$$

Можно доказать (см. [15; 29]), что существует единственная метрика, удовлетворяющая всем шести требованиям. При этом расстояние между ранжировками r_i и r_j определяется по формуле

$$d(r_i, r_j) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n |r_{im} - r_{jm}|.$$

В нашем примере со спортсменами A, B, C и D и двумя судьями расстояние между ранжировками судей составляет

$$d(r_1, r_2) = \frac{1}{2} [|3 - 2| + |1 - 1| + |2 - 3| + |4 - 4|] = 1.$$

Очень часто в качестве среднего при наличии нескольких ранжировок r_1, \dots, r_N выбирают такую ранжировку \tilde{r} , сумма расстояний от которой до исходных есть величина наименьшая из всех возможных. Такая ранжировка \tilde{r} называется *медианой Кемени*. Медиана Кемени \tilde{r} находится из решения задачи минимизации по всем ранжировкам r из множества R суммы расстояний от r до r_1, \dots, r_N , т. е. определяется формулой:

$$\sum_{k=1}^N d(\tilde{r}, r_k) = \min_{r \in R} \sum_{k=1}^N d(r_k, r).$$

В общем случае решение такой задачи является весьма сложным, и мы не имеем возможности задерживаться на этом вопросе (см. [15]).

Сейчас мы рассмотрим различные принципы выбора результирующего отношения в случае ранжирования объектов с ретроспективной развития этих принципов.

4.3. О недостатках принципа большинства

Одним из самых известных и, по-видимому, самых древних принципов выбора результирующего отношения является *принцип большинства*. Принцип этот состоит в следующем. Пусть выданы N ранжировок m объектов: r_1, \dots, r_N . В этом случае на первое место в результирующей ранжировке попадает объект, который большинство экспертов поставили на первое место; на второе — объект, который большинство поставили на второе и т. д.

Пусть, например, выданы три ранжировки четырех объектов:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В результирующей ранжировке объекты получают следующие ранги:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ибо большинство первое место отдало первому объекту, второе место — второму, третье — четвертому и четвертое — третьему.

Однако в еще более ранних исследованиях по проблеме выбора наилучшей ранжировки (объектов), которые принадлежат французским ученым Жану Антуану Кондорсе (1743 — 1794) и Жану Шарлю Борда (1733—1799)*, указано на недостаточность процедуры определения результирующего отношения по принципу большинства.

Приведем пример ([15]), иллюстрирующий точку зрения Кондорсе. Допустим, что рассматриваются двадцать объектов (альтернатив) a_i ($i = 1, \dots, 20$) и их ранжировки, высказанные десятью экспертами:

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...	r_{10}
a_2	a_2	a_1	a_3	a_4	...	a_9
a_1	a_1	a_3	a_1	a_1	...	a_1
a_3	a_3	a_4	a_4	a_3	...	a_3
a_4	a_4	a_5	a_5	a_5	...	a_4
...
a_{19}	a_{19}	a_{20}	a_{20}	a_{20}	...	a_{20}
a_{20}	a_{20}	a_2	a_2	a_2	...	a_2

Здесь для большей наглядности альтернативы a_i размещены соответственно занятым в каждой ранжировке местам. По правилу большинства в этом примере наилучшей должна быть признана альтернатива a_2 , хотя очевидно, что

*) Математик и философ Жан А. Кондорсе — автор трактата «Эскиз исторической картины прогресса человеческого разума», в котором он предсказал возможность существенного продления жизни человека.

с бóльшим успехом она может быть признана наихудшей альтернативой.

Иногда при использовании правила большинства вводят дополнительные требования, позволяющие устранить указанный недостаток. В частности, наилучшей может быть объявлена альтернатива, которую считают наилучшей не менее половины экспертов. Между тем в реальных экспертизах такая ситуация случается не очень часто. Кондорсе был предложен следующий принцип выбора наилучшей ранжировки. На основании полученных от экспертов ранжировок для каждой пары альтернатив a_i, a_j вычисляется величина S_{ij} — число экспертов, считающих, что a_i лучше a_j . Находится, соответственно, и величина S_{ji} . Если $S_{ij} > S_{ji}$, то альтернатива a_i считается более предпочтительной, чем a_j (символически факт « a_i предпочтительней, чем a_j » записывается так: $a_i > a_j$). Альтернатива a_i объявляется *наилучшей альтернативой* — *альтернативой Кондорсе* — если $S_{ij} > S_{ji}$ для всех $j \neq i$. В рассмотренном выше примере такой альтернативой является a_1 .

Однако при использовании принципа выбора Кондорсе может возникать указанный им же парадокс, являющийся следствием нетранзитивности коллективных предпочтений. Под нетранзитивностью понимается нарушение свойства транзитивности, т. е. следующий факт: при $a_1 > a_2$ и $a_2 > a_3$ все же $a_3 > a_1$.

Проиллюстрируем парадокс Кондорсе на примере. Допустим, что три эксперта проранжировали три альтернативы следующим образом:

$$r_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad r_2 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}; \quad r_3 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае $S_{12} > S_{21}$, $S_{23} > S_{32}$, но $S_{13} < S_{31}$, следовательно, $a_1 > a_2$, $a_2 > a_3$, но $a_3 < a_1$, и потому альтернативы Кондорсе в этом случае не существует.

Заметим, что число экспертиз, приводящих к парадоксу Кондорсе, в среднем немного меньше 1/10 общего числа экспертиз при их фиксированном числе. В реальных задачах, когда мнения экспертов могут сильно отличаться друг от друга, вероятность возникновения этого парадокса даже выше 1/10.

Другой способ усовершенствования принципа большинства был предложен Борда и состоит в следующем. Объектам, проранжированным экспертом, приписывают «веса»: последнему — вес, равный нулю, предпоследнему — единице и т. д.

Если через s_i обозначить сумму весов, приписанных альтернативе a_i всеми экспертами, то результирующим объявляется отношение $\tilde{r} = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, для которого $s_{i1} \geq s_{i2} \geq \dots \geq s_{in}$. Способ Борда также не лишен недостатков. Например, альтернатива Кондорсе, т. е. лучшая любой другой при парном сравнении, может оказаться не выбранной в качестве наилучшей по принципу Борда.

Рассмотрим простой пример. Допустим, что пять экспертов проранжировали объекты a_1, a_2, \dots, a_5 следующим образом:

$$r_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}; \quad r_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \end{pmatrix}; \quad r_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}; \quad r_4 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \\ a_4 \end{pmatrix}; \quad r_5 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_1 \\ a_5 \end{pmatrix}.$$

Лучшим по принципу парных сравнений Кондорсе является объект a_1 (проверьте сами!). Однако по принципу Борда он будет хуже a_2 , так как $s_1 = 15$, а $s_2 = 16$.

Указанных в этом разделе недостатков лишен принцип выбора, предложенный Кемени. Как уже отмечено, этот принцип основан на выборе среднего отношения (ранжирования), наименее удаленного от высказанных экспертами. Ниже будут предложены разработанные авторами методы отыскания среднего при судействе фигурного катания.



4.4. О судействе в фигурном катании

Остановимся сначала на одиночном катании. В этом виде фигуристы соревнуются по системе многоборья, включающей обязательные упражнения («школа»), короткую и произвольную программы.

Обязательная программа требует исполнения трех определенных фигур из числа предусмотренных чемпионатами ИСУ (Международного союза конькобежцев), Олимпийскими играми, чемпионатами СССР. С 1980 г. группы фигур, подлежащих исполнению, устанавливаются технической комиссией ИСУ на весь сезон. Каждая фигура (петля, скобка, параграф и др.) оценивается по шестибальной шкале: от нуля баллов за невыполнение фигуры — до шести баллов за ее безукоризненное выполнение. Оценка обязательных упражнений учитывает не только совершенство рисунка, оставленного на льду коньками фигуриста, но также исполнение фигуры в целом (уверенность скольжения, естественность движений, грациозность и т. п.).

Короткая программа (введена с 1971 г. в целях увеличения значимости произвольных частей многоборья) предусматривает выполнение группы из семи обязательных элементов (прыжков, вращений, серпантинов и т. п.). В 1975 г. были определены четыре группы обязательных элементов короткой программы, из которых к исполнению на весь сезон выбирается по жребию одна. Группа, выбранная в текущем сезоне, исключается из жребия в следующем, втором, году четырехлетия, разделяющего олимпийские игры, с тем, чтобы за олимпийский цикл «прокатать» все четыре группы.

Короткая программа исполняется фигуристом под выбранное им музыкальное сопровождение. Она должна включать все обязательные элементы, связанные теми или иными переходными движениями (связками) — шагами, перебежками и т. п. Программа не должна включать дополнительные элементы; ее исполнение ограничено двумя минутами.

За исполнение короткой программы одиночного катания выставляются две оценки: первая — за *выполнение обязательных элементов*, вторая — за *представление программы*.

Методика судейства, принятая в СССР, несколько отличается от принятой на международных соревнованиях. В ходе внутрисоюзных соревнований судья ведет подсчет «штрафных баллов» за ошибки, допущенные при исполнении каждого из обязательных элементов короткой программы (от одной десятой балла за незначительную ошибку — до целого балла за отсутствие требуемого элемента в программе). По завершении программы судья вычитает сумму штрафных баллов из максимально возможной оценки, равной шести баллам. Полученная разность и дает первую оценку — за выполнение обязательных элементов.

Вторая оценка (ее наибольшее значение также равно шести баллам) может значительно отличаться от первой оценки. Она зависит от общего впечатления, производимого композицией программы, артистичности исполнения, соответствия динамики движения музыкальному сопровождению и т. д.

Согласно международной системе судейства сумма штрафных баллов вычитается не из шести, а из так называемой базовой оценки, не превосходящей шести. Базовая оценка определяется каждым судьей в отдельности для каждого участника соревнований в зависимости от мастерства последнего, владения им коньками и иных, чисто субъективных соображений. Кроме того, снижение судьей базовой оценки производится не за все ошибки, допускаемые при выполнении обязательных элементов, а лишь за некоторые из них (заин-

тересовавшего читателя отсылаем к специальной литературе, например, к [13]).

Произвольная программа представляет собой любую композицию различных элементов (прыжков, вращений, спиралей, шагов и других), выполняемую под соответствующее музыкальное сопровождение, сообразное вкусам, склонностям и иным особенностям характера фигуриста. В произвольной программе фигурист стремится продемонстрировать свое мастерство, артистичность, музыкальный вкус, свою индивидуальность. Продолжительность исполнения произвольной программы установлена для женщин в четыре, для мужчин — в четыре с половиной минуты. Как правило, в произвольной программе гармонично сочетаются несколько частей, выполняемых в различном темпе, различающихся включенными элементами. Многие программы фигуристов высокого класса содержат свыше двадцати прыжков, до пяти вращений, несколько дорожек шагов и прочие элементы. Наряду с широкими возможностями, которыми исполнитель располагает в произвольной программе, установлены достаточно строгие правила, обеспечивающие эффективное судейство (см. [13]).

За исполнение произвольной программы предусмотрены также две оценки: первая — за *техническое мастерство*, вторая — за *художественное впечатление*. При выставлении первой оценки учитываются сложность программы, чистота исполнения, уверенность движений. Вторая оценка формируется с учетом оригинальности, композиционных достоинств программы, артистичности исполнения, степени использования всей площади катка и т. п.

При определенных качественных различиях этих двух оценок они в значительной мере взаимозависимы. Так, например, программу без сложных элементов легче выполнить с большим художественным впечатлением. Обе оценки выставляются по шестибальной шкале. Оценка произвольного катания осуществляется судьей чисто визуально, без количественных сравнений скоростей скольжения, высот прыжков, продолжительности вращений и прочего. К тому же для некоторых новых элементов программы вообще отсутствуют общепринятые критерии оценки сложности; в подобных случаях особое значение приобретают квалификация судьи, его объективность, его художественный и музыкальный вкус и т. д.

По завершении выступлений спортсмена в троеборье определяется занятое им место. Прежде фактором, определяющим занятое спортсменом место, являлась общая сумма баллов, полученная им во всех видах троеборья. В по-

следующем система судейства совершенствовалась, и в 1980 г. Конгрессом ИСУ была принята новая система подсчета окончательного распределения мест. По этой системе сумма баллов, полученная спортсменом в определенном виде троеборья, используется только для определения занятого им места именно в этом виде.

Теперь мы готовы перейти к описанию методики судейства и определения результатов соревнований в одиночном катании. На соревнованиях по фигурному катанию применяется открытая система оценок, т. е. каждый судья открыто показывает (или выводит на электронное табло) присуждаемые им оценки по сигналу рефери (старшего судьи в бригаде).

Для того чтобы выработать общий уровень судейства, судьи получают предварительную информацию об участниках соревнований, их мастерстве, о требованиях, предъявляемых уровнем соревнований. Оценки первого выступающего участника за обязательные фигуры, короткую или произвольную программы обсуждаются в некотором смысле коллективно. С этой целью рефери и его ассистент просят сначала каждого из судей сообщить им свои оценки выступления первого участника. Затем, подсчитав среднюю величину оценки, рефери сообщает ее всем судьям и информирует их о наивысшей и наинизшей из выставленных первоначально оценках. Вслед за этим судьи по своему усмотрению могут изменить свои первоначальные оценки в пределах объявленных наивысшей и наинизшей оценок. За выполнение каждой из трех обязательных фигур выставляется по одной оценке. Оценки, выставленные судьями, вносятся в специальную карточку, приготовленную для каждого спортсмена. После записи оценок, полученных участниками, подсчитывается отдельно сумма баллов за три фигуры, выставленных каждым из судей. Спортсмен, набравший наибольшую сумму баллов у данного судьи, занимает первое место, следующий за ним — второе место и т. д. Может оказаться, что два или несколько участников имеют одинаковую сумму баллов. В этом случае каждый из них получает одинаковое (лучшее) место у этого судьи. Например: два или три спортсмена (а может быть, и больше), имея одинаковую сумму баллов, претендуют на первое, второе и третье места. Каждому из них в карточку вносятся лучшие (первое) место. Перед окончательным определением места, занятого спортсменом в обязательных упражнениях, старший судья по одиночному катанию знакомится с тем, как упорядочил (распределил по местам) всех участников каждый из судей.

Окончательное распределение мест имеет ряд особенностей.

В судейской бригаде может быть три, пять, семь, девять или одиннадцать судей. По правилам соревнований результат спортсмена определяется мнением большинства. Разберем наглядный пример, в котором (судейство ведут девять судей) у спортсмена *А* были в итоге следующие места: 1—1—2—2—1—1—1—1—1. Таким образом у него оказалось семь первых мест и два вторых. У спортсмена *В* места следующие: 2—2—1—1—2—2—2—2—2. У него только два первых места, остальные семь — вторые. В итоге спортсмен *А* получил первое место, а спортсмен *В* — второе.

Рассмотрим другой пример: распределение мест у спортсмена *А* следующее: 3—3—4—4—3—3—4—2—4. Шансов на второе место у него практически нет, а одно полученное им второе место учитывается как третье при подсчете количества третьих мест. Таким образом, у него пять третьих мест (большинство при девяти судьях) и четыре четвертых места. У спортсмена *В* следующие места: 4—4—3—3—4—4—3—4—3. Этому спортсмену не хватило одного судейского голоса, в споре за третье место он проиграл спортсмену *А*.

Место, которое имеет спортсмен у большинства судей, называется *определяющим*. Четкую формулировку определяющего места можно дать, используя принцип математической индукции.

Спортсмен имеет первое место определяющим, если абсолютное большинство судей (т. е. не менее, чем трое из пяти, четверо из семи, пятеро из девяти и т. д.) вывели его на первое место. Для спортсмена является определяющим *k*-е место, если никакое более высокое место не оказывается для него определяющим и если абсолютное большинство судей вывели его на *k*-е или на более высокое место.

Например, если спортсмен получил у семи судей места 2—1—1—3—2—1—1, то его определяющее место — первое. Допустим, что у тех же судей другой фигурист получил места 1—4—3—2—1—4—3. Его определяющим местом оказывается третье. В самом деле, на первое место его вывели лишь двое судей, а это меньше абсолютного большинства из семи, т. е. четырех. На первое и второе места его вывели трое судей, что также меньше большинства. Поэтому и второе место не может быть для фигуриста определяющим. А вот на третье, второе или первое места его вывели пятеро судей из семи, что является абсолютным большинством. Следовательно, определяющим местом действительно оказывается третье.

Если двое или большее число участников соревнований выводится на одно и то же определяющее место, то лучший результат будет иметь тот спортсмен, у которого определяющих мест больше. Поэтому при подсчете результатов помимо определяющего места (ОМ) подсчитывают *количество этих мест* (КОМ), при этом следует помнить, что более высокие места рассматриваются как определяющее место.

Например, при пяти судьях один из спортсменов занял следующие места: 1 – 2 – 3 – 3 – 4. Его определяющее место – третье (ОМ = 3), количество определяющих мест – четыре (КОМ = 4). Другой спортсмен имеет места: 2 – 1 – 4 – 4 – 3 (у него ОМ = 3, КОМ = 3); этот спортсмен займет четвертое место, а предыдущий – третье.

Может случиться и так, что количество определяющих мест у двух или нескольких спортсменов будет одинаковым. Поэтому помимо подсчета определяющих мест и количества определяющих мест выводится *сумма определяющих мест* и *общая сумма мест*. В случае равенства ОМ и КОМ определять место спортсмена будет сумма определяющих мест (СОМ), а если и она окажется одинаковой, то лучшее место займет спортсмен, имеющий меньшую общую сумму мест (ОСМ). Например, участник *А* имеет места: 1 – 2 – 3 – 3 – 4; ОМ = 3, КОМ = 4; СОМ = 9; ОСМ = 13; спортсмен *В* имеет места: 1 – 1 – 3 – 3 – 5; ОМ = 3; КОМ = 4; СОМ = 8; ОСМ = 13. В этом случае спортсмен *В* займет третье место, а спортсмен *А* – четвертое.

Другой пример. Спортсмен *А* занимает места: 1 – 1 – 2 – 2 – 3, ОМ = 2; КОМ = 4; СОМ = 6; ОСМ = 9. Спортсмен *В* занимает места: 2 – 2 – 1 – 1 – 4, ОМ = 2; КОМ = 4; СОМ = 6; ОСМ = 10; место, занятое спортсменом *А* – второе, спортсменом *В* – третье.

Если несколько участников имеют одно и то же определяющее место, количество и сумма этих мест также одинаковы и общая сумма мест у них равна, то они делят место в данном виде программы. Такова методика определения места, занятого спортсменом в «школе».

В суммарную итоговую оценку за троеборье оценки за отдельные составляющие части входят с так называемыми *весовыми коэффициентами*. Согласно новым правилам ИСУ для обязательных упражнений введенный коэффициент равен 0,6. Это значит, что место, занятое спортсменом в обязательных упражнениях, умножается на этот коэффициент. Например, спортсмен, занявший в обязательных упражнениях первое место, будет иметь показатель 0,6; вто-

рое — 1,2; третье — 1,8 и т. д. Для короткой и произвольной программ приняты весовые коэффициенты, равные 0,4 и 1,0

Результаты по произвольной программе подсчитываются следующим образом. Две оценки (за техническое мастерство и за художественное впечатление) каждого судьи складываются. При выведении мест, когда два или более участников получают одинаковое количество баллов у одного судьи, решающей является оценка за техническое мастерство. Например, один спортсмен имеет оценки: 5,7 и 5,8, другой — 5,8 и 5,7 у одного и того же судьи. Сумма баллов у них одинаковая — 11,5. Однако лучшее место присуждается второму спортсмену, так как оценка за техническое мастерство у него выше. Если же и эти оценки одинаковы, то спортсмены получают одинаковое (лучшее) место.

Методика определения окончательного места за исполнение произвольной и короткой программ аналогична той, которая принята в школе (за выполнение обязательных фигур), т. е. после выведения мест, занятых каждым участником у каждого судьи, старший судья определяет его результат по большинству лучших мест. Для этого находят определяющее место (ОМ) каждого участника, количество этих мест (КОМ), сумму определяющих мест (СОМ), а также общую сумму мест (ОСМ). Напомним, что весовой коэффициент для короткой программы равен 0,4, а для произвольной — 1,0. Это значит, что место, занятое спортсменом в короткой программе, умножается на 0,4, а в произвольной программе — на 1,0. Для определения места спортсмена только по результатам короткой и произвольной программ складывают показатели, полученные в результате умножения занятого спортсменом места на соответствующий коэффициент. Спортсмен, имеющий меньшую сумму полученных в результате сложения показателей, занимает лучшее место. Если эти показатели у двух спортсменов равны, то лучшее место присуждается спортсмену, у которого выше место за произвольное катание.

Для определения места, занятого участником в троеборье, полученные показатели суммируются с показателями, полученными за обязательные упражнения.

Так, например, допустим, что фигуристы А, В, С заняли в отдельных видах многоборья следующие места.

	школа	короткая	произвольная
А	1	3	3
В	2	2	1
С	3	1	2

Суммарные показатели для спортсменов составят:

$$s(A) = 1 \cdot 0,6 + 3 \cdot 0,4 + 3 \cdot 1,0 = 4,8,$$

$$s(B) = 2 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 1,0 = 3,$$

$$s(C) = 3 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 1,0 = 4,2.$$

Так как $s(B) < s(C) < s(A)$, то первое место присуждается спортсмену В, второе — С, третье — А.



В заключение остановимся коротко на судействе парного катания и танцев на льду.

В парном катании фигуристы состязаются в исполнении короткой и произвольной программ. Элементы, предусмотренные короткой программой парного катания (различные прыжки, вращения, поддержки, комбинации шагов, тодесы и т. д.), разбиты на четыре группы, из которых каждая включает по семь обязательных элементов. В течение сезона на всех крупных соревнованиях выполняется одна из групп, определяемая жребием. Элементы, не входящие в эту группу, не должны входить в короткую программу. Ее продолжительность — 2 мин 15 с. Элементы, выполненные за пределами этого времени, оценке не подлежат. За исполнение короткой программы судьи выставляют две оценки: первую — за выполнение обязательных элементов, вторую — за представление программы. Каждая пара фигуристов имеет право выбора музыкального сопровождения, последовательности выполнения обязательных элементов и переходов, их связывающих.

Наибольшая оценка за исполнение короткой программы равна шести баллам. Оценка снижается согласно правилам всесоюзных соревнований (на международных — несколько иначе): за мелкие ошибки — на 0,1 балла, за незначительные — на 0,2 — 0,3, за существенные — на 0,4 — 0,6, за грубые ошибки — до 0,9. Оценки за выполнение обязательных элементов и представление программы суммируются. Судейство короткой программы парного катания не отличается от описанного выше судейства короткой программы одиночного катания.

За исполнение произвольной программы парного катания (ее продолжительность — пять минут) выставляются также две оценки: первая — за *технический уровень*, вторая — за *композицию и исполнение*. Первая оценка относится к технике, совершенству, уверенности исполнения элементов программы (их число в программах сильнейших переваливает за два десятка). Вторая оценка выставляется за общую композицию, за выбор соответствующего музыкального сопровождения, стиль, красоту исполнения, за синхронность действий парт-

неров. Сумма этих двух оценок дает общее число баллов, выставляемых за произвольную программу. Если у одного и того же судьи две или более пар фигуристов получили одинаковую сумму баллов, то лучшее место присуждается паре с более высокой оценкой за технический уровень исполнения. Результирующее место пары за исполнение произвольной программы определяется подобно тому, как при судействе произвольной программы одиночного катания. Победители в парном катании определяются по итоговой суммарной оценке двоеборья, в которую оценка (номер места) за исполнение короткой программы входит с весовым коэффициентом 0,4, а оценка (номер места) за произвольную программу — с коэффициентом 1,0.

Соревнования по танцам на льду состоят из трех частей: исполнения обязательных, оригинального и произвольного танцев.

На международных соревнованиях исполняются пятнадцать обязательных танцев (фокстрот, шесть типов вальсов, три типа танго, румба, блюз, марш, квикстеп, пасадобль), которые разбиты на четыре группы. Перед соревнованием по жребию выбирается одна из групп. Правила требуют исполнения трех, определяемых также жребием, обязательных танцев и одного оригинального танца. Для каждого из обязательных танцев существуют предписанные рисунки, темп, шаги и музыка. Ритм исполнения оригинального танца каждые два года определяется Комиссией по танцам ИСУ.

Каждый обязательный танец оценивается от нуля до шести баллов. За исполнение оригинального танца выставляются две оценки (по той же шкале): первая — *за композицию*, вторая — *за исполнение*.

Произвольный танец (продолжительностью в четыре минуты) имеет четко выраженный спортивно-танцевальный характер и по элементам, допускаемым правилами к исполнению, отличается от парного катания. Музыка (не более чем с тремя изменениями мелодий) и соответствующие ей ритм, темп, стиль танца выбираются самими фигуристами.

За исполнение произвольного танца выставляются также две оценки: за композицию и за исполнение. Результирующие оценки по каждой из частей троеборья находятся уже известным нам методом. Победители определяются по итоговой суммарной оценке, в которую оценки (номера мест) за обязательные танцы, за оригинальный и произвольный танцы входят с весовыми коэффициентами, равными 0,6; 0,4 и 1,0 соответственно.

Итак, мы ознакомились с основами судейства в фигурном катании. Легко увидеть, что это судейство представляет собой модифицированный принцип Кондорсе с элементами метода Борда (речь идет о судействе одиночного вида троеборья) в тех случаях, когда по принципу Кондорсе определить победителя невозможно.

Поэтому вполне естественно, что современному методу судейства свойственны, в той или иной степени, недостатки методов Кондорсе и Борда. Особенно явно они могут проявиться при весьма различных оценках судей, например, в условиях необъективного судейства.

В следующем разделе мы покажем, что современная математика может предложить методы, позволяющие даже при наличии необъективности получать результирующее отношение, весьма близкое к объективному.

4.5. Многотуровые экспертизы и их моделирование

Здесь мы расскажем о двух способах «борьбы» с необъективностью экспертов. Один из них состоит в организации многотуровой экспертизы: экспертам предлагается несколько раз высказать свое мнение по одному и тому же вопросу. При этом каждому эксперту может быть сообщена (или не сообщена) некоторая информация о предыдущих турах; например, мнения других экспертов или общая усредненная оценка. Естественно, что получение дополнительной информации позволяет экспертам в ходе повторных туров корректировать свои заключения.

Другой способ состоит в моделировании (а не фактической реализации) многотуровой экспертизы. При этом используются только одноразовые высказывания экспертов, а целью является корректировка их среднего мнения [15, 16].

Остановимся более подробно на этом методе. Обозначим, как и раньше, буквой R множество возможных отношений с определенной на нем метрикой $d(r_i, r_j)$ (см. с. 49). Допустим, что экспертная комиссия состоит из n экспертов. Обозначим через r_i^0 «объективное» отношение i -го эксперта, а через r_i^* — его «субъективное» (конъюнктурное) отношение. Реальное существование двух таких различных мнений почти бесспорно. В самом деле, например, всякий спортивный судья, с одной стороны, создает для себя «объективную» оценку выступления спортсмена, а с другой, как представитель своей страны или группы стран, являясь приверженцем некоторой школы (направления), представителем некоторого спор-

тивного общества, он не может отвлечься от своей «субъективной» (несколько пристрастной) точки зрения.

Естественно предположить, что i -й эксперт всегда высказывает отношение, заключенное между r_i^0 и r_i^* .

Рассмотрим следующий интересный и важный пример. Судья выставляет фигуристу две оценки: одну за техническое мастерство, а другую — за художественное впечатление. Место, присужденное спортсмену данным судьей, определяется суммой этих двух оценок. Допустим, что отношение $r^0 = (5,7; 5,8)$ выражает «объективное», а отношение $r^* = (5,4; 5,3)$ — «субъективное» мнение судьи. Множеством отношений, лежащих между r^0 и r^* , будут такие пары оценок, сумма элементов которых будет больше 10,7, но меньше 11,5. Это множество точек изображено на рис. 10 и определяется следующими ограничениями-неравенствами:

$$x + y \leq 11,5,$$

$$x + y \geq 10,7,$$

$$0 \leq x \leq 6,$$

$$0 \leq y \leq 6,$$

где x — оценка за техническое мастерство, а y — за художественное впечатление.

Геометрия множества отношений, лежащего между двумя заданными отношениями, может быть весьма разнообразной. В частности, если каждым судьей выставляется лишь одна

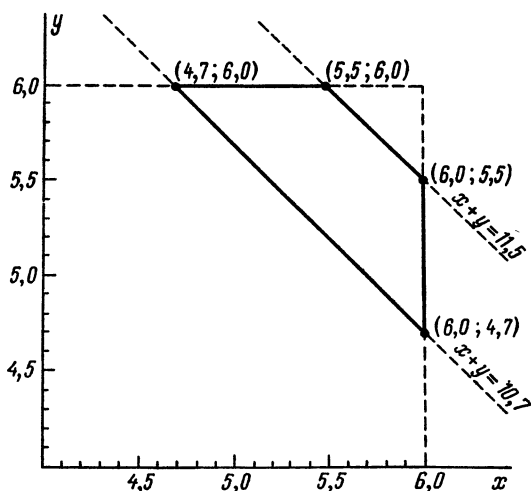


Рис. 10

оценка, как например в спортивной гимнастике, то мы можем иметь дело с обычным отрезком числовой оси.

Предположим, что эксперты выдали n отношений r_1, r_2, \dots, r_n . Решив задачу отыскания медианы Кемени (см. с. 50), мы находим среднее отношение \tilde{r}_1 выданных экспертами отношений. После этого найдем расстояния $d(r_i, \tilde{r}_1)$ от этого среднего до отношения r_i для всех $i = 1, \dots, n$. Наконец, введем условные коэффициенты объективности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ судей по формулам

$$\alpha_i = 1 - \frac{d(r_i, \tilde{r}_1)}{\sum_{i=1}^n d(r_i, \tilde{r}_1)}.$$

Таким образом, чем ближе r_i к среднему отношению \tilde{r}_1 , тем больше коэффициент объективности. Учитывая коэффициенты объективности, найдем новое среднее отношение \tilde{r}_2 , которое минимизирует сумму расстояний до отношений $\alpha_1 r_1, \alpha_2 r_2, \dots, \alpha_n r_n$, вновь повторяем эту операцию и т. д. В пределе получим отношение r , которое и следует выбрать в качестве среднего.

На практике часто оказывается достаточным найти отношение \tilde{r}_2 , так как даже оно уже оказывается близким к истинной медиане Кемени «объективных» мнений r_1^0, \dots, r_n^0 .

В свете изложенных выше соображений становится интересным обсудить судейство в гимнастике и в соревнованиях по прыжкам в воду. В этих видах спорта при выведении балла отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, что, естественно, положительно отражается на объективности судейства. Кроме того, в гимнастике главный судья или жюри могут изменить оценку выступления спортсмена на каком-либо снаряде в случае, когда мнения судей резко расходятся. Рассмотрим теперь математические модели судейства в спортивной гимнастике более подробно.



4.6. Иерархическая экспертиза (судейство в спортивной гимнастике)

Соревнования по спортивной гимнастике для мужчин включают выполнение упражнений шести видов: упражнения на перекладине, брусьях, коне, кольцах, вольные упражнения и опорные прыжки (через коня в длину). Женщины соревнуются в упражнениях четырех видов: на бревне, брусьях разной высоты, в вольных упражнениях и опорных прыжках (через коня поперек).

На Олимпийских играх и чемпионатах мира проводится три типа соревнований:

а) командное первенство (КП) с обязательной и произвольной программами по каждому из шести видов — перекладина, брус, кольца, конь, опорный прыжок, вольные упражнения. Это соревнование считается одновременно предварительным этапом для финалов в личном многоборье и на отдельных снарядах. Из шести гимнастов каждой команды результаты пятерых лучших гимнастов на отдельных снарядах идут в зачет;

б) финал личного многоборья (ФМ) с произвольной программой на шести снарядах. К этому соревнованию допускаются 36 лучших гимнастов КП. К оценке, полученной спортсменом в этом соревновании, прибавляется 50% суммы баллов, полученной им в соревновании КП;

в) финалы на отдельных снарядах (ФС), на которые допускаются шестеро гимнастов, показавшие лучший результат на каждом снаряде в обязательной и произвольной программах в соревновании КП. К оценке в этих соревнованиях добавляется 50% суммы баллов, полученных гимнастом в соревновании КП.

Исходная оценка выступления гимнаста на каждом снаряде составляет 9,4 балла. К ним прибавляются поощрительные десятые балла в согласии с правилом РОВ (риск, оригинальность, виртуозность).

На Олимпийских играх и чемпионатах мира на соревнования ФМ допускается не более трех гимнастов от каждой страны, а на соревнования ФС — не более двух.

Каждое из упражнений оценивается по десятибалльной шкале с учетом десятых и сотых долей балла. Так, например, к исходной оценке выступления, равной 9,4 балла, могут быть добавлены поощрительные баллы за риск и трудность (не более 0,2 балла), за оригинальность (не более 0,2 балла), за виртуозность исполнения (в тех же пределах).

Судьи руководствуются Правилами судейства, возникшими на основе анализа и обобщения опыта, накопленного на различных соревнованиях, в сочетании со специальными исследованиями. Правила судейства для мужчин и женщин принимаются Техническими комитетами Международной федерации гимнастики (ФИЖ). ФИЖ была основана в 1881 г. Под ее эгидой каждые два года проводятся чемпионаты мира и чемпионаты Европы, а также соревнования в рамках Олимпийских игр.

В соревнованиях по спортивной гимнастике выигрывает спортсмен, набравший наибольшую сумму баллов, будь то

многоборье или финал на отдельном снаряде. Таким образом, основой набранной суммы являются оценки, получаемые на отдельных снарядах. На соревнованиях ФИЖ, Олимпийских играх, международных и континентальных соревнованиях судейская коллегия на каждом снаряде состоит из пяти человек: одного старшего судьи и четырех судей международной категории от национальных федераций, участвующих в соревновании. Судейская коллегия для финала на снарядах состоит из двух старших судей и четырех судей. Старший судья должен располагать достаточными специальными знаниями, а также отличными способностями и несомненной объективностью в судействе. Он полностью несет ответственность за организацию и работу судейской коллегии на своем снаряде. Старший судья обязан объективно, в соответствии с регламентом, оценивать каждое упражнение, следить за работой находящейся в его подчинении судейской коллегии, контролировать выставленные оценки и в случае необъективной оценки вмешиваться в работу судьи. Его оценка, прибавленная к среднему показателю из двух средних оценок четырех судей и затем разделенная на два, является базисной оценкой, которая служит мерилom в случае протеста с его стороны или при консультации судей по вопросу исправления оценки.

Вполне очевидно, что старший судья назначается из числа наиболее проверенных и объективных судей, в частности тех, в которых федерация гимнастики не сомневается.

Оценка за упражнение на снаряде выставляется в рамках десятибалльной шкалы с точностью до десятых долей балла. Зачетная оценка складывается из среднего арифметического двух средних оценок четырех судей. Например, при оценках 9,5 — 9,6 — 9,7 — 9,8 оценки 9,5 и 9,8 отбрасываются как самая низшая и самая высшая, а средний балл оказывается равным $(9,6 + 9,7)/2 = 9,65$. При этом разница между обеими средними оценками не должна превышать 0,1 балла при средней оценке от 9,6 до 10; 0,2 балла при средней оценке от 9,0 до 9,55; 0,3 при средней оценке от 8,0 до 8,95; 0,5 балла при средней от 6,5 до 7,95; 0,8 при средней от 4,0 до 6,45 и одного балла в остальных случаях. Например, ситуация 9,5 — 9,6 — 9,8 — 9,8 недопустима, ибо среднее равно 9,7, а разница $9,8 - 9,6 = 0,2 > 0,1$. В подобных случаях старший судья собирает всех судей и в соответствии с правилами судейства предлагает судьям пересмотреть оценки и изменить их. Публично объявляется только окончательная оценка.

Итак, судейство в спортивной гимнастике имеет два уровня. Сначала выставляется оценка на низшем уровне (четверо

судей). В случае значительного расхождения во мнениях судей низшего уровня старший судья собирает всех судей с тем, чтобы, просмотрев видеозапись выступления спортсмена, судьи скорректировали свои оценки и объяснили к тому же, по каким причинам ими были сняты баллы или не учтены ошибки.

