М. А. Айзерман

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1980

ОГЛАВЛЕНИЕ

КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке второго издания книги наиболее существенные дополнения включены в первую, вторую, четвертую и седьмую главы; кроме того (на основе замечаний, полученных мною от читателей), во многие места текста внесены отдельные уточнения и исправления.

Автор благодарен читателям за присланные замечания и с интересом ждет их оценки изменений, внесенных во второе издание книги.

К моменту выхода в свет настоящего издания читатели будут располагать задачником, специально приспособленным к построению этого курса и составленным на основе многолетнего опыта кафедры механики МФТИ (Е. С. Пятницкий, Н. М. Трухан, Ю. И. Ханукаев, Г. Н. Яковенко «Сборник задач по аналитической механике»).

Автор надеется, что почти одновременный выход в свет второго издания лекционного курса и задачника поможет использованию опыта кафедры МФТИ кафедрами других высших учебных заведений, которые сталкиваются при преподавании классической механики с теми же проблемами и трудностями.

М. А. Айзерман

Светлой памяти
Феликса Рувимовича
ГАНТМАХЕРА
посвящает эту книгу
автор

ОТ АВТОРА

Эта книга содержит изложение курса лекций по классической механике в том виде, в каком он читался последние годы студентам Московского физико-технического института (МФТИ).

Бесспорна и предельно ясна роль курса классической механики в учебных планах механико-математических факультетов университетов и втузов, готовящих инженеров-механиков. После курса классической механики студенты таких учебных заведений знакомятся с различными дисциплинами, непосредственно на него опирающимися (прикладная механика, сопротивление материалов и теория упругости, гидро- и аэромеханика и т. д.). Курсы теоретической и аналитической механики строятся так, чтобы создать основу для изучения этих дисциплин и привить навыки, необходимые для успешного их освоения.

Иное положение складывается при подготовке физиков и инженеров физических профилей. При подготовке специалистов этих профилей непосредственно за курсом классической механики читаются не упомянутые выше специальные разделы механики, а курсы теоретической физики (теория поля, квантовая механика, статистическая физика и т. д.) и специальные курсы, которые опираются на знание основ теоретической физики.

Разумеется, курсы классической механики, созданные для механико-математических факультетов или втузов, готовящих инженеров-механиков, оказались малопригодными для подготовки специалистов указанных выше профилей. Если можно было позволить себе не обращать внимания на эти трудности, пока речь шла о сравнительно малочисленных физических факультетах университетов, то положение стало более серьезным, когда количество студентов на этих факультетах выросло во много раз, а масштаб подготовки инженеров физических профилей стал соизмерим с масштабом подготовки инженеров-механиков. В этих условиях настоятельно необходимы постепенное создание новых курсов и выработка новых традиций, а это невозможно без обмена опытом кафедр и без широких дискуссий.

Кафедра механики МФТИ за последние годы существенно меняла характер изложения и экспериментировала в поисках курса классической механики, который «вписывался» бы в учебный план подготовки инженеров-физиков. Эти поиски и привели к курсу, излагаемому в настоящей книге.

Курс МФТИ складывался в значительной мере под влиянием Феликса Рувимовича Гантмахера. Ему принадлежат многие методические находки, которые легли в основу принятого в МФТИ построения курса. Неожиданная и преждевременная кончина не позволила Феликсу Рувимовичу самому написать задуманный им курс классической механики. Он успел написать лишь часть этого курса, содержащуюся в его книге «Лекции по аналитической механике», которая вышла первым изданием (1960 г.) при его жизни и вторым изданием (1966 г.) посмертно. Влияние Феликса Рувимовича на остальные разделы курса также столь велико, что эта книга по праву должна была бы быть подписана двумя авторами. Я не счел возможным сделать это только потому, что не был убежден, что Ф. Р. Гантмахер согласился бы со всеми теми изменениями, которые были внесены в этот курс за последние годы.

Курс складывался в ходе учебного процесса, «лекционного опробования», опыта семинарских занятий и экзаменов. Естественно, что все профессора и преподаватели кафедры приняли посильное участие в отработке курса. После того как курс был издан для студентов, я получил и от них немало ценных замечаний и советов. И все же я считаю приятным долгом особо выделить и поблагодарить моих коллег по кафедре — Л. И. Розоноэра, Е. С. Пятницкого и Г. М. Ильичеву. Их многочисленные советы, а порой и подлинно творческую помощь я принял с благодарностью. Но, разумеется, несмотря на все это, ответственность за все огрехи и прямые ошибки, которые могут быть обнаружены в книге, лежат целиком на мне.

Есть одно обстоятельство, за которое я хотел бы извиниться перед читателем. Оно касается списка литературы. В отношении такого списка, на мой взгляд, действует закон — «все или ничего». Лишенный возможности включить в список все публикации по классической механике или даже все вышедшие курсы — это непозволительно увеличило бы объем книги, — я принял решение отойти от традиций и вообще не включать в книгу библиографический список. Такое решение, заведомо непростительное, если бы речь шла о научной монографии, представляется мне естественным, когда речь идет о лекционном курсе.

Создание курса классической механики для физиков и инженеров физических специальностей — дело сравнительно новое. Курсов такого рода было издано немного, и всякий опыт в этой области неизбежно должен стать предметом дискуссий. Такая же участь ожидает и этот курс, и автор с интересом ждет отзывов, замечаний, пожеланий и предложений читателей. Автор просит направлять их на кафедру механики Московского физико-технического института (г. Долгопрудный Московской области).

М. А. Айзерман

Глава I

СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ (КЛАССИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА)

§ 1. Пространство, время и системы отсчета

Механика — наука о движении материальных объектов в пространстве и времени. Это определение лишено содержания до тех пор, пока не установлено, что означают термины «материальный объект», «пространство», «время» и «движение». Разъяснению того, какой смысл вкладывает в эти термины классическая механика, посвящены первые параграфы этой и следующей глав.

Классическая механика исходит из предположения, что свойства пространства и времени не зависят от того, какие материальные объекты участвуют в движении и каким образом они движутся. В связи с этим возникает возможность предварительно выделить и изучить некоторые общие свойства движений. При таком изучении рассматриваются лишь общие геометрические характеристики движения, которые в равной мере относятся к движению любых объектов — молекулы или Солнца, изображения на экране телевизора или тени самолета на Земле. Если бы предметом нашего исследования были лишь свойства пространства, то мы не вышли бы за пределы геометрии. С другой стороны, если бы мы интересовались лишь течением времени, то возникающие при этом простые задачи относились бы к иной науке, которую можно было бы назвать «хронометрией». Согласно данному выше определению механики, нас интересуют изменения положения некоторых объектов в пространстве и времени. До тех пор, пока мы не рассматриваем инерционных свойств движущихся объектов, нас интересует по существу лишь объединение геометрии и хронометрии. Такое объединение геометрии и хронометрии называется *кинематикой*. Кинематика не является собственно частью механики (поскольку при ее построении никоим образом не учитываются инерционные свойства материи) и могла бы излагаться в курсах геометрии. Однако по традиции в обычные курсы геометрии кинематика не включается, и необходимые сведения из кинематики приводятся в курсах механики. Связано это главным образом с тем, что хронометрия сравнительно бедна идеями и фактами, и поэтому, если отвлечься от потребностей механики, добавление хронометрии к обычным геометрическим построениям мало интересно с математической точки зрения.

Эта глава посвящена некоторым вопросам кинематики, которые освещаются здесь лишь в объеме, необходимом для понимания дальнейшего изложения.

При построении любой системы геометрии в основу кладется абстрактное представление о «месте», которое приводит к понятию *геометрическая точка*. Непрерывная последовательность сменяющих друг друга явлений порождает не поддающиеся точным определениям представления о «мгновении» и о «текущем времени». Абстрактное представление о «мгновении» связывается с понятием *момента времени*. Поскольку кинематика представляет собой объединение в единую систему геометрии и хронометрии, в основе ее построения лежит абстрактное понятие, объединяющее представление о месте и о мгновении. Соответствующая абстракция называется *движущейся геометрической точкой*, т. е. точкой, которая характеризуется как своим положением («местом»), так и мгновением («моментом времени»). В геометрии пространство понимается как совокупность (множество) геометрических точек; в хронометрии время понимается как множество моментов времени. Все дальнейшее построение кинематики полностью определяется тем, какие предположения делаются о взаимосвязи пространства и времени.

Сама возможность независимого построения геометрии и хронометрии при классическом миропонимании возникла именно потому, что такое миропонимание исходит из предположения о независимости течения времени от свойств пространства. Разумеется, это очень сильное и, вообще говоря, не обязательное предположение; например, релятивистская кинематика специальной теории относительности основана на утверждении о взаимосвязи времени и пространства, а при этом раздельное построение геометрии и хронометрии оказывается невозможным.

При классическом миропонимании предполагается, что пространство *однородно* и *изотропно*, а время однородно и однонаправленно. Однородность (изотропность) пространства означает отсутствие в пространстве чем-либо примечательных геометрических точек (направлений), которые могут быть выделены среди всех точек (направлений). Однородность времени означает, что при течении времени нет чем-либо примечательных, специально выделенных моментов и безразлично, от какого момента ведется отсчет.

Смысл понятия *движения* — основного понятия механики — становится ясным лишь после того, как в рассмотрение вводится «система отсчета», которую мы интуитивно связываем с каким-либо выбором системы координат в пространстве и способа отсчета времени. Но систему координат нельзя выделить и описать в пустом однородном и изотропном пространстве, так как для того, чтобы сделать это, надо указать, где расположено начало координат и как направлены ее оси, тем самым выделив в пространстве некоторую точку и некоторые направления. В связи с этим возникает вопрос о том, каким образом можно ввести системы отсчета в однородном и изотропном пространстве при однородном времени. Решение этого вопроса непосредственно связано с введением еще одной абстракции — «геометрическая твердая среда, снабженная часами».

Классическое миропонимание исходит из предположения о том, что как пространство, так и время «метризуемы», т. е. что можно определить и измерить расстояния между геометрическими точками в пространстве и интервалы между отдельными моментами времени. Более того, предполагается, что существуют приборы для таких измерений — твердые масштабы и часы.

В классической механике свойства пространства и времени конкретизируются следующим образом: пространство предполагается евклидовым, а время представляется евклидовой прямой.

Условимся называть континуальное множество геометрических точек, расстояния между которыми фиксированы, *геометрической твердой средой*. Если геометрическая твердая среда задана, то положение произвольной (не связанной с этой средой) геометрической точки будет характеризоваться той точкой среды, с которой рассматриваемая точка совпадает. В этом смысле геометрическую твердую среду можно принять за *геометрическую систему отсчета*. Бессмысленно было бы пытаться задать положение геометрической твердой среды в пустом однородном и изотропном пространстве. В то же время геометрическую твердую среду можно связать с каким-либо реальным объектом, находящимся в таком пространстве, например с каким-либо материальным телом. Но объектов такого рода много, так что геометрическая твердая среда не единственна и можно ввести множество таких сред, каждая из которых будет «абсолютно проницаемой» для точек другой среды. Тогда можно определить положение какой-либо геометрической твердой среды относительно любой другой геометрической твердой среды, определив положение каждой точки первой среды относительно второй. В отличие от пустого однородного и изотропного пространства, в каждой геометрической твердой среде может быть различным образом задана система координат как совокупность чисел, которые определяют положение каждой точки этой среды по отношению к некоторым специально выделенным «базовым», или «основным», точкам. В классической кинематике рассматриваются трехмерные твердые геометрические среды, т. е. среды, в которых для определения положения точки достаточно указать для нее три таких числа; в некоторых случаях вводятся в рассмотрение «вырожденные» среды — двумерные и одномерные.

Системой отсчета (без добавления слова геометрическая) в механике называется геометрическая система отсчета, дополненная «часами», находящимися в каждой точке рассматриваемой геометрической твердой среды. Как уже говорилось выше, предполагается, что время течет независимо от положения часов. Иначе говоря, предполагается, что часы могут быть синхронизированы раз и навсегда и что, следовательно, в разных точках одной и той же геометрической твердой среды и даже, более того, в разных геометрических твердых средах показания всех часов совершенно одинаковы. Теперь, когда геометрическая твердая среда снабжена часами, мы можем дать следующее разъяснение: говоря ранее о том, что расстояния между точками среды фиксированы, мы имели в виду, что они не изменяются во времени. Так как по предположению время течет одинаково во всех системах отсчета, положение любой геометрической точки может быть задано ее координатами, меняющимися во времени, т. е. время можно рассматривать как параметр, от которого зависят координаты точки. Теперь понятно, что изучение движений может быть сведено к изучению геометрических свойств некоторых кривых, заданных в параметрической форме (время играет роль параметра) по отношению к какой-либо геометрической твердой среде. Именно это мы имели выше в виду, говоря, что кинематика, собственно, является разделом геометрии и лишь по традиции включается в курсы механики.

В силу однородности и изотропности пространства и однородности времени все системы отсчета равноправны, среди них нельзя выделить какую-либо примечательную систему отсчета, имеющую преимущества по сравнению с другими. Поэтому можно говорить лишь о движении одной системы отсчета по отношению к другой, но нельзя говорить об «абсолютном» движении систем отсчета; можно говорить о движении геометрической точки относительно некоторой фиксированной системы отсчета, но нельзя говорить об ее «абсолютном» движении. В связи с этим возможны следующие четыре ситуации.

1° Избрана некоторая система отсчета. Наблюдатель, связанный с этой системой, т. е. неподвижный относительно нее, видит движущуюся точку (рис. I.1, *а*).

В этой простейшей ситуации задача состоит в изучении различных способов описания наблюдаемого движения точки.

2° Заданы две системы отсчета (рис. I.1, *б*). Наблюдатель, связанный с первой из них, видит движение второй.

В этой ситуации возникает вопрос о том, каким образом описать движение одной системы отсчета относительно другой.

3° Заданы две системы отсчета, и с каждой из них связан свой наблюдатель. Оба наблюдателя видят одну и ту же движущуюся точку (рис. I.1, *в*). Наблюдаемые ими движения точки, вообще говоря, различны (так, например, первый наблюдатель может видеть неподвижную точку, в то время как второй наблюдатель видит движущуюся).

В этой ситуации возникает следующая задача: известно, как движется точка относительно первого наблюдателя (ситуация 1°);

известно, как движется система отсчета, с которой связан первый наблюдатель, относительно второй (ситуация 2°); требуется описать движение точки, которое видит второй наблюдатель.

4° Задано $n+1$ систем отсчета (n — произвольное конечное число). Системы отсчета перенумерованы (0, 1, ..., n), с каждой

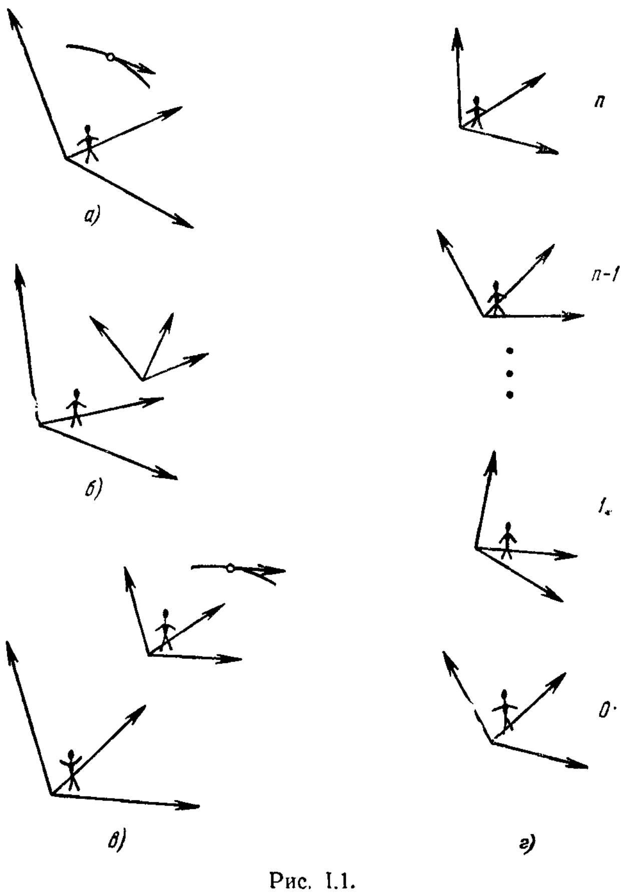

Рис. I.1.

из них связан свой наблюдатель, и известно, как движется k-я система отсчета ($k = 1, 2, \ldots, n$) относительно ($k-1$)-й (рис. I.1, *г*).

В этой ситуации возникает следующая задача: описать движение n-й системы отсчета относительно нулевой.

Основное содержание кинематики состоит в анализе четырех описанных выше ситуаций и связанных с ними задач. Они поочередно рассматриваются в следующих параграфах этой главы.

§ 2. Движение геометрической точки

Рассмотрим движение геометрической точки относительно какой-либо системы отсчета (рис. I.1, *а*). Предположим, что в соответствующей геометрической твердой среде каким-либо образом выбраны четыре несовпадающие точки такие, что любые три из них не лежат на одной прямой, причем одна из них принята за «начало координат», а три прямые, соединяющие начало координат с остальными тремя точками, задают три направления. Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, проведенный из начала координат к любой точке среды, можно задать, например, проекциями на эти направления, и изучение любого движения геометрической точки относительно системы отсчета сведется к исследованию вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$. Поэтому данный параграф лишь напоминает читателю основы векторного анализа в объеме, необходимом для понимания дальнейшего материала. Условимся считать, что три направления, выбранные в геометрической твердой среде, образуют правую декартову систему координат x, y, z. Определить движение геометрической точки — значит задать ее положение относительно выбранной системы координат x, y, z в любой момент времени t, т. е. задать вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$ (рис. I.2). Производная

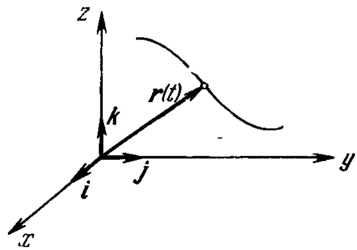

Рис. I.2.

$$\boldsymbol{v}(t)=d\boldsymbol{r}(t)/dt$$

называется *скоростью* точки, а вторая производная

$$\boldsymbol{w}(t)=d\boldsymbol{v}(t)/dt=d^2\boldsymbol{r}(t)/dt^2$$

— ее *ускорением*.

Для того чтобы задать вектор-функцию $\boldsymbol{r}(t)$, достаточно задать три скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты точки. Если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты осей x, y, z и, следовательно, постоянные векторы, то

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{i}x(t)+\boldsymbol{j}y(t)+\boldsymbol{k}z(t).$$

Скорость в этом случае выражается так:

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\boldsymbol{i}\frac{dx(t)}{dt}+\boldsymbol{j}\frac{dy(t)}{dt}+\boldsymbol{k}\frac{dz(t)}{dt}=\boldsymbol{i}v_x+\boldsymbol{j}v_y+\boldsymbol{k}v_z, \qquad (1)$$

где $v_x=dx/dt$, $v_y=dy/dt$, $v_z=dz/dt$ — проекции вектор-функции $\boldsymbol{v}(t)$ на оси x, y и z. Очевидно, что

$$\begin{gathered} v(t)=|\boldsymbol{v}(t)|=\sqrt{v_x^2(t)+v_y^2(t)+v_z^2(t)}, \\ \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{i})=v_x/v, \quad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{j})=v_y/v, \quad \cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{k})=v_z/v. \end{gathered} \qquad (2)$$

Аналогично устанавливаются выражения для ускорения:

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{i}\frac{d^2x}{dt^2}+\boldsymbol{j}\frac{d^2y}{dt^2}+\boldsymbol{k}\frac{d^2z}{dt^2}=\boldsymbol{i}w_x+\boldsymbol{j}w_y+\boldsymbol{k}w_z, \tag{3}$$

где $w_x=d^2x/dt^2$, $w_y=d^2y/dt^2$, $w_z=d^2z/dt^2$ — ускорения вдоль осей x, y и z; тогда

$$\begin{gathered} w(t)=|\boldsymbol{w}(t)|=\sqrt{w_x^2(t)+w_y^2(t)+w_z^2(t)}, \\ \cos(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{i})=w_x/w, \quad \cos(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{j})=w_y/w, \quad \cos(\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{k})=w_z/w. \end{gathered} \tag{4}$$

При ином способе задания движения, так называемом *естественном* способе, в пространстве x, y, z задается кривая, по которой движется точка, — *траектория точки*. На траектории фиксируются начало, положительное направление отсчета и скалярная функция $s(t)$, задающая длину дуги траектории от начала отсчета до того места, где в момент t находится движущаяся точка

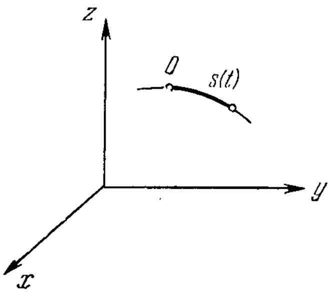

Рис. I.3.

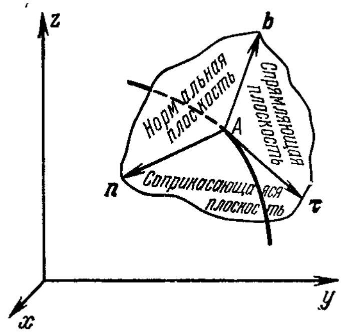

Рис. I.4.

(рис. I.3). В том случае, когда движение все время происходит в одном и том же направлении, значения этой функции совпадают с путем, пройденным по траектории.

Введем в рассмотрение так называемый *сопровождающий трехгранник*[1]), образованный ортами $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ касательной, главной нормали и бинормали[2]) в точке A траектории (рис. I.4). Направление ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ меняется при движении точки A, т. е. эти орты представляют собой вектор-функции $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}(t)$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(t)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(t)$.

---

[1]) Иногда этот трехгранник называют естественным, натуральным или подвижным.

[2]) Напоминаем читателю, что главной нормалью называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, а бинормалью — нормаль, перпендикулярная соприкасающейся плоскости (Соприкасающаяся плоскость получается как предел плоскостей, проходящих через три близкие точки кривой, при неограниченном сближении этих точек. В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью самой кривой.)

Определим ориентацию векторов $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{w}(t)$ относительно осей сопровождающего трехгранника. По определению

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{ds}\frac{ds}{dt};$$

но производная от радиуса-вектора по дуге равна орту касательной $d\boldsymbol{r}/ds=\boldsymbol{\tau}$, так что

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t)=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau},} \tag{5}$$

т. е. *вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории и по абсолютной величине равен модулю производной* ds/dt.

Формула (5) устанавливает связь между выражениями скорости при векторном и естественном способе задания движения; аналогично

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\frac{d\left[(ds/dt)\,\boldsymbol{\tau}(t)\right]}{dt}=$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{ds}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}.$$

Но $d\boldsymbol{\tau}/ds$ — не что иное, как вектор кривизны, равный $\boldsymbol{n}/\rho$ (ρ — радиус кривизны) и направленный по главной нормали; поэтому

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}. \tag{6}$$

Таким образом, *вектор* $\boldsymbol{w}$ *лежит в соприкасающейся плоскости сопровождающего трехгранника.* Его проекция на касательное направление

$$\boxed{w_\tau=\frac{d^2s}{dt^2}} \tag{7}$$

называется *касательным* (или *тангенциальным*) *ускорением*, а его проекция на направление главной нормали

$$\boxed{w_n=\frac{v^2}{\rho}} \tag{8}$$

— *нормальным ускорением.* Нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны траектории. Ясно, что

$$w=|\boldsymbol{w}|=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}.$$

В частном случае, когда траекторией движения является окружность, касательное ускорение направлено перпендикулярно радиусу окружности, а нормальное — по радиусу к центру (рис. I.5).

Система координат, которая вводится при построении системы отсчета, не обязательно должна быть декартовой системой. В частности, положение точки относительно геометрической твердой среды можно задать, используя не только линейные, но и угловые величины. Так, например, на плоскости положение точки

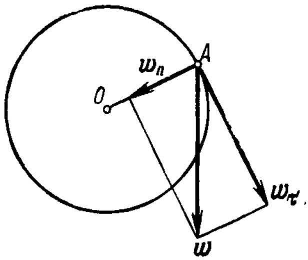

Рис. I.5.

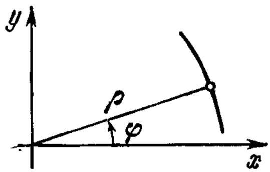

Рис. I.6.

может быть определено не только двумя линейными координатами x и y, но и полярными координатами: линейной величиной ρ и углом φ (рис. I.6). Аналогично, в трехмерной геометрической твердой среде положение точки может быть задано двумя линейными величинами ρ и h и одной угловой величиной φ (цилиндрические координаты, рис. I.7) или двумя угловыми величинами φ и ψ и одной линейной величиной ρ (сферические координаты, рис. I.8). Но каким бы способом ни определялось положение точки, в трехмерной геометрической твердой среде должны

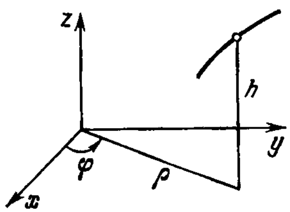

Рис. I.7.

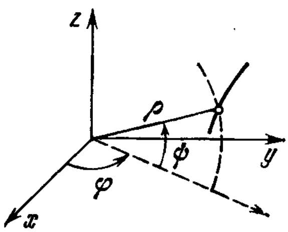

Рис. I.8.

быть введены в рассмотрение три *независимые* величины; мы назовем их *обобщенными координатами точки* и обозначим через q_1, q_2 и q_3. Так, например, в декартовых координатах $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, в цилиндрических координатах $q_1 = \rho$, $q_2 = h$, $q_3 = \varphi$, а в сферических координатах $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \psi$ и т. д.

В любом случае задание $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ полностью определяет движение точки, т. е. вектор-функцию

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t)].$$

Пусть в момент $t=t^*$ положение точки определено значениями обобщенных координат q_1^*, q_2^*, q_3^*, т. е. радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(q_1^*, q_2^*, q_3^*)$. Положив теперь $q_2=q_2^*$, $q_3=q_3^*$, будем изменять q_1. Тогда $\boldsymbol{r}(q_1, q_2^*, q_3^*)$ определит в пространстве кривую — ее называют *координатной линией* q_1. Аналогично, фиксируя две другие обобщенные координаты и меняя третью, можно построить координатные линии q_2 и q_3 (рис. I.9). Касательные к координатным линиям в точке q_1^*, q_2^*, q_3^* образуют систему осей координат q_1, q_2 и q_3.

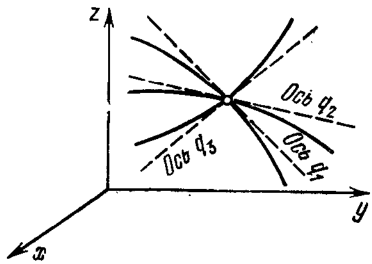

Рис. I.9.

Для того чтобы определить компоненты скорости $\boldsymbol{v}$ по построенным таким образом осям координат, введем в рассмотрение соответствующие орты:

$$\text{Орт } \boldsymbol{\tau}_i \text{ оси } q_i \quad (i=1,\ 2,\ 3) \quad \text{равен } \boldsymbol{\tau}=\frac{\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i}{|\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i|} \tag{9}$$

и *функции Ламе* (иногда их называют коэффициентами Ламе)

$$H_i=|\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i|; \tag{10}$$

тогда

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}=H_i\boldsymbol{\tau}_i \tag{11}$$

и

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{3}H_i\dot{q}_i\boldsymbol{\tau}_i, \tag{12}$$

т. е. компонента v_{q_i} скорости $\boldsymbol{v}$ по оси q_i равна

$$v_{q_i}=H_i\dot{q}_i. \tag{13}$$

Определим, далее, w_{q_i} — проекцию[1]) ускорения $\boldsymbol{w}$ на ось q_i, т. е. скалярное произведение $\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i$:

$$w_{q_i}=\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{\tau}_i=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\frac{1}{H_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right)-\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right]. \tag{14}$$

Из выражения (12), которое определяет функцию $\boldsymbol{v}(q, \dot{q})$, следует равенство

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial \dot{q}_i=\partial \boldsymbol{r}/\partial q_i, \tag{15}$$

[1]) В связи с тем, что в общем случае оси q_i не ортогональны, понятия «проекция вектора» (ортогональная) и «компонента вектора по оси» не совпадают.

но, с другой стороны, очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}. \tag{16}$$

Используя (15) и (16), представляем равенство (14) в виде

$$w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}\right],$$

или

$$\boxed{w_{q_i} = \frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial (v^2/2)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (v^2/2)}{\partial q_i}\right].} \tag{17}$$

Коль скоро вектор-функция $\boldsymbol{v}(q, \dot{q})$ определена по формуле (12), $v^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ может быть подсчитана как скалярная функция q и $\dot{q}$, и тогда формула (17) для любой системы обобщенных координат определяет проекцию ускорения $\boldsymbol{w}$ на ось q_i.

§ 3. Общие соображения о движении систем отсчета

В этом параграфе будет начато рассмотрение движения одной системы отсчета относительно другой (рис. I.1, *б*). О системе отсчета, относительно которой рассматривается движение, как и ранее, предполагается, что соответствующая геометрическая твердая среда содержит континуум геометрических точек, заполняющих пространство, и поэтому в любой момент времени каждая точка второй системы отсчета обязательно совпадает с какой-либо точкой первой[1]). В этой первой системе отсчета по-прежнему будем рассматривать прямоугольную декартову систему координат x, y, z и условимся называть эту систему отсчета *«латинской средой»*[2]).

В геометрической твердой среде второй системы отсчета также введем декартову систему координат, но ее оси обозначим греческими буквами ξ, η, ζ (векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — орты этих осей) и будем называть условно вторую систему отсчета *«греческой средой»*. Интересующая нас задача состоит в изучении движения греческой среды относительно латинской.

Непосредственно ясно, что условие неизменности расстояния между точками греческой среды во время движения накладывает ограничения на возможные скорости ее точек. Так, например,

---

[1]) Можно было бы предположить, что эта геометрическая твердая среда содержит счетное множество точек, образующих некоторую упорядоченную «решетку». Тогда положение движущейся точки определялось бы тем, в какой клетке этой решетки она находится в рассматриваемый момент.

[2]) Термины «латинская среда» и «греческая среда» (см. ниже), конечно, могут встретить вполне естественные возражения, но они очень удобны и поэтому будут широко использоваться в дальнейшем (даже без кавычек).

две точки среды заведомо не могут иметь отличные по величине скорости, направленные вдоль соединяющей эти точки прямой, ибо при таких скоростях менялось бы расстояние между точками. Поэтому при движении среды скорости ее точек не произвольны, а распределены некоторым специальным образом. Наша цель состоит в том, чтобы выяснить, как распределены скорости точек греческой среды, движущейся относительно латинской среды.

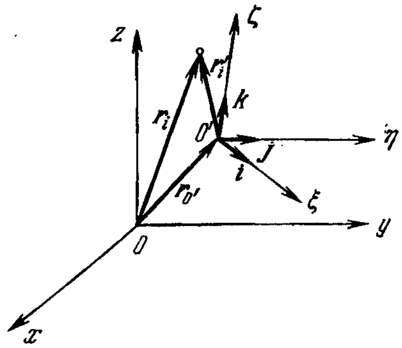

Рис. I.10.

Пусть в момент t оси x, y, z и ξ, η, ζ совпадают, а в момент t_1 за счет движения греческой среды это совпадение не сохраняется (рис. I.10). В связи с тем, что по предположению расстояния между точками среды не меняются во время движения, координаты ξ, η, ζ любой точки греческой среды неизменны во времени. Из рис. I.10 следует, что

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'_i,$$

а

$$\boldsymbol{r}'_i = \xi_i \boldsymbol{i} + \eta_i \boldsymbol{j} + \zeta_i \boldsymbol{k};$$

поэтому

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{O'} + (\xi_i \boldsymbol{i} + \eta_i \boldsymbol{j} + \zeta_i \boldsymbol{k}) \tag{18}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{O'} + \left(\xi_i \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \eta_i \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \zeta_i \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right), \\ \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_{O'} + \left(\xi_i \frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2} + \eta_i \frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2} + \zeta_i \frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2}\right). \end{gathered} \tag{19}$$

Рассмотрим теперь два частных случая движения среды. В первом случае во все время движения оси ξ, η, ζ параллельны осям x, y, z, т. е. каждый из ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ всегда параллелен самому себе (рис. I.11). Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2} = 0$$

и поэтому

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{O'}, \quad \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_{O'}, \tag{20}$$

т. е. скорости и ускорения всех точек греческой среды в любой фиксированный момент времени одинаковы. Такое движение называется *поступательным*. Легко видеть, что при поступательном движении не только оси координат, но и любая другая прямая, закрепленная в греческой среде, перемещается параллельно самой себе. Второй случай соответствует предположению, что во время движения точка O' неподвижна, а греческая среда вращается вокруг этой точки. В этом случае $\boldsymbol{v}_{O'} = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \xi_i \frac{d\mathbf{i}}{dt} + \eta_i \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \zeta_i \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \\ \boldsymbol{w}_i &= \xi_i \frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + \eta_i \frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + \zeta_i \frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Введем вспомогательную среду и соответствующую систему координат x', y', z' (рис. I.12). Начало этой системы координат закреплено в точке O' греческой среды и движется вместе с ней, а оси x', y', z' все время остаются параллельными осям x, y, z

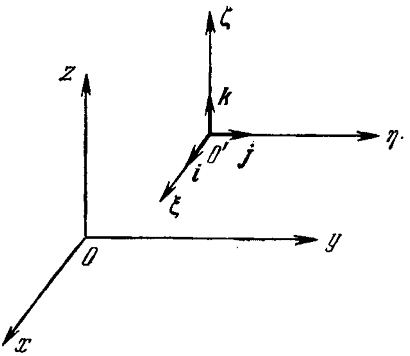

Рис. I.11.

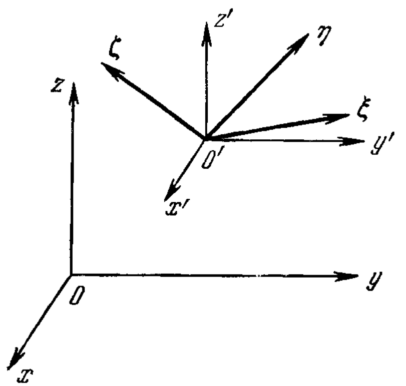

Рис. I.12.

соответственно. При рассмотрении движения греческой среды относительно вспомогательной среды точка O' неподвижна, и поэтому скорости и ускорения всех точек могут быть определены по формулам (21).

Напомним, что точка O' была выбрана в греческой среде произвольно. Поэтому из сравнения формулы (19) с формулами (20) и (21) следует, что в любое мгновение скорость каждой точки греческой среды может быть подсчитана как сумма скоростей ее произвольно выбранной точки O' и той скорости, которую имеет рассматриваемая точка греческой среды относительно вспомогательной среды, движущейся с этой точкой O' поступательно.

Задача сводится, таким образом, к изучению распределения скоростей и ускорений в среде, имеющей одну неподвижную точку.

§ 4. Движение среды с неподвижной точкой

Прежде чем перейти к рассмотрению этого случая движения, рассмотрим более простое движение — вращение вокруг неподвижной оси (рис. I.13). В этом простом случае каждая точка движется по окружности вокруг оси. Поэтому скорость i-й точки равна

$$v_i = \frac{ds_i}{dt} = \rho_i \frac{d\varphi}{dt},$$

где ρ_i — расстояние от этой точки до оси. Величина $\omega = d\varphi/dt$ называется *угловой скоростью* вращения среды.

Введем вектор $\boldsymbol{\omega}$, направленный вдоль оси вращения[1]) так, чтобы

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i, \tag{22}$$

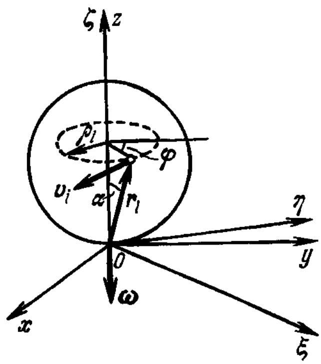

Рис. I.13.

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный к i-й точке из некоторой точки, произвольно выбранной на оси вращения. Модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$ равен

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|v_i|}{r_i \sin\alpha_i} = \frac{|v_i|}{\rho_i} = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|,$$

а его направление определяется обычными правилами векторного умножения: для правой системы координат вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль оси вращения так, чтобы из его конца любая точка среды, расположенная вне оси, казалась вращающейся против часовой стрелки.

Для ускорения имеем

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d^2 s_i}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_i^2}{\rho_i}\boldsymbol{n} = \rho_i \frac{d^2\varphi}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_i^2}{\rho_i}\boldsymbol{n}.$$

Касательное ускорение равно

$$\boldsymbol{w}_{\tau i} = \rho_i \frac{d^2\varphi}{dt^2}\boldsymbol{\tau} = \rho_i \varepsilon \boldsymbol{\tau},$$

где $\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$ — *угловое ускорение*. Если ввести в рассмотрение вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, определяемый так, чтобы

$$\boldsymbol{w}_{\tau i} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i,$$

то распределение касательных ускорений в среде также представится векторным произведением. При $\varepsilon > 0$, т. е. при ускоренном

---

[1]) Точнее — псевдовектор, так как при переходе от правой системы координат к левой вектор $\boldsymbol{\omega}$ заменяется вектором $-\boldsymbol{\omega}$.

вращении среды, вектор ε направлен так же, как и вектор ω; он направлен вдоль оси вращения противоположно вектору ω при $\varepsilon < 0$, т. е. при замедленном вращении.

Нормальное ускорение

$$\boldsymbol{w}_{ni} = \frac{v_i^2}{\rho_i}\boldsymbol{n} = \omega^2 \rho_i \boldsymbol{n}$$

в данном случае направлено к центру кривизны траектории, т. е. к оси вращения, и для случая вращения вокруг оси называется *осестремительным ускорением*.

Обратимся теперь к основной задаче этого параграфа — к изучению движения среды, имеющей неподвижную точку.

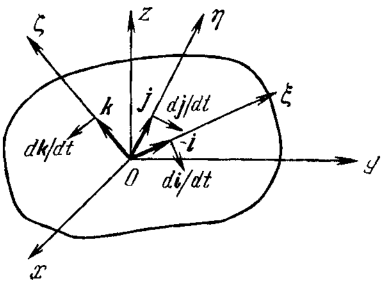

Рис. I.14.

Теорема 1. *При движении среды с неподвижной точкой в каждый момент существует единственный вектор* ω *такой, что мгновенная скорость любой точки среды определяется формулой*

$$\boxed{\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i.} \tag{23}$$

Доказательство. Выберем начало координат в неподвижной точке (рис. I.14) и обозначим через $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ орты осей ξ, η и ζ. Тогда скорость произвольной i-й точки равна

$$\boldsymbol{v}_i = \xi_i\, d\boldsymbol{i}/dt + \eta_i\, d\boldsymbol{j}/dt + \zeta_i\, d\boldsymbol{k}/dt,$$

а ее проекция $v_{i\xi}$ на ось ξ равна

$$v_{i\xi} = \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{i} = \xi_i (d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{i} + \eta_i (d\boldsymbol{j}/dt) \cdot \boldsymbol{i} + \zeta_i (d\boldsymbol{k}/dt) \cdot \boldsymbol{i}. \tag{24}$$

Но $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 1$ и поэтому $(d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{i} = 0$, а из тождества $\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} = 0$ следует, что $(d\boldsymbol{j}/dt) \cdot \boldsymbol{i} = -(d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{j}$. Поэтому равенство (24) можно записать так:

$$v_{i\xi} = \zeta_i (d\boldsymbol{k}/dt) \cdot \boldsymbol{i} - \eta_i (d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{k}/dt) \cdot \boldsymbol{i} & (d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{j} \\ \eta_i & \zeta_i \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Проекции $v_{i\eta}$ и $v_{i\zeta}$ вектора $\boldsymbol{v}$ определяются аналогично[1]):

$$v_{i\eta} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{i}/dt) \cdot \boldsymbol{j} & (d\boldsymbol{j}/dt) \cdot \boldsymbol{k} \\ \zeta_i & \xi_i \end{vmatrix}, \tag{26}$$

$$v_{i\zeta} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{j}/dt) \cdot \boldsymbol{k} & (d\boldsymbol{k}/dt) \cdot \boldsymbol{i} \\ \xi_i & \eta_i \end{vmatrix}. \tag{27}$$

[1]) Равенство (25) содержит лишь проекции векторов на ортогональные оси и поэтому сохраняется при циклической перестановке осей. Дважды выполняя циклическую перестановку, можно сразу из (25) получить равенства (26) и (27).

Поэтому вектор $\boldsymbol{v}_i$ равен

$$\boldsymbol{v}_i = v_{i\xi}\boldsymbol{i} + v_{i\eta}\boldsymbol{j} + v_{i\zeta}\boldsymbol{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{k}/dt)\cdot\boldsymbol{i} & (d\boldsymbol{i}/dt)\cdot\boldsymbol{j} \\ \eta_i & \zeta_i \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{i}/dt)\cdot\boldsymbol{j} & (d\boldsymbol{j}/dt)\cdot\boldsymbol{k} \\ \zeta_i & \xi_i \end{vmatrix}\boldsymbol{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (d\boldsymbol{j}/dt)\cdot\boldsymbol{k} & (d\boldsymbol{k}/dt)\cdot\boldsymbol{i} \\ \xi_i & \eta_i \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ (d\boldsymbol{j}/dt)\cdot\boldsymbol{k} & (d\boldsymbol{k}/dt)\cdot\boldsymbol{i} & (d\boldsymbol{i}/dt)\cdot\boldsymbol{j} \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i,$$

где

$$\boldsymbol{\omega} = ((d\boldsymbol{j}/dt)\cdot\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{i} + ((d\boldsymbol{k}/dt)\cdot\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{j} + ((d\boldsymbol{i}/dt)\cdot\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{k}. \qquad (28)$$

Теорема доказана. Более того, формула (28) позволяет определить (и притом единственным образом) вектор $\boldsymbol{\omega}$, если известны скорости трех точек — концов ортов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ «греческой» системы отсчета ξ, η, ζ. Выясним теперь, нельзя ли определить $\boldsymbol{\omega}$ на основе меньшей информации, например по скорости $\boldsymbol{v}$ только одной или двух точек.

На первый взгляд представляется, что для определения $\boldsymbol{\omega}$ достаточно знать скорость $\boldsymbol{v}_1$ какой-либо одной точки с $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$. Действительно, векторное равенство

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}$$

эквивалентно трем скалярным:

$$v_\xi = \zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta, \quad v_\eta = \xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi, \quad v_\zeta = \eta\omega_\xi - \xi\omega_\zeta.$$

Однако из полученных так трех уравнений нельзя найти три неизвестные величины (ω_ξ, ω_η, ω_ζ), поскольку определитель системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если же кроме скорости $\boldsymbol{v}_1$ (точки с $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$) известно направление скорости $\boldsymbol{v}_2$ (точки с $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2$), неколлинеарной $\boldsymbol{v}_1$, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ может быть определен. Действительно, рассмотрим плоскости Π_1 и Π_2, проходящие через вектор $\boldsymbol{r}_1$ перпендикулярно $\boldsymbol{v}_1$ и через $\boldsymbol{r}_2$ перпендикулярно $\boldsymbol{v}_2$ соответственно. По свойству векторного произведения вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит как в Π_1, так и в Π_2, т. е. на прямой, по которой пересекаются эти плоскости. Модуль $\boldsymbol{\omega}$ легко определить по модулю $\boldsymbol{v}_1$:

$$|\boldsymbol{\omega}| = \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{r}_1|\sin\alpha},$$

где α — угол между вектором $\boldsymbol{r}_1$ и прямой, по которой пересекаются плоскости Π_1 и Π_2.

Если в греческой системе отсчета неподвижна не одна точка O, а две точки O и O_1, то неподвижны и все точки, лежащие на прямой OO_1, т. е. в этом случае имеется неподвижная ось. Направим ось ζ греческой системы отсчета вдоль неподвижной оси OO_1. В этом случае $\boldsymbol{k} = \text{const}$, т. е. $d\boldsymbol{k}/dt = 0$; вектор $d\boldsymbol{j}/dt$ расположен в плоскости (ξ, η) и $(d\boldsymbol{j}/dt)\cdot\boldsymbol{k} = 0$, а модуль $|d\boldsymbol{i}/dt|$ равен $d\varphi/dt$, где φ — угол поворота оси ξ; вектор $d\boldsymbol{i}/dt$ коллинеарен $\boldsymbol{j}$ и $(d\boldsymbol{i}/dt)\cdot\boldsymbol{j} = d\varphi/dt$. Поэтому в случае, когда греческая система отсчета имеет неподвижную ось, формула (28) сводится к виду

$$\boldsymbol{\omega} = (d\varphi/dt)\,\boldsymbol{k},$$

т. е., как уже было указано выше, вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль неподвижной оси, а скорости всех точек среды распределены в соответствии с формулой (23). Если же в греческой системе неподвижна только одна точка, то из формулы (23) следует, что ее скорости в каждое мгновение распределены так, как будто бы в это мгновение система вращается вокруг некоторой воображаемой оси. Направление этой оси определяется направлением вектора $\boldsymbol{\omega}$ (формула (28)), а угловая скорость вращения — модулем этого вектора. Поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}$ называется вектором *мгновенной угловой скорости*, а линия его действия — *мгновенной осью вращения*. При $\omega \neq 0$ в каждое мгновение равны нулю скорости тех и только тех точек, которые лежат на мгновенной оси.

Различие между вращением вокруг неподвижной оси и движением с неподвижной точкой состоит в том, что ось вращения в первом случае неподвижна, а во втором случае перемещается, проходя все время через неподвижную точку O'. Следы мгновенных осей образуют в неподвижном («латинском») пространстве коническую поверхность. Эта поверхность называется *неподвижным аксоидом*. Следы мгновенных осей в подвижном («греческом») пространстве также образуют коническую поверхность — *подвижный аксоид*. Каждое мгновение подвижный и неподвижный аксоиды касаются друг друга по общей образующей — ею служит мгновенная ось. Можно доказать, что при любом движении среды вокруг неподвижной точки подвижный аксоид катится без скольжения по неподвижному. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ меняется по направлению и величине, но всегда лежит на неподвижном аксоиде (см. рис. I.15 — этот рисунок соответствует случаю, когда неподвижный и подвижный аксоиды являются круговыми конусами с осями z и ζ соответственно). Годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. кривая, описываемая его концом, целиком лежит на неподвижном аксоиде (кривая Γ на рис. I.15).

Выше мы рассмотрели распределение скоростей в среде с неподвижной точкой O', так как к этой задаче свелась общая задача о распределении скоростей при произвольном движении среды. При этом точка O' греческой среды была выбрана произвольно.

Естественно возникает вопрос, зависит ли вектор $\boldsymbol{\omega}$ от выбора точки O'. Ответ на этот вопрос устанавливает следующая

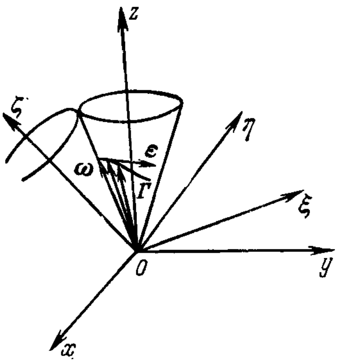

Рис. I.15.

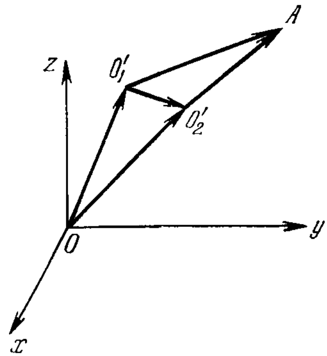

Рис. I.16.

Теорема 2. *Вектор $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора точки O'.*

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и что при различных исходных точках O' надо брать различные векторы $\boldsymbol{\omega}$. Выберем в греческой среде две произвольные точки O_1' и O_2' (рис. I.16) и допустим, что им соответствуют векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. Тогда скорость произвольно выбранной точки A можно записать двояко:

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_{O_1'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1'A} = \boldsymbol{v}_{O_2'} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2'A}.$$

Но

$$\boldsymbol{v}_{O_2'} = \boldsymbol{v}_{O_1'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{O_1'O_2'},$$

поэтому

$$\boldsymbol{\omega}_1 \times (\overrightarrow{O_1'A} - \overrightarrow{O_1'O_2'}) = \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{O_2'A},$$

или

$$(\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{O_2'A} = 0.$$

Точка A выбрана произвольно. Поэтому в последнем равенстве вектор $\overrightarrow{O_2'A}$ также произволен и равенство может выполняться только тогда, когда $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2$. Теорема доказана.

В силу этой теоремы поле скоростей геометрической твердой среды в ее произвольном движении задается двумя векторами: вектором $\boldsymbol{\omega}$ в данный момент и скоростью одной (произвольно выбранной) точки среды.

В заключение этого раздела докажем упоминавшееся ранее важное свойство распределения скоростей в произвольно движущейся твердой среде.

Теорема 3. *Две произвольно выбранные точки твердой среды могут иметь лишь такие скорости, что проекции их на прямую, соединяющую эти точки, равны между собой.*

Доказательство. Выберем в греческой среде произвольные точки A и B и в качестве O' возьмем точку A. Тогда

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}.$$

Проектируя это равенство на направление прямой AB, получаем

$$\text{Пр}_{AB}\, \boldsymbol{v}_B = \text{Пр}_{AB}\, \boldsymbol{v}_A,$$

так как вектор $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ ортогонален этому направлению.

Теорема доказана.

Выясним теперь, как распределены ускорения точек среды при ее движении с неподвижной точкой. Дифференцируя равенство (23) по времени, получаем

$$\boldsymbol{w}_i = \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}. \qquad (29)$$

Введем вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, называемый вектором *мгновенного углового ускорения*. Направление вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\boldsymbol{\omega}$ (см. рис. I.15), откладывается же он из неподвижной точки O'.

Вектор полного ускорения можно теперь представить так:

$$\boxed{\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{w}_{\text{вр}} + \boldsymbol{w}_{\text{ос}},} \qquad (30)$$

где

$$\boldsymbol{w}_{\text{вр}} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i, \quad \boldsymbol{w}_{\text{ос}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i).$$

Вектор $\boldsymbol{w}_{\text{вр}}$ называется *вращательным ускорением*. Он направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{r}_i$, и по величине и направлению совпадает с касательным ускорением, которое имела бы та же самая точка при вращении с угловым ускорением $\varepsilon = |\boldsymbol{\varepsilon}|$ вокруг оси, совпадающей с направлением вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$. Эту ось называют иногда *осью ускорений*.

Напомним теперь (см. начало этого параграфа), что при вращении вокруг неподвижной оси направления векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ всегда совпадают и в связи с этим в каждой точке векторы скорости и касательного ускорения направлены вдоль одной и той же прямой — касательной к траектории. При движении среды с неподвижной точкой вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ не совпадает по направлению с вектором $\boldsymbol{\omega}$, и поэтому $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i$ уже не направлено по касательной к траектории и *не является поэтому касательным ускорением*. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, ему и присвоено особое наименование — вращательное ускорение. При движении среды с неподвижной точкой удобнее выделять вращательную (а не касательную) составляющую ускорения, так как это позволяет сохранить внешнее сходство формул со случаем вращения вокруг неподвижной оси.

Рассмотрим теперь второе слагаемое в формуле (30). Вектор $\boldsymbol{w}_{ос}$ называют *осестремительным ускорением*. В соответствии с формулой для разложения двойного векторного произведения имеем

$$\boldsymbol{w}_{ос} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}).$$

Пусть $\boldsymbol{\omega}_0$ — орт мгновенной оси вращения; тогда

$$\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}| \cdot \boldsymbol{\omega}_0 = \omega \boldsymbol{\omega}_0$$

и выражение для $\boldsymbol{w}_{ос}$ можно переписать так:

$$\boldsymbol{w}_{ос} = \omega^2 [\boldsymbol{\omega}_0 (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i].$$

Но $(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{r}_i) = r_{i\omega}$ — проекция вектора $\boldsymbol{r}_i$ на направление мгновенной оси. Поэтому $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\omega}_0 (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{r}_i)$ — вектор, направленный вдоль мгновенной оси, длина которого равна этой проекции (рис. I.17), а $\boldsymbol{e} - \boldsymbol{r}_i$ — вектор, направленный из рассматриваемой точки к мгновенной оси и перпендикулярный последней:

$$\boldsymbol{\omega}_0 (\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \boldsymbol{r}_i) - \boldsymbol{r}_i = h_i \boldsymbol{h}_0,$$

где $\boldsymbol{h}_0$ — орт этого «направления к мгновенной оси», а h_i — расстояние до нее. Следовательно, вектор $\boldsymbol{w}_{ос} = \omega^2 h_i \boldsymbol{h}_0$, отложенный из любой точки, направлен к мгновенной оси. Это и предопределило название вектора $\boldsymbol{w}_{ос}$ — осестремительное ускорение.

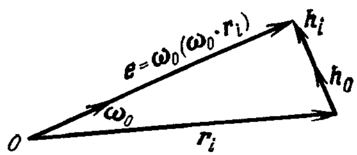

Рис. I.17.

Таким образом, при движении с неподвижной точкой ускорение каждой точки можно представить как сумму двух ускорений. Первое — вращательное ускорение — по величине и направлению совпадает с тем касательным ускорением, которое получалось бы при вращении среды с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$ *вокруг оси ускорений*, а второе — осестремительное — с тем нормальным ускорением, которое получалось бы при вращении среды с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ *вокруг мгновенной оси вращения*.

В точках мгновенной оси вращения скорости и осестремительные ускорения равны нулю, но вращательные ускорения отличны от нуля. Именно в силу этих ускорений мгновенная ось вращения перемещается: благодаря им ее точки, скорости которых в данный момент равны нулю, в следующий момент приобретают скорости, отличные от нуля.

В точках оси ускорений равны нулю вращательные ускорения, но скорости и осестремительные ускорения отличны от нуля. Этим обусловлено движение оси ускорений.

§ 5. Сложение движений

В этом параграфе будут рассмотрены третья и четвертая ситуации, о которых шла речь в § 1 (рис. 1.1, *в* и *г*). Исследованию этих ситуаций мы предпошлем формальное определение *сложения движений*.

Сложением двух движений называется процедура определения скорости и ускорения точек греческой среды (оси ξ, η, ζ) относительно некоторой латинской среды (оси x, y, z), если задано движение греческой среды относительно «промежуточной» среды (оси x_1, y_1, z_1), которая сама движется заданным образом относительно латинской среды. Аналогично определяется сложение n движений — в этом случае рассматривается n сред, движущихся одна относительно другой. Во всех случаях такого рода движение называется *сложным*.

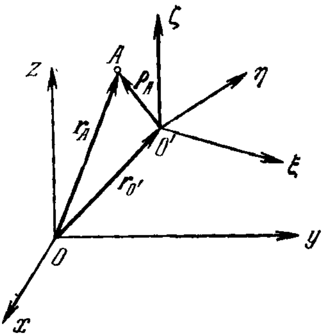

Рис. 1.18.

Мы начнем изучение сложного движения с простейшего случая — сложного движения точки (рис. 1.1, *в*), затем вернемся к случаю движения системы отсчета (который в начале этой главы привел нас к задаче о сложении движений) и, наконец, рассмотрим общий случай сложного движения, в котором рассматривается n систем отсчета (рис. 1.1, *г*).

1. Сложное движение точки. Рассмотрим случай, когда геометрическая точка движется относительно некоторой системы отсчета, в свою очередь движущейся относительно «неподвижной» системы. Как и ранее, греческую систему координат ξ, η, ζ (начало O') будем считать выбранной в «подвижной» системе, а латинскую систему координат x, y, z (начало O) — в «неподвижной» системе.

Орты греческой системы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и координаты ее начала O' являются функциями времени. Тогда A движется относительно греческой системы. При этом, вообще говоря, и греческие, и латинские ее координаты будут зависеть от времени. Движение точки A относительно греческой системы отсчета называется *относительным движением*; «сложное» движение точки A относительно латинской системы отсчета называется *абсолютным движением*, а движение греческой системы отсчета относительно латинской — *переносным движением.*

Пусть $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{\rho}_A$ — радиусы-векторы точки A в латинской и греческой системах отсчета соответственно. Тогда (рис. I.18)

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{\rho}_A + \boldsymbol{r}_{O'},$$

или

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_{O'} + \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k}.$$

Вычислим скорость $\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$ точки A в абсолютном движении. С этой целью продифференцируем последнее равенство по t, считая греческие координаты точки ξ, η, ζ, радиус-вектор $\boldsymbol{r}_{O'}$ и орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ функциями от t:

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt} + \xi \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \eta \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \zeta \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\eta}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\zeta}{dt}\boldsymbol{k}. \quad (31)$$

Для того чтобы вычислить скорость в относительном движении (ее обозначают $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$), надо при дифференцировании считать функциями t лишь координаты ξ, η и ζ; тогда $d\boldsymbol{r}_{O'}/dt = d\boldsymbol{i}/dt = d\boldsymbol{j}/dt = d\boldsymbol{k}/dt = 0$ и

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{d\xi}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\eta}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\zeta}{dt}\boldsymbol{k}. \quad (32)$$

Скоростью точки A в переносном движении (ее обозначают $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$) называется скорость, которую имеет относительно латинской системы отсчета та точка греческой системы, в которой в рассматриваемый момент находится точка A. Иначе говоря, это та скорость, которую имела бы точка A, если в этот момент она «примерзла» бы к греческой системе и далее двигалась бы вместе с ней. Поэтому, чтобы определить $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, надо при дифференцировании $\boldsymbol{r}_A$ считать $d\xi/dt = d\eta/dt = d\zeta/dt = 0$, а это дает

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \frac{d\boldsymbol{r}_{O'}}{dt} + \xi \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \eta \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \zeta \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}. \quad (33)$$

Сравнивая найденные выражения для $\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$, $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, устанавливаем, что

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \boldsymbol{v}_{\text{отн}},} \quad (34)$$

т. е. *скорость точки A относительно латинской системы отсчета (абсолютная скорость) равна ее скорости относительно греческой системы отсчета (относительная скорость) плюс скорость относительно латинской системы той точки греческой системы, в которой находится в этот момент точка A (переносная скорость).*

При выводе этого правила сложения скоростей в сложном движении мы существенно использовали основное предположение о том, что момент времени t одинаков в обеих системах — латинской и греческой. Если рассматривать t как параметр, то равенство (34) выражает лишь геометрический факт — связь между производными по параметру от функций, зависящих от этого параметра, в различных системах координат. Но если параметр t понимается как время, то правило (34) оказывается верным лишь тогда, когда время в латинской и греческой системах протекает одинаково и когда для этих сред имеет смысл понятие одновременности, т. е. когда могут быть указаны в них одинаковые моменты времени. Отказ от этого предположения является краеугольным камнем релятивистской механики Эйнштейна, в которой формула (34) уже неприменима.

Вернемся теперь к равенству (31) и продифференцируем его еще раз:

$$\boldsymbol{w}_{\text{абс}}=\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{абс}}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_{O'}}{dt^2}+\xi\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2}+\eta\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2}+\frac{d^2\xi}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\boldsymbol{j}+$$
$$+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\boldsymbol{k}+2\left[\frac{d\xi}{dt}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right]. \tag{35}$$

Если мы интересуемся относительным движением, то считаем неподвижной греческую систему отсчета, т. е. полагаем

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2}=\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2}=0,$$

что дает следующую формулу для относительного ускорения $\boldsymbol{w}_{\text{отн}}$:

$$\boldsymbol{w}_{\text{отн}}=\frac{d^2\xi}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2\eta}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\boldsymbol{k}. \tag{36}$$

В переносном же движении не изменяются греческие координаты, т. е. $d\xi/dt=d\eta/dt=d\zeta/dt=d^2\xi/dt^2=d^2\eta/dt^2=d^2\zeta/dt^2=0$ и переносное ускорение $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ равно[1])

$$\boldsymbol{w}_{\text{пер}}=\frac{d^2\boldsymbol{r}_{O'}}{dt^2}+\xi\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2}+\eta\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2}. \tag{37}$$

Сопоставляя формулы (35), (36) и (37), устанавливаем, что, в отличие от скорости, абсолютное ускорение не равно сумме ускорений в переносном и относительном движениях. Для того чтобы получить абсолютное ускорение, надо к переносному и относительному ускорениям добавить еще *дополнительное* или *кориолисово ускорение*

$$\boldsymbol{w}_{\text{кор}}=2\left(\frac{d\xi}{dt}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right), \tag{38}$$

---

[1]) При подсчете $\boldsymbol{w}_{\text{пер}}$ удобно использовать вторую формулу (41) с учетом следующих за ней пояснений.

так что

$$\boxed{w_{\text{абс}} = w_{\text{пер}} + w_{\text{отн}} + w_{\text{кор}}.} \tag{39}$$

Выше (см. § 3) мы уже установили, что любое движение одной системы отсчета относительно другой (рис. I.1, *б*) может быть представлено как сумма поступательного движения и движения с неподвижной точкой.

При поступательном движении греческой системы ее орты не изменяются, $di/dt = dj/dt = dk/dt = 0$ и $w_{\text{кор}} = 0$. Поэтому при подсчете $w_{\text{кор}}$ существенно лишь движение с неподвижной точкой. Но при этом движении, в силу доказанной выше теоремы, всегда существует вектор ω такой, что скорости всех точек определяются по формуле (23). Поэтому скорости концов ортов таковы:

$$di/dt = \omega \times i, \quad dj/dt = \omega \times j, \quad dk/dt = \omega \times k.$$

Подставляя эти формулы в равенство (38), получаем

$$w_{\text{кор}} = 2\left[(\omega \times i)\frac{d\xi}{dt} + (\omega \times j)\frac{d\eta}{dt} + (\omega \times k)\frac{d\zeta}{dt}\right] = \\ = 2\left[\omega \times \left(\frac{d\xi}{dt}i + \frac{d\eta}{dt}j + \frac{d\zeta}{dt}k\right)\right],$$

или, учитывая формулу (32),

$$\boxed{w_{\text{кор}} = 2\omega \times v_{\text{отн}},} \tag{40}$$

т. е. *кориолисово ускорение некоторой точки равно удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного движения на скорость точки в ее относительном движении.* Таким образом, дополнительное (кориолисово) ускорение не возникает не только тогда, когда переносное движение является поступательным, но и тогда, когда скорость относительного движения равна нулю или параллельна вектору ω угловой скорости переносного движения [1]).

2. Движение одной системы отсчета относительно другой. Вернемся теперь к случаю движения одной системы отсчета относительно другой (рис. I.1, *б*). Выше было показано, что любое движение системы отсчета можно рассматривать как ее поступательное движение со скоростью, равной скорости произвольно выбранной ее точки O', плюс движение системы отсчета с неподвижной точкой O' (рис. I.12). Введя вспомогательную систему

---

[1]) В качестве примера читателю рекомендуется самостоятельно выяснить, куда направлено кориолисово ускорение частиц воды рек, текущих в разных направлениях (например, с юга на север, с запада на восток) и т. д. на различных участках земной поверхности.

отсчета x', y', z', движущуюся поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}_{O'} = d\boldsymbol{r}_{O'}/dt$, и считая движение этой системы переносным, а движение системы отсчета x', y', z' с неподвижной точкой O' относительным, можно использовать формулы (34) и (39). При этом следует учесть, что в данном случае $\boldsymbol{w}_{\text{кор}} = 0$, так как переносное движение является поступательным.

В результате устанавливаем, что при произвольном движении одной системы отсчета относительно другой

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_A &= \boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \boldsymbol{v}_{\text{отн}} = d\boldsymbol{r}_{O'}/dt + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{O'A}, \\ \boldsymbol{w}_A &= \boldsymbol{w}_{\text{пер}} + \boldsymbol{w}_{\text{отн}} = d^2\boldsymbol{r}_{O'}/dt^2 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_{O'A} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{O'A}). \end{aligned} \tag{41}$$

В этих равенствах $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{w}_A$ — скорость и ускорение произвольной точки A движущейся системы, а $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — угловая скорость и угловое ускорение движущейся системы в ее движении относительно системы x', y', z', т. е. в движении с неподвижной точкой O'.

Если рассматривается движение какой-либо точки относительно системы отсчета, движущейся произвольным образом, то движение этой системы отсчета можно принять за переносное. Тогда формулы (41) будут служить для определения переносных скоростей и ускорений, и вектор $\boldsymbol{\omega}$, входящий в эти формулы, будет играть роль переносной угловой скорости — именно он войдет в выражение (40) для подсчета кориолисова ускорения.

3. Общий случай сложения движений. Рассмотрим n систем отсчета, движущихся одна относительно другой (рис. I.1, *г*): первая система (координаты x_1, y_1, z_1) движется относительно «нулевой» (координаты x_0, y_0, z_0); вторая система (координаты x_2, y_2, z_2) — относительно первой системы; ... последняя, n-я система (координаты x_n, y_n, z_n) — относительно $(n-1)$-й (координаты $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$).

Предполагается, что известна скорость относительного движения каждой «последующей» системы относительно «предыдущей» (n-й системы относительно $(n-1)$-й, этой $(n-1)$-й системы относительно $(n-2)$-й и т. д.); требуется определить скорости движения n-й системы (x_n, y_n, z_n) относительно «нулевой» (x_0, y_0, z_0).

Рассмотрим сначала движение только n-й системы относительно $(n-2)$-й. Можно считать, что точки n-й системы совершают сложное движение: относительным является движение n-й системы относительно $(n-1)$-й (со скоростью $\boldsymbol{v}_{n,n-1}$), а переносным — движение $(n-1)$-й системы относительно $(n-2)$-й (со скоростью $\boldsymbol{v}_{n-1,n-2}$). «Абсолютные» скорости точек n-й системы относительно $(n-2)$-й (обозначим их $\boldsymbol{v}_{n,n-2}$) равны

$$\boldsymbol{v}_{n,n-2} = \boldsymbol{v}_{n,n-1} + \boldsymbol{v}_{n-1,n-2}.$$

Теперь можно исключить из рассмотрения $(n-1)$-ю систему и рассматривать движение n-й системы относительно $(n-2)$-й как относительное, движение $(n-2)$-й системы относительно $(n-3)$-й — как переносное (со скоростью $\boldsymbol{v}_{n-2,\,n-3}$), а движение n-й системы относительно $(n-3)$-й (со скоростью $\boldsymbol{v}_{n,\,n-3}$) — как абсолютное. Тогда

$$\boldsymbol{v}_{n,\,n-3}=\boldsymbol{v}_{n,\,n-2}+\boldsymbol{v}_{n-2,\,n-3}=\boldsymbol{v}_{n,\,n-1}+\boldsymbol{v}_{n-1,\,n-2}+\boldsymbol{v}_{n-2,\,n-3}$$

и можно исключить из рассмотрения $(n-2)$-ю систему.

Продолжая процесс последовательного исключения систем отсчета, определим скорости $\boldsymbol{v}_{n,\,0}$ точек n-й системы относительно «нулевой»:

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{n,\,0}=\sum_{i=1}^{n} v_{i,\,i-1}.} \tag{42}$$

При движении многих систем отсчета одна относительно другой скорость точки n-й системы относительно «нулевой» равна сумме скоростей, которые в этой точке имеет каждая система отсчета относительно предыдущей.

В связи с тем, что сумма векторов не зависит от порядка слагаемых, скорость $\boldsymbol{v}_{n,\,0}$ не зависит от того, в каком порядке нумеруются системы [1]).

§ 6. Плоское и плоскопараллельное движение

Иногда конкретные задачи сводятся к рассмотрению движения вырожденной двумерной твердой среды, при котором все точки среды во время движения находятся в одной плоскости. Такое движение называется *плоским*. Плоское движение важно также и потому, что к нему сводится исследование плоскопараллельного движения обычной трехмерной среды.

Движение называется *плоскопараллельным*, если можно указать некоторую «базовую» плоскость, неподвижную относительно латинской среды и такую, что как бы ни была выбрана плоскость, параллельная базовой, точки греческой системы, расположенные в этой плоскости, при движении остаются все время в ней. В случае плоскопараллельного движения достаточно рассматривать движение точек только в одной из таких плоскостей, поэтому изучение плоскопараллельного движения сводится к изучению плоского движения.

Этот параграф посвящен изучению некоторых особенностей плоского движения.

---

[1]) Более подробно общий случай сложения движений разобран в приложении, где к теории сложного движения применяется теория систем скользящих векторов.

При изучении плоского движения удобно как латинскую, так и греческую систему координат выбирать в плоскости движения, т. е. обходиться двумя координатами x, y и ξ, η соответственно, и этим ввести в рассмотрение две «плоские среды» — неподвижную (латинскую) и подвижную (греческую). Очевидно, что положение плоской среды однозначно определяется положением двух ее точек.

Распределение скоростей греческой среды при плоском движении определяет

Теорема 4. *При любом движении плоской среды (кроме поступательного) в каждое мгновение существует единственная точка, скорость которой равна нулю (мгновенный центр скоростей), а скорости всех остальных точек распределены так, как если бы среда в это мгновение вращалась вокруг мгновенного центра скоростей.*

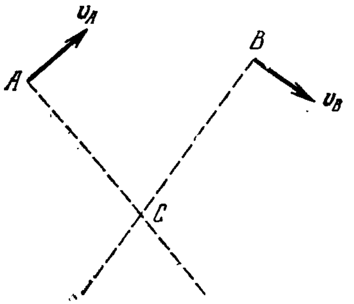

Рис. I.19.

Доказательство. Рассмотрим две движущиеся точки плоской среды A и B, предположив сначала, что их скорости $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ не параллельны (рис. I.19). Проведем в точках A и B прямые, перпендикулярные $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ соответственно, и рассмотрим точку C их пересечения. Пусть $\boldsymbol{v}_C$ — скорость этой точки среды. В силу теоремы 3, доказанной в § 4, проекции $\boldsymbol{v}_C$ на указанные прямые должны быть равны проекциям на эти прямые $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ соответственно, а они равны нулю, так как прямые перпендикулярны $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Значит, скорость $\boldsymbol{v}_C$ должна иметь нулевые проекции на две непараллельные прямые, что возможно лишь в том случае, когда эта скорость равна нулю. Точка C — единственная точка, скорость которой равна нулю, ибо в противном случае была бы неподвижна вся плоская среда, а мы предположили, что точки A и B движутся, т. е. что их скорости отличны от нуля.

При наличии точки C, скорость которой равна нулю, движущаяся плоская среда может лишь вращаться вокруг C. Угловая скорость этого вращения равна

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC},$$

где AC и BC — расстояния от A и B до C. Скорость любой другой точки среды, например D, равна

$$v_D = \omega CD,$$

где CD — расстояние от C до D.

Пусть теперь $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ параллельны (рис. I.20). Если они равны, т. е. если в среде есть две точки с одинаковыми скоростями, то и все остальные точки среды имеют ту же скорость[1]), т. е. движение поступательно, а условием доказываемой теоремы этот случай исключен. Случай же, когда $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ параллельны, но не равны, возможен лишь тогда, когда точки A и B расположены на прямой, перпендикулярной $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$, так как в противном случае проекции этих скоростей на прямую, соединяющую A и B, не были бы равны. Остается поэтому рассмотреть лишь случай, представленный на рис. I.20. Соединим концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$ прямой и найдем точку C ее пересечения с прямой AB. Скорость в точке C будет равна нулю.

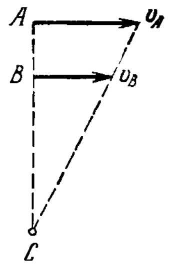

Рис. I.20.

Действительно, примем, как в доказательстве теоремы 3 (стр. 28), за O' точку A; тогда

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AC},$$

или (движение плоское, скорости параллельны)

$$v_C = v_A - \omega AC.$$

Аналогично

$$v_B = v_A - \omega AB,$$

откуда

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB},$$

а по построению

$$\frac{v_A - v_B}{v_A} = \frac{AB}{AC},$$

так что

$$v_C = v_A - \omega AC = v_A - \frac{v_A - v_B}{AB} AC = v_A - \frac{v_A}{AC} AC = 0.$$

Теорема доказана.

Как уже было указано выше, при поступательном движении мгновенный центр скоростей находится в бесконечно удаленной

---

[1]) Действительно, скорости точек A и B связаны соотношением $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$. Если $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_B$ и $\overrightarrow{AB} \neq 0$, то $\boldsymbol{\omega} = 0$. Но тогда и для любой другой точки, например для D, справедливо равенство $\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{v}_A$.

В этом случае мгновенный центр скоростей находится в бесконечно удаленной точке движущейся плоскости, как и при поступательном движении. Однако в отличие от поступательного движения среды теперь ее точки могут иметь различные ускорения. Движение в такой момент можно назвать *мгновенно поступательным*.

точке плоскости; при любом ином движении он перемещается. Следы мгновенных центров в плоскости x, y образуют *неподвижную центроиду*, а в плоскости ξ, η — *подвижную центроиду*. В каждое мгновение подвижная центроида касается неподвижной в мгновенном центре. Можно доказать, что во время движения греческой среды подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения.

Возвращаясь к плоскопараллельному движению, проведем через мгновенный центр C прямую, перпендикулярную плоскостям, в которых движутся точки среды. Ясно, что мгновенные скорости всех точек этой прямой равны нулю, а мгновенные скорости всех остальных точек среды при плоскопараллельном движении таковы, как будто среда вращается вокруг этой прямой. Естественно поэтому такую прямую также называть мгновенной осью. Различие между плоскопараллельным движением и движением среды с неподвижной точкой состоит лишь в том, что при плоскопараллельном движении мгновенная ось перемещается параллельно самой себе и аксоиды представляют собой не конические, а цилиндрические поверхности (направляющими этих поверхностей являются неподвижная и подвижная центроиды соответственно).

Читателю предоставляется самому в полной аналогии со случаем движения с неподвижной точкой установить, как распределены ускорения в плоскопараллельном движении, и надлежащим образом ввести для плоскопараллельного движения «ось ускорений» (соответственно для плоского движения — «мгновенный центр ускорений»).

Глава II

ИСХОДНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Введение

В начале первой главы механика была определена как наука о движении материальных объектов, происходящем в пространстве и во времени. Различные системы механики, например классическая механика и релятивистская механика, отличаются одна от другой прежде всего смыслом, который вкладывается во все использованные в этом определении термины — пространство, время, материальный объект, движение.

Любая система механики изучает движение не реальной материи со всеми ее многообразными свойствами, а идеализированных объектов, отражающих только некоторые из этих свойств. Соответственно в основе каждой системы механики лежит своя идеализированная модель мира; каждая система механики формулирует исходную аксиоматику в терминах этой модели и, опираясь на нее, строит основные законы. Разумеется, эти законы оказываются верными для реального мира лишь в той мере, в какой в пределах решаемой задачи условия реального мира достаточно хорошо описываются соответствующей идеализированной моделью.

Объектом изучения классической механики служат не явления в физических полях и не явления, связанные с элементарными частицами материи, а движения их «больших скоплений» (тел и сред) со скоростями, много меньшими скорости света. Говоря далее о материальных объектах классической механики (или просто о материальных объектах), мы будем иметь в виду «большие скопления», движущиеся подобным образом. Материальные объекты такого рода повсеместно окружают нас, и поэтому область приложения законов классической механики весьма широка. Кроме того, иные системы механики, изучающие иные явления материального мира, строятся так, чтобы их законы переходили в законы классической механики «в пределе», при переходе от их исходных моделей к исходной модели классической механики. Так, например, законы релятивистской механики переходят в законы классической механики «в пределе», т. е. при предположении, что скорости изучаемого движения малы по сравнению со скоростью света.

Идеализированная модель мира, рассматриваемая классической механикой, исходит из представлений, которые интуитивно кажутся наиболее очевидными. Выше было указано, какие предположения о свойствах пространства и времени приняты в классической механике. Именно, в представлении классической механики пространство однородно и изотропно, время однородно, течет одинаково во всех «геометрических твердых средах» и не зависит от того, как движутся системы отсчета одна относительно другой. Модель классической механики предполагает, что материальные объекты «находятся в пространстве», как бы «погружены в него», и что течение времени не зависит от наличия в пространстве материальных объектов и особенностей их движения.

Системы отсчета, которые вводятся так, как это было подробно описано в гл. I, можно связать с материальными объектами. В связи с этим кинематическим закономерностям подчинены не только движения геометрических точек относительно системы отсчета и не только движение одной системы отсчета относительно другой, но и движение материальных объектов.

Механика интересуется не только кинематическими характеристиками движения, но и установлением законов движения, т. е. определением того, каким образом движения зависят от взаимодействия материальных объектов. В связи с этим исходные предположения и постулаты, достаточные для построения геометрической картины движения, недостаточны для определения законов механики; они должны быть дополнены предположениями, которые вместе с предположениями о пространстве, времени и способах введения систем отсчета (см. гл. I) составляют исходную аксиоматику классической механики.

§ 2. Основные понятия и предположения классической механики

Помимо предположений о пространстве, времени и способе введения систем отсчета, о которых выше шла речь, введем некоторые дополнительные понятия и предположения.

Выше уже говорилось, что классическая механика изучает движения «больших скоплений» элементарных частиц. Но для того, чтобы «большие скопления» могли быть предметом исследования, в рассмотрение должны быть введены соответствующие идеализированные объекты.

Основной идеализированный объект, движение которого изучается классической механикой, называется *материальной точкой*. Материальный объект рассматривается как материальная точка, если можно считать, что в любое мгновение во всех его частях скорости и ускорения одинаковы. Вопрос о том, можно ли рассматривать тот или иной объект как материальную точку, решается не размерами этого объекта, а особенностями его движения и степенью идеализации задачи. Так, например, во многих задачах небесной механики кометы, планеты и др. небесные тела рассматриваются как материальные точки. Массой материальной точки (она обозначается далее буквой m) называется масса того материального объекта, который в принятой идеализации считается материальной точкой.

Множество материальных точек (конечное, счетное или мощности континуума) мы будем называть *твердым телом*, если во время движения расстояние между материальными точками не меняется. Таким образом, твердым телом мы называем не только бесконечное множество материальных точек, заполняющих некоторый объем, но и, например, множество, состоящее из восьми материальных точек, расположенных в вершинах единичного куба, если в любой момент движения эти точки остаются вершинами этого куба.

Как и в случае материальной точки, вопрос о том, можно ли (и нужно ли) рассматривать некий материальный объект как твердое тело, определяется не его размерами, а особенностями движения и степенью идеализации задачи. Так, например, Землю удобно рассматривать как твердое тело, если надо учесть ее вращение вокруг собственной оси, но как твердое тело удобно иногда рассматривать и простейшую модель молекулы.

1. Взаимодействие материи. Инерциальные системы отсчета. *Взаимодействие материи.* Материальные объекты, расположенные в разных частях пространства, взаимодействуют, т. е. движение одних материальных объектов зависит от наличия других материальных объектов и их движения; таковы, скажем, гравитационные, электрические, магнитные и иные взаимодействия. Физическая природа этих взаимодействий связана с понятием о физических полях, которое не укладывается в исходные представления классической механики. Так, например, с точки зрения общей теории относительности гравитационные взаимодействия материи являются следствием того, что время и пространство взаимосвязаны в единый четырехмерный континуум «пространство-время», что этот континуум подчиняется законам не евклидовой, а римановой геометрии, т. е. что он «искривлен», и что локальная кривизна в каждой его точке зависит от распределения материальных объектов и их движения. Таким образом, физические причины гравитационного взаимодействия материи тесно связаны с такими свойствами пространства и времени, которые не учитываются в исходных предположениях классической механики.

Естественно поэтому, что классическая механика не может учесть причины взаимодействия материи в той форме, в какой они реализуются в материальном мире. Механика просто учитывает тот факт, что наличие материального объекта в одном месте пространства оказывает влияние на движение материального объекта, расположенного в другом месте пространства, не интересуясь физической причиной этого взаимодействия, и вводит в рассмотрение еще одну идеализацию — *представление о дальнодействии*. Эта идеализация компенсирует то обстоятельство, что физическая природа взаимодействия материальных объектов не может быть описана в рамках исходных представлений классической механики о пространстве и времени.

Множество материальных точек, взаимодействующих одна с другой, называется *системой материальных точек* безотносительно к тому, учитывается или не учитывается воздействие на материальные точки, входящие в эту систему, иных, не входящих в нее материальных объектов. Если система материальных точек движется только под влиянием внутренних взаимодействий, т. е. взаимодействий материальных точек, входящих в систему, то она называется *замкнутой системой материальных точек*. Понятие замкнутой системы материальных точек — условное, идеализированное понятие. Разумеется, в реальном мире все материальные объекты взаимосвязаны хотя бы потому, что гравитационные взаимодействия в принципе осуществляются при любых расстояниях между материальными объектами, однако при идеализации задачи можно пренебречь слабыми взаимодействиями других материальных объектов с теми материальными объектами, которые входят в рассматриваемую систему, по сравнению с взаимодействиями между ними. Так, например, два небесных тела, Землю и Луну, считают замкнутой системой, если интересуются лишь взаимным движением Земли и Луны и пренебрегают воздействием на них всех остальных небесных тел, в том числе Солнца и других планет. Три небесных тела — Солнце, Землю и Луну — считают замкнутой системой, если интересуются лишь взаимодействием между этими телами и пренебрегают воздействием иных планет Солнечной системы на их движение. Солнечная система в целом является примером замкнутой системы лишь в тех случаях, когда интересуются взаимодействием между всеми входящими в нее телами и считают возможным пренебречь воздействием на тела, входящие в Солнечную систему, других материальных объектов Вселенной.

В связи с тем, что по определению (см. выше) твердое тело состоит из материальных точек, твердое тело можно рассматривать как замкнутую систему, если можно пренебречь воздействием на него иных объектов материального мира.

Замкнутая система, состоящая только из одной точки, т. е. материальная точка, которую в принятой идеализации можно считать не подвергающейся каким-либо воздействиям, называется *свободной материальной точкой*.

Инерциальные системы отсчета. В первой главе было пояснено, каким образом в классической кинематике вводятся системы отсчета. В кинематике в силу предположения об однородности и изотропности пространства и однородности времени все системы отсчета равноправны. Среди всех вводимых так систем отсчета можно выделить подкласс систем, которые благодаря учету ряда специальных динамических свойств могут быть отличны от остальных. Именно, любую систему отсчета, по отношению к которой можно предположить, что свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно, называют *инерциальной* или *галилеевой*. Если существует хотя бы одна система, удовлетворяющая этому требованию, то существует бесконечное множество таких систем. Действительно, тогда инерциальной будет любая другая система отсчета, которая либо покоится относительно выделенной, либо движется относительно нее поступательно, причем начало отсчета движется равномерно и прямолинейно.

Предположение о наличии инерциальных систем отсчета затрагивает не только геометрические свойства движения одной системы отсчета по отношению к другой, но и непосредственно касается инерционных свойств материи. Факт наличия инерциальных (галилеевых) систем нельзя проверить экспериментально хотя бы потому, что в природе не существует свободных материальных точек, т. е. потому, что в реальных условиях нельзя выделить часть материи, изолировать ее от остального мира, сделать в реальных условиях так, чтобы движение этой части материи не подвергалось воздействию иных материальных объектов.

Для того чтобы в каждом конкретном случае выяснить, может ли какая-либо избранная система отсчета быть принята за галилееву, проверяют, сохраняется ли примерно неизменной скорость материального объекта, который приближенно считают свободной материальной точкой. Степень этого приближения определяет степень идеализации задачи.

Так, например, при изучении движения небесных тел за инерциальную систему отсчета часто принимают декартову систему координат, начало которой помещено на какой-либо из так называемых неподвижных звезд, а оси направлены на другие неподвижные звезды, несмотря на то, что понятие «неподвижная звезда» условно и что звезды, которые при этом считаются неподвижными, на самом деле движутся (и притом с огромными скоростями) относительно других материальных объектов. Однако такое предположение оказывается достаточным, например, в том случае, когда можно ограничиться рассмотрением материальных объектов нашей Солнечной системы и взаимодействиями между ними.

При изучении движений, происходящих на Земле, иногда считают инерциальной систему, жестко связанную с Землей. Такая система отсчета не движется поступательно и равномерно относительно системы отсчета, связанной с неподвижными звездами, о которых выше шла речь. Однако ошибка, которая при этом вносится, часто невелика, и весь опыт механики показывает, что для изучения ряда «земных» движений такая идеализация достаточна. Аналогично поступает классическая механика и в иных случаях.

Выбор системы отсчета и «наделение» ее правом называться галилеевой каждый раз являются новым предположением, которое должно постулироваться или обосновываться.

Как только какая-либо система отсчета выбрана и в заданной идеализации принята за галилееву систему, все множество галилеевых систем в этой идеализации определено В системах отсчета из этого множества в силу самого определения инерциальной системы выполняется первый закон Ньютона: *скорость свободной материальной точки не меняется во время ее движения.*

2. Инвариантность и ковариантность законов механики. Принцип относительности Галилея. Классическая механика исходит из того, что все инерциальные системы равноправны. Смысл этого утверждения состоит в следующем: все законы и уравнения механики, установленные для замкнутой системы в какой-либо инерциальной системе отсчета, не изменяются при переходе к любой другой инерциальной системе отсчета Это утверждение называют *принципом относительности Галилея.*

Среди инерциальных систем содержатся системы, покоящиеся одна относительно другой (при этом начала координат этих систем могут быть произвольно смещены, а оси координат могут быть произвольно повернуты одна относительно другой); кроме того, в множестве инерциальных систем находятся системы, движущиеся одна относительно другой поступательно с постоянными скоростями. Поэтому утверждение о том, что законы механики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой, содержит в себе по существу следующие четыре утверждения

1 *Законы и уравнения механики не изменяются при сдвигах систем отсчета*, т. е. при преобразованиях вида

$$x^* = x + a, \quad y^* = y + b, \quad z^* = z + c, \quad t^* = t.$$

Это утверждение можно трактовать как «динамическое следствие» предположения об однородности пространства — если бы законы механики зависели от положения начала координат, то существовали бы динамические способы, позволяющие различить точки пространства друг от друга, выделить преимуществеиные точки.

2. *Законы и уравнения механики не изменяются при поворотах систем отсчета относительно любой из осей координат*, например при повороте вокруг оси z на угол α:

$$x^* = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y^* = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z^* = z, \quad t^* = t.$$

Это утверждение — «динамическое следствие» предположения об изотропности пространства так как если бы оно не было верно, то существовали бы динамические методы для различения одних направлений от других.

3. *Законы и уравнения механики не изменяются при «сдвиге по времени»*, т. е. при преобразованиях вида

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad z^* = z, \quad t^* = t + a.$$

Таким образом, законы механики не устанавливают преимуществ для какого-либо выбора начала отсчета времени и не противоречат поэтому предположению об однородности времени.

4. *Законы и уравнения механики не изменяются при преобразованиях, соответствующих равномерному поступательному движению системы отсчета*, т. е. при преобразованиях вида

$$x^* = x - v_x t, \quad y^* = y - v_y t, \quad z^* = z - v_z t, \quad t^* = t,$$

где v_x, v_y и v_z — постоянные. Такие преобразования называются *преобразованиями Галилея.*

Разумеется, законы механики не должны изменяться также при любой комбинации этих преобразований, т. е. при выполнении их последовательно одно за другим.

Теперь надо уточнить, какой точный смысл вкладывается в слова «законы и уравнения механики не изменяются при некотором преобразовании». Законы механики, как мы увидим далее, записываются в виде равенств. В эти равенства в качестве переменных входят координаты, скорости и ускорения материальных точек, подсчитанные по отношению к какой-либо системе отсчета, и функции от этих переменных — координат, скоростей и ускорений. Роль таких функций далее будут играть силы, энергия системы (потенциальная, кинетическая или полная), количество движения (импульс) и иные функции, которые будут введены в рассмотрение в этой и в следующих главах. Говорят, что законы и уравнения механики не меняются при некоторых преобразованиях системы отсчета или что они *инвариантны* по отношению к этим преобразованиям, если равенства, выражающие законы механики, удовлетворяют следующим двум условиям.

1° После выполнения преобразований, связанных с переходом к новой системе отсчета, структура равенств в «новых» переменных имеет совершенно такой же вид, какой она имела в «старых» переменных.

2° Все функции от координат, скоростей и ускорений, которые содержатся в этих равенствах, в результате преобразования не меняются, т. е. как функции «новых» переменных они имеют совершенно такой же вид, какой они имели до преобразования как функции «старых» переменных.

Законы и уравнения механики содержат обычно не только координаты точек, но и их скорости и (или) ускорения. Поэтому по отношению к перемещениям точек равенства, выражающие законы или уравнения механики, являются дифференциальными уравнениями. Но для того чтобы из дифференциальных уравнений можно было определить движение, должны быть заданы еще и начальные данные. Если в двух различных инерциальных системах взять численно одинаковые начальные данные, то в связи с тем, что законы движения имеют в них одинаковый вид, движения в этих системах будут описываться одинаковыми функциями времени.

В качестве примера рассмотрим следующие уравнения [1]):

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|},$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = -F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}.$$

Непосредственно видно, что преобразование любого из перечисленных выше четырех типов не меняет ни вида этих уравнений, ни вида функций $F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$ и $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, содержащихся в их правых частях. Для того чтобы получить результат преобразования, нужно всюду в исходных уравнениях просто «приписать» звездочки к «старым» переменным $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и t.

Если система не является замкнутой, т. е. если учитывается влияние на точки системы других материальных объектов, не входящих в нее, то, вообще говоря, при переходе от одной инерциальной системы к другой структура равенств, выражающих законы и уравнения механики, может изменяться. Часто удается, однако, придать этим равенствам такой вид, чтобы при переходе от одной инерциальной системы к любой другой структура этих равенств сохранялась, хотя вид содержащихся в этих равенствах функций координат и скоростей точек [2]) может меняться. В таких случаях говорят, что форма записи законов или уравнений механики *ковариантна* по отношению к преобразованиям в классе инерциальных систем. Подобным же образом можно говорить о ковариантности законов и уравнений механики по отношению к иным классам преобразований систем отсчета. Разумеется, может оказаться, что и у незамкнутой системы имеет место не только ковариантность, но и инвариантность законов механики, но по отношению не к произвольным преобразованиям в классе инерциальных систем, а при каких-либо преобразованиях частного вида.

В качестве примера незамкнутой системы рассмотрим движение системы, описываемой уравнением [3])

$$m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}),$$

---

[1]) Далее будет показано, что это — векторные уравнения движения двух материальных притягивающихся или отталкивающихся точек.

[2]) То есть функций, определяющих силу, энергию, количество движения системы и т. д.; подробности см. ниже.

[3]) Это уравнение описывает, в частности, движение материальной точки в поле тяготения, если центр притяжения («Солнце») расположен в начале координат системы отсчета, относительно которой изучается движение.

где

$$F(\boldsymbol{r}) = -\frac{\gamma m}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.$$

Это уравнение инвариантно относительно «сдвига по времени»

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r}, \quad t^* = t + a,$$

но при «сдвиге системы отсчета»

$$\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}, \quad t^* = t$$

получается уравнение

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}^*}{dt^2} = \boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{r}^*),$$

где

$$\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{r}^*) = -\frac{\gamma m}{(\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{a})^2}\frac{\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{r}^* - \boldsymbol{a}|}.$$

Таким образом, в результате преобразования форма уравнений не изменилась, а $\boldsymbol{F}^*$ как функция новой переменной $\boldsymbol{r}^*$ отличается от $\boldsymbol{F}$ как функции старой переменной $\boldsymbol{r}$. Следовательно, рассматриваемое уравнение движения материальной точки представлено в форме, ковариантной относительно сдвигов. Читатель может сам убедиться в том, что это же уравнение инвариантно относительно поворотов вокруг любой оси, но лишь ковариантно относительно галилеевых преобразований.

Для читателей, знакомых с тензорным исчислением, сделаем следующее важное дополнительное замечание. Одним из исходных предположений в механике является утверждение о том, что все механические величины характеризуются тензорами нулевого, первого или второго ранга, а все законы и уравнения механики представляют собой тензорные равенства. Это значит, что в каждом законе должны содержаться слагаемые, представляющие собой тензоры одного и того же ранга, и из самого определения тензора следует, что любые равенства, выражающие законы и уравнения механики (как для замкнутых, так и для незамкнутых систем), ковариантны по отношению к повороту координат. В отличие от этого ковариантность по отношению к другим преобразованиям не является свойством законов механики, а скорее определяется формой их записи. Одни и те же законы механики могут быть представлены и в ковариантной, и в нековариантной записи. Преимущество ковариантной записи состоит в том, что она не зависит от выбора систем отсчета в пределах соответствующего класса преобразований.

Понятия об инвариантности и ковариантности законов и уравнений механики являются центральными, и к этим понятиям мы будем неоднократно возвращаться в следующих главах.

§ 3. Мера движения

Наблюдая движения тел, люди издавна обращали внимание на то, что чем больше масса и скорость движущегося тела, тем больший эффект возникает при его соударениях с другими телами. Так, например, при движении ядра его разрушительная сила тем больше, чем больше его масса и скорость; при ударе движущегося шара о неподвижный последний приобретает тем бо́льшую скорость, чем бо́льшую скорость имел первый шар; метеорит, достигающий поверхности Земли, проникает в грунт тем глубже, чем больше масса и скорость метеорита. Эти и многие иные примеры такого рода наводят на мысль о существовании меры механического движения (короче говоря, *меры движения*) и о зависимости этой меры от скорости и массы движущегося материального объекта.

Наблюдая движение шаров до столкновения и после него, можно заметить, что если в результате столкновения движение одного из шаров «уменьшилось», то движение второго шара «увеличилось» и притом тем более, чем существеннее «уменьшилось» движение первого шара. Представляется поэтому, что хотя мера движения каждого из шаров меняется во время соударения, сумма таких мер для обоих шаров остается неизменной, т. е. что при некоторых условиях происходит «обмен движением» при сохранении меры движения для системы в целом.

Понятие «соударение», т. е. короткое взаимодействие путем непосредственного контакта, можно обобщить, введя представление о «вре́менном взаимодействии», т. е. о взаимодействии двух материальных точек (не обязательно обусловленном их непосредственным контактом), имеющем «начало» и «конец» и продолжающемся конечное время. Тогда естественно предполагать, что мера движения системы сохраняется в результате вре́менных взаимодействий.

История механики связана с длительными спорами ученых о том, какая величина является мерой движения, в частности, является ли мера движения скалярной величиной или вектором. Спор этот имеет лишь исторический интерес, но именно в ходе этой дискуссии были введены две основные характеристики движения — кинетическая энергия и количество движения (импульс), которые играют центральную роль во всем построении механики. Попробуем поэтому точнее определить интуитивно введенное выше понятие о мере движения и из общих соображений выяснить некоторые свойства, которыми она должна обладать [1]).

---

[1]) Развитый в этом параграфе подход к определению мер движения предложил В. С. Сорокин (см. Успехи физических наук, 1956, т. LIX, вып. 2, с. 325—362).

Будем исходить из предположения, что мерой движения материальной точки служит скалярная функция массы и скорости точки $f(m_i, \boldsymbol{v}_i)$, удовлетворяющая следующим трем условиям.

1° Мера движения аддитивна. Это требование означает, что мера движения системы f_c получается как сумма мер движения всех N точек, входящих в систему; $f_c = \sum\limits_{i=1}^{N} f(m_i, \boldsymbol{v}_i)$.

2° Мера движения инвариантна по отношению к повороту системы отсчета. Из этого интуитивно очевидного требования (естественно вытекающего из основных предположений о пространстве и времени) сразу следует, что мера движения не должна зависеть от положения точки, от направления ее скорости и может зависеть лишь от модуля скорости или, что то же самое, от квадрата скорости: $f = f(m, v^2)$.

3° Мера движения замкнутой системы материальных точек не должна изменяться при вре́менных взаимодействиях (предполагается, что за время взаимодействия τ меняются лишь механические характеристики материальных точек — их положения и скорости, но остаются неизменными прочие параметры, характеризующие их физические состояния, — температура, электрический заряд и т. д.). Это требование означает, что мера движения всей замкнутой системы материальных точек f_c, подсчитанная до начала взаимодействия и после его окончания, должна быть одной и той же.

Разумеется, введенный выше постулат 3° — сохранение меры при вре́менных взаимодействиях — должен быть инвариантен по отношению к преобразованиям Галилея. Это требование — прямое следствие принципа относительности Галилея.

Определим теперь, какой вид имеет скалярная функция $f(m, v^2)$, удовлетворяющая всем этим условиям. Оказывается, что условия 3° достаточно для того, чтобы составить функциональное уравнение, которому должна удовлетворять функция $f(m, v^2)$, и что это функциональное уравнение может быть решено.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух материальных точек с массами m_1 и m_2. Пусть скорости этих точек относительно инерциальной системы отсчета равны $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ в момент t (до взаимодействия) и $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ — в момент $t' = t + \tau$ (после взаимодействия). Если функция $f(m_i, \boldsymbol{v}_i)$ служит мерой движения, то в силу условий 3° должно выполняться равенство[1])

$$f(m_1, \boldsymbol{v}_1) + f(m_2, \boldsymbol{v}_2) = f(m_1, \boldsymbol{v}_1') + f(m_2, \boldsymbol{v}_2'). \tag{1}$$

[1]) Здесь и далее вместо $f(m, v^2)$ временно используется запись $f(m, \boldsymbol{v})$, так как следующие далее выкладки не зависят от того, как конкретно зависит функция f от $\boldsymbol{v}$. Позже тот факт, что f зависит от v^2, будет учтен особо.

Выберем систему отсчета, движущуюся относительно исходной поступательно и равномерно со скоростью $-\boldsymbol{u}$. Эта система также инерциальна. Рассматриваемые точки имеют в ней скорости $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u}$ в момент t и $\boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}_2'+\boldsymbol{u}$ в момент t'. В силу принципа относительности Галилея функция f должна быть мерой движения и в этой системе, т. е. должно выполняться равенство

$$f(m_1,\ \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{u})+f(m_2,\ \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{u})=f(m_1,\ \boldsymbol{v}_1'+\boldsymbol{u})+f(m_2,\ \boldsymbol{v}_2'+\boldsymbol{u}). \tag{2}$$

Выберем в «старой» инерциальной системе отсчета декартову систему координат x, y, z так, чтобы координаты вектора $\boldsymbol{u}$ были равны $(u,\ 0,\ 0)$, т. е. предположим, что новая инерциальная система движется относительно старой со скоростью u вдоль оси x. Тогда

$$f(m,\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u})=f(m,\ v_x+u,\ v_y,\ v_z),$$

где v_x, v_y, v_z — координаты вектора $\boldsymbol{v}$, и равенство (2) принимает вид

$$\begin{aligned}(m_1,\ v_{1x}+u,\ v_{1y},\ v_{1z})+f(m_2,\ v_{2x}+u,\ v_{2y},\ v_{2z})=\\ =f(m_1,\ v_{1x}'+u,\ v_{1y}',\ v_{1z}')+f(m_2,\ v_{2x}'+u,\ v_{2y}',\ v_{2z}').\end{aligned} \tag{3}$$

Разложим теперь функции, входящие в это равенство, в ряды Тейлора по степеням u. Выписав лишь линейные члены и заменив многоточиями члены высших порядков, получим

$$\begin{aligned}f(m_1,\ \boldsymbol{v}_1)+u\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1+\ldots+f(m_2,\ \boldsymbol{v}_2)+u\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2+\ldots=\\ =f(m_1,\ \boldsymbol{v}_1')+u\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1'+\ldots+f(m_2,\ \boldsymbol{v}_2')+u\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2'+\ldots,\end{aligned} \tag{4}$$

где $(\partial f/\partial v_x)_k$ и $(\partial f/\partial v_x)_k'$ $(k=1,\ 2)$ условно означают производную

$$\partial f(m,\ v_x,\ v_y,\ v_z)/\partial v_x$$

после подстановки в нее вместо v_x, v_y, v_z координат векторов $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ и $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$ соответственно. Отбросив равные (в силу (1)) свободные члены в правой и левой частях равенства (4), разделив результат на u, устремив u к нулю и отбросив поэтому члены, замененные многоточием, в пределе получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1+\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2=\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_1'+\left(\frac{\partial f}{\partial v_x}\right)_2'. \tag{5}$$

Равенство (5) имеет совершенно такую же структуру, что и равенство (1), только вместо искомой меры движения f в равенстве (5) стоит частная производная $\partial f/\partial v_x$. Но это означает, что если функция f удовлетворяет равенству (1), то и ее частная производная $\partial f/\partial v_x$ также удовлетворяет равенству (1).

Мы пришли к этому выводу, предположив, что новая инерциальная система отсчета движется вдоль оси x, т. е. что вектор $\boldsymbol{u}$ имеет координаты $(u,\ 0,\ 0)$. Предположим теперь, что она движется относительно старой системы отсчета вдоль оси y или вдоль оси z, т. е. что вектор u имеет координаты $(0, u, 0)$ или $(0, 0, u)$. Дословно повторив проведенные выше рассуждения, установим, что равенству типа (1) удовлетворяют также частные производные $\partial f/\partial v_y$ и $\partial f/\partial v_z$.

Введем теперь вектор $\boldsymbol{q}$ с координатами $\partial f/\partial v_x$, $\partial f/\partial v_y$ и $\partial f/\partial v_z$. Каждая из этих частных производных представляет собой функцию переменных v_x, v_y, v_z и m. Поэтому вектор $\boldsymbol{q}$ является функцией переменных v_x, v_y, v_z и m, т. е. $\boldsymbol{q}$ есть вектор-функция от m и от векторного аргумента $\boldsymbol{v}$, удовлетворяющая равенству (1). Функция $\boldsymbol{q}(m, \boldsymbol{v})$ аддитивна и, являясь вектором, инвариантна по отношению к повороту системы отсчета. Таким образом, опираясь только на принцип относительности Галилея, мы установили важный факт: если существует скалярная функция $f(m, \boldsymbol{v})$, удовлетворяющая условиям 1°, 2° и 3°, то существует и векторная функция $\boldsymbol{q}$, удовлетворяющая этим трем условиям, причем f и $\boldsymbol{q}$ связаны соотношениями

$$q_x = \partial f/\partial v_x, \quad q_y = \partial f/\partial v_y, \quad q_z = \partial f/\partial v_z. \tag{6}$$

Теперь, исходя из принципа относительности Галилея, потребуем, чтобы равенство (5) (и аналогичные равенства для $\partial f/\partial v_y$ и $\partial f/\partial v_z$) сохранялось при преобразованиях Галилея. Легко видеть, что повторяя подобные рассуждения, но только исходя не из равенства (1), а из равенства (5) (и аналогичных равенств для $\partial f/\partial v_y$ и $\partial f/\partial v_z$), мы установим, что равенству типа (1) должны удовлетворять все вторые производные, т. е. шесть функций

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_x},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_z} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_z \partial v_x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial x_z} = \frac{\partial^2 f}{\partial v_z \partial v_y}.$$

Выше было установлено, что если равенство (1) верно для функции f, то оно верно также еще для девяти функций, а именно для

$$\frac{\partial f}{\partial v_x}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_y}, \quad \frac{\partial f}{\partial v_z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_z^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial v_y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_x \partial x_z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v_y \partial v_z}. \tag{7}$$

Эти десять равенств вида (1) содержат величины, которые по постановке задачи предполагаются заданными (ими являются массы m_1 и m_2 двух взаимодействующих точек и их скорости до взаимодействия $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$), и шесть неизвестных величин (проекции скоростей $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$ этих же точек после взаимодействия: v_{1x}', v_{1y}', v_{1z}', v_{2x}', v_{2y}' и v_{2z}'). В силу классического детерминизма, т. е. предположения, что при любых заданных воздействиях состояние системы в некоторый момент полностью определяет ее состояние во все последующие моменты времени, эти шесть неизвестных величин — скорости после взаимодействия — должны полностью определяться по заданным величинам.

Таким образом, десять равенств типа (1), о которых выше шла речь, составляют систему из десяти уравнений, содержащую лишь шесть неизвестных. Эта система уравнений должна иметь решение (и притом единственное). Ясно поэтому, что из десяти равенств вида (1), о которых выше шла речь, лишь шесть независимы. Именно они дают решение задачи, т. е. позволяют найти $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$ при заданных m_1, m_2, $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Это решение должно удовлетворять остальным четырем равенствам, т. е. обращать их в тождества вида $0=0$.

Равенство (1) для функции f заведомо входит в число шести независимых, и каковы бы ни были остальные пять равенств, входящих в эту шестерку, хотя бы одно равенство для второй производной в нее не войдет — ведь среди девяти функций (7) содержатся шесть вторых производных. Наши дальнейшие рассуждения не зависят от того, для какой конкретно второй производной равенство вида (1) является зависимым — пусть, например, это $\partial^2 f/\partial v_x \partial v_y$.

Учтем теперь, что f зависит от v^2, $f=f(m, v^2)$. Тогда, считая m постоянным параметром, получаем

$$\frac{\partial f(m, v^2)}{\partial v_x}=\frac{df(m, v^2)}{d(v^2)}\frac{\partial (v^2)}{\partial v_x}=\frac{df(m, v^2)}{d(v^2)}2v_x$$

и

$$\frac{\partial^2 f(m, v^2)}{\partial v_x \partial v_y}=\frac{d^2 f(m, v^2)}{d(v^2)^2}2v_x\frac{\partial (v^2)}{\partial v_y}=\frac{d^2 f(m, v^2)}{d(v^2)^2}4v_x v_y. \tag{8}$$

Поэтому равенство вида (1) для производной $\partial^2 f/\partial v_x \partial v_y$ имеет вид

$$\left(\frac{d^2 f}{d(v^2)^2}\right)_1 v_{1x}v_{1y}+\left(\frac{d^2 f}{d(v^2)^2}\right)_2 v_{2x}v_{2y}=\left(\frac{d^2 f}{d(v^2)^2}\right)_1' v_{1x}'v_{1y}'+\left(\frac{d^2 f}{d(v^2)^2}\right)_2' v_{2x}'v_{2y}'.$$

Если скорости до взаимодействия $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ фиксированы и из шести независимых уравнений определены скорости после взаимодействия $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$, то это равенство должно обращаться в тождество вида $0=0$, каковы бы ни были эти скорости. Это заведомо возможно в том случае, когда[1])

$$d^2 f(m, v^2)/d(v^2)^2=0. \tag{9}$$

Положив $v^2=x$, последнее равенство можно записать так:

$$d^2 f(m, x)/dx^2=0.$$

---

[1]) Мы оставляем в стороне вопрос о том, является ли это решение рассматриваемой функциональной задачи единственным. При некоторых дополнительных не слишком ограничительных предположениях о функции f устанавливается не только существование (как это сделано в тексте), но и единственность найденного решения.

Интегрируя это равенство дважды, находим функцию f:

$$f = {}^1/_2 a(m)\, x + b(m),$$

где ${}^1/_2 a(m)$ и $b(m)$ — произвольные функции m, т. е.

$$f = {}^1/_2 a(m)\, v^2 + b(m). \qquad (10)$$

Таким образом, из требований $1^\circ - 3^\circ$ вытекает, что если существует скалярная мера движения $f(m, v^2)$, то она имеет вид (10), и что тогда существует векторная мера движения $\boldsymbol{q}$

$$q_x = a(m)\, v_x, \quad q_y = a(m)\, v_y, \quad q_z = a(m)\, v_z,$$

или в векторной записи

$$\boldsymbol{q} = a(m)\, \boldsymbol{v}. \qquad (11)$$

В классической механике нормируют меру движения f так, чтобы она обращалась в нуль при $\boldsymbol{v} = 0$. Это соображение делает предпочтительным выбор $b(m) = 0$.

Проведенные выше рассуждения не устанавливают вид функции $a(m)$; для этого требуются дополнительные соображения.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух точек A и B. Если бы система состояла только из точки A, то в силу определения инерциальной системы отсчета скорость v_A сохранялась бы и, следовательно, имело бы место равенство $\boldsymbol{q}_A = a(m)\boldsymbol{v}_A = \text{const}$. Благодаря наличию в системе точки B и взаимодействию между точками имеем

$$\frac{d\boldsymbol{q}_A}{dt} = \frac{d\,[a(m)\, \boldsymbol{v}_A]}{dt} = a(m)\, \boldsymbol{w}_A \neq 0,$$

т. е. возникает ускорение точки A.

Непосредственные наблюдения показывают, что если изменять количество материи, сконцентрированной в материальном объекте, который мы рассматриваем в качестве точки A (т. е. изменять инерционную массу m точки A), и рассматривать не зависящие от m воздействия, то при одном и том же воздействии на нее и прочих равных условиях ускорение w_A меняется обратно пропорционально m.

Это утверждение, новое в том смысле, что оно не вытекает из всех введенных выше исходных определений, и должно быть добавлено к ним в качестве самостоятельного постулата. Такой постулат был введен Ньютоном и называется *вторым постулатом (законом) Ньютона*.

Исходя из второго постулата Ньютона, естественно выбрать функцию $a(m)$ пропорциональной m. Принципиально возможен любой выбор коэффициента пропорциональности. Принято считать его равным единице, т. е. полагать $a(m) = m$. Подставив это значение $a(m)$ в формулы (10) и (11), получим для скалярной и векторной мер движения следующие выражения:

$$f = {}^1/_2 mv^2, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}. \tag{13}$$

Поэтому для системы, состоящей из N точек, эти скалярная и векторная меры равны

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2},} \tag{14}$$

$$\boxed{\boldsymbol{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i.} \tag{15}$$

Вектор $\boldsymbol{q}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ называется *количеством движения* (термин, принятый в механике) или *импульсом* (термин, принятый в физике) *точки*, а вектор $\boldsymbol{Q}$ — *количеством движения* (или *импульсом*) *системы*.

Скалярная величина $f_i = (m_i v_i^2)/2$ имеет размерность энергии, называется *кинетической энергией точки* и обозначается T_i. Соответственно $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ называется *кинетической энергией системы*[1]).

Полученные выражения для мер движения вполне соответствуют интуитивным соображениям, о которых шла речь в начале этого параграфа: тому, что меры должны «расти» с ростом массы m и с ростом скорости v.

§ 4. Сила. Работа. Силовые поля

1. Понятие о силе. Снова рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух точек A и B. В силу первого закона Ньютона, если бы в системе не было точки B и точка A была сво-

[1]) В соответствии с представлениями теории относительности Вселенная представляет собой четырехмерный континуум «пространство-время», поэтому и мера движения должна быть четырехмерным вектором. Классическая механика, предполагая, что течение времени не связано с пространством, вводит в рассмотрение два раздельных объекта — трехмерное пространство и скалярное время. Естественно, что и мера движения в классической механике «расщепляется» на трехмерную векторную меру и на меру скалярную. В этом смысле скалярную меру — кинетическую энергию — можно рассматривать как проекцию четырехмерной меры на временну́ю координату. О своеобразной «связи» энергии и времени в классической механике речь будет идти и далее; см., например, §§ 2 и 7 гл. VII.

бодной, то скорость точки A относительно инерциальной системы отсчета не изменялась бы и мы имели бы $q_A = \mathrm{const}$. Однако из-за взаимодействия точек A и B производная dq_A/dt отлична от нуля. Как уже указывалось выше, механика не отвечает на вопрос о том, почему наличие точки B оказывает воздействие на движение точки A, а исходит из того факта, что такое воздействие имеет место, и отождествляет результат этого воздействия с вектором dq_A/dt. Воздействие точки B на движение точки A называют *силой* и говорят, что точка B действует на точку A с силой, изображаемой вектором

$$\boxed{\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{q}_A}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} = m\boldsymbol{w}_A.} \tag{16}$$

Именно это равенство (используя термин «сила») обычно называют *вторым законом Ньютона*.

Пусть, далее, та же точка A взаимодействует с несколькими материальными объектами $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Каждый из этих объектов, если бы он был один, обусловил бы возникновение силы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_k$ соответственно. При этом постулируется так называемый *принцип независимости действия сил*: сила, обусловленная каким-либо источником, не зависит от наличия сил, обусловленных иными источниками. Центральным при этом является предположение о том, что силы, приложенные к одной и той же точке, могут складываться по обычным правилам сложения векторов и что полученная таким образом сила эквивалентна исходным. Благодаря предположению о независимости действия сил множество воздействий, приложенных к материальной точке, можно заменить одним воздействием, представленным соответственно одной силой, которая получается геометрическим суммированием векторов всех действующих сил.

Сила — результат *взаимодействия* материальных объектов. Это значит, что если $\boldsymbol{F}_A = dq_A/dt \neq 0$ из-за наличия точки B, то и, наоборот, $\boldsymbol{F}_B = dq_B/dt \neq 0$ из-за наличия точки A. Соотношение между силами $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ устанавливается *третьим постулатом (законом) Ньютона*. Согласно этому постулату при взаимодействии между материальными объектами силы $\boldsymbol{F}_A$ и $\boldsymbol{F}_B$ равны по величине, действуют вдоль одной прямой, но направлены в противоположные стороны. Этот закон формулируется иногда кратко так: *«любое действие равно и противоположно противодействию»*.

Утверждение это — новый постулат. Он не возникает как-либо из предыдущих исходных предположений, и, вообще говоря, можно построить механику без этого постулата или с иной его формулировкой.

При рассмотрении системы материальных точек удобно разделить все силы, действующие на точки рассматриваемой системы, на два класса. К первому классу относят силы, которые возникают благодаря взаимодействиям материальных точек, входящих в данную систему. Силы такого рода называются *внутренними*. Силы, возникающие благодаря воздействию на материальные точки рассматриваемой системы других материальных объектов, не включенных в эту систему, называют *внешними*.

2. Работа силы. Скалярное произведение $\boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$, где $d\boldsymbol{r}_i$ — бесконечно малое приращение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_i$ при смещении i-й материальной точки вдоль ее траектории, называется *элементарной работой силы* $\boldsymbol{F}_i$ и обозначается δA_i. Сумму элементарных работ всех сил, действующих на точки системы, называют *элементарной работой сил системы* и обозначают

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i.$$

Выражая скалярные произведения через проекции сомножителей на оси координат, получаем

$$\delta A_i = F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i, \tag{17}$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i). \tag{18}$$

Если проекции сил F_{ix}, F_{iy} и F_{iz} и приращения координат dx_i, dy_i и dz_i выражены через один и тот же скалярный параметр (например, через время t или — в случае системы, состоящей из одной точки, — через элементарное перемещение ds), то величины в правых частях равенств (17) и (18) могут быть представлены в виде функций от этого параметра, умноженных на его дифференциал, и могут быть проинтегрированы по этому параметру, например по t в пределах от t_1 до t_2. Результат интегрирования обозначается $A^i_{1,2}$ и $A_{1,2}$ и называется *полной работой силы* $\boldsymbol{F}_i$ и *полной работой сил системы* за время (t_1, t_2) соответственно.

При подсчете элементарной и полной работы всех сил системы, δA и $A_{1,2}$, должны быть приняты во внимание все силы, как внешние, так и внутренние. Тот факт, что внутренние силы попарно равны и противоположно направлены, оказывается несущественным, так как при подсчете работы играют роль еще и перемещения точек, и поэтому работа внутренних сил, вообще говоря, отлична от нуля.

Рассмотрим частный случай, когда величины в правых частях равенств (17) и (18) могут быть представлены как полные дифференциалы

$$\delta A_i = d\Phi_i, \tag{19}$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} d\Phi_i = d\Phi. \tag{20}$$

В этом случае также естественно принять введенные выше обозначения и определения:

$$A_{1,2}^{i} = \int\limits_{\Phi_{i,1}}^{\Phi_{i,2}} d\Phi_i = \Phi_{i,2} - \Phi_{i,1}, \tag{21}$$

$$A_{1,2} = \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1. \tag{22}$$

Из равенств (21) и (22) следует, что в тех случаях, когда элементарная работа является полным дифференциалом некоторой функции Ф, работа на любом конечном интервале зависит лишь от значений Ф в начале и в конце этого интервала и не зависит от промежуточных значений Ф, т. е. от того, каким образом происходило перемещение.

3. Силовое поле. Во многих задачах механики часто приходится иметь дело с силами, зависящими от положения рассматриваемых точек (и, быть может, от времени) и не зависящими от их скоростей. Так, например, сила может зависеть от расстояния между взаимодействующими точками. В технических задачах силы, обусловленные пружинами, зависят от деформации пружин, т. е. также от положения в пространстве рассматриваемой точки или тела.

Рассмотрим сначала случай, когда изучается движение одной точки и поэтому рассматривается только одна сила, зависящая от положения точки. В таких случаях вектор силы связывают не с точкой, на которую осуществляется воздействие, а с точками пространства. Предполагается, что с каждой точкой пространства, определяемой в некоторой инерциальной системе отсчета, связан вектор, изображающий ту силу, которая действовала бы на материальную точку, если бы последняя была помещена в эту точку пространства. Таким образом, условно считается, что пространство всюду «заполнено» векторами. Это множество векторов называется *силовым полем*.