Естественно, что такая иерархическая организация судейства с отбрасыванием двух крайних оценок позволяет более объективно оценивать выступления в таком качественно сложном виде спорта, как гимнастика. Заметим, что влияние одного необъективного судьи в гимнастике существенно меньше, чем в фигурном катании, несмотря на то, что оценивание в последнем виде спорта проводит большее число судей. Два же необъективных судьи могут существенно повлиять и на оценку в гимнастике. Однако, как правило, в этом случае разница между средними оценками становится больше допустимой и тогда для выставления более объективной оценки подключается старший судья. В фигурном катании оценка любого судьи окончательна и обжалованию не подлежит. Именно поэтому преобладание в судейской бригаде судей одного из направлений может отрицательно сказаться на объективном судействе выступлений спортсменов, представляющих иное направление в фигурном катании.

4.7. Об экспертизе вообще (с позиций методологии наук точных и гуманитарных)

Среди особенностей современного этапа развития науки и техники в первую очередь отмечают процесс математизации (включая развитие ЭВМ). Математика наступает повсюду, вторгается во все области человеческих знаний и практики. Перечень традиционных областей применения математики (физика, химия, механика, техника) дополнен ныне экономикой, социологией, биологией, медицинской, криминалистикой, психологией, лингвистикой и т. д. Надо полагать, что рано или поздно в этот перечень попадут и другие области знаний, где пока не пользуются математикой.

Как уже убедился читатель, спорт тоже не миновала математическая экспансия.

Чем же характерны математические методы, проникающие и в гуманитарные науки, и в спорт? В первую очередь четкой постановкой задачи, стремлением к точному определению используемых понятий, формализованным (логически

верным) характером рассуждений, использованием математического аппарата, количественными оценками исследуемых явлений. В отличие от этого в гуманитарных науках широко практикуется описательный способ рассуждений, использование терминологии, не всегда точно определенной, полемика, апелляция к здравому смыслу, к чувству, к аналогиям.

Проникновение математики в новые сферы сопровождается процессом противоположного направления. Занимаясь изучением социологических проблем, конкретными жизненными ситуациями, обработкой информации, экономическими решениями, выбором разумных решений в условиях неопределенности и прочими проблемами, математика впитывает в себя методы наук гуманитарных. Некогда четкие разделительные линии между этими науками расплываются все больше.

«В самом деле, спросим себя: откуда взялась и чем обусловлена разница между методологиями точных и гуманитарных наук? Почему формальный математический аппарат очень рано стал применяться в сфере точных наук и только совсем недавно (и то на правах подсобного) в гуманитарных? Уж не потому ли, что люди, занимавшиеся гуманитарными науками, были, что ли, «глупее» занимавшихся точными? Отнюдь нет! Просто явления, составляющие предмет гуманитарных наук, неизмеримо сложнее тех, которыми занимаются точные. Они гораздо труднее (если вообще) поддаются формализации. Для каждого из такого рода явлений гораздо шире спектр причин, от которых оно зависит. Вербальный (описательный) способ построения исследования, как это ни парадоксально, здесь оказывается точнее формально логического. И все же в ряде случаев мы иной раз просто вынуждены строить и здесь математические модели. Если не точные, то приближенные. Если не для однозначного ответа на поставленный вопрос, то для ориентировки в явлении» *).

В практических задачах то и дело возникает необходимость согласования различных точек зрения, получения решения, удовлетворяющего различным, подчас противоречивым требованиям — критериям. Так, например, при организации работы производственного объединения руководство стремится максимизировать объем продукции, прибыль по возможности увеличить, общие расходы сделать возможно мень-

*) И. Грекова. Методологические особенности прикладной математики на современном этапе ее развития. — Вопросы философии, 1976, № 6, с. 107.

шими. При проектировании системы противовоздушной обороны естественными являются требования наибольшей ее эффективности при наименьших затратах.

При исследовании подобного рода так называемых многокритериальных задач приходится согласовывать различные требования, искать разумный компромисс. Естественно, что математика располагает некоторыми методами, приспособленными для поиска компромиссных решений в многокритериальных задачах. Однако эти методы далеки от совершенства.

«Пока что практически единственной инстанцией, способной быстро и успешно вырабатывать компромиссное решение, является человеческий разум, так называемый «здоровый смысл». Человек до сей поры — непревзойденный мастер компромисса, и без его участия решение в многокритериальной задаче (не оптимальное, может быть, ни по одному критерию, но приемлемое по их совокупности) пока что выбрано быть не может. Математика в ее современном виде может оперировать только понятиями «больше», «меньше», «равно», но не понятиями «приемлемо», «практически равноценно» и т. п., характерными для человеческого мышления. По-видимому, не всякое «лучше — хуже» может быть сведено к «больше — меньше» (или, если может, то мы не знаем, как это делается). Принимая решение, человек, не вдаваясь в излишние подробности, окидывает общим взглядом ситуацию в целом и выбирает приемлемый вариант. Что касается математики, то ее дело в подобных случаях — не выдать окончательное решение, а помочь человеку его выбрать. Дать человеку, принимающему решение, максимум нужной ему информации в выразительной, удобовоспринимаемой форме, показать, к каким последствиям приведет (по ряду критериев) каждый из возможных вариантов решения, предварительно отбросив все неконкурентоспособные» *).

Деятельность тренеров в условиях противоборства их команд дает нам яркие примеры поиска компромиссных решений, с учетом опыта, интуиции и т. д.

По всей видимости и дальнейшее совершенствование научных методов в гуманитарных науках пойдет по пути использования математики, органически переплетенной с неформальными процедурами: непревзойденными особенностями человеческого разума, интуиции, опыта, подкрепленными все расширяющимися возможностями ЭВМ.

*) См. сноску на с. 68.

Математика является основой формальных методов исследования ситуации. Здравый смысл, накопленный опыт — основа формальных методов, оперирующих не с формальными, скажем, с числовыми данными, а с качественными характеристиками типа «красивее», «сложнее», «проще», «комфортнее» и т. п. Именно с подобными характеристиками приходится зачастую иметь дело при судействе в различного вида спортивных соревнованиях.

Человечеству издавна известен веками проверенный способ объединения формальных и неформальных начал в единой процедуре. Способ этот — экспертиза. Экспертные оценки дают естественную возможность использовать накопленный общечеловеческий опыт, социальную память человечества в больших (управление социальными, экономическими процессами) и малых (судейство в спорте) задачах.

Мы уже познакомились с некоторыми конкретными процедурами в организации экспертиз. Практикуются и другие процедуры — более простые и более сложные. В одних случаях основой экспертизы является дискуссия, в других она полностью исключается. Хорошо известны врачебные консилиумы, в процессе которых врачи-эксперты обсуждают все доводы за и против постановки определенного диагноза. Решение (как правило, согласованное) возникает в итоге дискуссии. В иной манере проходил «консилиум» под руководством фельдмаршала Кутузова в Филях, описанный Л. Н. Толстым в романе «Война и мир». Каждый из участвующих в совете генералов высказал свою оценку ситуации и свои предложения. Выслушав мнение всех генералов, Кутузов сам принял решение: «Быть по сему».

Во многих случаях организация экспертных процедур определяется традицией, самим объектом экспертизы, возможностями обработки полученной информации, используемыми математическими методами. По-видимому, древнейшим органом по созданию коллективного решения являлся совет старейшин племени; он принимал решения по всем важным для племени вопросам.

В очень далекие времена возникла и ныне широко функционирует процедура дегустации. Оценке подвергается качество различных сортов вин, сыров, джемов и других продуктов; устанавливается степень соответствия их свойств определенным нормам. Подобно процессу судейства, процесс дегустации должен завершаться выдачей некоторого заключения. А заключение — результат согласованного решения.

При многократном повторении экспертиз возникает побочная (по отношению к выработке согласованного решения)

возможность оценки достоинств самих экспертов. Эксперту оказывается возможным приписать определенный «вес», подобно тому, как это сделано (см. п. 4.5) при выработке объективной оценки выступления фигуриста. Эксперту можно, например, приписать вес тем больший, чем меньше (в среднем) его заключение отклоняется от коллективного среднего. Тем самым в процесс экспертизы удастся внести элемент «обратной связи», способствующий самообучению экспертов, своеобразной «настройке» всей экспертной комиссии на заключения по определенному кругу вопросов.

Меру согласованности мнений экспертов можно оценивать, исходя из различных принципов. Кроме уже известного нам принципа большинства и его модификаций, можно использовать и другие. В ряде случаев за меру согласованности принимают величину среднеквадратического отклонения (дисперсию) числовых оценок экспертов от средней оценки (определение дисперсии см. п. 5.1). Чем дисперсия меньше, тем более согласованы мнения экспертов; чем она больше, тем больший разброс во мнениях и экспертиза менее качественная.

Для решения политических, экономических, социальных, военных и прочих проблем разработаны новые методы. Среди них широко известным в США стал метод «Дельфы». (По преданию в древней Греции в городе Дельфы обитал знаменитый оракул, вещавший будущее, отвечавший на сложные, запутанные вопросы.)

Следуя Н. Н. Моисееву [4], остановимся на особенностях метода «Дельфы». Метод разработан сотрудниками «Рендкорпорейшен» — одного из так называемых «мозговых центров» США — в середине 50-х годов. Метод ориентирован на составление различного рода прогнозов, на оценку вероятности осуществления того или иного события. Используемые при этом способы обработки получаемой информации не новы.

Однако процедура работы с экспертами хорошо отработана и регламентируется рядом положений, простейшие из которых следующие:

1. Экспертами могут быть только признанные специалисты в соответствующей области.
2. Так как каждый эксперт может ошибаться, то только мнения достаточно большого числа экспертов могут удовлетворительно охарактеризовать исследуемый вопрос.
3. Вопросы, которые ставятся экспертам, должны быть относительно просты и поставлены настолько четко, чтобы исключить возможность неоднозначного толкования.

4. Для руководства экспертизами должны быть созданы постоянно действующие группы организаторов, ибо только хорошо продуманная система вопросов (для разработки которой необходимы квалифицированные специалисты) может оказаться успешной в относительно сложной экспертизе.

Метод «Дельфы» полностью запрещает открытую дискуссию экспертов, чем практически исключает влияние психологических и эмоциональных факторов, неизбежно возникающих в процессе дискуссии. Метод предусматривает определенную процедуру запросов, получения и анализа экспертами всякого рода дополнительной информации, в том числе мнений других экспертов. Предусмотрена организация повторных экспертиз, постановка дополнительных вопросов; регламентировано поведение лиц, организующих экспертизу, с тем, чтобы исключить даже косвенное влияние их на мнения экспертов.

Все эти мероприятия имеют цель в конечном счете сближить мнения экспертов. Если же в результате серии повторных опросов в отношении проблемы (содержащей в своей постановке неопределенность или не имевшей прецедентов) мнения экспертов в должной мере не сближаются, то проблема считается неразрешимой при современном уровне знаний.

В качестве меры согласованности мнений экспертов принимается величина среднеквадратического отклонения, называемого также «квартилем». Величина квартиля задается заранее — до проведения экспертизы. Если в результате экспертизы найденная величина квартиля оказывается больше заданной априорно, то организуется повторный тур экспертизы, которому предшествует работа экспертов с дополнительной информацией.

Методом «Дельфы» решались многочисленные военные проблемы, а также составлялись прогнозы вероятного состояния мира на 1984, 2000 и 2100 гг. Так, например, в отношении 1984 г. эксперты предсказали, что население Земли составит 3,4 млрд. человек*); опреснение воды войдет в обиход сельского хозяйства; на Луне будет создана стационарная база; в результате эффективного контроля произойдет дальнейшее снижение темпов рождаемости и т. п.

*) По данным комиссии по народонаселению ООН в 1984 г. население Земли составило 4,8 млрд., а к началу следующего века на Земле будет жить, согласно прогнозу комиссии, 6,1 млрд. человек.

Идейной основой метода экспертных оценок служит гипотеза: коллективное мнение предпочтительнее индивидуального. И хотя в большинстве случаев это так, истории известны ситуации, в которых эта гипотеза оказывалась ошибочной. Достаточно вспомнить о судьбах многих величайших открытий (система Коперника), об участии людей, защищавших нетрадиционную точку зрения (Джордано Бруно, Галилео Галилей).

В области совершенствования методологии и организации экспертиз ведется работа за рубежом и в нашей стране. Один из новых подходов к организации экспертиз предложен в 1960 г. Г. С. Поспеловым. Метод был использован в решении проблемы планирования средств на фундаментальные исследования в области естественных наук. Идея метода состоит в последовательном разбиении проблем на более простые, в проведении экспертиз по каждой частной проблеме, обработке полученной информации, разбиении уже проанализированных проблем на более частные и т. д.

Описание этой системы комбинированных экспертиз, а также методов, предложенных В. М. Глушковым и Ю. И. Журавлевым, лежит за рамками этого издания, и мы отсылаем читателя, например, к [4; 29].

5. ПОГОВОРИМ О РЕКОРДАХ

Математические методы отбора, описания и анализа экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдения массовых случайных явлений, составляют предмет *математической статистики*. В зависимости от характера решаемого вопроса и от объема экспериментального материала, задачи, решаемые математической статистикой, принимают тот или иной вид. Описание некоторых типичных задач можно найти, например, в [3; 26].

В последние десятилетия математическая статистика научилась обрабатывать наблюдения, содержащие не только количественную, но и качественную информацию. Появился новый раздел статистики, которую называют нечисловой, или *статистикой объектов нечисловой природы*.

Более того, в процессе решения разнообразных задач по статистической обработке исходной информации сложилась новая дисциплина, именуемая ныне прикладной математической статистикой (сравните с прикладной математикой!). *Прикладная математическая статистика* разрабатывает и систематизирует понятия, приемы, математические методы и модели, предназначенные для организации сбора, стандартной

записи, систематизации и обработки (в том числе — с помощью вычислительной техники) статистических данных в целях их удобного представления, интерпретации и получения научных и практических выводов [26].

Обсудим теперь некоторые вопросы, связанные с применением методов математической статистики для прогнозирования спортивных результатов отдельных спортсменов и рекордных достижений.

5.1. Случайные величины и их характеристики

Напомним необходимые для дальнейшего изложения понятия случайной величины и ее характеристик.

Будем называть *случайной величиной* такую величину, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее — какое именно.

Примером случайной величины может служить количество очков, выбитое на соревнованиях стрелком за 60 выстрелов. Заранее мы только знаем, какие значения может принимать эта величина, однако никак не можем знать, какое число очков будет выбито стрелком фактически. Другим примером может служить число, выпадающее при бросании игральной кости (кубика). Отметим, что случайные величины, принимающие только изолированные друг от друга значения из некоторого конечного или счетного множества, называют *дискретными случайными величинами*.

Понятие случайной величины играет важную роль в современной теории вероятностей. В дальнейшем случайные величины будем обозначать большими латинскими буквами, а ее возможные значения — малыми. Пусть случайная величина X может принимать значения x_1, x_2, \dots, x_n соответственно с вероятностями p_1, p_2, \dots, p_n . Ясно, что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, так как в результате опыта величина X обязательно примет одно из возможных значений. Например, если X — число очков, выпавших при бросании игральной кости, то возможными значениями X будут $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_6 = 6$, а все вероятности p_i ($i = 1, \dots, 6$) равны $1/6$. Составим следующую таблицу:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Такую таблицу, устанавливающую зависимость между возможными значениями случайной величины и соответствующими вероятностями, называют *законом распределения случайной величины* X ; законом распределения случайной величины называют всякую функциональную зависимость между возможными значениями *случайной величины* и соответствующими им вероятностями. Указание этой функции полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако весьма часто оказывается достаточным указать отдельные числовые параметры, характеризующие существенные черты распределения случайной величины. Такие числовые параметры называют ее *числовыми характеристиками*.

Введем некоторые, необходимые для дальнейшего обсуждения спортивных проблем числовые характеристики случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных ее значений x_1, \dots, x_n на соответствующие вероятности этих значений p_1, \dots, p_n , т. е.

$$M[X] = m_x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n,$$

где $M[X]$ и m_x — обозначения математического ожидания случайной величины X .

Можно подсчитать, что в примере с кубиком $M[X] = 3,5$. Очевидно, что реально никогда не может выпасть такое количество очков, однако это среднее возможное число выпавших очков.

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания. Дисперсия определяет степень разброса (отклонения) возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Дисперсия обозначается символами $D[X]$ или D_x и вычисляется согласно определению по формуле

$$D[X] = D_x = M[(m_x - X)^2] = \\ = (m_x - x_1)^2 p_1 + (m_x - x_2)^2 p_2 + \dots + (m_x - x_n)^2 p_n.$$

В рассмотренном примере с кубиком $D_x = 8,75/3 \approx 2,92$.

Очень часто используют другую числовую характеристику: *среднее квадратическое отклонение* $\sigma_x = \sqrt{D_x}$. В примере с кубиком $\sigma_x = 1,71$.

К сожалению, вероятности возможных значений случайной величины, как правило, до проведения опытов неизвестны. Пример с игральным кубиком — приятное исключение. В то

же время для обработки статистических данных необходимо знать числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию и некоторые другие) случайной величины. Как же поступить в тех случаях, когда нет никаких дополнительных соображений (например, из условий симметрии), позволяющих заранее заключить, чему равны вероятности p_i ? В этих случаях ответ может дать только серия опытов. Разъясним существо дела.

Предположим, что проведена серия из N независимых испытаний (опытов), в которых каждое из возможных значений x_i случайной величины X появилось m_i раз ($i = 1, \dots, n$). Составим среднее арифметическое m_x^* наблюдавшихся в опытах значений X :

$$m_x^* = \frac{x_1 m_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^n x_i p_i^*.$$

Величины $p_i^* = m_i/N$ ($i = 1, \dots, n$) называют частотой (*статистической вероятностью*) появления значения x_i величины X в серии из N испытаний. Мы уже отмечали (см. с. 29), что при увеличении числа N испытаний частота p_i^* все меньше отличается от вероятности p_i . Поэтому и среднее арифметическое m_x^* наблюдавшихся значений случайной величины X все меньше будет отличаться от математического ожидания m_x , или, как говорят, m_x^* сходится по вероятности к m_x . Величину m_x^* называют *статистическим математическим ожиданием*.

Установленная связь между средним арифметическим и математическим ожиданием является также одним из проявлений уже упоминавшегося закона больших чисел Бернулли.

Во многих вопросах важную роль играет так называемая *центрированная случайная величина* $\hat{X} = X - m_x$, задающая отклонение X от своего математического ожидания m_x .

Если значения x_1, \dots, x_n случайной величины X изобразить соответствующими точками числовой оси, то центрирование величины X (т. е. переход от X к \hat{X}) означает перенос начала ординат в точку с абсциссой m_x .

Очевидно, что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю:

$$\begin{aligned} M[\hat{X}] &= M[X - m_x] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^n p_i = m_x - m_x \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Вспомнив определение, отметим, что дисперсией D_x случайной величины X служит математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины \hat{X} :

$$D_x = M[(X - m_x)^2] = M[\hat{X}^2].$$

Если в этом выражении математическое ожидание m_x заменить средним статистическим m_x^* , то придем к величине

$$D_x^* = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 p_i^*,$$

называемой *статистической дисперсией случайной величины X* .

Путем обработки результатов эксперимента удастся получить статистические значения m_x^* и D_x^* математического ожидания и дисперсии.



5.2. Быстрее!

Обсудим задачу прогнозирования результата спортсмена на соревнованиях при помощи результатов, показанных им в процессе подготовки. Заметим, что любое предсказанное значение какого-либо параметра, вычисленное на основе ограниченного числа опытов, всегда, конечно, будет содержать элемент случайности, поэтому это значение называют *оценкой соответствующего параметра*.

Так, оценку времени t , которое показывает спринтер на стометровке, будем обозначать \tilde{t} .

Рассмотрим сначала более общую задачу. Пусть имеется случайная величина X , закон распределения которой содержит неизвестный параметр t (обычно речь идет о математическом ожидании и дисперсии). Требуется найти подходящую оценку \tilde{t} значения этого параметра по результатам n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X принимает соответственно значения x_1, \dots, x_n . Эти значения можно рассматривать как n «экземпляров» случайной величины X . Каждая из случайных величин X_i распределена по тому же закону, что и величина X . Вполне очевидно, что оценка \tilde{t} является некоторой функцией величин x_1, \dots, x_n и, следовательно, сама является случайной величиной.

Предъявим к оценке \tilde{t} параметра t ряд требований, которым она должна удовлетворять, чтобы быть, в определенном смысле, «хорошей» оценкой. Во-первых, естественно потребовать, чтобы оценка \tilde{t} при увеличении числа опытов приближалась (сходилась по вероятности) к значению параметра t .

Оценка, обладающая таким свойством, называется *состоятельной*. Во-вторых, желательно, чтобы, пользуясь оценкой \tilde{t} вместо t , мы не совершали систематической ошибки, т. е. чтобы для математического ожидания оценки \tilde{t} выполнялось равенство $M[\tilde{t}] = t$. Оценка, удовлетворяющая этому условию, называется *несмещенной*. Наконец, потребуем, чтобы выбранная оценка \tilde{t} обладала по сравнению с другими наименьшей дисперсией; такая оценка называется *эффективной*. На практике не всегда удается удовлетворить всем этим требованиям одновременно. Например, может оказаться, что, хотя эффективная оценка и существует, формулы для ее вычисления оказываются слишком сложными, и приходится пользоваться другой оценкой, с несколько большей дисперсией.

В качестве оценки \tilde{m}_x математического ожидания m_x естественно выбрать среднее арифметическое полученных в опыте значений случайной величины X , т. е. $\tilde{m}_x = m_x^* = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

В курсе теории вероятностей показывают, что эта оценка состоятельная и несмещенная, а при некоторых предположениях о виде закона распределения случайной величины X эта оценка оказывается также и эффективной. В качестве оценки \tilde{D}_x дисперсии D_x выбирается величина

$$\begin{aligned}\tilde{D}_x &= \frac{n}{n-1} D_x^* = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2}{n-1} = \\ &= \frac{n}{n-1} \left[\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \tilde{m}^2 \right],\end{aligned}$$

являющаяся ее состоятельной и несмещенной оценкой. Рассмотренная выше оценка \tilde{t} параметра t (в частности, оценки \tilde{m} и \tilde{D} математического ожидания и дисперсии) выражается одним числом и потому называется *точечной*. При незначительном объеме статистических данных, т. е. при малом числе n результатов независимых опытов, точечная оценка может существенно отличаться от оцениваемого параметра и приводить зачастую к значительным ошибкам. Поэтому при малых n пользуются так называемой *интервальной оценкой*. Интервальная оценка определяется двумя числами — концами оцениваемого интервала.

Отсылая читателя за подробностями к руководствам по теории вероятностей, изложим лишь общие соображения, при-

водящие к понятию интервальной оценки. Допустим, что для параметра t уже получена несмещенная оценка \tilde{t} . Ясно, что оценка тем точнее приближает параметр, чем меньше абсолютная величина разности $|t - \tilde{t}|$. Коль скоро при некотором положительном числе ε выполняется неравенство $|t - \tilde{t}| < \varepsilon$, то ε естественно принять за меру точности оценки. Следует иметь в виду, однако, что методы математической статистики не позволяют утверждать, что для оценки ε неравенство $|t - \tilde{t}| < \varepsilon$ выполняется наверняка. Имеет смысл говорить лишь о вероятности $P(|t - \tilde{t}| < \varepsilon)$, с которой это неравенство выполняется.

Вероятность $\alpha = P(|t - \tilde{t}| < \varepsilon)$, с которой осуществляется неравенство $|t - \tilde{t}| < \varepsilon$, называется *доверительной вероятностью* (надежностью) оценки t с помощью числа \tilde{t} .

Как правило, доверительную вероятность задают (назначают) заранее. Полагают, например, α равной 0,85, 0,90, 0,999 или иному числу, близкому к единице.

Итак, потребуем, чтобы при некотором неизвестном пока значении ε_α выполнялось требование $P(|t - \tilde{t}| < \varepsilon_\alpha) = \alpha$. Это требование равносильно тому, что $P(t - \varepsilon_\alpha < t < t + \varepsilon_\alpha) = \alpha$. Последнее следует понимать в том смысле, что вероятность попадания точки t в интервал $I_\alpha = (\tilde{t} - \varepsilon_\alpha; \tilde{t} + \varepsilon_\alpha)$ равна α . Заметим, что сам интервал I_α также случаен, так как случайно положение на числовой оси его середины \tilde{t} и случайна его длина $2\varepsilon_\alpha$, вычисляемая по опытным данным.

Интервал I_α называют *доверительным интервалом*, а его концы — *доверительными границами*. Доверительный интервал естественно рассматривать как диапазон возможных значений параметра t , совместимых с данными опыта (не противоречащих этим данным). В то же время вероятность выполнения неравенства $|t - \tilde{t}| > \varepsilon_\alpha$ т. е. вероятность того, что точка t не попадает в интервал I_α , составляет $1 - \alpha$, и чем ближе α к единице, тем эта вероятность ближе к нулю. Рамки настоящей книги не позволяют обосновать метод определения ε_α по назначенному α . Поэтому мы ограничимся «рецептурным» изложением.

Допустим, по-прежнему, что проведено n независимых опытов над случайной величиной X и зафиксированы ее значения x_1, \dots, x_n . Для неизвестных числовых характеристик величины X — математического ожидания и дисперсии — находим соответствующие оценки

$$\tilde{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \tilde{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2.$$

Можно доказать, что для назначенной вероятности α величина ε_α находится по формуле

$$\varepsilon_\alpha = \sqrt{\frac{\tilde{D}_x}{n}} \arg \Phi^* \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right),$$

в которой $\arg \Phi^* \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)$ является функцией, обратной функции Лапласа. Иными словами, $\arg \Phi^* \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)$ является таким значением аргумента, при котором значение функции Лапласа равно $\frac{1 + \alpha}{2}$.

Для удобства дальнейших вычислений (в том числе и тех, на которые, быть может, решится читатель) приведем здесь небольшого объема табл. 1 значений функции $\arg \Phi^* \left(\frac{1 + \alpha}{2} \right)$.

Пусть наш спринтер в течение последнего месяца подготовки к соревнованиям 20 раз пробежал стометровку

Таблица 1

α	ε_α	α	ε_α	α	ε_α	α	ε_α
0,80	1,282	0,86	1,475	0,92	1,750	0,97	2,169
0,81	1,310	0,87	1,513	0,93	1,810	0,98	2,325
0,82	1,340	0,88	1,554	0,94	1,880	0,99	2,576
0,83	1,371	0,89	1,597	0,95	1,960	0,9973	3,000
0,84	1,404	0,90	1,643	0,96	2,053	0,999	3,290
0,85	1,439	0,91	1,694				

и показал следующие результаты: 10,5; 10,8; 11,2; 10,9; 10,4; 10,6; 10,9; 11,0; 10,3; 10,8; 10,6; 11,3; 10,5; 10,7; 10,8; 10,9; 10,8; 10,7; 10,9; 11,0. Требуется оценить ожидаемый на соревнованиях результат и найти доверительный интервал для доверительной вероятности $\alpha = 0,8$.

Сначала находим статистические значения $\tilde{m} = 10,78$ и $\tilde{D} = 0,064$. Затем по таблице находим $\arg \Phi^* \left(\frac{1 + 0,8}{2} \right) = 1,282$.

Таким образом, $\varepsilon_\alpha = \sqrt{\frac{0,064}{20}} \cdot 1,282 = 0,072$.

Границы доверительного интервала при этом оказываются равными $\bar{m} - 0,072 = 10,71$ и $\bar{m} + 0,072 = 10,85$.

Таким образом, с вероятностью 0,8 спортсмен покажет результат между 10,71 и 10,85. Если в качестве доверительной вероятности взять $\alpha = 0,9$, то можно найти, что $\varepsilon_\alpha = 0,93$ и соответственно с этой вероятностью ожидаемый результат спортсмена будет находиться между 10,52 и 11,06.



5.3. Выше!

Интересно представить себе, какой результат покажут прыгуны с шестом в 1990 г.? Математическая статистика может нам помочь ответить (конечно, в первом приближении!) и на этот вопрос. Однако прежде чем дать на него ответ, нам необходимо ввести два понятия: системы случайных величин и корреляционного момента.

В математической статистике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых результат опыта описывается не одной, а несколькими случайными величинами. В таких случаях говорят о *системе случайных величин*. Примером может служить система двух величин H и Q , одна из которых H — рост человека, а другая Q — его вес. Пара (H, Q) является системой случайных величин, ибо заранее (до измерений) ни точный вес, ни точный рост индивида неизвестны.

Рассмотрим теперь пару X, Y случайных величин. Пусть, по-прежнему, X принимает значения x_1, \dots, x_n с вероятностями p_1, \dots, p_n , а случайная величина Y — значения y_1, \dots, y_l с вероятностями q_1, \dots, q_l . Соответствующие централизованные случайные величины обозначим через \hat{X} и \hat{Y} . Введем на плоскости декартову систему координат xOy и рассмотрим точку C_0 с координатами $x_0 = m_x$; $y_0 = m_y$. Значения (x_i, y_j) случайных величин (X, Y) изображаются точками, разбросанными вокруг C_0 .

Важной числовой характеристикой пары случайных величин (как бы характеризующей упомянутый разброс) служит так называемый корреляционный момент K_{xy} величин X, Y . Корреляционным моментом K_{xy} случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения $\hat{X}\hat{Y}$ централизованных случайных величин, соответствующих X и Y :

$$K_{xy} = M[\hat{X}\hat{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)].$$

Корреляционный момент K_{xy} служит характеристикой связи между X и Y . Преобразуем выражение для K_{xy} . С этой целью обозначим через p_{ij} вероятность совместного появ-

ления значений $X = x_i$, $Y = y_j$ случайных величин X и Y . Всевозможными значениями произведения $\dot{X}\dot{Y}$ являются величины $(x_i - m_x)(y_j - m_y)$, а математическим ожиданием, т. е. корреляционным моментом, будет сумма произведений

$$K_{xy} = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}.$$

Допустим, в частности, что величины X и Y независимые (см. с. 31). Тогда вероятность p_{ij} появления пары (x_i, y_j) равна произведению вероятностей $p_i q_j$ независимого друг от друга появления значений $X = x_i$, $Y = y_j$. В этом случае, изменив порядок суммирования, найдем

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_i q_j = \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - m_x) p_i \sum_{j=1}^l (y_j - m_y) q_j = M[\dot{X}] M[\dot{Y}] = 0, \end{aligned}$$

так как математическое ожидание каждой центрированной случайной величины равно нулю. Следовательно, для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю.

Кроме того, из формулы для K_{xy} можно заключить, что коль скоро значения одной из случайных величин, например X , незначительно отклоняются от своего математического ожидания, то и корреляционный момент будет мал, безотносительно к тому, сколь тесной является зависимость между X и Y .

Обычно вместо K_{xy} рассматривают так называемый коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x , σ_y — среднеквадратические отклонения случайных величин X , Y .

Если корреляционный момент K_{xy} (или, что то же самое, коэффициент корреляции r_{xy}) равен нулю, величины X , Y называют *некоррелированными*.

Независимые случайные величины всегда являются некоррелированными. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно: из равенства нулю r_{xy} еще не следует независимость X и Y .

Зависимость между случайными величинами X и Y может быть весьма сложной и в явном виде не прослеживаться.

Мы остановимся на простейшем, но важном случае, когда заранее известно, что X и Y связаны линейной зависимостью (a и b — постоянные) $Y = aX + b$. Подсчитаем для этой зависимости коэффициент корреляции:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M[\dot{X}\dot{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = \\ &= M[(X - m_x)(aX + b - am_x - b)] = M[(X - m_x)^2 a] = \\ &= aM[(X - m_x)^2] = aD[X]. \end{aligned}$$

Найдем далее дисперсию величины Y :

$$D[Y] = D[aX + b] = D[aX] = a^2 D[X].$$

Отсюда получаем для среднеквадратических отклонений

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}, \quad \sigma_y = \sqrt{D_y} \text{ аналогичную зависимость: } \sigma_y = |a| \sigma_x.$$

Следовательно, коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{aD_x}{\sigma_x |a| \sigma_x} = \frac{a\sigma_x^2}{|a| \sigma_x^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0, \\ -1 & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если зависимость между X и Y линейная, то $r_{xy} = \pm 1$, смотря по тому, каков знак коэффициента a .

Можно доказать, что в случае произвольной случайной зависимости между X и Y коэффициент корреляции подчиняется неравенствам $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Действительно, введем в рассмотрение случайную величину $U = \sigma_y X \pm \sigma_x Y$ — линейную комбинацию величин X и Y с коэффициентами σ_y ; $\pm \sigma_x$. Вид случайной зависимости между самими величинами X и Y нам неизвестен. Подсчитаем дисперсию $D[U]$. С этой целью непосредственно убедимся, что дисперсия суммы $X' + Y'$ двух случайных величин равна сумме их дисперсий, сложенных с удвоенным значением корреляционного момента:

$$D[X' + Y'] = D[X'] + D[Y'] + 2K_{xy}.$$

Проверим это. Введем обозначение $Z = X' + Y'$. Так как математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $m_z = m_{x'} + m_{y'}$, то $Z - m_z = X' - m_{x'} + Y' - m_{y'}$, т. е. для центрированных величин возникает та же связь: $\dot{Z} = \dot{X} + \dot{Y}$. Поэтому

$$\begin{aligned} D[X' + Y'] &= M[\dot{Z}^2] = M[\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + 2\dot{X}\dot{Y}] = \\ &= M[\dot{X}^2] + M[\dot{Y}^2] + 2M[\dot{X}\dot{Y}] = D_x + D_y + 2K_{xy}. \end{aligned}$$

Тем самым получен требуемый результат.

Теперь остается положить $X' = \sigma_y X$, $Y' = \sigma_x Y$ и записать, что

$$D[\sigma_y X \pm \sigma_x Y] = D[\sigma_y X] + D[\sigma_x Y] \pm 2M[\sigma_x \sigma_y X Y] = \\ = \sigma_y^2 D_x + \sigma_x^2 D_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy}.$$

Но дисперсия произвольной случайной величины неотрицательна:

$$\sigma_y^2 D_x + \sigma_x^2 D_y \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} \geq 0.$$

Так как $D_x = \sigma_x^2$; $D_y = \sigma_y^2$, то

$$2\sigma_x^2 \sigma_y^2 \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} \geq 0, \\ \sigma_x \sigma_y \pm K_{xy} \geq 0, \text{ или } \pm \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \geq 0,$$

т. е. $|r_{xy}| \leq 1$, или $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Изобразим в системе координат xOy полученные из наблюдений пары значений (x_i, y_i) в виде соответствующих точек. По взаимному расположению этих точек можно судить, в первом приближении, о наличии корреляции (в частности линейной) между величинами X и Y .

В общем случае, как уже доказано, коэффициент корреляции изменяется в границах: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$. Если при этом $r_{xy} > 0$, говорят о положительной корреляции, а если $r_{xy} < 0$ — об отрицательной. Факт положительной корреляции между случайными величинами означает, что при возрастании одной из них другая имеет тенденцию в среднем также возрастать, в случае отрицательной корреляции при возрастании одной величины другая имеет тенденцию в среднем убывать. В примере с ростом и весом человека мы сталкиваемся, естественно, с положительной корреляцией. Естественно также, что чем больше по абсолютной величине коэффициент корреляции, тем существует более тесная связь между соответствующими случайными величинами.

Теперь мы готовы вернуться к вопросу, поставленному в начале этого параграфа. С этой целью попробуем построить линейную зависимость между рекордными результатами и годами, в которые эти результаты были достигнуты, найти коэффициент корреляции и тем самым определить надежность прогноза. Выпишем таблицу мировых рекордов по прыжкам с шестом [12]:

4,78 м	Р. Гутовски (США)	1957
4,80	Д. Брэгг (США)	1960
4,83	Д. Дэвис (США)	1961
4,89	Д. Юлкес (США)	1962

4,93	Д. Торк (США)	1962
4,94	П. Никула (Финляндия)	1962
5,00	Б. Стернберг (США)	1963
5,08	Б. Стернберг	1963
5,13	Д. Пеннел (США)	1963
5,20	Д. Пеннел	1963
5,23	Ф. Ханзен (США)	1964
5,28	Ф. Ханзен	1968
5,32	Р. Сигрен (США)	1966
5,34	Д. Пеннел	1966
5,36	Р. Сигрен	1967
5,38	П. Уилсон (США)	1967
5,41	Р. Сигрен	1968
5,44	Д. Пеннел	1969
5,45	В. Нордвиг (ГДР)	1970
5,46	В. Нордвиг	1970
5,49	Х. Папаниколау (Греция)	1970
5,51	Ч. Исаксон (Швеция)	1972
5,54	Ч. Исаксон	1972
5,63	Р. Сигрен	1972
5,65	Д. Робертс (США)	1975
5,67	Э. Бэлл (США)	1976
5,70	Д. Робертс	1976
5,72	В. Козакевич (Польша)	1980
5,75	Т. Виньерон (Франция)	01.06.1980
5,75	Т. Виньерон	29.06.1980
5,77	Ф. Увийон (Франция)	1980
5,78	В. Козакевич	1980
5,80	Т. Виньерон	1981
5,81	В. Поляков (СССР)	1981

Для наглядности можно данные из приведенной таблицы изобразить графически (см. рис. 11).

Для построения линейной зависимости рекордного результата от соответствующего года — года достижения этого результата — воспользуемся методом наименьших квадратов.

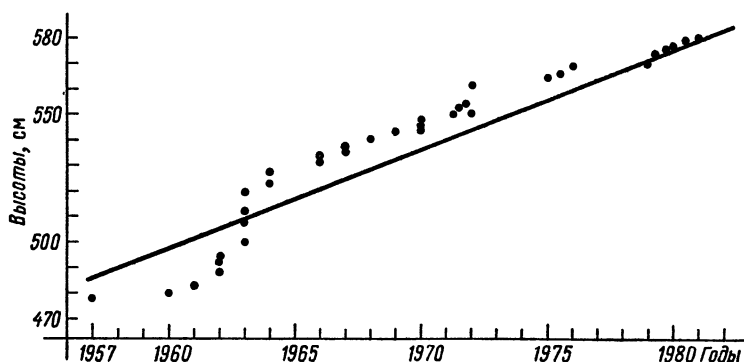


Рис. 11

Идея метода наименьших квадратов, грубо говоря, состоит в выборе такой прямой, сумма квадратов расстояний до которой от экспериментально найденных точек минимальна. Фактически мы хотим построить линейную функцию, которая как бы сглаживает экспериментально установленную (в действительности нелинейную) зависимость между случайными величинами X и Y .

Не вдаваясь в технические подробности вычисления коэффициентов a и b , определяющих такую прямую $Y = aX + b$, сразу скажем, что $a = \tilde{K}_{xy}/\tilde{D}_x$, $b = \tilde{m}_y - a\tilde{m}_x$, где

$\tilde{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$; $\tilde{m}_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$; \tilde{D}_x и \tilde{D}_y — дисперсии величин X и Y .

В нашем примере $m_x \approx (19)70$ (первые две цифры года опускаем), $\tilde{D}_x \approx 54,6$; математическое ожидание взятой высоты $\tilde{m}_y = (5)38$; $\tilde{D}_y = 926,5$, $\tilde{K}_{xy} = 217,4$, $\tilde{r}_{xy} = 0,952$; $\tilde{\sigma}_x = 7,4$; $\tilde{\sigma}_y = 30,8$. Таким образом, $a \approx 3,987$; $b \approx -242$. Следовательно, уравнение прямой имеет вид $y = 3,987x - 242$.

Расчет на 1985 год показывает, что $y = 3,987 \cdot 85 - 242 = 96,9$, т. е. прогнозируемый на этот год результат $5 + 0,97 = 5$ м 97 см. При $x = 90$ (т. е. в 1990 г.) из этого уравнения находим $y = 108$, следовательно, ожидаемый результат в 1990 г. около 6 м 08 см = 5 м + 1,08 м. Поживем — увидим! *).



5.4. Сильнее!

В этом разделе мы продолжаем знакомство с элементами корреляционного анализа и применением его к одной из спортивных задач. Цель этого раздела математической статистики состоит в исследовании взаимосвязи между интересующими нас явлениями, точнее, в выяснении вопроса о наличии или отсутствии подобной связи. Дадим постановку задачи.

Пусть имеется система случайных величин

$$X_1, X_2, \dots, X_m.$$

Над этой системой произведено n независимых наблюдений,

*) На международных соревнованиях в Лос-Анджелесе в феврале 1984 г. спортсмен из Донецка Сергей Бубка с первой попытки преодолел планку на высоте 583 см, 4 марта француз Тьерри Виньерон взял высоту 585 см. Наконец 1 сентября 1984 г. на международных соревнованиях «Гольден гала» в Риме Бубка покорила высоту 594 см, а 13 июля 1985 г. на международных соревнованиях в Париже он взял высоту 600 см.

и результаты этих наблюдений оформлены в виде таблицы (см. табл. 2), каждая строка которой содержит m значений, принятых случайными величинами X_k ($k = 1, \dots, m$) в одном наблюдении.

Таблица 2

Номер опыта	X_1	X_2	...	X_k	...	X_m
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	...	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	...	x_{2m}
...
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}	...	x_{im}
...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}	...	x_{nm}

Числа, занесенные в эту таблицу и занумерованные двумя индексами, представляют собой зарегистрированные результаты наблюдений. Первый индекс обозначает номер наблюдения, второй — номер случайной величины. Таким образом, x_{ik} — это значение, принятое случайной величиной X_k в i -м опыте.

Требуется найти оценки для числовых характеристик этой системы, а главное, найти элементы корреляционной матрицы

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ . & . & . & . \\ & & & k_{mm} \end{pmatrix},$$

в которой $k_{ij} = k_{ji}$ — корреляционные моменты между i -й X_i и j -й X_j случайными величинами. В силу симметричности матрицы K относительно главной диагонали в нее записывают только элементы главной диагонали и лежащие над ней, а другую — симметричную часть — в записи опускают.

Наибольший интерес представляет нормированная корреляционная матрица, состоящая из коэффициентов корреляции. По этой матрице также можно определить степень взаимосвязи случайных величин и влияние их друг на друга. Такую матрицу будем обозначать через

$$r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ & 1 & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

где $r_{ii} = 1$ — коэффициент корреляции величины X_i с самой со-

бой, а

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}.$$

В целях определения коэффициентов корреляции по статистическим данным найдем сначала оценки для математических ожиданий

$$\tilde{m}_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{li} \quad (l = 1, \dots, m).$$

Затем вычислим несмещенные оценки для дисперсий

$$\tilde{D}_l = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{li} - \tilde{m}_l)^2 \quad (l = 1, \dots, m)$$

и корреляционных моментов

$$\tilde{k}_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{li} - \tilde{m}_l)(x_{ji} - \tilde{m}_j) \quad (l = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m).$$

По этим данным и определяются оценки для элементов нормированной корреляционной матрицы

$$\tilde{r}_{ij} = \frac{\tilde{k}_{ij}}{\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j} \quad (l = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m).$$

Перейдем теперь к тяжелой атлетике и используем описанный выше статистический аппарат для выявления зависимости между следующими величинами:

X_1 — сумма тяжелоатлетического двоеборья (кг),

X_2 — результат в рывке (кг),

X_3 — результат в толчке (кг),

X_4 — вес спортсмена (кг),

X_5 — возраст спортсмена (год рождения).

В качестве исходных статистических данных рассмотрим сведения о десятке лучших спортсменов и о рекордах мира; тем самым мы как бы проведем десять экспериментов. Все данные взяты из материалов, подготовленных судьей международной категории М. Аптекарем и опубликованных в газете «Советский спорт» 19 октября 1983 г.

Сведем эти материалы в табл. 3.

Вычисляем по известным уже формулам

$$\begin{array}{lll} \tilde{m}_1 = 371,75 \approx 372; & \tilde{D}_1 = 4990; & \tilde{\sigma}_1 = 70,6; \\ \tilde{m}_2 = 167,75 \approx 168; & \tilde{D}_2 = 1070; & \tilde{\sigma}_2 = 32,7; \\ \tilde{m}_3 = 208; & \tilde{D}_3 = 1483; & \tilde{\sigma}_3 = 38,5; \\ \tilde{m}_4 = 82,3 \approx 82; & \tilde{D}_4 = 644; & \tilde{\sigma}_4 = 25,4; \\ \tilde{m}_5 = 1960,3 \approx 1960; & \tilde{D}_5 = 5,66; & \tilde{\sigma}_5 = 2,4. \end{array}$$

Таблица 3

Спортсмены	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	257,5	115,5	140	52	1964
2	287,5	128	160,5	56	1961
3	305	137,5	173	60	1962
4	345	154	196	67,5	1959
5	367,5	165	209	75	1962
6	400	180	223,5	82,5	1959
7	420	195,5	228,5	90	1956
8	440	200	240,5	100	1962
9	435	196,5	243	110	1957
10	460	205,5	261	130	1961

Составим таблицу разностей $x_{il} - \bar{m}_l$ ($l = 1, \dots, 5$) (табл. 4) и их квадратов (табл. 5).

Таблица 4

Спортсмены	$x_1 - \bar{m}_1$	$x_2 - \bar{m}_2$	$x_3 - \bar{m}_3$	$x_4 - \bar{m}_4$	$x_5 - \bar{m}_5$
1	-114,5	-52,5	-63	-30	3
2	-84,5	-40	-47,5	-26	1
3	-67	-30,5	-35	-22	2
4	-27	-14	-12	-14,5	-1
5	-4,5	-3	1	-7	2
6	28	12	15,5	0,5	-1
7	48	27,5	20,5	8	-4
8	68	32	32,5	18	2
9	63	28,5	35	28	-3
10	88	37,5	53	48	1

Таблица 5

Спортсмены	$(x_1 - \bar{m}_1)^2$	$(x_2 - \bar{m}_2)^2$	$(x_3 - \bar{m}_3)^2$	$(x_4 - \bar{m}_4)^2$	$(x_5 - \bar{m}_5)^2$
1	13110	2756	3969	900	9
2	7140	1600	2256	676	1
3	4489	930	1225	484	4
4	729	196	144	210	1
5	20	9	1	49	4
6	784	144	240	64	1
7	2304	756	420	324	16
8	4624	1024	1056	784	4
9	3969	812	1225	2304	9
10	7744	1406	2809		1

Найдем корреляционные моменты:

$$k_{11} = \tilde{D}_1 = \frac{44\,913}{9} = 4\,990; \quad k_{22} = \tilde{D}_2 = \frac{9\,633}{9} = 1\,070;$$

$$k_{33} = \tilde{D}_3 = \frac{13\,346}{9} = 1\,483; \quad k_{44} = \tilde{D}_4 = \frac{5\,796}{9} = 644;$$

$$k_{55} = \tilde{D}_5 = \frac{5\,094}{9} = 566;$$

$$k_{12} = \frac{20\,753}{70,6 \cdot 32,7} = 0,90; \quad k_{13} = \frac{22\,279}{70,6 \cdot 38,5} = 0,82;$$

$$k_{14} = 0,67; \quad k_{15} = -0,34; \quad k_{23} = 0,89; \quad k_{24} = 0,71;$$

$$k_{25} = -0,45; \quad k_{34} = 0,85; \quad k_{35} = 0,41; \quad k_{45} = -0,31.$$

Нормированная корреляционная матрица в нашем случае выглядит следующим образом:

$$\tilde{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 & 0,82 & 0,67 & -0,34 \\ & 1 & 0,89 & 0,71 & -0,45 \\ & & 1 & 0,85 & -0,41 \\ & & & 1 & -0,31 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Легко заметить, что X_1, X_2, X_3, X_4 — достаточно сильно коррелированы между собой, в то же время год рождения почти не коррелирован, наблюдается лишь небольшое «постарение» с ростом весовой категории.



5.5. Прыжок в XXI век?

Феноменальный прыжок на 890 см американского спортсмена Р. Бимона — яркое достижение XIX Олимпиады 1968 года в Мехико. Прыжок этот назвали прыжком в XXI век.

В последние годы многим спортсменам удалось прыгнуть на 830—870 см. Правда, подобные результаты все еще редкость: их бывает не более четырех в год.

Попробуем, хотя бы приближенно, оценить вероятность того, что рекорд Бимона будет превзойден еще в этом веке.

Любой прыжок за 830 см будем называть «удачным» прыжком. За всю историю легкой атлетики зарегистрировано около 30 удачных прыжков. Первый удачный прыжок (831 см) совершил в 1962 г. советский спортсмен И. Тер-Ованесян. С 1962 по 1982 гг. зарегистрировано пятнадцать удачных прыжков (кроме прыжка Бимона). Вот их реестр, составленный на основе справочника по легкой атлетике [12]:

831	И. Тер-Ованесян (СССР)	1962
831	Р. Бостон (США)	1964
834	Р. Бостон	1964
835	Р. Бостон	1965
835	И. Тер-Ованесян	1967
835	Й. Шварц (ФРГ)	1970
835	А. Робинсон (США)	1976
835	Х. Лаутербах (ГДР)	1981
836	Ж.-К. ди Оливейра (Бразилия)	1979
841	Ш. Аббясов (СССР)	1982
841	Л. Домбровски (ГДР)	1982
845	Н. Стекич (Югославия)	1975
852	Л. Мирикс (США)	1979
854	Л. Домбровски (ГДР)	1980
876	К. Льюис (США)	1982
890	Р. Бимон	1968

Введем в рассмотрение случайную величину L , равную округленной до ближайшего десятка (в меньшую сторону) длине прыжка. Разобьем весь диапазон отмеченных значений L на интервалы (разряды) длиной в 10 см и подсчитаем число m_i значений, приходящихся на каждый i -й разряд, затем найдем статистическую вероятность $\hat{p}_i = m_i/N$, разделив m_i на общее число $N = 15$ отмеченных значений. Приходим к статистическому ряду:

L	830	840	850	860	870	880	890	900
\hat{p}	8/15	4/15	2/15	0	1/15	0	0	0

Этому статистическому ряду можно придать наглядность с помощью так называемой гистограммы (рис. 12). Нетрудно обнаружить, что рассматриваемый ряд хорошо согласуется по различным статистическим критериям (мы лишены возможности останавливаться на этом вопросе и отсылаем читателя к литературе по математической статистике [3; 26]) со следующим теоретическим рядом распределения случайной величины X :

X	830	840	850	860
p	1/2	1/4	1/8	1/16
	870	880	890	900
	1/32	1/64	1/128	1/256

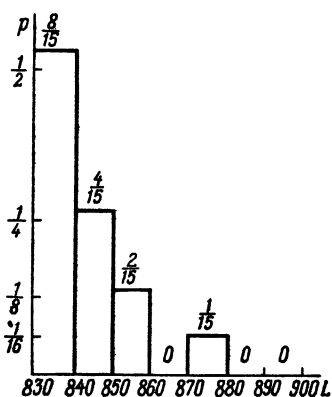


Рис. 12

Отсюда следует, что вероятность «удачного» прыжка, не превосходящего рекорда Бимона, равна

$$p(X < 890) = 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/64 = 63/64.$$

Если предположить, что максимальное число «удачных» прыжков за год равно четырем, то по этой несколько завышенной оценке до конца текущего столетия можно ожидать 60 «удачных» прыжков.

Вероятность q того, что ни один из них не превзойдет рекорда Бимона, равна

$$q = (p(X < 890))^{60} = (63/64)^{60} = 0,389.$$

Следовательно, вероятность того, что по крайней мере один из этих прыжков окажется новым мировым рекордом (т. е. превысит 890 см) составит

$$p = 1 - q = 0,611.$$

В действительности, как следует из многолетних наблюдений, в год регистрируется в среднем лишь два удачных прыжка. Поэтому более реальная оценка

$$q = (p(X < 890))^{30} = 0,625,$$

а вероятность побития рекорда Бимона в текущем столетии будет $p = 0,375$.

Итак, вероятность того, что Р. Бимон «прыгнул в XXI век», достаточно велика *).

6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СПОРТИВНЫХ ЗАДАЧАХ



6.1. Расстановка игроков в баскетбольной команде

Опытный тренер, хорошо знающий своих игроков, обычно успешно справляется с проблемой распределения между ними игровых обязанностей. Задача, связанная с использованием запасных игроков в разных сочетаниях, оказывается более сложной, если команда имеет «длинную скамейку» (в команде много игроков примерно одного класса). В этой

*) На международных соревнованиях в Лос-Анджелесе обладатель четырех золотых медалей Олимпийских игр 1984 г. К. Льюис 18 мая 1985 г. намеревался побить рекорд Бимона. Однако новый рекорд не состоялся. Лишь в четвертой попытке Льюис улетел на 877 см, причем попутный ветер превышал допустимую норму (Советский спорт, 21 мая 1985 г.).

ситуации даже опытному тренеру может помочь рассмотрение соответствующей математической модели.

Для начала ограничимся рассмотрением достаточно простой и не столь уже редкой ситуации. Незадолго до ответственной встречи в команде были заменены не только ряд игроков, но также и тренер. Его место занял новый, недостаточно опытный наставник, к тому же мало знакомый с отдельными игроками и с их возможностями. Перед новым тренером стоит задача: распределить между игроками команды обязанности таким способом, чтобы общая результативность действий всей команды оказалась наибольшей.

Попробуем помочь новому тренеру, используя методы исследования операций. С этой целью придадим задаче, сформулированной на вербальном уровне, более точную форму и займемся построением ее математической модели. Если ничего не знать об игроках, то нечего и решать, — можно действовать наугад. Поэтому полезны даже ограниченные сведения. Следует воспользоваться каким-либо приемом, позволяющим в приемлемые сроки познакомиться с возможностями всех игроков. Обычно поступают следующим образом. Членам команды предлагают серию тестов, позволяющих оценить их способности играть центровым, защитником, разводящим, на левом и правом краях. Действия игроков, назовем их *A, B, C, D, E*, оцениваются в некоторых условных баллах.

Умудренные опытом тренеры могут сказать: к чему все это, ведь каждый игрок имеет свое амплуа, и нечего ставить, скажем, центрального на левый край или разводящего на роль защитника. В определенной мере это так, но при наличии значительного числа запасных игроков проблема формирования команды, выставляемой на встречу, приобретает особую сложность. Решается она таким же методом, как поставленная выше упрощенная задача.

В рамках этого же метода тренер может решать и такой вопрос: выпускать ли ему двух центральных или двух защитников (вместо одного).

Сведем результаты тестирования (в баллах) в табл. 6.

Таблица 6

Игрок	Защитник	Центровой	Разводящий	Левый крайний	Правый крайний
<i>A</i>	3	4	2	2	1
<i>B</i>	4	5	3	1	3
<i>C</i>	4	3	1	1	1
<i>D</i>	3	1	2	2	2
<i>E</i>	1	3	1	2	1

Чем выше балл, тем предпочтительнее назначение игрока на соответствующее амплуа. Так, например, игрок *B*, вероятно, будет хорошим центровым и защитником, но слабым левым крайним, а игрок *D*, в общем-то, равно играет всюду, а центровым достаточно плохо.

Запомним смысл записанных в табл. 6 чисел и будем работать с матрицей баллов Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вместе с тренером мы примем естественное предположение (*критерий эффективности*), согласно которому эффективность игры всей команды определяется суммой баллов, оценивающих игру каждого. Подобное предположение можно оспаривать и настаивать на ином критерии эффективности. Читатель вправе это сделать и предложить лучший вариант. Почти несомненно, что он окажется более сложным по своему строению. Выбранный нами критерий обладает огромным достоинством — он линейно зависит от баллов каждого игрока. Смысл этих слов станет ясным из последующего. Пока же рассмотрим одно из конкретных (малообдуманных) предложений: игрока *A* поставить защитником, *B* — в центр, *C* — разводящим, *D* — левым, *E* — правым крайним. При такой расстановке *P* эффективность (обозначим ее через $\Phi(P)$) игры всей команды в баллах составит

$$\Phi(P) = 3 + 5 + 1 + 2 + 1 = 12.$$

Расстановке *P* отвечает табл. (матрица) 7. Она называется *матрицей назначений*, соответствующей расстановке *P*. Будем обозначать ее той же буквой *P*.

Смысл этой таблицы очевиден: единица на пересечении строки игрока *A* и столбца «Защитник» означает, что именно

Таблица 7

Игрок	Защитник	Центровой	Разводящий	Левый крайний	Правый крайний
<i>A</i>	1	0	0	0	0
<i>B</i>	0	1	0	0	0
<i>C</i>	0	0	1	0	0
<i>D</i>	0	0	0	1	0
<i>E</i>	0	0	0	0	1

на эту роль A назначен; нуль подтверждает, что соответствующая роль ему не отводится. Легко усмотреть, что в каждой строке и каждом столбце матрицы назначений имеется в точности по одной единице, тогда как остальные элементы — нули. Подобное строение матрицы является отражением непреложного требования: каждый игрок назначается точно на одно амплуа и на каждое амплуа назначается в точности один игрок. Всех возможных матриц назначения, т. е. всевозможных способов расстановки игроков в команде, столько, сколько существует различных перестановок из пяти элементов, а именно, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Среди этих матриц необходимо выбрать такую матрицу P^* (их может оказаться и несколько), которая определит расстановку с наибольшим значением эффективности по сравнению с другими матрицами назначений P . Запишем это требование в виде $\Phi(P^*) = \max_P \Phi(P)$.

Число 120 возможных вариантов не так уж велико, и, потрудившись перебрать, тренер нашел матрицу назначений

$$P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которой соответствует наибольшая перспективность игры команды $\Phi(P^*) = 4 + 3 + 4 + 2 + 2 = 15$. При такой расстановке A играет центровым, B — правым крайним, C — защитником, D — разводящим, E — левым крайним.

Впрочем, это решение оказалось не единственным оптимальным. Помощник тренера обнаружил, что то же наибольшее значение эффективности возникает при расстановке согласно матрице назначений

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi(\tilde{P}) = 2 + 5 + 4 + 2 + 2 = 15.$$

Итак, тренер решил задачу, как говорят, «прямым перебором» возможных вариантов. Это удалось осуществить благодаря незначительному числу вариантов (малой размерности задачи). Положение резко изменится к худшему, если в распоряжении тренера имеются запасные игроки, которые к тому же (как и основные) с различными партнерами играют с раз-

личной результативностью. И тут возникает соблазн учесть в нашем исследовании и этот момент. В действительности такой учет возможен, но приведет к усложнению модели, неоправданному на данном этапе. Ограничим себя и будем считать, что результаты тестирования дают некоторые средние баллы, с учетом игры с разными партнерами. Даже при наличии по одному запасному игроку на каждое место в команде, т. е. при общем числе игроков, равном 10, соответствующая задача о назначениях требует перебора, вообще говоря, $10! = 3628800 \approx 3,6 \cdot 10^6$ вариантов. Осуществление прямого перебора в этом случае немыслимо; можно лишь воспользоваться ЭВМ. Оценим затраты времени. В году $3 \cdot 10^7$ секунд. При затрате на один перебор лишь одной секунды потребуется $1/10$ года, при затрате одной миллисекунды — $1/10^4$ года, при затрате одной микросекунды — $1/10^7$ года, т. е. 3 секунды. Но перебор $20!$ (это больше, чем $10^{10} \cdot 10!$) вариантов займет уже 3000 лет! Оценки — малоутешительные. К счастью, однако, для задачи о назначениях (она называется также задачей выбора) существует удобная для решения математическая модель. Модель формализуется в терминах линейного программирования — самого завершенного и нашедшего наиболее широкое применение раздела математического программирования или теории исследования операций.

Построим математическую модель задачи о назначениях. Удобства ради припишем игрокам A, B, C, D, E , соответственно номера $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Аналогично обозначим номерами $j = 1, 2, 3, 4, 5$ обязанности защитника, центрального, разводящего, левого и правого крайних соответственно. Затем введем в рассмотрение 25 неизвестных x_{ij} ($i = 1, \dots, 5$, $j = 1, \dots, 5$), значения которых мы станем интерпретировать как указания о назначении игрока под номером i на выполнение обязанностей типа j . При этом каждая из переменных x_{ij} может принимать лишь одно из двух возможных значений:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если игрок } i \text{ назначен на роль } j, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Совокупность пока неизвестных величин x_{ij} составляет матрицу назначений

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{pmatrix}.$$

Численные реализации таких матриц нам уже встречались в разобранный ранее примере. Уже известно, что в каждой строке и каждом столбце матрицы X лишь единственный из элементов равен 1, остальные равны нулю. Это обязательное условие (ограничение) может быть записано в соответствующей форме: сумма всех элементов по каждой строке (столбцу) равна 1:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1, \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} &= 1, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1, \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 1. \end{aligned}$$

В более экономной записи системы ограничений примут вид

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, 5), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \dots, 5). \quad (2)$$

К этому следует присоединить требование неотрицательности неизвестных

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 5). \quad (3)$$

Игрок под номером i , назначенный на амплуа j , внесет свою долю в общую эффективность $\Phi(X)$ в размере $a_{ij}x_{ij}$. Здесь a_{ij} — элемент соответствующей матрицы баллов Γ , расположенный на пересечении ее i -й строки и j -го столбца. Общая эффективность игры команды составит сумму из 25 слагаемых

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{ij}x_{ij}. \quad (4)$$

В нашем конкретном примере (см. табл. 6)

$$\Phi(X) = 3x_{11} + 4x_{12} + \dots + x_{55}. \quad (5)$$

Поиск матрицы назначений X , доставляющей эффективности $\Phi(X)$ наибольшее значение, сводится к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, 5)$$

системы ограничений (1) и (2) выбрать такое, которое придает функции (4) наибольшее значение (оптимизирует $\Phi(X)$).

Сформулированная задача и есть математическая модель задачи о распределении обязанностей в баскетбольной команде (при отсутствии запасных игроков).

Допустим, что игроков в команде $n > 5$. Тогда введем дополнительно к известным пяти еще $k = n - 5$ фиктивных амплуа (мест в команде), считая, что на каждом из них тестовый балл a_{ij} ($i = 1, \dots, n; j = 6, 7, \dots, n$) каждого из игроков равен нулю. После такого шага приходим к известной уже задаче о выборе при равном числе претендентов и мест в команде. Возникает математическая модель, отличающаяся от (1) — (4) только числом переменных x_{ij} и числом ограничений.

Аналогичным путем могут быть сформулированы и просчитаны различные варианты задач, в которых, например, некоторые места сохраняются за основным составом, остальные — распределяются между запасными.

Решение общей задачи о назначениях может быть осуществлено универсальным симплекс-методом (см. с. 122). Более предпочтительным, однако, оказывается специализированный, так называемый «венгерский метод», предложенный Эгервари (1931 г.), удачно использующий специфику ограничений задачи. Описание этого метода читатель сможет найти, например, в книгах [17, 18].



6.2. Футбольные клубы и спортсмены*)

Спортивная фирма «Рекорд» владеет несколькими футбольными клубами. Пусть, для определенности, их три — B_1, B_2, B_3 .

Как это практикуется во многих зарубежных странах, коллектив игроков частично пополняется за счет покупки спортсменов, подготовленных в юниорских центрах и клубах других организаций и в иных странах. Простоты ради предположим, что таких центров два — A_1 и A_2 и что в текущем году центры предлагают для переходов в клубы фирмы соответ-

*) Приводим выдержку из заметки «Итальянский легион», опубликованной в «Советском спорте» 23 сентября 1984 г.

«Италия, пожалуй, самый крупный в мире «импортер» футбольных «звезд». Местные клубы скупили много выдающихся игроков Европы и Южной Америки. Хорошо еще, иронично замечают футбольные обозреватели многих стран, что в Италии каждому клубу разрешают заявлять только двух зарубежных игроков. Из 16 команд высшей лиги только «Кремонезе» не имеет в своем составе ни одного иностранного футболиста.»

ственно a_1 и a_2 игроков примерно одного класса. В то же время футбольные клубы нуждаются в пополнении своих составов соответственно b_1 , b_2 и b_3 игроками. Без ограничения общности можно допустить, что

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3, \quad (6)$$

т. е., что общее число подготовленных в центрах игроков совпадает с общими потребностями клубов. При нарушении этого условия, как станет ясно из последующего, можно ввести в рассмотрение «фиктивный» клуб (при выпуске, превышающем потребности) или «фиктивный» центр (при потребностях, превышающих выпуск).

Допустим, что за игрока, передаваемого центром A_i клубу B_j , вносится сумма, равная c_{ij} и считающаяся предопределенной. Перед фирмой возникает задача составления такого плана приглашения игроков из центров в клубы, который при наименьших затратах предусматривает приглашение всех подготовленных футболистов и полное удовлетворение потребностей клубов в пополнении.

Придадим задаче математическую форму. Обозначим через x_{ij} пока неизвестное число футболистов, переходящих из центра A_i в клуб B_j . Тогда общее число футболистов, переходящих из центров A_1 и A_2 в клуб B_j , составит $x_{1j} + x_{2j}$. Эта сумма должна совпадать с потребностью b_j клуба B_j ($j = 1, 2, 3$). Тем самым приходим к трем уравнениям:

$$x_{11} + x_{21} = b_1; \quad x_{12} + x_{22} = b_2; \quad x_{13} + x_{23} = b_3. \quad (7)$$

При этом общее число футболистов, передаваемых центрами клубам, составит

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1; \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2. \quad (8)$$

При выбранном плане $X = \{x_{ij}; i = 1, 2; j = 1, 2, 3\}$ распределения футболистов по клубам общие затраты фирмы составят

$$S(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}. \quad (9)$$

Приходим, таким образом, к следующей математической задаче (задаче линейного программирования): среди всех неотрицательных решений x_{ij} системы ограничений (7) — (8) найти такое, при котором форма $S(X)$ достигает наименьшего значения.

Легко видеть, что сформулированная нами прежде задача о назначениях имеет тот же вид, что и рассматриваемая задача, в которой все a_i равны 1 и все b_j равны 1.

Познакомимся с методами решения такого типа задач сначала на числовом примере. Положим $a_1 = 2$; $a_2 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 1$ соответственно. Пусть заданы стоимости $c_{11} = 4$, $c_{12} = 9$, $c_{13} = 3$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 1$. Условие (6) при этом выполнено, а ограничения (7) – (8) и минимизируемая форма (9) принимают вид

$$x_{11} + x_{12} = 1, \quad x_{12} + x_{22} = 3, \quad x_{13} + x_{23} = 1, \quad (10)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 2, \quad x_{21} + x_{22} + x_{23} = 3, \quad (11)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2; j = 1, 2, 3), \quad (12)$$

$$S(X) = 4x_{11} + 9x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 8x_{22} + x_{23}. \quad (13)$$

Заметим вновь, что при выполнении условия (6) система ограничений (10) – (11) всегда совместна. Действительно, если отвлечься от минимизации формы $S(X)$, то совершенно очевидно, что существует бесчисленное множество способов организовать требуемые пополнения клубов. Систему (10) – (11) пяти алгебраических уравнений с шестью неизвестными (ее ранг $r = 4$) можно разрешить относительно четырех неизвестных (они называются *базисными*) и выразить их через два оставшихся (*свободных*) неизвестных. Выбрав в качестве базисных x_{13} , x_{21} , x_{22} , x_{23} , а в качестве свободных x_{11} , x_{12} , найдем

$$x_{13} = 2 - x_{11} - x_{12}, \quad x_{23} = -1 + x_{11} + x_{12}, \quad (14)$$

$$x_{21} = 1 - x_{11}, \quad x_{22} = 3 - x_{12}.$$

При этом для формы $S(X)$ получим выражение

$$S(X) = 33 - 2x_{11} - x_{12}. \quad (15)$$

Наконец, запишем условия неотрицательности всех переменных

$$2 - x_{11} - x_{12} \geq 0, \quad (I)$$

$$1 - x_{11} \geq 0, \quad (II)$$

$$3 - x_{12} \geq 0, \quad (III)$$

$$-1 + x_{11} + x_{12} \geq 0, \quad (IV)$$

$$x_{11} \geq 0, \quad (V)$$

$$x_{12} \geq 0. \quad (VI)$$

Прежде чем перейти к геометрическому толкованию задачи и ее решению, введем некоторые основные понятия линейного программирования.

Остановимся сначала на неравенстве (I). Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Оси системы обозначим x_{12} и x_{11} . Заменим в (I) знак неравенства на

знак точного равенства:

$$2 - x_{11} - x_{12} = 0. \quad (I')$$

Известно из курса математики средней школы, что всякое линейное уравнение, и, в частности (I'), определяет в данной системе координат прямую. Рассмотрим далее линейную функцию (*линейную форму*), равную левой части уравнения (I'):

$$F = 2 - x_{11} - x_{12}. \quad (16)$$

Выберем на плоскости произвольную точку A_0 с координатами (x_{11}^0, x_{12}^0) и подставим их в выражение (16) для формы F . При этом форма F примет определенное числовое значение

$$F(A_0) = F_0 = 2 - x_{11}^0 - x_{12}^0.$$

Это число называют значением F в точке A_0 .

Зададимся теперь произвольным числом C и рассмотрим совокупность точек плоскости (геометрическое место точек плоскости), в которых форма F равна числу C :

$$2 - x_{11} - x_{12} = C.$$

Последнее уравнение определяет некоторую прямую на плоскости. Эту прямую называют *линией равных значений формы F* . В частности, прямая (I') является линией нулевых значений F . Две прямые — линии равных значений

$$x_{11} + x_{12} + C_1 - 2 = 0, \quad x_{11} + x_{12} + C_2 - 2 = 0,$$

отвечающие различным значениям C_1 и C_2 , не пересекаются: они имеют равные угловые коэффициенты (но различные свободные члены) и оказываются параллельными.

Следовательно, вся плоскость как бы «расслаивается» на бесчисленное множество параллельных прямых — прямых равных значений формы F . Переход от точек одной прямой к точкам другой сопровождается изменением значения формы F .

Все сказанное выше о рассмотренной нами форме (16) сохраняет свою силу в отношении всякой другой линейной формы $\Phi = a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + a_0$ с произвольными действительными коэффициентами a_0, a_1, a_2 . В частности, все справедливо для линейных форм — левых частей неравенств (II) — (VI). Вот почему, начиная с этого места, будем рассматривать произвольную форму Φ , в которой для сокращения записи обозначим x_{11} и x_{12} просто через x_1 и x_2 соответственно:

$$\Phi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2. \quad (17)$$

6.3. Некоторые основные понятия и факты

Рассмотрим на плоскости, где введена система декартовых координат, две точки M_1 , M_2 и их радиус-векторы $r_1 = \overline{OM_1}$, $r_2 = \overline{OM_2}$ (рис. 13). Разность векторов r_2 и r_1 равна

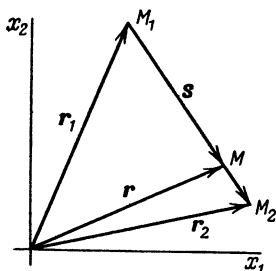


Рис. 13

$r_2 - r_1 = \overline{M_1M_2}$. Предположим, что λ — произвольное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \lambda \leq 1$. Если вектор $\overline{M_1M_2}$ умножить на скаляр λ , то получится вектор $\lambda \overline{M_1M_2} = s$, коллинеарный $\overline{M_1M_2}$, направленный в ту же сторону, но имеющий длину, меньшую чем $\overline{M_1M_2}$. Ясно, что если совместить начало вектора s с точкой M_1 , то его конец M попадет внутрь отрезка M_1M_2 . При $\lambda = 0$ точка M совпадает с M_1 , при $\lambda = 1$ — с точкой M_2 . При любом

$0 \leq \lambda \leq 1$ радиус-вектор r точки M равен сумме: $r = r_1 + s = r_1 + \lambda(r_2 - r_1)$. Итак, радиус-вектор r любой точки M , лежащей на отрезке между M_1 и M_2 , находится по формуле

$$r = r_1 + \lambda(r_2 - r_1), \text{ где } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (18)$$

Наши рассуждения, а значит и формула (18), без всяких изменений переносятся со случая плоскости (размерность $n = 2$) на случай трехмерного пространства ($n = 3$). Поэтому естественно, перейдя к рассмотрению пространства произвольного числа n измерений, считать, что радиус-вектор r произвольной точки отрезка M_1M_2 находится по той же формуле (18).

На плоскости каждая из точек, например M_1 и M_2 , задается двумя координатами: $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$; $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Те же координаты имеют соответствующие векторы $r_1 = \overline{OM_1} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\}$ и $r_2 = \overline{OM_2} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\}$. Координаты вектора $r = \{x_1, x_2\}$ (и точки M) находятся по формуле (18), которая при переходе к координатной записи приводит к двум соотношениям:

$$x_1 = (1 - \lambda)x_1^{(1)} + \lambda x_1^{(2)}, \quad x_2 = (1 - \lambda)x_2^{(1)} + \lambda x_2^{(2)}.$$

В пространственном случае ($n = 3$) добавляется еще одно соотношение для третьей координаты:

$$x_3 = (1 - \lambda)x_3^{(1)} + \lambda x_3^{(2)}.$$

В n -мерном пространстве точки $M_1(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)})$, $M_2(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ задаются каждая n координатами, а координаты точки $M(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ определяются из n соотношений

$$x_i = (1 - \lambda)x_i^{(1)} + \lambda x_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

или из одного векторного соотношения

$$r = (1 - \lambda)r_1 + \lambda r_2. \quad (19)$$

Множество всех таких точек M назовем *отрезком* M_1M_2 в n -мерном пространстве.