Говорят, что силовое поле *стационарно*, если рассматриваемые силы не зависят явно от времени. В противном случае силовое поле называется *нестационарным*.

Поле называется *потенциальным*, если существует такая скалярная функция координат точки (и, быть может, времени)

$\Phi(x, y, z, t)$, что частные производные от этой функции по x, y и z равны проекциям F_x, F_y, F_z силы $\boldsymbol{F}$ на оси x, y и z соответственно:

$$F_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{23}$$

В связи с тем, что сила $\boldsymbol{F}$ есть функция точки пространства, т. е. координат x, y и z, и, может быть, времени, ее проекции F_x, F_y и F_z также являются функциями переменных x, y, z, t.

Функция $\Phi(x, y, z, t)$, если она существует, называется *силовой функцией*. Разумеется, силовая функция существует не для всякого силового поля, и условия ее существования, т. е. условия того, что поле потенциально, выясняются в курсе математики и определяются равенствами

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

При исследовании движения N взаимодействующих точек необходимо учитывать наличие N действующих на них сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, ..., $\boldsymbol{F}_n$. В этом случае вводят $3N$-мерное пространство координат точек x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Задание точки этого пространства определяет расположение всех N материальных точек изучаемой системы. Далее вводят в рассмотрение $3N$-мерный вектор с координатами F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} и условно считают, что $3N$-мерное пространство x_i, y_i, z_i всюду плотно заполнено такими векторами. Тогда задание точки этого $3N$-мерного пространства определяет не только положение всех материальных точек относительно исходной системы отсчета, но и все силы, действующие на материальные точки системы. Такое $3N$-мерное силовое поле называется потенциальным, если существует силовая функция Φ от всех $3N$ координат x_i, y_i, z_i такая, что

$$F_{ix} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{24}$$

Если силы $\boldsymbol{F}_i$ могут быть представлены в виде суммы двух слагаемых

$$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^* + \boldsymbol{F}_i^{**} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

так, что слагаемые $\boldsymbol{F}_i^*$ удовлетворяют соотношениям (24), а слагаемые $\boldsymbol{F}_i^{**}$ им не удовлетворяют, то $\boldsymbol{F}_i^*$ называются *потенциальными*, а $\boldsymbol{F}_i^{**}$ *непотенциальными силами*.

Система материальных точек называется *консервативной*[1]), если существует силовая функция $\Phi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N)$,

---

[1]) Далее будет дано более общее определение понятия консервативной системы (см. гл. IV и VII).

не зависящая явно от времени (силовое поле стационарно) и такая, что все силы, действующие на точки, удовлетворяют соотношениям (24).

Элементарную работу сил консервативной системы

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

удобно представить в ином виде, выразив скалярные произведения через проекции векторов-сомножителей (формула (18)). Учитывая существование силовой функции Ф, в силу (23) получаем

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} dz_i \right),$$

т. е. элементарная работа δA равна полному дифференциалу силовой функции

$$\boxed{\delta A = d\Phi.} \tag{25}$$

Таким образом, при движениях консервативной системы элементарная работа выражается полным дифференциалом некоторой функции, и поэтому

$$A_{1,2} = \Phi_2 - \Phi_1. \tag{26}$$

Гиперповерхности

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = \mathrm{const}$$

называют *поверхностями уровня*.

В формуле (26) символы Φ_1 и Φ_2 означают значения Ф в моменты t_1 и t_2 начала и конца движения. Поэтому при любом движении системы, началу которого соответствует точка, расположенная на поверхности уровня

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_1,$$

а концу — точка на поверхности уровня

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_2,$$

работа подсчитывается по формуле (26). Следовательно, при движении консервативной системы работа зависит не от пути, а лишь от того, на каких поверхностях уровня началось и закончилось движение. В частности, работа равна нулю, если движение начинается и заканчивается на одной и той же поверхности уровня.

Формулой (25) можно пользоваться иногда для того, чтобы определить силовую функцию Ф. Продемонстрируем это на простых примерах.

Пример 1. Рассмотрим силу тяжести G, считая, что эта сила не зависит от положения точки. Удобно направить ось z параллельно направлению силы. В этом случае

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -G = \text{const},$$

и поэтому

$$\delta A = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -G\,dz = d\Phi,$$

откуда

$$\Phi = -Gz + \text{const}.$$

Пример 2. Рассмотрим поле упругой силы, действующей вдоль оси z (в сторону, противоположную возрастанию z) и пропорциональной z:

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -cz.$$

Для этого силового поля $\delta A = d\Phi = -cz\,dz$ и

$$\Phi = -\frac{cz^2}{2} + \text{const}.$$

Пример 3. Рассмотрим поле произвольной центральной силы (мы будем называть силу *центральной*, если она всегда направлена вдоль прямой, проходящей через центр — неподвижную точку O, а величина ее зависит лишь от расстояния до центра). Приняв точку O за начало координат, можно записать общую формулу для любой центральной силы

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Элементарная работа центральной силы равна

$$\delta A = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{F(r)}{r}\,\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{F(r)}{2r}\,d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{F(r)}{2r}\,dr^2 = F(r)\,dr,$$

поэтому

$$d\Phi = F(r)\,dr$$

и

$$\Phi = \int F(r)\,dr + \text{const}.$$

Силовое поле, имеющее такую силовую функцию, называется *центральным полем*.

Пример 4. В качестве последнего примера рассмотрим поле двух точек, между которыми действует сила взаимного притяжения (или отталкивания), зависящая только от расстояний между точками.

Пусть $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы первой и второй точек соответственно. Если $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, то $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ — расстояние между точками.

Сила, действующая на первую точку, может быть представлена выражением

$$\boldsymbol{F}_1 = F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|},$$

сила же $\boldsymbol{F}_2$, действующая на вторую точку, равна и противоположна силе $\boldsymbol{F}_1$ (здесь $F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = F(r)$ — некоторая заданная функция расстояния между точками). Тогда

$$\begin{aligned}\delta A &= \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \\ &= F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\cdot d\boldsymbol{r}_1 - F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\cdot d\boldsymbol{r}_2 = \\ &= F(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\cdot d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\cdot d\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

Дословно повторяя рассуждения, проведенные в третьем примере, получаем

$$\delta A = F(r)\,dr$$

и

$$\Phi = \int F(r)\,dr + \text{const}.$$

Таким образом, силовая функция поля тяготения двух точек определяется так же, как и для поля центральной силы, но переменной служит уже не радиус-вектор точки, а расстояние между взаимодействующими точками.

Последний пример иллюстрирует, в частности, то обстоятельство, что функция Φ не аддитивна. Действительно, функцию

$$\Phi = \int F(r)\,dr$$

нельзя получить как сумму значений, подсчитанных порознь для первой и второй гочек, так как она является функцией расстояния r, определяемого положением двух точек одновременно.

§ 5. Основные задачи и методы классической механики

Основная задача, которую решает классическая механика, может быть сформулирована так: в начальный момент $t = t_0$ известны положения и скорости всех точек, образующих некоторую систему; заданы силы, действующие на все материальные точки этой системы; требуется определить движение точек системы для всех $t > t_0$.

Говоря, что «силы заданы», иногда имеют в виду, что они заданы как функции времени, т. е. что заранее известно, как меняются во времени производные dq/dt для всех точек; чаще, однако, при этом имеют в виду, что dq/dt для каждой точки зависит также от положения всех материальных точек в рассматриваемой системе отсчета или (и) от их скорости относительно нее; тогда слова «силы заданы» означают, что силы заранее известны как функции не только времени, но и координат и скоростей точек системы.

Как уже указывалось в предыдущих параграфах, сила — результат сложных физических процессов, обусловливающих взаимодействие материальных объектов. Механика не изучает физическую природу этих взаимодействий. Поэтому силы как функции положений и скоростей материальных точек или тел в каждой конкретной механической задаче считаются известными — их определяют в иных дисциплинах.

В тех случаях, когда физическая природа взаимодействий не изучена, сила как функция координат и скоростей точек может быть все же определена в результате творческих обобщений результатов экспериментальных наблюдений. В исследованиях такого рода могут быть использованы методы механики — типичным примером служит открытие Ньютоном закона всемирного тяготения, однако основная задача механики как науки начинается только после того, как такая предварительная и, вообще говоря, выходящая за рамки механики работа проделана и сила задана как функция времени, координат точек системы и их скоростей.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек, и выделим в ней i-ю точку. Все силы, действующие на эту точку в результате внутренних и внешних взаимодействий, можно заменить одной силой — их равнодействующей $\boldsymbol{F}_i$ (см. § 4); в силу сказанного выше $\boldsymbol{F}_i$ известна как функция t, координат всех точек системы и их скоростей[1]):

$$\boldsymbol{F}_i(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = \boldsymbol{F}_i(t,\ \boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}}).$$

Тогда в соответствии со вторым законом Ньютона в некоторой инерциальной системе отсчета имеют место N равенств

$$\frac{dq_i}{dt} = m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i(t,\ \boldsymbol{r},\ \dot{\boldsymbol{r}}) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{27}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат к i-й точке.

---

[1]) Здесь и далее в тех случаях, когда у аргументов функции индексы не указаны, имеется в виду, что функция может зависеть от этих аргументов с любыми индексами. Поэтому $F(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$ в общем случае означает функцию от времени, координат и скоростей всех точек.

Проектируя эти равенства на оси координат, получаем

$$
\begin{aligned}
m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= F_{ix}(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\
m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= F_{iy}(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\
m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= F_{iz}(t;\ x,\ y,\ z;\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\\
&(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

где F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — проекции указанных выше равнодействующих $\boldsymbol{F}_i$ на оси x, y, z соответственно. Уравнения (28) образуют систему дифференциальных уравнений порядка $6N$, так как каждая точка вносит в эту систему три уравнения второго порядка. Эти дифференциальные уравнения называют иногда *основными уравнениями динамики системы материальных точек.*

Если известны положения и скорости всех точек системы в начальный момент t_0

$$
\begin{aligned}
x_i(t_0) &= x_i^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i^0,\\
y_i(t_0) &= y_i^0, \quad \dot{y}_i(t_0) = \dot{y}_i^0,\\
z_i(t_0) &= z_i^0, \quad \dot{z}_i(t_0) = \dot{z}_i^0\\
&(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

то решение основной задачи механики сводится к интегрированию основных уравнений динамики (28) при заданной системе начальных данных (29).

В тех случаях, когда речь идет о численном решении задачи, она, разумеется, может быть приближенно доведена до конца, например обычными методами приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Если же, однако, речь идет о нахождении общего решения, т. е. об умении записать решение дифференциальных уравнений (28) в замкнутой форме, то задачу такого рода можно решить лишь для отдельных частных случаев функциональных зависимостей, выражающих силы. Теория дифференциальных уравнений гарантирует лишь то, что это решение существует и является единственным (при нестеснительных для механики ограничениях, наложенных на функции, выражающие силы) и что движение полностью определяется заданными начальными данными (29).

Поэтому все дальнейшее построение механики, ее цели и методы связаны с обходом или преодолением затруднений, обусловленных тем, что основные дифференциальные уравнения динамики систем не могут быть проинтегрированы в общем виде. Методы, которые используются в механике, чтобы преодолеть указанные трудности, могут быть кратко описаны так.

1° Механика тщательно собирает и изучает все те случаи, когда функциональные зависимости, выражающие силы, таковы, что дифференциальные уравнения (28) могут быть сведены к квадратурам и поэтому движения могут быть непосредственно изучены. Так, например, обстоит дело в таком важном случае, как движение материальной точки в поле тяготения какого-либо иного материального объекта. Однако уже в так называемой задаче трех тел, когда рассматривается система из трех материальных точек, движущихся под действием взаимного тяготения, дифференциальные уравнения вида (28) не решаются в общем виде и исследование движения становится значительно сложнее.

2° В тех случаях, когда нельзя найти решение системы дифференциальных уравнений (28) в замкнутой форме, разрабатываются методы, позволяющие значительно упростить эти уравнения для последующего исследования, в частности понизить их порядок. Так, например, при изучении движения абсолютно твердого материального тела, состоящего из бесконечного количества точек, заполняющих некоторый объем, система дифференциальных уравнений вида (28) должна была бы состоять из бесконечного числа уравнений. Однако в механике установлены приемы, позволяющие полностью описать движение всех точек твердого тела с помощью только шести дифференциальных уравнений не выше второго порядка каждое.

3° В тех случаях, когда интегралы уравнений (28) не могут быть найдены даже при предельном упрощении этих уравнений методами механики, изучаются общие свойства решений этих уравнений без их непосредственного нахождения. Так, например, для случая, когда движение происходит в потенциальных полях, механика определяет многие общие свойства движений без того, чтобы доводить до конца задачу об определении самих движений.

4° Наконец, — и, по-видимому, этот прием является наиболее важным и чаще всего употребляемым — вводятся специально выбранные функции от координат точек и их скоростей и изучается зависимость этих функций от времени. В качестве таких функций используются, в частности, введенные выше меры движения — кинетическая энергия T и количество движения Q системы. Во многих случаях оказывается, что для описания изменения этих функций во времени можно составить дифференциальные уравнения значительно более простые, чем основные дифференциальные уравнения динамики, так что изменение этих функций во времени исследуется гораздо проще. Так, например, можно установить условия, когда количество движения системы Q заведомо не меняется во время движения. В этом случае можно сразу выписать три равенства типа «заданная функция от координат и скоростей точек равна постоянной». Каждый раз, когда удается найти функции от координат точек и их скоростей, которые не изменяются во время движения системы, эти функции называются *первыми интегралами дифференциальных уравнений движения*. В механике указываются приемы нахождения таких первых интегралов, которые не только позволяют упростить уравнения движения, но и зачастую дают возможность довести решение задачи до конца. В качестве примера можно указать рассматриваемую ниже задачу о движении материальной точки в поле центральной силы.

Эти четыре основных приема используются механикой для вывода ее общих законов и для изучения некоторых часто встречающихся типов движения или важных классов динамических систем. Предполагается, что не только выполнены все исходные постулаты, о которых шла речь в § 2 этой главы, но что выполняются следующие дополнительные условия.

1° Рассмотрение ведется в инерциальной системе отсчета.

2° Рассматривается движение постоянной по составу системы материальных объектов, т. е. считается, что на протяжении всего движения система состоит из одних и тех же материальных объектов.

3° В пространстве «нет преград», т. е. ничто не препятствует ни одному из рассматриваемых материальных объектов (точек или тел) находиться в любом месте в любой момент времени.

Эти три условия выполняются далеко не всегда, и механика изучает методы, с помощью которых законы, полученные для систем, удовлетворяющих этим условиям, могут быть использованы и в тех случаях, когда какое-либо из этих условий не выполняется. Как мы уже видели выше, предположение о том, что время не зависит от пространства и материи и что пространство является евклидовым, однородным и изотропным, сделало невозможным рассматривать причины такого важнейшего явления материального мира, как взаимодействие материи, и заставило в рамках этой простой модели искать для описания взаимодействия «обходные пути» — ввести понятие о дальнодействии. Тот же прием используется в механике, если условия 1° — 3° не выполнены: помимо сил, возникающих при выполнении условий 1° — 3°, в этих случаях вводятся дополнительные силы, которые подбираются так, чтобы скомпенсировать нарушение условий 1° — 3° и распространить законы механики на случай, когда не все эти условия выполняются. Так, например, поступают в механике для того, чтобы распространить ее законы на случай, когда изучается движение относительно неинерциальных систем отсчета. Аналогичным образом изучается движение системы, материальный состав которой меняется во время движения. Этот же прием используется иногда и для исследования движений в тех случаях, когда в пространстве существуют ограничения, наложенные на координаты и (или) скорости материальных точек или тел, и требуется учесть эти ограничения.

Таким образом, методы механики позволяют не только сформулировать ряд общих теорем и законов, действующих в условиях, когда выполняются предположения 1°—3°, но и — за счет введения дополнительных сил — использовать эти законы в условиях, когда предположения 1°—3° не выполняются.

В любом случае, однако, предполагаются выполненными исходные предположения, сформулированные в § 2. Отход от этих предположений невозможен в пределах классической механики и приводит к построению иных систем механики. Такая ситуация возникает, например, при отказе от описанных выше представлений о пространстве и времени и от принципа относительности Галилея. Именно отказ от этих исходных представлений о времени и пространстве и предположение о том, что уравнения и законы механики должны быть инвариантны (или ковариантны) по отношению не к преобразованиям Галилея, а к иным преобразованиям — преобразованиям Лоренца, привели к появлению релятивистской механики. С этими исходными представлениями связаны ограничения, в пределах которых законы классической механики могут применяться при изучении движения объектов реального мира.

Глава III

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

§ 1. Основные понятия

При обсуждении основных методов классической механики (см. конец предыдущей главы) мы упомянули, в частности, что один из них связан с введением некоторых специальным образом подобранных функций координат и скоростей точек системы и с изучением того, каким образом изменяются эти функции или при каких условиях они сохраняются неизменными. В качестве таких функций мы рассмотрим меры движения, которые были введены в предыдущей главе: скалярную функцию — кинетическую энергию системы и векторную функцию — количество движения (импульс) системы. Рассматривая вектор количества движения q_i, естественно рассматривать также и момент этого вектора, т. е. ввести еще одну векторную характеристику, зависящую от координат точек и их скоростей.

Исследование этих функций проводится ниже в такой последовательности. Сначала мы выясним, каким образом меняются и при каких условиях сохраняются векторные характеристики системы — количество движения и момент количества движения, и лишь после этого изучим законы изменения скалярных характеристик системы — кинетической энергии T и новой скалярной характеристики, которая будет введена далее, — полной энергии E.

Утверждения, касающиеся законов изменения этих функций, носят название *основных теорем классической механики,* а утверждения, касающиеся условий, при которых эти функции сохраняются неизменными, называются *законами сохранения.* Далее в формулировках основных теорем будут использоваться два вектора, которые определяются совокупностью сил, действующих на все точки системы: $\boldsymbol{R}$ — главный вектор сил системы и $\boldsymbol{M}_O$ — главный момент сил системы относительно некоторого полюса O.

Если $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ — силы, действующие на точки системы, то их *главным вектором* называется вектор, равный сумме

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i. \tag{1}$$

Векторы $\boldsymbol{F}_i$ приложены к разным точкам, а вектор $\boldsymbol{R}$ — свободный вектор, он может быть построен в любой точке O пространстваства; для этого надо приложить к точке O векторы, коллинеарные и равные векторам $\boldsymbol{F}_i$ $(i=1, 2, \ldots, N)$, и сложить их.

Моментом силы $\boldsymbol{F}_i$ *относительно полюса* O называется вектор, определяемый векторным произведением

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из полюса O к точке приложения силы $\boldsymbol{F}_i$. Модуль момента $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$ равен

$$|\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i| = r_iF_i\sin\alpha=F_i\rho_i, \tag{3}$$

где α — угол между векторами $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$, а ρ_i — расстояние от O до линии действия силы $\boldsymbol{F}_i$.

Главным моментом $\boldsymbol{M}_O$ *сил*, действующих на точки системы, *относительно полюса* O называется сумма

$$\boldsymbol{M}_O=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i). \tag{4}$$

Главным моментом M_l *сил*, действующих на точки системы *относительно оси* l называется проекция на эту ось главного момента $\boldsymbol{M}_O$, вычисленного для любой точки O, взятой на оси l [1]).

Заметим теперь, что в силу третьего закона Ньютона силы, взаимодействия двух материальных точек всегда равны, действуют по одной прямой и направлены в противоположные стороны. Поэтому, когда мы их складываем, составляя главный вектор, они взаимно уничтожаются и в выражение главного вектора не входят. Таким образом, главный вектор всех внутренних сил системы всегда равен нулю

$$\boldsymbol{R}_{\text{внут}}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{i\,\text{внут}}=0,$$

и следовательно,

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{F}_{i\,\text{внут}}$ и $\boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}$ — внутренняя и внешняя силы, приложенные к i-й точке:

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_{i\,\text{внут}}+\boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}.$$

---

[1]) Легко видеть, что M_l не зависит от выбора точки O на оси l. О методе определения M_l и о некоторых иных фактах, относящихся к понятиям «момент вектора», «главный момент совокупности векторов» и «главный момент относительно оси», см. приложение. В приложении речь идет о системе скользящих векторов. Множество сил, приложенных к разным точкам системы материальных точек, не образует системы скользящих векторов, однако приведенные в приложении результаты, касающиеся указанных выше понятий, относятся к любой совокупности векторов, в том числе и к совокупности, не являющейся системой скользящих векторов.

Непосредственно видно, что главный момент сил взаимодействия двух точек системы относительно любого полюса равен нулю (рис. III.1). В связи с тем, что внутренние силы могут входить только попарно, главный момент внутренних сил системы равен нулю, так что главный момент всех сил системы равен главному моменту только внешних сил:

$$M_{O\,\text{внут}} = \sum_{i=1}^{N} m_O(F_{i\,\text{внут}}) = 0,$$

$$M_O = M_{O\,\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} m_O(F_{\text{внеш}}). \qquad (6)$$

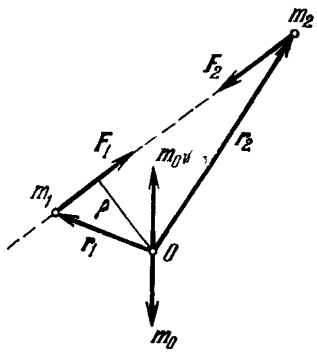

Рис. III.1.

Условимся всюду далее индекс i относить только к номеру точки в системе материальных точек и при суммировании по всем точкам от 1 до N не делать соответствующего указания у знака суммы. Так, например,

$$\sum F_i, \quad \sum q_i, \quad \sum \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \text{и т. д.}$$

означают далее соответственно

$$\sum_{i=1}^{N} F_i, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i, \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \quad \text{и т. д.}$$

Сделав эти общие замечания, мы можем перейти теперь к основным теоремам механики и к законам сохранения, которые получаются в этой главе сначала при условии, что выполняются исходные предположения механики, изложенные в § 2 гл. II, а затем — что удовлетворяются и дополнительные условия 1° — 3°, сформулированные в конце § 5 гл. II.

§ 2. Количество движения системы материальных точек

По определению количеством движения системы называется вектор

$$Q = \sum q_i = \sum m_i v_i.$$

Поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона

$$\frac{dQ}{dt} = \sum m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum F_i = R$$

и в силу соотношения (5)

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}.} \tag{7}$$

Это утверждение называется *теоремой об изменении количества движения* (*импульса*) *системы*:

Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех действующих на систему внешних сил.

Проектируя равенство (7) на любую неподвижную ось l, получаем

$$\frac{dQ_l}{dt}=R_{l\,\text{внеш}}, \tag{8}$$

где Q_l — проекция на ось l вектора $\boldsymbol{Q}$, а $R_{l\,\text{внеш}}$ — проекция на нее вектора $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}$.

Если система замкнута, то по определению на ее точки не действуют внешние силы, $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=0$ и $d\boldsymbol{Q}/dt=0$, т. е.

$$\boxed{\boldsymbol{Q}=\text{const}.} \tag{9}$$

Тем самым устанавливается *закон сохранения количества движения*:

При движении замкнутой системы количество движения (*импульс*) *системы не меняется.*

Это утверждение справедливо, разумеется, и для системы, на которую действуют внешние силы, если $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=0$.

Из равенства (8) следует, что если $R_{l\,\text{внеш}}=0$, то $Q_l=\text{const}$, т. е. *что у любой системы проекция количества движения на некоторую ось не изменяется во время движения, если главный вектор внешних сил системы перпендикулярен этой оси.*

Теореме об изменении количества движения и закону сохранения количества движения можно придать иную форму, если ввести понятие о центре инерции системы.

Центром инерции системы называется геометрическая точка C пространства, определяемая радиусом-вектором[1])

$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}. \tag{10}$$

---

[1]) Центр инерции системы иногда называют *центром масс*. Для материального тела, находящегося в однородном поле тяжести, центр тяжести определяется равенством

$$\boldsymbol{r}_{\text{ц. т}}=\frac{\sum G_i\boldsymbol{r}_i}{\sum G_i},$$

где G_i — веса «элементарных объемов», а $\boldsymbol{r}_i$ — их радиусы-векторы. В силу того, что $G_i=m_ig$, где g — ускорение в однородном поле тяжести, эта формула и формула (10) совпадают, т. е. в однородном поле тяжести *центр тяжести тела совпадает с центром инерции.*

Величина $M=\sum\limits_i m_i$ называется *массой системы*.

Во время движения точек системы меняются $\boldsymbol{r}_i$, а значит, меняется и $\boldsymbol{r}_C$, т. е. при движении точек системы движется и ее центр инерции. Траекторией центра инерции служит геометрическое место (годограф) концов векторов $\boldsymbol{r}_C$, а скорость точки C направлена по касательной к этому годографу и определяется равенством

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{v}_i}{\sum m_i}, \tag{11}$$

которое получается дифференцированием равенства (10) по t.

Из равенства (11) следует, что

$$\boldsymbol{Q}=\sum m_i\boldsymbol{v}_i=M\boldsymbol{v}_C, \tag{12}$$

т. е. *что количество движения системы равно массе системы, умноженной на скорость ее центра инерции.*

Из теоремы об изменении количества движения следует тогда

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt}=M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}. \tag{13}$$

Но равенство (13) выражает второй закон Ньютона для материальной точки, помещенной в центре инерции и движущейся вместе с ним, если масса этой точки равна M и если к ней приложена сила $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}$. Отсюда следует, что теорему об изменении количества движения можно сформулировать так:

При движении системы материальных точек ее центр инерции движется так, как двигалась бы материальная точка, помещенная в центре инерции, если бы в ней были сконцентрированы массы всех точек системы и к ней были бы приложены все внешние силы, действующие на точки системы.

В такой формулировке теорему об изменении количества движения называют *теоремой о движении центра инерции.*

У замкнутых систем $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=0$, т. е. $\dfrac{d\boldsymbol{v}_C}{dt}=0$ и

$$\boxed{\boldsymbol{v}_C=\text{const}.} \tag{14}$$

Поэтому закон сохранения количества движения можно сформулировать так: *центр инерции замкнутой системы движется с постоянной скоростью (быть может, равной нулю).*

Разумеется, это утверждение верно и для проекций соответствующих векторов. Если проекция главного вектора внешних сил на некоторую ось тождественно равна нулю, то центр инерции движется так, что проекция скорости центра инерции на эту ось остается постоянной.

Далее иногда будет удобно вводить в рассмотрение вспомогательную систему отсчета, которая движется поступательно и начало которой помещено в центр инерции системы. Такую систему отсчета будем называть далее *центральной*. В том случае, когда скорость центра инерции постоянна, центральная система является инерциальной.

§ 3. Момент количества движения системы материальных точек (кинетический момент)

Рассмотрим вектор $\boldsymbol{q}_i$ количества движения i-й материальной точки системы. Выберем в нашей инерциальной системе произвольный полюс A и определим момент вектора $\boldsymbol{q}_i$ относительно этого полюса так же, как мы делали выше для сил:

$$\boldsymbol{K}_{Ai} = \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{q}_i) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из полюса A к i-й материальной точке.

Вектор $\boldsymbol{K}_{Ai}$ называется *моментом количества движения точки* относительно полюса A. *Главным моментом количества движения* системы материальных точек относительно полюса A или *кинетическим моментом системы* относительно этого полюса называется вектор

$$\boldsymbol{K}_A = \sum \boldsymbol{K}_{Ai} = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i. \tag{16}$$

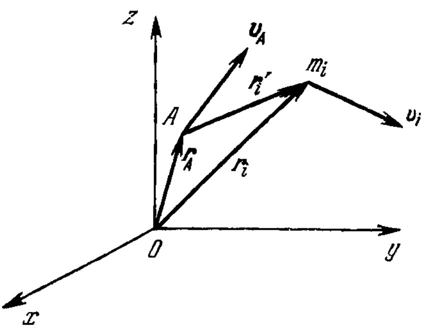

Рис. III.2.

Общности ради предположим теперь, что полюс A сам движется относительно той же самой инерциальной системы отсчета, по отношению к которой рассматривается движение системы материальных точек.

Пусть $\boldsymbol{v}_A$ — скорость полюса в некоторый момент. Обозначим далее через $\boldsymbol{r}_A$ радиус-вектор из начала координат инерциальной системы отсчета к полюсу A, через $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор из начала координат к i-й точке системы, а через $\boldsymbol{r}_i'$ — радиус-вектор к этой же i-й точке системы, отложенный из движущегося полюса A (рис. III.2); тогда

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_A.$$

Дифференцируя это тождество, находим

$$d\boldsymbol{r}_i'/dt = \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_A.$$

По определению

$$\boldsymbol{K}_A = \sum (\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_i).$$

Дифференцирование по t дает

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \sum \left(\boldsymbol{r}'_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} \right) + \sum \left(\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt} \times m_i \boldsymbol{v}_i \right) =$$
$$= \sum (\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i) + \sum [(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_A) \times m_i \boldsymbol{v}_i] = \boldsymbol{M}_A - \boldsymbol{v}_A \times \sum m_i \boldsymbol{v}_i.$$

Но $\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{M}_{A\,\text{внеш}}$ и $\sum m_i \boldsymbol{v}_i = M \boldsymbol{v}_C$; используя эти равенства и меняя порядок сомножителей в векторном произведении, окончательно получаем

$$\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_{A\,\text{внеш}} + M \boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_A. \tag{17}$$

В частном случае, когда полюс A неподвижен относительно рассматриваемой инерциальной системы или совпадает с центром инерции C, векторное произведение в правой части выражения (17) равно нулю и производная $d\boldsymbol{K}_A/dt$ равна[1])

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{K}_A}{dt} = \boldsymbol{M}_{A\,\text{внеш}}.} \tag{18}$$

Таким образом, мы доказали *теорему об изменении кинетического момента*:

Производная от кинетического момента системы материальных точек (относительно неподвижного полюса) равна главному моменту внешних сил, приложенных к точкам системы, относительно этого же полюса[2]).

Для замкнутых систем выполняется условие $\boldsymbol{M}_{A\,\text{внеш}} = 0$, так как на материальные точки замкнутой системы не действуют внешние силы. Поэтому *при движении замкнутой системы материальных точек ее кинетический момент относительно любого неподвижного полюса не меняется*. Это утверждение называется *законом сохранения кинетического момента*.

Если система не замкнута, но относительно какого-либо полюса $\boldsymbol{M}_{A\,\text{внеш}} = 0$, то из формулы (18) следует, что

$$\boldsymbol{K}_A = \text{const}. \tag{19}$$

---

[1]) Такое же выражение для $d\boldsymbol{K}_A/dt$ получается в тех случаях, когда или $\boldsymbol{v}_A = 0$, или $\boldsymbol{v}_C = 0$, или векторы $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_C$ коллинеарны.

[2]) В связи с тем, что производная от вектора по времени равна скорости конца вектора, эту теорему можно формулировать так: скорость конца вектора кинетического момента системы равна главному моменту внешних сил. В такой форме теорему об изменении кинетического момента иногда называют *теоремой Резаля*.

Главный момент $M_{A\,\text{внеш}}$ не зависит от выбора полюса только тогда, когда главный вектор $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=0$ [1]). Поэтому у незамкнутых систем во время движения $\boldsymbol{K}_A=\text{const}$ для любого полюса A, если одновременно выполнены два условия: $\boldsymbol{M}_{B\,\text{внеш}}=0$ для некоторого фиксированного полюса B и, кроме того, $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}=0$.

Разумеется, аналогичные утверждения верны и для проекций вектора $\boldsymbol{K}_A$ на ось. Проектируя равенство (18) на произвольную неподвижную ось l, получаем

$$\frac{dK_l}{dt}=M_{l\,\text{внеш}}, \tag{20}$$

где K_l — кинетический момент относительно оси l, а $M_{l\,\text{внеш}}$ — главный момент внешних сил относительно той же оси.

Если $M_{l\,\text{внеш}}=0$, то $K_l=\text{const}$, т. е. при движении вектор $\boldsymbol{K}_A$ изменяется так, что его проекция на направление l остается неизменной.

§ 4. Кинетическая энергия системы

В предыдущей главе при рассмотрении системы, в которой возможны лишь вре́менные взаимодействия, было показано, что скалярной мерой движения служит кинетическая энергия системы

$$T=\sum T_i=\sum\frac{m_iv_i^2}{2}.$$

Выясним теперь, как изменяется кинетическая энергия T во время движения произвольной системы, в которой возможны не только вре́менные взаимодействия, но и иные формы взаимодействия материальных точек. С этой целью вернемся к определению силы $\boldsymbol{F}_i=d\boldsymbol{q}_i/dt$ и умножим обе части этого равенства скалярно на $d\boldsymbol{r}_i$:

$$(d\boldsymbol{q}_i/dt)\cdot d\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i.$$

Но по определению элементарной работы (см. § 4 гл. II)

$$\delta A_i=\boldsymbol{F}_i\cdot d\boldsymbol{r}_i,$$

а

$$\frac{d\boldsymbol{q}_i}{dt}\cdot d\boldsymbol{r}_i=m_i\frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\cdot d\boldsymbol{r}_i=m_i\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\cdot d\boldsymbol{v}_i=m_i\boldsymbol{v}_i\cdot d\boldsymbol{v}_i;$$

поэтому

$$m_i\boldsymbol{v}_i\cdot d\boldsymbol{v}_i=\delta A_i.$$

Это равенство можно записать так:

$$d\,\frac{m_i\boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i}{2}=d\,\frac{m_iv_i^2}{2}=\delta A_i.$$

---

[1]) См. приложение.

Суммируя по всем точкам системы, получаем

$$dT = \sum d\,\frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \delta A_i,$$

или

$$\boxed{dT = \delta A.} \tag{21}$$

Итак, мы доказали *теорему об изменении кинетической энергии*: *Дифференциал кинетической энергии системы материальных точек равен элементарной работе всех сил, приложенных к ее точкам.*

В формулировке этой теоремы весьма существенно, что в ней речь идет о *всех* силах, а не только о *внешних* силах, как это имело место в предыдущих теоремах этой главы. В предыдущих теоремах суммировались сами силы или их моменты и в силу третьего закона Ньютона сумма всех внутренних сил (или их моментов) оказывалась равной нулю и могла быть отброшена. Теперь же в теореме об изменении кинетической энергии суммируются скалярные произведения $\boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$, и даже если силы $\boldsymbol{F}_i$ и $\boldsymbol{F}_{i+1}$ равны, действуют вдоль одной прямой и направлены противоположно, сумма $\boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{F}_{i+1} \cdot d\boldsymbol{r}_{i+1}$ может быть (и часто бывает) отлична от нуля, так как в общем случае

$$d\boldsymbol{r}_i \neq d\boldsymbol{r}_{i+1}.$$

Рассмотрим теперь консервативную систему, т. е. систему, в которой все силы потенциальны, а поле стационарно. Для такой системы (см. § 4 гл. II)

$$\delta A = d\Phi,$$

где Φ — силовая функция, и поэтому

$$dT = d\Phi,$$

или

$$d(T - \Phi) = 0,$$

т. е.

$$T - \Phi = \text{const}.$$

Из этого равенства сразу следует, что Φ имеет размерность энергии.

Функцию Π, отличающуюся от Φ лишь знаком (она, как и Φ, имеет размерность энергии), называют *потенциальной энергией* системы. Поскольку

$$\Pi = -\Phi,$$

при движении консервативной системы

$$\boxed{T + \Pi = \text{const}.} \tag{22}$$

Сумма E кинетической и потенциальной энергий называется *полной механической энергией* системы, и равенство (22) можно записать так: $E = \text{const}$.

Итак, мы установили *закон сохранения механической энергии*: *При движении консервативной системы материальных точек полная механическая энергия системы не меняется.*

Рассмотрим теперь систему, которая не является консервативной, но у которой часть сил потенциальна. Для такой системы

$$\delta A = d\Phi + \delta A^{**},$$

где δA^{**} — элементарная работа непотенциальных сил, и

$$d(T - \Phi) = \delta A^{**},$$

или

$$dE = \delta A^{**}. \tag{23}$$

Следовательно, *дифференциал полной энергии для систем, на которые действуют непотенциальные силы, равен элементарной работе непотенциальных сил.*

Таким образом, кинетическая энергия при движении замкнутых систем не остается постоянной, а меняется за счет работы внутренних сил. Эта работа равна нулю, если все силы потенциальны и движение начинается и заканчивается на одной и той же поверхности уровня $\Phi = \text{const}$. Именно такая ситуация и имеет место в случае вре́менных взаимодействий, о которых шла речь в гл. II. В иных случаях скалярная мера T не сохраняется неизменной даже для замкнутых систем, у которых всегда имеет место сохранение векторной меры $\boldsymbol{Q}$. Существует, однако, другая скалярная функция от координат и скоростей точек — полная энергия системы, которая остается постоянной при движении систем некоторого класса. Таким классом оказались все консервативные системы. Класс замкнутых и класс консервативных систем не совпадают, а пересекаются, так как замкнутые системы могут быть консервативными и неконсервативными, а консервативные системы не обязательно замкнуты [1]).

Скалярная функция, сохраняющая постоянное значение при движении консервативных систем, — полная энергия системы — не является мерой движения в том смысле, который был придан этому понятию в гл. II, так как она не аддитивна. В то время как кинетическая энергия системы представляет собой сумму кинетических энергий точек, потенциальная энергия в общем слу-

[1]) Примером консервативной незамкнутой системы служит система, состоящая из материальных точек, движущихся в поле тяготения массы, не включенной в систему (скажем, материальная точка в поле тяготения Земли), а примером замкнутой, но неконсервативной системы — система, в которой внутренние взаимодействия зависят и от скоростей точек.

чае существует для системы в целом, и само понятие «потенциальная энергия отдельной точки системы» может быть лишено смысла.

Сведем теперь полученные выше основные теоремы и законы сохранения в табл. I.

Таблица I

Характеристика движения	Основная теорема	Закон сохранения	Системы, для которых верен закон сохранения
Количество движения (импульс) Q	$\frac{dQ}{dt} = R_{внеш}$	$Q = \text{const}$	Замкнутые системы и произвольные системы, у которых $R_{внеш} = 0$
Кинетический момент K_O относительно неподвижного полюса O	$\frac{dK_O}{dt} = M_{O внеш}$	$K_O = \text{const}$	Замкнутые системы и произвольные системы, у которых $M_{O внеш} = 0$
Кинетическая энергия T	$dT = \delta A$	$T = \text{const}$	Консервативные системы при движении по поверхности уровня и произвольные системы, у которых во время движения $\delta A = 0$
Полная энергия $E = T + П$	$dE = \delta A^{**}$	$E = \text{const}$	Консервативные системы

В заключение этого параграфа сделаем следующее общее замечание о законах сохранения. Формулировка каждого из этих законов имеет следующий вид: «некоторое выражение, зависящее от координат точек и их скоростей, при движении системы не меняется». Эти выражения не зависят от ускорений точек и в этом смысле являются *первыми интегралами уравнений движения*. В дальнейшем (см. гл. VII) мы вернемся к понятию «первый интеграл» и дадим его точное определение. Там же будет показано, что найденные выше первые интегралы — законы сохранения — являются следствиями основного предположения классической механики об однородности и изотропности пространства и об однородности времени (см. гл. VII). Отложив поэтому уточнение этого понятия до гл. VII, мы в § 7 настоящей главы на важном примере продемонстрируем, как классическая механика использует законы сохранения для того, чтобы упростить (а в некоторых случаях и решить) дифференциальные уравнения, описывающие движение.

§ 5. Конечные приращения количества движения, кинетического момента и кинетической энергии

Вернемся теперь к равенству (7) и представим его в виде

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}}\,dt = \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}\,dt.$$

Интегрируя от t_1 до t_2 (от $\boldsymbol{Q}_1$ до $\boldsymbol{Q}_2$ соответственно), получаем

$$\Delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_2 - \boldsymbol{Q}_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}\,dt.$$

Интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}\,dt$ представляет собой вектор. Его обозначают $\boldsymbol{I}_i$ и называют *импульсом силы*.

Обозначим сумму векторов $\boldsymbol{I}_i$ по всем внешним силам через $\boldsymbol{I}$ и назовем этот вектор *импульсом внешних сил системы*. Тогда

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}.} \tag{24}$$

Мы установили *теорему о конечном приращении количества движения*:

Приращение вектора количества движения (импульса) системы за конечное время равно импульсу внешних сил системы за то же время.

Аналогично из формулы (18) получаем сразу

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{S}_A,} \tag{25}$$

где $\Delta\boldsymbol{K}_A$ — приращение кинетического момента за время от t_1 до t_2, а $\boldsymbol{S}_A$ — вектор, который называется *импульсом моментов внешних сил* и определяется так:

$$\boldsymbol{S}_A = \sum \boldsymbol{S}_{i\,\text{внеш}} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}})\,dt.$$

Равенство (25) называется *теоремой о конечном приращении кинетического момента*:

Приращение вектора кинетического момента системы за конечное время равно импульсу моментов внешних сил системы за то же время.

Переходя в равенстве (21) к конечным приращениям, находим

$$\Delta T = A_{1,2}. \tag{26}$$

Это равенство составляет содержание *теоремы о конечном приращении кинетической энергии*:

Приращение кинетической энергии системы за конечное время равно работе всех сил системы на соответствующих перемещениях.

Из этой теоремы сразу следует, что *кинетическая энергия системы не меняется за время движения системы тогда и только тогда, когда работа всех сил системы на соответствующих перемещениях равна нулю.*

§ 6. Вириал системы

В отличие от ранее рассмотренных теорем и законов механики в этом параграфе мы введем характеристику движения, имеющую статистический характер и связанную с усреднением механических величин во времени. Пусть F — скалярная функция времени или механических величин, которые в свою очередь зависят от времени, и пусть F_τ — *среднее значение* F за время τ, т. е. по определению

$$F_\tau = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F\,dt.$$

Введем теперь в рассмотрение скалярную функцию

$$G = \sum \boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{r}_i.$$

Ее полная производная по времени равна

$$\frac{dG}{dt} = \sum \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{q}_i + \sum \dot{\boldsymbol{q}}_i \cdot \boldsymbol{r}_i.$$

Но

$$\sum \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{q}_i = \sum \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum m_i v_i^2 = 2T,$$

а

$$\sum \dot{\boldsymbol{q}}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \sum m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{r}_i = \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i,$$

и поэтому

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i.$$

Усредним это равенство, т. е. проинтегрируем его правую и левую части по t от 0 до τ и разделим на τ:

$$2T_\tau + \left(\sum \boldsymbol{F}_i \cdot \boldsymbol{r}_i\right)_\tau = \frac{1}{\tau}[G(\tau) - G(0)].$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль, если выполняется одно из следующих условий:

1° Движение периодическое с периодом τ; в этом случае при всех i $\boldsymbol{q}_i(\tau) = \boldsymbol{q}_i(0)$ и $\boldsymbol{r}_i(\tau) = \boldsymbol{r}_i(0)$, так что $G(\tau) = G(0)$.

2° Интервал τ неограничен, а функция $G(\tau)$ ограничена. При неограниченном τ средним значением F называется предел

$$F_{\tau=\infty}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} F\,d\tau.$$

Последнее равенство можно тогда переписать так:

$$2T_{\tau=\infty}+\left(\sum F_i\cdot r_i\right)_{\tau=\infty}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}[G(\tau)-G(0)].$$

Функция G ограничена, если при всех i $\boldsymbol{r}_i(t)$ и $\boldsymbol{q}_i(t)$ ограничены. Движение, для которого выполняется это условие, т. е. для которого

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}[G(\tau)-G(0)]=0,$$

называется *финитным*.

Таким образом, если выполняется условие 1° или условие 2°, то

$$T_\tau=-\frac{1}{2}\left(\sum F_i\cdot r_i\right)_\tau. \qquad (27)$$

Правая часть этого равенства называется *вириалом системы*, а само равенство составляет содержание *теоремы о вириале*: *При выполнении условий 1° или 2° среднее за время τ значение кинетической энергии системы равно ее вириалу*[1]).

Если система консервативна, т. е. если движение происходит в стационарном потенциальном поле с потенциальной энергией Π, то

$$\sum F_i\cdot r_i=-\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}x_i+\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}y_i+\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}z_i\right)$$

и равенство, выражающее теорему о вириале, можно записать так:

$$T_\tau=\frac{1}{2}\left[\sum\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x_i}x_i+\frac{\partial\Pi}{\partial y_i}y_i+\frac{\partial\Pi}{\partial z_i}z_i\right)\right]_\tau.$$

Рассмотрим теперь частный, но достаточно распространенный случай, когда Π — однородная функция s-й степени, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$\Pi(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z)=\lambda^s\Pi(x,\ y,\ z).$$

---

[1]) Теорема о вириале используется в статистической физике при условии 2°, т. е. когда $\tau\to\infty$. Эта теорема позволяет, например, определить давление газа на стенки сосуда как при пренебрежении межмолекулярным взаимодействием, так и при учете его.

В этом случае в соответствии с теоремой Эйлера об однородных функциях

$$\sum\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}x_i+\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}y_i+\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}z_i\right)=s\Pi,$$

и поэтому теорема о вириале приводит к равенству

$$2T_\tau-s\Pi_\tau=0. \qquad (28)$$

С другой стороны, для консервативной системы в силу закона сохранения энергии

$$T+\Pi=E_0;$$

усредняя это равенство, получаем

$$T_\tau+\Pi_\tau=E_{0\tau}=E_0. \qquad (29$$

Из равенств (28) и (29) следует, что

$$\Pi_\tau=\frac{2}{s+2}E_0, \quad T_\tau=\frac{s}{s+2}E_0. \qquad (30)$$

Эти соотношения устанавливают, в какой пропорции начальная энергия E_0 «делится в среднем» между кинетической и потенциальной энергией во время движения консервативной системы, если Π — однородная форма s-й степени и выполняется условие 1° или условие 2°.

§ 7. Движение материальной точки в центральном поле (пример использования законов сохранения)

1. Общий случай. Рассмотрим движение материальной точки под действием центральной силы, т. е. силы, зависящей только от расстояния рассматриваемой материальной точки до некоторого центра притяжения или отталкивания (называемого далее условно Солнцем) и направленной в каждый момент вдоль прямой, соединяющей рассматриваемую материальную точку с центром. Мы сначала не будем накладывать какие-либо ограничения на вид центральной силы, т. е. на то, какова функциональная зависимость величины силы от расстояния между рассматриваемой точкой и Солнцем, а затем подробнее рассмотрим частный случай, когда центральной силой является сила всемирного тяготения или кулонова сила электрического взаимодействия.

Мы будем предполагать далее, что Солнце неподвижно относительно некоторой инерциальной системы отсчета и расположено в начале координат.

Выше (см. гл. II) уже было показано, что в общем случае вектор центральной силы может быть записан так:

$$\boldsymbol{F}=F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Там же было показано, что при действии центральной силы всегда существует потенциальное поле и что силовая функция выражается интегралом

$$\Phi(r)=\int F(r)\,dr+\text{const}.$$

Таким образом, силовая функция $\Phi(r)$ есть функция положения точки, т. е. зависит от трех переменных — координат точки x, y и z. Дифференциальные уравнения движения точки под действием центральной силы можно теперь записать в виде векторного уравнения

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}), \tag{31}$$

или трех скалярных уравнений, получающихся проектированием уравнения (31) на оси x, y, z инерциальной системы отсчета:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=F_x(x,\ y,\ z)=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=F_y(x,\ y,\ z)=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=F_z(x,\ y,\ z)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}.\end{aligned} \tag{32}$$

Найти движение — значит проинтегрировать эту систему дифференциальных уравнений при весьма общих предположениях о возможном виде функций F_x, F_y и F_z. Мы покажем теперь, как можно использовать основные законы механики — законы сохранения — для того, чтобы обойти трудности, связанные с интегрированием системы (32). Законы сохранения позволят нам сразу обнаружить некоторые важные особенности движения и, используя их, упростить систему в такой мере, чтобы задача интегрирования ее свелась к простой квадратуре.

При движении материальной точки в поле центральной силы всегда действуют два закона сохранения.

Во-первых, имеет место закон сохранения кинетического момента. Действительно, если принять за полюс центр притяжения (выбранный в качестве начала координат инерциальной системы отсчета), то момент центральной силы относительно этого полюса всегда равен нулю, так как центральная сила проходит через полюс. Но если момент силы равен нулю, то в силу теоремы об изменении кинетического момента производная от кинетического момента по времени равна нулю; значит, сам вектор кинетического момента не меняется по времени:

$$K_O = K_0 = \mathrm{const}.$$

Во-вторых, имеет место закон сохранения механической энергии, поскольку система является консервативной: в системе действует только одна сила, зависящая от положения точки, и силовое поле потенциально (так как существует силовая функция); это поле стационарно.

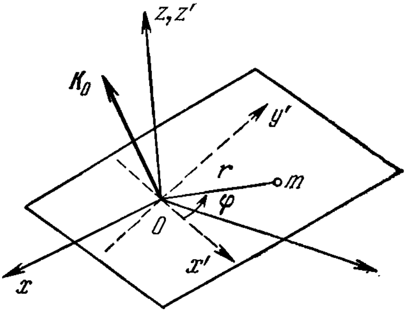

Рис. III.3.

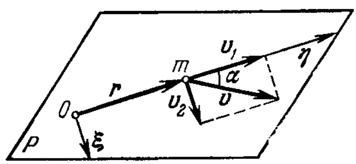

Рис. III.4.

Воспользуемся сначала законом сохранения кинетического момента. Если вектор кинетического момента сохраняется неизменным, то это значит, что, во-первых, сохраняется неизменным направление этого вектора в пространстве и, во-вторых, сохраняется неизменной его величина (модуль).

Направление вектора кинетического момента перпендикулярно плоскости P, проходящей через начало координат и через направление скорости точки. Из того факта, что направление этого вектора не меняется во времени, сразу следует, что и плоскость P неподвижна в пространстве и, значит, векторы скорости лежат во время движения всегда в одной и той же плоскости.

Таким образом, исходя только из того, что вектор кинетического момента не меняется по направлению, мы показали, что *движение в поле центральной силы всегда является плоским движением.* Плоскость P, в которой происходит это движение, перпендикулярна K_0 и определяется начальным положением точки и ее начальной скоростью, так как только от них зависит K_0.

Доказав, что рассматриваемое движение заведомо является плоским, мы можем ввести в плоскости движения полярную систему координат, характеризуя положение рассматриваемой материальной точки m в плоскости двумя величинами — радиусом r и полярным углом φ (рис. III.3).

Воспользуемся теперь тем, что вектор кинетического момента остается неизменным не только по направлению, но и по величине. Величина вектора кинетического момента равна

$$K = |\boldsymbol{K}_0| = |\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}| = rmv \sin\alpha, \tag{33}$$

где α — угол между радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ точки и направлением ее скорости $\boldsymbol{v}$ (рис. III.4).

Будем рассматривать движение точки m как сложное движение с относительной скоростью v_1 и переносной скоростью v_2 (см. рис. III.4), поместив начало греческой системы ξ, η в центр O и направив ось η вдоль радиуса r. Тогда $\boldsymbol{v}_1$ — скорость прямолинейного движения вдоль оси η, по модулю равная $\dot{r}$, а $\boldsymbol{v}_2$ — скорость переносного вращательного движения с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, которая по модулю равна $r\dot{\varphi}$ (рис. III.4):

$$|\boldsymbol{v}_1| = \dot{r}, \quad |\boldsymbol{v}_2| = r\dot{\varphi}. \tag{34}$$

Подставляя в (33) выражение $v \sin\alpha = v_2 = r\dot{\varphi}$, получаем

$$K = mr^2\dot{\varphi}.$$

Эта величина K постоянна и равна $K_0 = mr_0^2\dot{\varphi}_0$ — начальному значению кинетического момента. Поэтому во время движения выполняется равенство

$$\dot{\varphi} = \frac{K_0}{mr^2}. \tag{35}$$

Формула (35) допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Во время движения точки m по плоской траектории радиус описывает («заметает») криволинейный сегмент (рис. III.5). Площадь сегмента, «заметаемого» радиусом, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \, d\varphi. \tag{36}$$

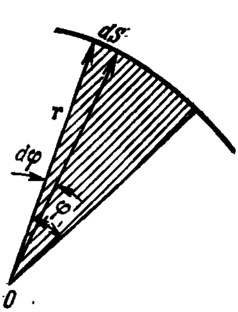

Рис. III.5.

Во время движения площадь S меняется со временем, т. е. $S = S(t)$. Производная dS/dt называется *секториальной скоростью*. Подсчитаем ее, воспользовавшись формулами (35) и (36):

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{r^2}{2}\frac{K_0}{mr^2} = \frac{K_0}{2m} = \text{const}.$$

Таким образом, при движении в поле произвольной центральной силы движение точки не только является плоским, но и подчиняется так называемому *закону площадей*, утверждающему, что *радиус-вектор за равные промежутки времени «заметает» равные площади.*

Итак, используя только тот факт, что кинетический момент не меняется во времени, мы установили второе важное свойство любого центрального движения. Начальными данными, т. е. начальным положением точки и начальной ее скоростью, полностью определяются направление и величина постоянного вектора кинетического момента и тем самым однозначно определяются не только плоскость движения, но и секториальная скорость, с которой это движение происходит.

Обратимся теперь к закону сохранения механической энергии. Из этого закона сразу следует, что

$$E=T+\Pi=\frac{mv^2}{2}+\Pi(r)=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\Pi(r)=$$
$$=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{K_0^2}{2mr^2}+\Pi(r)=\text{const}=E_0,$$

где $\Pi(r)$ — потенциальная энергия. Отсюда

$$\dot{r}\equiv\frac{dr}{dt}=\Psi(r)=\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E_0-\Pi(r)]-\frac{K_0^2}{m^2r^2}}, \tag{37}$$

где знак перед корнем определяется знаком dr/dt в начальный момент, т. е. тем, как направлена составляющая v_1 скорости при $t=0$: «к Солнцу» или «от Солнца».

Мы получили дифференциальное уравнение движения материальной точки в поле центральной силы в полярных координатах. В отличие от исходной системы уравнений (32) это уравнение (37) является уравнением первого порядка. Более того, оно легко сводится к простой квадратуре, так как переменные в нем разделяются:

$$\frac{dr}{\Psi(r)}=dt.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$t=\int\frac{dr}{\Psi(r)}+C,$$

где $C=\text{const}$ — постоянная интегрирования.

Таким образом, одна квадратура позволяет определить t как функцию r, т. е. в неявном виде зависимость r от t.

Выражение $r(t)$, полученное в результате этого интегрирования, будет содержать три произвольные постоянные. Этими тремя константами, зависящими от начальных данных, являются K_0, E_0 и постоянная интегрирования C. Обращаясь теперь к формуле (35) и подставляя в нее выражение $r(t)$, можно с помощью одной квадратуры найти полярный угол φ как функцию времени. При этом интегрировании будет введена еще одна постоянная.

Все четыре произвольные постоянные [1]), которые войдут в выражения для $r(t)$ и $\varphi(t)$, можно выразить через начальные данные — координаты и скорость точки в момент $t=0$. Найдя таким образом r и φ как функции времени, можно исключить время и определить r как функцию φ, т. е. определить траекторию в полярных координатах.

Можно, однако, найти траекторию в полярных координатах проще, избегая предварительного определения r и φ как функций времени. С этой целью перепишем равенство (35) так:

$$d\varphi=\frac{K_0}{mr^2}\,dt.$$

Подставляя сюда вместо dt выражение этого дифференциала через радиус

$$dt=\frac{dr}{\Psi(r)},$$

получаем

$$d\varphi=\frac{K_0}{mr^2\Psi(r)}\,dr.$$

Интегрируя это равенство, находим

$$\varphi=\int\frac{K_0}{mr^2\Psi(r)}\,dr+C.$$

Подставляя в подынтегральное выражение функцию $\Psi(r)$ в соответствии с формулой (37), получаем окончательно

$$\varphi=\int\frac{K_0/r^2}{\sqrt{2m\left[E_0-\Pi(r)\right]-K_0^2/r^2}}\,dr+C. \tag{38}$$

Выражение (38) с помощью одной квадратуры определяет полярную координату r как неявную функцию от φ. Как и ранее, функция $r(\varphi)$ включает три произвольных постоянных K_0, E_0 и C. Различия в выражении центральной силы $F(r)$ отражаются лишь на виде выражения для потенциальной энергии $\Pi(r)$. В каждом конкретном случае достаточно подставить в формулу (38) соответствующее выражение $\Pi(r)$, вычислить интеграл и таким образом найти движение.

Мы видим, что задача, которая казалась сложной, когда мы рассматривали уравнения типа (32), свелась к простой квадратуре лишь за счет использования законов сохранения. При этом оказалось возможным единообразно выразить связь между полярными координатами для произвольной центральной силы и тем

[1]) Система (32) имеет шестой порядок, и поэтому общее число произвольных постоянных должно быть равно шести. Следует иметь в виду, что помимо четырех постоянных, о которых идет речь в тексте, еще две постоянные вносятся выбором плоскости, в которой происходит движение.

самым установить общий закон движения в центральных полях. Пример этот наглядно демонстрирует силу и удобство законов сохранения при решении задач такого рода. Не конкретизируя вида функции $\Pi(r)$, можно высказать некоторые общие соображения о характере движения в центральных полях.

Из полученной выше формулы

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \Pi(r) + \frac{K_0^2}{2mr^2} = E_0$$

следует, что экстремальные значения $r = r_{ext}$, получающиеся при $\dot{r} = 0$, должны удовлетворять условию

$$\Pi(r_{ext}) + \frac{K_0^2}{2mr_{ext}^2} = E_0.$$

Можно показать, что если это уравнение имеет только одно решение, то это решение соответствует минимуму r и после того, как достигается $r = r_{ext}$, радиус r будет неограниченно расти с ростом φ; движение такого рода называется *инфинитным*. Если же уравнение имеет два действительных решения $r_{1\,ext}$ и $r_{2\,ext}$, то величина r будет ограничена:

$$r_{1\,ext} \leqslant r \leqslant r_{2\,ext}$$

и траектория будет целиком лежать между окружностями с радиусами $r_{1\,ext}$ и $r_{2\,ext}$ (рис. III.6). Такие движения *финитны*. Траектории финитных движений могут быть либо замкнутыми, либо незамкнутыми; в последнем случае траектория всюду плотно заполняет площадь кольца между указанными окружностями.

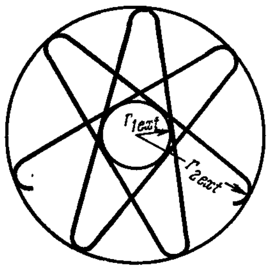

Рис. III.6

Чтобы продвинуться далее в изучении движений в центральных полях, надо конкретизировать вид центральной силы, т. е. задать выражение для потенциальной энергии в формуле (38). Ниже мы рассмотрим движение точки в поле всемирного тяготения.