Совокупность точек пространства T называют *выпуклым телом* (*фигурой*), если вместе с двумя любыми его точками M_1 и M_2 к этой совокупности принадлежат все точки отрезка M_1M_2 .

Примерами выпуклых плоских тел могут служить круг, круговой сектор, сегмент, любой правильный многоугольник.

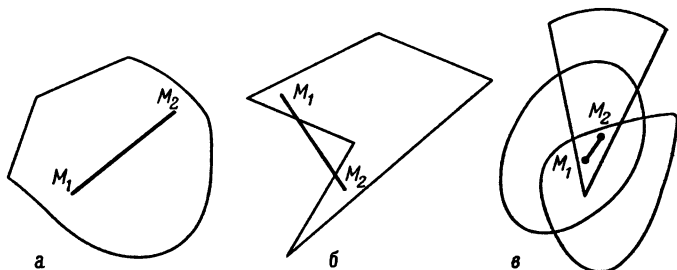


Рис. 14

В пространстве — это шар, конус, а также призма и пирамида, в основании которых лежат правильные многоугольники. На рис. 14, а представлена выпуклая фигура, на рис. 14, б — фигура, не являющаяся выпуклой.

Под *пересечением* тел (фигур) понимают множество точек, принадлежащих каждому из этих тел. Пересечение любого числа выпуклых тел вновь является выпуклым телом. Убедимся в этом (см. рис. 14, в). Выберем любые две точки M_1 и M_2 , принадлежащие пересечению. Эти точки принадлежат каждому из пересекающихся тел. Но каждое из них по условию выпукло и, значит, каждое содержит весь отрезок M_1M_2 . В силу этого отрезок M_1M_2 полностью принадлежит и их пересечению. Последнее означает, что пересечение — выпуклое тело.

Зададим в плоскости некоторую прямую уравнением: $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Она делит всю плоскость на две части —

на две полуплоскости. Отметим далее на плоскости пару точек M_1 и M_2 и установим признаки, по которым можно узнать, принадлежат ли отмеченные точки одной и той же или разным полуплоскостям. Вот эти очевидные необходимые и достаточные признаки:

Если точки M_1 и M_2 принадлежат одной полуплоскости, то отрезок M_1M_2 , их соединяющий, не пересекает заданной прямой. Если отрезок $M'_1M'_2$, соединяющий точки M'_1 и M'_2 ,

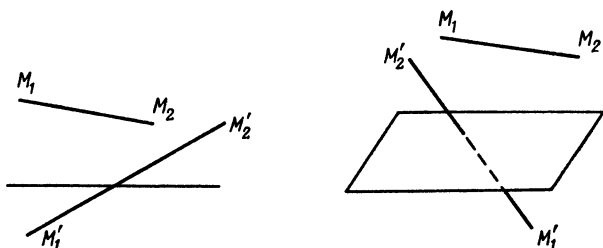


Рис. 15

пересекает эту прямую, то точки M'_1 и M'_2 лежат в разных полуплоскостях (см. рис. 15).

Аналогичные признаки имеют место в трехмерном пространстве: они позволяют выяснить, лежат ли точки по одну или по разные стороны от заданной плоскости $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Без изменения признаки переносятся далее на общий случай n -мерного пространства. Здесь рассматривается геометрическое место точек (так называемая *гиперплоскость*), задаваемое линейным относительно x_1, \dots, x_n уравнением

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0. \quad (20)$$

Оказывается, что совокупность всех точек n -мерного пространства T , не лежащих на гиперплоскости (20), можно разбить на две части так, что окажутся выполненными следующие условия: отрезок, соединяющий любую пару точек из одной и той же части, не пересекает гиперплоскость (20); отрезок, соединяющий любую пару точек из разных частей, пересекает гиперплоскость (20).

Убедимся в этом. Для сокращения записи ограничимся плоским случаем ($n = 2$). Для произвольного n рассуждения остаются теми же. Зададим прямую

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0. \quad (21)$$

Линейная форма, равная левой части этого уравнения, имеет

вид

$$\Phi = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2. \quad (22)$$

В точках плоскости, не лежащих на прямой (21), форма $\Phi \neq 0$. Разобьем всю плоскость на две части и обозначим их через T^+ и T^- . К части T^+ отнесем все точки плоскости, в которых $\Phi > 0$, а к части T^- — все точки, где $\Phi < 0$. Проверим теперь, что для каждой из частей T^+ и T^- справедливо наше утверждение.

Пусть $M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ и $M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ — две точки из одной и той же части, например T^+ . Тогда

$$\Phi(M_1) = a_0 + a_1x_1^{(1)} + a_2x_2^{(1)} > 0, \quad (23)$$

$$\Phi(M_2) = a_0 + a_1x_1^{(2)} + a_2x_2^{(2)} > 0. \quad (24)$$

Умножим (23) и (24) соответственно на числа $1 - \lambda > 0$ и $\lambda > 0$. Получим:

$$(1 - \lambda)[a_0 + a_1x_1^{(1)} + a_2x_2^{(1)}] + \lambda[a_0 + a_1x_1^{(2)} + a_2x_2^{(2)}] = \\ = a_0 + a_1[(1 - \lambda)x_1^{(1)} + \lambda x_1^{(2)}] + a_2[(1 - \lambda)x_2^{(1)} + \lambda x_2^{(2)}] > 0. \quad (25)$$

Но $x_1 = (1 - \lambda)x_1^{(1)} + \lambda x_1^{(2)}$ и $x_2 = (1 - \lambda)x_2^{(1)} + \lambda x_2^{(2)}$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ суть координаты произвольной точки M отрезка M_1M_2 . Неравенство (25) можно записать в виде $\Phi(M) = (1 - \lambda)\Phi(M_1) + \lambda\Phi(M_2)$. При этом результат $\Phi(M) > 0$ означает, что точка M , и следовательно весь отрезок M_1M_2 , принадлежат части T^+ . Теперь предположим, например, что $\Phi(M_1) > 0$, а $\Phi(M_2) < 0$, т. е. что M_1 и M_2 принадлежат различным частям. Точка M окажется на прямой (21), если $\Phi(M) = 0$, т. е. при $(1 - \lambda)\Phi(M_1) + \lambda\Phi(M_2) = 0$. Отсюда находим

$$\lambda = \frac{\Phi(M_1)}{\Phi(M_1) - \Phi(M_2)}. \quad (26)$$

По условию выбора точек $\Phi(M_1) > 0$, $\Phi(M_2) < 0$, следовательно λ , найденное из (26), удовлетворяет неравенствам $0 \leq \lambda \leq 1$ и поэтому определяет точку M отрезка M_1M_2 , принадлежащую в то же время прямой (21). Этим доказано, что отрезок M_1M_2 пересекает прямую (21).

Итак, заданием прямой (21) вся плоскость T разбивается на две части — на две полуплоскости. Каждая из них ограничена прямой (21), которую мы условимся относить к каждой из полуплоскостей.

Если теперь обратиться к гиперплоскости (20), то, перенося рассуждения на этот общий случай, можно заключить:

Гиперплоскость (20) делит пространство на две части — полупространства. В каждом из полупространств форма

$\Phi = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ сохраняет свой знак. В различных полупространствах знак Φ различен. Следовательно, любая гиперплоскость $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = C$, где $C = \text{const}$, целиком лежит либо в одном, либо в другом полупространстве в зависимости от знака C .

Покажем, что полуплоскость (полупространство), ограниченная любой прямой (21) (гиперплоскостью (20)), является выпуклым телом. Мы уже видели, что если точки M_1 и M_2 принадлежат одной и той же полуплоскости (полупространству), то $\Phi(M_1)$ и $\Phi(M_2)$ имеют одинаковые знаки. Тот же знак имеет $\Phi(M)$ для любой точки M отрезка M_1M_2 . Это означает, что той же полуплоскости (полупространству) принадлежит и весь отрезок M_1M_2 .

Рассмотрим теперь произвольное линейное неравенство относительно переменных x_1 и x_2 . Его всегда можно записать в виде

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \geq 0. \quad (27)$$

Областью решений этого неравенства назовем совокупность точек плоскости, чьи координаты удовлетворяют этому неравенству.

Убедимся, что областью решений линейного неравенства является полуплоскость. Для этого перейдем от неравенства (27) к равенству $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Это уравнение определяет прямую на плоскости. Уже известно, что прямая делит плоскость на две полуплоскости. В каждой из точек одной из полуплоскостей $F = a_0 + a_1x + a_2x_2 \geq 0$. Эта полуплоскость и является областью решения неравенства (27).

В качестве примера рассмотрим неравенство

$$2 - x_1 - x_2 \geq 0.$$

Прямая $2 - x_1 - x_2 = 0$ разбивает всю плоскость на две части. Областью решений неравенства (I) является та из полуплоскостей, которой принадлежит начало координат. Другая полуплоскость является областью решений неравенства $2 - x_1 - x_2 \leq 0$.

По аналогии с изложенным областью решений линейного неравенства

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq 0$$

относительно n переменных x_1, \dots, x_n является некоторое полупространство n -мерного пространства.

Естественно назвать областью решений системы линейных неравенств множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из неравенств системы.

секает многоугольник P . Этой линией (показана на рис. 16) является та, которая проходит через вершину P — точку $(1, 1)$. Она отвечает значению $S(X) = 33 - 2 - 1 = 30$. Таким образом, наименьшее значение затрат формы $\min S(X) = 30$ и определяется значениями переменных

$$\begin{aligned}x_{11} &= 1, \quad x_{12} = 1, \quad x_{13} = 0, \\x_{22} &= 2, \quad x_{23} = 1, \quad x_{21} = 0.\end{aligned}$$

Это означает, что оптимальным является план, согласно которому из центра A_1 в клубы B_1 и B_2 направляется по одному футболисту. Из центра A_2 в клубы B_2 и B_3 переводятся соответственно двое и один спортсмен.

Прежде чем формулировать общие свойства решений задач, подобных рассмотренной выше (или задаче о назначениях), разберем еще один пример. Забегая вперед, отметим, что в нем содержится новый элемент: множеством допустимых решений в этом примере оказывается не выпуклый многогранник (или многоугольник, как в последней задаче), а неограниченная выпуклая многогранная область.

6.4. Задача о спортивном рационе

Одной из первых задач, решенных методами линейного программирования, явилась задача о диете, рассмотренная американскими математиками Стигнером в 1945 г. и (независимо от него) Купмансом в 1947 г.

Вот ее постановка. Известно, что для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки некоторое количество питательных веществ: белков, жиров, углеводов, витаминов и т. д. Специальные требования (например, ограничение количества жиров и углеводов) предъявляются к составлению рациона представителей различных видов спорта. Требования основаны на рекомендациях специалистов (врачей, тренеров). Впрочем, рационально питаться надлежит не только спортсменам. Поэтому дальнейшие рассуждения носят общий характер.

Запасы питательных веществ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ в различных продуктах $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ различны. Обозначим через a_{ij} запасы (в некоторых единицах) питательного вещества вида β_i в продукте π_j . Из величин a_{ij} можно составить матрицу $A = (a_{ij})$ из m строк и n столбцов.

Предположим далее, что стоимость некоторой единицы продукта π_j составляет c_j ($j = 1, \dots, n$), а минимальная норма (например суточная) питательного вещества β_i выражена числом b_i ($i = 1, \dots, m$).

Обозначим через x_j ($j = 1, \dots, n$) количество продукта π_j , приобретенного для рациона (подразумевается, что вся приобретаемая пища потребляется). В этом случае общие запасы питательного вещества β_i во всех видах продуктов составят сумму

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n.$$

Этот запас не должен быть меньше минимальной нормы b_i , что приводит к m неравенствам

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (28)$$

При этом общая стоимость приобретенных продуктов составит

$$F(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j. \quad (29)$$

Естественно, что каждая из величин x_j не может быть отрицательной, т. е. $x_j \geq 0$, так как продукт π_j либо приобретается в количестве x_j , либо вовсе не входит в рацион.

Таким образом, реальная задача о наиболее дешевом и приемлемом по минимальным нормам рационе приводит нас к следующей математической задаче (модели).

Задана система (28) из m линейных неравенств с n неизвестными x_1, \dots, x_n . Требуется среди всех неотрицательных решений системы (28) найти такое, которое сообщает линейной форме (29) от этих же переменных наименьшее значение (минимизирует форму $F(X)$).

Это — типичная задача линейного программирования, заданная в так называемой *стандартной форме* (ограничения (28) имеют вид неравенств). Используем векторную запись. Введем, кроме матрицы A , еще вектор-столбцы независимых и свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

а также вектор-строку $C = (c_1, \dots, c_n)$ из коэффициентов формы $F(X)$.

Используя правило умножения матрицы A на вектор-столбец X , а также вектор-строки C на столбец B , мы можем записать кратко систему ограничений и форму $F(X)$ в виде $AX \geq B$, $F(X) = CX$, а требование неотрицательности в виде $X \geq 0$.

Линейное программирование располагает универсальными методами решения поставленной и аналогичных по математической форме задач. В частности и для задач, в которых

все ограничения имеют вид точных равенств (как, например, в задаче о футбольных клубах или в задаче о назначениях).

Первый из таких методов – метод разрешающих множителей – был предложен Л. В. Канторовичем в 1939 г. и усовершенствован им и М. К. Гавуриным в 1940 г. К 1949 г. относится публикация первой в США работы по общим проблемам линейного программирования. В ней Дж. Данциг изложил получивший широкое признание симплекс-метод решения общей задачи линейного программирования. Оставляя пока симплекс-метод вне рассмотрения, попытаемся уяснить смысл математической модели задачи о рационе и проведем необходимый анализ. Ограничимся простейшим вариантом, в котором фигурируют пять питательных веществ ($m = 5$) и два типа продуктов ($n = 2$).

Всем известным по условию величинам (a_{ij} и b_i) придадим конкретные числовые значения. Они сведены в табл. 8 и носят чисто иллюстративный характер.

Таблица 8

Питательные вещества	Продукты		Норма
	π_1	π_2	
β_1	1	5	10
β_2	3	2	12
β_3	2	4	16
β_4	2	2	10
β_5	1	0	1

Ограничения (28), условия неотрицательности переменных и минимизируемая форма примут вид

$$x_1 + 5x_2 \geq 10, \quad (\text{I})$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 20, \quad (\text{II})$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 16, \quad (\text{III})$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 10, \quad (\text{IV})$$

$$x_1 \geq 1, \quad (\text{V})$$

$$x_2 \geq 0, \quad (\text{VI})$$

$$F(X) = 2x_1 + 3x_2$$

(неравенство $x_1 \geq 0$ является следствием неравенства $x_1 \geq 1$ и потому не включено в эту систему).

На рис. 17 показана область Q допустимых решений, определяемая системой линейных неравенств (I) – (VI), и линии уровня минимизируемой формы F .

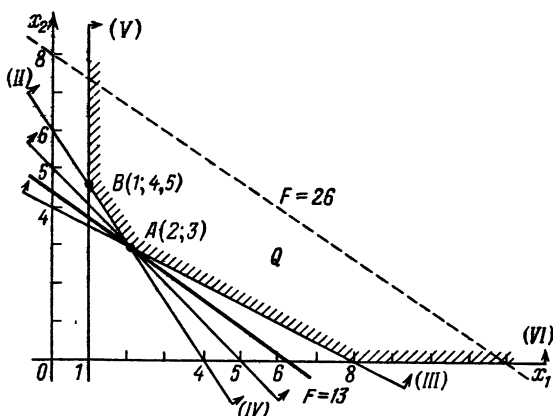


Рис. 17

Видно, что наименьшее значение достигается формой $F(X)$ в точке $A(2, 3)$ — одной из вершин области Q . Следовательно, наиболее дешевый рацион стоит $F(A) = 13$ денежных единиц и обеспечивается закупками продуктов π_1 и π_2 в объеме $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ единиц соответственно.

Отметим, что в рассматриваемом примере область Q допустимых решений неограниченно простирается вверх. Это означает, что в области Q имеются точки с координатами (x_1, x_2) , доставляющие форме $F(X)$ сколь угодно большие значения.

Последнее свидетельствует о том, что питание можно организовать сколь угодно дорого.

Изменим стоимость продуктов π_1 и π_2 , положив их равными 2 и 3 единицам соответственно. В этом случае надлежит минимизировать форму $\Phi(X) = 3x_1 + 2x_2$. Линии уровня этой формы параллельны стороне AB области Q . Поэтому наименьшее значение $F(X)$ достигается в каждой точке стороны AB .

6.5. О задачах линейного программирования

Мы рассмотрели геометрический способ решения двух задач линейного программирования. Первая из них — задача о футбольных клубах; она имеет каноническую форму — все ограничения, которым подчиняются искомые переменные (кроме условий неотрицательности), имеют вид равенств. Вторая — задача о диете; она имеет стандартную форму — все ограничения задачи имеют вид неравенств.

относительно тех же неизвестных. Требуется среди всех неотрицательных $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) решений системы (30) найти такие, которые сообщают форме (31) наименьшее значение.

Систему (30) называют *системой ограничений задачи*. Всякое неотрицательное решение $X = (x_1, \dots, x_n)$; $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) называют *допустимым решением* или *планом*.

Заметим, что задача максимизации формы $F(X)$, т. е. отыскание среди всех допустимых решений системы (30) таких, которые сообщают форме (31) наибольшее значение, сводится к задаче минимизации формы $\Phi(X) = -F(X)$. Действительно, наименьшее значение $\Phi(X)$ равно наибольшему значению $F(X)$, взятому с противоположным знаком.

Читатель уже заметил, что среди ограничений задач, разобранных ранее, фигурировали линейные неравенства. Покажем сейчас, что ценою введения дополнительных неизвестных можно от ограничений-неравенств перейти к ограничениям-равенствам. В самом деле, пусть неравенство

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta \geq 0 \quad (32)$$

— одно из ограничений задачи. Введем новую неизвестную (обозначим ее через x_{n+1}) с помощью уравнения

$$x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \beta. \quad (33)$$

Ясно, что условие $x_{n+1} \geq 0$ неотрицательности величины x_{n+1} эквивалентно выполнению неравенства (32). Это означает, что если набор $x_1^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0$ неотрицательных значений переменных x_1, \dots, x_n, x_{n+1} удовлетворяет уравнению (33), то он удовлетворяет также и неравенству (32).

Справедливо и обратное утверждение: если неотрицательные величины x_1^0, \dots, x_n^0 удовлетворяют неравенству (32), то величина $x_{n+1}^0 = \alpha_1 x_1^0 + \dots + \alpha_n x_n^0 + \beta$, найденная из уравнения (33), окажется также неотрицательной.

Тем самым доказана эквивалентность неравенства (32) и равенства (33). Таким же способом и каждое другое ограничение-неравенство можно заменить эквивалентным ему ограничением-равенством. В итоге (хотя число неизвестных возрастет) система ограничений примет вид (30).

Выскажем - в отношении системы (30) несколько общих соображений.

В курсе линейной алгебры доказывается критерий совместности системы (30) — теорема Кронекера — Капелли. Согласно этой теореме (см. [6]) система (1) совместна тогда и только тогда, когда ранги матрицы $A = (a_{ij})$ системы (1) и расширенной матрицы (получаемой присоединением к A столбца свободных членов) совпадают.

Пусть $r = n$; тогда решение системы (30) единственно и может быть найдено, например, по формулам Крамера или по методу Гаусса. Если значения x_j^0 ($j = 1, \dots, n$) всех найденных неизвестных неотрицательны, то найденное решение $X^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и является оптимальным (других решений нет). Если же среди x_j^0 имеется хотя бы одно отрицательное, то задача решения не имеет. Следовательно, интерес представляет случай $r < n$. В этом случае, как известно из курса линейной алгебры, r неизвестных (их называют *базисными*) линейно выражаются через остальные $k = n - r$ неизвестных (их называют *свободными*). Для удобства записи неизвестные всегда можно перенумеровать так, чтобы свободными были x_1, x_2, \dots, x_k , а базисными — $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+r}$ ($k + r = n$). Итак, от системы (30) мы переходим к эквивалентной ей системе

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k, \\ x_{k+2} &= \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k, \\ &\vdots \\ x_{k+r} &= \beta_r + \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r2}x_2 + \dots + \alpha_{rk}x_k. \end{aligned} \quad (34)$$

Вновь повторим: эта система определяет одно из допустимых базисных решений системы (30), а именно, $X = (0, \dots, 0, \beta_1, \dots, \beta_r)$, или, иначе, $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$; $x_{k+i} = \beta_i$ ($i = 1, \dots, r$).

Естественно теперь и форму $F(X)$ выразить только через свободные неизвестные, заменив в (32) базисные переменные по формулам (34). В результате форма примет вид

$$F(X) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_k x_k, \quad (35)$$

где $\gamma_0, \dots, \gamma_k$ — некоторые коэффициенты.

Рассматриваемая нами задача линейного программирования требует учета лишь допустимых (неотрицательных) значений переменных. Поэтому должны выполняться неравенства $x_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$), или, в более подробной записи,

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_k \geq 0, \\ \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1k}x_k &\geq 0, \\ . & \\ \beta_r + \alpha_{r1}x_1 + \dots + \alpha_{rk}x_k &\geq 0. \end{aligned} \tag{36}$$

$$\beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1k}x_k \geq 0, \quad (36)$$

• • • • •

$$\beta_r + \alpha_{r1}x_1 + \dots + \alpha_{rk}x_k \geq 0.$$

Таким образом, отправляясь от системы (30) линейных равенств относительно n неизвестных, приходим к системе n линейных неравенств относительно k неизвестных. В итоге возникает следующая математическая задача.

Дана система (36) из n линейных неравенств относительно k неизвестных x_1, \dots, x_k и линейная форма (35) относительно

тех же неизвестных. Среди всех решений (36) требуется найти такие, которые сообщают форме (35) наименьшее значение.

Остается вспомнить, что возникшая задача является также задачей линейного программирования, но в стандартной форме (все ограничения — неравенства). Итак, от задачи линейного программирования в канонической форме можно перейти к ее заданию в стандартной форме, выразив базисные переменные (включая минимизируемую форму) через свободные. От стандартной формы задания можно перейти к канонической путем введения дополнительных переменных так, как это указано выше (см. с. 113).

Возникают две возможности для геометрической интерпретации задачи линейного программирования. Можно оставаться в n -мерном пространстве $R^{(n)}$ переменных x_1, x_2, \dots, x_n либо перейти в k -мерное пространство $R^{(k)}$ ($k < n$) свободных переменных x_1, x_2, \dots, x_k .

Для этой второй интерпретации — все готово. Действительно, уже известно, что каждое из неравенств (36) определяет в $R^{(k)}$ некоторое полупространство, а совокупность всех неравенств — выпуклый многогранник (или выпуклую многогранную область) Q (см. с. 117). Первые k неравенств системы (36) указывают на то, что многогранник лежит в положительном ортанте.

Далее рассматривают всевозможные гиперплоскости $\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_n x_n = C$ равных значений формы $F(X)$, пересекающие многогранник Q допустимых решений. При этом выделяют те точки, которые отвечают наименьшему значению C . Далее доказано (стр. 119), что среди таких точек всегда найдется по крайней мере одна *вершина* (точное определение см. ниже) многогранника Q .

Перейдем теперь к геометрической интерпретации задачи линейного программирования в пространстве $R^{(n)}$.

Пусть, например, $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ и $X^{(2)} = (x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$ — два каких-либо допустимых решения системы ограничений (1). Это значит, что при подстановке этих решений в систему (1) возникнут два тождества. Запишем их в матричном виде:

$$AX^{(1)} = B, \quad AX^{(2)} = B. \quad (37)$$

Составим линейную комбинацию

$$X = (1 - \lambda) X^{(1)} + \lambda X^{(2)} \quad (38)$$

этих решений с коэффициентами $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$ при произвольном значении λ между нулем и единицей ($0 \leq \lambda \leq 1$). Такую линейную комбинацию называют *выпуклой*.

Если сравним (38) с формулой (19) для радиус-вектора r произвольной точки отрезка, концы которого определены векторами r_1 и r_2 , то обнаружим их полное совпадение. И это не случайно: каждое из решений $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ — это n -мерные вектор-столбцы, а конец вектора X пробегает (при $0 \leq \lambda \leq 1$) весь отрезок, соединяющий $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$.

Подстановкой в (30) убедимся, что X также является решением этой системы:

$$AX = A(\lambda X^{(2)} + (1 - \lambda)X^{(1)}) = \lambda AX^{(2)} + (1 - \lambda)AX^{(1)}.$$

Но в силу (37)

$$AX = \lambda B + (1 - \lambda)B = B.$$

К тому же X — решение допустимое ($X \geq 0$), так как для каждой из координат справедливо $x_i = \lambda x_i^{(2)} + (1 - \lambda)x_i^{(1)} \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) в силу того, что $x_i^{(1)} \geq 0$, $x_i^{(2)} \geq 0$, $\lambda > 0$, $1 - \lambda \geq 0$. Тем самым доказано, что множество V всех допустимых решений задачи линейного программирования в пространстве R^n выпукло.

6.6. Угловые точки и выпуклые комбинации

Вектор X , принадлежащий выпуклому множеству V , называют *крайней или угловой точкой* или *вершиной* V , если для любых векторов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ из V при $0 \leq \lambda \leq 1$ из того, что $X = (1 - \lambda)X^{(2)} + \lambda X^{(1)}$, следует, что $X = X^{(1)} = X^{(2)}$. Иначе, X — крайняя (угловая) точка множества V , если X нельзя представить в виде выпуклой комбинации каких-либо двух других точек из V , от нее отличных.

Геометрически это означает, что крайняя точка не может лежать внутри какого-либо отрезка, принадлежащего множеству V .

Крайними точками отрезка являются его концы, треугольника — его вершины, пирамиды — точки пересечения ребер. Каждая точка границы круговой области является крайней. Заметим, что область, не являющаяся замкнутой (например, внутренность круга без границы), может не иметь крайних точек.

Перенесем рассмотренное нами определение выпуклой комбинации двух векторов (точек) на общий случай. Вектор X из $R^{(n)}$ называют *выпуклой комбинацией* векторов $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$, если его можно представить в виде линейной комбинации

$$X = \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \dots + \lambda_l X^{(l)} \quad (39)$$

с неотрицательными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, дающими

в сумме единиц:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Так, например, линейная комбинация

$$\frac{1}{4} X^{(1)} + \frac{2}{3} X^{(2)} + \frac{1}{12} X^{(3)} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = 1 \right)$$

является выпуклой. В то же время не является выпуклой комбинация

$$\frac{1}{4} X^{(1)} + \frac{2}{3} X^{(2)} + \frac{1}{6} X^{(3)} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \neq 1 \right),$$

а также

$$\frac{1}{3} X^{(1)} + X^{(2)} - \frac{1}{3} X^{(3)} \left(\lambda_3 = -\frac{1}{3} < 0 \right).$$

Зададим в $R^{(n)}$ векторы $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ и рассмотрим всевозможные их выпуклые комбинации. Множество всех таких векторов (39) называют *выпуклой оболочкой* заданных векторов $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$.

Так, например, выпуклой оболочкой двух векторов является отрезок $X = (1 - \lambda) X^{(1)} + \lambda X^{(2)}$; выпуклой оболочкой трех векторов (не принадлежащих одному отрезку) — треугольник; выпуклой оболочкой четырех, не лежащих в одной плоскости (некомпланарных) векторов, — тетраэдр (см. рис. 18).

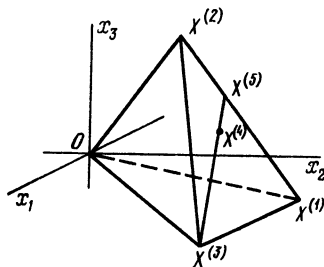


Рис. 18

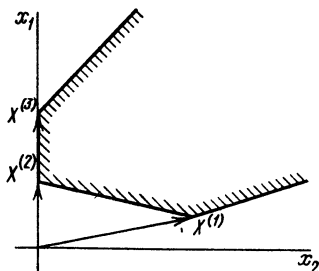


Рис. 19

В общем случае выпуклую оболочку конечного числа векторов $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ называют *выпуклым многогранником* (если она ограниченная) или *выпуклой многогранной областью* (если она неограниченная) (рис. 19). Так, например, выпуклой оболочкой векторов $X^{(1)} = (1, 0, 0)$, $X^{(2)} = (0, 1, 0)$, $X^{(3)} = (0, 0, 1)$, $X^0 = (0, 0, 0)$ оказывается тетраэдр с вершинами в этих точках.

Его можно задать также линейными неравенствами $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

Эта возможность неслучайна. Немецкий математик Герман Вейль доказал, что оба определения выпуклого многогранника (как непустого пересечения конечного числа полупространств или как выпуклой оболочки конечного числа векторов) эквивалентны.

Можно проверить, что выпуклая оболочка сама по себе является выпуклым телом и что каждое выпуклое тело совпадает со своей выпуклой оболочкой. В приложении к выпуклому многограннику это означает, что каждая его точка X является некоторой выпуклой комбинацией угловых точек $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$ и любая выпуклая комбинация угловых точек определяет некоторую точку многогранника.

Короче говоря, выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой всех своих крайних точек:

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i X^{(i)}, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Так, например, точка $X^{(4)}$ (рис. 18) принадлежит отрезку, определенному векторами $X^{(3)}$, $X^{(5)}$, и поэтому $X^{(4)} = \lambda X^{(3)} + (1 - \lambda) X^{(5)}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$). По аналогичной причине $X^{(5)} = \mu X^{(1)} + (1 - \mu) X^{(2)}$ ($0 \leq \mu \leq 1$). Следовательно,

$$X^{(4)} = \lambda X^{(3)} + (1 - \lambda) [\mu X^{(1)} + (1 - \mu) X^{(2)}] = \lambda_1 X^{(1)} + \lambda_2 X^{(2)} + \lambda_3 X^{(3)},$$

где $\lambda_1 = \lambda$; $\lambda_2 = (1 - \lambda)\mu$; $\lambda_3 = (1 - \lambda)(1 - \mu)$ — неотрицательны и

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda + (1 - \lambda)\mu + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 1.$$

Последнее означает, что $X^{(4)}$ (произвольная точка треугольной грани) является выпуклой комбинацией угловых точек $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$.

Рассмотрим в $R^{(n)}$ $n + 1$ точек $X^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ ($j = 1, \dots, n + 1$). Говорят, что эти точки находятся в *общем положении*, если определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n+1} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Выпуклую оболочку $n + 1$ точек в n -мерном пространстве, находящихся в общем положении, называют n -мерным симплексом. Так, в частности, нульмерным симплексом является точка, одномерным — отрезок, двумерным — треугольник, трехмерным — тетраэдр.

В определенном смысле n -мерный симплекс является простейшим многогранником в $R^{(n)}$. Выпуклым многогранником V (хотя, вообще говоря, не симплексом) является совокупность точек $R^{(n)}$ допустимых решений задачи линейного программирования. В связи с этими обстоятельствами один из основных методов поиска оптимального значения линейной формы на множестве V получил наименование *симплекс-метода* (см. с. 122).

6.7. Угловые точки и допустимые решения

Почему же угловые точки выпуклого многогранника заслужили столь пристальное внимание? Ответ заключен в следующем весьма важном факте (было обещано его доказать).

Всякая линейная форма $F(X) = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n$, значения которой рассматриваются в точках некоторого выпуклого многогранника Q , достигает своего наименьшего (наибольшего) значения в одной из его угловых точек. Если $F(X)$ принимает наименьшее (наибольшее) значение более, чем в одной угловой точке, то она принимает то же значение в каждой точке, являющейся их выпуклой комбинацией.

В самом деле, по условию значения формы $F(X)$ рассматриваются в точках многогранника Q . Обозначим через $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ его угловые точки (по определению выпуклого многогранника их конечное число). Допустим, что наименьшее значение $F(X)$ достигается в некоторой точке X^0 многогранника Q ; иными словами, $F(X^0) = \min F(X) = F^*$. Значит, для любой иной точки X из Q справедливо неравенство $F(X) \geq F(X^0)$. Если X^0 — одна из угловых точек, то первая часть утверждения уже доказана. Предположим, что X^0 — не угловая точка. Но тогда X^0 является выпуклой комбинацией угловых точек:

$$X^0 = \lambda_1 X^{(1)} + \dots + \lambda_m X^{(m)},$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, m); \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1.$$

В силу свойств линейности формы $F(X)$ ее значение в точке X^0

$$\begin{aligned} F(X^0) &= F(\lambda_1 X^{(1)} + \dots + \lambda_m X^{(m)}) = F(\lambda_1 X^{(1)}) + \dots + F(\lambda_m X^{(m)}) = \\ &= \lambda_1 F(X^{(1)}) + \dots + \lambda_m F(X^{(m)}) \end{aligned} \quad (40)$$

оказывается выпуклой комбинацией значений в угловых точках. Проверяется этот факт непосредственным вычислением.

Выберем наименьшую из величин $F(X^{(1)}), \dots, F(X^{(m)})$; пусть это будет $F(X^{(k)})$. Тогда $F(X^{(i)}) \geq F(X^{(k)})$ ($i = 1, \dots, m$), и из (40) вытекает неравенство

$$F(X^0) \geq F(X^{(k)})(\lambda_1 + \dots + \lambda_m) = F(X^{(k)}).$$

Однако по предположению $F(X^0) \leq F(X)$ для любой точки X из Q , и, конечно, $F(X^0) \leq F(X^{(k)})$. Остается предположить равенство $F(X^0) = F(X^{(k)})$, т. е. что наименьшее значение достигается по крайней мере в угловой точке $X^{(k)}$. Этим первая часть утверждения доказана.

Перейдем к доказательству второй части. Пусть $F(X)$ достигает наименьшего значения F^* в каждой из угловых точек (нумерация несущественна) $X^{(1)}, \dots, X^{(l)}$. Составим их произвольную выпуклую комбинацию

$$X = \lambda_1 X^{(1)} + \dots + \lambda_l X^{(l)}; \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, l); \lambda_1 + \dots + \lambda_l = 1.$$

Тогда значение формы $F(X)$ в точке X оказывается также наименьшим:

$$F(X) = \lambda_1 F(X^{(1)}) + \dots + \lambda_l F(X^{(l)}) = \lambda_1 F^* + \dots + \lambda_l F^* = F^*.$$

Утверждение полностью доказано.

Мы приходим к выводу, что оптимальные значения формы $F(X)$ на многограннике Q допустимых решений системы ограничений (30) задачи линейного программирования следует искать среди значений в угловых точках Q .

Но как находить эти угловые точки? Возможно ли их выявить, опираясь лишь на рассмотрение системы (30)?

Ответ на поставленный вопрос положительный: угловые точки выявляются вместе с нахождением допустимых базисных решений системы (30). Более точный ответ дает следующее утверждение.

Каждое допустимое базисное решение системы ограничений (30) задачи линейного программирования (например, решение $x_1 = \dots = x_k = 0; x_{k+1} = \beta_1, \dots, x_{k+r} = \beta_r$, уравнений (34)) определяет единственную угловую точку $X_* = (0, \dots, 0, \beta_1, \dots, \beta_r)$ многогранника Q . Обратно, каждая угловая точка X_* многогранника Q определяет некоторое (вообще говоря, не единственное) допустимое базисное решение системы (30).

Это утверждение (доказательство см. в [17]) позволяет оценить верхнюю границу возможного числа угловых точек многогранника Q : угловых точек не больше, чем имеется в системе (30) допустимых базисных решений.

Будем считать, что ранг r системы (30) совпадает с числом m уравнений. В ином случае можно сохранить в системе только

r линейно независимых уравнений, а остальные отбросить. Ранее отмечено (см. с. 114), что для задач линейного программирования интересен случай $r < n$. В линейной алгебре доказано, что разрешить систему (30) относительно неизвестных (базисных) x_{k+1}, \dots, x_{k+r} и выразить их через свободные неизвестные x_1, \dots, x_k можно тогда и только тогда, когда в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,k+r} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2,k+r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rk} & a_{r,k+1} & \dots & a_{r,k+r} \end{pmatrix}$$

минор, образованный последними r столбцами (коэффициентами при базисных переменных), отличен от нуля.

Подобно этому выразить любые иные r базисных неизвестных $x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_r}$ через остальные — свободные неизвестные $x_{\sigma_{r+1}}, \dots, x_{\sigma_{r+k}}$ можно лишь тогда, когда минор матрицы A , составленный из столбцов коэффициентов, отвечающих этим базисным переменным, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{1\sigma_1} & a_{1\sigma_2} & \dots & a_{1\sigma_r} \\ a_{2\sigma_1} & a_{2\sigma_2} & \dots & a_{2\sigma_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r\sigma_1} & a_{r\sigma_2} & \dots & a_{r\sigma_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Легко подсчитать, что всех миноров порядка r в матрице A столько, сколько можно составить сочетаний из n столбцов по r , а именно:

$$C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}.$$

Следовательно, существует не более, чем C_n^r различных базисных решений (ведь не все миноры порядка r матрицы A отличны от нуля). Кроме того, не всякое базисное решение является допустимым. Поэтому угловых точек заведомо не больше, чем C_n^r . При $r = 5$, $n = 10$, $C_{10}^5 = 756$. О примерном числе угловых точек можно составить представление по таблице:

$m=r$	n	Угловые точки
5	10	$3 \cdot 10^2$
10	20	$2 \cdot 10^5$
20	40	10^{11}

Как видно, число угловых точек велико даже для относительно малых m и n . В практических задачах значения m и n могут достигать нескольких сотен. Поэтому поиск тех угловых точек, которые доставляют форме $F(X)$ оптимальное значение путем простого перебора, хотя и осуществим теоретически (ведь их конечное число!), практически является предприятием бесперспективным.

К счастью, существует хорошо организованный порядок перебора угловых точек. При этом порядке переход от одной угловой точки к следующей сопровождается уменьшением значения минимизируемой формы, и процесс поиска достаточно быстро (в среднем за m шагов, m — число линейно независимых ограничений) завершается. Такой порядок доставляет нам *симплекс-метод*. Опишем идею этого метода.

6.8. Симплекс-метод

Рассмотрим конкретную задачу линейного программирования, заданную в канонической форме: минимизировать (найти наименьшее значение) линейную форму

$$F(X) = 3 - x_4 + x_5, \quad (41)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_4 + 3x_5 - 7 &= 0, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 - 2 &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 - x_5 - 2 &= 0, \\ x_i &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, 5). \end{aligned} \quad (43)$$

Признак совместности (теорема Кронекера — Капелли) для системы (42) выполнен. Ее ранг равен трем, число базисных переменных также равно трем, число свободных переменных равно двум. Поэтому предложенную задачу можно решить геометрическим методом, рассматривая плоскость, определяемую двумя свободными переменными. В качестве свободных переменных можно выбрать, например, x_4 и x_5 . Мы, однако, откажемся от геометрического решения (читателю рекомендуем поступить иначе!) и найдем решение другим способом. С этой целью выразим в (42) базисные переменные x_1 , x_2 , x_3 через свободные переменные x_4 и x_5 :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - x_4 - x_5, \\ x_2 &= 7 - 2x_4 - 3x_5, \\ x_3 &= 2 + x_4 + 3x_5. \end{aligned} \quad (44)$$

Форма $F(X)$, как видно из (41), уже выражена через свободные переменные (в ином случае следовало бы это сделать, т. е. подставить в $F(X)$ вместо базисных неизвестных их выражения через свободные).

В силу ограничений (43) наименьшие допустимые значения свободных неизвестных — это значения, равные нулю: $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. При этом $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 2$. Тем самым получаем допустимое базисное решение системы (44): $X_0 = (2, 7, 2, 0, 0)$. Из (41) имеем соответствующее значение формы $F(X_0) = 3$.

Выбор именно нулевых значений свободных переменных, вообще говоря, ничем не оправдан. Проверим, нельзя ли добиться уменьшения значения формы $F(X)$ за счет увеличения значений x_4 и x_5 . Из выражения (41) видно, что поскольку неизвестная x_5 входит с положительным коэффициентом, то ее увеличение вызовет лишь увеличение формы. В то же время неизвестная x_4 входит в (41) с отрицательным коэффициентом, и потому ее увеличение сопровождается уменьшением формы $F(X)$. Однако для неограниченного возрастания x_4 может быть препятствие. Ведь при этом меняются значения базисных переменных x_1 , x_2 , x_3 . Может случиться так, что базисные переменные станут отрицательными, т. е. возникнут недопустимые решения. И действительно, из первого уравнения (44) следует, что переменная x_1 станет отрицательной при x_4 , большем двух (за свободной переменной x_5 по-прежнему сохраняем значение, равное нулю). Одновременно с этим из второго и третьего уравнений (44) получаем, что при изменении x_4 от нуля до двух неизвестная x_2 хотя и убывает, но остается положительной, а неизвестная x_3 возрастает. Следовательно, более целесообразно придать x_4 значение $x_4 = 2$ (вместо $x_4 = 0$). При этом окажется, что $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$, $x_5 = 0$. Тем самым возникло новое допустимое базисное решение $X_1 = (0, 3, 4, 2, 0)$, в котором роль свободных неизвестных играют x_1 и x_5 . Непосредственно подсчитываем, что $F(X_1) = 1$. Это, как и ожидалось, меньше, чем $F(X_0) = 3$.

Все же мы на этом не остановимся, а подсчитаем выражения новых базисных переменных x_2 , x_3 , x_4 и формы $F(X)$ через новый набор x_1 , x_5 свободных неизвестных. С этой целью выразим из первого уравнения (44) x_4 через x_1 и x_5 ; получим: $x_4 = 2 - x_1 - x_5$. Подставляя это выражение в остальные два уравнения (44), найдем

$$\begin{aligned} x_2 &= 3 + 2x_1 - x_5, \\ x_3 &= 4 - x_1 + 2x_5, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - x_1 - x_5, \\ F(X) &= 1 + x_1 + 2x_5. \end{aligned} \quad (46)$$

Проведем теперь рассуждения, аналогичные предыдущим, в отношении формы (46). Очевидно, что всякое увеличение свободных неизвестных x_1, x_5 по сравнению с нулевыми значениями вызовет лишь увеличение формы (46). Следовательно, решение X_1 уже является оптимальным и доставляет наименьшее значение форме $F(X_1) = 1 = \min F(X)$.

Рассмотрим еще одну задачу и найдем ее решение симплекс-методом.



6.9. Организация тренировочного процесса: на улице или в помещении?

Постановка рассматриваемой задачи носит чисто иллюстративный характер. Однако на том же пути могут быть построены математические модели и выданы рекомендации в ситуациях реальных, менее условных, чем разобранный ниже.

Итак, речь идет о распределении времени между тренировками на открытом воздухе и в спортивном зале в целях получения наибольшей общей эффективности. Предположим, что нам известны (в условных единицах):

- 1) средняя по различным видам спорта эффективность одного часа тренировки на воздухе и в помещении;
- 2) нагрузка, испытываемая спортсменом за один час тренировки определенного вида;
- 3) максимальные допустимые нагрузки для каждого вида тренировки.

Все данные сведены в табл. 9.

Обозначим через x_1 и x_2 неизвестные пока объемы (в часах) тренировок на воздухе и в помещении. При этом их общая

Таблица 9

Вид тренировки	Место тренировки		Максимальная допустимая нагрузка
	открытый воздух	спортзал	
Нагрузка на один час тренировки			
Бег	2	3	19
Прыжки	2	1	13
Поднятие тяжестей	0	3	15
Лыжи	3	0	18
Средняя эффективность одного часа тренировки			
	7	5	

эффективность составит

$$\Phi(X) = 7x_1 + 5x_2. \quad (47)$$

Задача состоит в максимизации $\Phi(X)$ при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 19, \quad 2x_1 + x_2 \leq 13, \quad 3x_2 \leq 15, \quad 3x_1 \leq 18, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Возникновение этих ограничений совершенно естественно. Так, например, первое из них означает, что общая нагрузка спортсмена при x_1 -часовом беге на воздухе и x_2 -часовом — в помещении — не должна превышать допустимой. Аналогичный смысл имеют остальные ограничения (48).

Мы вновь пришли к задаче линейного программирования. Однако, в отличие от предыдущей, поставленная задача имеет не каноническую, а стандартную форму. В то же время описанный ранее метод рассуждений приспособлен для задачи линейного программирования в канонической форме. Учтем это и перейдем к требуемому виду, введя дополнительные неизвестные (см. с. 113):

$$\begin{aligned} x_3 &= 19 - 2x_1 - 3x_2, \quad x_4 = 13 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 &= 15 - 3x_2, \quad x_6 = 18 - 3x_1. \end{aligned} \quad (49)$$

Как требует метод, от максимизации $\Phi(X)$ перейдем к минимизации

$$\Phi_1(X) = -\Phi(X) = -7x_1 - 5x_2. \quad (50)$$

В результате возникла задача линейного программирования в канонической форме: среди неотрицательных решений $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, 5$, системы (49) найти те, которые сообщают линейной функции $\Phi_1(X)$ наименьшее значение.

Естественно на первом шаге в качестве свободных неизвестных принять x_1 и x_2 , так как все остальные неизвестные и $\Phi_1(X)$ через них уже выражены. Получим исходное допустимое базисное решение X_0 :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 19, \quad x_4 = 13, \quad x_5 = 15, \quad x_6 = 18, \quad (51)$$

при котором $\Phi_1(X_0) = 0$.

В выражение (50) обе свободные неизвестные входят с отрицательными коэффициентами. Поэтому увеличение любой из них вызовет уменьшение $\Phi_1(X)$. Начнем, для определенности, увеличивать x_2 (за x_1 сохраняем нулевое значение). Увеличивая x_2 , необходимо следить за тем, чтобы значения базисных переменных не стали отрицательными. При $x_2 = 5$ базисная неизвестная x_5 обращается в нуль, а остальные базисные переменные

еще остаются положительными. Дальнейшее увеличение x_2 невозможно.

Выберем теперь новую пару свободных неизвестных: x_1 и x_5 . Выразим через них x_2, x_3, x_4, x_6 и $\Phi_1(X)$. Получим:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5 - \frac{1}{3}x_5, & x_3 &= 4 - 2x_1 + x_5, \\ x_4 &= 8 - 2x_1 + \frac{1}{3}x_5, & x_6 &= 18 - 3x_1, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\Phi_1(X) = -25 - 7x_1 + \frac{5}{3}x_5. \quad (53)$$

Допустимым базисным решением X_1 , отвечающим такому выбору свободных неизвестных, является решение

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 18.$$

При этом решении значение формы уменьшилось и стало равным $\Phi_1(X_1) = -25$. Значение это можно вновь уменьшить за счет увеличения неизвестной x_1 , которая входит в (53) с отрицательным коэффициентом. С отрицательными коэффициентами x_1 входит также в выражения базисных неизвестных x_3, x_4, x_5 из (52). Поэтому увеличивать x_1 можно лишь до тех пор, пока какое-либо из этих неизвестных впервые не обратится в нуль. Это произойдет с x_3 при $x_1 = 2$ (переменные x_4, x_5 еще останутся положительными). Примем теперь за свободные неизвестные x_3 и x_5 и выразим через них остальные. Найдем, что

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5, & x_2 &= 5 - \frac{1}{3}x_5, \\ x_4 &= 4 - x_3 - \frac{2}{3}x_5, & x_6 &= 12 + \frac{3}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_5, \\ \Phi_1(X) &= -39 + \frac{7}{2}x_3 - \frac{11}{6}x_5. \end{aligned}$$

Выпишем соответствующее допустимое базисное решение X_2 :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 4;$$

значение формы вновь уменьшилось и стало равным $\Phi_1(X_2) = -39$.

Далее вновь проводим аналогичные рассуждения. Увеличиваем x_5 до значения $x_5 = 6$ (при котором $x_4 = 0$), принимаем в качестве нового набора свободных неизвестных x_3 и x_4 и выражаем через них остальные неизвестные:

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4, & x_2 &= 3 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ x_5 &= 6 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4, & x_6 &= 3 - \frac{3}{4}x_3 + \frac{9}{4}x_4, \\ \Phi_1(X) &= -50 + \frac{3}{4}x_3 + \frac{11}{4}x_4. \end{aligned}$$

Так как свободные неизвестные входят в последнее выражение для $\Phi_1(X)$ с положительными коэффициентами, то их увеличение приведет только к возрастанию формы. Следовательно,

допустимое базисное решение X_3 :

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 6, \quad x_6 = 3$$

уже является оптимальным. Оно доставляет форме наименьшее значение: $\min \Phi_1 = \Phi_1(X_3) = -50$.

Теперь следует вернуться к исходной задаче. В ее условии фигурировали лишь два неизвестных x_1 и x_2 (время тренировок на воздухе и в спортзале). Их оптимальные значения $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ содержатся в решении X_3 . При этом максимальное значение эффективности тренировок $\max \Phi(X) = 50$.

6.10. Некоторые общие суждения

В каждой из разобранных выше задач поиск оптимального решения начинался с некоторого исходного допустимого базисного решения X_0 системы ограничений задачи. Затем осуществлялся переход к другому допустимому базисному решению X_1 , доставлявшему минимизируемой форме меньшее значение, чем решение X_0 . От решения X_1 делался переход к решению X_2 и т. д. до получения желаемого результата. В этом приеме и состоит сущность симплекс-метода.

Вспомним, что каждое допустимое базисное решение определяет некоторую угловую точку выпуклого многогранника решений задачи. Поэтому можно сказать, что, отправляясь от некоторой исходной угловой точки, с помощью симплекс-метода мы выходим на другую угловую точку с меньшим значением минимизируемой формы $F(X)$ и т. д. Уже известно (см. с. 120), что если оптимальное значение $F(X)$ на многограннике решений существует, то оно заведомо достигается по крайней мере в одной из его угловых точек (т. е. при некотором допустимом базисном решении).

Реализацию симплекс-метода легко унифицируют и все вычисления проводят с помощью специального вида таблиц (*симплекс-таблиц*), работа с которыми не представляет труда. В каждую из таких таблиц заносят значения коэффициентов, с которыми базисные неизвестные и форма выражаются через свободные (т. е. определенное допустимое базисное решение). Тем самым таблица представляет собой более экономную запись системы ограничений и минимизируемой формы задачи. По четко установленным правилам работы (именно эти правила были использованы в рассмотренных примерах) от занесенного в таблице решения переходят к таблице с другим решением и т. д. Описание работы с таблицами читатель может найти почти в каждом руководстве по линейному програм-

мированию (например [6; 1]), и мы на этом внимание читателя не фиксируем.

К этому следует добавить, что математическое обеспечение современных ЭВМ располагает специальной программой для решения задач линейного программирования. Поэтому даже нет необходимости учиться решать такие задачи «вручную».

Читатель, по-видимому, заметил, что в разобранных нами задачах линейного программирования значения всех базисных неизвестных в каждом из допустимых базисных решений были отличными от нуля. Это свойство называют невырожденностью; а именно, задача линейного программирования называется невырожденной, если в каждом из ее допустимых базисных решений значения всех базисных неизвестных строго больше нуля.

В курсах линейного программирования доказывается следующая теорема о симплекс-методе. Предположим, что:

- 1) задача линейного программирования невырожденная;
- 2) она имеет по крайней мере одно допустимое базисное решение;
- 3) минимизируемая форма задачи ограничена снизу на множестве допустимых решений. (Это означает, что любое значение формы на множестве допустимых значений не меньше некоторого фиксированного числа.)

Тогда существует по крайней мере одно оптимальное базисное решение. Это решение может быть достигнуто симплекс-методом исходя из любого начального допустимого базисного решения.

Отметим, что при нарушении условия о невырожденности возможна ситуация, при которой оптимальное решение не достигается, так как не появляется никаких препятствий для перехода от одного допустимого базисного решения к другому. Возникает так называемое заикливание — явление возможное, но крайне редкое. В геометрическом плане заикливание означает, что процесс решения «застрял» на некоторой вершине многогранника Q решений. Этой вершине соответствует несколько различных допустимых базисных решений. Симплекс-метод при этом переводит от одного подобного решения к другому без сдвига на другую вершину многогранника Q и без изменения значения формы $F(X)$.

Чтобы начать работу по симплекс-методу, нужно иметь, как мы видели, исходное допустимое базисное решение X_0 . В простых случаях X_0 можно подобрать непосредственно (что мы и делали), изучая систему ограничений задачи. Однако при большом числе уравнений и неизвестных необходим иной

путь определения X_0 . Замечательную возможность для этого открывает тот же симплекс-метод. Более того, одновременно этот метод дает возможность установить, совместна ли система ограничений в области неотрицательных значений неизвестных, т. е. не является ли пустым многогранник Q допустимых решений.

Вот идея этого приема. Перепишем систему (30) ограничений задачи линейного программирования в виде

$$b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (54)$$

Без нарушения общности можно предположить, что все $b_i \geq 0$ (если $b_i < 0$, то умножаем i -е уравнение на -1). Введем (по числу уравнений) вспомогательные переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$, связав их с переменными x_1, x_2, \dots, x_n соотношениями

$$\xi_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, \dots, m). \quad (55)$$

Рассмотрим вспомогательную линейную форму относительно ξ_i :

$$\varphi(\xi) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_m. \quad (56)$$

Начнем минимизировать форму $\varphi(\xi)$ при ограничениях (54) и условиях неотрицательности неизвестных: $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \dots, \xi_m \geq 0$. Для решения этой, по существу, вспомогательной задачи мы можем сразу же применить симплекс-метод. Действительно, будем считать переменные x_j ($j = 1, \dots, n$) свободными, а ξ_i ($i = 1, \dots, m$) — базисными. При этом возникнет исходное допустимое базисное решение

$$\xi_i = b_i \quad (i = 1, \dots, m); \quad x_j = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

В силу неотрицательности ξ_i всегда $\varphi(\xi) \geq 0$, поэтому и $\min \varphi(\xi) \geq 0$. Но $\min \varphi(\xi) = 0$ достигается только при всех $\xi_i = 0$. Это означает, что существует система неотрицательных значений x_j^0 , которые обращают все ξ_i в нуль. Иными словами, значения x_j^0 ($j = 1, \dots, n$) удовлетворяют системе (54). Справедливо также и обратное утверждение: всякое допустимое решение $x_j^0 \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) системы (54) придает всем ξ_i из (55) значения, равные нулю, т. е. сообщают форме (56) минимальное значение $\min \varphi(\xi) = 0$.

Таким образом, для того чтобы система (54) была совместна в области допустимых решений (т. е. чтобы многогранник Q не был пуст), необходимо и достаточно, чтобы $\min \varphi(\xi) = 0$.

Заметим, что при $\min \varphi(\xi) > 0$ сразу можно заключить, что система (54) в области неотрицательных значений x_j ($j = 1, \dots, n$) несовместна, т. е. не имеет ни одного допустимого (а тем более допустимого базисного) решения.

Итак, для отыскания допустимого решения исходной задачи линейного программирования следует минимизировать вспомогательную форму $\varphi(\xi)$. От найденного допустимого решения можно теми же приемами симплекс-метода перейти к допустимому базисному решению, а затем уже перейти к решению исходной задачи (см., например, [6]).

7. ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ



7.1. «Метеор» – «Вымпел» (на футбольную тему)

Приближался к концу финальный матч за переход в более высокую лигу между командами «Метеор» и «Вымпел». Счет был ничейным, каждая команда имела в запасе по нападающему и защитнику, но могла провести только по одной замене. Тренер «Метеора» Всезнаев знал, что его нападающий переиграет запасного защитника «Вымпела», но проиграет запасному нападающему, в то время как запасной защитник «Метеора» удержит нападающего «Вымпела», но сыграет хуже защитника команды противника. Всезнаев составил следующую таблицу:

		«Вымпел»	
		B_1	B_2
«Метеор»	A_1	−1	3
	A_2	1	−1

в которой положительное число соответствует преимуществу «Метеора», а отрицательное – преимуществу «Вымпела» (в некоторых условных оценках). Тренер «Метеора» стал рассуждать следующим образом: «Если я выпущу нападающего (назовем это решение стратегией*) A_1) и тренер «Вымпела» это узнает, то он тоже выпустит нападающего (стратегия B_1), и мы проиграем с оценкой −1 (т. е. преимущество получит «Вымпел»), а если я выпущу защитника (стратегия A_2), то он выставит тоже защитника (стратегия B_2), и мы вновь проиграем с оценкой −1. Но тренер «Вымпела» Находчивый не знает, что я собираюсь делать. Поэтому он будет считать, что против

*) О понятии стратегии подробнее см. дальше – с. 135.

его нападающего я выпущу защитника, и он тем самым проиграет единицу, а против его защитника я выпущу своего нападающего, и мы получим преимущество в три единицы».

Всезнаев был немного знаком с теорией игр и решил выпустить защитника. Почему же он пришел к такому решению?

А потому, что рассуждал следующим образом: «Допустим, что p — вероятность (частота), с которой я выпускаю в ситуациях, аналогичных данной, нападающего. Тогда с вероятностью $1 - p$ я в этих же ситуациях выпускаю защитника. В таком случае, если «Вымпел» выставит нападающего, мы, в среднем, приобретем преимущество, равное

$$v_1(p) = -1 \cdot p + 1(1 - p) = 1 - 2p,$$

а если Находчивый выставит защитника, то мы, в среднем, приобретем преимущество, равное

$$v_2(p) = 3p - 1(1 - p) = 4p - 1.$$

Таким образом, Всезнаеву надо найти такое значение p из отрезка $[0, 1]$, при котором наименьшее значение из двух величин $v_1(p)$ и $v_2(p)$ оказывается наибольшим, т. е., как говорят, найти такое p , которое максимизирует минимум из двух величин: $v_1(p)$ и $v_2(p)$. Очевидно, что при увеличении p увеличивается $v_2(p)$, но зато уменьшается $v_1(p)$, и наоборот, уменьшение p повлечет за собой увеличение $v_1(p)$, но уменьшение $v_2(p)$. Всезнаев решил изобразить эти ситуации графически (рис. 20).

В качестве оси x он выбрал горизонтальную ось и предназначил ее для изображения величины p . От точки O он

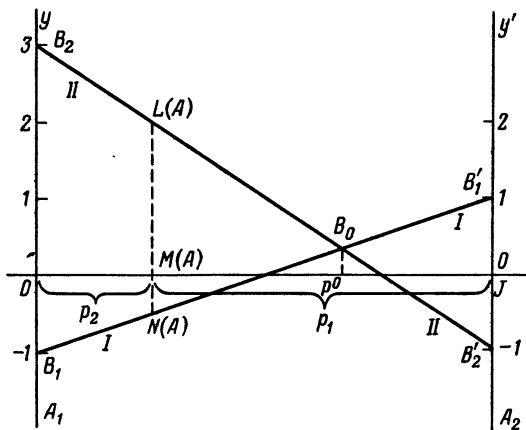


Рис. 20

отложил единичный отрезок $[0, J]$. Левый конец (точку O) он отождествил со стратегией A_1 , правый (точку J) — с A_2 . Всезнаев твердо знал, что придерживаться во всех случаях только одной из этих стратегий, так сказать, в чистом виде (*чистой стратегии*), нецелесообразно. В самом деле, если использовать A_1 с вероятностью $p(A_1) = 0$ (т. е. вовсе не использовать), и A_2 с вероятностью $p(A_2) = 1$, то тренер Находчивый всегда станет выпускать своего защитника. Вот почему Всезнаев обратился к так называемым *смешанным стратегиям* A (подробнее см. с. 141), в которых используются чистые стратегии A_1, A_2 с вероятностями $p(A_1) = p = p_1$ и $p(A_2) = p_2 = 1 - p$. Каждой смешанной стратегии (p_1, p_2) Всезнаев сопоставил точку M_A отрезка $[0, J]$, определив ее так, чтобы расстояние $|OM(A)| = p_1$, $|M(A)J| = p_2$. Затем через концы отрезка $[0, J]$ провел пару вертикальных осей Oy и Jy' , перпендикулярных оси Ox . Первую из этих осей предназначил для изображения выигрышей при использовании чистой стратегии A_1 , вторую — для выигрышей при A_2 . Если Находчивый будет придерживаться своей чистой стратегии B_1 , то выигрыш «Метеора» составит -1 (точка B_1); если он выберет стратегию B_2 , то выигрыш станет равным 3 (точка B_2). Это при условии, что Всезнаев остановился на стратегии A_1 . Если же он выбрал стратегию A_2 , то выиграет либо 1 (при стратегии B_1), либо -1 (при стратегии B_2). Эти выигрыши Всезнаев изобразил на оси Jy' точками B'_1 и B'_2 соответственно. Затем он прямой $B_1B'_1$ (I) соединил соответствующие точки B_1 и B'_1 . Прямая (I) проходит через точки B_1 с координатами $(0, 1)$ и B'_2 с координатами $(1, -1)$. Поэтому ее уравнением в системе координат Oxy служит $y = 2x - 1$. При любой смешанной стратегии $A = (p_1, p_2)$, примененной Всезнаевым, он получает выигрыш, отвечающий точке $N(A)$ на прямой $B_1B'_1$ (стратегия B_1 Находчивого), лежащей над точкой $M(A)$. Действительно, ордината $y(A)$ точки $N(A)$ на прямой (I) равна $y(A) = 2p_2 - 1 = 2(1 - p_1) - 1 = 1 - 2p_1 = v_1(p)$.

Подобным же способом он построил прямую $B_2B'_2$ (II) (стратегия B_2 Находчивого) и отметил на ней точку $L(A)$, ордината которой — выигрыш при использовании им смешанной стратегии A и при стратегии B_2 Находчивого. На возникшем чертеже величина $v_2(p)$ изображается точкой $L(A)$. Действительно, прямая (II) проходит через точки $B_2(0, 3)$ и $B'_2(0, -1)$ и определена уравнением $y = -4x + 3$. При $x = p_2$ ордината точки $L(A)$ равна $y(A) = -4p_2 + 3 = -4(1 - p_1) + 3 = 4p_1 - 1 = v_2(p)$.

Всезнаев искал оптимальную для себя стратегию $A_0 = (p_1^0, p_2^0)$, т. е. такую, при которой его минимальный выигрыш (при

наихудших для него действиях Находчивого) был возможно большим. Он сразу заметил, что ломаная $B_1B'_0B'_2$ соответствует значениям минимума из двух величин $v_1(p)$ и $v_2(p)$ для различных p из отрезка $[0, 1]$ и что максимум этих минимумов достигается в точке B_0 , т. е. в точке пересечения прямых (I) и (II).

Всезнаев нашел эту точку пересечения и соответствующее значение p^0 , решив уравнение

$$v_1(p) = v_2(p),$$

или

$$-1 \cdot p + 1(1 - p) = 3p - 1(1 - p).$$

Решением этого уравнения оказалось значение $p^0 = 1/3$. Таким образом, в среднем, из трех случаев только в одном надо выпускать нападающего и в двух — защитника. Именно поэтому тренер «Метеора» решил выпустить защитника. Заметим, что такое «максиминное» (новый термин!) значение из значений $v_1(p)$ и $v_2(p)$ называется *средним выигрышем* тренера «Метеора» (отрицательный выигрыш — это проигрыш, но в теории игр всегда говорят о выигрыше). В нашем случае этот выигрыш составит при $p^0 = 1/3$

$$v = v_1(1/3) = v_2(1/3) = 1/3.$$

А как же действовал Находчивый — тренер «Вымпела»? Он рассуждал аналогично (не забывайте, его выигрыш — отрицательные числа!): «Пусть с вероятностью $q = q_1$ я выпущу нападающего, а с вероятностью $1 - q = q_2$ — защитника. Если Всезнаев выпустит нападающего, то наш выигрыш составит

$$v_1(q) = -1 \cdot q + 3(1 - q) = -4q + 3 = 4q_2 - 1,$$

а если тренер «Метеора» выпустит на поле защитника, то наше преимущество оценится величиной

$$v_2(q) = 1 \cdot q - 1(1 - q) = 2q - 1 = -2q_2 + 1.$$

Затем Находчивый также построил чертеж (рис. 21), аналогичный чертежу Всезнаева. Каждой точке $T(B)$ единичного отрезка $[0, 1]$ он сопоставил свою смешанную стратегию $B = (q_1, q_2)$ так, чтобы $|OT(B)| = q_2$, $|T(B)J| = q_1$. Оси Oz и Oz' он предназначил для изображения выигрышей при использовании чистых стратегий B_1 и B_2 соответственно. Если при выборе стратегии B_1 Всезнаев выпустит нападающего (стратегия A_1), то выигрыш Находчивого составит -1 (точка A_1). Если же Всезнаев выпустит защитника, то выигрыш Находчивого составит 1 (точка A_2). При использовании только стратегии B_2 на оси Oz'

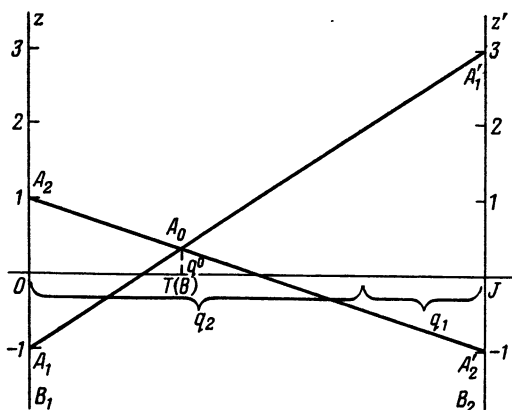


Рис. 21

возникают точки A'_1 (выигрыш, равный 3) и A'_2 (выигрыш -1). Находчивый подсчитал, что в системе координат xOz ординаты прямых $A_1A'_1$ и $A_2A'_2$ определяют соответственно $v_1(q)$ и $v_2(q)$. Цель Находчивого состоит в нахождении такого q из $[0, 1]$, которое минимизировало бы максимум двух величин $v_1(q)$ и $v_2(q)$, так как, чем меньше эта величина, тем выгоднее команде «Вымпел». Положительные числа — это выигрыш «Метеора», а отрицательные — «Вымпела». Посмотрев на рисунок, тренер «Вымпела» заметил, что ломаная $A_2A_0A'_1$ соответствует максимальным значениям из пары чисел $v_1(q)$ и $v_2(q)$ для различных q из отрезка $[0, 1]$, а точка A_0 — минимуму из этих максимумов, следовательно, при соответствующем значении q^0 достигаются так называемые «минимаксные» (также новый термин!) значения $v_1(q)$ и $v_2(q)$. Решая уравнение

$$v_1(q) = v_2(q),$$

или

$$-4q + 3 = 2q - 1,$$

он нашел, что $q^0 = 2/3$, т. е., в среднем, в двух случаях из трех целесообразно выпускать нападающего и только в одном случае — защитника. Средний выигрыш команды «Вымпел» в этом случае составит

$$v(q) = v_1(q) = v_2(q) = 1/3.$$

Следовательно, команда проиграла $1/3$, так как ее выигрыш — отрицательное число, а проигрыш — положительное. Нетрудно понять, что сколько в среднем выиграл «Метеор», ровно столько

же проиграл «Вымпел», и наоборот, т. е. сумма выигрышей двух этих команд равна нулю. Такие игры, в которых суммарный выигрыш равен 0, называются *играми с нулевой суммой*.

На примере действий тренера Всезнаева читатель познакомился с методикой принятия решения на основе рекомендаций математической *теории игр*. Знакомство окажется приятней и полезней, если его подкрепить дополнительными сведениями. К их изложению мы переходим.

7.2. Немного о матричных играх

Рассмотренная выше математическая модель спортивной ситуации служит примером так называемой *конечной игры двух лиц с нулевой суммой*. Игры двух лиц занимают центральное место во всей теории игр, и их рассмотрение позволяет понять и изучить основы общей теории и некоторые ее основные результаты.

Конкретизируем понятие конечной игры двух лиц с нулевой суммой. В игре сталкиваются интересы двух игроков I и II. Игра представляет собой свод правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Под *правилами игры* понимают совокупность условий, предопределяющих возможные действия каждой из сторон на каждом этапе игры, информацию о поведении противной стороны, плату (выигрыш) игрока после завершения любого этапа игры. Реализация игры состоит из последовательных «ходов», т. е. из выбора тех или иных действий из числа предусмотренных правилами. Если выбор образа действий принадлежит самому игроку, ход называют *личным*. В шахматной игре, например, реализуются только личные ходы. Ход называют случайным, если он выбирается некоторым устройством совершенно случайно (например, бросанием игрального кубика). *Стратегией* игрока называют совокупность рекомендаций, однозначно предопределяющих выбор действий при каждом личном ходе игрока и в любой ситуации, которая может возникнуть на любом этапе игры. Такие стратегии называют *чистыми*.

Пусть теперь игрок I имеет m чистых стратегий (ходов) $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, а игрок II — располагает n чистыми стратегиями β_1, \dots, β_n . Условимся считать, что если первый игрок выбирает i -ю стратегию α_i , а второй j -ю стратегию β_j , то первый игрок выигрывает a_{ij} условных единиц*), а второй выигрывает

*) Выигрыш (проигрыш) не всегда имеет точное количественное значение. В то же время почти всегда удается его как-то оценить, используя некоторую шкалу измерений. Так, например, выигрышу в шахматной игре можно приписать оценку 1, проигрышу — 1, ничьей 0.

соответственно $b_{ij} = -a_{ij}$. В силу того, что $a_{ij} + b_{ij} = 0$ для любых i и j , такие игры и называются *играми двух лиц с нулевой суммой*, или *антагонистическими играми*. В дальнейшем мы почти всегда будем говорить о выигрыше, ибо проигрыш — это отрицательный выигрыш.

Таким образом, множество различных исходов, т. е. выигрышей, в этой игре можно задать так называемой *платежной матрицей* (*матрицей выигрышей*)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая указывает на выигрыш игрока I. Иными словами, элемент a_{ij} матрицы A означает выигрыш первого игрока при использовании им стратегии α_i и при использовании вторым игроком стратегии β_j . Поэтому при таком задании игры цель игрока I — максимизировать свой выигрыш, а игрока II — минимизировать его (вновь напомним, что матрица A определяет выигрыш первого игрока и проигрыш второго).

Рассмотрим следующую игру:

		Игрок II			
		β_1	β_2	β_3	β_4
Игрок I	α_1	18	3	0	2
	α_2	0	3	8	20
	α_3	5	4	5	5
	α_4	16	4	2	25
	α_5	9	3	0	20

Рассмотрим эту игру с точки зрения игрока I. Если бы он знал, каким будет выбор игрока II, то он бы легко определил свой наилучший ответ, используя следующую таблицу:

Стратегия игрока II	β_1	β_2	β_3	β_4
Наилучший ответ игрока I	α_1	α_3 или α_4	α_2	α_4
Выигрыш игрока I	18	4	8	25

Но поскольку ответный выбор первого игрока зависит от выбора второго игрока, а этот выбор, естественно, неизвестен, то неясно, что же делать первому игроку. Следовательно,

первому игроку надо попытаться исследовать, к выбору какой конкретной стратегии приведет анализ ситуации его противником. Поэтому игрок I составляет аналогичную таблицу для выбора наилучшей стратегии игрока II:

Стратегия игрока I	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
Наилучший ответ игрока II	β_1		β_2	β_3	β_4
Выигрыш игрока II	0	0	4	2	0

Из второй таблицы видно, что если игрок I выбирает α_1 , то ему обеспечен 0, так же как и при выборе α_2 и α_5 ; при выборе α_3 ему обеспечено 4, а при выборе α_4 обеспечено 2. Назовем наименьшую сумму, которую он получает при выборе стратегии, *гарантированным уровнем этого выбора*. Наибольший из таких уровней называется *максимальным гарантированным уровнем*, или *наилучшим гарантированным результатом*. В данном примере, выбирая α_3 , первый игрок может гарантировать себе выигрыш, по меньшей мере равный 4, и никакая другая стратегия не может гарантировать выигрыш, равный 4.

Встав на точку зрения игрока II, мы заключаем из первой таблицы, что стратегии β_1 , β_2 , β_3 и β_4 обеспечивают соответственно следующие гарантированные уровни: +18, +4, +8 и +25. Таким образом, стратегия β_2 гарантирует максимальный уровень 4 (еще раз отметим, что чем меньше число, тем выгоднее игроку II, ибо его гарантированные выигрыши равны соответственно в этой ситуации -18, -4, -8 и -25).

Итак, есть полное основание ожидать, что игрок I будет применять стратегию α_3 , а игрок II — стратегию β_2 . Мы можем сказать, что набор стратегий α_3 и β_2 оптимален в том смысле, что ни одному из игроков не следует менять свой выбор, если другой также не изменит свой выбор.

В общем случае пару чистых стратегий α_{i_0} и β_{i_0} называют *оптимальной*, если выполняется условие

$$\max_i (\min_j a_{ij}) = \min_j (\max_i a_{ij}) = a_{i_0 j_0}$$

(ясно, что $\min_j \max_i a_{ij} = \max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j \min_i b_{ij}$).

К сожалению, далеко не всегда существует такая пара чистых стратегий; примером этому может служить описанная ранее ситуация с участием тренеров футбольных команд.