2. Ньютоново и кулоново поля. Рассмотрим теперь частный случай центрального поля — поле всемирного тяготения.

Как было указано выше, классическая механика не интересуется физической сущностью явлений, обусловливающих возникновение взаимодействия объектов через поля. Механика констатирует лишь тот факт, что при наличии в пространстве материального объекта массы M непосредственно не связанная с этим объектом материальная точка m при отсутствии каких-либо иных воздействий не будет двигаться по отношению к системе, принятой за инерциальную, прямолинейно и равномерно, т. е. производная dq/dt будет отлична от нуля. Тогда в соответствии с общим методом классической механики (см. гл. II) совокупность физических факторов, которые обусловили появление dq/dt, называют силой и представляют ее вектором dq/dt. Вводимые так силы называются силами всемирного тяготения.

Ньютон, исходя из открытых к этому времени трех законов Кеплера о движении планет Солнечной системы, дедуктивно установил, что для того чтобы могло возникнуть видимое движение планет, на них должна действовать сила, направленная к Солнцу и равная

$$F = -\varepsilon \frac{mM_c}{r^2} = -\gamma_c \frac{m}{r^2} = -\frac{\alpha}{r^2}, \tag{39}$$

где m и M_c — массы планеты и Солнца, r — радиус, проведенный от Солнца к планете, знак минус указывает, что направление F противоположно направлению r (т. е. что сила направлена к Солнцу), $\varepsilon = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ньютон $м^2 \cdot кг^{-2}$ — коэффициент всемирного тяготения, γ_c — константа, зависящая только от массы Солнца, а $\alpha = \gamma_c m = \varepsilon m M_c$ — константа, которую удобно ввести для упрощения дальнейших выкладок.

Ньютон предположил далее, что формула (39) определяет силу взаимного притяжения любых двух материальных точек, имеющих массы M и m. Если массу M принять за центр тяготения (Солнце), то точка с массой m будет двигаться в центральном силовом поле, для которого функция $F(r)$ определена формулой (39).

Для этого поля силовая функция равна

$$\Phi(r) = \int F(r)\,dr + C = -\int \frac{\alpha}{r^2}\,dr + C = \frac{\alpha}{r} + C,$$

т. е. потенциальная энергия такова:

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r} + C.$$

Если «нормировать потенциальную энергию на бесконечности», выбрав константу C так, чтобы $\Pi(r) = 0$ при $r = \infty$, то получим $C = 0$ и

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r}. \tag{40}$$

Силовое поле тяготения массы M_c, описываемой формулой (40), называется *ньютоновым полем*, а возникающие в нем движения — *кеплеровыми движениями*.

В соответствии с законом Кулона сила взаимного притяжения (или отталкивания) двух заряженных частиц также определяется формулой (39), но коэффициент α в этом случае будет иным. Поэтому задача об электрическом взаимодействии тоже приводит к исследованию движения в центральном поле с потенциальной энергией, которая выражается формулой (40). Такого рода поля называются *кулоновыми*.

Подставляя выражение (40) для потенциальной энергии кулонова (или ньютонова) поля в формулу (38), получаем

$$\varphi = \int \frac{K_0/r^2\,dr}{\sqrt{2m\,[E_0+\alpha/r]-K_0^2/r^2}} + C. \tag{41}$$

Этот интеграл легко вычислить, так как подстановкой

$$\xi = \frac{K_0}{r} - \frac{m\alpha}{K_0}, \qquad d\xi = -\frac{K_0}{r^2}\,dr$$

он сводится к «табличному интегралу»

$$\varphi = -\int \frac{d\xi}{\sqrt{A-\xi^2}} + C, \tag{42}$$

где

$$A = 2mE_0 + \frac{m^2\alpha^2}{K_0^2};$$

отсюда

$$\varphi = -\arcsin\frac{\xi}{\sqrt{A}} + C = \arccos\left(\frac{\xi}{\sqrt{A}}\right) + C_1, \qquad C_1 = C - \frac{\pi}{2}.$$

Подставляя сюда приведенные выше выражения для ξ и A, получаем

$$\varphi = \arccos\frac{K_0/r - m\alpha/K_0}{\sqrt{2mE_0+m^2\alpha^2/K_0^2}} + C_1. \tag{43}$$

Если ввести обозначения

$$p = \frac{K_0^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1+\frac{2E_0K_0^2}{m\alpha^2}}$$

и выбрать начало отсчета так, чтобы $C_1=0$, то уравнение (43) сведется к виду

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}.} \tag{44}$$

Уравнение (44) представляет собой общее уравнение конических сечений в полярных координатах. В этом уравнении e — относительный эксцентриситет, а p — фокальный параметр конического сечения. Вид конического сечения определяется только величиной эксцентриситета e (рис. III. 7).

1. При $e<1$ уравнение (44) определяет эллипс, в частности, при $e=0$ окружность радиуса $r=p$.

2. При $e=1$ уравнение (44) определяет параболу.

3. При $e>1$ уравнение (44) определяет гиперболу.

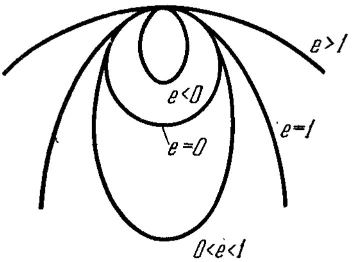

Рис. III.7.

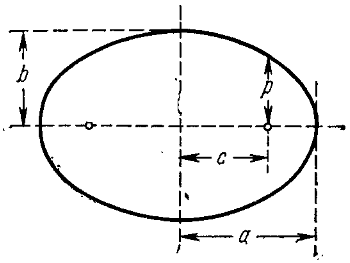

Рис. III.8.

Из аналитической геометрии известно, что в случае, когда уравнение (44) определяет эллипсы ($e<1$), величины эксцентриситета e и параметра p определяются через полуоси эллипса a и b (рис. III.8) так:

$$p=\frac{b^2}{a}, \quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}. \tag{45}$$

Итак, мы установили, что движение в поле всемирного тяготения финитно при $e<1$ и инфинитно при $e\geqslant 1$. Тела, совершающие финитные движения, называются *планетами* или *спутниками*.

Кеплер, обрабатывая наблюдения за движением планет Солнечной системы, обратил внимание на то, что для них имеют место следующие три закона, впоследствии названные *законами Кеплера*.

1. *Каждая из планет Солнечной системы совершает плоское движение с постоянной секториальной скоростью.*

2. *Траекториями всех планет служат эллипсы, в общем фокусе которых расположено Солнце.*

3. *Отношение квадратов времен T обращения планет к кубам больших полуосей их эллиптических траекторий одинаково для всех планет.*

Мы видели ранее, что первый закон Кеплера верен при любом движении в поле центральной силы. Мы видели далее, что второй закон Кеплера верен при всех финитных движениях (т. е. для всех планет любого Солнца) в поле всемирного тяготения. Установим теперь, что для всех таких движений справедлив третий закон Кеплера, т. е. что для всех планет любого Солнца отношения T^2/a^3 одинаковы.

Период T обращения планеты может быть вычислен как отношение площади ее эллиптической орбиты, равной πab, к секториальной скорости $dS/dt = K_0/(2m)$ (см. выше), т. е. $T = 2\pi abm/K_0$. Поэтому

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 b^2}{K_0^2 a}, \tag{46}$$

или с учетом формулы (45)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{K_0^2} p. \tag{47}$$

При выводе формулы (44) мы положили

$$p = \frac{K_0^2}{m\alpha} = \frac{K_0^2}{m^2 \gamma_c}.$$

Подставляя это выражение для p в (47), получаем

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{K_0^2} \frac{K_0^2}{m^2 \gamma_c} = \frac{4\pi^2}{\gamma_c},$$

а это число зависит только от γ_c, т. е. от Солнца, и совершенно одинаково для всех планет.

Вернемся теперь к вопросу об условиях возникновения финитных движений, т. е. к условию, при котором $e < 1$. Из определения e следует, что

$$e^2 - 1 = \frac{2K_0^2}{m\alpha^2} E_0. \tag{48}$$

Учитывая, что

$$E = E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi(r_0)$$

и что для ньютонова или кулонова поля

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

имеем

$$e^2 - 1 = \frac{2K_0^2}{m\alpha^2} \left(\frac{mv_0^2}{2} - \frac{\alpha}{r_0} \right),$$

или

$$e^2 - 1 = \frac{K_0^2}{\alpha^2} \left(v_0^2 - 2\frac{\alpha}{r_0 m} \right).$$

Отсюда сразу следует, что

$$e < 1 \text{ при } v_0 < \sqrt{2\alpha/(r_0 m)},$$
$$e = 1 \text{ при } v_0 = \sqrt{2\alpha/(r_0 m)},$$
$$e > 1 \text{ при } v_0 > \sqrt{2\alpha/(r_0 m)}.$$

Таким образом, характер возникающего движения (т. е. является оно финитным или инфинитным) зависит только от величины начальной скорости. «Граничной» является скорость[1]) $v=v_{II}$:

$$v_{II}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\alpha}{r_0 m}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{\alpha}{r_0^2 m}r_0}=\sqrt{2}\sqrt{g_0 r_0}, \qquad (49)$$

где g_0 — отношение силы $F=\alpha/r_0^2$ к массе m, т. е. ускорение при $r=r_0$.

Определим теперь, какой должна быть скорость точки с массой m для того, чтобы траекторией была окружность радиуса r_0. Это значение скорости $v=v_I$ может быть найдено из равенства $e=0$. Его проще сразу определить из условия, что на круговой траектории с $r=r_0$ точка имеет постоянное центростремительное ускорение v_I^2/r_0 и движется под действием центральной силы mg, т. е. что

$$\frac{mv_I^2}{r_0}=mg$$

и

$$v_I=\sqrt{r_0 g}; \qquad (50)$$

поэтому

$$v_{II}=\sqrt{2}\,v_I. \qquad (51)$$

Для поверхности Земли $g_з\approx 9{,}81$ м/с^2, $r_з\approx 636\cdot 10^4$ и $v_{Iз}=\sqrt{9{,}81\cdot 636\cdot 10^4}\approx 7{,}9$ км/с, а $v_{IIз}=\sqrt{2}\,v_{Iз}\approx 11{,}2$ км/с.

Скорости v_I и v_{II} называются соответственно *первой* и *второй космической скоростью* для рассматриваемого центрального поля в точках $r=r_0$.

Таким образом, в условиях, когда можно пренебречь наличием атмосферы, материальная точка, запущенная вблизи поверхности

[1]) Заметим, что начальная энергия равна

$$E_0=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{\alpha}{r_0};$$

подставляя сюда «граничное значение» v_0 из формулы (49), получаем

$$E_0=\frac{m}{2}\left(2\frac{\alpha}{r_0 m}\right)-\frac{\alpha}{r_0}=0,$$

Таким образом, финитное движение возникает при $E_0<0$, а инфинитное — при $E_0\geqslant 0$. Тот факт, что финитное движение возникает лишь при $E_0<0$, следует сразу и из теоремы о вириале. Выражение $\Pi(r)=-\alpha/r$ является однородной формой степени $s=-1$. Подставляя $s=-1$ в формулу (28), верную лишь для финитных движений, получаем

$$2T_\tau+\Pi_\tau=0, \quad \text{или} \quad E_\tau=E_0=-T_\tau,$$

т. е. для финитных движений $E_0<0$, так как T, а значит и T_τ, всегда положительны.

Земли с горизонтальной скоростью v_0, падает на Землю, если $v_0 < v_{\rm I} \approx 7{,}9$ км/с. Она становится спутником Земли, если

$$7{,}9 \text{ км/с} \approx v_{\rm I} \leqslant v_0 < v_{\rm II} \approx 11{,}2 \text{ км/с},$$

и удаляется от Земли до тех пор, пока не попадет в новое поле тяготения, если

$$v_0 \geqslant v_{\rm II} \approx 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Удаляясь от Земли и встретив новое поле тяготения (например, Солнца), точка может стать планетой Солнца или продолжить движение по инфинитной траектории. Это зависит от того, с какой скоростью она «входит» в поле тяготения Солнца.

3. **Рассеяние частиц в кулоновом поле. Формула Резерфорда.** Рассмотрим инфинитное движение точки массы m, которая движется в кулоновом центральном поле из бесконечности, имея в бесконечности скорость v_∞ (рис. III.9) и, следовательно, энергию

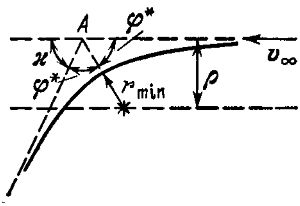

Рис. III.9.

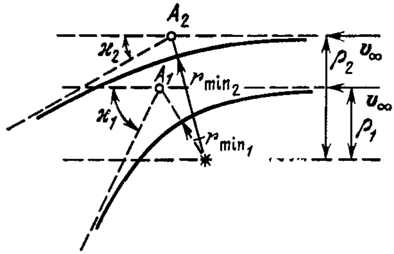

Рис. III.10.

$E_0 = T_0 = mv_\infty^2/2$ и кинетический момент $K_0 = mv_\infty\rho$. В последнем выражении ρ — расстояние от центра до направления скорости v_∞ (его иногда называют *прицельным расстоянием*).

В кулоновом поле траекторией инфинитного движения в общем случае является гипербола, асимптоты которой пересекаются в точке A, расположенной на направлении $r_{\min}$ (наименьшего для этой траектории радиуса), и образуют с этим направлением одинаковые углы φ^*. Нас будет интересовать угол $\varkappa$ (см. рис. III.9), равный

$$\varkappa = \pi - 2\varphi^*. \tag{52}$$

Если изменить ρ, сохранив величину скорости v_∞, то изменится и угол $\varkappa$ (рис. III.10). В связи с этим частицы, летящие с одинаковой скоростью v_∞ в «трубке» радиуса $\rho_1 < \rho < \rho_2$, в результате инфинитного движения в поле оказываются в «конусе» с углом $\varkappa_2 < \varkappa < \varkappa_1$. Это явление называется *рассеянием частиц*. Далее будет показано, что эффект этот зависит от свойств частиц материи (масса — в ньютоновом, заряд — в кулоновом поле). Поэтому, измеряя эффект рассеяния, можно определить свойства рассеиваемых частиц. Это обстоятельство использовал Резерфорд в своих опытах.

Из уравнения траектории в полярных координатах

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

находим, что при $r = \infty$ угол φ^* наклона асимптоты удовлетворяет равенству

$$1 + e\cos\varphi^* = 0.$$

Подставляя найденное выше выражение для e, получаем

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2E_0K_0^2}{m\alpha^2}}\cos\varphi^* = 0,$$

или

$$\left(1 + \frac{2E_0K_0^2}{m\alpha^2}\right)\cos^2\varphi^* = 1.$$

При $E_0 = mv_\infty^2/2$ и $K_0 = mv_\infty\rho$ это дает

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{tg}^2\varphi^*,$$

или с учетом (52)

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\varkappa}{2}. \qquad (53)$$

Эта формула устанавливает связь между $\varkappa$ и ρ, т. е. содержит все необходимое для расчета рассеяния. Удобно, однако, представить эту формулу в ином виде.

Пусть dN — число частиц, рассеиваемых в единицу времени внутри угла от $\varkappa$ до $\varkappa + d\varkappa$, а n — число частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади сечения исходной «трубки» $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Отношение

$$d\sigma = dN/n \qquad (54)$$

называется *эффективным сечением рассеяния*.

Между углами $\varkappa$ и $\varkappa + d\varkappa$ попадают частицы, которые в начале движения прошли через «кольцо» с внутренним диаметром ρ и внешним диаметром $\rho + d\rho$. Таких частиц в единицу времени проходит

$$dN = n\cdot 2\pi\rho\, d\rho = \pi n\, d\rho^2,$$

так что

$$d\sigma = \pi\, d\rho^2. \qquad (55)$$

Подставив сюда $d\rho^2$, найденное из формулы (53), и заменив производную $d\rho/d\varkappa$ ее абсолютной величиной, получим

$$d\sigma = \pi\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\varkappa/2}{\sin^3\varkappa/2}\,d\varkappa. \tag{56}$$

Это формула содержит дифференциал плоского угла $\varkappa$. Удобно перейти к телесному углу $d\theta$ между конусами с углами при вершине $\varkappa$ и $\varkappa + d\varkappa$, воспользовавшись равенством

$$d\theta = 2\pi\sin\varkappa\,d\varkappa;$$

тогда формула (56) принимает вид

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\theta}{\sin^4\varkappa/2}. \tag{57}$$

В кулоновом поле $\alpha = e_c e$, где e — заряд частицы, а e_c — заряд источника поля. Замеряя число частиц, проходящих через телесный угол $\Delta\theta$, и определяя таким образом $\Delta\sigma$, можно по формуле (57) найти e/m частицы, а следовательно, ее заряд, если масса m известна, и наоборот.

Формула (57) носит название *формулы Резерфорда*[1]).

4. Задача двух тел. Рассмотрим теперь задачу, которая внешне кажется отличной от рассмотренной выше задачи о движении точки в потенциальном поле центральной силы, а в действительности легко сводится к ней. Задача эта состоит в изучении движения двух материальных точек под действием сил F их взаимного притяжения или отталкивания. Закон изменения силы F безразличен, важно лишь, что она всегда направлена вдоль прямой, соединяющей точки, а ее величина зависит лишь от расстояния между точками. В гл. II было показано, что и в этом случае существует силовая функция φ, а значит, и потенциальная энергия П, зависящая только от расстояния r между точками.

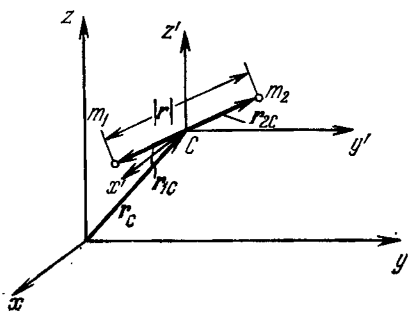

Рис. III.11.

Введем движущуюся поступательно центральную систему координат x', y', z' с началом в центре инерции C системы, состоящей из точек m_1 и m_2 (рис. III.11). Центральная система

[1]) Эта формула, в целях единства изложения выведенная здесь для случая притягивающего центра, верна и для центра отталкивающего, причем последний случай рассматривается чаще.

является инерциальной, так как в силу теоремы о движении центра инерции скорость его постоянна: $\boldsymbol{v}_C = \dot{\boldsymbol{r}}_C = \text{const}$. Движение точек m_1 и m_2 можно рассматривать как сложное движение; тогда переносным будет поступательное движение центральной системы со скоростью $\boldsymbol{v}_C$ центра инерции. Скорость $\boldsymbol{v}_C$ задается начальными скоростями точек $\boldsymbol{v}_{10}$ и $\boldsymbol{v}_{20}$ в момент $t=0$, и по определению центра инерции

$$\boldsymbol{v}_C(t) = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_{10} + m_2 \boldsymbol{v}_{20}}{m_1 + m_2} = \text{const}. \tag{58}$$

Задача сводится к определению движения точек m_1 и m_2 относительно центральной системы x', y', z'.

Введя векторы $\boldsymbol{r}_{1C}$ и $\boldsymbol{r}_{2C}$ для точек m_1 и m_2 в центральной системе x', y', z', имеем (см. рис. III.11)

$$\boldsymbol{r}_{1C} - \boldsymbol{r}_{2C} = \boldsymbol{r}. \tag{59}$$

С другой стороны, в этой системе

$$m_1 \boldsymbol{r}_{1C} + m_2 \boldsymbol{r}_{2C} = (m_1 + m_2)\, \boldsymbol{r}_C = 0, \tag{60}$$

так как начало координат выбрано в центре инерции C.

Решая систему двух алгебраических уравнений (59) и (60) относительно векторов $\boldsymbol{r}_{1C}$ и $\boldsymbol{r}_{2C}$, получаем

$$\boldsymbol{r}_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_{2C} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r}. \tag{61}$$

Поэтому

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{1C} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\boldsymbol{r}}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_{2C} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \ddot{\boldsymbol{r}}$$

и второй закон Ньютона в центральной системе (она инерциальна!) для наших точек записывается так:

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_{1C} = \boldsymbol{F}_1 \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}, \quad m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_{2C} = -\boldsymbol{F}_1,$$

что дает

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\boldsymbol{r}} = F(r) \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

(см. рис. III.11). Поэтому $\boldsymbol{r}$ меняется так, как менялся бы радиус-вектор точки с массой, равной *приведенной массе* $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, движущейся в центральном потенциальном поле с силовой функцией $\Phi = -\Pi(r)$, и задача о движении двух взаимодействующих точек в центральной системе сводится к изучению движения одной воображаемой точки в поле центральной силы. Решая эту задачу, находят $r(\varphi)$, а затем по формулам (61) находят $r_{1C}(\varphi)$ и $r_{2C}(\varphi)$, т. е. движение двух взаимодействующих точек в центральной системе. После этого определить абсолютное движение в исходной системе x, y, z уже не составляет труда, так как переносное движение известно — им является поступательное движение центральной системы со скоростью $\boldsymbol{v}_C$, которая определяется формулой (58).

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что $\boldsymbol{K}_C = \mathrm{const}$, т. е.

$$m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times\boldsymbol{v}_{1C}+m_2\boldsymbol{r}_{2C}\times\boldsymbol{v}_{2C}=\boldsymbol{K}_C=\mathrm{const}.$$

Учитывая равенство (60), имеем

$$\boldsymbol{v}_{1C}=-\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{v}_{2C},$$

и поэтому

$$-m_1\boldsymbol{r}_{1C}\times\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{v}_{2C}+m_2\boldsymbol{r}_{2C}\times\boldsymbol{v}_{2C}=\boldsymbol{K}_C,$$

т. е.

$$m_2(\boldsymbol{r}_{2C}-\boldsymbol{r}_{1C})\times\boldsymbol{v}_{2C}=\boldsymbol{K}_C,$$

или

$$-m_2\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}_{2C}=\boldsymbol{K}_C=\mathrm{const}.$$

Из этого равенства сразу вытекает, что в центральной системе $\boldsymbol{v}_{2C}$, а значит, и $\boldsymbol{v}_{1C}$ лежат в плоскости, перпендикулярной направлению $\boldsymbol{K}_C = \mathrm{const}$, и, следовательно, в задаче двух тел могут происходить лишь плоские движения.

Приведенное выше решение задачи двух тел позволяет, в частности, рассчитать взаимное рассеяние двух частиц (или двух пучков частиц), движущихся по инфинитным траекториям под действием взаимного кулонова притяжения или отталкивания.

5. Вре́менное центральное взаимодействие. Упругие соударения. Рассмотрим теперь задачу двух тел в том случае, когда потенциальная энергия $\Pi(r)$ зависит только от расстояния между точками r и когда существует такое расстояние r^*, что $\Pi(r)\equiv 0$ при всех $r \geqslant r^*$.

Если движение начинается при $r_0 > r^*$, то в этом случае точки движутся независимо до тех пор, пока r не окажется равным r^*. Затем при $r < r^*$ возникают условия задачи двух тел до тех пор, пока вновь не окажется $r = r^*$. Если r продолжает расти, то взаимодействие заканчивается и точки движутся независимо одна от другой до тех пор, пока r, уменьшаясь, снова не достигнет значения r^*. В системе координат, начало которого помещено в одной из рассматриваемых материальных точек, поверхностями уровня служат сферы радиусами r; сфера радиусом $r = r^*$ является поверхностью нулевого уровня и вне ее поверхностей уровня нет.

Пусть при движении системы траектория второй точки в момент $t = t_1$ «входит» внутрь сферы радиусом r^* извне, а в момент $t = t_2$ «выходит» из этой сферы наружу. Условимся говорить тогда, что при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ имело место *временное центральное взаимодействие*. Момент t_1 назовем началом взаимодействия, а момент t_2 — моментом окончания его.

Модель временного центрального взаимодействия удобна, например, для рассмотрения абсолютно упругого соударения тел (подробнее см. далее). Она удобна для описания взаимодействий и в тех случаях, когда не возникает непосредственный контакт тел (как это имеет место при соударениях), если $\Pi(r)$ достаточно быстро убывает с ростом r. В таких случаях часто пренебрегают малыми взаимодействиями, возникающими на больших расстояниях, т. е. вводят в рассмотрение «предельное расстояние» r^* и условно считают, что $\Pi(r) \equiv 0$ при $r > r^*$, пренебрегая малыми значениями $\Pi(r) < \Pi(r^*)$.

Рассматривая временное центральное взаимодействие, будем интересоваться лишь тем, как изменились скорости точек в результате взаимодействия, а не деталями движения в процессе взаимодействия. Как и в общей задаче двух тел, сначала будем пользоваться центральной системой, а затем перейдем к исходной инерциальной системе отсчета. Условимся приписывать индекс C радиусам-векторам и скоростям, подсчитанным относительно центральной системы, т. е. примем обозначения, собранные в табл. II.

Таблица II

Вектор	Момент времени	Центральная система	Исходная инерциальная система
$\boldsymbol{r}$	В момент начала взаимодействия t_1	$\boldsymbol{r}_{1C}$, $\boldsymbol{r}_{2C}$	$\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$
	В момент окончания взаимодействия t_2	$\boldsymbol{r}'_{1C}$, $\boldsymbol{r}'_{2C}$	$\boldsymbol{r}'_1$, $\boldsymbol{r}'_2$
$\boldsymbol{v}$	В момент начала взаимодействия t_1	$\boldsymbol{v}_{1C}$, $\boldsymbol{v}_{2C}$	$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$
	В момент окончания взаимодействия t_2	$\boldsymbol{v}'_{1C}$, $\boldsymbol{v}'_{2C}$	$\boldsymbol{v}'_1$, $\boldsymbol{v}'_2$

Рассматривается временное взаимодействие. Поэтому за время взаимодействия не меняется ни $\boldsymbol{Q}$, ни T (см. §§ 2—4 этой главы) как в исходной, так и в центральной системе (которая тоже является инерциальной, поскольку при взаимодействии действуют лишь внутренние силы и поэтому $\boldsymbol{v}_C = \text{const}$).

Запишем условие сохранения $\boldsymbol{Q}$ в центральной системе:

$$m_1\boldsymbol{v}_{1C} + m_2\boldsymbol{v}_{2C} = m_1\boldsymbol{v}'_{1C} + m_2\boldsymbol{v}'_{2C} = M\boldsymbol{v}'_{CC}, \qquad (62)$$

где $\boldsymbol{v}'_{CC}$ — скорость центра инерции в центральной системе, разумеется, равная нулю. Поэтому

$$m_1\boldsymbol{v}_{1C} = -m_2\boldsymbol{v}_{2C}, \quad m_1\boldsymbol{v}'_{1C} = -m_2\boldsymbol{v}'_{2C}. \tag{63}$$

Из равенств (63) следует, что в центральной системе скорости точек как до взаимодействия, так и после него направлены по одной прямой. Разумеется, прямая, вдоль которой в центральной системе направлены скорости $\boldsymbol{v}_{1C}$ и $\boldsymbol{v}_{2C}$ до взаимодействия, может не совпадать с прямой, вдоль которой направлены скорости $\boldsymbol{v}'_{1C}$ и $\boldsymbol{v}'_{2C}$ после взаимодействия.

Запишем теперь условие сохранения кинетической энергии в центральной системе

$$\frac{(m_1v_{1C})^2}{2m_1} + \frac{(m_2v_{2C})^2}{2m_2} = \frac{(m_1v'_{1C})^2}{2m_1} + \frac{(m_2v'_{2C})^2}{2m_2}. \tag{64}$$

Используя равенства (63) для исключения v_{2C} и v'_{2C}, получаем

$$\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)(m_1v_{1C})^2 = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)(m_1v'_{1C})^2,$$

т. е.

$$v_{1C} = v'_{1C}. \tag{65а}$$

Аналогично, исключая из (64) v_{1C} и v'_{1C}, находим

$$v_{2C} = v'_{2C} \tag{65б}$$

и, таким образом, устанавливаем, что в центральной системе абсолютная величина скорости каждой точки за время взаимодействия не меняется.

Используя формулы (61) и полагая $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{1C} - \boldsymbol{v}_{2C}$, получаем

$$\boldsymbol{v}_{1C} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v}_{2C} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{v}, \tag{66}$$

откуда следуют аналогичные равенства для алгебраических значений скоростей:

$$v_{1C} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v, \quad v_{2C} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v$$

(здесь $v = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$). Воспользовавшись теперь равенствами (65), находим

$$v'_{1C} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v, \quad v'_{2C} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v,$$

или, вновь возвращаясь к векторной записи,

$$\boldsymbol{v}'_{1C} = \frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}', \quad \boldsymbol{v}'_{2C} = -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}', \tag{67}$$

где $\boldsymbol{n}'$ — орт совпадающего (в силу (63)) направления скоростей $\boldsymbol{v}'_{1C}$ и $\boldsymbol{v}'_{2C}$ в момент окончания взаимодействия.

Соотношения (67) выражают скорости в момент окончания взаимодействия в центральной системе через орт $\boldsymbol{n}'$ и скорости в момент начала взаимодействия в исходной системе. Для того чтобы найти аналогичные соотношения для скоростей $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$ в исходной системе, надо добавить к правым частям соотношений (67) переносную скорость, т. е. скорость центра инерции. Таким образом,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}' + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}, \\ \boldsymbol{v}_2' &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}v\boldsymbol{n}' + \frac{m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1+m_2}. \end{aligned} \tag{68}$$

Теперь для того чтобы по скоростям, заданным в момент начала взаимодействия, полностью определить скорости в момент его окончания, осталось лишь найти орт $\boldsymbol{n}'$. Вспомним, однако, что рассматривается вре́менное взаимодействие в задаче двух тел, и поэтому задача сводится к изучению движения одной точки с приведенной массой $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ в центральном поле $\Pi(r)$. Используя применительно к этому движению равенство, из которого был получен ранее закон площадей

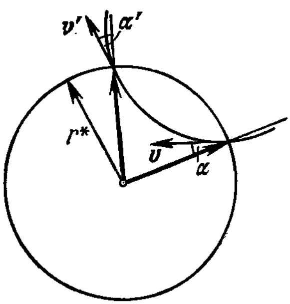

Рис. III.12.

$$mr^2\dot\varphi = \text{const},$$

приравняем величину $mr^2\dot\varphi$ в начале и в конце взаимодействия, т. е. в моменты t_1 и t_2:

$$mr^{*2}\dot\varphi = mr^{*2}\dot\varphi',$$

откуда

$$\dot\varphi = \dot\varphi'.$$

Но $\dot\varphi = v\sin\alpha/r^*$ (рис. III.12), так что

$$\frac{v\sin\alpha}{r^*} = \frac{v'\sin\alpha'}{r^*}.$$

В моменты t_1 и t_2 точка находится на одной и той же поверхности уровня $\Pi(r^*) = 0$, и поэтому значения кинетической энергии равны $mv^2/2 = mv'^2/2$, т. е. с точностью до знака $v = v'$, и, следовательно,

$$\alpha = \alpha'.$$

Иначе говоря, при вре́менном взаимодействии скорость в конце взаимодействия и в начале его составляет с линией, соединяющей точки, один и тот же угол. Меняется лишь «знак угла» (рис. III.12), так как по самой постановке задачи в начале взаимодействия $|\boldsymbol{r}|$ уменьшается, а в момент окончания взаимодействия $|\boldsymbol{r}|$ растет.

Если теперь скорость $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{v}_1'-\boldsymbol{v}_2'$ разложить на составляющие $\boldsymbol{v}_r$ по направлению $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}_\tau$ по перпендикулярному направлению, то из изложенного следует, что $\boldsymbol{v}_\tau'=\boldsymbol{v}_\tau$ и $\boldsymbol{v}_r'=-\boldsymbol{v}_r$. Отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_r'-\boldsymbol{v}_r=-2\boldsymbol{v}_r=-2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}.$$

Деля это равенство на $|\boldsymbol{v}|$ и учитывая, что $|\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}'|$, получаем

$$\frac{\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{v}'|}=\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}-2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\cdot\boldsymbol{e}\right)\boldsymbol{e},$$

или

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}-2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e})\,\boldsymbol{e}, \tag{69}$$

т. е. если известен орт $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)/|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$ направления $\boldsymbol{r}$ и орт $\boldsymbol{n}$ направления $\boldsymbol{v}$, то сразу находится и орт $\boldsymbol{n}'$ совпадающих направлений $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}_{1C}'$ и $\boldsymbol{v}_{2C}'$.

Теперь равенства (68) и (69) полностью определяют скорости $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$ в конце взаимодействия, если известны скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ в момент начала взаимодействия.

Таким образом, изменение скорости за время вре́менного центрального взаимодействия *совершенно не зависит от вида потенциальной энергии* $\Pi(r)$, т. е. от конкретного вида центральной силы $F(r)$, и целиком определяется тем фактом, что сила центральная, а взаимодействие вре́менное, и поэтому движение начинается и заканчивается на одной и той же поверхности нулевого уровня $\Pi(r^*)=0$.

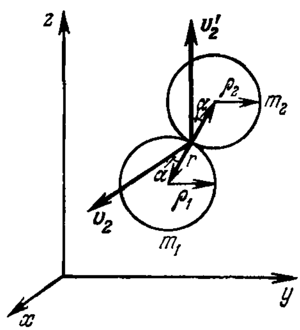

Рис. III.13.

В качестве примера задачи, которую можно трактовать как задачу вре́менного центрального взаимодействия двух тел, рассмотрим абсолютно упругое соударение двух тел. В этой задаче уже нельзя пренебрегать размерами рассматриваемых материальных объектов. Простоты ради мы будем считать, что соударяются шарики радиусов ρ_1 и ρ_2, но что до соударения и после него они движутся поступательно по отношению к инерциальной системе отсчета, и поэтому могут рассматриваться как материальные точки.

Собственно процесс соударения начинается с того момента, когда впервые возникает контакт между шариками. В этот момент расстояние между их центрами равно $r=\rho_1+\rho_2$, а скорости в точке контакта соответственно равны $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ (на рис. III.13 указаны только скорости шарика m_2 до соударения и после него). Во время наступающего затем процесса упругого соударения расстояние r сначала уменьшается (за счет сжатия материала шариков), а затем вновь увеличивается (за счет их упругости). Если соударение абсолютно упругое (см. далее), то форма шариков восстанавливается и в момент потери контакта вместо скоростей $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, которые были до соударения, шарики приобретают скорости $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$, которые могут отличаться от $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ как по величине, так и по направлению. Соударение называется *идеальным абсолютно упругим*, если во время этого процесса соударения выполняются следующие условия.

1° Возникающая между шариками сила упругого взаимодействия направлена вдоль прямой, соединяющей центры шариков (независимо от того, как направлены скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, лишь бы происходило сжатие материала), а величина этой силы зависит только от расстояния между центрами r.

2° В процессе сжатия нет потерь энергии, т. е. полная работа всех сил взаимодействия за время процесса взаимодействия равна нулю.

Разумеется, эти условия не выполняются точно при соударении реальных шаров из любого материала. Вместе с тем абсолютно упругое соударение — удачная идеализированная модель для описания столкновения во многих случаях, когда потери энергии малы.

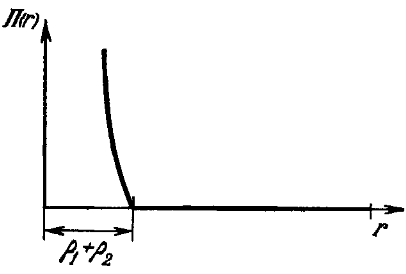

Рис. III.14.

Потенциальная энергия в этой задаче зависит только от расстояния r между центрами шаров; она равна нулю при $r=\rho_1+\rho_2$ и быстро нарастает, когда r становится меньше $\rho_1+\rho_2$ (рис. III.14). Ударное взаимодействие начинается и заканчивается на одной и той же поверхности нулевого уровня при $r=r^*=\rho_1+\rho_2$. Таким образом, выведенные выше формулы (68) полностью определяют скорости после соударения по скоростям до соударения. Тот факт, что угол α за время соударения не меняется по величине, а лишь меняет знак, иногда формулируют так: «угол падения равен углу отражения», имея в виду скорость одного из шариков в системе отсчета, связанной со вторым шариком.

§ 8. Применение основных теорем механики в неинерциальных системах отсчета

Основные теоремы механики были доказаны в §§ 2—4 этой главы в предположении, что исследуемая динамическая система удовлетворяет условиям 1°—3°, указанным в конце предыдущей главы.

В этом параграфе мы откажемся от условия 1° (об инерциальности системы отсчета), а в следующем — от условия 2° (о постоянстве состава системы), и покажем, каким образом — за счет введения дополнительных сил — удается, несмотря на это, применять основные теоремы.

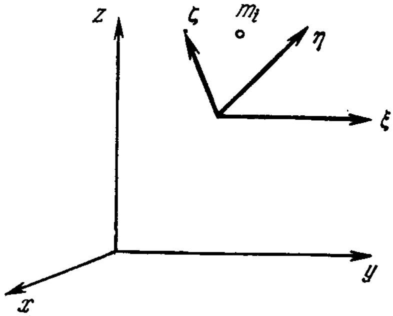

Рис. III.15.

Рассмотрим систему материальных точек в предположении, что выполняются все условия, о которых шла речь в предыдущей главе, кроме одного: теперь система отсчета, относительно которой рассматривается движение, не является инерциальной.

Выберем инерциальную систему отсчета[1] x, y, z и рассмотрим неинерциальную систему ξ, η, ζ, движущуюся относительно инерциальной (рис. III.15). Рассмотрим далее i-ю точку материальной системы с массой m_i. С точки зрения наблюдателя, находящегося в инерциальной системе, и с точки зрения наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе, точка m_i совершает различные движения. Наблюдатель, находящийся в инерциальной системе, имеет право для изучения движения точки применять законы механики, о которых речь шла выше, в частности второй закон Ньютона

$$m_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{F}_i, \tag{70}$$

где $\boldsymbol{w}_i$ — ускорение точки относительно инерциальной системы x, y, z.

Если наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе отсчета и считающий, что на точку m_i действует та же самая сила $\boldsymbol{F}_i$, попытается применить закон Ньютона, то он обнаружит, что закон Ньютона в его системе отсчета не выполняется, т. е. масса, умноженная на ускорение, которое он наблюдает, не равна действующей на точку силе.

Вернемся к рис. III.15. Движение точки m_i можно считать сложным движением: движение точки m_i относительно инерциаль-

[1]) Здесь и далее для краткости мы отождествляем систему отсчета с выбранной в ней декартовой системой координат (см. гл. I).

ной системы можно рассматривать как абсолютное, движение точки относительно неинерциальной системы — как относительное, а движение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной системы отсчета — как переносное. Тогда в силу общих геометрических свойств сложного движения, изученных в гл. I,

$$\boldsymbol{w}_{i\,\text{абс}} = \boldsymbol{w}_{i\,\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}} + \boldsymbol{w}_{i\,\text{кор}}. \tag{71}$$

Вспомним, что в качестве ускорения в левой части формулы (70) фигурирует ускорение точки m_i относительно инерциальной системы, т. е. как раз то ускорение, которое теперь, рассматривая движение точки m_i как сложное, мы назвали абсолютным. Подставляя в (70) выражение (71) для $\boldsymbol{w}_{i\,\text{абс}}$, получаем

$$m_i(\boldsymbol{w}_{i\,\text{отн}} + \boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}} + \boldsymbol{w}_{i\,\text{кор}}) = \boldsymbol{F}_i.$$

Это соотношение можно переписать так:

$$m\boldsymbol{w}_{i\,\text{отн}} = \boldsymbol{F}_i - m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}} - m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{кор}}. \tag{72}$$

Формулу (72) можно трактовать как запись закона Ньютона применительно к неинерциальной системе отсчета. В правой части этой формулы к силе, действующей на точку, добавляются еще два члена — они появляются в результате наличия переносного и кориолисова ускорений. Обозначая эти члены с учетом их знаков соответственно $\boldsymbol{J}_{i\,\text{пер}}$ и $\boldsymbol{J}_{i\,\text{кор}}$, получаем

$$\boxed{m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{отн}} = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{J}_{i\,\text{пер}} + \boldsymbol{J}_{i\,\text{кор}}.} \tag{73}$$

Векторы, которые появились в правой части формулы (73), имеют размерность силы и называются *силами инерции*: вектор $\boldsymbol{J}_{i\,\text{пер}} = -m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}}$ называется *переносной силой инерции*, а вектор $\boldsymbol{J}_{i\,\text{кор}} = -m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{кор}}$ — *кориолисовой силой инерции*. Переносная и кориолисова силы инерции получаются соответственно умножением переносного и кориолисова ускорения на массу точки m_i. Направление сил инерции противоположно направлению соответствующих ускорений.

Мы установили таким образом, что *второй закон Ньютона может быть применен и в неинерциальной системе отсчета, если к силам, действующим на каждую точку, добавить переносную и кориолисову силы инерции*.

Вспомним теперь, что при выводе всех основных теорем механики в §§ 2—4 этой главы мы опирались лишь на второй закон Ньютона. Следовательно, *все теоремы механики, сформулированные нами выше, будут верны и в неинерциальных системах отсчета, если к силам, действующим на точки системы, добавить переносные и кориолисовы силы инерции*. Если силы делятся на внешние и внутренние, то силы инерции относятся к внешним силам.

Так, например, теорему об изменении количества движения и теорему об изменении кинетического момента в неинерциальной системе отсчета можно записать так:

$$\frac{dQ}{dt} = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}} + \boldsymbol{J}_{\text{кор}}, \tag{74}$$

$$\frac{dK_O}{dt} = M_{O\,\text{внеш}} + M_{OJ_{\text{пер}}} + M_{OJ_{\text{кор}}}, \tag{75}$$

где $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$ и $\boldsymbol{J}_{\text{кор}}$ — главные векторы переносных и соответственно кориолисовых сил инерции всех точек системы, а $M_{OJ_{\text{пер}}}$ и $M_{OJ_{\text{кор}}}$ — главные моменты этих сил относительно полюса O.

Главные векторы переносных и кориолисовых сил инерции легко определить, если известны переносное и кориолисово ускорения центра инерции системы. Действительно,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\text{пер}} &= -\sum m_i \boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}} = -\sum m_i [\boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] = \\ &= -[\boldsymbol{w}_O \cdot \sum m_i + \boldsymbol{\varepsilon} \times \sum m_i \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \sum m_i \boldsymbol{r}_i)] = \\ &= -[M \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times M \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times M \boldsymbol{r}_C)] = \\ &= -M [\boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_C)] = -M \boldsymbol{w}_{C\,\text{пер}} \end{aligned} \tag{76}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_{\text{кор}} &= -2 \sum m_i (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{i\,\text{отн}}) = -2 (\boldsymbol{\omega} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_{i\,\text{отн}}) = \\ &= -2 (\boldsymbol{\omega} \times M \boldsymbol{v}_{C\,\text{отн}}) = -2M (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{C\,\text{отн}}). \end{aligned} \tag{77}$$

Таким образом, *главные векторы переносных и кориолисовых сил инерции системы равны соответственно переносной и кориолисовой силе инерции, которые следовало бы приложить к материальной точке массы $M = \sum m_i$, если бы эта точка находилась в центре инерции системы и двигалась вместе с ним.*

Теорема об изменении кинетической энергии записывается в неинерциальной системе отсчета внешне совершенно так же, как и в неинерциальной,

$$dT = \delta A, \tag{78}$$

где δA — работа всех приложенных сил на элементарных перемещениях относительно неинерциальной системы отсчета, т. е. на относительных перемещениях. При подсчете δA надо учитывать элементарную работу не только сил, действующих на точки системы (внешних и внутренних), но и работу переносных сил инерции.

Работа кориолисовых сил инерции равна нулю, так как кориолисова сила инерции всегда ортогональна относительному перемещению. В самом деле,

$$\delta A_{J_{\text{кор}}} = \boldsymbol{J}_{\text{кор}} \cdot d\boldsymbol{r}_{\text{отн}} = -2m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}}) \cdot \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\, dt = 0,$$

Из формул (74), (75) и (78) следует, что законы сохранения, сформулированные в §§ 2—4 этой главы, могут быть сформулированы и в неинерциальных системах отсчета, однако при иных условиях, чем это имело место в инерциальных системах. Так, например, в инерциальных системах закон сохранения количества движения или кинетического момента имел место в тех случаях, когда главный вектор или соответственно главный момент внешних сил был равен нулю, в частности, в замкнутой системе, на которую по определению не действуют внешние силы. Иначе обстоит дело в неинерциальных системах отсчета. Даже для замкнутой системы в неинерциальной системе отсчета, вообще говоря, не выполняются законы сохранения количества движения и кинетического момента. Для того чтобы количество движения и кинетический момент не изменялись в неинерциальных системах отсчета, нужно, чтобы были равны нулю главный вектор (или соответственно главный момент), составленный совместно для внешних сил и сил инерции. Ясно, что это может иметь место лишь при специальных условиях. Поэтому случаи, когда к неинерциальным системам можно применять законы сохранения количества движения и кинетического момента, значительно более редки и носят частный характер.

В связи с последним замечанием особый интерес представляет *центральная система*, которая движется поступательно относительно инерциальной так, что в любой момент t скорость (ускорение) всех ее точек совпадает со скоростью (ускорением) центра инерции рассматриваемой системы материальных точек. В центральной системе кориолисовых сил инерции нет (так как переносное движение поступательно и $\omega=0$), и для связанного с ней наблюдателя центр инерции рассматриваемой системы материальных точек неподвижен ($\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{w}_C=0$). Поэтому для такого наблюдателя из формулы $\boldsymbol{Q}=M\boldsymbol{v}_C$ следует, что в центральной системе $\boldsymbol{Q}=0$ всегда (т. е. не только для замкнутых систем, но и при любых внешних силах!): ***количество движения системы сохраняется равным нулю во время движения.*** Из теоремы о движении центра инерции

$$M\dot{\boldsymbol{v}}_C=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{F}_{\text{внеш}}+\boldsymbol{J}_{\text{пер}}$$

следует, что в центральной системе ***главный вектор всех сил, приложенных к точкам системы (включая силы инерции), равен нулю.*** Поэтому в центральной системе как $\boldsymbol{M}$ — главный момент всех сил (включая силы инерции), так и $\boldsymbol{K}$ — кинетический момент не зависят от выбора полюса[1]).

---

[1]) При переносе полюса главный момент системы векторов изменяется на момент главного вектора ($\boldsymbol{R}$ — в случае сил, $\boldsymbol{Q}$ — в случае импульсов), приложенного в «старом» полюсе; см. приложение, стр. 340.

Рассмотрим теперь случай относительного равновесия. Если материальная точка неподвижна относительно неинерциальной системы отсчета, то говорят, что имеет место относительное равновесие. При относительном равновесии

$$v_{\text{отн}} = w_{\text{отн}} = 0.$$

В связи с тем, что $v_{\text{отн}} = 0$, кориолисово ускорение не возникает и главный вектор кориолисовых сил инерции также равен нулю. Из формулы (73) следует тогда условие относительного равновесия

$$F_i + J_{i\,\text{пер}} = 0. \tag{79}$$

Если бы система была инерциальной, то условием равновесия точки было бы равенство нулю приложенной к ней силы[1]). Мы видим теперь, что в неинерциальных системах отсчета равенство нулю силы, приложенной к точке, еще не определяет равновесия: относительное равновесие достигается только тогда, когда равна нулю сумма действующей на точку силы и переносной силы инерции.

§ 9. Применение основных теорем механики к движению системы переменного состава

Предположим теперь, что рассматривается система, которая не удовлетворяет условиям основной модели классической механики по другой причине: состав системы во время изучаемого движения не остается постоянным, а изменяется. Начнем с нескольких простых примеров.

В качестве первого примера рассмотрим движение трубки, заполненной мелкими шариками, например дробинками, под действием некоторой силы (рис. III. 16, *а*). Предполагается, что трубка закрыта пробкой, массой которой можно пренебречь (на рисунке эта пробка обозначена буквой *П*) и что во время движения дробинки не высыпаются из трубки и не добавляются в нее. Тогда трубка и дробинки — система постоянного состава, и к ним применимы законы и теоремы механики.

Предположим теперь, что пробка *П* вынута, и поэтому дробинки высыпаются из трубки (рис. III.16, *б*); в то же время в нее все время поступают дробинки из какого-либо бункера. Предполагается, что «приток» дробинок из бункера в трубку в точности равен их «расходу». Поэтому количество дробинок, находящихся внутри трубки, всегда совершенно такое же, какое было до того, как была вынута пробка *П* и начался «проток»

[1]) При наличии нескольких сил, приложенных к точке, нулю должна быть равна их векторная сумма.

дробинок через трубку. Несмотря на то, что в обоих рассмотренных случаях масса трубки с дробинками совершенно одинакова и движение вызывается одной и той же силой, движения, которые возникают в этих случаях, будут различными. Теоремы механики, доказанные выше в этой главе, нельзя применять к случаю, соответствующему рис. III.16, *б*, так как в этом случае не выполняется условие постоянства состава рассматриваемой материальной системы: несмотря на то, что количество вещества в трубке не изменяется во времени, состав этого вещества меняется: одни дробинки (высыпающиеся из трубки) заменяются другими (поступающими из бункера). Совершенно аналогично обстоит дело в случае, представленном на рис. III.17, где через трубку протекает жидкость, скажем, вода.

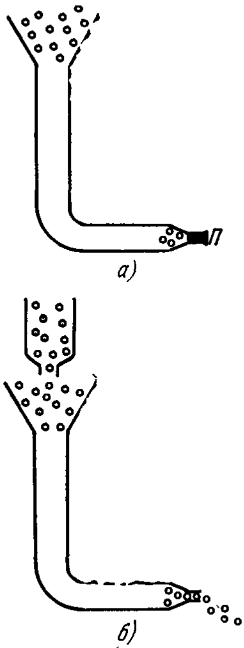

Рис. III.16.

Представим теперь себе пружинные весы, на которых взвешиваются три отрезка трубы: U-образный (рис. III.18, *а*), L-образный (рис. III.18, *б*) и прямой горизонтальный (рис. III. 18, *в*). Через трубы протекает жидкость, приток которой в трубу в точности равен расходу, и взвешиваемые отрезки все время полностью заполнены водой; направление течения показано стрелками. Предполагается, что во всех трех случаях вес трубы и заполняющей ее воды совершенно одинаков. С точки зрения обычных представлений механики систем постоянного состава показания весов в этих случаях должны быть одинаковы. Однако в действительности показания весов будут разными. Это различие показаний весов за счет протока жидкости возникает благодаря явлениям, специфическим для механики систем переменного состава и не имеющим места для систем постоянного состава.

В качестве следующего примера рассмотрим ротор гидравлической турбины, условно изображенный на рис. III.19. Непрерывный поток воды через турбину является равномерным, и количество воды, заполняющей промежутки между лопатками турбины, не меняется во времени. С точки зрения механики системы постоянного состава ротор турбины уравновешен и нет непосредственных причин для создания вращающего момента. Между тем только за счет протока воды через турбину возникает вращающий момент, достаточный для работы, скажем, мощных динамомашин.

В качестве последнего примера рассмотрим движение излучающей материальной частицы, либо испаряющейся во время движения жидкой капли, либо, наконец, ракеты (рис. III.20). Благодаря горению топлива внутри ракеты развиваются большие давления, и продукты горения вылетают из сопла наружу. Ракету можно было бы рассматривать как систему постоянного состава, но тогда наряду с самой ракетой нужно было бы все время рассматривать и вытекшее ранее «облако» газа. К системе

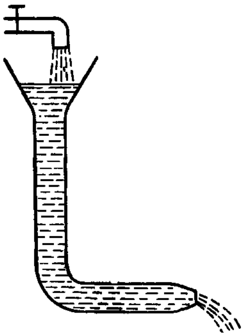

Рис. III.17.

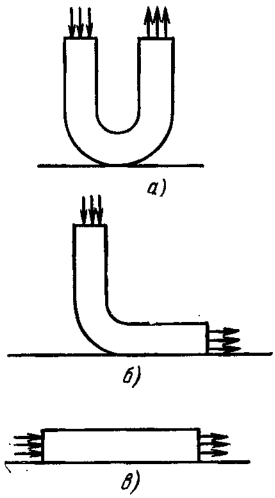

Рис. III.18.

«ракета + вытекшие газы» могут быть применены теоремы механики, выведенные в этой главе. В частности, если рассматривать движение ракеты при отсутствии внешних сил, то ракета и вытекшие из нее газы представляют собой замкнутую материальную систему

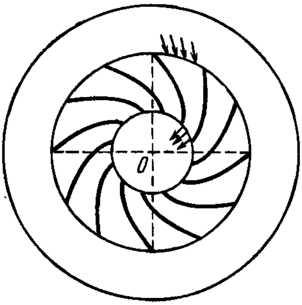

Рис. III.19.

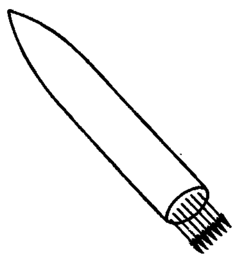

Рис. III.20.

и, следовательно, скорость центра инерции этой системы не может меняться. Поэтому из того факта, что газы под действием внутренних сил вытекают, скажем, влево, следует сразу, что корпус ракеты должен двигаться вправо. Однако если бы мы захотели изучать движение корпуса ракеты с не сгоревшим к этому моменту топливом, не учитывая движения ранее вытекших из ракеты газов, то теоремы механики нельзя было бы применять непосредственно из-за того, что газы выбрасываются из ракеты, материальный состав такой системы меняется, и следовательно, корпус ракеты с оставшимся в нем (несгоревшим) топливом представляет собой систему переменного состава. Аналогично обстоит дело при движении излучающей частицы или испаряющейся капли.

Наша цель состоит в том, чтобы научиться применять законы механики к системам подобного рода. Мы сконцентрируем свое внимание на теоремах об изменении количества движения и момента количества движения системы и на тех изменениях, которые надо внести в эти теоремы для того, чтобы они были верны и для систем переменного состава, но постоянного объема — все рассмотренные выше примеры относились к системам такого рода.

1. Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента применительно к системам переменного состава. Рассмотрим в системе отсчета x, y, z (эта система может быть и неинерциальной) систему материальных точек, которые в момент

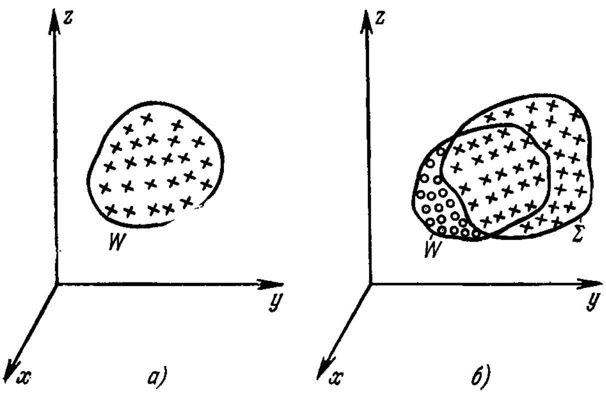

Рис. III.21.

$t=t_0$ заполняют некоторый объем W (рис. III.21, *а*). Предположим, что этот объем выделен какой-либо проницаемой перегородкой, сквозь которую могут выходить заключенные внутри него частицы и входить частицы извне.

Отметим крестиками частицы, находящиеся в момент $t=t_0$ в объеме W, так, как это показано на рис. III.21, *а*. Пусть, далее, в момент $t_1=t_0+\Delta t$ частицы, занимавшие в момент t_0 объем W и отмеченные крестиками, занимают некоторый другой объем (рис. III.21, *б*). Тогда в этот момент объем W будет частично заполнен теми частицами, которые были в нем ранее, а частично новыми частицами, проникшими сквозь ограничивающую этот объем оболочку за время Δt (они отмечены на рис. III.21, *б* кружками).

Введем теперь в рассмотрение две материальные системы. Прежде всего мы будем рассматривать систему постоянного состава, образованную теми материальными точками, которые находились в объеме W в начальный момент $t=t_0$, т. е. частицы, отмеченные крестиками. Со временем эти точки, вообще говоря, выходят из объема W. Такую систему *постоянного состава* (но переменного объема) назовем системой Σ. По отношению к этой системе верны теоремы, доказанные в этой главе, в частности, теорема об изменении количества движения.

Наряду с этой системой Σ будем рассматривать другую систему, состоящую в любой момент из материальных точек, заполняющих фиксированный объем W; часть материальных точек выходит из этой системы и далее в ее составе нами не учитывается, часть же точек входит в эту систему извне. Такую систему будем называть системой W. Система W является системой *постоянного объема* (но переменного состава).

Разумеется, в каждое мгновение можно вычислить векторы количества движения $\boldsymbol{Q}_\Sigma$ и $\boldsymbol{Q}_W$ для систем Σ и W.

В момент $t=t_0$ система Σ совпадает с системой W, и поэтому

$$\boldsymbol{Q}_{\Sigma t_0}=\boldsymbol{Q}_{W t_0}. \tag{80}$$

Рассмотрим теперь момент $t=t_1=t_0+\Delta t$. В этот момент количество движения системы W и системы Σ уже могут быть различны. Количество движения системы W можно выразить так:

$$\boldsymbol{Q}_{W t_1}=\boldsymbol{Q}_{\Sigma t_1}-\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{уход}}+\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{прих}}. \tag{81}$$

Здесь $\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{уход}}$ — количество движения частиц, уходящих из объема W за время Δt (т. е. частиц, отмеченных крестиком, но не находящихся в этот момент в объеме W); соответственно $\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{прих}}$ — количество движения частиц, приходящих за время Δt в объем W извне (т. е. частиц, отмеченных на рис. III.21, *б* кружками).

Подсчитаем производную $d\boldsymbol{Q}_W/dt$:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_W}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{Q}_{W t_1}-\boldsymbol{Q}_{W t_0}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{Q}_{\Sigma t_1}-\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{уход}}+\Delta\boldsymbol{Q}_{\text{прих}})-\boldsymbol{Q}_{W t_0}}{\Delta t}. \tag{82}$$

Учитывая равенство (80) и очевидное соотношение

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{Q}_{\Sigma t_1}-\boldsymbol{Q}_{\Sigma t_0}}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{Q}_\Sigma}{dt},$$

получаем

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_W}{dt}=\frac{d\boldsymbol{Q}_\Sigma}{dt}-\boldsymbol{f}_{\text{уход}}+\boldsymbol{f}_{\text{прих}}, \tag{83}$$

где $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$ и $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}$ обозначают соответственно пределы

$$\boldsymbol{f}_{\text{уход}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_{\text{уход}}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{f}_{\text{прих}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_{\text{прих}}}{\Delta t}. \tag{84}$$

Непосредственно видно, что этими пределами служат векторы, имеющие размерность силы. Это следует, впрочем, сразу и из формулы (83).

Удобно ввести в рассмотрение вектор $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$ — сумму этих двух векторов с учетом их знаков:

$$\boldsymbol{R}_{\text{доп}} = -\boldsymbol{f}_{\text{уход}} + \boldsymbol{f}_{\text{прих}}. \tag{85}$$

Вектор $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$ называют *дополнительной силой*. Он возникает лишь благодаря «уходу» частиц из рассматриваемой системы или «приходу» новых частиц в эту систему и по величине и направлению определяется формулой (85). С учетом (85) равенство (83) можно переписать так:

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_W}{dt} = \frac{d\boldsymbol{Q}_\Sigma}{dt} + \boldsymbol{R}_{\text{доп}}. \tag{86}$$

Соотношение (86) верно как в инерциальных, так и в неинерциальных системах отсчета, так как при его выводе производился лишь подсчет количеств движения.

Если система отсчета инерциальна, то к системе Σ применимы теоремы, доказанные в §§ 2—4 этой главы, и

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_\Sigma}{dt} = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}};$$

поэтому в инерциальной системе отсчета

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_W}{dt} = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}} + \boldsymbol{R}_{\text{доп}}. \tag{87}$$

Теперь теорему об изменении количества движения для системы переменного состава можно сформулировать так: *в инерциальной системе отсчета производная по времени от вектора количества движения системы постоянного объема (но переменного состава) равна главному вектору внешних сил и дополнительной силы, определяемой формулой* (85).

Аналогично, в неинерциальной системе отсчета

$$\frac{d\boldsymbol{Q}_W}{dt} = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}} + \boldsymbol{J}_{\text{пер}} + \boldsymbol{J}_{\text{кор}} + \boldsymbol{R}_{\text{доп}}. \tag{88}$$

Вернемся теперь к инерциальной системе отсчета и введем понятие о стационарном потоке материи через объем W. Будем говорить, что поток материи является *стационарным*, если количество движения в любом элементарном объеме внутри W зависит только от его положения внутри этого объема и не меняется со временем. Это условие относится не только к внутренним точкам объема, но и к точкам, принадлежащим его внешней оболочке, т. е. одинаковые частицы материи, выходя из объема или входя в него, приобретают в одних и тех же местах оболочки одинаковые скорости. Если в этом случае осуществляется поток через объем W частиц одинаковой массы, например если протекает жидкость одинаковой плотности, то вектор Q_W оказывается неизменным во времени. Поэтому для стационарного потока $dQ_W/dt = 0$, и формула (87) принимает вид

$$\boldsymbol{R}_{\text{внеш}} + \boldsymbol{R}_{\text{доп}} = 0. \tag{89}$$

Обратимся теперь к главному вектору внешних сил $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}$. Будем различать главный вектор *объемных сил* $\boldsymbol{R}_{\text{объем}}$, т. е. сил, действующих на находящиеся внутри объема W точки и обусловленных воздействием материи, расположенной вне этого объема (например, через гравитационные, магнитные и т. п. поля), и главный вектор $\boldsymbol{R}_{\text{от оболочки}}$ сил, обусловленных действием ограничивающей объем W оболочки на частицы материи, находящиеся внутри объема и непосредственно примыкающие к этой оболочке, в тех случаях, когда оболочка не является абсолютно проницаемой. Таким образом,

$$\boldsymbol{R}_{\text{внеш}} = \boldsymbol{R}_{\text{объем}} + \boldsymbol{R}_{\text{от оболочки}}. \tag{90}$$

В силу третьего закона Ньютона при наличии сил, действующих со стороны оболочки на примыкающие к ней частицы, возникают равные и противоположно направленные силы, действующие со стороны этих частиц на оболочку. Обозначим их главный вектор $\boldsymbol{R}_{\text{на оболочку}}$; разумеется,

$$\boldsymbol{R}_{\text{от оболочки}} = -\boldsymbol{R}_{\text{на оболочку}}. \tag{91}$$

Подставляя в (89) выражение (90) и учитывая (91), получаем

$$\boldsymbol{R}_{\text{на оболочку}} = \boldsymbol{R}_{\text{объем}} + \boldsymbol{R}_{\text{доп}}. \tag{92}$$

Формула (92) была получена Эйлером и носит название *формулы Эйлера*. Она определяет усилие, действующее на оболочку, ограничивающую некоторый объем, через который осуществляется стационарный проток вещества. Из этой формулы следует, что главный вектор сил, действующих на оболочку со стороны вещества, находящегося внутри объема, отличается от главного вектора внешних сил как раз на ту дополнительную силу $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$, которую пришлось добавить к главному вектору внешних сил для того, чтобы к системам переменного состава можно было бы применять теорему об изменении количества движения.

Мы можем вернуться теперь к рис. III.18 и объяснить причину разных показаний весов при взвешивании труб различной формы вместе с протекающей через них жидкостью. Рис. III.22 повторяет рис. III.18 с той лишь разницей, что на нем для каждого случая графически построено дополнительное усилие $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$. Непосредственно видно, что это усилие будет наибольшим на рис. III.18, *а*, равным нулю на рис. III.18, *в*, а на рис. III.18, *б* — отличным от нуля, но меньшим, чем на рис. III.18, *а*. Ясно поэтому, что весы покажут наибольший «вес» на рис. III.18, *а*, несколько меньший на рис III.18, *б* и истинный вес трубы вместе с находящейся в ней жидкостью лишь на рис. III.18, *в*.

Представим себе теперь объем W произвольной формы. Вещество (например, жидкость) может «втекать» в него и «вытекать» из него так, что скорость «втекающего» и «вытекающего» вещества (например, жидкости) постоянна и равна соответственно $\boldsymbol{v}_{\text{прих}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ (рис. III.23). Подсчитаем, чему равны в этом случае векторы $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$ и $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}$. Например, для $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$ имеем

$$\boldsymbol{f}_{\text{уход}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}_{\text{уход}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta (M\boldsymbol{v})_{\text{уход}}}{\Delta t}. \tag{93}$$

Но так как рассматривается случай стационарного потока, когда $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ не изменяется во времени, в формуле (93) можно вынести скорость за знак предела и получить

$$\boldsymbol{f}_{\text{уход}} = \boldsymbol{v}_{\text{уход}} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_{\text{уход}}}{\Delta t} = \mu_{\text{уход}} \boldsymbol{v}_{\text{уход}}. \tag{94}$$

Коэффициент

$$\mu_{\text{уход}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_{\text{уход}}}{\Delta t} \tag{95}$$

называется *расходом массы*. Совершенно аналогично можно написать

$$\boldsymbol{f}_{\text{прих}} = \mu_{\text{прих}} \boldsymbol{v}_{\text{прих}}, \tag{96}$$

где

$$\mu_{\text{прих}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_{\text{прих}}}{\Delta t}. \tag{97}$$

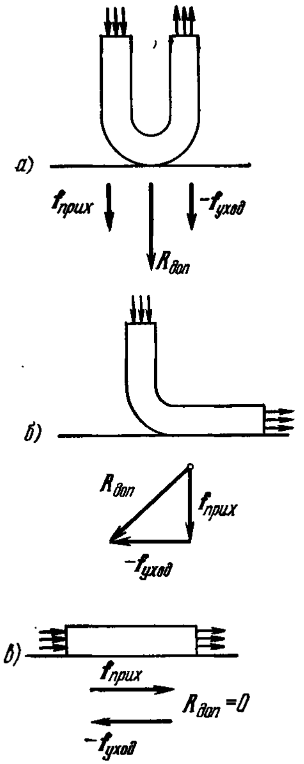

Рис. III.22.

Стационарный поток возможен лишь при условии, что суммарный расход массы (поступающей в объем и уходящей из него) равен нулю, ибо в противном случае происходило бы уменьшение или увеличение массы, находящейся внутри объема, а значит, не были бы соблюдены условия стационарности. Поэтому для стационарного потока

$$\mu_{\text{прих}} = \mu_{\text{уход}} = \mu \tag{98}$$

и дополнительная сила равна

$$\boldsymbol{R}_{\text{доп}} = \mu\,(\boldsymbol{v}_{\text{прих}} - \boldsymbol{v}_{\text{уход}}). \tag{99}$$

Учитывая эту формулу, мы могли бы для определения дополнительной силы геометрически сложить векторы $\boldsymbol{v}_{\text{прих}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ (а не векторы $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}$ и $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$) и затем умножить результат на коэффициент μ, т. е. на расход массы.

Вернемся к рис. III.21 и вновь рассмотрим вопрос о применении законов механики к системе переменного состава, но постоянного объема, имея теперь в виду не теорему об изменении количества движения, а теорему об изменении кинетического момента. Дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к формулам (86) и (87), но рассматривая для системы Σ и W не векторы количества движения, а векторы кинетического момента, подсчитанного относительно какого-либо полюса O (например, относительно начала координат), получаем вместо формул (86) и (87) соответственно формулы

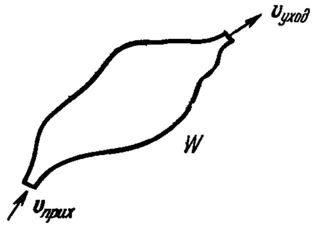

Рис. III.23.

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{OW}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{K}_{O\Sigma}}{dt} + \boldsymbol{M}_{O\,\text{доп}} \tag{100}$$

и

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{OW}}{dt} = \boldsymbol{M}_{O\,\text{внеш}} + \boldsymbol{M}_{O\,\text{доп}}. \tag{101}$$

Здесь

$$\boldsymbol{M}_{O\,\text{доп}} = -\boldsymbol{l}_{O\,\text{уход}} + \boldsymbol{l}_{O\,\text{прих}}, \tag{102}$$

а $\boldsymbol{l}_{O\,\text{уход}}$ и $\boldsymbol{l}_{O\,\text{прих}}$ определяются подобно тому, как ранее (см. формулу (84)) были определены векторы $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$ и $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}$, только вместо расхода и прихода количества движения теперь рассматривается расход и приход кинетического момента соответственно:

$$\boldsymbol{l}_{O\,\text{уход}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{O\,\text{уход}}}{\Delta t}, \quad \boldsymbol{l}_{O\,\text{прих}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{K}_{O\,\text{прих}}}{\Delta t}. \tag{103}$$

Таким образом, для того чтобы применить теорему об изменении кинетического момента относительно какого-либо полюса к системе переменного состава, но постоянного объема, надо к моменту внешних сил относительно того же полюса прибавить дополнительный момент (102).

В случае стационарного протока жидкости ($d\boldsymbol{K}_{OW}/dt = 0$) вместо формулы (92) совершенно аналогично получаем выражение для момента сил, действующих на оболочку объема W,

$$\boldsymbol{M}_{O\,\text{на оболочку}} = \boldsymbol{M}_{O\,\text{объем}} + \boldsymbol{M}_{O\,\text{доп}}, \tag{104}$$

где $\boldsymbol{M}_{O\,\text{объем}}$ — главный момент объемных («полевых») сил, действующих на точки, расположенные в W.

Для неинерциальных систем отсчета вместо формулы (101) имеем

$$\frac{dK_{OW}}{dt} = M_{O\,\text{внеш}} + M_{OJ_{\text{пер}}} + M_{OJ_{\text{кор}}} + M_{O\,\text{доп}}. \tag{105}$$

Рассмотрим теперь пример использования этого соотношения при подвижном объеме W. При этом мы выберем систему отсчета x', y', z', жестко связанную с оболочкой объема W (и, вообще говоря, неинерциальную). В этой системе оболочка W неподвижна и, следовательно, в выражениях для $R_{\text{доп}}$ и $M_{O\,\text{доп}}$ будут фигурировать относительные скорости (скорости относительно системы отсчета x', y', z', жестко связанной с оболочкой W).

Пример. Рассмотрим ротор турбины (рис. III.19), вращающийся относительно оси. В условиях стацинарного протока $dK_{OW}/dt = 0$ и равенство (107) принимает вид

$$M_{O\,\text{внеш}} + M_{OJ\,\text{пер}} + M_{OJ\,\text{кор}} + M_{O\,\text{доп}} = 0. \tag{106}$$

В качестве неинерциальной системы, для которой выписывается это равенство, рассмотрим вращающуюся систему, связанную с ротором турбины, и подсчитаем $M_{OJ_{\text{пер}}}$. Этот момент складывается из двух моментов, порождаемых осестремительным и вращательным ускорениями соответственно.

Осестремительное ускорение в каждой точке проходит через O, и поэтому главный момент соответствующих составляющих переносных сил инерции равен нулю. В случае вращения вокруг оси главный момент тангенциальных сил инерции относительно оси равен $-J\varepsilon$, где J — момент инерции ротора вместе с заполняющей его жидкостью относительно оси вращения[1]).

Проектируя теперь равенство (108) на направление оси ротора, получаем

$$J\varepsilon = M_{O\,\text{внеш}} + M_{O\,\text{доп}} + M_{OJ_{\text{кор}}}, \tag{107}$$

где M_O — момент относительно оси ротора.

Если $M_{OJ_{\text{кор}}}$ мал, например если относительная скорость жидкости невелика, то формула (109) принимает вид

$$J\varepsilon \approx M_{O\,\text{внеш}} + M_{O\,\text{доп}},$$

---

[1]) Моментом инерции системы материальных точек относительно оси называется $\sum m_i r_i^2$, где r_i — расстояние i-й точки до оси; подробности можно найти в гл. V.

где дополнительный момент $M_{O\,\text{доп}}$ подсчитывается в принятой неинерциальной системе, т. е. при выборе в качестве $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ скоростей жидкости относительно ротора.

Таким образом, дополнительный момент, возникающий за счет протока жидкости через межлопаточные пространства турбины, вызывает ускорение ротора и в том случае, когда $M_{O\,\text{внеш}}=0$. При равномерном вращении $\varepsilon=0$ и равенство

$$M_{\text{доп}}=-M_{\text{внеш}}$$

определяет момент, которым нагружен ротор турбины.

Подсчитаем дополнительный момент $M_{\text{доп}}$, возникающий за счет протока жидкости через объем W. С этой целью найдем $\boldsymbol{l}_{\text{уход}}$ и $\boldsymbol{l}_{\text{прих}}$. Кинетические моменты частиц материи, входящих в этот объем и выходящих из него, соответственно равны

$$\Delta\boldsymbol{K}_{\text{прих}}=\boldsymbol{r}_1\times m_1\boldsymbol{v}_1,\quad \Delta\boldsymbol{K}_{\text{уход}}=\boldsymbol{r}_2\times m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{108}$$

В связи с тем, что радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ и скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ постоянны, получаем

$$\boldsymbol{l}_{\text{прих}}=\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1\frac{dm_1}{dt}=\mu_1(\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1),\quad \boldsymbol{l}_{\text{уход}}=\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{v}_2\frac{dm_2}{dt}=$$
$$=\mu_2(\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{v}_2). \tag{109}$$

Предположим теперь, что скорость $\boldsymbol{v}_1$ жидкости на входе в объем W между двумя лопатками ротора постоянна по величине, одинакова вдоль всего входного сечения и составляет угол α_1 с радиусом-вектором, проведенным к середине входного сечения (рис. III.24). Аналогично скорость на выходе из объема W равна $\boldsymbol{v}_2$, одинакова вдоль всего выходного сечения и составляет угол α_2 с радиусом-вектором, проведенным к середине выходного сечения.

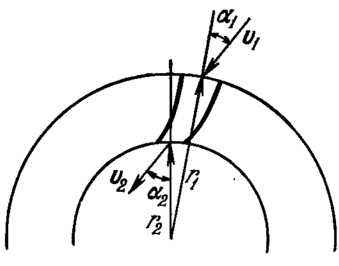

Рис. III.24.

Векторы всех моментов направлены по одной и той же прямой, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. III.19) и проходящей через точку O. Поэтому можно рассматривать лишь скалярные величины $l_{\text{уход}}$ и $l_{\text{прих}}$ с учетом знаков; тогда

$$l_{\text{прих}}=\mu_1 r_1 v_1\sin\alpha_1,\quad l_{\text{уход}}=\mu_2 r_2 v_2\sin\alpha_2.$$

Для стационарного потока $\mu_1=\mu_2=\mu$, и поэтому модуль дополнительного момента равен

$$M_{O\,\text{доп}}=\mu\,(v_1 r_1\sin\alpha_1-v_2 r_2\sin\alpha_2). \tag{110}$$

Пусть теперь ротор турбины с произвольным числом лопаток заторможен, и пусть суммарное пространство между всеми лопатками составляет объем W. Если поток стационарен, скорости $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ во всех межлопаточных пространствах одинаковы по модулю и для всех межлопаточных пространств углы α_1 и α_2 одинаковы, то формула (110) с обратным знаком определяет дополнительный тормозящий момент, который должен быть приложен сверх момента $M_{O\,\text{объем}}$ для того, чтобы удержать ротор турбины от вращения. Этот момент, добавленный к $M_{O\,\text{объем}}$, определяет угловое ускорение ротора. Формула (110) была получена Эйлером и называется *турбинной формулой Эйлера*.

2. Реактивное движение. Рассмотрим объем W, движущийся поступательно относительно инерциальной системы x, y, z так, что траектории всех его точек являются прямыми, и снова будем считать проток стационарным. Пусть главный вектор внешних сил $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}$ и скорости $\boldsymbol{v}_{\text{прих}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ притока и оттока вещества направлены вдоль траектории движения (рис. III.25). Неинерциальную систему координат x', y', z' закрепим на оболочке объема W, так что в этой системе W неподвижен. Поэтому в системе W верно соотношение (88). В рассматриваемом случае $\boldsymbol{J}_{\text{кор}}=0$ (подвижная система x', y', z' движется поступательно), $\boldsymbol{J}_{\text{пер}}=-M\dot{\boldsymbol{v}}$, где $\dot{\boldsymbol{v}}$ — ускорение движения объема W относительно инерциальной системы x, y, z. Поскольку в силу стационарности процесса $d\boldsymbol{Q}_W/dt=0$, формула (106) принимает вид

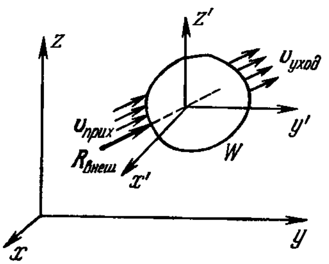

Рис. III.25.

$$M\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}+\boldsymbol{R}_{\text{доп}} \tag{111}$$

(в действительности здесь фигурируют скалярные величины, ибо по условию $\dot{\boldsymbol{v}}$, $\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}$ и $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$ направлены по одной прямой — траектории движения).

В формуле (111) M — масса, заключенная в объеме W, — постоянна по условию стационарности потока, а дополнительная сила равна

$$\boldsymbol{R}_{\text{доп}}=-\boldsymbol{f}_{\text{уход}}+\boldsymbol{f}_{\text{прих}}=\mu\,(\boldsymbol{v}_{\text{прих}}-\boldsymbol{v}_{\text{уход}}),$$

где скорости $\boldsymbol{v}_{\text{прих}}$ и $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ берутся по отношению к системе отсчета, связанной с объемом W.

Таким образом, *в прямолинейном поступательном движении оболочка W, через которую осуществляется стационарный проток вещества, движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе вещества в объеме W и на которую* *помимо приложенных сил действовала бы еще дополнительная сила* $\boldsymbol{R}_{\text{доп}}$.

В заключение этого параграфа рассмотрим движение ракеты на активном прямолинейном участке траектории (рис. III.26). В качестве объема W рассмотрим объем, ограниченный внешней оболочкой корпуса ракеты и срезом сопла. Предположим, что процесс горения топлива протекает достаточно медленно и что поэтому на интересующем нас интервале времени скорость движения центра инерции масс, расположенных внутри ракеты, относительно ее корпуса пренебрежимо мала по сравнению со скоростью самой ракеты. Рассматривая разгон ракеты на прямолинейном активном участке траектории, пренебрежем вращением ракеты относительно собственных осей, т. е. предположим, что ракета движется поступательно.

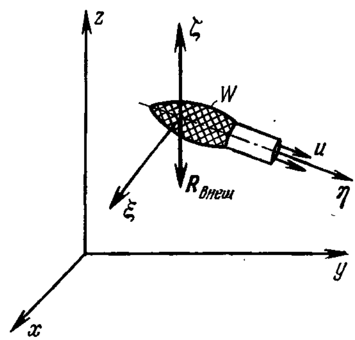

Рис. III.26.

Условия внутри корпуса ракеты заведомо нестационарны хотя бы потому, что для ракеты $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}=0$, а $\boldsymbol{f}_{\text{уход}}\neq 0$ и, следовательно, $\boldsymbol{f}_{\text{прих}}\neq\boldsymbol{f}_{\text{уход}}$. Однако в интервале времени, малом по сравнению с периодом сгорания всего топлива, можно считать условия внутри ракеты мало отличающимися от стационарных (это утверждение называют «гипотезой квазистационарности»). Приняв эту гипотезу, можно воспользоваться формулой (111). Для ракеты

$$\boldsymbol{R}_{\text{доп}}=-\mu\boldsymbol{v}_{\text{уход}},$$

где $\boldsymbol{v}_{\text{уход}}$ — скорость газов, вылетающих из сопла, относительно корпуса ракеты, а $\mu=\mu_{\text{уход}}=-dM/dt$, так что

$$\boxed{M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{R}_{\text{внеш}}+\frac{dM}{dt}\boldsymbol{v}_{\text{уход}}.} \tag{112}$$

Это уравнение называется *уравнением Мещерского*. Оно описывает поступательное движение ракеты на прямолинейном активном участке траектории.

Если разгон ракеты происходит в условиях, когда можно пренебречь воздействием на нее внешних сил (например, вдали от каких-либо центров тяготения и вне атмосферных оболочек), и если $v_{\text{уход}}=\text{const}=u$, то формулу (112) можно переписать так:

$$M\frac{dv}{dt}=-u\frac{dM}{dt}, \quad \text{или} \quad M\,dv=-u\,dM$$

(знак минус стоит здесь потому, что при разгоне ракеты скорости $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ направлены противоположно).

В этом уравнении переменные разделяются: $dv = -u\,(dM/M)$, и, проинтегрировав обе части этого равенства от значения переменных в некоторый начальный момент до их значения в конечный момент, когда заканчивается горение топлива, мы получим

$$v_к - v_н = -u\,(\ln M_к - \ln M_н),$$

или

$$\boxed{v_к = v_н + u \ln \frac{M_н}{M_к}.} \qquad (113)$$

Формула (113) называется *формулой Циолковского.*

Глава IV

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ (УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА)

§ 1. Общие представления о ковариантных формах уравнений движения

Движение системы, состоящей из N материальных точек, в инерциальной системе отсчета, в соответствии со вторым законом Ньютона, описывается дифференциальными уравнениями

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{1}$$

где силы $\boldsymbol{F}_i$ — функции от радиусов-векторов точек $\boldsymbol{r}$, скорости $\dot{\boldsymbol{r}}$ и времени t.

Введем прямоугольную декартову систему координат и спроектируем уравнения (1) на оси этой системы; тогда система дифференциальных уравнений, определяющих изменение декартовых координат точек во времени, представится в виде

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix}, \quad m_i\ddot{y}_i = F_{iy}, \quad m_i\ddot{z}_i = F_{iz} \qquad (i=1,\ \ldots,\ N). \tag{2}$$

Если была бы выбрана не прямоугольная, а какая-либо косоугольная система прямолинейных координат, то дифференциальные уравнения в скалярной форме (в проекциях на оси) по-прежнему имели бы вид (2), но функции F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}, стоящие в правых частях этих уравнений, соответственно изменились бы. Таким образом, при замене прямоугольной системы на косоугольную меняется вид функций, входящих в уравнения (2), но не меняется вид этих уравнений.

Разумеется, уравнения (1) можно заменить соответствующими скалярными соотношениями, выписанными в цилиндрических, сферических или каких-либо иных координатах (см. гл. I). Для этого достаточно выразить радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, например, через цилиндрические координаты, вычислить вторую производную от радиуса-вектора и произвести соответствующие преобразования аргументов функций $\boldsymbol{F}_i$. Конечно, уравнения, которые получаются непосредственно в результате таких подстановок, уже не будут представлены в форме, алгебраически разрешенной относительно вторых производных «новых», например, цилиндрических координат и, следовательно, по внешнему виду не будут совпадать с уравнениями (2). Кроме того, выведенные таким образом уравнения в цилиндрических и сферических координатах будут отличаться одни от других.

До сих пор речь шла о преобразованиях координат, не зависящих от времени. Рассмотрим теперь переход от декартовой системы координат x, y, z к другой декартовой системе x', y', z', равномерно движущейся относительно нее. Если в момент $t=0$ эти системы совпадали, то

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}t,$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ — радиусы-векторы точки в системе x, y, z и x', y', z' соответственно; $\boldsymbol{v}=\text{const}$. Поэтому $\dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{v}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}'=\ddot{\boldsymbol{r}}$.

Если система x, y, z инерциальна, то уравнение (1) в координатах x', y', z' имеет вид

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}'_i=\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{v}t,\ \dot{\boldsymbol{r}}'-\boldsymbol{v},\ t)=\boldsymbol{F}'_i(\boldsymbol{r}',\ \dot{\boldsymbol{r}}',\ t), \tag{3}$$

т. е. при таком преобразовании координат не изменился вид уравнения, но изменился лишь вид функций $\boldsymbol{F}_i$, входящих в его правую часть.

Предположим теперь, что «новая» подвижная система координат не является декартовой. Ограничимся пока простейшим случаем — одной материальной точкой.

Пусть преобразование координат задано формулами

$$\begin{aligned} x&=f(x',\ y',\ z';\ t),\\ y&=\varphi(x',\ y',\ z';\ t),\\ z&=\psi(x',\ y',\ z';\ t); \end{aligned} \tag{4}$$

тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x'}\dot{x}'+\frac{\partial f}{\partial y'}\dot{y}'+\frac{\partial f}{\partial z'}\dot{z}',\\ \dot{y}&=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\dot{x}'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\dot{y}'+\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\dot{z}',\\ \dot{z}&=\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial x'}\dot{x}'+\frac{\partial \psi}{\partial y'}\dot{y}'+\frac{\partial \psi}{\partial z'}\dot{z}' \end{aligned} \tag{5}$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{x}&=\frac{\partial f}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial f}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial f}{\partial z'}\ddot{z}'+(*),\\ \ddot{y}&=\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\ddot{z}'+(*),\\ \ddot{z}&=\frac{\partial \psi}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial \psi}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial \psi}{\partial z'}\ddot{z}'+(*), \end{aligned} \tag{6}$$

где $(*)$ — совокупность слагаемых, не содержащих вторых производных ($\ddot{x}'$, $\ddot{y}'$, $\ddot{z}'$).

Выражая в уравнениях (2) при $N=1$ старые переменные x, y, z через новые переменные x', y', z' при помощи формул (4)—(6), получаем

$$
\begin{aligned}
m\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial f}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial f}{\partial z'}\ddot{z}'\right)&=F_{x'},\\
m\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial \varphi}{\partial z'}\ddot{z}'\right)&=F_{y'},\\
m\left(\frac{\partial \psi}{\partial x'}\ddot{x}'+\frac{\partial \psi}{\partial y'}\ddot{y}'+\frac{\partial \psi}{\partial z'}\ddot{z}'\right)&=F_{z'},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$ — некоторые функции от новых координат x', y', z', новых скоростей $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$ и времени. По виду уравнения (7) существенно отличаются от уравнений (2) хотя бы потому, что уравнения (7) в отличие от (2) не разрешены алгебраически относительно старших производных.

Эти примеры поясняют понятие «ковариантная форма записи уравнений движения», введенное в гл. II: *форма записи уравнений называется ковариантной по отношению к некоторому семейству преобразований, если при любом преобразовании из этого семейства форма записи уравнений не меняется, а меняются лишь содержащиеся в этой записи функции от новых (преобразованных) координат, первых производных и времени.*

Если иметь в виду преобразования вида (4), то этому определению удовлетворяют уравнения движения в форме (7) с соответствующим общим выражением функций $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$. Однако такая ковариантная форма уравнений движения неудобна, потому что она содержит для каждой точки 12 функций, меняющих свой вид при преобразовании — ими являются функции $F_{x'}$, $F_{y'}$, $F_{z'}$, и девять частных производных в правых частях уравнений (7), т. е. $12N$ функций для системы из N точек. Кроме того, функции, входящие в уравнения (7), лишены механического смысла.

Далее в этой главе будет введена более удобная запись уравнений движения, ковариантная по отношению к произвольным точечным преобразованиям[1]) вида (4). Эта запись для системы из N точек будет содержать только $3N+1$ функций, меняющихся при преобразовании координат; выражения для этих функций сравнительно просты, и они имеют ясный механический смысл. Более того, в важном случае движения в произвольном потенциальном (в том числе и в нестационарном) поле уравнения, описывающие систему из N точек, будут содержать лишь одну такую функцию.

[1]) Преобразования называются точечными, если описывающие их формулы содержат только координаты точек и время и не содержат производных от координат и если время при этом не преобразуется. Случай, когда преобразуются не только координаты, но и время, будет рассмотрен далее (см. гл. VII).

Для того чтобы в удобной форме получить эти уравнения, представим себе, что мы выбрали некоторую произвольную систему координат, т. е. выбрали три независимых числа таких, что они однозначно определяют положение точки в пространстве. В этих координатах положения N точек определяются $3N$ числами — значениями координат всех точек. Сохраняя обозначения x_i, y_i, z_i для декартовых координат, введем обозначения q_1, q_2, ..., q_n, где $n=3N$, для новых координат (цилиндрических, сферических или каких-либо иных) и будем условно называть декартовы координаты «старыми», а координаты q_1, ..., q_n — «новыми». Тогда в силу того, что новые координаты полностью определяют положение всех точек системы, декартовы координаты точек являются функциями новых координат и, быть может, времени:

$$
\begin{aligned}
x_i &= f_i(q_1, \ldots, q_n;\ t),\\
y_i &= \varphi_i(q_1, \ldots, q_n;\ t),\\
z_i &= \psi_i(q_1, \ldots, q_n;\ t),
\end{aligned} \tag{8}
$$

т. е.

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, \ldots, q_n;\ t). \tag{9}$$

Назовем преобразование (8) *стационарным*[1]), если все функции f_i, φ_i, ψ_i не зависят явно от t.

Дифференцируя выражения (8) с учетом того, что q_j — независимые переменные, получаем соотношения между дифференциалами старых и новых координат

$$
\begin{aligned}
dx_i &= \frac{\partial f_i}{\partial t}\,dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,dq_j,\\
dy_i &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\,dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\,dq_j,\\
dz_i &= \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\,dt + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}\,dq_j
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

---

[1]) В терминах, использованных в гл. I, не зависящие явно от времени (стационарные) преобразования координат означают переход от одной системы координат к другой в пределах той же «геометрической твердой среды»; зависящие явно от времени преобразования означают переход к некоторой системе координат, выбранной в другой «геометрической твердой среде», движущейся относительно «старой» среды.

или

$$\dot{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,$$
$$\dot{y}_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \tag{11}$$
$$\dot{z}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_i}\dot{q}_j$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Введем в рассмотрение два знака дифференциала, обозначая их буквами d и δ. Символ d будет использоваться для обозначения обычного, общепринятого дифференциала; под операцией же вычисления $\delta F(q_1, \ldots, q_n, t)$ понимается вычисление дифференциала функции F при предположении, что t, явно содержащееся под знаком функции F, заменено константой, т. е.

$$\delta F = dF - (\partial F/\partial t)\,dt.$$

Таким образом, в соответствии с формулой (8)

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\,dq_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\,dq_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}\,dq_j. \tag{12}$$

В случае, когда преобразование стационарно, формулы (10) и (12) совпадают.

Для независимых переменных символы d и δ имеют один и тот же смысл; поэтому далее в этой книге для дифференциалов независимых переменных q_i, t и т. д. будут использоваться как обозначения dq_i, dt и т. д., так и обозначения δq_i, δt и т. д.

Хотя в системах, которые мы сейчас рассматриваем, n может быть равно лишь $3N$, мы нигде далее в этой главе этим обстоятельством пользоваться не будем. Это позволит в конце главы сделать важное обобщение полученной ковариантной формы уравнений движения на системы с механическими связями. Имея в виду такое обобщение, мы будем считать, что n не обязательно равно $3N$, а удовлетворяет неравенству $n \leqslant 3N$, причем если $n < 3N$, то среди $3N$ функций f_i, φ_i, ψ_i $(i = 1, \ldots, N)$ содержится по крайней мере n независимых функций. Поскольку неравенство $n \leqslant 3N$ нестрогое (равенство допускается), все дальнейшие рассуждения относятся к интересующему нас сейчас случаю перехода от декартовых к «новым» координатам для системы без механических связей.

Для упрощения записи условимся далее везде, где это не может вызвать недоразумений, в суммах вида $\sum_{j=1}^{n}$ пределы суммирования опускать, т. е. вместо $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j$ писать просто $\sum \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j$.

§ 2. Вывод уравнений Лагранжа

Прежде чем приступить к выводу ковариантной записи уравнений движения — уравнений Лагранжа, получим два вспомогательных равенства.

Дифференцируя равенство (9) по t, получаем

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \sum \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}. \tag{13}$$

Рассматривая $\dot{q}_j$ как независимые переменные и дифференцируя по ним равенство (13), получаем первое вспомогательное соотношение

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{14}$$

Обратимся снова к формуле (13) и выпишем частную производную от левой и правой части этого равенства по q_k

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \, \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \, \partial q_k}. \tag{15}$$

В силу формулы (9) частная производная от радиуса-вектора по q_k также является функцией всех «новых» координат $q_1, \ldots, q_k$ и t.

Рассмотрим теперь полную производную по времени от этой частной производной $\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j \, \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_i}{\partial t \, \partial q_k}. \tag{16}$$

Правые части формул (15) и (16) совпадают; следовательно, должны совпадать и левые их части:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n). \tag{17}$$

Формула (17) и является вторым искомым вспомогательным соотношением.

Приступим теперь к выводу уравнений Лагранжа. Если «старая» система отсчета с декартовыми координатами x, y, z инерциальна, то в ней верен второй закон Ньютона в его обычной записи

$$m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \boldsymbol{F}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{18}$$

Выразим, используя соотношение (13), все $\boldsymbol{v}_i$ через новые координаты, их производные и время, подставим полученные функции $\boldsymbol{v}_i(q, \dot{q}, t)$ в равенства (18), скалярно умножим каждое i-е из этих равенств на частную производную $\partial \boldsymbol{r}_i/\partial q_j$ и сложим результаты:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i(q, \dot{q}, t)}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{19}$$

Полагая $j = 1, 2, \ldots, n$, можно выписать n таких равенств.

Обозначим через Q_j скалярные функции в правых частях равенств (19):

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Механический смысл функций Q_j будет выяснен далее.

Левые части равенств (19) запишем так:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}. \tag{21}$$

Воспользовавшись этой записью и полученными выше вспомогательными соотношениями (14) и (17), перепишем равенства (19) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} = Q_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

В этих равенствах сумма

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

совпадает с выражением для кинетической энергии T системы, записанной в «новых» координатах. Поэтому окончательно получаем

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).} \tag{22}$$

Левые части уравнений (22) и их вывод сходны с правыми частями равенств (17) из гл. I и их выводом. Это сходство не случайно. Оно связано со следующей интерпретацией уравнений (22).

Введем в рассмотрение $3N$-мерное пространство x_i, y_i, z_i $(i=1, \ldots, N)$. Каждому положению системы из N точек соответствует одна точка в этом $3N$-мерном пространстве.

Если в равенстве (9) зафиксировать все q_j, кроме какой-либо одной координаты q_j^*, и изменять эту выделенную координату q_j^*, то в рассматриваемой точке $3N$-мерного пространства будет построена q_j^*-кривая, а касательная к ней будет осью q_j^*. Действуя совершенно так же, как и в гл. I для трехмерного пространства, можно теперь с каждой точкой $3N$-мерного пространства связать n осей q_j. Дословно повторяя вывод из гл. I (стр. 19, 20), можно получить вновь формулу (17) из гл. I, но теперь в ней надо индекс i всюду заменить на j, при определении $v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ считать $\boldsymbol{v}$ $3N$-мерным вектором $\boldsymbol{v}=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_N\end{Vmatrix}$, а в коэффициентах Ламе $H_i=\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right|$ считать $\boldsymbol{r}$ $3N$-мерным вектором, $\boldsymbol{r}=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{r}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{r}_N\end{Vmatrix}$. Формула (17) из гл. I определяет тогда проекции $3N$-мерного вектора ускорения $\begin{Vmatrix}\boldsymbol{w}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{w}_N\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\ddot{\boldsymbol{r}}\\ \vdots\\ \ddot{\boldsymbol{r}}_N\end{Vmatrix}$ на ось q_j для этого $3N$-мерного случая.

Если представить второй закон Ньютона в $3N$-мерной записи

$$\begin{Vmatrix}m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1\\ \vdots\\ m_N\ddot{\boldsymbol{r}}_N\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{F}_N\end{Vmatrix}$$

и, умножив его скалярно на орт $\boldsymbol{\tau}_j=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\Big/\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j}\right|$ оси q_j, спроектировать его на ось q_j, то, воспользовавшись указанным выше обобщением формулы (17) гл. I, легко получить уравнения (22). В этом смысле уравнения (22) представляют собой просто запись второго закона Ньютона в проекциях на оси q_j.

Уравнения (22) называются *уравнениями Лагранжа*[1]). Число таких уравнений совпадает с числом новых координат. В рассматриваемом здесь случае (системы без механических связей; подробнее см. далее) оно в точности равно $3N$, т. е. числу уравнений Ньютона, которые можно выписать для этой же материальной системы, если бы рассматривалась декартова система координат. Но в отличие от уравнений Ньютона уравнения Лагранжа (22) уже не связаны с декартовой системой координат x, y, z и выписаны в произвольных независимых «новых» координатах $q_1, \ldots, q_n$.

Уравнения Лагранжа содержат $n+1$ функций. Этими функциями являются Q_j, $j=1, \ldots, n$, и кинетическая энергия T. Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа, нужно выразить эти функции через «новые» координаты $q_1, \ldots, q_n$, производные от этих координат и время. Таким образом, уравнения (22) выписываются совершенно одинаково для любой системы координат, и различие в выборе координат сказывается лишь на виде $n+1$ функций, входящих в эти уравнения. Поэтому *уравнения Лагранжа ковариантны относительно любого точечного преобразования координат.*

Выясним механический смысл величин Q_j:

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right), \qquad (23)$$

где x_i, y_i и z_i являются функциями q_j и t в силу равенств (8).

Умножая каждое из этих равенств на соответствующее δq_j и складывая все такие равенства, получаем

$$\sum_j Q_j \delta q_j = \sum_j \left[\sum_i \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j =$$
$$= \sum_i \left[F_{ix} \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + F_{iy} \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + F_{iz} \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] =$$
$$= \sum_i (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i. \qquad (24)$$

Сумма в правой части этого равенства равна элементарной работе всех сил системы при предположении, что время t «заморожено», т. е. что при подсчете $d\boldsymbol{r}_i$ считается $t = \text{const}$ и поэтому $d\boldsymbol{r}_i$ заменены на $\delta \boldsymbol{r}_i$.

Всюду ранее, говоря об элементарной работе, мы имели в виду работу сил, приложенных к точкам системы, при бесконечно малых

[1]) Обычно эти уравнения называются уравнениями Лагранжа второго рода. Здесь и далее мы называем их просто уравнениями Лагранжа, так как уравнения Лагранжа первого рода в этой книге не рассматриваются.

перемещениях этих точек *вдоль их траекторий*. Иначе говоря, дифференциалы $d\boldsymbol{r}_i$ были не произвольными бесконечно малыми приращениями векторов $\boldsymbol{r}_i$, а удовлетворяли следующему условию: конец вектора $\boldsymbol{r}_i$ описывает траекторию i-й точки. В данной главе понятие элементарной работы имеет иной смысл: здесь мы предполагаем, что $d\boldsymbol{r}_i$ — независимые бесконечно малые приращения радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_i$, не ограниченные условием движения точки вдоль траектории. Элементарная работа всех сил системы, подсчитанная для произвольных независимых приращений $d\boldsymbol{r}_i$ при $t = \text{const}$, называется *виртуальной работой* и обозначается $\delta A_{\text{в}}$. Поэтому формулу (24) можно записать так:

$$\delta A_{\text{в}} = \sum_j Q_j \delta q_j. \tag{25}$$

Выражение (25) по своей структуре напоминает исходное определение элементарной работы, но только вместо дифференциалов радиусов-векторов в нем стоят дифференциалы «новых» координат δq_j, а вместо сил — множители Q_j; кроме того, суммирование ведется не по всем точкам системы, а по всем «новым» координатам. Таким образом, виртуальную работу всех сил, действующих на систему, можно выразить в «новых» координатах, но при этом роль сил играют множители Q_j, определенные формулами (23). Поэтому множители Q_j называются *обобщенными силами*.

Сделаем теперь несколько замечаний по поводу понятия обобщенной силы.

Замечание 1. Если в качестве «новых» координат взять декартовы координаты, т. е. положить

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = z_1, \ \ldots, \ q_{n-2} = x_N, \quad q_{n-1} = y_N, \quad q_n = z_N,$$

то преобразование (8) будет тождественным преобразованием декартовых координат в себя и, как легко видеть, обобщенные силы в силу формул (23) будут совпадать с проекциями сил на оси:

$$Q_1 = F_{1x}, \ Q_2 = F_{1y}, \ Q_3 = F_{1z}, \ldots, \ Q_{n-2} = F_{Nx}, \ Q_{n-1} = F_{Ny}, \ Q_n = F_{Nz}.$$

Замечание 2. Размерность обобщенной силы, вообще говоря, не совпадает с размерностью силы. Из формулы (25) ясно, что размерность обобщенной силы Q_j равна размерности работы, деленной на размерность координаты q_j. Если координата q_j имеет размерность длины, то обобщенная сила имеет размерность силы. В тех случаях, когда координатой q_j является угол, размерность обобщенной силы совпадает с размерностью момента силы.

Замечание 3. При практическом подсчете обобщенных сил часто бывает проще не пользоваться формулой (23), а использовать тот факт, что новые координаты q являются независимыми, и фиксировать все координаты, кроме какой-либо одной координаты, скажем q_k, а координате q_k дать приращение δq_k положив, таким образом, $\delta q_j = 0$, $j \neq k$ и $\delta q_k \neq 0$. Далее надо подсчитать элементарную работу δA_k всех сил. Тогда в силу формулы (25) $\delta A_k = Q_k \delta q_k$, откуда $Q_k = \delta A_k / \delta q_k$. Давая таким образом поочередно приращение каждой из новых координат (и предполагая при этом, что приращения всех остальных координат равны нулю), можно по очереди подсчитать все обобщенные силы.

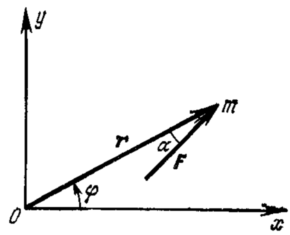

Рис. IV.1.

В качестве примера рассмотрим плоское движение материальной точки в полярной системе координат r, φ (рис. IV.1). В этом случае $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$. Для подсчета обобщенных сил дадим сначала приращения $\delta r = \delta q_1$, $\delta\varphi = 0$. Тогда $\delta A_r = F \cos\alpha \delta r$ и, следовательно,

$$Q_1 = \frac{\delta A_r}{\delta r} = F \cos\alpha = F_r,$$

где F_r — проекция вектора $\boldsymbol{F}$ на направление радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$. Дадим теперь приращения $\delta q_1 = 0$, $\delta q_2 = \delta\varphi$. Тогда $\delta A_\varphi = F \sin\alpha\, r\, d\varphi$ и поэтому

$$Q_2 = \frac{\delta A_\varphi}{\delta\varphi} = Fr \sin\alpha = m_O(\boldsymbol{F}),$$

т. е. обобщенной силой для полярного угла q_2 является модуль момента силы $\boldsymbol{F}$ относительно начала координат O.

Непосредственно ясно, что всегда, когда обобщенная координата q является плоским углом, соответствующая сила Q будет проекцией главного момента на ось, перпендикулярную плоскости угла q. Действительно, элементарная работа сил системы при повороте вокруг оси равна произведению элементарного угла поворота на сумму моментов всех приложенных сил относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой происходит поворот.

Замечание 4. Рассмотрим теперь случай, когда все силы потенциальны. Это означает существование такой функции П от декартовых координат всех точек системы и, быть может, t, что

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \quad (i = 1, \ldots, N). \quad (26)$$

Подставляя в (23) выражения (26), получаем

$$Q_j = -\sum_i \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right). \quad (27)$$

Заменим в П аргументы x_i, y_i, z_i на $f_i(q, t)$, $\varphi_i(q, t)$, $\psi_i(q, t)$ соответственно[1]) и обозначим через $V(q, t)$ функцию от всех q и t, которая получится в результате такой замены. Эту функцию $V(q, t)$ мы будем называть *потенциалом*. Сразу видно, что сумма в выражении (27) совпадает с частной производной $\partial V/\partial q_j$. Поэтому всегда, когда силы $\boldsymbol{F}_i$, $i=1, \ldots, N$, потенциальны, существует функция $V(q, t)$ от «новых» координат q и t, такая, что

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{28}$$

Иначе говоря, *если исходные силы потенциальны, то и обобщенные силы являются потенциальными.*

«Новая» потенциальная энергия V может зависеть не только от «новых» координат q, но и от времени t даже в том случае, когда «исходная» потенциальная энергия П не зависит явно от t (т. е. когда система является консервативной). Такая ситуация может возникнуть при преобразованиях (8), содержащих t в явной форме. «Новая» потенциальная энергия V заведомо не будет зависеть явно от t, если выполнены два условия: исследуемая система консервативна и t не входит явно в формулы преобразования координат (8).

Вернемся к уравнениям Лагранжа (22) и рассмотрим случай, когда движение изучаемой системы происходит в потенциальном поле и все силы потенциальны. Для систем такого рода, как указывалось выше, все обобщенные силы также потенциальны, т. е. для них имеют место равенства (28). Подставляя в уравнения Лагранжа (22) выражения (28) для обобщенных сил, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}, \qquad j=1, \ldots, n.$$

В связи с тем, что функция V зависит только от «новых» координат q и t и не зависит от «новых» скоростей $\dot{q}$, эти уравнения могут быть переписаны следующим образом:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j=1, \ldots, n,} \tag{29}$$

где

$$\boxed{L = T - V.} \tag{30}$$

[1]) Запись $f(q, t)$ обозначает $f(q_1, \ldots, q_n, t)$. Аналогичная сокращенная форма записи будет использоваться и далее; отсутствие индекса у q означает совокупность всех или некоторых переменных q_i с индексами $1, 2, \ldots, n$.

Функция $L(q, \dot{q}, t)$, равная разности кинетической и потенциальной энергии системы после преобразования их к «новым» координатам, является функцией «новых» координат, их производных и, быть может, времени. Функция эта носит название *функции Лагранжа*, *лагранжиана* или *кинетического потенциала* системы. Таким образом, в случае движения в потенциальных полях уравнения Лагранжа имеют более простой вид (29) и содержат только одну функцию — лагранжиан системы, вид которой зависит от выбора системы координат.

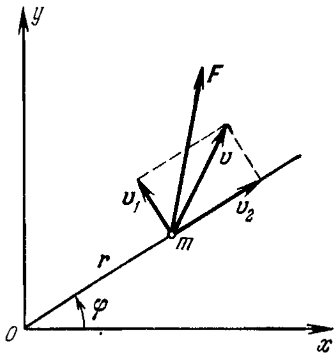

Рис. IV.2.

Рассмотрим теперь случай, когда система движется в потенциальном поле и, кроме того, находится под действием непотенциальных сил. В этом случае, в силу линейности всех операций, с которыми связан подсчет обобщенных сил Q_j, последние можно представить как сумму двух слагаемых

$$Q_j = Q_j^* + Q_j^{**}, \tag{31}$$

где $Q_j^* = -\partial V/\partial q_j$ — потенциальные части обобщенных сил, определяемые формулами (28), а Q_j^{**} — непотенциальные части обобщенных сил.

Подставляя выражения (31) в правые части уравнений (22), получаем

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{**} \qquad (j = 1, \ldots, n),} \tag{32}$$

где функция L по-прежнему определяется формулой (30).

Для того чтобы выписать уравнения Лагранжа для некоторой конкретной системы, нужно произвести следующие операции.

1. Выбрать систему независимых координат $q_1, \ldots, q_n$, в которых хотят записать уравнения движения.

2. Найти обобщенные силы так, как это было описано в предыдущем параграфе. Если исходные силы F_i были функциями координат точек системы или их скоростей, то при вычислении обобщенных сил нужно выразить декартовы координаты точек и их производные через «новые» координаты q_i и их производные с помощью формул (8) и (11).

3. Вычислить кинетическую энергию системы как функцию «новых» координат q_i, скоростей $\dot{q}_i$ и, быть может, t. Чтобы найти

ее, часто оказывается удобным вычислить сначала кинетическую энергию системы в декартовых координатах, а затем перейти от декартовых координат и их производных к «новым» координатам, используя уравнения преобразования (8). При этом дифференцирование осуществляется по формулам (11), т. е. учитывается зависимость и от явно входящего времени.

4. Произвести указанные в формулах (22) частное и полное дифференцирование, т. е. подставить полученные выше выражения для кинетической энергии и обобщенных сил в уравнения Лагранжа.

Если движение происходит в потенциальном поле, надо не вычислять обобщенные силы, а составить выражение для потенциальной энергии системы, и затем, используя формулы (8), подставить в него декартовы координаты точек как функции «новых» координат. После этого надо найти кинетическую энергию так, как это было указано выше, и, снова выразив декартовы координаты и их производные через «новые» координаты, выписать лагранжиан, т. е. разность кинетической и потенциальной энергий. Найденный таким образом лагранжиан подставляется в уравнения (29).

Указанную выше последовательность действий, позволяющую для любой системы координат, действуя стандартным образом, выписать уравнения движения, называют иногда *лагранжевым формализмом.*

Рассмотрим простой пример составления уравнений Лагранжа. Составим уравнение плоского движения материальной точки m в полярных координатах r, φ (рис. IV.2). В данном случае

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi.$$

Обобщенные силы для этого случая (см. выше) равны

$$Q_1 = F_r, \quad Q_2 = m_O(\boldsymbol{F}). \tag{33}$$

Определим теперь кинетическую энергию системы (см. рис. IV.2)

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}.$$

Выражая скорости v_1 и v_2 через полярные координаты, получаем

$$v_1 = \dot{r} = \dot{q}_1, \quad v_2 = r\dot{\varphi} = q_1\dot{q}_2,$$

поэтому кинетическая энергия системы в «новых» (в данном примере в полярных) координатах равна

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2\right).$$

Подставив это выражение кинетической энергии и выражения обобщенных сил (33) в уравнения Лагранжа (22), после выполнения частного и полного дифференцирования получим уравнение движения рассматриваемой материальной точки под действием силы F в полярных координатах:

$$m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 = F_r,$$
$$mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 = m_O(\boldsymbol{F}).$$

Конечно, эти уравнения можно было бы получить непосредственно из уравнений (1) или (2), выписанных для плоского движения материальной точки; здесь они получены с помощью стандартной процедуры — лагранжева формализма.

Предположим теперь, что рассматриваемое движение материальной точки происходит в поле тяготения с центром («Солнцем»), расположенным в начале координат. В этом случае потенциальная энергия выражается формулой (см. гл. III)

$$V = -\frac{\alpha}{r} = -\frac{\alpha}{q_1},$$

и поэтому лагранжиан имеет вид

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + q_1^2\dot{q}_2^2) + \frac{\alpha}{q_1}.$$

Подставляя это выражение в формулы (29) и выполняя частное и полное дифференцирование, получаем окончательно уравнения плоского движения материальной точки в центральном поле тяготения:

$$m\ddot{q}_1 - mq_1\dot{q}_2^2 + \frac{\alpha}{q_1^2} = 0,$$
$$mq_1^2\ddot{q}_2 + 2mq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 = 0.$$

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание. При переходе от какой-либо системы отсчета, например от декартовых координат, введенных в некоторой «геометрической твердой среде» (см. гл. I), к другой системе координат, выбранной в этой же «среде» (либо в любой иной «геометрической твердой среде», движущейся относительно исходной), всегда можно выписать конкретные формулы преобразования вида (9). Обратное утверждение не верно: в нестационарном случае можно указать преобразования (9), которые не удается трактовать как переход к некоторой новой системе отсчета, одной и той же для всех точек системы[1]).

---

[1]) Так обстоит дело, например, для преобразования

$$x_1 = q_1 + vt, \quad y_1 = q_2, \quad z_1 = q_3,$$
$$x_2 = q_4 - vt, \quad y_2 = q_5, \quad z_2 = q_6$$

при $v = \text{const} \neq 0$.

Сила лагранжева формализма как математического описания состоит, в частности, в том, что он безразличен к тому, почему и каким образом возникли формулы преобразования (9). До тех пор, пока рассматриваются системы без механических связей (см. § 5 этой главы), в задачах механики возникают лишь формулы (9) специального вида — они предопределяются способом, каким в механике вводятся системы отсчета (см. гл. I), но учет этих ограничений не интересен, так как класс возможных преобразований (9) существенно расширяется в случае учета механических связей.

§ 3. Исследование уравнений Лагранжа

С точки зрения классической механики движение системы материальных точек вполне детерминировано. Это значит, что если известно, как изменяются и от чего зависят действующие в системе силы или каковы потенциальные поля, в которых происходит движение, то информация о состоянии системы в некоторый момент вполне определяет все движение в будущем. Этот детерминистский подход четко прослеживается в том случае, когда уравнения движения для системы материальных точек записываются в форме Ньютона (2).

Действительно, если силы, стоящие в правых частях уравнений (2), не зависят от ускорений точек, то система, представленная в форме (2), разрешена относительно старших производных. Для систем такого рода (систем типа Коши) в теории дифференциальных уравнений установлены теоремы существования и единственности решения при заданных начальных данных. Эти теоремы утверждают, что при некоторых нестеснительных для механики ограничениях, наложенных на правые части дифференциальных уравнений, существует решение этих уравнений, причем задание начальных данных — координат q_j и скоростей $\dot{q}_j$, число которых соответствует порядку системы, — полностью определяет это решение, т. е. в нашем случае — последующее движение.

Обратимся теперь к уравнениям Лагранжа в форме (22) (либо в форме (29)). После подстановки в левые части этих уравнений выражений для кинетической энергии T (или лагранжиана L) и соответствующих дифференцирований получаются уравнения, уже не обязательно разрешенные относительно старших производных. Может случиться, что некоторые (или все) из этих уравнений содержат не одну, а несколько (или все) старших производных от обобщенных координат q_j.

Естественно возникает вопрос: всегда ли можно разрешить уравнения Лагранжа относительно старших производных от обобщенных координат q_j, т. е. представить эти уравнения в форме Коши и, следовательно, применить к ним теорему о существовании и единственности решений по начальным данным? Если на этот вопрос будет получен положительный ответ, то это будет означать, что уравнения Лагранжа удовлетворяют тем естественным требованиям детерминированности движения, о которых выше шла речь.

Цель исследования уравнений Лагранжа состоит как раз в том, чтобы показать, что такой детерминизм полностью сохраняется при использовании лагранжева формализма. Чтобы доказать это, нужно выяснить структуру двух основных функций, которые входят в уравнения Лагранжа, — кинетической энергии T и лагранжиана L как функций координат q, скоростей $\dot{q}$ и времени. Эти две функции играют столь важную роль во всем последующем изложении, что выявление их структуры существенно и само по себе.

Начнем с изучения структуры функции T. При исследовании движения в декартовых координатах кинетическая энергия системы материальных точек

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i}{2} \tag{34}$$

является суммой квадратов скоростей v_i с постоянными коэффициентами $m_i/2$. Рассмотрим, как изменится выражение T при переходе к «новым» координатам $q_1, \ldots, q_n$.

Коль скоро выбраны координаты q, все декартовы координаты точек выражаются через эти координаты и, быть может, время. Поэтому радиус-вектор любой точки системы также является функцией координат q и времени,

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q, t).$$

Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$\boldsymbol{v}_i=\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j,$$

что дает

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)^2. \tag{35}$$

Из формулы (35) непосредственно видно, что в выражение для кинетической энергии входят члены, не содержащие $\dot{q}$ (они получаются от возведения в квадрат частной производной от $\boldsymbol{r}_i$ по явно входящему времени), члены, содержащие первые степени $\dot{q}$ (они получаются при подсчете удвоенных произведений указанной выше производной по явно входящему времени на остальные члены, стоящие в формуле (35) под знаком суммы по j), и, наконец, члены, квадратичные относительно $\dot{q}$ (они получаются при возведении в квадрат членов, стоящих в формуле (35) под знаком суммы по j). Таким образом, выражение для кинетической энергии после перехода к «новым» координатам может быть представлено в виде

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{36}$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)^2, \tag{37}$$

$$T_1 = \sum_j \left[\sum_i m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right]\dot{q}_j, \tag{38}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{39}$$

причем в формуле (39)

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}. \tag{40}$$

В силу формул (40) коэффициенты a_{jk}, вообще говоря, являются функциями как координат q_j, так и времени t, потому что от этих переменных зависят $\boldsymbol{r}_i$, а значит, и частные производные, фигурирующие в выражении (40).

Обратим теперь внимание на то, что как в выражении (37), так и в выражении (38) каждый член содержит множитель $\partial\boldsymbol{r}_i/\partial t$, равный нулю, когда преобразование (9) стационарно, т. е, когда все $\boldsymbol{r}_i$ не зависят явно от t. Поэтому в стационарном случае из формул (37) и (38) следует, что T_0 и T_1 равны нулю, а из формулы (40) следует, что коэффициенты a_{jk} в этом случае не зависят от t и являются функциями только координат q_i.

Таким образом, *в стационарном случае, т. е. в случае, когда время не входит явно в формулы* (9), *кинетическая энергия* T *является однородной квадратичной формой относительно* $\dot{q}_i$ *с коэффициентами, зависящими только от координат* q_i.