Вернемся теперь к общему случаю, когда игра задается некоторой платежной матрицей $A = (a_{ij})$. Если игрок I выбирает в некоторой партии стратегию α_1 , то наверняка его выигрыш не окажется меньшим минимального элемента из первой строки

этой матрицы, т. е. по меньшей мере он выиграет

$$\min_j a_{1j}.$$

При выборе стратегии α_i он получит по меньшей мере

$$\min_j a_{ij}.$$

Однако игрок I волею выбирать любую из своих стратегий. Он может поэтому выбрать α_i таким образом, чтобы гарантировать себе наименьший из возможных выигрышей, т. е.

$$\max_j \min_i a_{ij} = \underline{v}.$$

Эту величину называют *нижней ценой игры* или *максиминным выигрышем* (максимином). Соответствующую стратегию (она определяется строчкой, где лежит элемент \underline{v}) называют *максиминной*.

Подобно этому, платежи игроку II есть элементы той же матрицы A , взятые со знаком минус. Следовательно, коль скоро этот игрок использует стратегию β_j , он получает не менее, чем

$$\min_i (-a_{ij}).$$

Естественно, что он стремится максимизировать этот выигрыш, используя разные β_j , т. е. приходит к

$$\max_j \min_i (-a_{ij}).$$

Легко видеть, что для любой функции $f(x)$

$$\max_x [-f(x)] = -\min_x f(x) \quad \text{и} \quad \min_x [-f(x)] = -\max_x f(x).$$

В приложении к рассматриваемой нами ситуации последнее означает, что

$$\max_j \min_i (-a_{ij}) = \max_j [-\max_i a_{ij}] = -\min_j \max_i a_{ij}.$$

Значит, игрок II может выбрать свою стратегию так, чтобы заведомо получить не менее, чем

$$-\min_j \max_i a_{ij}.$$

При этом, конечно, игрок I получит самое большее

$$\min_i \max_j a_{ij} = \bar{v}.$$

Следовательно, хотя игрок I и может гарантировать себе выигрыш не меньший, чем

$$\max_i \min_j a_{ij} = \underline{v},$$

однако игрок II не допустит, чтобы выигрыш игрока I стал

большим, чем

$$\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число \bar{v} называют *верхней ценой игры* или *минимаксом*, а соответствующую стратегию (она определяется столбцом, где лежит число \bar{v}) — *минимаксной*.

Может оказаться (как в разобранный выше конкретном примере), что

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v,$$

т. е. нижняя цена игры v равна верхней \bar{v} . Это общее значение называют просто *ценой игры*, и равно оно некоторому элементу $a_{i_0 j_0}$ матрицы A . В этом случае игрок I понимает, что может выиграть по крайней мере v , а игрок II будет мешать ему получить больше чем v . Поэтому игрок I будет придерживаться стратегии α_{i_0} . В то же время игрок II может выиграть не менее, чем $-v$, коль скоро станет придерживаться стратегии β_{j_0} . Элемент $a_{i_0 j_0} = v$ платежной матрицы (в нашем примере $a_{32} = 4$) является одновременно минимальным в строке i_0 и максимальным — в столбце j_0 . Такой элемент называют *седловой точкой* матрицы A , игру называют *игрой с седловой точкой*, стратегии α_{i_0} и β_{j_0} — *оптимальными* для игроков I и II соответственно, а пару $(\alpha_{i_0}, \beta_{j_0})$ — *решением игры*. Мы приходим к следующему выводу.

Решение игры с седловой точкой является устойчивым, т. е. для любого игрока отклонение от его оптимальной стратегии не приводит к выгоде, если только противник по-прежнему станет придерживаться своей оптимальной стратегии.

Таким образом, оптимальная стратегия при многократном повторении игры с седловой точкой гарантирует игроку максимально возможный средний выигрыш. При этом предполагается, что противная сторона действует столь же разумно и осмыслительно, как и данный игрок.

Что больше — «максимин» или «минимакс»?

Футбольный мотив, с которого мы начали изучение игровых ситуаций, был связан с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Она не имеет седловой точки. Действительно, $\max_i \min_j a_{ij} = \max_i [\min_j a_{1j}; \min_j a_{2j}] = \max_i [-1; -1] = -1 = v$,

тогда как

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j [\max_i a_{i1}; \max_i a_{i2}] = \min [1; 3] = 1 = \bar{v}.$$

Следовательно, $\max_i \min_j a_{ij} \neq \min_j \max_i a_{ij}$.

Пусть функция $f(x; y)$ двух переменных определена для каждой пары целочисленных значений $x = 1, 2, \dots$ и $y = 1, 2, \dots$ так, что $f(i, j) = a_{ij}$. Докажем, что для любой матрицы $A = (a_{ij})$ справедливо неравенство

$$\max_i \min_j f(x, y) \leq \min_j \max_i f(x, y).$$

По определению минимума для любых фиксированных x и y

$$\min_y f(x, y) \leq f(x, y),$$

а по определению максимума

$$f(x, y) \leq \max_x f(x, y).$$

Следовательно,

$$\min_y f(x, y) \leq \max_x f(x, y).$$

Но левая часть у этого неравенства не зависит от y , поэтому

$$\min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y).$$

Однако правая часть последнего неравенства не зависит от x . Поэтому

$$\max_x \min_y f(x, y) \leq \min_y \max_x f(x, y).$$

Для завершения доказательства остается только вспомнить, что $f(x, y) = f(i, j) = a_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$).

В качестве следствия из доказанного получаем, что в игре, определенной любой матрицей A , нижняя цена игры $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$ не превышает верхней цены $\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$, т. е. $\underline{v} \leq \bar{v}$. Цена v игры лежит между \underline{v} и \bar{v} .

Можно также показать (мы этого не делаем), что необходимым и достаточным условием выполнения равенства

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

является наличие в матрице A седловой точки. Так, например, матрица

$$\begin{pmatrix} 20 & 9 & 30 \\ 31 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет седловую точку $a_{12} = 9$ — элемент, наименьший в первой строке и наибольший во втором столбце.

Две седловые точки $a_{11} = 7$ и $a_{13} = 7$ имеет матрица

$$\begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \begin{pmatrix} 7 & 10 & 7 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{pmatrix} 11 & 24 & 15 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

При игре с такой платежной матрицей игрок I должен придерживаться стратегии α_1 , тогда как игрок II может выбрать любую из стратегий β_1, β_3 .

Если игра не имеет седловой точки, то ни один из игроков не обладает единственной наиболее надежной чистой стратегией. В то же время игрок не имеет возможности определить стратегию противника, если последний, вместо того чтобы придерживаться единственной чистой стратегии, начнет использовать набор нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот. Такой набор называют смешанной стратегией. Таким образом, *смешанной стратегией* называют вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компонента x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) которого является вероятностью выбора игроком i -й стратегии α_i из совокупности $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ его чистых стратегий.

В игре между тренерами Всезнаевым и Находчивым седловой точки не оказалось. Вот почему и тот и другой решили использовать смешанные стратегии.

Остановимся несколько подробнее на понятии смешанной стратегии. Пусть x_1, x_2, \dots, x_m — вероятности, с которыми первый игрок может выбрать стратегии $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, а y_1, y_2, \dots, y_n — соответствующие вероятности выбора стратегий $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ вторым игроком. Очевидно, что

$$x_i \geq 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, m \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

$$y_j \geq 0 \quad \text{для } j = 1, \dots, n \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1.$$

В этом случае средний выигрыш первого игрока (он же проигрыш второго) определяется формулой (она определяет математическое ожидание выигрыша):

$$v(x, y) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i y_j.$$

Отметим, что здесь записано произведение матриц: матрица-строка $x = (x_1, \dots, x_m)$ умножается на матрицу A , а затем полученный результат вновь умножается на матрицу-столбец y из элементов y_1, \dots, y_n .

Создателю современной теории игр Дж. фон Нейману (1903—1957) принадлежит доказательство основного факта теории — *теоремы о минимаксе* (ее доказательство можно найти, например, в [17]).

Теорема фон Неймана о минимаксе утверждает, что существует по крайней мере одна пара векторов x_0 и y_0 , удовлетворяющая приведенным выше ограничениям и такая, что

$$\max_x \min_y v(x, y) = \min_y \max_x v(x, y) = v(x_0, y_0) \equiv v,$$

где v — цена игры.

В некоторых играх (шахматы, шашки, крестики-нолики и др.) каждый игрок, реализуя свой очередной ход, знает результаты всех предшествующих ходов обеих сторон. Из общей теории игр известно, что всякая игра такого типа, называемая *игрой с полной информацией*, имеет седловую точку и потому имеет решение в чистых стратегиях. При этом в среднем игра завершается выигрышем, равным цене игры v .

Чаще, однако, встречаются игровые ситуации с матрицами без седловых точек. В таких играх для достижения наибольшего среднего выигрыша игроки должны придерживаться своих максиминной и минимаксной стратегий. При этом игрок I гарантирует себе выигрыш, равный нижней цене игры \underline{v} . Если же этот игрок воспользуется подходящей смешанной стратегией, то сможет повысить свой выигрыш до цены игры \underline{v} . Практически при использовании смешанной стратегии перед каждой партией реализуют некоторую систему случайного поиска (например, датчик случайных чисел от 0 до 1 или игральный кубик), способную указать появление каждой из чистых стратегий с соответствующей ей (как компоненте смешанной стратегии) вероятностью. В очередной партии используют именно ту чистую стратегию, на которую выпал жребий.

В смешанных стратегиях для каждой игры с конечной матрицей A размерности $m \times n$ существует (и может быть найдена!) пара (x_0, y_0) оптимальных стратегий игры. Именно это утверждает основная теорема о минимаксе. Оптимальные стратегии обладают устойчивостью в том смысле, что если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не выгодно отступать от своей оптимальной стратегии.

Предположим, что для игры мы нашли решение — пару оптимальных стратегий $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$; $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$.

Те из чистых стратегий α_i (соответственно β_j), которым отвечают нулевые значения вероятностей $x_i^0 = 0$ ($y_j^0 = 0$), называют *пассивными*; остальные — *активными стратегиями*.

Убедимся, что коль скоро один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии x^0 , то его выигрыш не меняется, совпадает с ценой игры v и не зависит от того, какие действия предпринимает второй игрок, если только тот использует лишь свои активные чистые стратегии.

Действительно, пусть, для определенности, активными чистыми стратегиями являются $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ (для игрока I) и β_1, \dots, β_r (для игрока II); остальные — пассивными. Следовательно,

$$x_0 = (x_1^0, \dots, x_s^0, 0, \dots, 0); \quad x_i^0 > 0 \quad (i = 1, \dots, s),$$

$$y_0 = (y_1^0, \dots, y_r^0, 0, \dots, 0); \quad y_j > 0 \quad (j = 1, \dots, r).$$

Кроме того, $x_1^0 + \dots + x_s^0 = 1$; $y_1^0 + \dots + y_r^0 = 1$. Предположим, что игрок I пользуется своей оптимальной стратегией x_0 , а игрок II — любыми смешанными стратегиями, составленными только из активных чистых стратегий β_1, \dots, β_r . Если игрок I использует свою оптимальную стратегию x_0 , а игрок II — свою активную чистую стратегию β_j , то игрок I может получить выигрыш v_j , который, как следует из основной теоремы, может даже превзойти цену игры: $v_j \geq v$. Однако в действительности возможно лишь точное равенство: $v_j = v$. В самом деле, ведь в смешанной стратегии y_0 чистые стратегии β_1, \dots, β_r используются с вероятностями y_1^0, \dots, y_r^0 соответственно. Поэтому математическое ожидание выигрыша (т. е. средний выигрыш) составит

$$v_1 y_1^0 + v_2 y_2^0 + \dots + v_r y_r^0.$$

В то же время этот выигрыш должен равняться цене игры

$$v_1 y_1^0 + \dots + v_r y_r^0 = v; \quad y_1^0 + \dots + y_r^0 = 1,$$

откуда и следует, что ни одна из величин v_j не может превосходить цену игры v . Иначе вся сумма превзойдет v .

Скептически настроенный читатель может спросить, имеет ли введение смешанной стратегии какое-либо принципиальное значение? Что значит выбрать смешанную стратегию, и будет ли кто-либо выбирать ее в действительности? Что касается роли смешанной стратегии, то она зависит в значительной мере от субъективного восприятия понятия вероятности. Что же касается выбора «чистой» стратегии при посредстве смешанной, то этот путь эквивалентен проведению некоторого

вероятностного опыта. В случае с тренером «Вымпела» Находчивым ему следует, прежде чем осуществить замену, провести опыт с вероятностями исхода $1/3$ и $2/3$, например, бросить игральную кость. Если выпадет число, делящееся на три, т. е. 6 или 3, то ему надо выпускать нападающего, а в остальных случаях — защитника. Конечно, такая рекомендация может показаться наивной, но в действительности для рассматриваемой ситуации этот прием дает оптимальное поведение. К сожалению, стратегов часто оценивают по исходу принятого выбора, а не по его стратегической целесообразности в общей рискованной ситуации.



7.3. Задача о финишном рывке

Попробуем несколько обобщить ситуацию, изложенную выше, и рассмотреть антагонистические игры, в которых хотя бы один из противников имеет бесконечное множество чистых стратегий. Такие игры называются *бесконечными антагонистическими играми*. Их общая теория существенно сложнее теории конечных антагонистических (матричных) игр. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только одного примера.

Предварительно введем необходимые для дальнейшего понятия.

Допустим, что каждый игрок имеет бесконечное множество (континуум) чистых стратегий. Причем чистые стратегии игрока I представлены точками единичного отрезка $0 \leq \xi \leq 1$, а стратегии игрока II — точками единичного отрезка $0 \leq \eta \leq 1$. Иными словами, чистые стратегии игроков — это точки (числа), заключенные между нулем и единицей. Роль платежной матрицы (a_{ij}) играет

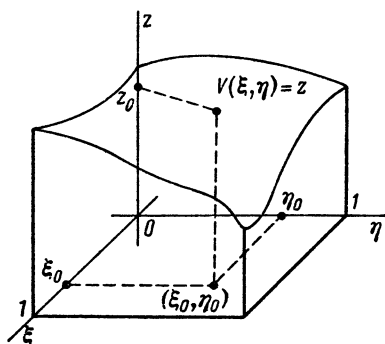


Рис. 22

в этом случае некоторая функция $V(\xi, \eta)$ двух аргументов ξ и η . Ее называют *функцией выигрыша* или *ядром игры*. Геометрическим образом функции выигрыша является некоторая поверхность, расположенная над единичным квадратом $K = \{0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq 1\}$ (рис. 22). При выборе первым игроком стратегии ξ_0 , а вторым — стратегии η_0 выигрыш первого становится

равным $V(\xi_0, \eta_0)$ — аппликате z_0 точки поверхности с абсциссой ξ_0 и ординатой η_0 .

Рассмотрение игры с функцией выигрыша проводится аналогично конечной игре. Сначала для каждого фиксированного значения ξ из отрезка $[0, 1]$ находят минимум функции $V(\xi, \eta)$ по всем η : $\min_{0 \leq \eta \leq 1} V(\xi, \eta)$. Затем отыскивают максимальное из полученных значений по всем ξ :

$$\max_{0 \leq \xi \leq 1} \min_{0 \leq \eta \leq 1} V(\xi, \eta) = \underline{v}.$$

Тем самым получают нижнюю цену игры (максимин) \underline{v} . Далее находят, подобно предыдущему, верхнюю цену игры (минимакс):

$$\bar{v} = \min_{0 \leq \eta \leq 1} \max_{0 \leq \xi \leq 1} V(\xi, \eta).$$

Уже известно (см. с. 140), что всегда выполнено неравенство $\underline{v} \leq \bar{v}$. Если верхняя цена игры равна нижней ($\underline{v} = \bar{v}$), то это означает, что существует такая пара (ξ_0, η_0) чисел, для которых

$$\min_{\eta} \max_{\xi} V(\xi, \eta) = \max_{\xi} \min_{\eta} V(\xi, \eta) = V(\xi_0, \eta_0).$$

В этом случае игра имеет решение в чистых стратегиях: первый игрок должен постоянно придерживаться своей стратегии $\xi = \xi_0$, а второй — своей стратегии $\eta = \eta_0$. Стратегии эти оптимальные. Первый игрок выиграет $V(\xi_0, \eta_0)$, а второй проиграет — $V(\xi_0, \eta_0)$. Соответствующая точка с координатами $(\xi_0, \eta_0, z_0 = V(\xi_0, \eta_0))$ называется *седловой точкой*. В ней одновременно достигаются минимум по переменной η и максимум по переменной ξ (рис. 23). Ни одному из игроков нет смысла отклоняться от своей оптимальной стратегии: отклонение может привести лишь к уменьшению выигрыша (при условии, что противная сторона продолжает придерживаться своей оптимальной стратегией).

В том случае, когда верхняя цена игры больше нижней, то решения в чистых стратегиях не существует. Решение следует искать только в смешанных стратегиях. Это означает, что стра-

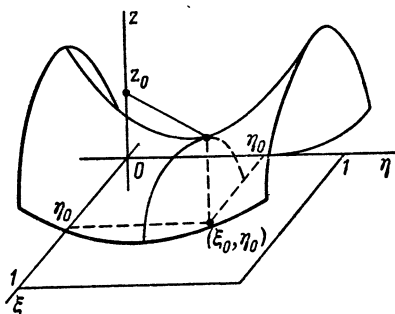


Рис. 23

тегии ξ и η считаются в рассматриваемой ситуации случайными величинами и задаются своими функциями распределения вероятностей $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$. Значение $P_1(\xi_1)$ функции при фиксированном $\xi = \xi_1$ дает вероятность того, что выбранное случайно на отрезке $[0, 1]$ число ξ окажется меньшим, чем ξ_1 . Аналогичный смысл имеет функция $P_2(\eta)$: ее значение $P_2(\eta)$ при η_1 равно вероятности того, что для выбранного случайно на отрезке $[0, 1]$ числа η выполняется неравенство $\eta < \eta_1$.

В теории бесконечных игр доказано, что при условии непрерывности функции выигрыша $V(\xi, \eta)$ всегда существуют оптимальные стратегии (т. е. решение игры).

Займемся теперь конкретной задачей. Два скорохода бегут на коньках стайерскую дистанцию в 10 000 метров. Каждый из них знает, что может решиться не более, чем на один рывок (спурт). При этом естественно считать, что любой из конькобежцев замечает рывок своего соперника.

Введем в рассмотрение функцию $P_1(\xi)$, определенную на единичном отрезке $0 \leq \xi \leq 1$. Предположим, что при каждом ξ значение $P_1(\xi)$ определяет вероятность успеха — выигрыша дистанции конькобежцем — при условии, что он спуртовал на расстоянии, удаленном от места старта не более, чем на ξ . Здесь мы «пронормировали» дистанцию, положив, удобства ради, ее длину, равной единице (значение $\xi = 0$ отвечает началу, а $\xi = 1$ — концу дистанции). Таким образом, $P_1(\xi)$ — это функция распределения вероятностей успеха (победы) первого конькобежца на дистанции забега. Естественно предположить, что функция успеха $P_1(\xi)$ непрерывна для всех значений ξ из $[0, 1]$ и монотонно возрастает от значения $P_1(0) = 0$ до значения $P_1(1) = 1$. Потребуем, чтобы аналогичным условиям удовлетворяла функция $P_2(\eta)$, представляющая собой распределение вероятностей успеха второго конькобежца на той же дистанции.

Условимся считать (это тоже своего рода нормирование), что если игрок I обгоняет второго, то его выигрыш (успех) равен +1; если они финишируют одновременно, то выигрыш игрока I равен 0; в случае, когда финиширует первым игрок II, игрок I выигрывает -1.

Составим теперь функцию выигрыша $V(\xi, \eta)$ игрока. Если $\xi < \eta$, т. е. если игрок I (конькобежец) спуртует раньше игрока II, пройдя расстояние ξ , то вероятность его отрыва и выигрыша составит $P_1(\xi)$. Понятно, что если игрок II не отстанет от игрока I, то в результате уже своего спурта игрок II оторвется и выиграет с вероятностью $P_2(\eta)$, где $\eta = \xi$.

Аналогичные рассуждения можно провести для игрока II. А именно, если он попытается уйти вперед после пройденного расстояния $\eta < \xi$, то его успех достигается с вероятностью $P_2(\eta)$, а его неудача — с вероятностью $1 - P_2(\eta)$.

Итак, выигрыш первого игрока в условных оценках составит

$$\begin{aligned} L(\xi, \eta) &= 1 \cdot P_1(\xi) + (-1)[1 - P_1(\xi)], \text{ если } \xi < \eta; \\ M(\xi, \eta) &= (-1)P_2(\eta) + 1 \cdot [1 - P_2(\eta)], \text{ если } \xi > \eta; \\ \Phi(\xi) &= 1 \cdot P_1(\xi)[1 - P_2(\xi)] + \\ &\quad + (-1)[1 - P_1(\xi)]P_2(\xi), \text{ если } \xi = \eta. \end{aligned}$$

Игры, в которых функция выигрыша игрока II (ядро игры) определяется соотношениями

$$V(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) & \text{при } \xi < \eta, \\ \Phi(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases}$$

где функции $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ определены и непрерывны в квадрате $0 \leq \xi \leq 1$; $0 \leq \eta \leq 1$, а функция $\Phi(\xi)$ непрерывна на единичном отрезке $0 \leq \xi \leq 1$, называются *играми с выбором момента времени*. Игры такого типа часто встречаются в различных областях человеческой деятельности. Они не всегда обладают оптимальными стратегиями.

В нашем конкретном случае функция выигрыша принимает после очевидных упрощений вид

$$V(\xi, \eta) = \begin{cases} 2P_1(\xi) - 1 & \text{при } \xi < \eta, \\ P_1(\xi) - P_2(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ 1 - 2P_2(\eta) & \text{при } \xi > \eta. \end{cases}$$

Рассмотрение $V(\xi, \eta)$ как функции от η при фиксированных значениях ξ наводит на мысль, что игрок I будет иметь оптимальную чистую стратегию, когда постоянная часть выигрыша, т. е. $2P_1(\xi) - 1$ (ведь ξ — фиксировано), равна наименьшему значению выражения $1 - 2P_2(\eta)$ для $\eta < \xi$. Это требует выполнения равенства

$$2P_1(\xi) - 1 = 1 - 2P_2(\xi).$$

Так как правая часть этого равенства убывает непрерывно от $+1$ до -1 , когда ξ пробегает отрезок $[0, 1]$, а левая часть возрастает непрерывно от -1 до $+1$, то существует и может быть найдено хотя бы одно решение ξ_0 этого уравнения. Отметим, что если обе функции $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$ строго монотонны, то такое решение ξ_0 — единственное.

Допустим в качестве примера, что в нашей задаче $P_1(\xi) = \xi$, а $P_2(\eta) = \eta^2$. Тогда функция выигрыша приобретает вид

$$V(\xi, \eta) = \begin{cases} 2\xi - 1 & \text{при } \xi < \eta; \\ \xi - \eta^2 & \text{при } \xi = \eta; \\ 1 - 2\eta^2 & \text{при } \xi > \eta. \end{cases}$$

При различных фиксированных значениях ξ можно изобразить линии пересечения поверхности $V(\xi, \eta)$ плоскостями $\xi = \text{const}$ (см. рис. 24).

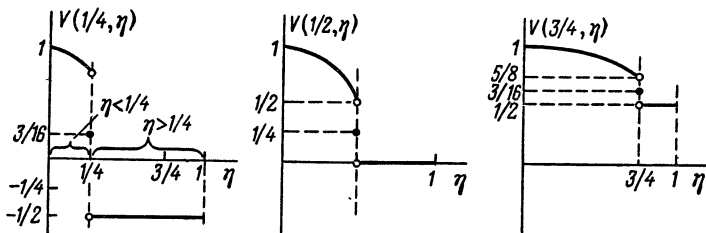


Рис. 24

Так, в частности, при $\xi = 1/4$ (т. е. в сечении плоскостью $\xi = 1/4$) получаем

$$V(1/4; \eta) = \begin{cases} 2^{1/4} - 1 = -1/2 & \text{при } \eta > 1/4 \text{ (прямая, параллельная} \\ & \text{оси } O\eta); \\ 1/4 - 1/16 = 3/16 & \text{при } \eta = 1/4 \text{ (изолированная} \\ & \text{точка);} \\ 1 - 2\eta^2 & \text{при } \eta < 1/4 \text{ (дуга параболы).} \end{cases}$$

Решим в нашей конкретной задаче о скороходах уравнение

$$2P_1(\xi) - 1 = 1 - 2P_2(\xi),$$

где $P_1(\xi) = \xi$, а $P_2(\xi) = \xi^2$. Получаем

$$2\xi - 1 = 1 - 2\xi^2,$$

или

$$2\xi^2 - 2\xi - 2 = 0,$$

откуда находим $\xi_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (другой корень квадратного уравнения не подходит, так как не принадлежит отрезку $[0, 1]$).

Таким образом, игрок I должен делать рывок, пройдя

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot 10\,000 \approx 6\,050 \text{ м,}$$

и его ожидаемый выигрыш будет равен $2P(\xi_0) - 1 = \sqrt{5} - 2 = 0,21$.

Итак, при выбранных нами функциях распределения вероятностей $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$ у первого конькобежца несколько больше шансов выиграть дистанцию, чем у второго.

В общем случае эту задачу можно решить при тех или иных функциях распределения вероятностей успеха $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$, которые могут быть получены эмпирическим путем или методом экспертного опроса тренеров и самих конькобежцев.

7.4. Поговорим об «игре с природой»

В задачах теории игр участники принимают решения в условиях неопределенности в том смысле, что им ничего не известно об ответных действиях противника. Поэтому соперник всегда предполагается разумным и, образно говоря, злонамеренным. Однако очень часто неопределенность связана не с сознательным противодействием противника, а с нашей недостаточной осведомленностью об условиях, в которых мы вынуждены принимать решение. Во всех таких случаях условия игры и выигрыш зависят не от сознательно противодействующего нам противника, а от объективной действительности, которую принято называть *природой*. Соответствующие ситуации называются *играми с природой*. Теория игр с природой называется еще *теорией статистических решений*. При этом природа в теории статистических решений рассматривается в качестве незаинтересованной субстанции, поведение которой неизвестно и не содержит элемента сознательного противодействия.

Пусть мы имеем m чистых стратегий $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, а природа может находиться в одном из n состояний β_1, \dots, β_n . Тогда наш выигрыш, как и раньше, можно задать матрицей выигрышей A с элементами a_{ij} , где $i = 1, \dots, m$, а $j = 1, \dots, n$.

С первого взгляда может показаться, что поставленная задача проще игровой, ибо она не содержит противодействия. В самом деле, принимающему решение в игре с природой легче в том отношении, что он, скорее всего, получит в этой игре больший выигрыш, чем в игре против

сознательного противника. Однако ему труднее принять обоснованное решение, которое даст хороший выигрыш. Дело в том, что в конфликтной ситуации предположение о диаметрально противоположных интересах (антагонизме) игроков в некотором смысле снимает неопределенность о возможных разумных действиях противника. В игре же с природой неопределенность проявляется гораздо значительней, так как нельзя говорить о «разумности поведения природы».



7.5. Как смазать лыжи

Рассмотрим следующую задачу. Тренерский коллектив лыжной команды обсуждает, как всегда, вариант мази для лыж. Тренеры знают, что во время лыжной гонки погода (природа) может находиться в трех состояниях β_1 , β_2 и β_3 , а в их распоряжении имеется четыре типа лыжной мази α_1 , α_2 , α_3 и α_4 . Матрица A вероятностей удачного прохождения трассы гонки спортсменами известна:

$$\begin{matrix} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & 0,20 & 0,30 & 0,15 \\ \alpha_2 & 0,75 & 0,20 & 0,35 \\ \alpha_3 & 0,25 & 0,80 & 0,25 \\ \alpha_4 & 0,85 & 0,05 & 0,45 \end{matrix} = A.$$

Другими словами, известно, что если будет использована мазь α_3 и природа будет находиться в состоянии β_2 , то с вероятностью 0,8 эта мазь позволит пройти спортсмену дистанцию в полную силу. Аналогичный смысл имеют остальные элементы матрицы A . Какую же мазь следует выбрать?

Проще всего поставленная задача была бы решена тренерским коллективом, если бы были известны вероятности p_1 , p_2 , p_3 , с которыми погода может находиться в каждом из трех возможных состояний. В самом деле, для этого достаточно найти математическое ожидание выигрыша для каждой мази и выбрать тот вариант, при котором средний ожидаемый выигрыш наибольший. Если бы в данном примере вероятность первого состояния природы p_1 была равна 0,3, второго состояния — $p_2 = 0,5$, а третьего — $p_3 = 0,2$, то ожидаемые средние выигрыши были бы равны соответственно:

$$m_{\alpha_1} = 0,3 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,15 = 0,24,$$

$$m_{\alpha_2} = 0,3 \cdot 0,75 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,35 = 0,395,$$

$$m_{\alpha_3} = 0,3 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,25 = 0,525,$$

$$m_{\alpha_4} = 0,3 \cdot 0,85 + 0,5 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,45 = 0,33.$$

Таким образом, при таких вероятностях следовало бы использовать третий вариант смазки, а ожидаемый в этом случае выигрыш был бы наибольшим из всех четырех вариантов и равен 0,525.

К сожалению, вероятности состояний погоды тренерам были не известны (они не доверяли прогнозам бюро погоды), и поэтому им пришлось на тренерском совете решать иначе вопрос о том, какой мазью следует смазать лыжи. Заметим, что старший тренер был «рационалистом», один из его помощников — «пессимистом», а другой — «оптимистом». «Пессимист» считал, что из всех вариантов надо выбрать такой, при котором минимальный выигрыш будет максимальным, т. е. он предложил выписать все минимальные элементы строк: 0,15; 0,20; 0,25; 0,05. И из них выбрать максимальный элемент. В данном случае это 0,25, и соответствующая стратегия, предложенная «пессимистом», была α_3 .

Такой выбор предписан так называемым «максиминным» критерием Вальда.

В согласии с этим критерием оптимальной считается та стратегия α_i для которой минимальный выигрыш максимален: $\max_i \min_j a_{ij}$. Таким образом, этот критерий ориентирован на худшие погодные условия и носит явно пессимистический характер.

После этого старший тренер команды предложил высказаться «оптимисту». Естественно, что «оптимист», рассчитывая, как всегда, на лучшее, предложил четвертый вариант смазки, так как соответствующий выигрыш при благоприятных условиях наибольший.

Старший тренер (он был человеком сведущим!), выслушав своих помощников, предложил использовать так называемый критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. А именно, сначала выбрать величину $0 \leq \lambda \leq 1$, а затем найти строку, для которой достигается

$$\max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij}).$$

Легко видеть, что при $\lambda = 1$ — это критерий пессимизма Вальда, а при $\lambda = 0$ он превращается в критерий «крайнего оптимизма».

При промежуточном значении λ возникает «промежуточный» критерий: оптимистичней крайнего пессимизма и пессимистичней крайнего оптимизма. Числовое значение λ старший тренер предложил взять равным 0,6, делая скидку на возможное ухудшение погоды. После чего были найдены

значения $h_i (i = 1, \dots, 4)$ для каждой строки

$$h_1 = 0,6 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,21,$$

$$h_2 = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,75 = 0,42,$$

$$h_3 = 0,6 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,47,$$

$$h_4 = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,85 = 0,37.$$

Наибольшим является $h_3 = 0,47$, и поэтому все склонялись к решению смазывать лыжи третьим вариантом смазки (стратегия α_3). С точки зрения здравого смысла такое решение также достаточно оправдано, так как нельзя впадать при принятии стратегических решений ни в крайний оптимизм, ни в крайний пессимизм.

Казалось бы, вопрос уже решен. Однако в последний момент слово взял член тренерского совета, зарекомендовавший себя как «возмутитель спокойствия». По всякому вопросу он имел свое собственное мнение и зачастую высказывал неожиданные соображения. Вот и на этот раз он заявил, что для принятия решения не следует изучать элементы матрицы успехов. И вот почему. Во-первых, стратегию α_1 следует сразу же исключить из рассмотрения, так как она заведомо хуже стратегии α_3 . Действительно, каким бы ни оказалось состояние β_j природы, вероятности успеха $a_{11} = 0,20$, $a_{12} = 0,30$, $a_{13} = 0,15$ меньше соответствующих вероятностей $a_{31} = 0,25$; $a_{32} = 0,80$; $a_{33} = 0,25$. Иными словами, первую строку матрицы A следует отбросить и работать с матрицей успехов меньшей размерности:

$$\tilde{A} = \begin{Bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0,75 & 0,20 & 0,35 \\ 0,25 & 0,80 & 0,25 \\ 0,85 & 0,05 & 0,45 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{matrix}.$$

Во-вторых, и это особенно важно, вообще нет убедительных оснований для использования матрицы успехов в решении рассматриваемого вопроса. Так, например, успех $a_{41} = 0,85$ при стратегии α_4 и состоянии природы β_1 больше чем при стратегии α_3 и состоянии β_2 . Однако выбор α_4 может оказаться более удачным чем выбор α_3 лишь потому, что состояние β_1 благоприятнее, нежели состояние β_2 . Тем самым сравниваются наши решения в различных ситуациях β_j . На самом же деле надлежит рассуждать так, чтобы суметь учесть, насколько благоприятствует нам каждое из состояний погоды при различных выборах α_i . А именно: если бы мы заранее знали истинное состояние погоды β_j , то выбор α_i был бы предопределен.

Просто в столбце для β_j мы выбрали бы наибольший элемент, т. е. $\max_i a_{ij}$. Обозначим его через $c_j = \max_i a_{ij}$. Составим теперь разность $c_j - a_{ij} = r_{ij}$. Эта разность дает отклонение выигрыша a_{ij} , который мы получили бы при выборе стратегии α_i (не зная заранее о состоянии природы β_j) от максимально возможного выигрыша c_j , получаемого нами при условии заблаговременной информации о том, что природа находится в состоянии β_j . Поэтому разность r_{ij} естественно считать нашим «риском» при использовании стратегии α_i при состоянии β_j природы. И вместо матрицы A успехов значительно разумнее ориентироваться на матрицу $R = (r_{ij})$ рисков. С этой целью найдем

$$\begin{aligned} c_1 &= \max_i a_{i1} = 0,85, & c_2 &= \max_i a_{i2} = 0,80, \\ c_3 &= \max_i a_{i3} = 0,45 \end{aligned}$$

и вычислим разности r_{ij} . Получим матрицу рисков

$$R = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & 0,10 & 0,60 & 0,10 \\ \alpha_2 & 0,60 & 0,00 & 0,20 \\ \alpha_3 & 0,00 & 0,75 & 0,00 \end{pmatrix}$$

Сравним ее с матрицей \tilde{A} . В этой последней выигрыши a_{31} и a_{33} одинаковы и равны 0,25. Однако они далеко не равноценны, ибо при выборе стратегии α_3 при состоянии природы β_1 риск $r_{31} = 0,60$ окажется втрое больше риска $r_{33} = 0,20$ при той же стратегии α_3 , но в состоянии β_3 . В силу всех изложенных соображений «возмутитель спокойствия» настаивал на том, чтобы в тех условиях, когда состояние природы заранее не определено, стремиться лишь к одному — к уменьшению риска. Иными словами, следует выбирать такую стратегию, при которой величина риска окажется наименьшей в самой неблагоприятной ситуации. А для этого необходимо подсчитать $\min_i \max_j r_{ij}$.

В наших условиях $\max_j r_{2j} = 0,60$; $\max_j r_{3j} = 0,60$; $\max_j r_{4j} = 0,75$ и $\min_i \max_j r_{ij} = \min_i \{0,60; 0,60, 0,75\} = 0,60$. Следовательно, выбрать нужно стратегию α_2 или α_3 , гарантирующие наименьший риск при любом состоянии природы (в наиболее неблагоприятной ситуации).

«Позвольте, — перебил выступающего старший тренер, — ведь ваше предложение в идейном плане немногим лучше предложения «пессимиста». Различие лишь в том, что согласно

вашему критерию наихудшим следует считать не минимальный выигрыш, а максимальный риск. Но это хорошо известный в теории принятия решений так называемый «*мини-максный*» критерий Севиджа. Критерий этот столь же пессимистичен, как и «максиминный» критерий Вальда. Будем же придерживаться золотой середины и остановимся на стратегии α_3 . Что же касается возможных упрощений в матрице A путем отбрасывания стратегий, заведомо худших других, то с этим следует полностью согласиться». На этом обсуждение вопроса о смазке лыж завершилось.



7.6. Железная игра

Сказания многих народов повествуют о героях, обладающих необычной силой, способных справляться с подъемом и переносом предметов огромного веса. К далеким временам восходят всевозможные силовые упражнения, различного рода народные состязания по подъему тяжестей, метанию тяжелых предметов и подобные им. На этой базе возник вид спорта, называемый ныне *тяжелой атлетикой*.