Рассмотрим теперь структуру лагранжиана L. По определению $L = T - V$. В общем случае

$$L = T_2 + T_1 + [T_0 - V(q,\ t)];$$

в случае, когда преобразования (9) стационарны,

$$L = T_2 - V(q,\ t);$$

если же, кроме того, система является консервативной, то

$$L = T_2 - V(q).$$

Мы докажем теперь теорему, которая по праву может быть названа основной теоремой лагранжева формализма, так как она полностью решает вопрос, поставленный в начале параграфа, —

в какой мере лагранжев формализм обеспечивает определение движения по информации о состоянии системы в некоторый момент. Эта теорема будет играть существенную роль в дальнейшем изложении.

Теорема 1. *Определитель, составленный из коэффициентов $a_{jk}(q, t)$, отличен от нуля при любых q и t:*

$$\det \| a_{jk} \|_{j,\, k=1}^{n} \neq 0. \tag{41}$$

Доказательство. Напомним, что по определению «новые» координаты $q_1, \ldots, q_n$ независимы. Все $3N$ функций

$$x_i = f_i(q, t), \quad y_i = \varphi_i(q, t), \quad z_i = \psi_i(q, t) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

определены в любой момент t, коль скоро заданы q. При $n = 3N$ все эти функции независимы. Если же $n < 3N$, то по предположению (см. стр. 125) среди этих функций содержится n независимых функций. Условие того, что среди этих $3N$ функций содержится n независимых, состоит в том, что ранг матрицы Якоби

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \ldots & \frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{matrix} \right\| \tag{42}$$

равен n. Следовательно, равен n и ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \sqrt{m_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial x_N}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial y_N}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial y_N}{\partial q_n} \\ \sqrt{m_N}\,\frac{\partial z_N}{\partial q_1} & \ldots & \sqrt{m_N}\,\frac{\partial z_N}{\partial q_n} \end{matrix} \right\|, \tag{43}$$

которая отличается от матрицы (42) тем, что все элементы первых трех строк умножены на $\sqrt{m_1}$, следующих трех строк на $\sqrt{m_2}$ и т. д. Введем вектор-столбец $\boldsymbol{u}_i$, компоненты которого совпадают с элементами i-го столбца матрицы (43). Из того факта, что ранг матрицы (43) равен n, сразу следует, что векторы $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ линейно независимы.

Условие линейной независимости n векторов $\boldsymbol{u}_i$ состоит в том, что составленный из них определитель Грама[1]) отличен от нуля, т. е.

$$\det \begin{Vmatrix} \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_n\cdot\boldsymbol{u}_n \end{Vmatrix} \neq 0.$$

Но

$$\boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_k = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial y_i}{\partial q_j}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial z_i}{\partial q_j}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k},$$

т. е. в соответствии с равенством (40)

$$\boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_k = a_{jk}.$$

Поэтому

$$\det\|a_{jk}\|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0.$$

Теорема доказана.

Вернемся теперь к уравнениям Лагранжа в форме (22) (все дальнейшее верно также и для уравнений Лагранжа, записанных для движений в потенциальных полях в форме (29)).

Вспоминая, что в любом случае кинетическая энергия может быть представлена в виде (36), т. е. в виде суммы форм нулевой, первой и второй степени от $\dot{q}_j$, представляем левую часть уравнений Лагранжа (22) в виде суммы трех выражений, которые получаются при подстановке в эту левую часть сначала T_2, затем T_1 и, наконец, T_0.

Подставляя в левую часть уравнений (22) вместо T квадратичную форму T_2, получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{s,\,k=1}^{n}\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_j}\dot{q}_s\dot{q}_k =$$

$$= \sum_k a_{jk}\ddot{q}_k + \sum_k \dot{q}_k\frac{da_{jk}}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{s,\,k}\frac{\partial a_{sk}}{\partial q_j}\dot{q}_s\dot{q}_k.$$

---

[1]) Определителем Грама, составленным из n векторов, называется определитель, элементами которого являются попарные скалярные произведения этих векторов; подробнее см., например, Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 3-е изд., исправл. — М.: Наука, 1967, с. 226.

Условимся обозначать символом $(*)$ совокупность членов, не содержащих вторых производных от координат q_k. Заметим, далее, что производные от коэффициентов a_{jk} как по t, так и по q не содержат вторых производных от обобщенных координат. Если силы, действующие на точки системы, зависят лишь от времени, координат точек и их скоростей (см. гл. II), то обобщенные силы, стоящие в правых частях уравнений (22), могут зависеть лишь от времени, координат q и их первых производных. Поэтому результат подстановки в уравнения (22) вместо T квадратичной формы T_2 можно представить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ddot{q}_k = (*) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{44}$$

Вернемся теперь к уравнениям (22) и подставим в них вместо T линейную форму T_1. Легко видеть, что выполнение всех операций, указанных в левой части уравнений (22), не может привести к появлению членов, содержащих вторые производные от координат q. Поэтому результатом этой подстановки будет $(*)$. Это тем более будет выполняться при подстановке в уравнения (22) вместо T члена T_0, не содержащего производных $\dot{q}$. Отсюда следует, что в любом случае уравнения Лагранжа (22) сводятся к виду (44).

Теперь мы воспользуемся доказанной выше теоремой. Из нее сразу следует, что уравнения (44) можно разрешить относительно вторых производных $\ddot{q}_k$, т. е. представить в виде

$$\ddot{q}_j = G_j(q,\ \dot{q},\ t) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N),\ n \tag{45}$$

а это как раз и значит, что уравнения Лагранжа сводятся к форме Коши и что для них задание начальных данных (в количестве, соответствующем порядку системы) полностью определяет решение при обычных и не стеснительных для механики ограничениях, наложенных на правые части уравнений. В этом смысле уравнения Лагранжа удовлетворяют условиям детерминизма движения, о котором шла речь в начале этого параграфа.

Обращаясь к уравнениям (45), мы устанавливаем также, что каждое из этих уравнений является уравнением второго порядка, число же их равно n. Следовательно, общий порядок системы уравнений Лагранжа (22) (легко видеть, что все это верно и для уравнений, представленных в форме (29)) равен $2n$. Поэтому для того, чтобы определить движение, нужно задать $2n$ начальных данных. Этими начальными данными являются значения n координат $q_1, \ldots, q_n$ и n скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ в начальный момент $t = t_0$.

Определим теперь, как изменяется полная энергия системы $E = T + V$, если движение системы описывается уравнениями

Лагранжа. В общем случае кинетическая энергия является функцией q и $\dot{q}$, а если преобразование (9) нестационарно, то также и t:

$$T = T(q,\ \dot{q},\ t).$$

Подсчитаем производную

$$\frac{dT}{dt} = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial T}{\partial t},$$

или

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \sum \frac{\partial T}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \sum \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} =$$
$$= \frac{\partial T}{\partial t} - \sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \qquad (46)$$

Рассмотрим теперь порознь суммы, входящие в правую часть этого выражения. В первой сумме

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

выражение в скобках совпадает с левой частью уравнений Лагранжа. Рассматривая значения производной dT/dt на траекториях движения, эту сумму в силу (31) можно заменить суммой $\sum (-\partial V/\partial q_j + Q_j^{**}) \dot{q}_j$, где Q_j^{**} — непотенциальная часть обобщенных сил. Таким образом,

$$\sum \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \sum \left(-\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{**} \right) \dot{q}_j =$$
$$= -\sum \frac{\partial V}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum Q_j^{**} \dot{q}_j = -\left(\frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} \right) + N^{**}, \qquad (47)$$

где сумма $N^{**} = \sum Q_j^{**} \dot{q}_j$ называется *мощностью непотенциальных сил* [1]).

Вторую сумму из правой части выражения (46) можно переписать так:

$$\frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial (T_2 + T_1 + T_0)}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left[\sum \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right].$$

Используя теперь формулу Эйлера для однородных функций

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i = kF,$$

---

[1]) Название введено по аналогии с обычным понятием мощности силы $\boldsymbol{F}$, а именно $N = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}$.

где F — произвольная однородная функция k-й степени, и вспоминая, что T_2 — квадратичная, а T_1 — линейная форма от $\dot{q}_j$, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \frac{d}{dt}(2T_2+T_1) =$$
$$= 2\frac{d(T_2+T_1+T_0)}{dt} - \frac{dT_1}{dt} - 2\frac{dT_0}{dt} = 2\frac{dT}{dt} - \frac{d(T_1+2T_0)}{dt}. \quad (48)$$

Подставляя (47) и (48) в (46), получаем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t} - N^{**} + 2\frac{dT}{dt} - \frac{d(T_1+2T_0)}{dt},$$

или

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = N^{**} - \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{d(T_1+2T_0)}{dt}.$$

В частном случае, когда преобразование (9) стационарно,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = T_1 = T_0 = 0$$

и

$$\frac{dE}{dt} = N^{**} + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Если предположить далее, что потенциальное поле стационарно, то $\partial V/\partial t = 0$ и

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = N^{**}.} \quad (49)$$

Система, у которой все силы потенциальны, а потенциальное поле стационарно, была названа выше консервативной. На точки консервативной системы непотенциальные силы не действуют, $N^{**} = 0$ и поэтому

$$\frac{dE}{dt} = 0, \text{ т. е. } E = \text{const}.$$

Таким образом, мы установили, что закон сохранения механической энергии для консервативных систем имеет место в любых координатах $q_1, \ldots, q_n$, если преобразование (9) стационарно.

Покажем теперь, что $E = \text{const}$ во время движения и для некоторых неконсервативных систем. Действительно, равенство

$$N^{**} = \sum_j Q_j^{**}\dot{q}_j = 0 \quad (50)$$

может иметь место, несмотря на то, что все (или некоторые) Q_j^{**} отличны от нуля. В таких случаях вновь $E = \text{const}$, хотя и существуют непотенциальные силы. Системы такого рода называют *гироскопическими*, а непотенциальные обобщенные силы Q_j^{**}, для которых выполняется условие (50), — *гироскопическими силами* [1]).

Если непотенциальные части обобщенных сил таковы, что во время движения выполняется неравенство

$$N^{**} = \sum_j Q_j^{**}\dot{q}_j \leqslant 0, \tag{51}$$

то в процессе движения $dE/dt \leqslant 0$ и полная энергия E не увеличивается, а может лишь рассеиваться на отдельных этапах движения. Если неравенство (51) выполняется строго (конечно, тогда хотя бы одна из производных $\dot{q}_j$ отлична от нуля), то движение все время сопровождается рассеиванием энергии. Системы такого рода называются *диссипативными* (соответственно — *строго диссипативными*), а силы, удовлетворяющие неравенству (51), — *диссипативными силами*.

§ 4. Использование уравнений Лагранжа для описания движения систем с механическими связями

До сих пор мы рассматривали систему материальных точек в предположении, что ничто не ограничивает движения точек и что это движение предопределяется действующими на точки силами, в частности, силовыми полями. При этом наличие иных материальных объектов в пространстве, не принадлежащих к рассматриваемой системе, было существенно лишь в том отношении, что эти объекты могли создавать силовые поля (например, поле всемирного тяготения, магнитное поле и т. д.), но сами по себе не препятствовали движению рассматриваемой системы. Иначе говоря, до сих пор мы пренебрегали тем фактом, что «посторонняя» для изучаемой системы материя сама занимает некоторое место в пространстве и, следовательно, точки нашей системы уже не могут занимать того же самого места. Такая идеализация приемлема для многих задач физики. В технике приходится считаться с кардинально иной постановкой задачи; например, при движении частей машин место, занятое какой-либо деталью, уже не может быть занято в тот же момент другой деталью, и это накладывает ограничения на свободу движения изучаемой системы.

Любые ограничения, накладываемые на движение исследуемой системы тем фактом, что материя занимает место в пространстве и поэтому в той или иной мере препятствует движению исследуемых материальных точек, называются *механическими связями*.

[1]) Название это исторически связано с тем, что силы, удовлетворяющие условию (50), возникают, в частности, при движении гироскопов.

Классификация механических связей. Начнем с простейших примеров механических связей. В качестве первого примера рассмотрим движение материальной точки m в плоскости x, y при условии, что на этой плоскости существует препятствие, имеющее

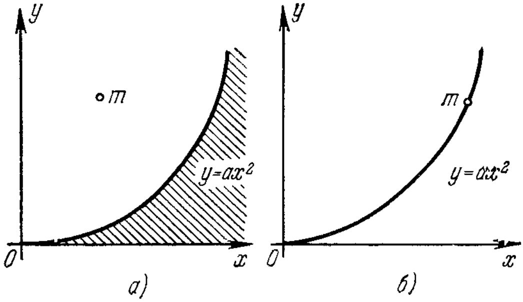

Рис. IV.3.

форму параболы $y = ax^2$ и не позволяющее материальной точке оказаться справа от него (т. е. в заштрихованной на рис. IV.3, *а* области). Таким образом, во время движения материальная точка m может находится лишь в тех точках плоскости, которые находятся слева от параболы или на ней (рис. IV.3, *а*). Другим примером может служить механическая связь, определяемая тем условием, что материальная точка во время движения должна все время находиться на указанной выше параболе (рис. IV.3, *б*). В первом случае безотносительно к действующим силам, только за счет рассматриваемого ограничения, координаты точки должны удовлетворять условиям

$$y \geqslant ax^2.$$

Во втором случае условие имеет уже форму не неравенства, а равенства

$$y = ax^2. \tag{52}$$

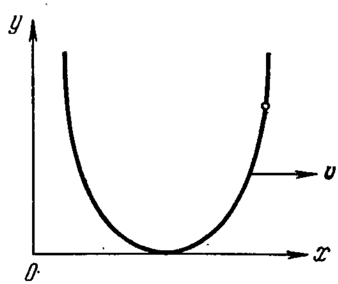

Рис. IV.4.

Теперь усложним механическую связь: предположим, что рассматриваемая точка должна все время находиться на той же параболе, но сама парабола поступательно движется с постоянной скоростью v, параллельной оси x (рис. IV.4). В этом случае возможные положения точки в плоскости также ограничены, но условия, накладываемые такой механической связью на координаты x и y, имеют вид

$$y = a(x - vt)^2. \tag{53}$$

В качестве следующего примера рассмотрим ограничение несколько иного типа. Представим себе плоское движение двух точек m_1 и m_2, стесненное следующим условием: во время движения расстояние между этими двумя точками должно все время оставаться постоянным и равным l (рис. IV.5). Легко видеть, что при этом координаты точек x_1, y_1 и x_2, y_2 должны удовлетворять равенству

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=l^2. \tag{54}$$

Рассмотрим теперь более сложный случай: пусть в предыдущем примере вводится еще одно ограничение — скорость середины

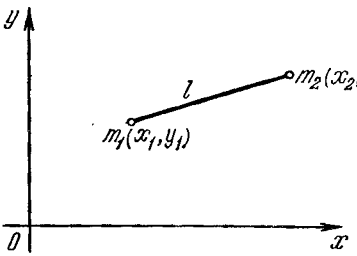

Рис. IV.5.

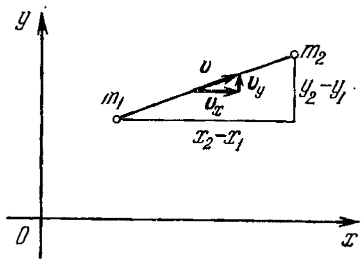

Рис. IV.6.

отрезка, соединяющего точки, должна быть всегда направлена вдоль этого отрезка (рис. IV.6)[1]). Это условие накладывает дополнительное ограничение не только на координаты точек, но и на скорость середины отрезка, соединяющего точки, а значит, и на скорости самих точек. Проекции скорости середины отрезка на оси x и y равны

$$v_x=\frac{\dot{x}_1+\dot{x}_2}{2}, \quad v_y=\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{2}, \tag{55}$$

и поэтому условие, что скорость середины отрезка всегда направлена вдоль отрезка, выражается равенством

$$\frac{\dot{y}_1+\dot{y}_2}{\dot{x}_1+\dot{x}_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{56}$$

Последний пример отличается от ранее рассмотренных в двух отношениях: во-первых, ограничения обусловили не одно, а два равенства ((54) и (56)) одновременно; во-вторых, условие (56) накладывает ограничения не только на координаты, но и на скорости, и выражается поэтому не конечным равенством, а дифференциальным уравнением по отношению к координатам точек.

---

[1]) Идеализированная модель полоза санок или конька.

Этих примеров достаточно, чтобы иллюстрировать следующую классификацию механических связей (рис. IV.7).

Механические связи подразделяются на два основных класса: на связи *удерживающие* и *неудерживающие*.

Связь называется *удерживающей*, если накладываемые ею ограничения выражаются в форме равенства, как это имело

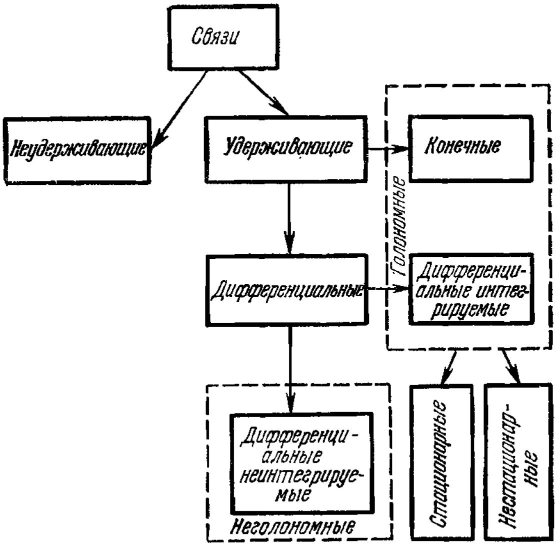

Рис. IV.7.

место во всех рассмотренных выше примерах, кроме первого. Обычно удерживающие связи вводятся условием, что точки должны находиться на некоторых кривых или на некоторых поверхностях в пространстве, либо что не должны меняться расстояния между точками и т. д.

Механическая связь называется *неудерживающей*, если накладываемые ею на координаты точек ограничения выражаются неравенствами, как это имело место в первом из рассмотренных примеров. Такого рода механические связи имеют место обычно в тех случаях, когда запрещается пребывание точки в некоторой части пространства. Далее мы будем интересоваться лишь удерживающими связями, и поэтому дальнейшая классификация неудерживающих связей на рис. IV.7 опущена.

Удерживающие механические связи подразделяются на *конечные* и *дифференциальные* в зависимости от того, является ли равенство, выражающее их, конечным соотношением или дифференциальным уравнением. В рассмотренных выше примерах все связи были конечными, за исключением связи, выраженной равенством (56) в последнем примере. Эта связь — дифференциальная, так как равенство (56) представляет собой дифференциальное уравнение.

В тех случаях, когда связи накладываются не только на координаты, но и на скорости, и поэтому приводят к дифференциальным уравнениям, возможны два варианта в зависимости от того, можно ли проинтегрировать эти уравнения. Если дифференциальные уравнения связи могут быть проинтегрированы, то они записываются в конечном итоге в виде конечных соотношений, но эти конечные соотношения содержат также и произвольные постоянные, которые естественным образом вводятся при интегрировании дифференциальных уравнений. В тех случаях, когда дифференциальное уравнение механической связи не может быть проинтегрировано, необходимо учитывать уравнения связи в исходной форме дифференциального уравнения. В связи с этим механические дифференциальные связи подразделяются на *дифференциальные интегрируемые* и на *дифференциальные неинтегрируемые* [1]).

Конечные связи и дифференциальные интегрируемые связи составляют класс *голономных* механических связей, а дифференциальные неинтегрируемые связи — класс *неголономных* связей. Соответственно системы, содержащие лишь конечные или дифференциальные интегрируемые связи, относятся к классу *голономных систем*, а системы, содержащие дифференциальные неинтегрируемые связи, — к классу *неголономных систем*. Далее мы не будем заниматься неголономными связями, и поэтому опускаем их классификацию (рис. IV.7). Что же касается голономных связей, то их можно подразделить далее в зависимости от того, содержат ли равенства, выражающие эти связи, в явной форме время. В тех случаях, когда эти равенства не содержат время явно, механическая связь называется *стационарной* или *склерономной*. В тех случаях, когда время явно входит в эти равенства, связь называется *нестационарной* или *реономной*. Обычно стационарные связи имеют место в тех случаях, когда поверхности или кривые, на которых должны находиться материальные точки, либо расстояния между этими точками не меняются со временем. Наоборот, в тех случаях, когда материальные точки должны находиться на кривых или поверхностях, которые сами меняются со временем, связи оказываются реономными.

---

[1]) В тех случаях, когда уравнения дифференциальных связей линейны относительно скоростей, известны условия, при которых соответствующие дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы.

Всюду далее, говоря о механических связях, мы будем иметь в виду голономные связи, стационарные либо нестационарные. Соответствующие соотношения мы будем записывать для конечных связей, имея в виду, что наличие произвольных постоянных в выражениях для связей не меняет последующих рассуждений.

Возможные и виртуальные перемещения и скорости. Рассмотрим теперь голономную систему. Для содержащихся в ней связей могут быть выписаны уравнения вида

$$F_s(x,\ y,\ z,\ t)=0 \qquad (s=1,\ \ldots,\ r). \tag{57}$$

Во время движения системы все координаты x, y, z — функции времени и уравнения голономных связей — определяют r тождеств

$$F_s(x(t),\ y(t),\ z(t),\ t)\equiv 0 \qquad (s=1,\ \ldots,\ r). \tag{58}$$

Координаты точек x_i, y_i, z_i должны удовлетворять этим r соотношениям. Они содержат t явно лишь в том случае, когда механические связи реономны.

Дифференцируя тождества (58) по времени, получаем

$$\frac{\partial F_s}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial F_s}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial F_s}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial F_s}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)=0. \tag{59}$$

Этим соотношениям должны удовлетворять скорости точек $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$. В случае склерономных связей уравнения (59) не содержат частной производной по явно входящему времени, $\partial F_s/\partial t=0$.

Любые скорости точек, которые удовлетворяют соотношениям (59), называются *возможными скоростями*, а любые бесконечно малые перемещения в направлении возможных скоростей, удовлетворяющие, следовательно, соотношениям (57), называются *возможными перемещениями*. Таким образом, возможные скорости и перемещения — это соответственно скорости и перемещения, допускаемые наложенными на систему голономными связями.

В случае реономных связей введем понятие «замороженной» связи. Связь называется «застывшей» или «замороженной», если в некоторое мгновение считается, что она перестает зависеть явно от времени, т. е. как бы застывает, перестает перемещаться или деформироваться. Так, например, для реономной связи, представленной на рис. IV.4, замораживание означает, что в некоторое мгновение парабола останавливается и в это мгновение перемещениями, удовлетворяющими связи, являются перемещения, не выводящие точку с неподвижной (остановленной) параболы. Аналитически «замораживание» связей проявляется в том, что в уравнениях связи вида (57) явно входящее время t считается константой и при дифференцировании частная производная по явно входящему времени оказывается поэтому равной нулю. В силу этого для «замороженных» реономных связей в соотношениях (59) исчезает первый член — частная производная по явно входящему времени.

В случае реономных связей скорости, удовлетворяющие уравнениям «замороженных» реономных связей (т. е. уравнениям (59), из которых выброшен первый член), называются *виртуальными скоростями*, а перемещения вдоль виртуальных скоростей, т. е. малые перемещения, удовлетворяющие уравнениям (57), в которых предположено, что явно входящее время более не изменяется, называются *виртуальными перемещениями*.

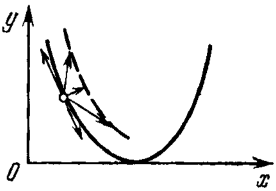

Рис. IV.8.

На рис. IV.8 повторен пример, представленный ранее на рис. IV.4, в двух случаях: а) реономная связь считается «замороженной», т. е. остановленной, и б) реономная связь рассматривается без каких-либо изменений в том виде, в каком она действительно наложена на систему. Сплошными стрелками показаны возможные перемещения точки в случае б). Виртуальные перемещения совпадают с касательной к параболе в той ее точке, где в данное мгновение находится материальная точка, а возможные перемещения зависят также и от скорости движения параболы и по направлению, вообще говоря, не совпадают с касательной.

Для систем со склерономными механическими связями возможные и виртуальные скорости (и соответственно — возможные и виртуальные перемещения), естественно, совпадают.

Число степеней свободы и обобщенные координаты. Для того чтобы полностью описать движение материальной системы, содержащей N точек и лишенной каких-либо механических связей, нужно задать $3N$ величин — этими величинами являются $3N$ координат точек. Иначе обстоит дело в системах с механическими связями.

Обратимся к рис. IV.3, *б*. В этом случае рассматривается плоское движение одной материальной точки. При отсутствии связей нужно было бы задать две ее координаты, например декартовы координаты x и y. При наличии связи — в данном случае ею служит парабола $y=ax^2$ — достаточно знать только одну координату точки x, потому что координата y сразу определяется из уравнения параболы. Положение точки в этом случае можно определить каким-либо иным способом, например договориться о начале и направлении отсчета дуг вдоль параболы, и тогда положение точки на параболе будет полностью задано одним числом — длиной дуги. Совершенно так же обстоит дело в случае, когда точка должна находиться на движущейся параболе (рис. IV.4), если известна скорость движения параболы.

В случае, представленном на рис. IV.5, рассматривается плоское движение двух материальных точек, и при отсутствии связей требовалось бы задать четыре координаты. Однако благодаря наличию одной механической связи для полного определения положения двух точек в данном случае нужно задать не четыре, а только три величины. Ими могут быть, например, координаты x и y одной из точек и угол φ, который образует отрезок l, соединяющий точки, с горизонталью, проходящей через первую точку. Действительно, зная положение первой точки, этот угол и значение l, которое по условию фиксировано, сразу определяем координаты второй точки: $x_2 = x_1 + l\cos\varphi$ и $y_2 = y_1 + l\sin\varphi$.

Вернемся теперь к случаю, когда задано r связей, т. е. задано r соотношений вида (57). Если якобиан этих функций отличен от нуля (а далее это всегда предполагается), то условия (57) могут быть использованы для того, чтобы выразить r из декартовых координат точек через остальные. Поэтому для того, чтобы задать положение N точек, нужно знать не $3N$, а $3N-r$ координат; остальные r координат найдутся из соотношений (57). Для того чтобы определить положение системы в этом случае, разумеется, не обязательно использовать $3N-r$ декартовых координат — как в приведенных примерах, так и в общем случае можно подобрать иные независимые величины, определяющие положение всех точек системы.

Наименьшее число независимых величин, которое надо знать для того, чтобы полностью определить положение всех точек голономной системы, называется *числом степеней свободы системы*. Условимся число степеней свободы обозначать буквой n. Если точка не стеснена механическими связями, то положение ее определяется тремя величинами — ее координатами, и поэтому число степеней свободы точки равно трем. Соответственно число степеней свободы системы, содержащей N точек, не стесненных механическими связями, равно $3N$. При плоском движении одна точка имеет две степени свободы, а система, состоящая из N точек, имеет число степеней свободы, равное $2N$. В примере, представленном на рис. IV.3, *б* и IV.4, система состоит из одной точки и имеет одну степень свободы. В примере, представленном на рис. IV.5, число степеней свободы равно 3. В общем случае системы, содержащей N точек и стесненной r механическими связями, как уже было указано выше, число степеней свободы равно $3N-r$.

Любой набор из n величин, независимых одна от другой и полностью определяющих положение системы, называется *системой обобщенных координат*, сами эти величины — *обобщенными* *координатами*, а их производные по времени — *обобщенными скоростями*. В соответствии с этой терминологией для системы материальных точек, не стесненных какими-либо связями, обобщенными координатами служат $3N$ величин, заданных в любой из рассмотренных ранее систем координат: декартовой, цилиндрической, сферической и т. д. В этом смысле «новые координаты» q_j $(j=1, \ldots, n)$, о которых шла речь в § 1 и 2 этой главы, являются обобщенными координатами. Подобным же образом

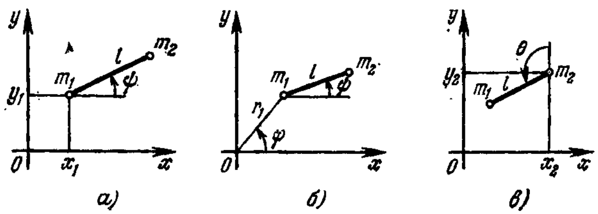

Рис. IV.9.

при рассмотрении голономных систем, движение которых стеснено механическими связями, возможен самый разнообразный выбор обобщенных координат. Так, в примере, представленном на рис. IV. 3, *б*, обобщенной координатой (как уже было указано) может служить либо координата y точки, либо ее координата x, либо дуга вдоль параболы (отсчитанная с учетом знака от какой-либо начальной точки, например от начала координат), либо угол, образованный лучом, проведенным из начала координат к материальной точке, и осью абсцисс, и т. д. Для примера, представленного на рис. IV.5, различный выбор возможных систем обобщенных координат определяется тем, каким образом фиксируется, во-первых, положение одной точки и, во-вторых, положение второй точки относительно первой. На рис. IV.9 приведены примеры различных способов введения обобщенных координат. На рис. IV.9, *а* в качестве обобщенных координат выбраны декартовы координаты x_1 и y_1 первой точки и угол ψ, образованный прямой, соединяющей две точки системы, и горизонталью ($q_1=x_1$, $q_2=y_1$, $q_3=\psi$); на рис. IV.9, *б* обобщенными координатами служат полярные координаты первой точки и угол для определения положения второй точки ($q_1=r_1$, $q_2=\varphi$, $q_3=\psi$); на рис. IV.9, *в* — декартовы координаты второй точки и угол, образованный прямой, соединяющей две точки системы, с вертикалью, проведенной через вторую точку ($q_1=x_2$, $q_2=y_2$, $q_3=\theta$). Разумеется, в этом примере возможен и иной выбор обобщенных координат.

На рис. IV.10 изображен так называемый двойной плоский маятник, а на рис. IV.11 — система, состоящая из плоского маятника, к которому на пружине подвешен грузик. Изображенная на рис. IV.10 система имеет две степени свободы, и в качестве обобщенных координат можно взять, например, либо углы α и β, либо величины x_1 и x_2, либо величину x_1 и угол β и т. д. Число степеней свободы системы, показанной на рис. IV.11, зависит от предположения о движении грузика, подвешенного к пружине. Если грузик может занимать любое положение

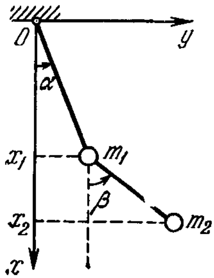

Рис. IV.10.

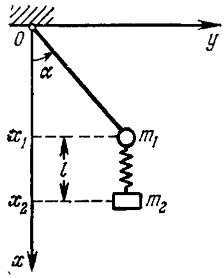

Рис. IV.11.

в плоскости и от его положения зависит только упругая сила пружины, то пружина лишь предопределяет силовое взаимодействие между грузиком и маятником, т. е. характер возникающих в системе потенциальных сил, и не накладывает каких-либо ограничений на движение системы. Поэтому в данном случае система имеет три степени свободы, и соответственно обобщенными координатами могут быть величина α или x_1 — ею фиксируется положение маятника — и какие-либо две величины, например декартовы координаты, фиксирующие положение грузика. Иначе обстоит дело, если пружина может растягиваться лишь вдоль вертикали, т. е. если грузик вынужден всегда находиться на одной вертикали с маятником (например, движется по вертикальной направляющей, закрепленной на маятнике). В этом случае система имеет две степени свободы и обобщенными координатами могут служить, например, угол α и расстояние $l = x_2 - x_1$ от маятника до грузика, т. е. длина пружины.

По самому определению понятия «обобщенная координата» ясно, что декартовы координаты всех точек системы однозначно определяются, коль скоро заданы обобщенные координаты, несмотря на то, что число обобщенных координат может быть значительно меньше утроенного числа материальных точек. Более того, число материальных точек может быть бесконечным, например, если система содержит тела, а число обобщенных координат конечно и даже мало. Но в любом случае декартовы координаты полностью определяются через обобщенные, и при этом функции, выражающие декартовы координаты материальных точек через обобщенные координаты, не зависят явно от времени, если все механические связи склерономны, и зависят явно от времени, если среди механических связей системы имеются реономные. Имея в виду этот общий случай, представим зависимости между декартовыми координатами точек и обобщенными координатами в виде

$$x_i = f_i(q,\ t), \quad y_i = \varphi_i(q,\ t), \quad z_i = \psi_i(q,\ t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N). \quad (60)$$

Переходя в этих выражениях к виртуальным перемещениям, т. е. дифференцируя их при предположении, что явно входящее в выражения (60) время является константой, получаем

$$\delta x_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j}\delta q_j, \quad \delta z_i = \sum \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j}\delta q_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (61)$$

Соотношения (60) и (61) формально совпадают с соотношениями (8) и (12) этой главы, хотя к ним приходят из иных соображений. Отсюда сразу вытекают следующие результаты.

1. Механические голономные связи предопределяют зависимости (60) между декартовыми и «новыми» координатами, если в качестве «новых» координат выбрана любая система обобщенных координат.

2. Для системы с механическими голономными связями различие между операторами d и δ имеет простой механический смысл, соответствующий различию между возможными и виртуальными скоростями, а число n новых координат равно числу степеней свободы системы. Имея в виду это обстоятельство, мы при выводе уравнений Лагранжа считали, что n удовлетворяет неравенству $n \leqslant 3N$, хотя при отсутствии механических связей оснований для такого обобщения не было.

Идеальные связи. Для того чтобы записать второй закон Ньютона для материальной точки, движение которой стеснено механической удерживающей связью, надо к действующим на точку силам добавить реакции связи. Эти реакции сами зависят от характера движения точки, т. е. являются функциями ее скоростей и ускорений. Используя лагранжев формализм для систем, содержащих механические связи, часто удается описать движения системы, не вводя в рассмотрение эти функции — реакции связи.

Для того чтобы пояснить это последнее обстоятельство, введем новое понятие. Условимся механические связи называть *идеальными*, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом виртуальном перемещении системы равна нулю. Обычно идеальными являются связи, при которых движение материальной точки вдоль кривой или поверхности, определяющей связь, происходит без трения. Действительно, в этом случае реакции связей направлены по нормалям к кривым или поверхностям, стесняющим движение, а виртуальные скорости — по касательным к ним, и поэтому виртуальная работа реакций связей в таких случаях равна нулю. Если из-за учета трения связь оказывается не идеальной, т. е. ее реакция не ортогональна к виртуальной скорости, то эту реакцию можно разложить на «идеальную составляющую», направленную по нормали, и на «неидеальную составляющую», направленную вдоль виртуальной скорости.

Использование уравнений Лагранжа для систем, содержащих механические голономные связи. Если система содержит механические связи, но все они голономны, то можно в качестве «новых» координат использовать обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_n$ (их число $n=3N-r\leqslant 3N$ равно числу степеней свободы системы), а формулы (8) получаются так, как это было пояснено выше (см. рассуждения, приводящие к формулам (60)).

При выводе уравнений Лагранжа мы исходим из записи второго закона Ньютона. Для систем, содержащих голономные механические связи, этот закон имеет вид

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i, \qquad i=1, \ldots, N, \tag{62}$$

где $\boldsymbol{R}_i$ — реакция связи, действующая на i-ю точку системы.

Дословно повторяя вывод уравнений Лагранжа из § 2 этой главы, приходим к уравнениям Лагранжа (22) с той лишь разницей, что теперь Q_j в них означает

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=Q_j^{(1)}+Q_j^{(2)}.$$

Выше было показано, что обобщенная сила $Q_j^{(1)}=\sum\limits_i \boldsymbol{F}_i\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ равна множителю при δq_j в выражении для виртуальной работы приложенных сил $\boldsymbol{F}_i$. Аналогично $Q_j^{(2)}=\sum\limits_i \boldsymbol{R}_i\cdot\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}$ — такой же множитель в выражении для виртуальной работы реакций связей. Таким образом, уравнения Лагранжа пригодны для описания системы, содержащей голономные механические связи.

В том случае, когда связи идеальные, сумма работ их реакций на виртуальном перемещении равна нулю. В связи с тем, что δq_j — независимые приращения, множители $Q_j^{(2)}$ в выражении для виртуальной работы реакций идеальных связей $\boldsymbol{R}_i$ порознь равны нулю:

$$Q_j^{(2)}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{R}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}=0.$$

Поэтому *реакции идеальных связей могут не учитываться при подсчете обобщенных сил* Q_j. Если же система содержит неидеальные связи, то соответствующие «неидеальные составляющие» их реакций должны быть отнесены к приложенным силам и учтены при подсчете обобщенных сил Q_j. Зависимость «неидеальных составляющих» реакций связей от обобщенных координат, скоростей или от времени определяется, исходя из физической природы этих сил так же, как и для приложенных сил F_i.

При наличии механических связей, как и при отсутствии их, уравнения Лагранжа имеют одинаковый вид при любом выборе обобщенных координат. Число уравнений Лагранжа равно числу степеней свободы n исследуемой системы, а порядок системы уравнений Лагранжа равен $2n$.

Применительно к системе без механических связей уравнения Лагранжа имеют одно основное преимущество: они ковариантны по отношению к точечным преобразованиям координат. В случае же, когда система стеснена механическими идеальными связями, применение лагранжева формализма имеет дополнительные преимущества по сравнению с непосредственным применением уравнений Ньютона. Оно позволяет уменьшить порядок системы уравнений, описывающих движение, до $2n$, где n — число степеней свободы, и избежать определения реакций идеальных связей. Возможность выписать уравнения движения, не интересуясь нормальными реакциями и вообще подсчетом реакций в случае, когда трение отсутствует, является одним из важных преимуществ применения лагранжева формализма к механическим системам со связями.

В том случае, когда исследуемая система не содержит механических связей, нестационарность преобразований (8) возникает лишь при условии, что «новая» система отсчета (координаты q_j) движется относительно «старой» системы (координаты x, y, z). В случае же наличия механических конечных связей причиной нестационарности преобразований (60) является также учет особенностей связей, если они реономны.

Первоначально лагранжев формализм был разработан, главным образом, для того, чтобы обойти затруднения, связанные с исследованием систем с механическими связями. Позже с развитием физики выяснилось удобство этого формализма в связи с ковариантной формой уравнений Лагранжа для описания движений и в тех случаях, когда связи отсутствуют.

§ 5. Некоторые обобщения

В этом параграфе рассматриваются два обобщения, связанные с использованием лагранжева формализма. Первое обобщение получается введением понятия «обобщенный потенциал» и позволяет расширить круг задач, для которых уравнения Лагранжа имеют вид (29).

Второе обобщение связано с понятием натуральных и ненатуральных динамических систем и с возможностью при построении новых (неклассических) механик аксиоматически вводить в рассмотрение уравнения Лагранжа в форме (29) с лагранжианом L, уже не обязательно равным разности кинетической и потенциальной энергии.

1. Обобщенный потенциал. Напомним читателю, что обобщенные силы Q_j называются потенциальными, если существует функция от обобщенных координат и времени $V(q, t)$ такая, что

$$Q_j = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{63}$$

Было показано, что если силы $\boldsymbol{F}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ имеют потенциал в декартовых координатах, то обобщенные силы Q_j, каковы бы ни были новые (обобщенные) координаты, тоже потенциальны.

При таком определении потенциальных сил обобщенные силы, зависящие от обобщенных скоростей, уже не могли бы быть потенциальными и при их наличии нельзя было бы использовать уравнения Лагранжа в форме (29). Между тем можно определить понятие потенциальной обобщенной силы так, чтобы уравнения Лагранжа в форме (29) оказались пригодными для описания движений некоторых важных систем при наличии сил, зависящих от скоростей.

Условимся теперь называть обобщенные силы *обобщенно потенциальными* в том случае, когда существует функция V^* от обобщенных скоростей $\dot{q}$, обобщенных координат q и времени t такая, что

$$Q_j = \frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial V^*}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{64}$$

Функция $V^*(q, \dot{q}, t)$ называется *обобщенным потенциалом.* В том случае, когда функция V^* не зависит явно от $\dot{q}$, так что $\partial V^*/\partial \dot{q}_i = 0$, формула (64), очевидно, сводится к (63), обобщенный потенциал обращается в обычный, а обобщенно потенциальные силы — в обычные потенциальные.

Из равенства (64) следует, что

$$Q_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \dot{q}_j \, \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + (*),$$

где $(*)$ — совокупность членов, не содержащих $\ddot{q}$. Будем предполагать, как и ранее, что приложенные силы не зависят от ускорений материальных точек, так что и обобщенные силы Q_j не зависят от обобщенных ускорений $\ddot{q}$. Отсюда сразу следует, что

$Q_j = (*)$, т. е. что $\partial^2 V^*/\partial\dot{q}_j\,\partial\dot{q}_k = 0$, а это означает, что обобщенный потенциал представляет собой линейную функцию относительно обобщенных скоростей, т. е. имеет вид

$$V^* = \sum_{j=1}^{n} A_j\dot{q}_j + V_0, \tag{65}$$

где V_0 и $A_1, \ldots, A_n$ — функции только от q и t. Подставляя это выражение в формулу (64), получаем

$$Q_j = \frac{dA_j}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{k=1}^{n} A_k\dot{q}_k + V_0\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_j}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial A_j}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_k}{\partial q_j}\dot{q}_k - \frac{\partial V_0}{\partial q_j}.$$

Если обобщенный потенциал V^* стационарен, т. е. не зависит явно от t, то все $\partial A_j/\partial t = 0$ и Q_j представимы в виде

$$Q_j = Q_{j1} + Q_{j2},$$

где $Q_{j1} = -\partial V_0/\partial q_j$ — потенциальные силы, соответствующие потенциальной энергии V_0, а

$$Q_{j2} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk}\dot{q}_k, \quad \text{где } \gamma_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial q_k} - \frac{\partial A_k}{\partial q_j},$$

и непосредственно видно, что $\gamma_{jj} = 0$ и что $\gamma_{jk} = -\gamma_{kj}$ для $k \neq j$. Поэтому мощность сил Q_{j2} равна

$$N_2 = \sum_j \left(\sum_k \gamma_{jk}\dot{q}_k\right)\dot{q}_j = 0,$$

и следовательно, Q_{j2} — гироскопические силы.

Таким образом, если обобщенные силы являются обобщенно потенциальными и не зависят явно от t, то они складываются из обычных потенциальных и гироскопических сил; в таком случае при движении системы $E = T + V = \text{const}$ (но $T + V^* \neq \text{const}$!).

Предположим теперь, что все обобщенные силы являются обобщенно потенциальными, и подставим выражения (64) в правую часть уравнений Лагранжа (22). Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n),} \tag{66}$$

где

$$\boxed{L^* = T - V^*.} \tag{67}$$

Функцию L^* естественно назвать *обобщенным лагранжианом*.

Если в обобщенных силах можно выделить обобщенно потенциальную часть $\tilde{Q}_j$ и непотенциальную часть $\tilde{\tilde{Q}}_j$, так что

$$Q_j = \tilde{Q}_j + \tilde{\tilde{Q}}_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

то уравнения Лагранжа принимают вид

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j} = \tilde{\tilde{Q}}_j \qquad (j = 1, \ldots, n)} \tag{68}$$

и аналогичны уравнениям (32).

Вспоминая структуру функции T и учитывая формулу (65), устанавливаем структуру обобщенного лагранжиана

$$L^* = L_2^* + L_1^* + L_0^*, \tag{69}$$

где $L_2^* = T_2$ — квадратичная форма относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$ с коэффициентами $a_{ij}(q, t)$, $L_1^* = T_1 - \sum_j A_j \dot{q}_j$ — линейная функция относительно $\dot{q}$, а $L_0^* = T_0 - V_0$ — функция только от q и t, не зависящая от $\dot{q}$. Поэтому уравнения Лагранжа (66) и (68) сводится к виду

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(q, t)\, \ddot{q} + (*) = 0$$

и в силу основной теоремы лагранжева формализма разрешимы относительно старших производных.

Рассмотрим теперь два важных примера обобщенно потенциальных сил.

Пример 1. На движущийся в электромагнитном поле точечный заряд действует лоренцева сила. Проекции этой силы на оси x, y, z декартовой системы координат равны[1])

$$F_x = -\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt} - \frac{\partial V^*}{\partial x},$$

$$F_y = -\frac{e}{c}\frac{dA_y}{dt} - \frac{\partial V^*}{\partial y},$$

$$F_z = -\frac{e}{c}\frac{dA_z}{dt} - \frac{\partial V^*}{\partial z},$$

[1]) Вывод этих соотношений см., например, Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — 2-е изд., исправл. — М.: Наука, 1966, с. 80—81; см. также Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. — 6-е изд. — М.: Наука, 1973, с. 70.

где e — заряд, c — скорость света, V^* — скалярная функция, определяемая формулой

$$V^* = e\varphi - \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}).$$

В этом выражении скалярная функция $\varphi(x, y, z)$ и вектор-функция $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ — характеристики поля (так называемые скалярный и векторный потенциалы).

Непосредственно видно, что

$$F_x = \frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V^*}{\partial x}$$

и что аналогичные выражения могут быть выписаны для F_y и F_z, т. е. что V^* — обобщенный потенциал для лоренцевой силы. Обобщенный лагранжиан для материальной точки (массы m), несущей заряд e и движущейся в поле со скалярным потенциалом φ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$, равен

$$L^* = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}).$$

Пример 2. Покажем теперь, что *сумма переносных и кориолисовых сил инерции всех точек системы всегда имеет обобщенный потенциал.*

Простоты ради покажем это на примере системы, состоящей из одной материальной точки[1]), движущейся под действием заданной силы $\boldsymbol{F}(t)$.

Сделаем предварительно следующее замечание об использовании уравнений Лагранжа для описания относительного движения в неинерциальной системе отсчета. В гл. III было установлено, что второй закон Ньютона (а значит, и основные теоремы динамики) может быть использован и в неинерциальной системе отсчета, если к i-й точке системы ($i = 1, \ldots, N$) помимо действующих сил приложить силы инерции — переносную, $\boldsymbol{J}_{i\,\text{пер}} = -m_i\boldsymbol{w}_{i\,\text{пер}}$, и кориолисову, $\boldsymbol{J}_{i\,\text{кор}} = -2m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{i\,\text{отн}})$.

Уравнения движения, записанные в ковариантной форме (уравнения Лагранжа), имеют одинаковый вид в любой системе отсчета и поэтому в равной мере пригодны для описания движения в инерциальных и в неинерциальных системах. Для того чтобы описать движение материальной точки по отношению к неинерциальной системе отсчета, надо лишь в качестве «новых» координат принять относительные («греческие») координаты неинерциальной системы. Заданное переносное движение определяет тогда все функции f_i, φ_i и ψ_i, т. е. преобразование (8) «новых» («гре-

---

[1]) Для системы, состоящей из N материальных точек, все проводимые далее выкладки усложняются лишь суммированием по всем точкам системы.

ческих») координат в «старые» («латинские»). Далее обычная схема лагранжева формализма приводит к уравнениям движения, записанным в неинерциальной системе отсчета. Разумеется, при использовании этой схемы уже *не требуется заранее вводить в рассмотрение силы инерции*. Наоборот, применение схемы лагранжева формализма само в конечном итоге приводит к уравнениям движения, записанным в неинерциальной системе отсчета и содержащим члены, соответствующие переносным и кориолисовым силам инерции.

Рассмотрим движение точки m по отношению к инерциальной (латинской) и неинерциальной (греческой) системам как абсолютное и относительное движение соответственно; переносным является движение греческой системы отсчета относительно латинской. Переносное движение задано, т. е. скорость $\boldsymbol{v}_A$ точки A (начала координат греческой системы) и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ переносного движения заданы как функции времени: $\boldsymbol{v}_A(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$. Если $\boldsymbol{v}_{\text{абс}}$ — скорость точки m по отношению к латинской системе (абсолютная скорость), то кинетическая энергия равна

$$T_{\text{абс}} = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_{\text{абс}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

В качестве «новых» выберем греческие координаты ξ, η, ζ. В соответствии с последовательностью действий, определяемых лагранжевым формализмом, необходимо теперь выразить $T_{\text{абс}}$ через «новые» координаты ξ, η, ζ и скорости $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Действуя в соответствии с общей схемой, следовало бы, зная $\boldsymbol{v}_A(t)$ и $\boldsymbol{\omega}(t)$, найти функции $f(\xi, \eta, \zeta; t)$, $\varphi(\xi, \eta, \zeta; t)$ и $\psi(\xi, \ , \zeta; t)$, входящие в формулы преобразования (8), и выразить затем $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ и t. В данном случае, однако, можно выразить кинетическую энергию $T_{\text{абс}}$ через «новые» (относительные) скорости, и не выписывая явно преобразования (8). Действительно,

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \boldsymbol{v}_{\text{отн}},$$

и поэтому

$$T_{\text{абс}} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}_{\text{пер}}+\boldsymbol{v}_{\text{отн}})(\boldsymbol{v}_{\text{пер}}+\boldsymbol{v}_{\text{отн}}) =$$

$$= \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_{\text{пер}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{отн}} + m\boldsymbol{v}_{\text{пер}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{отн}},$$

или

$$T_{\text{абс}} = T_{\text{отн}} - V^*, \tag{70}$$

где $T_{\text{отн}} = (m/2)(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)$ — кинетическая энергия в относительном движении, а

$$V^* = -\frac{m}{2}\boldsymbol{v}_{\text{пер}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{пер}} - m\boldsymbol{v}_{\text{пер}}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{отн}}. \tag{71}$$

Для того чтобы найти V^* как функцию ξ, η, ζ, $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ и t, вспомним, что

$$v_{\text{пер}} = v_A + \omega \times \rho, \tag{72}$$

где v_A и ω являются заданными функциями времени, а ρ — радиус-вектор в греческой системе.

Обозначая через i, j и k орты греческой системы и раскрывая векторное произведение $\omega \times \rho$, получаем

$$\omega \times \rho = i(\zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta) + j(\xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi) + k(\eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta). \tag{73}$$

Подставляя (72) в (71) и учитывая (73), получаем

$$\begin{aligned} V^* = -m\big[(v_{A\xi} + \zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta)\dot\xi + (v_{A\eta} + \xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi)\dot\eta +{}\\ + (v_{A\zeta} + \eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta)\dot\zeta\big] - \frac{m}{2}\big[v_{A\xi}^2 + v_{A\eta}^2 + v_{A\zeta}^2 + 2v_{A\xi}(\zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta) +{}\\ + 2v_{A\eta}(\xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi) + 2v_{A\zeta}(\eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta) + (\zeta\omega_\eta - \eta\omega_\zeta)^2 +{}\\ + (\xi\omega_\zeta - \zeta\omega_\xi)^2 + (\eta\omega_\xi - \xi\omega_\eta)^2\big]. \end{aligned} \tag{74}$$

Используя это, можно по формуле (70) полностью определить кинетическую энергию как функцию «новых» (относительных) координат и скоростей.

Для подсчета обобщенных сил надо в формуле для элементарной работы

$$\delta A = F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z$$

выразить δx, δy и δz через «новые» координаты $\delta\xi$, $\delta\eta$ и $\delta\zeta$. Оператор δ не включает дифференцирования функций, определяющих преобразования координат, по явно входящему времени t. В рассматриваемом случае это означает, что в формулах преобразования следует положить $v_A = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$, т. е. при подсчете элементарной работы неинерциальную систему следует считать остановленной. Но тогда

$$\delta A = F_\xi\,\delta\xi + F_\eta\,\delta\eta + F_\zeta\,\delta\zeta,$$

т. е. обобщенные силы соответственно равны[1]) F_ξ, F_η и F_ζ. Если ввести обозначения

$$\xi = q_1, \quad \eta = q_2, \quad \zeta = q_3,$$

---

[1]) Если сила F зависит не только от t, но и от x, y, z и (или) от $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, то надо явно выписать формулы для преобразования координат и подставить в функцию F выражения для «старых» координат x, y, z и скоростей $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ через «новые» (относительные) координаты ξ, η, ζ и скорости $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$.

то уравнения Лагранжа можно записать так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L^*}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3), \tag{75}$$

причем обобщенный лагранжиан равен

$$L^*=T_{\text{отн}}-V^*, \tag{76}$$

а обобщенный потенциал V^* определяется формулой (74).

Уравнения (75) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{\text{отн}}}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T_{\text{отн}}}{\partial q_j}=Q_j+\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial V^*}{\partial q_j}\right] \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \tag{77}$$

Левые части этих уравнений совпадают с левыми частями уравнений Лагранжа, которые составил бы наблюдатель, находящийся в неинерциальной (греческой) системе, а обобщенные силы

$$Q_1=F_\xi,\quad Q_2=F_\eta,\quad Q_3=F_\zeta$$

также совпадают с обобщенными силами, которые вычислил бы этот наблюдатель. Подставляя в выражение, стоящее в правой части уравнений (77) в квадратных скобках, функцию V^* из (74) и вычисляя соответствующие частную и полную производные, легко убедиться в том, что величины в квадратных скобках при $j=1$, 2 и 3 в точности равны проекциям на оси ξ, η и ζ суммы переносной и кориолисовой сил инерции.

Таким образом, уравнения (75) в конечном итоге приводят нас вновь к уравнениям Ньютона для неинерциальной системы отсчета:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}&=F_\xi+J_{\text{пер}\,\xi}+J_{\text{кор}\,\xi},\\ m\ddot{\eta}&=F_\eta+J_{\text{пер}\,\eta}+J_{\text{кор}\,\eta},\\ m\ddot{\zeta}&=F_\zeta+J_{\text{пер}\,\zeta}+J_{\text{кор}\,\zeta}. \end{aligned}$$

Рассмотренный пример поучителен в том отношении, что он разъясняет два пути, которыми мог бы воспользоваться «неинерциальный наблюдатель» для того, чтобы составить уравнения Лагранжа, описывающие наблюдаемое им относительное движение.

Первый путь. «Неинерциальный наблюдатель» мог бы и в более сложном случае (например, при наличии механических связей) рассуждать так, как это делали мы выше в разобранном примере. Именно, он мог бы, составив полную кинетическую энергию (в абсолютном движении!), выразить ее через «свои» относительные координаты и скорости (рассматривая переносные скорости «своей» системы как заданные функции времени!) и воспользоваться затем уравнениями Лагранжа в их обычной записи. На

6*

этом пути не требуется вводить какие-либо силы инерции — наоборот, лагранжев формализм сам вводит их и устанавливает их обобщенно потенциальный характер.

Второй путь. «Неинерциальный наблюдатель» мог бы с самого начала добавить к исходным (приложенным) силам переносные и кориолисовы силы инерции. Относительные скорости, входящие в выражения для кориолисовых сил, рассматривались бы при этом как неизвестные функции. Далее такой наблюдатель мог бы рассуждать так: «Теперь, после добавления сил инерции, в моей системе отсчета верен второй закон Ньютона; значит, в этой системе верны и уравнения Лагранжа, если в них входит кинетическая энергия видимого мной (т. е. относительного!) движения и если обобщенные силы подсчитываются, исходя из виртуальных перемещений в относительном движении». Поэтому такой наблюдатель мог бы сразу выписать уравнение Лагранжа в «своей» системе отсчета, подсчитывая кинетическую энергию через «свои», т. е. относительные скорости. Но при подсчете обобщенных сил ему пришлось бы принять во внимание и работу сил инерции на виртуальных перемещениях в относительном движении.

Разумеется, оба пути в конечном итоге приводят к одинаковым результатам. Выбор более удобного пути в каждом конкретном случае зависит от особенностей решаемой задачи.

2. Натуральные и ненатуральные системы. Введя понятие об обобщенном потенциале, мы сделали важный шаг в расширении класса систем, для которых ковариантные уравнения движения могут быть записаны в форме, содержащей только одну функцию, зависящую от выбора системы отсчета, — ее лагранжиан.

До сих пор в основе всех наших рассуждений лежали некоторые исходные представления, играющие во всем последующем построении роль аксиом. Мы постулировали, в частности, второй закон Ньютона и при выводе основных законов и теорем механики всегда исходили из него. В настоящей главе, выводя уравнения движения в форме, ковариантной по отношению к любым точечным преобразованиям координат, мы также положили в основу рассуждений второй закон Ньютона и в конечном результате придали ему форму уравнений Лагранжа. В этом смысле второй закон Ньютона оказывается эквивалентным утверждению о том, что движение может быть описано уравнениями (22), а движение в потенциальном поле — уравнениями (29), где $L = T - V$.

Естественно поставить вопрос: почему нельзя было с самого начала постулировать уравнения (22) либо (29), если они являются лишь ковариантной записью второго закона Ньютона? Действительно, такой постулат мог бы быть положен в основу механики (голономных систем). Именно, в наше время построение новых систем механики, в частности, релятивистской механики, делает актуальным вопрос о том, в каких терминах удобнее формулировать исходные аксиомы. Теперь уже обе формы уравнений движения — уравнения, выражающие второй закон Ньютона, и уравнения Лагранжа[1]) — в равной мере обычны для физики. Поэтому возникает мысль о возможности при построении новых систем механики постулировать взамен «нового второго закона Ньютона» утверждение о том, что движение описывается уравнениями Лагранжа. При таком подходе к построению механики лагранжиан просто постулируется как некоторая функция q, $\dot{q}$ и t.

Если мы хотим, чтобы при этом движение по-прежнему определялось из уравнений Лагранжа однозначно (по начальным данным), то мы не можем произвольным образом, без всяких ограничений, постулировать лагранжиан L как функцию q, $\dot{q}$ и t. Действительно, основная теорема лагранжева формализма была доказана в предположении, что кинетическая энергия, а значит и лагранжиан, имеет вполне определенную структуру. Если лагранжиан задается каким-либо иным образом и имеет другую структуру, основная теорема лагранжева формализма, вообще говоря, не выполняется. Следовательно, вообще говоря, уравнения Лагранжа, полученные при этой иной функции Лагранжа, могут оказаться неразрешимыми относительно старших производных, и для них уже не будет верна теорема о существовании и единственности решения при заданных начальных данных. Для того чтобы сохранить это важное свойство уравнений Лагранжа, надо ограничить выбор лагранжиана L при его аксиоматическом задании. Легко видеть, что это ограничение должно быть представлено в форме

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \neq 0. \tag{78}$$

Действительно, если мы будем считать L некоторой произвольной функцией от обобщенных координат q, обобщенных скоростей $\dot{q}$ и, быть может, времени t и подставим эту функцию в уравнения Лагранжа (29), а потом проделаем выкладки, аналогичные тем, которые были проделаны в § 3, то вместо уравнений (44) мы получим уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k = (*) \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{79}$$

В этих уравнениях роль, которую играли ранее коэффициенты a_{jk}, играют теперь вторые производные $\partial^2 L/\partial \dot{q}_j\, \partial \dot{q}_k$. В связи с этим

[1]) В связи с тем, что физика интересуется, главным образом, движением в потенциальных полях, здесь речь идет об уравнениях Лагранжа в форме (29).