Чемпионаты Европы по тяжелой атлетике проводятся ежегодно с 1896 г., чемпионаты мира — с 1898 г. В 1920 г. создана Международная федерация тяжелой атлетики (ИВФ). Одновременно с созданием федерации тяжелая атлетика стала олимпийским видом спорта.

Снарядом, используемым в соревнованиях, служит штанга: гриф с насаживаемыми на него различного веса дисками.

Соревнования по современной тяжелой атлетике проводятся по системе олимпийского двоеборья. Олимпийское двоеборье состоит из последовательного выполнения двух упражнений: сначала рывка, а затем толчка штанги обеими руками.

При рывке штанга в быстром темпе поднимается и удерживается выпрямившимся спортсменом на вытянутых руках над головой.

Выполнение толчка состоит из двух этапов: сначала штанга поднимается на грудь, а затем толчковым движением поднимается от груди и удерживается на вытянутых руках над головой.

Возможности штангиста существенно зависят от его собственного веса, поэтому соревнования проводятся отдельно по каждой из десяти весовых категорий (вне зависимости от возраста спортсмена).

Каждый участник соревнований имеет право на три попытки для выполнения рывка и на три — для выполнения толчка.

Атлет объявляет судьям вес, с которого он начинает соревнования.

Однако первую попытку атлет может выполнять со штангой как большего, так и меньшего веса по сравнению с объявленным. После успешной первой попытки вес штанги увеличивается не менее, чем на 5 кг. При переходе от успешной второй попытки к третьей вес штанги повышается не менее, чем на 2,5 кг. Если все три попытки оказались успешными, штангисту предоставляется возможность в четвертой попытке установить рекорд. При этом вес штанги должен быть по крайней мере на 0,5 кг выше рекордного. Результат четвертой попытки не идет в зачет соревнований.

В личных соревнованиях победитель определяется по сумме результатов, показанных в двоеборье. Если одинаковый вес подняли несколько штангистов, то победителем считается тот, чей собственный вес до соревнований был меньшим. Если и эти веса одинаковы, то проводится повторное взвешивание после соревнований. В случае повторного совпадения результатов взвешивания спортсмены делят одно и то же призовое место.

На международных и национальных соревнованиях судейская коллегия формируется из главного судьи, двух боковых судей, секретаря и судьи-информатора, ведущего одновременно учет времени (с момента вызова спортсмена на помост до подъема им штанги должно пройти не более трех минут). Все спорные вопросы решает жюри из трех или пяти членов.

Рассмотрим теперь соревнования штангистов с позиции математической теории игр.

Предположим, что в соревновании участвуют два основных соперника: I и II. При этом по жребию штангисту I приходится выходить для поднятия каждого веса раньше, чем его основному сопернику — штангисту II. Согласно правилам соревнований каждый атлет может либо попытаться поднять штангу заданного веса, либо пропустить свой подход и ждать увеличения веса штанги, после чего он опять-таки может либо пропустить свой выход к этому весу, сохранив его для еще большего, либо попытаться поднять штангу. Простоты ради положим, что каждый штангист имеет право только на одну попытку и на один пропуск на любом весе. Наличие трех попыток не влияет принципиально на построенную ниже модель, а только увеличивает число описываемых ситуаций. Отметим, что и этот случай не очень сложно проанализировать с помощью ЭВМ.

Допустим, что начальный вес 200 кг, вероятность того, что его поднимет первый штангист, равна p_1 , а что под-

Если у вершины нанесена цифра I, то это означает, что в этой ситуации ходит (т. е. делает попытку, или пропускает вес) первый игрок, если проставлена цифра II — то ходит второй, а если нанесен 0, то работает «случайный механизм», а именно: с вероятностью p_k или q_k k -й вес (200 кг + $k \cdot 2,5$ кг) взят, и с вероятностью $1 - p_k$ (или $1 - q_k$) он не поднят. Знак «+» у дуги соответствует тому, что соответствующий штангист (эта дуга выходит из вершины, помеченной соответствующим номером) решил провести попытку, а знак «-» тому, что он ее переносит на более тяжелый вес. Ясно, что построение графа можно продолжить. При этом, естественно, надо помнить, что вероятности p_k и q_k резко убывают с ростом веса штанги.

Чистой стратегией в такой игре называют такой набор действий, при котором каждой вершине графа соответствует одно определенное действие того из игроков, чей черед ходить. Известным математиком Цермело доказано, что в любой позиционной игре (в том числе и в позиционной игре со случайными ходами, как и в нашем примере) существует *оптимальная чистая стратегия*, т. е. такая наилучшая стратегия, которая указывает, что надо делать каждому

игроку в зависимости от сложившейся в игре позиции (ситуации).

Мы не будем останавливаться на том, какова оптимальная стратегия в приведенном примере: ее нахождение связано с большим перебором различных вариантов, и без помощи компьютера практически это неосуществимо.

Отметим только, что для рассматриваемого случая при известных вероятностях p_k, q_k ($k = 1, 2, \dots$) найти оптимальную стратегию можно. Нам кажется, что знание оптимального стратегического поведения штангиста и его тренера имеет колоссальное психологическое значение, так как дает уверенность в том, что уж по крайней мере тактического проигрыша не будет, хотя, конечно же, проигрыш соревнования в общем возможен.

В заключение этого небольшого раздела хотелось бы сказать, что для любой позиционной игры двух лиц существует эквивалентная ей матричная игра. Поэтому очень часто нахождение оптимального поведения в игре, заданной в развернутой форме, сводится к нахождению оптимальных стратегий в эквивалентных матричных играх.

Поясним нашу мысль и рассмотрим в качестве примера пусть несколько упрощенную, но любопытную ситуацию. Допустим, как прежде, что каждый из двух соревнующихся спортсменов имеет право одной попытки подъема штанги и пропуска лишь одного веса в поднятии штанги. Предположим также, что состязания начинается первый штангист (I), что он легче второго (II) и что оба уже взяли равный вес. В этом случае граф-дерево имеет вид, показанный на рис. 26. Заметим, что $+1$ означает выигрыш первого, а

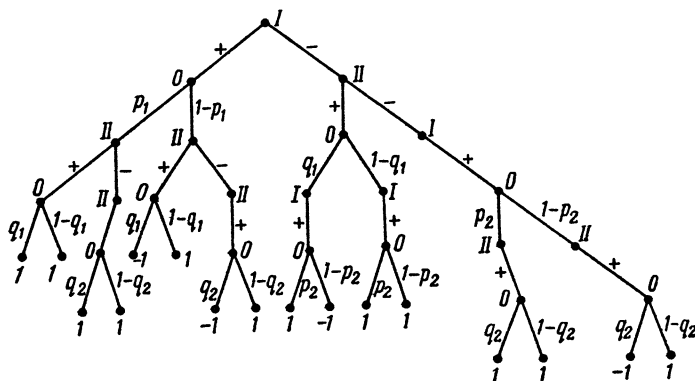


Рис. 26

—1 означает выигрыш второго из штангистов. Напомним вновь, что естественно предположить: $p_2 < p_1$ и $q_2 < q_1$.

Рассмотрим ситуацию с точки зрения первого штангиста. Если штангист I решит брать первый вес и возьмет его, то штангисту II для победы необходимо попытаться поднять следующий вес, так как штангист II тяжелее. Если же штангист I не поднимет первый установленный вес, то штангисту II, очевидно, надо заказывать тот же вес, так как для него вероятность q_1 поднять этот вес больше вероятности q_2 поднять следующий.

Оценим выигрыш штангиста I в случае, если он решает поднять начальный вес. Этот вес он поднимет с вероятностью p_1 ; в таком случае штангист II, зная этот результат, решит поднимать следующий — больший вес, вероятность поднять который q_2 . Значит, в этом случае ожидаемый выигрыш штангиста I составит

$$-1 \cdot q_2 + 1 \cdot (1 - q_2) = 1 - 2q_2.$$

С вероятностью $1 - p_1$ штангист I не поднимет начальный вес, а штангист II его поднимет с вероятностью q_1 , или не осилит с вероятностью $1 - q_1$. В этом случае выигрыш первого будет равен

$$-1 \cdot q_1 + 1 \cdot (1 - q_1) = 1 - 2q_1.$$

Таким образом, если штангист I собирается использовать попытку на начальном весе, его ожидаемый выигрыш $v_1(+)$ (математическое ожидание выигрыша) вычисляется по следующей формуле:

$$v_1(+) = p_1(1 - 2q_2) + (1 - p_1)(1 - 2q_1) = 1 - 2q_1 + 2p_1q_1 - 2p_1q_2.$$

Ясно, что выигрыш v_2 штангиста II в этом случае равен $-v_1(+)$. Теперь допустим, что штангист I решает пропустить первый подход. В этом случае он как бы меняется ролями со штангистом II и ждет, что тот будет делать. Если штангист II решит поднимать начальный вес, то он его осилит с вероятностью q_1 , или не осилит с вероятностью $1 - q_1$. В первом из этих двух случаев вероятность победы штангиста I равна p_2 , а во втором — единице (штангист I легче). Таким образом, если штангист II попытается использовать первый подход, то средний выигрыш штангиста I в этом случае составит

$$v_1(-) = -1 \cdot q_1(1 - p_2) + 1 \cdot (1 - q_1) = 1 + p_2q_1 - 2q_1 = -v_2(+).$$

Если же штангист II будет пытаться использовать второй подход (т. е. пропустит первый), то он с вероятностью

$q_2(1 - p_2)$ выигрывает, а с вероятностью $(1 - q_2)$ проигрывает штангисту I. Значит, в этой ситуации

$$v_1(-) = -v_2(-) = -1 \cdot q_2(1 - p_2) + (1 - q_2) = 1 + p_2q_2 - 2q_2.$$

Естественно предположить, что штангист II изберет такое поведение, при котором его выигрыш минимизируется. Иными словами, сначала он найдет минимум из двух величин $v_2(+)$ и $v_2(-)$, а затем поступит так: он использует первую попытку, если $v_2(+)<v_2(-)$, или же использует подход на большем весе, если $v_2(+)>v_2(-)$. Сравним эти две величины:

$$-v_2(+)=1+p_2q_1-2q_1 \text{ и } -v_2(-)=1+p_2q_2-2q_2.$$

Найдем их разность

$$-v_2(+)-(-v_2(-))=p_2(q_1-q_2)-2(q_1-q_2)=(q_1-q_2)(p_2-2).$$

Так как $q_1 > q_2$, а $p_2 < 1$, то отсюда заключаем, что $-v_2(+)<-v_2(-)$ или, окончательно, $v_2(-)<v_2(+)$. Таким образом, штангисту II также выгодно пропустить первый вес, коль скоро его пропускает штангист I.

В этой задаче оптимальная стратегия штангиста I состоит в выходе к первому весу, если $v_1(+)>v_1(-)$, и в необходимости попытаться поднять более тяжелый вес, если $v_1(+)<v_1(-)$.

Оптимальное поведение штангиста II состоит в следующем. Если первый пропускает вес, то и второму необходимо также пропускать этот вес, что в рассматриваемой ситуации объясняется тем, что сам он тяжелее соперника. Если же первый штангист пытается поднять более легкий вес, то второй должен поднимать тот же вес, если попытка первого участника не удалась, и идти на больший вес, если выход первого штангиста был удачен.

Анализ решения приведенного примера не внес ничего нового в тактику выступления того из спортсменов, который «ходит» вторым. Однако, как нам кажется, этот анализ позволяет выработать тактику поведения штангиста в ответственных соревнованиях в тех случаях, когда он должен «ходить» первым или (при нескольких участниках) начинать выступление раньше своего основного соперника. Нетрудно увидеть, что в любой ситуации тому штангисту, чей выход предусмотрен раньше, следует правильно оценить свое решение: «ходить» или «пропускать»; в то же время решение второго штангиста более очевидно. Именно это обстоятельство побудило нас рассмотреть сравнительно несложную тактическую задачу с позиции участника, которому приходится подходить к весу («ходить») первым.

7.7. Матричные игры и линейное программирование

Рассмотрим антагонистическую игру с матрицей выигрыша $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор вероятностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ (где $x_i \geq 0$ при всех $i = 1, \dots, m$, и $\sum_{i=1}^m x_i = 1$) есть некоторая оптималь-

ная стратегия первого игрока. Тогда, применяя против нее любую свою стратегию, второй игрок не сможет помешать первому выиграть v или даже больше, чем v , где v — цена игры (вспомним теорему о минимаксе!), пока нам неизвестная.

Таким образом, можно записать неравенства

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq v,$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq v,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq v.$$

Кроме того, можно учесть условие нормировки вектора x :

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1.$$

Предположим, что цена игры v отлична от нуля (больше нуля). В противном случае прибавим ко всем элементам матрицы A одно и то же достаточно большое число и тем самым увеличим цену игры на это же число. Оптимальные стратегии при этом не изменятся. Затем, разделив неравенства и условие нормировки на величину v , получим

$$a_{11} \frac{x_1}{v} + a_{21} \frac{x_2}{v} + \dots + a_{m1} \frac{x_m}{v} \geq 1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{1n} \frac{x_1}{v} + a_{2n} \frac{x_2}{v} + \dots + a_{mn} \frac{x_m}{v} \geq 1,$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{x_i}{v} = \frac{1}{v}.$$

перешло в руки «Липовых», однако они никак не могли забить решающий гол.

За пять минут до конца игры зрители начали недоумевать по поводу необычной чехарды пятерок команды «Липовый лист», которую организовали тренеры. Они перестали выпускать на лед четвертую пятерку, реже стала появляться и первая пятерка, зато вторая и третья не успевали менять друг друга. Недоумение, начавшиеся было крики типа «Сапожники!», «Тренеров в салат!» сменились ревом восторга: за полторы минуты до конца встречи был забит решающий гол! Со счетом 5:4 победила команда «Липовый лист» и в четвертый раз подряд завоевала переходящий приз.

На состоявшейся после матча пресс-конференции тренер команды «Липовый лист» сказал, что победой они целиком и полностью обязаны молодому математику, начавшему работать в команде в конце сезона. Заявление тренера вызвало сенсацию. Защелкали затворы фотокамер, засверкали блики вспышек, несколько журналистов протянули свои микрофоны автору сенсации, прося объяснить, каким образом математика может помочь выиграть столь ответственный хоккейный поединок.

Вот что рассказал математик-консультант (приводим несколько упрощенное изложение рассказа о том, что же происходило на скамейке запасных в последнюю десятиминутку встречи):

«Наше преимущество было очевидным, но мы никак не могли реализовать его. Вроде бы все наши пятерки, а их было, как и обычно, четыре, вчистую переигрывали соперников, но шайба в ворота не шла. Тогда я решил, что надо попробовать перетасовывать пятерки так, чтобы выпускать их на лед случайным образом, не ожидая действия противника. Дело в том, что соперники устали значительно сильнее наших игроков, и медленные замены, когда каждый тренер выпускает то одну пятерку, то другую, играли на руку «Полосатым ребятам» и позволяли им сбивать темп наших атак. Я решил составить прямоугольную таблицу, строки которой предназначил нашим пятеркам, а столбцы — пятеркам «Полосатых». У нас четыре игровые пятерки, у противников осталось три (так как двое игроков из четвертой пятерки получили травмы). На пересечении строки, отвечающей нашей пятерке α_i и столбца пятерки β_j противника, проставил оценку a_{ij} (по десятибалльной шкале) игрового преимущества α_i перед β_j .

Оценку a_{ij} я получил в результате усреднения соответствующих индивидуальных оценок, бегло высказанных мне трене-

рами команды и примерно известных им по опыту предыдущих встреч.

Так как в последнее время при мне постоянно мини-ЭВМ, то я моментально составил следующую игровую таблицу (сразу же хочу подчеркнуть, что мог бы составить аналогичную таблицу, в которую в качестве a_{ij} заносил бы вероятность p_{ij} выигрыша пятерки α_i при встрече с пятеркой β_j):

		«Полосатые ребята»		
		β_1	β_2	β_3
«Липовый лист»	α_1	8	2	4
	α_2	6	3	6
	α_3	2	7	6
	α_4	1	7	3

После этого я составил эквивалентную задачу линейного программирования с ограничениями (см. 7.7)

$$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 7x_4 \geq 1,$$

$$4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 \geq 1,$$

и линейной функцией

$$F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{v},$$

которую надо минимизировать. Напомню, что здесь v — цена (пока неизвестная) построенной мною матричной игры.

Не стану затруднять вас подробным решением полученной задачи линейного программирования, можете сами решить ее симплекс-методом, а сразу же сообщу ответ: оптимальное решение таково:

$$x_1^0 = 1/32; x_2^0 = 3/32; x_3^0 = 3/32; x_4^0 = 1 \text{ и } 1/v = 7/32.$$

Таким образом, цена игры оказалась равной $^{32}/_7$, а оптимальные вероятности использования чистых стратегий в смешанной стратегии тренеров моей команды (т. е. оптимальная стратегия «первого игрока» моей команды) определились следующим образом:

$$p_1^0 = 1/32 \cdot ^{32}/_7 = 1/7; p_2^0 = 3/32 \cdot ^{32}/_7 = 3/7;$$

$$p_3^0 = 3/32 \cdot ^{32}/_7 = 3/7; p_4^0 = 0 \cdot ^{32}/_7 = 0.$$

Именно поэтому мы стали реже выпускать первую пятерку, а четвертую и вовсе перестали включать в игру. При-

нимая во внимание то, что противная сторона не использовала свою оптимальную стратегию, при которой конец матча ей лучше было бы проводить в две пятерки, посадив третью на скамейку запасных, мы вполне естественно превратили свое преимущество в решающий гол!»

После такой беседы тренерам следует задуматься над проблемами, возникающими в хоккейных встречах.



7.9 Формирование команды пловцов

Одно из первых предложений по использованию алгоритма решения задачи о назначениях (см. п. 6.1) для формирования команды изложено в 1970 г. в работе *Maxhol R. E. An Application of the Assignment Problem.*— *Oper. Res.*, 1970, v. 18, № 4, p. 569—760. В ней шла речь о формировании команды для смешанной эстафеты по плаванию из группы спортсменов, среди которых имеется несколько спортсменов, хорошо владеющих более чем одним стилем плавания.

В смешанной эстафете участвуют четверо спортсменов, из которых каждый проплывает дистанцию только одним, определенным заранее, стилем (брасс, баттерфляй, на спине, кроль) и в определенной последовательности.

Усложненная задача формирования основного состава из 38 кандидатов рассматривалась в 1972 г. В упомянутой работе изложена хорошо продуманная, но довольно сложная методика определения коэффициентов целевой функции (в наших обозначениях — элементов матрицы баллов Γ). Сначала тренер составляет реестр показателей (физиологических, интеллектуальных, психологических и др.), которыми должен обладать претендент, с тем, чтобы во время тренировок занять в эстафете определенное порядковое место. Из этого реестра производится выборка n показателей, исключающих (по возможности) друг друга, но вместе с тем достаточно характеризующих спортсмена. Тем самым определяются «независимые» показатели качества спортсмена. Затем каждый тренер оценивает значимость каждого показателя, придавая ему определенный «вес» (числовой множитель) с учетом места, занимаемого игроком в процессе тренировок. Далее, тем или иным способом, принятым в экспертных оценках (см. п. 4.1), вычисляется коллективный весовой множитель. В итоге возникает «весовая» матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$ размерности $n \times m$. Ее элемент λ_{ij} — это вес, приписываемый тренерами i -му показателю ($i = 1, \dots, n$) при условии, что спортсмен занял j -е место в команде ($j = 1, \dots, m$).

На следующем этапе лицо, принимающее решение (например старший тренер), определяет значимость каждого из m мест в составе команды, вновь используя методику весовых множителей, j -му месту приписывает вес μ_j ($j = 1, \dots, m$). Вслед за этим тренерский состав оценивает каждого из k пловцов. С этой целью строят весовую матрицу $A = (a_{li})$ размерности $k \times n$, в которой a_{li} — вес l -го пловца по i -му показателю. В результате умножения матрицы $A_{k \times n}$ на матрицу $\Lambda_{n \times m}$ возникает матрица $\Gamma(\gamma_{lj})_{k \times m} = A_{k \times n} \Lambda_{n \times m}$. Ее элемент $\gamma_{lj} = a_{l1}\lambda_{1j} + a_{l2}\lambda_{2j} + \dots + a_{ln}\lambda_{nj}$ дает оценку значимости для команды того факта, что l -й пловец займет j -е место ($l = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m$).

Оценка вклада в общее выступление команды l -м пловцом на j -м месте дается показателем $\delta_{lj} = \gamma_{lj}\mu_j$. Приходим к матрице $\Delta_{k \times m} = (\delta_{lj})$. Все завершается решением уже известной нам задачи о назначениях методом линейного программирования. Вводят переменные $x_{lj} = 0$ или 1 (в зависимости от того, поставлен ли l -й пловец на j -е место или нет); записывают известную систему ограничений:

$$\sum_{l=1}^k x_{lj} = 1 \quad (j = 1, \dots, m);$$

$$\sum_{j=1}^m x_{lj} = 1 \quad (l = 1, \dots, k),$$

и, при условии их выполнения, максимизируют целевую функцию — эффективность выступления всей команды

$$F(X) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^m \delta_{lj} x_{lj}.$$

Практическое решение этой задачи в конкретных случаях может быть достигнуто, например, симплекс-методом (см. п. 6.8) с помощью ЭВМ.

8. ОРГАНИЗАЦИЯ СОРЕВНОВАНИЙ — ЗАДАЧА ПЛАНИРОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ



При проведении всевозможных соревнований — теннисных, хоккейных, шахматных, футбольных — используют различные организационные принципы (системы планирования).

Среди них самыми распространенными являются олимпийская (кубковая) и круговая системы. Олимпийская система хороша тем, что позволяет в начальной стадии соревнова-

ний охватить большее число участников, нежели при иной организации.

Круговая система предусматривает встречи каждого из участников с каждым и тем самым снижает роль элемента случайности при выявлении победителя. Результат соревнований выглядит еще убедительнее, если встречи проводятся в два круга.

8.1. Олимпийская система

В турнирах, проводимых по олимпийской системе, участник (или команда) после первого поражения сразу же выбывает из основного графика (сетки) соревнований. В дальнейшем выбывший может претендовать лишь на $(n + 1)$ -е место (при $2n$ участников) и то только в том случае, если для выбывших в первом туре соревнований будет организована дополнительная группа (обычно разыгрывающая места с $(n + 1)$ -го по $2n$ -е по той же олимпийской системе).

Номера участников встреч определяются жребием. В соответствующую таблицу участники соревнований A, B, C, \dots заносятся в естественном порядке — согласно полученным по жребию номерам. При числе участников $n = 2^k$, т. е. равном степени двойки, в соревнования первого круга включаются все участники. Если же n не является степенью двойки, то часть участников, в зависимости от полученных ими номеров, вступает в игру со второго круга.

Число m вступающих в соревнования после первого круга равно разности между числом 2^k (ближайшей к числу n участников степени двойки, большей n) и числом n участников: $m = 2^k - n$. При этом число пар, играющих в первом круге, составляет $n - 2^{k-1}$. Если число участников $n = 2^k$, то все встречи будут разыграны за k туров. Если же $2^{k-1} < n < 2^k$, то победитель должен сыграть $k + 1$ (или k) встреч.

Выделение номеров, начинающих играть со второго круга (при $2^{k-1} < n < 2^k$), проводят различными способами. Например, со второго круга начинают встречаться крайние номера из верхней и нижней частей таблицы. В другом варианте исходная таблица составляется на 2^k позиций, из которых фактически занимают участниками лишь n позиций. Свободные позиции в последующем занимают дополнительными участниками или же оставляют свободными и располагают в таблице рядом с позициями, занятыми сильными участниками. С целью снизить возможность выбывания сильнейших участников в результате встреч между собой уже

в первом круге, эти участники «рассеиваются» по всей таблице.

Так, например, в теннисных соревнованиях сильнейшие участники (числом 2, 4, 8, 16, ...) не участвуют в жеребьевке. Им отводят позиции соответственно по разным половинкам, четвертям, восьмым, шестнадцатым частям таблицы. Затем вне общей жеребьевки разыгрывают между двумя сильнейшими участниками первое и последнее места в таблице, между двумя следующими по силе — два средних места (номера 32 и 33 при 64 участниках), затем между четырьмя последующими разыгрывают номера, расположенные посередине между уже разыгранными (при 64 участниках — номера 16, 17, 48, 49).

Практикуются и другие варианты в организации турниров по олимпийской системе [14].

Убедительность результатов соревнований по олимпийской системе обосновывается принципом, именуемым в математике отношением *транзитивности*, а именно, априори считается, что если участник *A* играет (скажем, в теннис и шахматы) сильнее *B*, а *B* — сильнее *C*, то *A* играет сильнее *C*.

В действительности, однако, принцип транзитивности сплошь и рядом нарушается, особенно среди теннисистов. Вот пример сезона 1984 г. Третий игрок всемирной классификации — чешский теннисист Иван Лендл обыграл (на открытом первенстве Франции) первого игрока — американца Джона Макинроя. Макинрой (в Уимблдоне) переиграл своего соотечественника — вторую ракетку мира Джимми Конорса, а Конорс (там же) победил Лендла. Но и в среде шахматистов это не редкость. Так, например, Роберт Фишер имел перевес в личных встречах с Бентом Ларсеном, Ларсен имел перевес в партиях с Ефимом Геллером, а у Геллера — перевес в счете против Фишера.

О нарушении принципа транзитивности уже шла речь при обсуждении методов судейства в фигурном катании (см. п. 4.4).

Тем не менее олимпийская система широко применяется в самых крупных международных теннисных соревнованиях, как в командных (кубок Дэвиса, кубок Галлеа), так и в индивидуальных разрядах (в турнирах «Гран При», на открытых первенствах Австралии, США, Франции, на неофициальном первенстве мира — Уимблдонском турнире).

В шахматных соревнованиях олимпийская система используется редко и предпочтение отдается *круговой* и так называемой *швейцарской системам*.



8.2. Круговая система

Эта система широко практикуется в футбольных, хоккейных, баскетбольных и теннисных соревнованиях. Если игры идут в два или в три круга, то результаты их можно считать весьма убедительными. Результаты завершеного турнира участников по круговой системе можно представить не только в виде сводной таблицы, но и в виде графа. Вершины графа (число их n) соответствуют участникам. Каждая пара вершин соединена ребром; всего ребер $n(n-1)/2$. Такой граф называют *полным*. Если участник A_i выиграл встречу с A_j , то ребро, соединяющее соответствующие вершины графа, ориентируют (снабжают стрелкой в направлении от A_i к A_j). При ничейном исходе ребро остается неориентированным.

В теннисных встречах (как, впрочем, и в баскетболе, и в волейболе) ничьих не бывает. Круговой турнир в этих видах спорта оказывается «бескомпромиссным». Подобному турниру соответствует полный ориентированный граф. В качестве примера на рис. 27 представлены все возможные графы

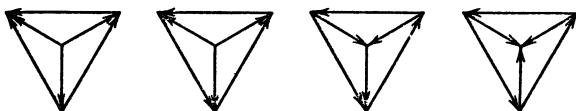


Рис. 27

бескомпромиссных турниров с четырьмя участниками. Подобного рода (и аналогичные им) графы турниров специально изучаются математической дисциплиной (тесно связанной с комбинаторикой) — *теорией графов* (см., например, [21]).

При проведении шахматных турниров по круговой системе строго придерживаются расписания игр. Порядок встреч по турам и цвета фигур, которыми шахматисты играют в этом турнире, определяются номерами, полученными ими при жеребьевке. При этом для подсчетов используют специальные правила, предложенные немецким шахматистом Й. Бергером.

Поясним суть этих правил. Допустим, что число участников n четное. Рассмотрим какую-либо пару участников. Если номера s, t (по жеребьевке) каждого из них отличны от n , то номер тура, в котором они встречаются, равен $N_{st} = s + t - 1$ при $s + t < n$ и равен $N_{st} = s + t - n$ при $s + t > n$. Если сумма $s + t$ — число нечетное, то белыми играет шахматист, имеющий меньший номер, а если сумма четная,

то белыми играет его противник. Например, в турнире из восьми участников ($n = 8$) второй участник ($s = 2$) играет белыми с пятым ($t = 5$) в шестом туре ($2 + 5 = 7$ — нечетное число, меньшее восьми; $2 + 5 - 1 = 6$). В то же время третий номер с седьмым играет черными во втором туре ($3 + 7 = 10$ — четное число, большее восьми; $3 + 7 - 8 = 2$). Для участника с номером n расписание игр оказывается следующим. Номер тура, в котором он встречается с участником под номером l , равен $2l - 1$ (при $2l < n$) и $2l - n$ (при $2l > n$). При этом с участниками под номерами от 1 до $n/2$ включительно он играет черными, а с остальными — белыми.

При нечетном n к числу участников присоединяют «фиктивного» игрока и сводят задачу составления расписания к четному случаю $n + 1$. Партии с фиктивным партнером не играют, а истинный участник в соответствующем туре свободен от игры.

Заметим, что при четном n участники с номерами от 1 до $n/2$ играют каждый на одну партию белыми больше (за счет встреч белыми с игроком под номером n), чем остальные. Поэтому при жеребьевке предпочтительными оказываются номера, не превосходящие $n/2$.

Такого же строгого порядка придерживаются теперь при организации теннисных соревнований по круговой системе.

Так, например, в классификационных соревнованиях по группам из шести участников игра белыми (в шахматах) ассоциируется с обеспечением встречи новыми мячами за счет соответствующего участника (в теннисе).

Изучение игр по круговой системе приводит ко многим интересным математическим задачам.

Вот простейшая из них. Известно, что в круговом турнире теннисистов двое имеют равное число побед. Можно ли всех участников упорядочить по силе игры? Оказывается, что нельзя, так как среди участников всегда найдутся трое A, B, C таких, что A выиграл у B , B выиграл у C , а C обыграл A (в соответствующем графе найдется так называемый ориентированный цикл). Действительно, в качестве A и B рассмотрим игроков с равным k числом побед, и пусть A обыграл B . Предположим, что B имеет победы над игроками C_1, \dots, C_k . Тогда ясно, что среди них имеется по крайней мере один, победивший A . Иначе у A было бы побед не меньше, чем $k + 1$. Этим все доказано. Любопытные ситуации, связанные с шахматными баталиями, описаны Е. Я. Гиком в [24].

Приведем две из них.

1. В турнире участвует n шахматистов. Какой максимальный разрыв в набранных очках может возникнуть между двумя участниками, занявшими соседние места?

Допустим, что максимальный разрыв в очках имеют участники, занявшие места s и $s + 1$. Шахматисты, занявшие первые s мест, сыграли между собой $s(s - 1)/2$ партий и набрали в общей сложности такое же количество очков. Кроме того, они сыграли $s(n - s)$ партий с занявшими места с $s + 1$ по n и набрали при этом не более чем $s(n - s)$ очков. Таким образом, сумма очков, набранная участниками, занявшими s первых мест, не превосходит $\frac{s(s - 1)}{2} + s(n - s) = \frac{(2n - s - 1)s}{2}$. Поскольку участник, занявший место s , среди первых s шахматистов занял последнее место, то он набрал не более $\frac{1}{s} \frac{(2n - s - 1)s}{2} = \frac{2n - s - 1}{2}$ очков.

Участники, занявшие места с $s + 1$ по n , сыграли между собой $(n - s)(n - s - 1)/2$ партий и в общей сложности набрали столько же очков. Поскольку участник, занявший место $s + 1$, занял среди них первое место, то он набрал не менее $\frac{1}{n - s} \frac{(n - s)(n - s - 1)}{2} = \frac{n - s - 1}{2}$ очков.

Следовательно, максимальный разрыв в очках между участниками, занявшими места s и $s + 1$, не превосходит $\frac{2n - s - 1}{2} - \frac{n - s - 1}{2} = \frac{n}{2}$. Такой разрыв достигается, например, при условии, что победитель обыграл всех противников и набрал $n - 1$ очко, а остальные участники все партии между собой закончили вничью и набрали по $n/2 - 1$ очков. При этом $(n - 1) - (n/2 - 1) = n/2$.

В крупных шахматных соревнованиях с сильным составом подобный разрыв маловероятен. Однако в анналах соревнований отмечен единственный случай, когда Алехин в 1931 г. на турнире в Блэде оторвался от своих ближайших соперников на 5,5 очков.

2. В ряде случаев после завершения турнира возникает необходимость перенумеровать всех участников в таком порядке, чтобы ни один из них не имел поражения от следующего за ним участника.

Убедимся в возможности такого упорядочения участников. Для этого воспользуемся методом математической индукции. Для двух участников упорядочение очевидно. Предположим, что оно имеет место для произвольного турнира с m участниками. Обратимся к результату турнира с $m + 1$ участником.

Выберем любые m участников и упорядочим их требуемым способом (это возможно по индуктивному предположению). Затем выясним, как $(m + 1)$ -й участник сыграл с первым. Если он выиграл или сыграл вничью, то поставим его на первое место. Если же проиграл, то выясним, каков его результат в игре со вторым и т. д. Если в ходе подобного перебора придем к участнику, у которого $(m + 1)$ -й выиграл или сыграл вничью, то поставим $(m + 1)$ -го перед ним. В противном случае (т. е. когда $(m + 1)$ -й участник всем проиграл) ставим $(m + 1)$ -го на последнее место.

В соревнованиях шахматистов с большим числом участников используется швейцарская система. Вначале проводится жеребьевка. В первом туре играют шахматисты с номерами m и $m + 1$ ($m = 1, 2, \dots$), причем участники с нечетными номерами играют белыми. В последующих турах играют между собой участники, набравшие равное количество очков. Если в одной из таких групп оказывается нечетное число участников, то смешивают соседние группы. Жеребьевку проводят с таким расчетом, чтобы каждый участник (в лучшем случае) от тура к туру менял цвет своих фигур или же, по крайней мере, равное число партий играл фигурами разных цветов.

8.3. Схевенингенская*) система и латинские квадраты

Множество математических проблем возникает вокруг схевенингенской системы проведения командных встреч. В турнире двух команд каждый участник одной из команд встречается с каждым участником другой. Возникает вопрос о составлении расписания встреч участников. Если в каждой команде по n участников, то весь матч проводится за n туров. Для $n = 4$ расписание игр приведено на рис. 28. Строки квадрата отвечают игрокам команды I, столбцы — игрокам команды II. На пересечении i -й строки и j -го столбца указан номер тура, в котором играют соответствующие участники. Цвет фигур для участника команды II определяется цветом клетки (штриховкой).

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	3	4	1	2
3	2	3	4	1
4	4	1	2	3

Рис. 28

*) От названия голландского города Схевенинген.

Для $n = 6$ может быть предложено расписание, указанное на рис. 29. Каждая строка и каждый столбец квадрата, задающего расписание туров для $n = 4$, содержит каждую из цифр от 1 до 4 и в точности по одному разу. В квадрате для $n = 6$ в каждой строке (столбце) встречается любая













	1	2	3	4	5	6
1	1		3		5	
2		2		4		6
3	3		4	5	6	1
4		4	5		1	
5	5	5	6	1	2	
6		6	1	2	3	4

Рис. 29

из цифр от 1 до 6 и притом лишь однажды. Аналогичная ситуация имеет место и для любого n .

Квадраты с подобным расположением чисел называют *латинскими*. До последних лет латинскими квадратами интересовались лишь любители головоломок и некоторые математики. Латинские квадраты стали известны, в основном, благодаря предложенной Леонардом Эйлером (1707–1783) в 1782 г. задаче: среди 36 офицеров имеется по шесть офицеров шести различных званий из шести полков. Можно ли построить этих офицеров в каре так, чтобы в каждой колонне и каждой шеренге встречались офицеры всех званий и всех полков?

Лишь в 1901 г. удалось доказать, что такая расстановка невозможна. Однако латинские квадраты (Л. Эйлер в работе с ними использовал не числа, а буквы латинского алфавита) получили в последующем многочисленные приложения, в частности, в комбинаторных задачах, а в конце шестидесятих годов они нашли применение в теории кодирования сообщений (см. [23]).

Мы убедились также, что латинские квадраты имеют непосредственное отношение к организации соревнований. Поэтому продолжим их изучение.

Итак, *латинский квадрат* — это матрица порядка n , элементами которой являются числа $1, 2, \dots, n$, каждое из которых ровно один раз содержится в каждой ее строке и столбце.

Две матрицы порядка n называют ортогональными, если при наложении любой из них на другую возникает множество всех упорядоченных пар (i, j) , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, n$.

Примером ортогональных латинских квадратов (матриц) порядка $n = 3$ служат

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

При их наложении возникает новый квадрат

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{pmatrix},$$

называемый греко-латинским или эйлеровым. Его элементами являются упорядоченные пары чисел (i, j) .