требование (78) является аналогом основной теоремы и гарантирует, что при априорном задании лагранжиана в форме, отличной от разности $L=T-V$, будет сохранена возможность однозначного определения движения по начальным данным.

Условимся далее в этой книге системы, для которых L подсчитывается как $T-V$, называть *натуральными системами*, а системы, для которых L вводится аксиоматически как-либо иначе, — *ненатуральными системами*. В гл. VII, посвященной исследованию движения в потенциальных полях, все изложение будет построено так, чтобы оно было верно как для натуральных, так и для ненатуральных систем, но, разумеется, мы будем при этом опираться на предположение о том, что удовлетворяется требование (78) и поэтому начальные данные полностью определяют движение.

Глава V

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 1. Элементарные сведения по динамике твердого тела

В предшествующих главах движение системы материальных точек рассматривалось чаще всего в предположении, что оно не стеснено какими-либо связями, и только в конце предыдущей главы было показано, каким образом можно аналогично исследовать движение системы со связями. В этой главе рассматривается один важный частный случай наложения связей; изучается движение твердого тела, т. е. системы, состоящей из любого (конечного или бесконечного) числа материальных точек, движущихся так, что во время движения расстояние между точками не меняется. Условия неизменности расстояния между точками естественно накладывают на систему голономные связи, и поэтому при отсутствии внешних неголономных связей изучение движения твердого тела сводится к изучению движения системы, состоящей из любого числа материальных точек с голономными связями.

Прежде чем приступить к изучению законов движения систем такого рода, напомним читателю некоторые элементарные сведения, относящиеся к движению твердого тела. Предполагается, что эти сведения известны читателю (например, из общего курса физики), но тем не менее стоит напомнить их, прежде чем приступить к изложению более глубоких результатов.

1° *С твердым телом может быть связана геометрическая твердая среда* (см. гл. I), *т. е. система отсчета*. Поэтому все кинематические соотношения, полученные в гл. I для движения одной системы отсчета относительно другой, полностью применимы и к движению твердого тела относительно какой-либо системы отсчета, не связанной с телом. В частности, при движении тела в каждое мгновение существует вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ такой, что скорости точек тела распределены по закону $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{iA}$, где A — произвольно выбранная точка тела, а $\boldsymbol{r}_{iA}$ — радиус-вектор, проведенный к i-й точке тела из точки A.

2° *Центр инерции твердого тела совпадает с его центром тяжести*, $\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r}_{\text{ц. т}}$.

Этот факт следует из того, что центр тяжести в однородном гравитационном поле расположен в центре параллельных сил

(сил тяжести), пропорциональных массам частиц тела, и следовательно, его положение определяется по той же формуле, что и положение центра инерции тела.

При движении твердого тела движение его центра тяжести описывается теоремой о движении центра инерции:

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_{\text{ц. т}} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}. \tag{1}$$

Теорема о движении центра инерции была выведена в гл. III для системы, не стесненной механическими связями. Твердое тело представляет собой систему со связями, однако доказательство теоремы о движении центра инерции, проведенное в гл. III, полностью сохраняется. Наличие связей, удерживающих точки на неизменных расстояниях одна от другой, влияет на характер внутренних сил, действующих между точками, а эти силы все равно подчинены третьему закону Ньютона и взаимно уничтожаются при выводе уравнения движения центра инерции.

При поступательном движении тела

$$\boldsymbol{Q} = M\boldsymbol{v}_c = M\boldsymbol{v} \tag{2}$$

и

$$T = \frac{Mv^2}{2}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость точек тела в поступательном движении.

3° *Произвольная система сил, приложенных к твердому телу, может быть заменена одной из четырех простейших систем:* а) *одной силой;* б) *системой, не содержащей сил* («нулем»); в) *двумя силами, образующими пару сил, и* г) *тремя силами, из которых две' образуют пару, а третья перпендикулярна плоскости этой пары.*

Доказательство этого утверждения приведено в приложении, помещенном в конце книги и посвященном теории скользящих векторов.

4° *Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, определяется лишь работой внешних сил.*

Действительно, рассмотрим две точки m_1 и m_2, принадлежащие твердому телу. По третьему закону Ньютона силы их взаимодействия равны и противоположно направлены (вдоль прямой, соединяющей эти точки). По определению твердого тела расстояние между точками m_1 и m_2 не меняется, т. е. если $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — радиусы-векторы точек, то $d\,|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = 0$. Для таких двух сил взаимодействия $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 = \lambda(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$

$$\delta A = \boldsymbol{F}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{F}_1 \cdot d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \lambda(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\,d(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) =$$
$$= {}^1/_2\lambda d\,|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^2 = 0.$$

Это рассуждение верно для любых двух точек тела, и следовательно, *элементарная работа всех внутренних сил в твердом теле равна нулю.*

Выведем теперь формулу для подсчета работы внешних сил, приложенных к твердому телу. Эта элементарная работа равна[1])

$$\delta A = \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot d\boldsymbol{r}_i.$$

Выберем в теле произвольную точку O' и поместим в нее начало системы координат, оси которой параллельны осям x, y, z рассматриваемой инерциальной системы. Подобно тому, как мы это делали в гл. I, представим движение тела как сумму поступательного движения вместе с точкой O' (переносное движение) и вращения относительно неподвижной точки O' (относительное движение). Тогда скорость i-й точки выражается формулой

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i,$$

где $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный к i-й точке из точки O'.

Преобразуем теперь выражение для элементарной работы так:

$$\delta A = \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{v}_i\, dt.$$

Подставляя сюда выражение для $\boldsymbol{v}_i$, получаем

$$\delta A = \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot (\boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\, dt = \\ = \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \left(\sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}\right) dt + \sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)\, dt.$$

Первая сумма составляет главный вектор внешних сил. Во второй сумме стоят смешанные двойные произведения, а они допускают циклическую перестановку сомножителей. Поэтому

$$\sum \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot \sum (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{i\,\text{внеш}}) = \boldsymbol{M}_{O'\,\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{M}_{O'\,\text{внеш}}$ — главный момент внешних сил относительно полюса O'.

В результате получаем

$$\boxed{\delta A = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{v}_{O'}\, dt + \boldsymbol{M}_{O'\,\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{\omega}\, dt.} \qquad (4)$$

Итак, *элементарная работа всех сил, приложенных к твердому телу, выражается через главный вектор внешних сил и главный момент внешних сил относительно произвольной точки.*

Для вычисления элементарной работы помимо действующих сил надо знать лишь скорость произвольной точки O' и мгновенную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$.

---

[1]) Здесь и далее в этой главе символ Σ без указания пределов суммирования означает сумму по всем точкам тела.

5° *Кинетическая энергия твердого тела равна кинетической энергии, которую имела бы материальная точка, расположенная в центре инерции тела, если бы в ней была сосредоточена вся масса тела, плюс кинетическая энергия тела в его движении относительно системы отсчета, связанной с центром инерции и движущейся вместе с ним поступательно* (теорема Кёнига[1])).

Чтобы доказать теорему Кёнига, выберем в теле произвольную точку O' и поместим в нее начало вспомогательной системы координат x', y', z', поступательно движущейся вместе с этой точкой. Тогда

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{iO'},$$

где $\boldsymbol{v}_{iO'}$ — скорость точки в ее движении относительно системы x', y', z'.

Приступим теперь к подсчету кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i. \tag{5}$$

Подставляя сюда выражение для $\boldsymbol{v}_i$, имеем

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i (\boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{iO'}) \cdot (\boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}_{iO'}) =$$
$$= \sum \frac{m_i v_{O'}^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{iO'}^2}{2} + \sum m_i \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{v}_{iO'}.$$

Первая сумма представляет собой кинетическую энергию тела в его переносном движении вместе с точкой O'. Она равна

$$T_{O'} = \sum \frac{m_i v_{O'}^2}{2} = \frac{v_{O'}^2}{2} \sum m_i = \frac{M v_{O'}^2}{2}.$$

Вторая сумма представляет собой кинетическую энергию движения тела по отношению к системе координат, движущейся поступательно с точкой O'. Обозначим ее через $T_{O'}^*$.

Третью сумму можно преобразовать так:

$$\sum m_i \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{v}_{iO'} = \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \sum m_i \boldsymbol{v}_{iO'} = M \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{v}_{CO'},$$

где $\boldsymbol{v}_{CO'}$ — скорость центра инерции в относительном движении.

Поэтому при произвольном выборе точки O'

$$T = T_{O'} + T_{O'}^* + M \boldsymbol{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{v}_{CO'}.$$

Если же выбрать точку O' в центре инерции C, то $\boldsymbol{v}_{CO'} = 0$ и

$$T = T_C + T_C^*. \tag{6}$$

---

[1]) Теорема Кёнига верна и для общего случая произвольной системы материальных точек. Однако она, как правило, используется при подсчете кинетической энергии твердого тела и поэтому излагается в этой главе.

Теорема Кёнига доказана.

Для того чтобы определить кинетическую энергию $T^*_{O'}$, обратим внимание на то, что в относительном движении точка O' неподвижна (она находится в начале координат системы x', y', z'), и поэтому $T^*_{O'}$ подсчитывается как кинетическая энергия тела, имеющего неподвижную точку. При наличии неподвижной точки всегда существует мгновенная ось вращения, проходящая через эту точку. В рассматриваемое мгновение скорости распределяются так, как если бы тело вращалось с угловой скоростью ω вокруг этой оси, поэтому

$$|\boldsymbol{v}_{iO'}| = \omega \rho_{Oi}, \tag{7}$$

где ρ_i — расстояние от i-й точки до мгновенной оси, и кинетическая энергия $T^*_{O'}$ равна

$$T^*_{O'} = \sum \frac{m_i v_{iO'}^2}{2} = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i \rho_i^2 = \frac{J_\omega \omega^2}{2}, \tag{8}$$

где J_ω — момент инерции относительно мгновенной оси (см. ниже).

6° *Твердое тело представляет собой систему с шестью степенями свободы.* Действительно, в гл. I было показано, что движение системы отсчета, а значит, и связанного с ней тела, всегда можно рассматривать как сложное движение, в котором переносным является поступательное движение вместе с какой-либо произвольно выбранной точкой A тела, а относительным — движение тела с неподвижной точкой A. Положение точки A полностью определяется тремя координатами этой точки; положение же тела, одна точка которого неподвижна, полностью определяется заданием трех величин, например трех углов (далее будет подробно разъяснено, каким образом можно выбрать эти три угла).

Условимся далее в качестве точки A выбирать центр тяжести C (т. е. центр инерции) тела. Тогда движение точки A, а значит, и поступательное движение системы, связанной с точкой A, полностью определяется теоремой о движении центра инерции

$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_C = \boldsymbol{R}_{\text{внеш}}.$$

Проектируя это уравнение на оси координат, получаем для движения центра инерции три скалярных уравнения

$$M\ddot{x}_C = \sum_{i=1}^{N} F_{ix\,\text{внеш}}, \quad M\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^{N} F_{iy\,\text{внеш}}, \quad M\ddot{z}_C = \sum_{i=1}^{N} F_{iz\,\text{внеш}}.$$

Для того чтобы полностью описать движение тела в пространстве, надо к этим трем уравнениям, определяющим движение центра инерции, добавить уравнения, описывающие изменение во времени обобщенных координат, характеризующих движение тела вокруг центра инерции. Выбор этих обобщенных координат и способы записи уравнений для них будут подробно рассмотрены ниже. Эти уравнения вместе с уравнениями для движения центра инерции и составляют систему дифференциальных уравнений, описывающих движение твердого тела.

В данном случае нас интересует только движение тела с вполне определенной неподвижной точкой — центром инерции, но движение тела с неподвижной точкой интересно и само по себе, так как оно часто встречается в приложениях. Примерами движения этого вида могут служить, например, движение гироскопа в кардановом подвесе и движение раскрученного волчка. Поэтому, рассматривая далее в этой главе движение относительно неподвижной точки, мы не будем связывать себя условием, что неподвижная точка расположена в центре инерции[1]).

7° Это замечание касается вращения тела относительно неподвижной оси l. Для подсчета кинетической энергии тела в этом случае нет нужды использовать теорему Кёнига даже в том случае, когда центр инерции тела не лежит на оси и имеет скорость, отличную от нуля. Действительно, можно выбрать начало координат на неподвижной оси и рассуждать точно так же, как это делалось в конце замечания 5° при подсчете $T^*_{O'}$, поскольку формула (8) определяет в этом случае не относительную, а абсолютную скорость, если считать, что ρ_i — расстояние от i-й точки до оси вращения. Поэтому в случае движения тела относительно неподвижной оси

$$T = \frac{1}{2}\,\omega^2 \sum m_i \rho_i^2. \tag{9}$$

Сумма, входящая в это выражение, называется *моментом инерции тела относительно оси* l и обозначается через J_l:

$$\boxed{J_l = \sum m_i \rho_i^2.} \tag{10}$$

В силу (9) и (10) имеем

$$\boxed{T = \frac{J_l \omega^2}{2}.} \tag{11}$$

[1]) Все уравнения и следствия из них, которые получаются далее, разумеется, относятся и к тому частному случаю, когда неподвижная точка совпадает с центром инерции тела.

При вращении тела относительно неподвижной оси кинетический момент относительно этой оси равен (рис. V.1)

$$K_l = \text{Пр}_l\left(\sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum m_i v_i \rho_i = \sum m_i \omega \rho_i^2 = J_l \omega. \qquad (12)$$

Для мгновенного вращения вокруг мгновенной оси соответственно имеем

$$\boxed{K_\omega = J_\omega \omega,} \qquad (13)$$

где K_ω — кинетический момент тела относительно мгновенной оси. В связи с тем, что мгновенная ось меняет свое положение относительно тела (вспомните подвижный и неподвижный аксоиды!), меняется и момент инерции J_ω. Этот факт имеет важное значение и в дальнейшем будет рассмотрен отдельно.

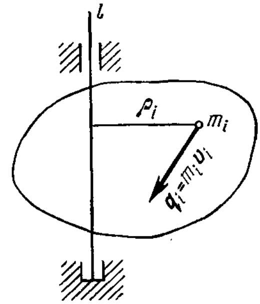

Рис. V.1.

Вернемся к формуле (12), т. е. к случаю, когда ось неподвижна. Дифференцируя по t обе части равенства (12), получаем

$$J_l \frac{d\omega}{dt} = \frac{dK_l}{dt}.$$

Но в силу теоремы об изменении кинетического момента производная в правой части равна M_l — главному моменту внешних сил относительно оси l, поэтому

$$J_l \frac{d\omega}{dt} = M_l,$$

или

$$\boxed{J_l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_l,} \qquad (14)$$

где φ — угол поворота тела вокруг оси l. Это равенство называют *дифференциальным уравнением вращения тела относительно неподвижной оси*. Если известны зависимость момента внешних сил относительно оси l от времени (либо от φ, либо от ω) и начальные данные (φ и ω в момент $t = t_0$), то решение дифференциального уравнения (14) позволит найти φ как функцию времени.

Равенство (14) по форме напоминает второй закон Ньютона для точки

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i,$$

но в нем вместо векторов $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{F}_i$ стоят скалярные величины φ и M_l, а роль массы играет момент инерции относительно оси.

§ 2. Геометрия масс твердого тела

Формулы (11)—(14) содержат одну и ту же величину — момент инерции относительно некоторой оси. Понятие о моменте инерции является центральным при изучении движения тела и будет далее играть важную роль, поэтому мы остановимся на нем подробнее. Момент инерции относительно оси является скалярной величиной, характеризующей не только массу тела, но и распределение ее относительно оси. Сохраняя общую массу тела и меняя лишь расстояние точек тела от оси, можно менять момент инерции и оказывать этим существенное влияние на такие важные характеристики движения, как кинетическая энергия и кинетический момент.

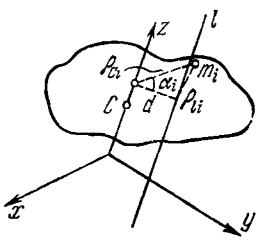

Рис. V.2.

Рассмотрим следующую задачу: предположим, что нам известен момент инерции тела относительно некоторой оси l, вычисленный по формуле (10); требуется определить момент инерции этого же тела относительно иной оси, параллельной оси l и проходящей через центр инерции C. Задачу эту решает

Теорема (Гюйгенса — Штейнера). *Момент инерции тела J_l относительно произвольной оси l равен моменту инерции тела J_C относительно оси, параллельной l и проходящей через центр инерции C, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями, т. е.*

$$J_l = J_C + Md^2, \tag{15}$$

где d — расстояние между осями.

Доказательство. Рассмотрим i-ю точку тела с массой m_i (рис. V.2). Обозначим через ρ_{Ci} расстояние от точки m_i до оси z, проведенной через центр инерции параллельно оси l, а через ρ_{li} — расстояние от этой же точки до оси l; тогда

$$\rho_{li}^2 = \rho_{Ci}^2 + d^2 - 2\rho_{Ci} d \cos\alpha_i. \tag{16}$$

Умножая обе стороны равенства (16) на m_i и суммируя по всем точкам тела, получаем

$$\sum m_i \rho_{li}^2 = \sum m_i \rho_{Ci}^2 + d^2 \sum m_i - 2d \sum \rho_{Ci} m_i \cos\alpha_i. \tag{17}$$

Выражение в левой части равенства (17) равно J_l. Первая сумма в правой части равна J_C, т. е. моменту инерции относительно оси, параллельной оси l и проходящей через центр инерции тела. Следующий член в правой части уравнения (17) равен Md^2, где d — расстояние между осями z и l. Нам осталось показать лишь, что последний член в формуле (17) равен нулю. Чтобы сделать это, выберем начало координат на оси z и направим ось y так, чтобы она пересекала ось l (см. рис. V.2). Тогда последнюю сумму в правой части выражения (17) можно переписать так:

$$\sum m_i \rho_{Ci} \cos\alpha_i = \sum m_i y_i = My_C = 0. \tag{18}$$

Этот член равен нулю в связи с тем, что по построению ось z проходит через начало координат, и следовательно, координата y_C центра инерции равна нулю. Теорема Гюйгенса — Штейнера доказана.

Теорема Гюйгенса — Штейнера удобна в том отношении, что она позволяет использовать приведенные в справочниках моменты инерции типичных фигур и тел относительно стандартных осей, проходящих через центр инерции, для вычисления моментов инерции относительно других осей, параллельных стандартным. Теорема эта не помогает, однако, вычислить моменты инерции относительно осей, образующих заданные углы со стандартными. Поэтому естественно возникает вопрос о том, как меняется момент инерции при повороте оси.

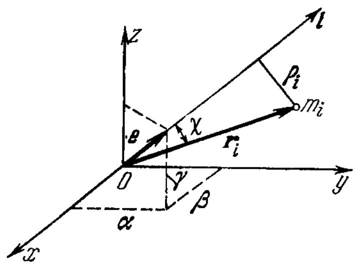

Рис. V.3.

Рассмотрим систему декартовых координат x, y, z и предположим, что моменты инерции тела относительно этих осей заданы. Пусть, далее, задана ось l, полностью ориентированная относительно осей x, y, z (рис. V.3). Говоря, что ось полностью ориентирована относительно системы координат, мы утверждаем тем самым, что задан ее орт $\boldsymbol{e}$, т. е. заданы направляющие косинусы. Обозначим их (именно направляющие косинусы, а не углы!) через α, β и γ соответственно. Требуется по заданным моментам инерции относительно осей x, y, z и направляющим косинусам α, β, γ определить моменты инерции относительно оси l.

В соответствии с рис. V.3 расстояние i-й точки тела m_i от оси l составляет $\rho_i = |\boldsymbol{r}_i| \sin\chi$. Заметим, что такую же абсолютную величину имеет векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_i$ на орт $\boldsymbol{e}$ оси l, $|\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{e}| = r_i \sin\chi$. Таким образом,

$$\rho_i^2 = |\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{e}|^2. \tag{19}$$

Но

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{e} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (y_i\gamma - z_i\beta)\,\boldsymbol{i} + (z_i\alpha - x_i\gamma)\,\boldsymbol{j} + (x_i\beta - y_i\alpha)\,\boldsymbol{k} \tag{20}$$

и поэтому

$$|\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{e}|^2=(y_i\gamma-z_i\beta)^2+(z_i\alpha-x_i\gamma)^2+(x_i\beta-y_i\alpha)^2=$$
$$=\alpha^2(y_i^2+z_i^2)+\beta^2(x_i^2+z_i^2)+\gamma^2(x_i^2+y_i^2)-$$
$$-2\alpha\beta x_iy_i-2\alpha\gamma x_iz_i-2\beta\gamma y_iz_i. \qquad (21)$$

Умножив теперь левую и правую части равенства (21) на m_i и просуммировав выражение по всем точкам тела, получим

$$J_l=\alpha^2\sum m_i(y_i^2+z_i^2)+\beta^2\sum m_i(x_i^2+z_i^2)+\gamma^2\sum m_i(x_i^2+y_i^2)-$$
$$-2\alpha\beta\sum m_ix_iy_i-2\alpha\gamma\sum m_ix_iz_i-2\beta\gamma\sum m_iy_iz_i. \qquad (22)$$

Правая часть формулы (22) содержит шесть сумм. Под знаками первых трех сумм в скобках оказались выражения, равные квадратам расстояний точки m_i от осей x, y и z соответственно:

$$\rho_{ix}^2=y_i^2+z_i^2,\quad \rho_{iy}^2=x_i^2+z_i^2,\quad \rho_{iz}^2=x_i^2+y_i^2.$$

Поэтому формулу (22) можно переписать так:

$$J_l=\alpha^2\sum m_i\rho_{ix}^2+\beta^2\sum m_i\rho_{iy}^2+\gamma^2\sum m_i\rho_{iz}^2-$$
$$-2\alpha\beta\sum m_ix_iy_i-2\alpha\gamma\sum m_ix_iz_i-2\beta\gamma\sum m_iy_iz_i. \qquad (23)$$

В правой части этого равенства первые три члена содержат моменты инерции относительно осей x, y и z соответственно. Что же касается остальных трех сумм, то они выражают геометрические характеристики распределения масс, которые отличаются от введенных выше моментов инерции. Обозначим каждую из этих сумм буквой J с двойным индексом, указав в качестве этих индексов координаты, фигурирующие в соответствующих суммах:

$$J_{xy}=\sum m_ix_iy_i,\quad J_{xz}=\sum m_ix_iz_i,\quad J_{yz}=\sum m_iy_iz_i. \qquad (24)$$

Тогда равенство (23) можно окончательно представить в виде

$$\boxed{J_l=\alpha^2J_x+\beta^2J_y+\gamma^2J_z-2\alpha\beta J_{xy}-2\alpha\gamma J_{xz}-2\beta\gamma J_{yz}.} \qquad (25)$$

Входящие в формулу (25) выражения (24) называются *центробежными моментами инерции* (или произведениями инерции) тела относительно системы осей x, y, z. Очевидно,

$$J_{xy}=J_{yx},\quad J_{xz}=J_{zx},\quad J_{yz}=J_{zy}. \qquad (26)$$

В этом смысле существуют не три, а шесть центробежных моментов инерции для данной системы координат x, y, z, но они попарно равны между собой в силу симметрии формул (24).

Вернемся теперь к формуле (25). Она указывает, что поставленная выше задача об определении момента инерции относительно некоторой оси, полностью ориентированной по отношению к декартовой системе осей, лишь по моментам инерции этого же тела относительно декартовых осей, вообще говоря, не имеет решения — надо знать еще центробежные моменты этого же тела, которые не определяются через моменты инерции относительно трех ортогональных осей. Для определения момента инерции относительно произвольно ориентированной оси нужно знать шесть (точнее, девять, но в силу симметрии три из них попарно равны друг другу) скалярных величин: три момента инерции относительно ортогональных осей и три центробежных момента инерции.

Момент инерции тела относительно некоторой оси l определяется только тем, как распределены массы тела относительно этой оси, и, разумеется, совершенно не зависит от того, каким образом выбрана система координат, по отношению к которой моменты инерции известны. При изменении системы координат изменяется шестерка указанных чисел — характеристик этой системы, но изменяется и ориентация рассматриваемой оси относительно системы, т. е. направляющие косинусы α, β и γ; общее же выражение, позволяющее определить момент инерции тела через характеристики избранной системы и направляющие косинусы, остается одним и тем же и задается формулой (25). Можно показать, что при повороте системы декартовых координат x, y, z относительно рассматриваемой точки O моменты инерции J_x, J_y и J_z и центробежные моменты инерции изменяются в соответствии с формулами, определяющими симметрический тензор второго ранга[1]). Поэтому матрица

$$J=\begin{Vmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{Vmatrix} \tag{27}$$

определяет тензор второго ранга. Его называют *тензором инерции тела*. В силу соотношений (26) тензор инерции тела является симметрическим тензором.

Тензор инерции — важнейшая характеристика твердого тела.

Свяжем теперь с тензором инерции удобный геометрический образ. Выберем произвольную систему координат x, y, z и произвольно ориентированное в этой системе направление оси l с ортом $\boldsymbol{e}$. Отложим вдоль оси l из начала координат отрезок ON, равный $1/\sqrt{J_l}$ (рис. V.4). Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — координаты точки N. Найдем уравнение геометрического места точек N для всех возможных осей l.

[1]) Мы не имеем возможности здесь входить в детали для разъяснения свойств тензоров и отсылаем читателя к любому курсу векторного и тензорного исчисления, например, к книге: Борисенко А. И., Тарапов И. Е. Векторный анализ и начало тензорного исчисления. — М.: Высшая школа, 1966.

Вспоминая, что α, β и γ — направляющие косинусы орта $\boldsymbol{e}$, можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= (1/\sqrt{J_l})\alpha, \quad \text{или} \quad \alpha = \sqrt{J_l}\,\tilde{x}, \\ \tilde{y} &= (1/\sqrt{J_l})\beta, \quad \text{или} \quad \beta = \sqrt{J_l}\,\tilde{y}, \\ \tilde{z} &= (1/\sqrt{J_l})\gamma, \quad \text{или} \quad \gamma = \sqrt{J_l}\,\tilde{z}. \end{aligned} \tag{28}$$

Подставляя эти выражения α, β и γ в формулу (25), получаем

$$\boxed{J_x\tilde{x}^2 + J_y\tilde{y}^2 + J_z\tilde{z}^2 - 2J_{xy}\tilde{x}\tilde{y} - 2J_{yz}\tilde{y}\tilde{z} - 2J_{xz}\tilde{x}\tilde{z} = 1.} \tag{29}$$

Таким образом, геометрическим местом концов указанных отрезков, т. е. геометрическим местом точек N, является поверхность второго порядка. По самому построению длина отрезка ON на рис. V.4 отлична от нуля и ограничена, так как для любого конечного тела момент инерции J_l — величина, отличная от нуля и ограниченная. Среди поверхностей второго порядка ограничены лишь эллипсоиды (в частности, сферы). Следовательно, геометрическим местом точек N является эллипсоид[1]). Построенный так эллипсоид называется *эллипсоидом инерции* для точки O. Уравнение (29) является уравнением эллипсоида инерции для этой точки. Непосредственно видно, что задание тензора инерции однозначно задает эллипсоид инерции.

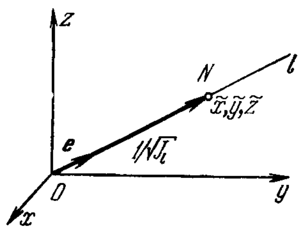

Рис. V.4.

Таким образом, для данного тела с каждой точкой пространства связывается геометрический образ — эллипсоид, который изменяется при переходе от одной точки пространства к другой.

Как известно из аналитической геометрии, для любого эллипсоида существуют главные оси. В главных осях x^*, y^*, z^* уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{b^2} + \frac{z^{*2}}{c^2} = 1, \tag{30}$$

[1]) Лишь в вырожденном случае стержня нулевого сечения (отрезка материальной прямой) относительно оси стержня $J_l = 0$; в этом случае эллипсоид инерции вырождается в круговой цилиндр с осью l.

где a, b, c — полуоси эллипсоида. В связи с тем, что полуоси эллипсоида равны расстояниям от его центра до поверхности, они равны

$$a=\frac{1}{\sqrt{J_x^*}},\quad b=\frac{1}{\sqrt{J_y^*}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{J_z^*}}. \tag{31}$$

Подставляя выражения (31) в (30), получаем уравнение эллипсоида инерции в главных осях

$$J_{x^*}x^{*2}+J_{y^*}y^{*2}+J_{z^*}z^{*2}=1. \tag{32}$$

Сравнивая теперь уравнение эллипсоида инерции, записанное в главных осях в форме (32), и уравнение эллипсоида инерции (29), записанное в произвольно выбранных осях, заключаем, что в системе координат, оси которой направлены по главным осям эллипсоида инерции, центробежные моменты инерции равны нулю:

$$J_{x^*y^*}=J_{x^*z^*}=J_{y^*z^*}=0. \tag{33}$$

Если эллипсоид инерции отличен от сферы и не является эллипсоидом вращения, то существует единственная система главных осей. При этих условиях в каждой точке пространства может быть указана единственная система осей, замечательная тем, что по отношению к этой системе центробежные моменты инерции равны нулю. Оси, удовлетворяющие этому условию, называются *главными осями инерции* тела для рассматриваемой точки, а моменты инерции относительно этих осей — *главными моментами инерции*. Главные оси инерции, проходящие через центр инерции тела, называются *главными центральными осями инерции.*

Таким образом, основная характеристика геометрии масс — тензор инерции тела — позволяет ввести две важные характеристики распределения масс тела по отношению к рассматриваемой точке пространства: первой характеристикой является эллипсоид инерции, построенный в этой точке, второй — связанная с ним система главных осей инерции. При переходе от одной точки к другой, вообще говоря, меняются как эллипсоид инерции, так и направления главных осей. Разумеется, существует исключительный случай, когда главными осями инерции являются любые ортогональные оси, проведенные через рассматриваемую точку, — такой случай имеет место, когда эллипсоид инерции в точке является сферой.

Сделаем теперь несколько замечаний, касающихся главных осей и моментов инерции.

Замечание 1. До сих пор, говоря «главные оси инерции», мы имели в виду всю систему ортогональных декартовых осей. Рассмотрим теперь случай, когда в точке O при некотором выборе осей x, y, z

$$J_{xz}=J_{yz}=0,\quad J_{xy}\neq 0.$$

Мы покажем далее, что в этом случае можно повернуть систему координат вокруг оси z на такой угол (он находится единственным образом), что в новой системе координат x', y', z' все три центробежных момента будут равны нулю:

$$J_{x'y'} = J_{x'z'} = J_{y'z'} = 0.$$

В таких случаях говорят, что ось z (а не вся система координат!) является главной осью инерции в точке O. Вообще, если два центробежных момента инерции равны нулю, а третий отличен от нуля, то ось, соответствующая общему индексу равных нулю центробежных моментов инерции, называется *главной осью инерции в точке O*.

Тот факт, что такой поворот координат действительно возможен и является единственным, следует немедленно из формул, выражающих новые координаты через старые при повороте системы координат относительно оси z:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= y\cos\alpha - x\sin\alpha, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{34}$$

Используя равенства (34) и условие $J_{yz} = J_{xz} = 0$, вычислим моменты инерции $J_{y'z'}$ и $J_{x'z'}$:

$$\begin{aligned} J_{y'z'} &= \sum m_i y_i' z_i' = \cos\alpha \sum m_i y_i z_i - \sin\alpha \sum m_i x_i z_i = \\ &= J_{yz}\cos\alpha - J_{xz}\sin\alpha = 0, \\ J_{x'z'} &= \sum m_i z_i' x_i' = \cos\alpha \sum m_i x_i z_i + \sin\alpha \sum m_i y_i z_i = \\ &= J_{xz}\cos\alpha + J_{yz}\sin\alpha = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, два центробежных момента инерции, равные нулю до поворота системы координат, остаются равными нулю при любом повороте вокруг оси z. Подсчитаем теперь

$$\begin{aligned} J_{x'y'} &= \sum m_i x_i' y_i' = \\ &= \sin\alpha\cos\alpha \sum m_i y_i^2 - \sin\alpha\cos\alpha \sum m_i x_i^2 + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \sum m_i x_i y_i = \\ &= -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \left(\sum m_i x_i^2 - \sum m_i y_i^2\right) + \cos 2\alpha \sum m_i x_i y_i. \end{aligned} \tag{36}$$

Поскольку

$$\sum m_i x_i^2 - \sum m_i y_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) - \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = J_y - J_x,$$

из формулы (36) непосредственно следует, что существует единственный угол α, при котором $J_{x'y'} = 0$:

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \tag{37}$$

Указанные выше рассуждения оправдывают наименование «главная ось инерции» для отдельно взятой оси.

Замечание 2. Пусть в точке O задана система координат x, y, z, и пусть ось z является главной для точки O. Выясним, остается ли она главной для любых других точек, лежащих на этой оси. Иначе говоря, выберем произвольную точку A на оси z и проведем через нее оси x', y', параллельные осям x, y (ось z' совпадает с осью z; см. рис. V.5). Будет ли ось z' главной также и для точки A?

Новые координаты точек выражаются через старые так:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - a$$

$(a = OA)$, и поэтому центробежные моменты инерции относительно новых осей равны

$$J_{x'z'} = \sum m_i x_i (z_i - a) = J_{xz} - aMx_C,$$
$$J_{y'z'} = \sum m_i y_i (z_i - a) = J_{yz} - aMy_C,$$
$$J_{x'y'} = \sum m_i x_i y_i = J_{xy}.$$

Из того факта, что старые моменты инерции J_{xz} и J_{yz} равны нулю, следует, что новые моменты инерции $J_{x'z'}$ и $J_{y'z'}$ равны нулю тогда и только тогда, когда $x_C = y_C = 0$, т. е. когда центр инерции расположен на оси z. Таким образом, *главная ось инерции остается главной для всех своих точек тогда и только тогда, когда она является главной центральной осью инерции.*

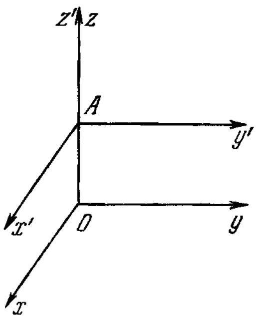

Рис. V.5.

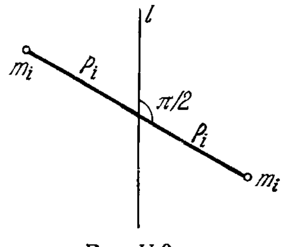

Рис. V.6.

Замечание 3. Если у тела есть ось материальной симметрии, то она является главной центральной осью инерции этого тела.

Осью материальной симметрии называется ось, обладающая следующим свойством. Если из произвольной i-й точки с массой m_i провести прямую, перпендикулярную этой оси, то на продолжении такой прямой найдется другая точка с точно такой же массой m_i, расположенная от прямой на том же самом расстоянии (рис. V.6). Приняв ось материальной симметрии за ось z и направив из ее произвольной точки O любым образом оси x и y (но так, чтобы система x, y, z была правой), замечаем, что из свойств материальной симметрии следует, что для каждой i-й точки тела с координатами x_i, y_i, z_i и массой m_i можно найти в теле точку с той же массой m_i и с координатами $-x_i$, $-y_i$, z_i. Поэтому центробежные моменты инерции $J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$ и $J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$ равны нулю, так как в этих суммах все члены попарно уничтожаются. Следовательно, ось материальной симметрии — главная ось инерции для любой своей точки. Она является центральной осью, поскольку центр инерции C расположен на оси материальной симметрии.

Замечание 4. Если в теле есть плоскость материальной симметрии, то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью для точки, в которой эта прямая пересекает плоскость материальной симметрии.

Говорят, что тело имеет плоскость материальной симметрии, если для любой i-й точки с массой m_i можно найти другую точку с такой же массой, которая лежит на общем перпендикуляре к плоскости и на одинаковом от этой плоскости расстоянии, но по другую сторону от нее. Выберем в плоскости материальной симметрии произвольную точку O и проведем через нее перпендикулярную плоскости ось z, а оси x и y поместим в самой плоскости. Тогда для любой точки с массой m_i и с координатами x_i, y_i, z_i в теле найдется точка с той же массой m_i и с координатами x_i, y_i, $-z_i$. Поэтому в суммах $\sum m_i x_i z_i$ и $\sum m_i y_i z_i$ также все члены попарно уничтожаются и

$$J_{xz}=J_{yz}=0.$$

Если в некоторой точке можно указать три главные оси инерции такие, что через любые две из них нельзя провести плоскость, перпендикулярную третьей, то эллипсоид инерции для этой точки заведомо является сферой [1]). Иногда это можно обнаружить, используя настоящее замечание.

В качестве примера рассмотрим однородный куб. Проведем через центр куба три плоскости материальной симметрии: две из них параллельны граням, а третья проходит через два противоположных ребра. В силу настоящего замечания перпендикуляры к этим плоскостям, проведенные через центр куба, представляют собой главные оси инерции; вместе с тем они удовлетворяют ука-

[1]) Если эллипсоид инерции не является эллипсоидом вращения, то его главные оси взаимно перпендикулярны. У эллипсоида вращения ось вращения — одна из главных осей инерции, а остальные главные оси лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Лишь в том случае, когда эллипсоид вращения — сфера и любая ось — главная, существуют такие три главные оси инерции, что плоскость, проходящая через любые две из них, не перпендикулярна третьей.

занному выше условию. Следовательно, эллипсоид инерции куба для его центра является сферой.

Заметим, между прочим, что хотя моменты инерции куба относительно трех ребер, проходящих через его вершину, одинаковы, эллипсоид инерции для вершины куба заведомо отличен от сферы. Действительно, равные моменты инерции относительно трех указанных выше перпендикуляров, проведенных через центр куба, при переносе осей в вершину получают различные приращения, и результирующие моменты инерции будут разными. Читателю предлагается самому найти главные оси инерции для вершины куба.

Замечание 5. Для однородных тел вращения ось вращения и любые две взаимно перпендикулярные и перпендикулярные ей прямые образуют систему главных осей инерции. Действительно, ось вращения всегда является осью материальной симметрии и поэтому в силу замечания 3 является главной осью инерции. Для тела вращения любая плоскость, проходящая через ось вращения, является плоскостью материальной симметрии. Выберем поэтому на оси вращения произвольную точку и проведем через нее две взаимно перпендикулярные прямые, перпендикулярные оси вращения. Проводя затем поочередно плоскости через ось вращения и каждую из этих прямых, убеждаемся, что в силу замечания 4 вторая прямая, перпендикулярная проведенной плоскости, является главной осью инерции. Утверждение доказано.

Замечание 6. Моменты инерции произвольного тела относительно трех взаимно перпендикулярных осей удовлетворяют «неравенствам треугольника», т. е. неравенствам

$$\begin{aligned} &J_x+J_y\geqslant J_z, \quad J_x-J_y\leqslant J_z,\\ &J_y+J_z\geqslant J_x, \quad J_y-J_z\leqslant J_x,\\ &J_z+J_x\geqslant J_y, \quad J_z-J_x\leqslant J_y. \end{aligned}$$

Докажем два из этих неравенств (остальные доказываются аналогично). По определению

$$J_x=\sum m_i(y_i^2+z_i^2), \quad J_y=\sum m_i(z_i^2+x_i^2),$$
$$J_z=\sum m_i(x_i^2+y_i^2),$$

поэтому

$$J_x+J_y=\sum m_i(x_i^2+y_i^2+2z_i^2)=\sum m_i(x_i^2+y_i^2)+2\sum m_i z_i^2.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства — не что иное, как J_z, а второе слагаемое неотрицательно. Таким образом,

$$J_x+J_y\geqslant J_z,$$

откуда

$$J_z-J_x\leqslant J_y.$$

Для плоской фигуры, лежащей в плоскости xOy, $z_i \equiv 0$, и мы имеем

$$J_x + J_y = J_z.$$

Рассмотрим, например, однородный диск радиуса r и поместим начало координат в его центр, направив ось z перпендикулярно плоскости диска. Так как для диска $J_x = J_y$, сразу имеем

$$2J_x = J_z = {}^1/_2 mr^2, \text{ т. е. } J_x = {}^1/_4 mr^2,$$

и мы (без всякого интегрирования!) подсчитали момент инерции диска относительно диаметра.

Первые пять замечаний позволяют в некоторых важных случаях сразу указать главные или даже главные центральные оси инерции. В общем случае для нахождения главных осей инерции надо по обычным правилам линейной алгебры привести квадратичную форму (29) к каноническому виду (к главным осям).

Если оси координат неподвижны и тело движется относительно этих осей, то моменты инерции тела относительно этих осей меняются во время движения. Между тем моменты инерции являются важными характеристиками движения и войдут далее в его уравнения. Естественно поэтому, что при исследовании движения твердого тела оказывается более удобным ввести в рассмотрение оси, жестко связанные с телом и движущиеся вместе с ним. Тогда моменты инерции тела по отношению к таким осям уже не меняются.

Моменты инерции тела относительно осей ξ, η, ζ, жестко связанных с телом, принято обозначать первыми буквами латинского алфавита A, B, C, D, E, F, а именно

$$A = J_\xi, \quad B = J_\eta, \quad C = J_\zeta, \quad D = J_{\eta\zeta}, \quad E = J_{\xi\zeta}, \quad F = J_{\xi\eta}. \tag{38}$$

Для осей, жестко связанных с телом, формулу (25) можно теперь переписать так:

$$J_l = \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\beta\gamma D - 2\alpha\gamma E - 2\alpha\beta F. \tag{39}$$

§ 3. Кинетическая энергия и кинетический момент твердого тела, имеющего неподвижную точку

Прежде чем приступить в следующем параграфе к исследованию уравнений движения тела с неподвижной точкой, мы рассмотрим, как вычисляют при таком движении две его основные характеристики: кинетическую энергию и вектор кинетического момента.

Свяжем с телом оси декартовой системы координат ξ, η, ζ с началом в неподвижной точке. В каждое мгновение скорости тела распределены так, как будто происходит вращение относительно мгновенной оси с некоторой мгновенной угловой скоростью, и поэтому существует вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Предположим теперь, что в некоторое мгновение орт угловой скорости имеет направляющие косинусы, равные α, β и γ, так что проекции вектора угловой скорости на оси ξ, η, ζ системы координат, связанной с телом, соответственно равны

$$p = \alpha\omega, \quad q = \beta\omega, \quad r = \gamma\omega. \tag{40}$$

Проекции p, q, r вектора угловой скорости на оси связанной с телом системы будут иметь большое значение во всем дальнейшем изложении. Именно, они будут играть роль вспомогательных координат, при помощи которых мы запишем далее уравнения движения тела с неподвижной точкой. Поэтому существенно выразить основные функции, характеризующие движение, — скалярную функцию (кинетическую энергию) и векторную функцию (кинетический момент) — через эти переменные p, q и r.

1. Кинетическая энергия. Если известен момент инерции J_ω тела относительно мгновенной оси $\boldsymbol{\omega}$, то кинетическая энергия тела, разумеется, равна

$$T = J_\omega \frac{\omega^2}{2}. \tag{41}$$

Однако J_ω изменяется во времени, так как мгновенная ось перемещается относительно тела. Выразим поэтому кинетическую энергию не через момент инерции J_ω, а через элементы тензора инерции для неподвижной точки и закрепленных в теле осей ξ, η и ζ, т. е. через A, B, C, D, E, F.

Момент инерции J_ω может быть выражен через элементы этого тензора при помощи формулы (39). Подставив это выражение для J_ω в формулу (41), получим

$$2T = (\alpha\omega)^2 A + (\beta\omega)^2 B + (\gamma\omega)^2 C - 2(\beta\omega)(\gamma\omega) D - \\ - 2(\alpha\omega)(\gamma\omega) E - 2(\alpha\omega)(\beta\omega) F.$$

Воспользовавшись далее соотношениями (40), имеем

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2 - Dqr - Epr - Fpq.} \tag{42}$$

Если оси ξ, η, ζ являются главными осями инерции для неподвижной точки, то в этом (и только в этом) случае $D = E = F = 0$ и формула (42) принимает более простой вид

$$\boxed{T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).} \tag{43}$$

Следовательно, кинетическая энергия тела с неподвижной точкой в общем случае *не равна* сумме кинетических энергий трех вращений, происходящих относительно трех связанных с телом осей с угловыми скоростями, равными проекциям угловой скорости тела на эти оси. Такое простое соотношение получается лишь в том исключительном случае, когда оси, связанные с телом, совпадают с главными осями инерции для неподвижной точки. При любом ином выборе связанных осей необходимо учитывать еще дополнительные члены, обусловленные центробежными моментами инерции и выписанные в формуле (42).

2. Кинетический момент. Из определения кинетического момента имеем

$$K_O = \sum \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i).$$

Раскрывая это двойное векторное произведение, получаем

$$K_O = \sum m_i \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{r}_i) - \sum m_i \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) = \\ = \sum m_i \boldsymbol{\omega} (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum m_i \boldsymbol{r}_i (\xi_i p + \eta_i q + \zeta_i r). \qquad (44)$$

Спроектируем левую и правую части векторного равенства (44) на ось ξ:

$$K_\xi = p \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) - \sum m_i \xi_i (\xi_i p + \\ + \eta_i q + \zeta_i r) = p \sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) - q \sum m_i \xi_i \eta_i - r \sum m_i \xi_i \zeta_i.$$

Выражения в скобках в первой сумме равны квадратам расстояний до оси ξ, и следовательно, эта сумма представляет собой момент инерции относительно оси ξ, т. е. A. Аналогично вторая и третья суммы образуют центробежные моменты инерции F и E соответственно. Поэтому

$$K_\xi = Ap - Fq - Er. \qquad (45)$$

Далее можно было бы совершенно аналогично спроектировать равенство (44) сначала на ось η, а затем на ось ζ, и определить так выражения для K_η и K_ζ. Можно, однако, поступить иначе. Правая часть выражения (45) содержит лишь элементы тензора инерции относительно осей ξ, η, ζ и проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на эти же оси, а левая часть — проекцию на одну из этих осей вектора K_O. Все операции над векторами и тензорами инвариантны относительно циклической перестановки осей, лишь бы при этом не менялась взаимная ориентация осей, т. е. правая система координат переходила в правую же систему. Дважды выполняя циклическую перестановку осей, т. е. элементов тензора инерции и проекций векторов ω и K_O в равенстве (45), получаем два аналогичных равенства, так что в конечном итоге

$$\boxed{\begin{aligned} K_\xi &= Ap - Fq - Er, \\ K_\eta &= Bq - Dr - Fp, \\ K_\zeta &= Cr - Ep - Dq \end{aligned}} \tag{46}$$

Формулы (46) определяют кинетические моменты тела относительно связанных с ним осей через проекции угловой скорости на эти оси и элементы тензора инерции.

В том и только в том случае, когда оси, связанные с телом, направлены по главным осям инерции для неподвижной точки, центробежные моменты равны нулю и формулы (46) превращаются в обычные соотношения

$$\boxed{K_\xi = Ap, \quad K_\eta = Bq, \quad K_\zeta = Cr.} \tag{47}$$

Таким образом, кинетические моменты относительно осей, связанных с телом, вообще говоря, *не могут* быть определены как произведения проекции угловой скорости на соответствующую ось на момент инерции тела относительно оси. Такое простое определение кинетических моментов относительно осей, связанных с телом, возможно лишь в указанном выше исключительном случае, когда эти оси являются главными.

Рассмотрим теперь взаимное расположение двух векторов: вектора угловой скорости ω и вектора кинетического момента K_O. Их проекции на главные оси инерции ξ, η, ζ таковы:

вектор ω: p, q, r,

вектор K_O: Ap, Bq, Cr.

Отсюда сразу следует, что направления этих векторов, вообще говоря, *не совпадают*.

Направления векторов ω и K_O совпадают лишь в том случае, когда вектор ω направлен вдоль одной из главных осей, например вдоль оси ξ (либо η, либо же ζ), т. е. когда из трех проекций угловой скорости на эти оси две проекции равны нулю. Этот случай, разумеется, всегда имеет место, если эллипсоид инерции для неподвижной точки является сферой, т. е. если $A = B = C$, так как в случае, когда эллипсоид инерции — сфера, любая ось, проходящая через неподвижную точку, является главной осью инерции [1]).

[1]) Сделаем теперь замечание, касающееся случая, когда тело вращается вокруг неподвижной оси. Выберем в этом случае на оси вращения точку O и поместим в нее начало связанной с телом системы координат, направив ее оси ξ, η, ζ по главным осям инерции. Если ось вращения совпадает с одной

Сравнивая теперь формулу (42) и формулы (46), устанавливаем соотношения

$$K_O \cdot \omega = 2T \tag{48}$$

и

$$K_\xi = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad K_\eta = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad K_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r}. \tag{49}$$

Если ввести в рассмотрение матрицу $\| J_{ij} \|$ тензора инерции для неподвижной точки в выбранной системе связанных с телом осей, то соотношение между вектором кинетического момента и вектором угловой скорости можно записать в векторно-матричной форме:

$$\boxed{K_O = \| J_{ij} \| \, \omega.} \tag{50}$$

В этом смысле *матрица тензора инерции является матрицей преобразования вектора угловой скорости в вектор кинетического момента.*

§ 4. Эйлеровы углы и кинематические уравнения Эйлера

Рассмотрим две системы координат с общим началом в неподвижной точке O: неподвижную в пространстве («латинскую») систему x, y, z и жестко связанную с телом и движущуюся вместе с ним («греческую») систему ξ, η, ζ. Тело с неподвижной точкой, как уже указывалось выше, имеет три степени свободы, и поэтому для того, чтобы определить его положение в пространстве, надо задать три обобщенные координаты.

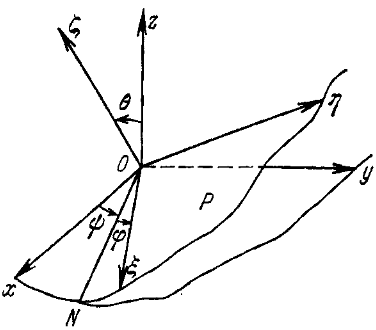

Рис. V.7.

Проведем через оси ξ и η плоскость P до пересечения с плоскостью xOy (рис. V.7). Линия, по которой эта плоскость P пересекает плоскость xOy, обозначается N и называется *линией узлов*. Угол между осью x и линией узлов обозначается буквой ψ и называется *углом прецессии*.

из этих осей, то оба вектора — не только вектор ω, но и вектор K_O — будут направлены вдоль оси вращения. Если же ось вращения не является главной осью инерции для точки O, то *вектор K_O не будет направлен вдоль этой оси.*

Вектор K для всех точек, взятых на оси вращения, будет направлен вдоль этой оси только в том случае, когда ось вращения — главная центральная ось инерции, так как тогда она является главной осью для всех своих точек (см. замечание 2 в § 2 этой главы).

Задание угла ψ полностью определяет положение линии узлов в пространстве, однако вся плоскость P может поворачиваться относительно линии узлов без изменения угла ψ и, кроме того, система ξ, η, ζ может вращаться относительно оси ζ также без изменения этого угла. Чтобы фиксировать положение в плоскости P осей ξ и η греческой системы, введем в плоскости P угол φ между линией узлов и осью ξ. Этот угол называется *углом собственного* (или *чистого*) *вращения*.

Теперь, когда углы φ и ψ фиксированы, у тела остается лишь одна степень свободы: не меняя этих углов, можно повернуть тело вокруг линии узлов. Чтобы фиксировать и этот поворот, введем в рассмотрение еще один угол θ между осью z и осью ζ. Этот угол называется *углом нутации*. Задание трех углов ψ, φ и θ полностью определяет положение греческой системы относительно латинской, т. е. полностью определяет положение тела. Вместе с тем эти три угла независимы в том смысле, что каждый из них можно менять без изменения двух остальных углов. Поэтому углы ψ, φ, θ могут служить обобщенными координатами тела с неподвижной точкой O. Углы эти называются *эйлеровыми углами*.

Разумеется, эйлеровы углы — не единственно возможный выбор обобщенных координат. В динамике полета, например при исследовании движения самолета или ракеты, используется иногда иной выбор обобщенных координат: в качестве трех углов, характеризующих положение летящего тела, принимают угол отклонения горизонтальной оси самолета от заданного курса (угол рыскания), угол поворота вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно курсу, например вдоль крыльев, и характеризующей отклонение от горизонтали (угол тангажа), и наконец, угол поворота вокруг продольной оси самолета (угол крена).

При изучении движения тела с неподвижной точкой мы в качестве обобщенных координат будем брать эйлеровы углы, т. е. считать, что

$$q_1 = \psi, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta. \tag{51}$$

Угловые скорости $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ изображаются векторами, направленными перпендикулярно плоскостям, в которых расположены соответствующие углы. Поэтому угловая скорость $\dot{\varphi}$ направлена перпендикулярно плоскости P, т. е. по оси ζ; угловая скорость $\dot{\psi}$ — перпендикулярно плоскости xOy, т. е. по оси z; и наконец, угловая скорость $\dot{\theta}$ направлена перпендикулярно плоскости, проходящей через оси ζ и z, т. е. вдоль линии узлов (рис. V.8). В связи с тем, что эйлеровы углы независимы, угловые скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ представляют собой систему трех независимых угловых скоростей, пересекающихся в одной точке O. Движение тела можно при этом рассматривать как сложное движение, состоящее из трех независимых вращений; в соответствии с общими правилами сложения движений результирующая угловая скорость равна геометрической сумме этих трех угловых скоростей:

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta}.$$

Раньше мы разложили эту же угловую скорость ω иначе — на три составляющие вдоль осей ξ, η и ζ и обозначили эти три составляющие буквами p, q и r соответственно. Поэтому

$$\omega = \boldsymbol{i}p + \boldsymbol{j}q + \boldsymbol{k}r.$$

Но существует только один вектор угловой скорости, а выписанные равенства представляют лишь его разложения по разным направлениям, так что

$$\omega = \boldsymbol{i}p + \boldsymbol{j}q + \boldsymbol{k}r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta}. \qquad (52)$$

Для того чтобы установить связь между p, q, r — проекциями вектора ω на оси, связанные с телом, и эйлеровыми углами,

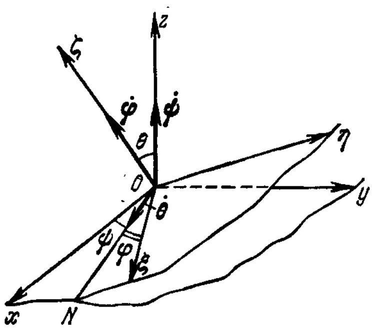

Рис. V.8.

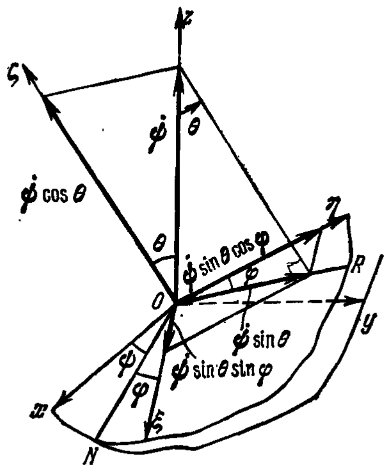

Рис. V.9.

спроектируем поочередно равенства (52) на эти оси. Вспомогательное построение, используемое при проектировании вектора $\dot{\psi}$, показано на рис. V.9, где R — прямая в плоскости $\xi O \eta$, перпендикулярная линии узлов. В соответствии с рис. V.8 и V.9 проектирование равенства (52) на оси координат дает

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi, \\ r &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\theta. \end{aligned}} \qquad (53)$$

Уравнения (53) называют иногда *кинематическими уравнениями Эйлера* в отличие от другой группы уравнений, также выведенных Эйлером (они будут рассмотрены в следующем параграфе). Уравнения (53) выражают выведенные выше вспомогательные переменные p, q, r — проекции вектора ω на оси ξ, η и ζ — через эйлеровы углы и их производные.

Если эйлеровы углы φ, ψ, θ известны как функции времени, то равенства (53) позволяют немедленно определить, как меняются во времени p, q и r. Если же, наоборот, известно, как меняются во времени p, q, r, то равенства (53) представляют собой систему дифференциальных уравнений относительно эйлеровых углов φ, ψ, θ. Поэтому если мы получим уравнения, описывающие изменение во времени вспомогательных переменных p, q, r, то такие уравнения совместно с уравнениями (53) полностью опишут изменение во времени эйлеровых углов. Именно вывод таких уравнений и составляет цель следующего параграфа.

§ 5. Динамические уравнения Эйлера

Начиная с этого параграфа, мы всегда будем считать, что оси ξ, η, ζ направлены по главным осям тела для точки O. При таком выборе осей кинетическая энергия тела, как это было выяснено в § 3, может быть представлена формулой (43). Положим $q_1 = \psi$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$ и, собираясь составить уравнения Лагранжа для тела с неподвижной точкой, прежде всего найдем, чему равны обобщенные силы, соответствующие эйлеровым углам.

Для того чтобы определить обобщенную силу, соответствующую какому-либо из эйлеровых углов, надо в соответствии с общим приемом определения обобщенных сил дать приращение этому углу (не меняя двух остальных углов), подсчитать работу всех приложенных сил при этом приращении и разделить затем работу приложенных сил на приращение угла. Но при таком приращении тело совершает малый поворот вокруг неподвижной оси, и поэтому работа равна главному моменту всех сил относительно этой оси, умноженному на приращение угла. Отсюда сразу следует, что обобщенными силами для этих эйлеровых углов являются моменты относительно осей, перпендикулярных плоскостям, в которых меняются эти углы, т. е.

$$Q_1 = Q_\psi = M_z, \quad Q_2 = Q_\varphi = M_\zeta, \quad Q_3 = Q_\theta = M_N. \tag{54}$$

Эти выражения для обобщенных сил показывают, что уравнения Лагранжа, вообще говоря, неудобны для описания движения тела с неподвижной точкой, так как первой обобщенной силой является момент относительно неподвижной в пространстве оси z, второй — момент относительно неподвижной в теле, но движущейся в пространстве оси ζ, а третьей — момент относительно линии узлов N, которая перемещается и по отношению к неподвижному пространству, и по отношению к телу. Понимая это, мы все же начнем вывод уравнений Лагранжа для того, чтобы перейти от них к более удобной для данного случая форме уравнений движения.