Отождествим первую цифру каждой числовой пары с определенным офицерским званием (например, единица — лейтенант, двойка — капитан, тройка — майор и т. п.), а вторую цифру пары — с номером полка. Тогда полученный эйлеров квадрат указывает на требуемую расстановку в каре девяти офицеров трех различных званий из трех полков.

Ортогональны также матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Легко заключить, что матрица порядка n является латинским квадратом тогда и только тогда, когда она ортогональна как матрице A , так и матрице B . В то же время сами эти матрицы латинскими квадратами не являются.

Проблема существования ортогональных латинских квадратов любого порядка оставалась не решенной более 200 лет. В 1779 г. сам Эйлер высказал предположение о том, что ортогональных квадратов порядка $n = 4k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) не существует. Лишь в 1901 г. Терри доказал справедливость гипотезы Эйлера для $n = 6$ (т. е. $k = 1$, для $k = 0$ она очевидна) путем прямого перебора всех возможностей. Наконец в 1959 г. Паркер нашел эйлеров квадрат порядка $n = 10$ (т. е. для $k = 2$) и совместно с Босе и Шарикхандом в 1960 г. доказал существование ортогональных латинских квадратов любого порядка n , за исключением $n = 2$ и $n = 6$.

Вернемся вновь к расписанию турнира по схевенингенской системе для $n = 6$. Видно, что, хотя каждый из участников матча играет одинаковое число партий белыми и черными, обе команды в каждом туре играют все партии одним цветом, что нежелательно (играющая белыми имеет преимущество).

Поэтому поставим задачу построения такого расписания, при котором:

а) все участники играют равное число партий белыми и черными;

б) в каждом туре каждая команда играет равное число партий белыми и черными.

Естественно, что число n участников с необходимостью должно быть четным. Рассмотрим пару ортогональных латинских квадратов A и B порядка n . Наложим квадрат B на A и заштрихуем все клетки A , на которые пришлись четные числа из квадрата B . Все остальные клетки A оставим белыми.

Так как в каждой строке и в каждом столбце квадрата A половина чисел четна, то сразу видно, что условие а) выполняется. Ввиду ортогональности A и B каждым n одинаковым числом из A соответствует половина четных и половина нечетных чисел из B . Этим удовлетворено также и условие б).

Заметим, что из того, что для $n = 6$ ортогональных латинских квадратов не существует, еще не следует невозможность построения необходимого расписания. И действительно, путем прямого перебора с помощью ЭВМ удалось

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	6	5	1	4
3	3	6	2	1	4	5
4	4	1	5	2	6	3
5	5	4	1	6	3	2
6	6	5	4	3	2	1

Рис. 30

найти серию требуемых расписаний. Одно из них приведено на рис. 30. Оно хорошо тем, что ни один из участников не играет подряд одним цветом более двух партий.

Для того чтобы представить себе объем материала, среди которого проводится поиск требуемых латинских квадратов, сошлемся на Риордана [22]. Обозначим через l_n число латинских квадратов порядка n , элементы первой строки и первого столбца которых упорядочены в естественном порядке: 1, 2, ..., n . Тогда число L_n различных латинских квадратов порядка n составит

$$L_n = n!(n-1)!l_n,$$

так как при произвольной перестановке строк (столбцов) латинский квадрат не утрачивает своих свойств.

При этом значения l_n для $n \leq 7$ таковы:

n	2	3	4	5	6	7
l_n	1	1	1	56	9408	16942080

9. О СПОРТИВНЫХ КЛАССИФИКАЦИЯХ



9.1. Принципы построения спортивных классификаций

Всякая спортивная классификация, основанная на упорядочении спортсменов по их силе (по результатам соревнований), связана с присвоением каждому из них определенной оценки, выражающейся в виде числа очков, набранных в турнирах, или в виде так называемого *рейтинга* — условного числового коэффициента.

В пределах отдельных соревнований этими оценками служат очки, набираемые участниками. Именно так обстоит дело в соревнованиях по спортивной и художественной гимнастике, фигурному катанию, в тяжелой атлетике и т. п.

Однако в спортивных играх, таких, например, как шахматы, теннис, бадминтон, целесообразно иметь не разовую, а интегральную оценку, в которой учитываются (в определенном смысле суммируются) результаты серии встреч с различными противниками в разных турнирах на протяжении определенного отрезка времени. Такие интегральные оценки используются в шахматных, теннисных и других классификациях. Рассмотрение действующих классификационных систем позволяет сделать некоторые заключения общего характера о принципах их построения.

Остановимся на системе классификации на основе рейтингов.

Оставим пока открытым вопрос о том, какие соображения учитываются при присвоении игрокам, входящим в классификацию исходного рейтинга (исходного места в классификации). Предположим, что вопрос этот тем или иным способом решен.

Рассмотрим встречу двух игроков. Обозначим оценки класса, т. е. рейтинги игроков U и V через $r(U)$ и $r(V)$ соответственно.

Введем в рассмотрение переменную величину t , характеризующую различие в классе игроков U и V . Величину t можно предположить зависящей, например, от отношения $r(U)/r(V)$ рейтингов игроков U и V или же от их разности $r(U) - r(V)$.

В качестве исходного примем предположение, согласно которому отношение m/n среднего числа m побед игрока U к среднему числу n его поражений в сериях из N встреч с игроком V находится в экспоненциальной зависимости от разности рейтингов игроков U и V .

Естественность такого предположения подтверждается статистическими данными о результатах шахматных турниров, теннисных и других игровых спортивных соревнований, а также, что не менее убедительно, нашими последующими результатами.

Итак, мы принимаем, что

$$m/n = a^t,$$

где основание a экспоненты a^t — некоторое число, большее единицы, а $t = r(U) - r(V)$. В этих обозначениях вероятность P (победа U) победы игрока U в рассматриваемой встрече игроков U и V равна отношению среднего числа выигрываемых U встреч к общему числу встреч с игроком V , т. е.

$$P(\text{победа } U) = \frac{m}{m+n} = \frac{m/n}{1+m/n} = \frac{a^t}{1+a^t} = p(t).$$

Ясно, что величина P (победа U) является функцией t . Так как переменная t равна разности $r(U) - r(V)$ рейтингов соперников, то непосредственно видно, что при $t = 0$ (т. е. при равном классе игроков) вероятность $P(0) = 1/2$: обе противоборствующие стороны могут выиграть встречу с равной вероятностью.

При неограниченном увеличении t (т. е. при неограниченном возрастании рейтинга игрока U по сравнению с рейтингом игрока V) вероятность $P(t)$ стремится к единице: игрок U почти наверняка выиграет у V . Если же t становится отрицательным ($r(U) < r(V)$) и неограниченно убывает, то вероятность $P(t)$ победы U над V неограниченно приближается к нулю.

Графики функций $P(t)$ в зависимости от значения параметра a показаны на рис. 31. График функции $P_1(t) = \frac{a_1^t}{1+a_1^t}$ распо-

жен при $a_1 > a$ выше графика $P(t) = \frac{a^t}{1 + a^t}$ при $t > 0$ и ниже его при $t < 0$.

Теперь вся проблема построения классификации сводится к выбору числового значения параметра a и масштаба для оценивания разности в классе (рейтингов) игроков.

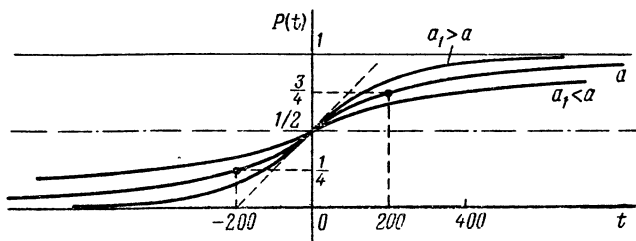


Рис. 31

С этой общей позиции можно объяснить идею построения уже ставшей классической (но пока не получившей в публикациях четкого обоснования) системы классификации шахматистов, предложенной американским профессором А. Эло и принятой Международной федерацией шахмат (ФИДЕ) в 1970 г.

Статистика шахматных турниров свидетельствует о том, что если один из соперников на один разряд (на одну ступень) в шахматной иерархии стоит выше другого, то первый выигрывает у второго, в среднем, 75 очков из 100 возможных, т. е. с вероятностью, равной 0,75.

При построении кривой $p(t)$, т. е. при выборе значения параметра a , этот факт следует учесть следующим образом. Предположим, что различие между игроками, принадлежащими к двум соседним ступеням (разрядам) шахматной иерархии, составляет λ единиц рейтинга. Иными словами, при $t = r(U) - r(V) = \lambda$ величина вероятности победы U над V равна $P(\lambda) = 0,75$. Это предположение приводит к соотношению для определения значения a :

$$\frac{a^\lambda}{1 + a^\lambda} = 0,75,$$

или $a^\lambda = 3$. Допустив, например, что $\lambda = 200$ из $a^{200} = 3$, найдем $a = 1,0055$.

Теперь можно подсчитать, что при разности рейтингов $t = 5$

$$P(5) = \frac{a^5}{1 + a^5} = 0,510,$$

при $t = 10$ $P(10) = 0,514$; при $t = 15$ $P(15) = 0,520$; при $t = 20$ $P(20) = 0,527$ и т. д.

Подсчитав соответствующие вероятности $P(t)$ для разностей рейтингов в пределах от $t = 0$ до $t = 735$ (и больше), придем к таблице А. Эло (табл. 10) (она приведена, например, в [24]).

Таблица 10

ΔK	h_6	h_M	ΔK	h_6	h_M	ΔK	h_6	h_M
0—3	50	50	122—129	67	33	279—290	84	16
4—10	51	49	130—137	68	32	291—302	85	15
11—17	52	48	138—145	69	31	303—315	86	14
18—25	53	47	146—153	70	30	316—328	87	13
26—32	54	46	154—162	71	29	329—344	88	12
33—39	55	45	163—170	72	28	345—357	89	11
40—46	56	44	171—179	73	27	358—374	90	10
47—53	57	43	180—188	74	26	375—391	91	9
54—61	58	42	189—197	75	25	392—411	92	8
62—68	59	41	198—206	76	24	412—432	93	7
69—76	60	40	207—215	77	23	433—456	94	6
77—83	61	39	216—225	78	22	457—484	95	5
84—91	62	38	226—235	79	21	485—517	96	4
92—98	63	37	236—245	80	20	518—559	97	3
99—106	64	36	246—256	81	19	560—619	98	2
107—113	65	35	257—267	82	18	620—735	99	1
114—121	66	34	268—278	83	17	свыше 735	100	0

Величина ΔK — разность между коэффициентами Эло игроков равна в наших обозначениях значению t . Величины h_6 и h_M из таблицы Эло (проценты, которые «полагается» набрать шахматисту с большим и, соответственно, с меньшим рейтингом) являются в действительности найденными выше вероятностями P (победа U) и P (победа V) $= 1 - P$ (победа U).

Полученное совпадение говорит о том, что в качестве отправной разницы в рейтингах в системе Эло принято число 200.

Подчеркнем, однако, что можно предположить, вопреки Эло, что разница λ в рейтингах между представителями двух соседних ступеней шахматной иерархии должна составлять не 200, а, скажем, 250 (или даже 300) единиц рейтинга. Это привело бы к другому, меньшему значению параметра $a = 1,0044$, определяемому из уравнения $a^{250} = 3$, и, естественно, — к другой таблице, подобной, однако, таблице Эло.

Весьма возможно, что пересчет рейтингов игроков после завершения турнира с помощью новой таблицы окажется более удачным, чем по таблице Эло. Единственным обособно-

ванием («оправданием»!) выбора значения $\lambda = 200$ может послужить изучение объемного статистического материала, накопленного в многолетних шахматных баталиях.

Так или иначе, имеется возможность построения целого семейства классификаций, подобных друг другу. Так, в частности, можно предполагать, что разница в рейтингах между представителями каждых двух соседних разрядов не должна быть постоянной, а меняться по мере продвижения вверх (от третьего разряда до гроссмейстера). Правда, это несколько усложнит процесс пересчета рейтингов и потому вряд ли окажется практически целесообразным.

Но вернемся к системе Эло. Она завершается правилом пересчета рейтинга шахматиста. Это правило формализуется в виде линейной зависимости

$$r_n = r_{ст} + \mu(N - N_{ож}), \quad (1)$$

выражающей новый рейтинг (по завершении всего турнира) r_n через старый рейтинг $r_{ст}$ (предшествующий турниру) и через разность между числом N очков, фактически набранных шахматистом, и числом очков $N_{ож}$, которое ему «полагается», в силу его квалификации, набрать в турнире.

Если фактически набранное число N очков совпадает с ожидаемым $N_{ож}$, то из (1) следует, что рейтинг шахматиста остается без изменения: $r_n = r_{ст}$.

При $N > N_{ож}$, т. е. при $N - N_{ож} > 0$, его рейтинг возрастет, при $N < N_{ож}$ — станет меньше предметчевого.

В системе Эло в качестве коэффициента μ выбрано число 10. Поэтому при $N - N_{ож} = 1$ из формулы

$$r_n = r_{ст} + 10(N - N_{ож})$$

следует, что рейтинг игрока возрастет на 10 единиц. Иными словами, одному очку, набранному сверх ожидаемых, соответствует 10 единиц рейтинга. Это обстоятельство является также своего рода «произволом». Можно положить, например, $\mu = 15$ или $\mu = 20$.

Реализация пересчета рейтинга требует знания величины $N_{ож}$. Числовое значение $N_{ож}$ находится следующим способом (оно всегда округляется до полуочка и потому рейтинги всегда оказываются целыми числами).

Допустим, что шахматист A , имевший рейтинг $r_{ст}(A) = 2280$, встретился в турнире с игроками B, C, D, E , имевшими рейтинги соответственно равные: $r_{ст}(B) = 2280$, $r_{ст}(C) = 2285$, $r_{ст}(D) = 2270$, $r_{ст}(E) = 2260$. Тогда вероятность победы A над B составит 0,5 (отождествляется со средним числом выигранных очков), вероятность победы A над C равна 0,49 (так как

$r_{\text{ст}}(C) - r_{\text{ст}}(A) = 5$), вероятность победы A над D равна 0,514 (так как $r_{\text{ст}}(A) - r_{\text{ст}}(D) = 10$), и, наконец, вероятность победы A над E равна 0,527 (так как $r_{\text{ст}}(A) - r_{\text{ст}}(E) = 20$). Следовательно, можно ожидать, что шахматист A во всех упомянутых встречах наберет

$$N_{\text{ож}}(A) = 0,500 + 0,490 + 0,514 + 0,527 = 2,031 \text{ очка.}$$

Подсчет $N_{\text{ож}}$ упрощается путем введения так называемого рейтинга $r(t)$ турнира, равного среднеарифметическому рейтингов всех его участников.

Очевидно, что чем сильнее состав играющих, тем рейтинг турнира больше. Вообще, для рассмотрения (квалификации) турнира в системе Эло требуется, чтобы не менее двух третей его участников состояло в квалификационных списках (т. е. уже обладали присвоенными им рейтингами) до начала турнира и чтобы рейтинг турнира был не меньшим 2250.

Вступающему в турнир шахматисту, еще не обладающему рейтингом, присваивается начальный рейтинг $r_{\text{нач}} = 2200$.

Вслед за этим, вместо того чтобы находить значения параметра t для всех встреч A с B, C, D, E (как это сделано выше), его находят лишь единожды, как разность $r_{\text{ст}}(A) - r(t)$ между рейтингами шахматиста A и турнира. Этим самым предполагают, что шахматист играет $n - 1$ партию (при n участниках) с некоторым фиктивным партнером, обладающим рейтингом $r(t)$ турнира.

Так, например, допустив, что в турнире играют только шахматисты A, B, C, D, E , найдем рейтинг турнира $r(t) = \frac{1}{5}(2280 + 2280 + 2285 + 2270 + 2260) = 2275$.

Шахматист A имеет рейтинг $r_{\text{ст}}(A) = 2280$. Разность $t = 2280 - 2275 = 5$. Раньше уже было подсчитано, что $P(5) = 0,510$. Так как A встречается с фиктивным партнером в четырех партиях, то для него ожидаемое число очков $N_{\text{ож}}(A) = 0,510 \times 4 = 2,040 \approx 2$.

Допустим далее, что фактически A набрал в турнире $N(A) = 3,5$ очка. Тогда $r_n(A) = 2280 + 10(3,5 - 2) = 2280 + 15 = 2295$, и, следовательно, рейтинг A возрос на 15 единиц.

Классификационная система Эло основана, как можно заключить из предшествующего, на трех предположениях:

1) отношение среднего числа выигранных к общему числу сыгранных шахматистом со своим противником партий находится в экспоненциальной зависимости от разности рейтингов играющих сторон;

2) разница в рейтингах шахматистов двух соседних рядов шахматной иерархии составляет 200 единиц рейтинга;

3) одному набранному (свыше ожидаемого числа) очку соответствует 10 единиц рейтинга.

Таким образом, система Эло имеет определенное теоретико-статистическое обоснование. Ее правомерность подтверждена статистической достоверностью прогнозов.

Еще за семь лет до принятия ФИДЕ его системы (в 1963 г.) Эло подсчитал рейтинги выдающихся шахматистов со времен П. Морфи (рейтинг — 2690). При этом рейтинг $r \geq 2600$ получили 28 шахматистов (Э. Ласкер, Х. Капабланка, М. Ботвинник, М. Таль и др.).

Для того чтобы получить звание, например, международного мастера (гроссмейстера), правила ФИДЕ требуют повторного набора нормативного количества очков, зависящего от категории сложности турниров, в которых эти очки набираются.

В зависимости от рейтинга различают турниры шестнадцати категорий сложности.

Первая категория определяется рейтингом в диапазоне от 2251 до 2275. Шестнадцатая категория соответствует рейтингу в пределах 2626 — 2650.

Претендующий на звание международного мастера (гроссмейстера) должен набрать, например, в турнире десятой категории сложности (рейтинг 2476 — 2500) не менее 47 (соответственно 67) процентов максимально возможного числа очков.

Повторно нормативное количество очков претендующий может набрать в турнире иной категории сложности — в согласии с принятой ФИДЕ шкалой.

В принятой ныне в СССР классификации шахматистов, основанной на системе Эло, подсчет рейтингов (коэффициентов) отличается тем, что

1) ожидаемое количество очков $N_{ож}$ округляется до 0,1 очка;

2) действует своя шкала сложности турниров и свои нормативы, достижение которых необходимо для получения спортивных званий;

3) для участника соревнований, обладающего исходным рейтингом $r_{ст} = 2200$, новый рейтинг r_n устанавливается по правилу

$$r_n = 2100 + 200 N/N_m,$$

где N_m — нормативное число очков мастера, а N — фактически набранное участником количество очков. Это правило позволяет удачно выступившему участнику значительно повысить свой рейтинг. Так, например, при выполнении им нормы мастера рейтинг его возрастет на 200 единиц.



9.2. Международная теннисная классификация

Международной ассоциацией теннисистов профессионалов (АТР — Association of Tennis Professionals) с 1979 г. введен математический метод ранжирования профессиональных теннисистов (мужчин).

Метод реализован в виде компьютерной ранжирующей системы Атари — АТП, находящейся в ведении Международного совета мужчин теннисистов-профессионалов при АТР. Ранжирование основано на данных (в виде начисляемых теннисисту очков) о результатах наиболее важных (регистрируемых системой) международных турниров.

Хотя метод Атари — АТП и называется математическим, в нем, однако, очень мало математики как таковой. Это — четкая система подсчета очков, основанная на определенных правилах и таблицах и имеющая машинную реализацию. По своей сущности вся система ранжирования АТР — сугубо коммерческая. Все, в конечном счете, определяется деньгами — призовыми фондами турниров. Остановимся лишь на основных особенностях системы.

В ранжирование включается каждый теннисист, участвующий в турнирах и выигравший в течение предшествующего оцениванию (ранжированию) периода, равного двенадцати месяцам, не менее определенной суммы денежных единиц (долларов). Эта сумма устанавливается АТП. Пересмотр классификации производится примерно 40 раз в течение года. Отдельно классифицируются теннисисты по результатам одиночных и парных игр.

Каждый игрок оценивается (получает соответствующее место в классификации) средним числом очков, равным отношению N/τ числа N набранных им в турнирах очков к числу τ сыгранных турниров. При этом число τ не может быть меньше числа 12 даже при меньшем числе фактически сыгранных теннисистом турниров. Если же он участвовал в большем, чем двенадцать, числе турниров, то число τ находится по специальной таблице.

Турниры, в которых участвуют теннисисты-профессионалы, разбиваются на три класса (серии): звездные, классификационные (по назначению или вызову Совета) и турниры-сателлиты.

В свою очередь звездные турниры подразделяются на категории «звездности». Категория звездности турнира определяется двумя параметрами: суммой его общего призового фонда и числом участников (т. е. размерностью сетки). Участники встре-

чаются в турнире по олимпийской системе. Количество звезд турнира определяется по соответствующим таблицам.

Установлены четкие правила, по которым компьютерная система начисляет очки и проводит ранжирование.

Помимо очков, начисляемых участнику за занятое место в зависимости от категории турнира, ему добавляются еще и премиальные очки за персональные победы и отдельно за участие в квалификационных турнирах (по назначению).

Всякий участник квалификационного турнира, попавший после его завершения в основную сетку (т. е. в сетку звездных турниров), получает одно очко. За победу в квалификационном турнире над каждым игроком из первых 150 в классификации ему добавляют еще одно очко. Однако в сумме все очки, полученные по завершении квалификационного турнира, не должны превышать трех.

Участникам парных встреч очки начисляются на основе той же методики, что и участникам одиночных матчей.

Участникам турнира — сателлита начисляются очки на основе соответствующей таблицы.

Премиальные очки в турнире-сателлите начисляются вне зависимости от его категории и только победителю одиночного разряда, финалисту одиночного разряда, победителю в парном разряде.

В турнире-сателлите мастеров премиальные очки начисляются победителю, финалистам и участникам полуфиналов одиночного и парного разрядов в зависимости от категории турнира по соответствующей таблице.

Таковы основные особенности системы ранжирования АТП, которую можно условно назвать «очковой» системой.

9.3. Отечественные системы классификаций теннисистов

В Советском Союзе в настоящее время конкурируют две системы теннисных классификаций. В одной из них (автор Е. В. Царев) ранжирование основано на присвоении каждому из теннисистов определенного рейтинга и на пересчете рейтингов по завершении каждого соревнования, согласно специальному положению. В этом смысле рассматриваемая «рейтинговая система» родственна системе Эло классификации шахматистов. Однако система Е. В. Царева имеет иное теоретико-статистическое обоснование и по методике пересчета рейтинга, присвоению первоначального рейтинга, обработке данных существенно отличается от системы Эло.

Рейтинговая система принята ныне для составления детской и юношеской классификаций.

Система имеет разветвленное программное обеспечение, ориентированное на работу с ЭВМ в диалоговом режиме, и листинг теннисистов значительной емкости. Пересчет послематчевых рейтингов можно проводить и вручную.

В другой из классификационных систем (авторы А. И. Наумко, Г. А. Кондратьева) ранжирование основано на подсчете числа очков, присваиваемых теннисистам по результатам соревнований. Естественно, что эта «очковая система» (принята для классификации теннисистов старше 18 лет) схожа в определенном смысле с описанной выше системой АТП. В то же время она принципиально отлична от нее в идейном плане. В системе АТП начисляемые теннисисту очки определяются, в конечном счете, призовым фондом матчей. В отечественной системе при подсчете очков руководствуются иными параметрами: рангом соревнований — их спортивной значимостью, стремлением повысить мастерство теннисистов и другими. Изменения в ранжирование вносятся системой два раза в год — после завершения зимнего цикла соревнований (в закрытых помещениях) и после весенне-осеннего цикла (на открытых площадках). Расчет очков производится с помощью ЭВМ или вручную.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

10.1. Предостережение от увлечений

Всякая модель реального объекта имеет относительную ценность: все зависит от того, насколько точно она этот объект описывает. В значительной степени это относится и к математическим моделям, используемым в задачах исследования операций и принятия решений. Рассмотренные в этой книге модели многих спортивных ситуаций не следует воспринимать буквально — как руководство к немедленным действиям. Модель, как правило, не в состоянии отразить все особенности изучаемой ситуации. В первую очередь она в должной мере (или даже вовсе) не учитывает психологические, физиологические особенности спортсменов, опыт, интуицию тренеров и вообще то, что называется «здравым смыслом». В принципе путем существенного усложнения модели некоторые из этих факторов можно учесть (см., например, моделирование игры в теннис, п. 3.13). Однако следует всегда помнить, что при построении модели, при выборе критерия эффективности, а значит и при обосновании выбранного решения, произвол неизбежен. Математические методы в исследовании операций не ликви-

дируют этот произвол, а лишь указывают на те шаги в исследовании, где был допущен произвол. Трудно указать такой метод в исследовании операций, который освободил бы лицо, принимающее решение, от необходимости обдумывать ситуацию в целом, руководствоваться здравым смыслом, используя, конечно, результаты математических расчетов. Такие расчеты могут доставить совершенно неожиданную и важную информацию. Эти соображения (они высказываются многими авторитетами в области исследования операций) можно удачно проиллюстрировать на примере теории антагонистических игр. В этой теории предполагается, что каждой из сторон известны все стратегии другой стороны. Неизвестно лишь, какую из стратегий какая из сторон выберет. В действительности же полный перечень возможных действий одной из сторон противнику заранее неизвестен. Поэтому выгодно избрать стратегию для противника совсем неожиданную, не входящую в перечень ему известных стратегий. Тем не менее теория игр имеет значительную познавательную и практическую ценность, ибо позволяет при выборе решения ориентироваться на результаты математического исследования соответствующей игровой модели. Итак, наш рецепт: математическая модель плюс здравый смысл.

В соответствующих разделах книги приведены некоторые методы, указания, формулы. Пользуясь ими, читатель (даже не «вклиниваясь» глубоко в математическую канву текста) может сам проделать простейшие «прикидочные» расчеты, используя свои исходные данные.

10.2. Побуждения к исследованиям

Первые математические работы, приводящие к количественным оценкам в области досуга и спорта, не опирались на методы исследования операций. Основное внимание уделялось задачам статистического характера, например, определялась частота перехвата или потери мяча в баскетболе, частота выигрыша очка при игре в теннис, оценивались прибыли от туристической деятельности и т. п.

И только в начале семидесятых годов текущего столетия методы исследования операций начали более активно проникать в эти новые области: организация досуга, туризм и спорт. Это проникновение в определенной степени стимулировалось изменением в промышленно развитых странах условий жизни значительной части населения (сокращением рабочей недели, совершенствованием быта, развитием средств связи и транспорта и т. п.) и как следствие — увеличением свободного вре-

мени. Так, по некоторым данным *) относительная доля свободного времени от общего объема активного времени человека составляла в среднем в 1910 г. 27 %, в 1950 г. — 34 %, а в 2000 г. по прогнозу достигнет 38 %.

Этим вопросам посвящен ряд современных работ, отмеченных в [11]. Первая попытка использования исследования операций в области туризма относится к 1960 г., а в области спорта — к 1954 г. **).

Мы убеждены, что разумное использование научных методов в тренерской деятельности может существенно улучшить как индивидуальные спортивные показатели, так и результативность командных игр. Вот что по этому поводу говорят авторы книги [11] на стр. 655:

«Анализ видов спорта, по которым проводятся соревнования, с точки зрения исследования операций позволяет сделать следующие выводы: банки данных находятся в сравнительно хорошем состоянии и содержат новейшие сведения (люди проявляют огромный интерес к этим данным), действия повторяются, поэтому можно проводить неоднократные наблюдения процесса приблизительно в одних и тех же условиях; правила игры «точно определены», что исключает возможность «изменить игру» в самом ее разгаре; руководство в этой сфере, очевидно, достаточно восприимчиво к техническим нововведениям, поскольку тренеры активно ищут способы обеспечить так называемый «конкурентный перевес». Можно предположить, что именно поиск конкурентного перевеса, который ведут тренеры, является причиной того, что многие особенно успешные случаи применения методов исследования операций в области спорта до сих пор остаются секретами, которые ревностно охраняются».

10.3. Краткий обзор приложений

Ввиду коммерческих выгод бейсбол издавна привлекал внимание спортивных и деловых кругов. Именно поэтому был накоплен значительный объем статистических данных, который позволил некоторым специалистам сделать заключения о качестве игры команды (среднее число результативных подач в зависимости от мастерства подающего и ловящего игроков, закон распределения попаданий и т. п.). Для игры

*) *Holman M. A. A National time — Budget for Year 2000. — Sociology and Social Res., 1961, v. 42, № 1.*

**) *Mottly C. M. The Application of Operations Research Methods to Athletic Games, — Oper. Res., 1954, v. 2, № 3.*

в бейсбол была построена с помощью теоретико-вероятностного метода Монте-Карло имитационная модель.

Вслед за этим появились приложения математических методов к анализу игры в футбол. В одной из работ*) проанализированы 8373 игры из 56 туров, включенные в таблицу Национальной футбольной лиги США. Результатом явились существенные указания, касающиеся стратегии нападающих.

Удалось доказать, что оптимальная стратегия в выигрыше чемпионата по футболу может включать и такой вариант, как поражение в отдельных матчах. Такая ситуация может возникать, когда команда, уже обеспечившая себе место в высшей лиге, должна провести еще одну встречу в своей (низшей) лиге. Однако в случае победы ей пришлось бы в первом туре высшей лиги встретиться с весьма сильным противником, в случае проигрыша — с более слабым. Подобные ситуации могут быть описаны с помощью марковских цепей (см. п. 3.14); анализ ситуаций позволяет выдать рекомендации о том, когда следует стремиться к победе, а когда смириться с поражением. Нечто подобное авторы имели возможность наблюдать в ходе некоторых соревнований по теннису. Игрок предпочитал проигрыш (или отказ от игры) в первом круге с тем, чтобы попасть в «утешительную» часть турнира, включающую более слабых игроков, и где он мог бы с определенной гарантией набрать требуемое количество очков (например, для подтверждения разряда).

Известны работы, которые посвящены методам формирования основного состава футбольной команды, определения числа запасных игроков, оптимизации возрастного состава, с определением циклов обновления состава команды и т. п.

Имеются рекомендации по созданию оптимальной программы еженедельных тренировок для пятиборцев**).

Построенная модель включала в качестве целевой функции линейную зависимость от результатов в каждом виде пятиборья. В качестве ограничений фигурировали также линейные зависимости, среди которых — ограничение на общее время (в течение недели) тренировок спортсмена по всем пяти видам спорта; на объем скоростных тренировок — он не может быть меньше объема тренировок на выносливость; на объем тренировок по общей физической подготовке — он должен превышать объем тренировок по отработке техники и т. п. Воз-

*) *Carter W., Machol R. Oper. Research in Football, — Oper. Res., 1971, v. 19, p. 541 — 544.*

**) *Landany S. P. Operation of Pentathlon Training Plans. — Management Sci., 1975, v. 21, № 10.*

ническая модель анализировалась методами линейного программирования.

Читатель уже обнаружил, сколь широк круг задач, эффективно решаемых методами линейного программирования. Этим и объясняется повышенное внимание, уделенное в книге некоторым теоретическим аспектам линейного программирования.

Проблемы выработки оптимальной стратегии возникают не только в командных соревнованиях, но и в индивидуальных видах спортивных встреч.

Мы уже описали (см. п. 7.6) математическую модель соревнований по подъему штанги. Нарочито упрощенная модель предполагала, что каждый из спортсменов имеет право попытаться лишь один раз взять вес и лишь один раз пропустить подход к очередному (или начальному) весу. В рамках этой модели выявились оптимальные стратегии участников соревнований. Как уже отмечалось, аналогичным методом может быть проанализирована ситуация, фактически имеющая место в соревнованиях, когда каждый участник получает право на три попытки поднять штангу.

Примерно теми же методами можно изучить ситуацию, возникающую в соревнованиях по прыжкам в высоту и прыжкам с шестом, в которых каждый из участников имеет право а) начать прыжки с любой высоты, но не меньшей, чем фиксированная «квалификационная»; б) сделать три попытки для преодоления каждой следующей установленной высоты. Преодолев некоторую «начальную» высоту (он ее выбирает сам), спортсмен просит поднять планку и т. д. Ему засчитывается наибольшая из преодоленных высот, без учета предшествующих попыток. Если спортсмен начинает выступление с большей начальной высоты, то он экономит силы, и вероятность взятия следующей высоты увеличивается. Однако в случае неудачной попытки его результат считается нулевым. Имеется возможность оценить в вероятностных терминах ожидаемый результат спортсмена в зависимости от начальной высоты и выдать некоторые рекомендации относительно оптимальной начальной высоты.

10.4. Собственно заключение

Итак, мы завершаем эту книгу, высказав предостережение от излишнего оптимизма и в то же время порождая его с помощью описания удачных приложений математических методов к спортивным проблемам.

Применение математики, в частности теории исследования операций, в спорте — область, которая еще ждет должного вни-

мания как представителей точных наук, так и спортивных деятелей.

Спортивные соревнования доставляют исследователю богатейший материал; он фиксируется тренерами, бережно сохраняется, постоянно накапливается. Имеются широкие возможности экспериментирования, проверки математических моделей и оптимальных стратегий в спортивных ситуациях. Лишь незначительная часть (быть может, не самая интересная) проблем спортивного характера нашла отражение на страницах этой книги. Авторы надеются, что с помощью заинтересованного читателя область «математика и спорт» обогатится новыми интересными исследованиями и результатами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.
2. *Вентцель Е. С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1980.
3. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969.
4. *Моисеев Н. Н.* Математик задает вопросы. — М.: Знание, 1974.
5. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М.: Наука, 1979.
6. *Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е.* Элементы линейной алгебры и линейного программирования. — М.: Наука, 1967.
7. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1983.
8. *Кофман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций. — М.: Мир, 1966.
9. *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.* Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1982 (Библиотечка «Квант», вып. 23).
10. *Кемени Д., Снелл Д.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970.
11. Исследование операций (в двух томах)/Под ред. Д. Моудера, С. Элмаграби. — М.: Мир, 1981.
12. Справочник по легкой атлетике. — М.: Физкультура и спорт, 1983.
13. *Абсаямова И. В., Богданова Е. В.* Фигурное катание, комментарий к судейству. — М.: Физкультура и спорт, 1981.
14. Теннис, правила соревнований. — М.: Физкультура и спорт, 1980.
15. *Литвак Б. Г., Садовский А. Л.* О некоторых игровых моделях экспертных процедур. В сб.: Прикладная математика и задачи железнодорожного транспорта, М.: МИИТ, 1979, вып. 640.
16. *Садовский А. Л.* Об игровом подходе к организации экспертных процедур. — Сибирская конференция по надежности научно-технических прогнозов, кн. II. — Новосибирск, 1981.
17. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1964.
18. *Льюис Р. Д., Райфа Х.* Игры и решения. — М.: ИЛ, 1961.
19. Позиционные игры (Сборник статей). — М.: Наука, 1967.
20. *Мышкис А. Д., Садовский Л. Е.* — Квант, 1976, № 6.

21. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1968.
22. *Риордан Д.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963.
23. *Аршинов М. Н., Садовский Л. Е.* Коды и математика. — М.: Наука, 1983 (Библиотечка «Квант», вып. 30).
24. *Гик Е. Я.* Шахматы и математика. — М.: Наука, 1983 (Библиотечка «Квант», вып. 24).
25. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1967.
26. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика. — М.: Финансы и статистика, 1983.
27. *Садовский Л. Е.* — Квант, 1974, № 1.
28. *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.* Механика и прикладная математика: логика и особенности приложений математики. — М.: Наука, 1983.
29. *Литвак Б. Г.* Экспертная информация. — М.: Радио и связь, 1982.
30. *Садовский Л. Е., Садовский А. Л., Садовская О. Л.* — Квант, 1984, № 8.

Леонид Ефимович Садовский
Алексей Леонидович Садовский

МАТЕМАТИКА И СПОРТ

Редактор *А Г Мордвицев*
Художественный редактор *Т Н Кольченко*
Технический редактор *Е В Морозова*
Корректоры *Т Г Егорова, Л С Сомова*

ИБ № 12784

Сдано в набор 24.01.85 Подписано к печати 29.08.85 Т-18814 Формат 84 × 108/32 Бумага
тип. № 2 Гарнитура таймс. Печать высокая. Усл. печ. л. 10,08 Усл. кр.-отт. 10,5 Уч.-изд.
л. 11,12 Тираж 100 000 экз. Заказ № 1789 Цена 35 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское
производственно-техническое объединение «Печатный Двор» им. А. М. Горького Союзполи-
графпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и
книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15

35 коп.