Составим уравнения Лагранжа для эйлерова угла φ, т. е. обобщенной координаты q_2. Фигурирующая в уравнениях Лагранжа частная производная $\partial T/\partial \dot{q}_2$ равна

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \dot{\varphi}} = Cr; \tag{55}$$

здесь учтено, что в силу соотношений (53) $\partial p/\partial \dot{\varphi} = \partial q/\partial \dot{\varphi} = 0$ и $\partial r/\partial \dot{\varphi} = 1$, а в силу (43) $\partial T/\partial r = Cr$. Итак,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C\frac{dr}{dt}. \tag{56}$$

Подсчитаем теперь частную производную $\partial T/\partial q_2 = \partial T/\partial \varphi$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \varphi} &= \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \\ &= Ap(\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi) + Bq(-\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\cos\varphi) = \\ &= Apq - Bqp = (A-B)pq. \end{aligned} \tag{57}$$

Из формул (56) и (57) следует, что для координаты φ уравнение Лагранжа имеет вид

$$C\dot{r} + (B-A)pq = M_\zeta. \tag{58}$$

Нам следовало бы теперь аналогичным образом подсчитать левые части уравнений Лагранжа для двух остальных обобщенных координат $q_1 = \psi$ и $q_3 = \theta$, подставить в правые части этих уравнений найденные выше моменты — обобщенные силы — и постараться затем преобразовать полученные выражения так, чтобы из правых частей исключить моменты относительно оси z и относительно линии узлов, т. е. чтобы они были заменены моментами относительно осей ξ, η, ζ. Выкладки, связанные с этим, громоздки, однако результаты можно получить сразу, не выписывая уравнений Лагранжа для координат ψ и θ, а рассуждая так же, как это делалось выше при получении равенств (46) из равенства (45).

Уравнение (58) содержит лишь элементы тензора инерции и проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{M}$ на оси координат ξ, η, ζ. Выше уже говорилось, что любые операции над тензорами и векторами инвариантны относительно циклической перестановки осей этой системы. Выполняя по очереди две циклические перестановки осей, сразу выписываем еще два уравнения

$$\begin{aligned} B\dot{q}+(A-C)\,rp&=M_\eta, \\ A\dot{p}+(C-B)\,qr&=M_\xi. \end{aligned} \tag{59}$$

Система уравнений (58)+(59), которую мы теперь перепишем совместно,

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p}+(C-B)\,rq&=M_\xi, \\ B\dot{q}+(A-C)\,pr&=M_\eta, \\ C\dot{r}+(B-A)\,pq&=M_\zeta, \end{aligned}} \tag{60}$$

носит название *динамических уравнений Эйлера* или просто уравнений Эйлера для тела с неподвижной точкой.

Обратим внимание на то, что эти уравнения можно трактовать просто как запись теоремы об изменении кинетического момента в проекциях на оси ξ, η, ζ. Действительно, вспомним теорему об изменении кинетического момента:

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}=\boldsymbol{M}_O. \tag{61}$$

Производная $d\boldsymbol{K}_O/dt$ определяет скорость точки K конца вектора $\boldsymbol{K}_O$ относительно неподвижной в пространстве (латинской) системы координат. Рассмотрим теперь движение этой точки K как сложное движение. Производная $d\boldsymbol{K}_O/dt$ определяет абсолютную скорость точки K. Переносной является скорость той точки тела, с которой совпадает в данный момент точка K, а эта скорость равна $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_K=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}_O$, так как радиус-вектор $\boldsymbol{r}_K$, проведенный из неподвижной точки к точке K, равен как раз вектору $\boldsymbol{K}_O$. Относительной скоростью точки K служит скорость ее по отношению к греческой системе координат, связанной с телом. Обозначим скорость конца вектора $\boldsymbol{K}_O$ по отношению к этой греческой системе $(d\boldsymbol{K}_O/dt)'$. Тогда в силу формулы (61) и обычных представлений о сложном движении имеем

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}_O+\left(\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt}\right)'=\boldsymbol{M}_O. \tag{62}$$

Спроектируем теперь это векторное равенство на оси ξ, η и ζ; соответствующие проекции выписаны в табл. III на стр. 194.

Первая строка этой таблицы получается проектированием векторного произведения по обычным правилам. Далее учтено, что проекции вектора $\boldsymbol{K}_O$ на оси греческой системы равны соответственно Ap, Bq и Cr, и поэтому во второй строке проекции производной $(d\boldsymbol{K}_O/dt)'$ соответственно равны $A\dot{p}$, $B\dot{q}$ и $C\dot{r}$.

В силу табл. III проекции равенств (62) на оси сразу дают эйлеровы уравнения (60).

Моменты M_ξ, M_η и M_ζ, стоящие в правых частях уравнений (60), являются, вообще говоря, функциями от эйлеровых углов, их производных и времени:

$$M_\xi = M_\xi(\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta, t),$$
$$M_\eta = M_\eta(\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta, t),$$
$$M_\zeta = M_\zeta(\varphi, \psi, \theta, \dot\varphi, \dot\psi, \dot\theta, t).$$

Поэтому уравнения (60) не являются замкнутой системой уравнений относительно введенных выше вспомогательных переменных — проекций угловой скорости p, q, r. Уравнения (60) совместно с уравнениями (53) представляют собой систему с шестью

Таблица III

Ось / Вектор	ξ	η	ζ
$\omega \times K_O$	$(C-B)qr$	$(A-C)pr$	$(B-A)pq$
$\left(\frac{dK_O}{dt}\right)'$	$A\dot p$	$B\dot q$	$C\dot r$

неизвестными: тремя неизвестными служат интересующие нас координаты — эйлеровы углы, а остальными тремя неизвестными — вспомогательные переменные p, q, r. В этом смысле подразделение уравнений Эйлера на кинематические соотношения (53) и динамические уравнения (60) условно и неточно. Обе эти группы уравнений совершенно равноценны, и лишь совместно они описывают движение тел с неподвижной точкой.

Введение вспомогательных переменных p, q, r и использование уравнений Лагранжа в форме уравнений Эйлера (53) + (60) имеет несомненные преимущества в тех частных случаях, когда главные моменты действующих сил относительно осей ξ, η, ζ не зависят от эйлеровых углов и их производных например, когда эти моменты постоянны (в частности, равны нулю) или являются заданными функциями времени. В этих случаях систему (60) можно рассматривать как независимую систему дифференциальных уравнений относительно вспомогательных переменных p, q, r; если эта система разрешена, то уравнения (53) затем определяют эйлеровы углы φ, ψ, θ как функции времени.

Известны лишь три частных случая, когда уравнения (53) + (60) могут быть не только расщеплены на две независимые системы уравнений, о чем шла речь выше, но и интегрирование системы уравнений Эйлера (60) может быть доведено до квадратур при любых начальных данных, а именно — случай Эйлера, случай Лагранжа, случай Ковалевской [1]).

В случае Эйлера тело с неподвижной точкой движется по инерции. Это имеет место тогда, когда действующие на тело силы сводятся к равнодействующей, которая все время проходит через неподвижную точку и, следовательно, не создает момента относительно этой точки [2]).

В случае Лагранжа тело имеет ось симметрии ($A=B$), внешней силой служит вес, а центр тяжести и неподвижная точка лежат на оси симметрии. К этому случаю относится, например, движение симметричного волчка в поле тяжести.

В случае Ковалевской на свойства симметрии накладываются еще более сильные ограничения, именно, требуется, чтобы $A = B = 2C$. В этом случае внешней силой также является вес, однако центр тяжести может быть расположен где угодно в экваториальной плоскости эллипсоида инерции для неподвижной точки.

В следующем параграфе мы рассмотрим движение тела по инерции (случай Эйлера), а в § 7 один важный вопрос, касающийся, в частности, и случая Лагранжа; случай Ковалевской, редко встречающийся в приложениях, рассматриваться нами не будет.

§ 6. Движение твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера)

Приступая к изучению движения твердого тела с неподвижной точкой по инерции (случай Эйлера), рассмотрим отдельно движение тела, у которого $A \neq B$, и движение тела в случае, когда $A=B$, т. е. когда эллипсоид инерции для неподвижной точки является эллипсоидом вращения. В случае $A=B$ мы будем говорить, что тело обладает *динамической симметрией*. Динамическая симметрия всегда имеет место у однородных тел вращения, но может случиться, что тело не является телом вращения, однако $A=B$, т. е. имеет место динамическая симметрия.

1. Общий случай $A \neq B$ (отсутствие динамической симметрии). В случае Эйлера главный момент M_O приложенных сил относительно неподвижной точки равен нулю, и поэтому

$$M_\xi = 0, \quad M_\eta = 0, \quad M_\zeta = 0; \tag{63}$$

система уравнений (60) становится автономной и может быть решена отдельно от системы (53). Но в этом случае мы располагаем двумя первыми интегралами уравнений движения, которые

[1]) Найдено и описано много иных интегрируемых случаев, но в них накладываются ограничения и на выбор начальных данных.

[2]) Эта равнодействующая уравновешивается реакцией опоры. Если равнодействующая равна нулю, то реакция опоры отсутствует.

получаются в силу двух законов сохранения: закона сохранения кинетического момента и закона сохранения кинетической энергии. Действительно, поскольку $M_O = 0$, из теоремы об изменении кинетического момента получаем

$$\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{K}_0 = \text{const}.$$

С другой стороны, элементарная работа всех приложенных сил равна нулю, т. е. $\delta A = 0$, а значит, $dT = 0$[1]), т. е.

$$T = T_0 = \text{const}.$$

Из того факта, что при движении твердого тела по инерции вектор кинетического момента не меняется, следует, в частности, что не меняется и квадрат модуля этого вектора:

$$K_0^2 = \text{const}.$$

В связи с тем, что оси, связанные с телом, направлены по главным осям инерции для неподвижной точки, имеем

$$K_\xi = Ap, \quad K_\eta = Bq, \quad K_\zeta = Cr,$$

поэтому

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K_0^2 = \text{const}. \tag{64}$$

С другой стороны, в этом случае

$$\frac{1}{2} Ap^2 + \frac{1}{2} Bq^2 + \frac{1}{2} Cr^2 = T = T_0 = \text{const}. \tag{65}$$

---

[1]) Это можно получить непосредственно из уравнений Эйлера (60). Положив в этих уравнениях $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$, умножив первое уравнение на p, второе на q, а третье — на r и сложив результаты, получим

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0,$$

или

$$d(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)/dt = 0, \text{ т. е. } T = T_0 = \text{const}.$$

Из равенства $T = T_0 = \text{const}$ вытекает, между прочим, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{K}_0$, т. е. $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_0 = 0$.

Действительно проекции вектора $\boldsymbol{K}_0$ на оси, связанные с телом, равны Ap, Bq, Cr, а проекции вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ равны $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$, так как

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)'.$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_0 = Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{2}\right) = \frac{dT}{dt} = 0.$$

Верно и обратное утверждение: если при движении твердого тела (не обязательно в случае Эйлера!) $\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{K}_O = 0$, то при этом движении $T = T_0 = \text{const}$.

Перенося в выражениях (64) и (65) члены, содержащие r, в правую часть равенства, получаем систему алгебраических уравнений относительно двух неизвестных p^2 и q^2:

$$Ap^2+Bq^2=2T_0-Cr^2,$$
$$A^2p^2+B^2q^2=K_0^2-C^2r^2.$$

Рассматривается случай $A \neq B$. Поэтому определитель этой системы алгебраических уравнений (относительно p^2 и q^2)

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}=AB(B-A)$$

отличен от нуля, так что ее можно решить, например, по правилу Крамера:

$$p^2=\frac{\begin{vmatrix} 2T_0-Cr^2 & B \\ K_0^2-C^2r^2 & B^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}}, \quad q^2=\frac{\begin{vmatrix} A & 2T_0-Cr^2 \\ A^2 & K_0^2-C^2r^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A^2 & B^2 \end{vmatrix}}, \tag{66}$$

или

$$\begin{aligned}(B-A)\,p^2&=f_1(r^2,\ T_0,\ K_0),\\ (B-A)\,q^2&=f_2(r^2,\ T_0,\ K_0),\end{aligned} \tag{67}$$

где выражения для функций f_1 и f_2 получатся сразу, если в формулах (66) вычислить определители в числителе и знаменателе. Перемножая левые и правые части равенств (67) и извлекая затем квадратный корень, получаем

$$(B-A)\,pq=\sqrt{f_1f_2}=\sqrt{f(r^2,\ T_0,\ K_0)}. \tag{68}$$

Обратимся теперь к последнему уравнению системы (60). Как уже указывалось выше, в правой части этого уравнения в рассматриваемом случае стоит нуль, а второй член левой части определен выражением (68). Подставив его в это уравнение, получим

$$C\dot{r}=-\sqrt{f(r^2,\ T_0,\ K_0)}.$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение относительно одной неизвестной величины r (проекции угловой скорости на ось ζ). В этом уравнении переменные разделяются, поэтому можно написать

$$\frac{C\,dr}{\sqrt{f(r^2,\ T_0,\ K_0)}}=-dt.$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$C\int\frac{dr}{\sqrt{f(r^2,\ T_0,\ K_0)}}=-t+S, \tag{69}$$

где S — постоянная интегрирования.

После подстановки в явиой форме выражения для $f(r^2, T_0, K_0)$ в левой части формулы (69) получается эллиптический интеграл, и таким образом, задача сводится к одной простой квадратуре — эллиптическому интегралу. Интегралы такого рода хорошо изучены, и для них составлены специальные таблицы. Вычислив этот интеграл, т. е. найдя t как функцию от r и трех произвольных постоянных S, K_0 и T_0, определяемых начальными данными, а затем разрешив полученное соотношение относительно r, нужно вернуться к уравнениям (66) и подставить в их правые части найденное выражение r. Тогда p и q тоже будут найдены как функции t и указанных трех произвольных постоянных. Уравнения (60) полностью проинтегрированы, причем были использованы два готовых первых интеграла, даваемых законами сохранения, и лишь один раз пришлось вычислить интеграл.

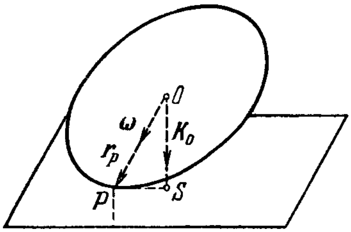

Рис. V.10.

Указанный прием позволяет найти введенные выше вспомогательные переменные — проекции p, q и r как функции времени и начальных данных, но для того чтобы представить себе картину движения твердого тела по инерции, надо было бы проинтегрировать теперь систему уравнений (53). Значительно удобнее «увидеть», каким образом фактически происходит движение твердого тела по инерции, воспользовавшись изящным геометрическим приемом, указанным Пуансо.

Рассмотрим эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки O (рис. V.10). Назовем *мгновенным полюсом* P точку, в которой мгновенная ось пересекает этот эллипсоид инерции, обозначим через $\boldsymbol{r}_P$ радиус-вектор точки P и положим

$$\lambda = \frac{|\boldsymbol{r}_P|}{|\boldsymbol{\omega}|}. \tag{70}$$

Координаты точки P, равные

$$\xi = \lambda p, \quad \eta = \lambda q, \quad \zeta = \lambda r, \tag{71}$$

должны удовлетворять уравнению эллипсоида инерции, т. е. уравнению

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 1 = 0, \tag{72}$$

так как по условию ξ, η, ζ — главные оси инерции для точки O. Подставляя в формулу (72) выражения (71), получаем

$$\lambda^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - 1 = 0, \tag{73}$$

или

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}. \tag{74}$$

Покажем теперь, что проекция OS радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_P$ на направление постоянного вектора кинетического момента $\boldsymbol{K}_0$ также не меняется во времени:

$$OS = \text{Пр}_{K_0}\boldsymbol{r}_P = \text{Пр}_{K_0}\lambda\boldsymbol{\omega} = \lambda\text{Пр}_{K_0}\boldsymbol{\omega} = \lambda\frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_0}{K_0} = \lambda\frac{2T}{K_0} = \text{const}. \quad (75)$$

Теперь покажем, что нормаль N к эллипсоиду инерции в точке P параллельна вектору $\boldsymbol{K}_0$. Для этого вычислим проекции вектора-градиента

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 2A\xi, \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = 2B\eta, \quad \frac{\partial F}{\partial \zeta} = 2C\zeta,$$

где F — левая часть уравнения (72). Проекции этого вектора-градиента пропорциональны проекциям вектора $\boldsymbol{K}_0$, так как проекции вектора $\boldsymbol{K}_0$ равны

$$Ap = \frac{1}{\lambda}A\xi, \quad Bq = \frac{1}{\lambda}B\eta, \quad Cr = \frac{1}{\lambda}C\zeta.$$

Из того, что нормаль к эллипсоиду инерции в точке P параллельна вектору $\boldsymbol{K}_0$, следует, что плоскость, касательная к эллипсоиду инерции в точке P, перпендикулярна вектору $\boldsymbol{K}_0$. Но выше было показано, что проекция вектора $\boldsymbol{r}_P$ на направление $\boldsymbol{K}_0$ не меняется. Это значит, что касательная к эллипсоиду инерции плоскость все время пересекает постоянный вектор $\boldsymbol{K}_0$ в одной и той же точке.

Таким образом, начальные условия задают направление вектора $\boldsymbol{K}_0$ и плоскость, которая пересекает вектор $\boldsymbol{K}_0$ и касается эллипсоида инерции. При движении тела эллипсоид инерции также движется вместе с телом, однако он всегда касается указанной плоскости, положение которой в пространстве не меняется. В силу того, что точка P расположена на направлении вектора $\boldsymbol{\omega}$, т. е. на направлении мгновенной оси, скорость этой точки тела в любое мгновение равна нулю. Отсюда следует, что движение по инерции тела с неподвижной точкой всегда происходит так, что эллипсоид инерции, построенный для неподвижной точки, вертится и катится без скольжения по неподвижной плоскости, положение которой в пространстве полностью определяется начальными данными.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по одной из главных осей, т. е. когда

$$p = \omega, \quad q = r = 0,$$

или

$$q = \omega, \quad r = p = 0,$$

или же

$$r = \omega, \quad p = q = 0.$$

Каждое из этих движений удовлетворяет динамическим уравнениям Эйлера, и непосредственно видно, что если в случае Эйлера (т. е. при $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$) вектор $\boldsymbol{\omega}$ в начальный момент направлен по главной оси инерции, то движение тела по инерции является вращением вокруг этой оси. Такие движения называются *перманентными вращениями тела*[1])

2. Случай $A = B$ (динамическая симметрия). Рассмотрим теперь частный случай, когда тело имеет ось динамической симметрии. Так как ось симметрии всегда является главной осью инерции, ясно, что одна из осей греческой системы должна быть направлена по оси симметрии. Направим по ней ось ζ. Учитывая, что $A = B$, т. е. что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, из последнего уравнения системы (60) сразу получаем, что

$$\frac{dr}{dt} = 0, \text{ т. е. } r = \text{const}, \tag{76}$$

а из использовавшегося выше соотношения

$$A^2p^2 + B^2q^2 = K_0^2 - C^2r^2$$

получаем

$$A^2(p^2 + q^2) = K_0^2 - C^2r^2$$

или, учитывая (76),

$$p^2 + q^2 = \text{const}. \tag{77}$$

Проведем теперь плоскость П через вектор $\boldsymbol{\omega}$ и ось ζ (рис. V.11). Эта плоскость пересекает плоскость $\xi O\eta$ по прямой R. Спроектируем вектор $\boldsymbol{\omega}$ на направление оси ζ и на прямую R. Эти проекции, равные r и $\sqrt{p^2+q^2}$, в силу формул (76) и (77) не меняются при движении. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ не меняется по величине и что угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и осью ζ также не меняется.

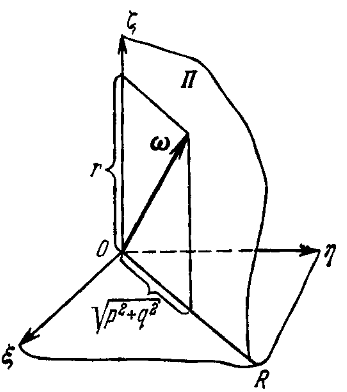

Рис. V.11.

Покажем теперь, что *при $A = B$ вектор кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ всегда* (а не только в случае Эйлера!) *лежит в плоскости* П. Действительно, проекции вектора $\boldsymbol{K}_O$ на оси ξ и η равны Ap и Bq соответственно, и так как в рассматриваемом случае $A = B$, эти проекции пропорциональны проекциям вектора $\boldsymbol{\omega}$. Отсюда сразу следует, что проекция вектора $\boldsymbol{K}_O$ на плоскость $\xi O\eta$ отличается лишь на множитель A от проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на эту

[1]) Вопрос об устойчивости перманентных вращений будет рассмотрен в гл. VI.

плоскость, т. е. что вектор K_O также лежит в плоскости П. Но, как уже было указано, в случае движения по инерции вектор K_O неподвижен в пространстве, вектор же ω движется. Отсюда сразу следует, что во время движения по инерции симметричного твердого тела плоскость П вращается вокруг неподвижного направления — это направление задается вектором K_O.

Однако в случае Эйлера проекция вектора ω на направление вектора K_0 также постоянна:

$$\text{Пр}_{K_0}\omega = \frac{K_0 \cdot \omega}{|K_0|} = \frac{App + Bqq + Crr}{|K_0|} = \frac{2T_0}{|K_0|} = \text{const}, \tag{78}$$

а значит, угол между вектором ω и вектором K_0 не меняется. Выше уже было сказано, что не меняется и угол между вектором ω и осью ζ.

Таким образом, во время движения по инерции симметричного твердого тела всегда существует плоскость П, в которой находятся векторы ω и K_0. Абсолютные величины этих векторов, а также углы, которые они составляют с осью симметрии и между собой, сохраняют постоянное значение. Значит, изменение вектора ω происходит лишь за счет вращения плоскости П вокруг неподвижного вектора K_0.

Рассмотрим теперь плоскость П. Направим ось z по фиксированному направлению вектора K_0, а ось ζ вдоль оси симметрии тела. Угол между этими осями равен θ; выше было показано, что $\theta = \text{const}$ и, значит, $\dot\theta = 0$. Из равенства (52) следует, что в этом случае

$$\omega = \dot\varphi + \dot\psi. \tag{79}$$

Векторы $\dot\varphi$ и $\dot\psi$ направлены по осям ζ и z соответственно (рис. V.8); положим $\dot\varphi = \omega_1$, $\dot\psi = \omega_2$ и в силу равенства (79) разложим в плоскости П вектор ω на ω_1 и ω_2 (рис. V.12). Модули этих векторов постоянны, так как модуль вектора ω, а также углы между ω и осями ζ и z сохраняют постоянное значение. Таким образом, движение симметричного твердого тела по инерции можно рассматривать как сумму двух вращений с постоянными угловыми скоростями. Одно вращение происходит вокруг оси симметрии ζ с угловой скоростью ω_1, а другое — вокруг постоянного направления кинетического момента K_0 с угловой скоростью ω_2.

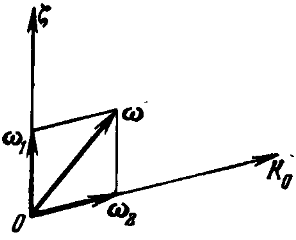

Рис. V.12.

Движение, при котором симметричное тело с неподвижной точкой вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси материальной симметрии, а сама эта ось симметрии вращается с постоянной угловой скоростью вокруг какого-либо проходящего через неподвижную точку фиксированного направления, образуя с этим направлением постоянный угол θ, называется *регулярной прецессией*. Неподвижная ось, вокруг которой вращается ось симметрии, называется *осью прецессии* [1]).

Итак, движение по инерции симметричного ($A=B$) твердого тела всегда является регулярной прецессией, ось которой совпадает с направлением кинетического момента. Угловая скорость ω_1 называется *угловой скоростью собственного вращения*, а угловая скорость ω_2 — *угловой скоростью прецессии*. Угловые скорости ω_1 и ω_2, угол θ и направление вектора K_0 полностью определяются начальными данными. Если эти данные таковы, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ в начальный момент направлен по главной оси инерции, то по этой же оси будет направлен и вектор K_0 (см. примечание на стр. 187—188). В этом случае будет происходить регулярная прецессия при $\theta=0$, т. е. вращение вокруг стационарной оси.

§ 7. Поддержание регулярной прецессии относительно произвольной оси при движении симметричного твердого тела с неподвижной точкой

Мы видели выше, что движение симметричного тела с неподвижной точкой по инерции всегда является регулярной прецессией относительно направления кинетического момента. Представим себе теперь, что симметричное тело имеет неподвижную точку (за ось ζ, как и ранее, выбрана ось симметрии) и что задана какая-либо неподвижная прямая, проходящая через неподвижную точку и уже не совпадающая с переменным в общем случае направлением вектора K_O кинетического момента. Направим вдоль этой прямой ось z неподвижной в пространстве системы x, y, z. Найдем условия, при которых тело совершает регулярную прецессию относительно оси z с заданными ω_1 — угловой скоростью собственного вращения, ω_2 — угловой скоростью прецессии и θ — углом нутации (рис. V.13). Разумеется, таким движением уже не может быть движение по инерции, так как ось прецессии не совпадает теперь с направлением кинетического момента, и следовательно, для того чтобы подобного рода регулярная пре-

[1]) То, что движение симметричного тела по инерции является регулярной прецессией, может быть установлено и из геометрической интерпретации Пуансо (см. стр. 198—199). Действительно, в случае $A=B$ эллипсоид инерции для неподвижной точки является эллипсоидом вращения. Поэтому при качении этого эллипсоида без скольжения по неподвижной плоскости, перпендикулярной постоянному вектору K_0, точка касания описывает на плоскости окружность. Ось ζ — одна из главных осей эллипсоида; следовательно, при движении тела по инерции эллипсоид инерции (а значит, и тело!) вращается вокруг оси ζ, сама же ось ζ, «прочерчивая» окружность на плоскости, перпендикулярной K_0, вращается вокруг K_0.

цессия могла быть реализована, к телу должны быть приложены внешние силы. Задача состоит в том, чтобы определить, каким должен быть M_O — главный момент приложенных сил относительно неподвижной точки O, чтобы осуществлялось заданное движение.

При регулярной прецессии ω_1 и ω_2 постоянны; поэтому модуль угловой скорости $|\boldsymbol{\omega}|$ не меняется, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ всегда лежит в плоскости, проходящей через заданные направления (ось прецессии z и ось симметрии тела ζ), и углы между направлением $\boldsymbol{\omega}$ и указанными двумя осями z и ζ также остаются псстоянными.

Проведем через ось ζ и ось z плоскость П (рис. V.14). Пусть эта плоскость пересекает плоскость $\xi O \eta$ по прямой R. Угол между осями ζ и z, по условию задачи заданный и постоянный, как и ранее, обозначим через θ. Поскольку ω_1, ω_2 и θ потоянны, модуль вектора $\boldsymbol{\omega}$ и

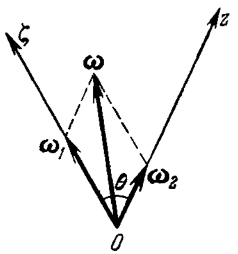

Рис. V.13.

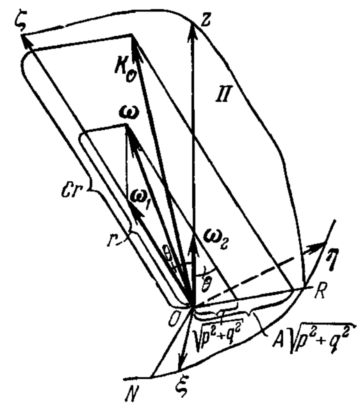

Рис. V.14.

угол между направлением $\boldsymbol{\omega}$ и осью ζ будут сохранять постоянное значение.

Как и в случае движения по инерции симметричного тела, не только вектор $\boldsymbol{\omega}$, но и вектор $\boldsymbol{K}_O$ лежит в плоскости П. Это доказывается так же, как и при рассмотрении случая Эйлера для симметричного тела, поскольку при доказательстве этого факта мы опирались только на симметрию тела и не использовали того, что движение происходит по инерции.

Проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на направления ζ и R, равные r и $\sqrt{p^2+q^2}$ соответственно, постоянны, поскольку постоянны $|\boldsymbol{\omega}|$ и угол между $\boldsymbol{\omega}$ и осью ζ. Значит, постоянны и проекции $\boldsymbol{K}_O$ на направления ζ и R, равные Cr и $A\sqrt{p^2+q^2}$. Следовательно, ни модуль $|\boldsymbol{K}_O|$, ни углы между $\boldsymbol{K}_O$ и направлением ζ не меняются. Отсюда сразу следует, что вектор $\boldsymbol{K}_O$, все время лежащий в плоскости П, неподвижен в ней. Но вся эта плоскость по условию заданной прецессии вращается вокруг направления z

с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$. Поэтому скорость конца вектора $\boldsymbol{K}_O$, равная, как всегда, производной от вектора $\boldsymbol{K}_O$ по времени, представится векторным произведением $\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O$; таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O. \tag{80}$$

Для того чтобы вычислить это векторное произведение, введем систему координат с осями ζ, R и N (N — прямая, перпендикулярная плоскости П, см. рис. V.14). Это — главные оси инерции, поскольку эллипсоид инерции представляет собой эллипсоид вращения. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — орты осей N, R и ζ соответственно; тогда

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \text{Пр}_R\boldsymbol{\omega}_2 & \text{Пр}_\zeta\boldsymbol{\omega}_2 \\ 0 & \text{Пр}_R\boldsymbol{K}_O & \text{Пр}_\zeta\boldsymbol{K}_O \end{vmatrix}. \tag{81}$$

Подсчитаем проекции векторов $\boldsymbol{\omega}_2$ и $\boldsymbol{K}_O$ на оси R и ζ:

$$\text{Пр}_R\,\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \sin\theta, \qquad \text{Пр}_\zeta\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2\cos\theta, \tag{82}$$

$$\text{Пр}_R\boldsymbol{K}_O = A\sqrt{p^2+q^2}, \qquad \text{Пр}_\zeta\boldsymbol{K}_O = Cr. \tag{83}$$

В двух последних равенствах $\sqrt{p^2+q^2}$ и r можно выразить через ω_1 и ω_2, так как

$$\sqrt{p^2+q^2} = \text{Пр}_R\boldsymbol{\omega} = \text{Пр}_R\,(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \omega_2\sin\theta,$$
$$r = \text{Пр}_\zeta\boldsymbol{\omega} = \text{Пр}_\zeta\,(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \omega_1 + \omega_2\cos\theta;$$

следовательно,

$$\text{Пр}_R\boldsymbol{K}_O = A\omega_2\sin\theta, \tag{84}$$

$$\text{Пр}_\zeta\boldsymbol{K}_O = C\,(\omega_1 + \omega_2\cos\theta). \tag{85}$$

Подставляя выражения (81)—(85) в формулу (80), получаем

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \omega_2\sin\theta & \omega_2\cos\theta \\ 0 & A\omega_2\sin\theta & C\,(\omega_1+\omega_2\cos\theta) \end{vmatrix} =$$
$$= \boldsymbol{i}\omega_2\sin\theta\,[C\,(\omega_1+\omega_2\cos\theta) - A\omega_2\cos\theta] =$$
$$= \boldsymbol{i}\omega_2\omega_1\sin\theta\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]. \tag{86}$$

Поскольку $\boldsymbol{i}\omega_1\omega_2\sin\theta = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1$, это равенство можно записать так:

$$\boxed{\boldsymbol{M}_O = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right].} \tag{87}$$

Формула (87) называется *основной формулой гироскопии*. В частном случае, когда угловая скорость собственного вращения значительно больше угловой скорости прецессии, т. е. $\omega_1 \gg \omega_2$, можно пренебречь вторым членом в квадратных скобках и приближенно переписать эту формулу так:

$$\boxed{M_O = C\,(\omega_2 \times \omega_1).} \tag{88}$$

Формула (88) называется *приближенной формулой гироскопии*[1]).

В силу этой формулы момент, который нужно приложить для того, чтобы поддержать прецессию, по направлению определяется векторным произведением заданных угловых скоростей, а по величине отличается от модуля этого векторного произведения лишь постоянным множителем, равным моменту инерции тела относительно оси симметрии.

Рассмотрим теперь ось, на которой закреплено симметричное тело, например маховик, вращающийся с достаточно большой угловой скоростью ω_1. Ось закреплена на шарнире, являющемся, таким образом, неподвижной точкой для тела, состоящего из оси и закрепленного на ней маховика (рис. V.15). Предположим, что к противоположному концу оси в плоскости рисунка приложена сила F, стремящаяся повернуть ось с вращающимся на ней маховиком, т. е. сила, обусловливающая момент M, направленный перпендикулярно рисунку «от нас». Тогда легко видеть, что для того чтобы выполнялось равенство (88), угловая скорость ω_2 должна быть направлена в плоскости рисунка перпендикулярно направлению оси. Но это значит, что скорость той точки оси, в которой приложена сила F, направлена не по направлению силы, а перпендикулярно ей, «от нас». Если бы тело не вращалось вокруг оси, то сила F вызвала бы скорость, совпадающую по направлению с силой. Только благодаря тому, что тело вращается с угловой скоростью ω_1, сила вызывает не движение оси в направлении силы, а прецессию, в результате чего скорость конца оси направлена перпендикулярно силе. Легко видеть, что *в любом случае направление скорости конца оси получается поворотом направления силы на 90° по направлению вращения тела.* Это правило иногда называют *правилом Жуковского*. Оно позво-

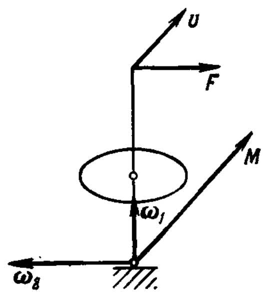

Рис. V.15.

---

[1]) Эту формулу можно получить непосредственно из теоремы Резаля (см. стр. 73), если, исходя из предположения $\omega_1 \gg \omega_2$, пренебречь составляющей вектора K_O, перпендикулярной оси симметрии тела, и приближенно считать $K_O = C\omega_1$.

ляет легко представить себе направление скорости по отношению к вызвавшей ее силе.

Формула (88) и правило Жуковского легко объясняют поведение раскрученного волчка (рис. V.16). Действительно, пусть симметричный волчок вращается вокруг собственной оси; если пренебречь трением в точке его касания с полом, то единственной действующей на него силой будет сила тяжести, приложенная в центре тяжести. Эта сила направлена в плоскости чертежа вниз, и чтобы выяснить направление скорости точки приложения силы, нужно разложить силу G на две составляющие: вдоль оси симметрии (эта составляющая компенсируется реакцией опоры) и по перпендикуляру к этой оси. В соответствии с правилом Жуковского вторую составляющую надо повернуть на 90° по направлению вращения волчка. Поэтому скорость центра тяжести направлена перпендикулярно плоскости чертежа, например «на нас». Однако, когда ось сдвинется в этом направлении, «чертеж» полностью сохранится, и таким образом, до тех пор, пока продолжается вращение с угловой скоростью ω_1, продолжается и вращение оси волчка вокруг вертикального направления с некоторой угловой скоростью ω_2.

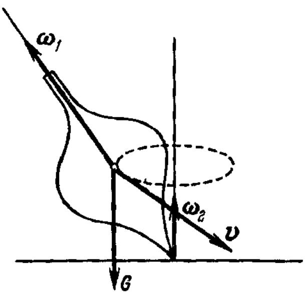

Рис. V.16.

Такое описание движения тяжелого симметричного волчка носит чисто качественный характер и является приближенным. В действительности в случае Лагранжа регулярная прецессия возникает лишь при вполне определенных начальных условиях. В иных случаях возникает более сложное движение: угловая скорость прецессии не сохраняет постоянного значения, а ось волчка не только прецессирует вокруг вертикали, но и совершает колебания в вертикальной плоскости. Это колебательное движение соответствует изменению угла θ и называется *нутацией*.

Глава VI

РАВНОВЕСИЕ. ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

§ 1. Введение

В этой главе будут изучаться положения равновесия механических систем, условия, при которых движения системы не выходят за пределы малой окрестности положения равновесия, и некоторые особенности движений такого рода.

В предыдущих главах было показано, что уравнения Лагранжа обычно представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений. Если же ограничиться исследованием движений, происходящих вблизи положения равновесия, то уравнения Лагранжа можно упростить — они заменяются в этом случае приближенными линейными дифференциальными уравнениями. Решения таких уравнений хорошо изучены, их можно записать в замкнутой форме с помощью элементарных функций, и это позволяет детально исследовать данный класс движений.

Прежде чем приступить собственно к изучению условий равновесия и движений вблизи положений равновесия, введем представление о четырех основных пространствах, которые будут широко использоваться в этой и следующей главе.

§ 2. Основные пространства

Назовем *координатным пространством*[1]) n-мерное пространство, каждая точка которого определяется заданием n чисел — обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$. По определению эти координаты независимы и любой их выбор не противоречит механическим связям (если таковые наложены на систему). Поэтому положение системы может быть представлено любой точкой координатного пространства.

При движении системы значения обобщенных координат меняются во времени, и точка, определяемая в каждый момент функциями $q_1(t), \ldots, q_n(t)$, описывает в координатном пространстве соответствующую траекторию.

Порядок системы уравнений Лагранжа равен $2n$, и чтобы задать движение, надо задать $2n$ начальных данных, т. е. надо

[1]) Это пространство иногда называют конфигуративным.

знать одновременные значения $2n$ величин — обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ и обобщенных скоростей $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$. Поэтому задание точки координатного пространства еще не определяет движения. В этом смысле через каждую точку координатного пространства проходит бесконечное количество траекторий — соответствующие им движения в рассматриваемой точке отличаются величинами обобщенных скоростей. В ряде случаев удобнее поэтому рассматривать движение в пространстве, каждая точка которого определяется заданием $2n$ чисел: n обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$ и n обобщенных скоростей $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$. Такое $2n$-мерное пространство называется *фазовым.*

В фазовом пространстве выбор точки задает полную систему начальных данных. Поэтому выбор точки фазового пространства (за исключением особых точек — о них речь будет идти далее) полностью определяет движение. Траектории, соответствующие движениям в фазовом пространстве, нигде (кроме особых точек) не пересекаются.

В гл. IV было показано, что система уравнений Лагранжа всегда может быть разрешена относительно старших производных и в стационарном случае сводится к виду

$$\ddot q_j = G_j(q, \dot q) \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{1}$$

Введя новые координаты $\dot q_j = y_j$ $(j=1, \ldots, n)$, можно записать систему уравнений Лагранжа в виде

$$\dot y_j = G_j(q, y), \quad \dot q_j = y_j, \qquad j=1, \ldots, n. \tag{2}$$

Уравнения фазовых траекторий получаются исключением из этих уравнений dt; например, разделив $2n-1$ первых уравнений этой системы на последнее уравнение $\dot q_n = y_n$, мы получим

$$\frac{dy_j}{dq_n} = \frac{G_j(q, y)}{y_n} \qquad (j=1, \ldots, n),$$
$$\frac{dq_j}{dq_n} = \frac{y_j}{y_n} \qquad (j=1, \ldots, n-1).$$

Особыми точками фазового пространства называются точки, в которых правые части этих уравнений становятся неопределенными (вида 0/0), т. е.

$$G_j(q, y) = 0, \quad y_j = 0, \qquad j=1, \ldots, n.$$

В нестационарном случае правые части уравнений Лагранжа зависят также и от времени. Для таких систем фазовое пространство менее удобно, ибо теперь уже нельзя столь просто исключить t и вместо уравнений движения выписать уравнения фазовых траекторий, не содержащие явно время t. В таких случаях удобно дополнить рассматриваемые пространства осью t. Пространство, имеющее $n+1$ измерение и задаваемое координатами $q_1, \ldots, q_n; t$, называется *расширенным координатным пространством*, а $(2n+1)$-мерное пространство с координатами $q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; t$ — *расширенным фазовым пространством*.

§ 3. Положения равновесия

Положение системы материальных точек, определяемое в некоторой системе отсчета обобщенными координатами $q_j = q_j^0$ ($j = 1, \ldots, n$), называется *положением равновесия* для наблюдателя, связанного с этой системой отсчета, если система материальных точек, будучи приведена в это положение с нулевыми скоростями $\dot{q}_j^0 = 0$ ($j = 1, \ldots, n$), остается в нем сколь угодно долго.

Из этого определения следует, что в положении равновесия все $\dot{q}_j$ и $\ddot{q}_j$ равны нулю, а это означает, что в фазовом пространстве положениям равновесия соответствуют только особые точки. Разрешим уравнения Лагранжа относительно старших производных, т. е. представим их в виде

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}) \qquad (j = 1, \ldots, n);$$

тогда условия равновесия определятся так:

$$G_j(q, 0) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Если выполняются обычные условия единственности решений уравнений Лагранжа, то в стационарном случае более удобные условия равновесия определяет следующая

Теорема. *Для того чтобы в стационарном случае некоторое положение системы*

$$q_j = q_j^0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы были равны нулю:

$$Q_j(q^0) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Доказательство. При исследовании уравнений Лагранжа было установлено, что в стационарном случае

$$T = T_2, \tag{4}$$

где T_2 — квадратичная форма относительно $\dot{q}$ с коэффициентами, зависящими только от q,

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j,\, k=1}^{n} a_{jk}(q)\, \dot{q}_j \dot{q}_k. \tag{5}$$

Подставляя это выражение в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_2}{\partial q_j} = Q_j \qquad (j=1, \ldots, n)$$

и выполняя операции дифференцирования в левых частях, получаем уравнения Лагранжа в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(q)\,\ddot{q}_k + \sum_{k,\,s=1}^{n} b_{ks}(q)\,\dot{q}_s\dot{q}_k = Q_j, \tag{6}$$

где b_{ks} — коэффициенты, зависящие только от q, а членов, не содержащих множителей $\dot{q}$ или $\ddot{q}$, в левых частях уравнений Лагранжа в стационарном случае нет.

Пусть $q_j = q_j^0$ $(j=1, \ldots, n)$ — положение равновесия. По определению это значит, что данное положение не меняется во времени, т. е. что $q_j(t) \equiv q_j^0$ и поэтому $\dot{q}_j(t) = \ddot{q}_j(t) = 0$ $(j=1, \ldots, n)$.

Подставляя в уравнения (6) $\dot{q}_j = 0$, $\ddot{q}_j = 0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$, получаем сразу $Q_j = 0$ $(j=1, \ldots, n)$.

Предположим теперь, наоборот, что при $q_j = q_j^0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ имеют место равенства

$$Q_j = 0 \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Определим в этом случае решение, соответствующее начальным условиям

$$q_j(0) = q_j^0, \quad \dot{q}_j(0) = \dot{q}_j^0 = 0 \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Непосредственно видно, что функции

$$q_j(t) \equiv q_j^0 = \text{const} \tag{7}$$

удовлетворяют уравнениям (6) при $Q_j = 0$. Уравнения алгебраически разрешимы относительно $\ddot{q}_j$, и предполагается, что для них справедлива теорема о единственном решении при заданных начальных данных (см. § 3 гл. IV). Поэтому для уравнений (6) при условии $Q_j = 0$ решение (7) единственно. Иначе говоря, из того, что при $t = 0$ все $q_j = q_j^0$ и $\dot{q}_j^0 = 0$, следует, что система, находящаяся в начальный момент в положении $q_j = q_j^0$, в нем и останется. Теорема доказана.

Условие

$$Q_j = 0 \qquad (j=1, \ldots, n) \tag{8}$$

эквивалентно условию

$$\sum Q_j\, dq_j = 0. \tag{9}$$

Действительно, из (8) немедленно следует (9), но верно и обратное утверждение — из (9) следует (8), так как по определению обобщенные координаты q_j, а значит, и dq_j независимы.

Сумма, стоящая в левой части равенства (9), равна элементарной работе всех приложенных сил на произвольном возможном перемещении рассматриваемой стационарной системы

$$\delta A = 0.$$

Таким образом, доказанная теорема может быть сформулирована следующим образом:

Для того чтобы положение $q_j = q_j^0$ было положением равновесия стационарной системы, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении элементарная работа всех приложенных сил на любом возможном перемещении была равна нулю.

В такой формулировке доказанная теорема называется *принципом возможных перемещений.*

Если рассматривается система без механических связей, то любые перемещения системы возможны и слова «на любом возможном перемещении» могут быть заменены словами «на любом перемещении». Если же на систему наложены идеальные склерономные связи, то термин «любые возможные перемещения», как всегда, означает «любые малые перемещения, совместимые со связями».

Принцип возможных перемещений в стационарном случае определяет необходимые и достаточные условия равновесия. Он определяет необходимые условия равновесия и в том случае, когда система нестационарна, например, содержит идеальные реономные связи, — надо лишь слова «на любом возможном перемещении» заменить словами «на любом виртуальном перемещении». Установленный выше принцип называют в этом, более общем случае, *принципом виртуальных перемещений*[1]).

Рассмотрим теперь консервативные системы, т. е. стационарные системы, на которые действуют только потенциальные силы, причем $V = V(q)$ не зависит явно от времени. В этом случае

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

и условие (8) означает лишь, что *все точки, где функция V имеет стационарные значения, в частности все точки экстремумов и точки перегиба функции V, являются точками равновесия системы.*

В качестве примера (рис. VI.1) рассмотрим материальную точку, находящуюся на некоторой кривой в однородном поле тяжести (сила направлена вдоль оси y вниз). В этом случае система имеет одну степень свободы и $V = -Gy$, т. е. потенциальная энергия пропорциональна ординатам кривой, на которой

---

[1]) Мы не рассматриваем этот случай детально и, в частности, не приводим доказательств.

находится точка. Поэтому положениями равновесия являются точка минимума A, точка максимума B и все точки «плато» C.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из двух точек A и B, связанных пружиной и движущихся в плоскости по заданным

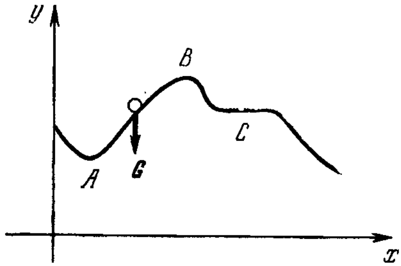

Рис. VI.1.

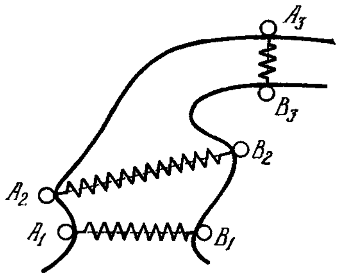

Рис. VI.2.

кривым (рис. VI.2). В этом примере потенциальная энергия пропорциональна квадрату растяжения пружины, и поэтому положениями равновесия будут, например, положения A_1B_1, A_2B_2 и все точки «плато» A_3B_3, в которых эта длина достигает локальных экстремумов.

Подобным же образом в общем случае консервативной системы с n степенями свободы, когда потенциальная энергия является функцией от n обобщенных координат $q_1, \ldots, q_n$, положениям равновесия соответствуют точки координатного пространства, в которых достигаются стационарные значения функции $V(q)$.

§ 4. Линейное приближение уравнений, описывающих движения вблизи положения равновесия

Далее в этой главе будут изучаться некоторые особенности движений стационарных систем, происходящих вблизи положения равновесия.

Пусть q_j^0 $(j=1, \ldots, n)$ — исследуемое положение равновесия. Переместим начало координат в точку q_j^0, т. е. будем считать, что $q_j^0=0$ $(j=1, \ldots, n)$ и что q_j — отклонения обобщеиных координат от их равновесных значений. Тогда в $2n$-мерном фазовом пространстве q, $\dot{q}$ положению равновесия тоже соответствует начало координат, так как при равновесии все $\dot{q}$ равны нулю.

Исследуя движения, происходящие в малой окрестности положения равновесия, мы будем считать, что во время таких движений все q_j и $\dot{q}_j$ — малые величины одного и то же порядка малости. Ограничимся в уравнениях лишь малыми первого порядка и пренебрежем малыми второго и более высоких порядков.

Будем предполагать, что в уравнениях Лагранжа, описывающих движение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j, \qquad Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}+Q_j^* \quad (j=1, \ldots, n), \tag{10}$$

все непотенциальные части обобщенных сил Q_j^* являются функциями только q и $\dot{q}$ и не зависят явно от t.

Чтобы сохранить в этих уравнениях лишь малые первого порядка, разложим функции T, V и Q_j^* в ряды по всем независимым переменным q и $\dot{q}$ и ограничимся в разложениях T и V малыми второго порядка[1]), а в разложении Q_j^* — малыми первого порядка.

В рассматриваемом стационарном случае

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{j,\,k} a_{jk}(q)\,\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

и чтобы сохранить в разложении T лишь малые второго порядка, надо разложить в ряды коэффициенты a_{jk} и ограничиться в этих разложениях «нулевыми» членами, не содержащими множителей q_j, т. е. положить

$$a_{jk}(q)\approx a_{jk}(0).$$

Обозначим полученные так величины через $a_{jk}=a_{jk}(0)$; тогда

$$T\approx\frac{1}{2}\sum_{j,\,k} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k. \tag{11}$$

Это выражение является квадратичной формой от обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами. Из физического смысла понятия кинетической энергии следует, что функция T равна нулю лишь тогда, когда все $\dot{q}_j$ одновременно равны нулю, и положительна, если хотя бы одна из $\dot{q}_j$ отлична от нуля. Квадратичная форма, удовлетворяющая этим условиям, называется *положительно определенной*, а матрица, составленная из ее коэффициентов,

$$A=\|a_{jk}\|_{j,\,k=1}^{n},$$

называется матрицей положительно определенной квадратичной формы, или просто положительно определенной матрицей.

Обратимся теперь к выражению для обобщенной силы

$$Q_j=-\frac{\partial V(q)}{\partial q_j}+Q_j^*(q,\ \dot{q})$$

---

[1]) Тогда входящие в уравнения Лагранжа частные производные $\partial T/\partial \dot{q}_j$ и $\partial T/\partial q_j$ будут малыми первого порядка.

и разложим это выражение в ряд

$$Q_j=\left[-\frac{\partial V(q)}{\partial q_j}+Q_j^*(q,\ \dot q)\right]_{q=\dot q=0}+\left[-\sum_k\left(\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q_j\,\partial q_k}\right)_{q=0}q_k+\right.$$
$$\left.+\sum_k\left(\frac{\partial Q_j^*(q,\ \dot q)}{\partial q_k}\right)_{q=\dot q=0}q_k+\sum_k\left(\frac{\partial Q_j^*(q,\ \dot q)}{\partial \dot q_k}\right)_{q=\dot q=0}\dot q_k\right]+\ldots, \qquad (12)$$

где многоточием заменены остальные (нелинейные) члены разложения. Величина, стоящая в первой квадратной скобке, равна нулю, так как она равна значению обобщенной силы в положении равновесия

$$\left(-\frac{\partial V(q)}{\partial q_j}+Q_j^*(q,\ \dot q)\right)_{q=\dot q=0}=Q_j(0,\ 0)=0.$$

Введем обозначения

$$c_{jk}=\left(\frac{\partial^2 V(q)}{\partial q_j\,\partial q_k}\right)_{q=0},\qquad c_{jk}^*=-\left(\frac{\partial Q_j^*(q,\ \dot q)}{\partial q_k}\right)_{q=\dot q=0},$$
$$b_{jk}^*=-\left(\frac{\partial Q_j^*(q,\ \dot q)}{\partial \dot q_k}\right)_{q=\dot q=0}.$$

Пренебрегая в разложении (12) нелинейными членами и используя только что введенные обозначения, получаем

$$Q_j=-\sum_k\left[b_{jk}^*\dot q_k+(c_{jk}+c_{jk}^*)\,q_k\right]. \qquad (13)$$

Подставим теперь в уравнения Лагранжа (10) выражения (11) и (13) для T и Q_j соответственно:

$$\boxed{\sum_k\left[a_{jk}\ddot q_k+b_{jk}^*\dot q_k+(c_{jk}+c_{jk}^*)\,q_k\right]=0\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n).} \qquad (14)$$

В векторно-матричной записи эта система уравнений имеет вид

$$\boxed{\mathbf{A}\ddot{q}+\mathbf{B}^*\dot{q}+(\mathbf{C}+\mathbf{C}^*)\,q=0;} \qquad (15)$$

здесь **A**, **B***, **C** и **C*** — квадратные матрицы, составленные из элементов a_{jk}, b_{jk}^*, c_{jk} и c_{jk}^* соответственно, а q является n-мерным вектором-столбцом, составленным из обобщенных координат.

Линейные дифференциальные уравнения (14) (или (15)) называются *уравнениями линейного приближения*. Они приближенно описывают движения, происходящие в малой окрестности положения равновесия. Уравнения линейного приближения (14) сами по себе не определяют размеров области, в пределах которой точные нелинейные уравнения (10) могут быть заменены этими линейными уравнениями. Границы этой области зависят от отброшенных нами членов высшего порядка в разложениях функций T, V и Q^*. В частных случаях может оказаться, что эта область весьма велика, например, заведомо охватывает все возможные движения системы.

Вернемся к уравнениям линейного приближения (15). Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение системы уравнений (15) имеет вид

$$q = \sum C_k e^{\lambda_k t},$$

где λ_k — корни уравнения

$$\det \| \mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}^*\lambda + (\mathbf{C} + \mathbf{C}^*) \| = 0, \qquad (16)$$

которое называется *характеристическим уравнением линейного приближения*. Каждый элемент этого определителя n-го порядка является квадратичным полиномом относительно λ; поэтому левая часть характеристического уравнения линейного приближения — *характеристический полином* — представляет собой полином степени $m = 2n$.

Уравнения (15) отличаются от общего случая системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами только тем, что матрица $\mathbf{A}$ не произвольна, а всегда является матрицей положительно определенной квадратичной формы.

Выделим теперь два частных случая, когда уравнения (15) принимают более специальный вид.

Консервативная система. В случае консервативной системы $Q_j^* = 0$, поэтому все $b_{jk}^* = c_{jk}^* = 0$ и уравнения линейного приближения (15) сводятся к виду

$$\boxed{\mathbf{A}\ddot{q} + \mathbf{C}q = 0.} \qquad (17)$$

Характеристическое уравнение (16) соответственно имеет вид

$$\det \| \mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C} \| = 0. \qquad (18)$$

Если дополнительно предположить, что не только $\mathbf{A}$, но и $\mathbf{C}$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы, то (как мы покажем далее) все корни характеристического уравнения (18) будут чисто мнимыми.

Диссипативная система. Пусть теперь $Q_j^* \not\equiv 0$, но зависят лишь от обобщенных скоростей. В этом случае вблизи положения равновесия

$$Q_j^* \cong -\sum_k b_{jk}^* \dot{q}_k$$

и

$$\mathbf{C}^* = 0, \quad \mathbf{B}^* \not\equiv 0.$$

Разумеется, система является диссипативной не всегда, т. е. не при любом выборе чисел b_{jk}^*. Найдем условия, которым должны удовлетворять числа b_{jk}^* для того, чтобы система была диссипативной. С этой целью введем квадратичную форму

$$R = \frac{1}{2}\sum_{j,k} b_{jk}^* \dot{q}_j \dot{q}_k; \tag{19}$$

тогда

$$Q_j^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}. \tag{20}$$

Функция R называется *функцией Релея.*

Если рассматриваемая система диссипативна, то

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = N^* = \sum_j Q_j^* \dot{q}_j < 0,$$

где N^* — мощность непотенциальных сил (см. § 3 гл. IV).

Но в силу (20) и теоремы Эйлера об однородных функциях

$$N^* = \sum_j Q_j^* \dot{q}_j = -\sum_j \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = -2R,$$

и из условия $N^* < 0$ следует, что $R > 0$, если хоть одна обобщенная скорость $\dot{q}_j$ отлична от нуля.

Таким образом, для диссипативной системы функция Релея является положительно определенной квадратичной формой, и в уравнениях движения

$$\mathbf{A}\ddot{q} + \mathbf{B}^*\dot{q} + \mathbf{C}q = 0$$

A и **B*** будут матрицами положительно определенных квадратичных форм.

§ 5. Устойчивость равновесия

1. Общие понятия об устойчивости. Вернемся к рис. VI.1. Хотя точки A и B и все точки «плато» C являются положениями равновесия материальной точки, находящейся в поле силы тяжести на изображенном на этом рисунке рельефе, интуитивно ясно, что они не равноценны. Если материальная точка помещена в достаточно малую окрестность точки A и имеет достаточно малую начальную скорость, то возникающее затем движение не выведет ее за пределы малой окрестности точки A. Более того, чем ближе к точке A помещена материальная точка в начальный момент и чем меньше ее начальная скорость, тем в меньшей окрестности точки A будет происходить последующее движение.

Иначе обстоит дело для положения B. Как бы мало ни была отклонена материальная точка из B и как бы мала ни была ее начальная скорость, материальная точка в процессе движения не остается вблизи B и отойдет от нее на конечное расстояние — например, переместится в окрестность точки A.

Несколько сложнее обстоит дело для внутренних точек «плато» C. Если отклонить материальную точку из C так, чтобы она еще осталась на «плато», и не сообщать ей начальной скорости, то материальная точка останется в равновесии в новой точке «плато»; но если сообщить ей начальную скорость, то, как бы ни была мала эта скорость, материальная точка, двигаясь вдоль «плато», выйдет за пределы малой окрестности положения равновесия и сойдет с «плато».

Аналогично обстоит дело и в более сложных случаях: положения равновесия можно классифицировать в зависимости от того, остается или нет система вблизи этого положения после малого возмущения. Положение равновесия называется *устойчивым* в первом случае и *неустойчивым* — во втором.

Дадим теперь точные определения.

Положение равновесия q_j^0 ($j=1, \ldots, n$) называется устойчивым, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, зависящее от ε, что если начальные отклонения в фазовом пространстве не выходят за пределы δ-окрестности положения равновесия, т. е.

$$|q_j(0)-q_j^0|<\delta, \quad |\dot{q}_j(0)|<\delta \quad (j=1, \ldots, n), \tag{21}$$

то при любом $t>0$ система будет находиться в ε-окрестности положения равновесия, т. е. будут выполняться неравенства

$$|q_j(t)-q_j^0|<\varepsilon, \quad |\dot{q}_j(t)|<\varepsilon \quad (j=1, \ldots, n). \tag{22}$$

Положение равновесия называется неустойчивым, если найдется такое $\varepsilon>0$, что для каждого сколь угодно малого $\delta>0$ существуют такой момент времени $t=t^*>0$ и такие начальные отклонения $q_j(0)$, $\dot{q}_j(0)$ ($j=1, \ldots, n$), лежащие в δ-окрестности положения равновесия, т. е. удовлетворяющие неравенствам (21), *что*

$$|q_j(t^*)-q_j^0|\geqslant\varepsilon$$

или

$$|\dot{q}_j(t^*)|\geqslant\varepsilon$$

хотя бы для одного j.

В определении устойчивости равновесия речь идет о любой ε-окрестности, но, разумеется, достаточно убедиться, что неравенства (22) при условии (21) выполнены для любой *малой* ε-окрестности. Действительно, если условия (22) выполнены для «малой» ε-окрестности, то эти же условия заведомо выполнены для «большой» ε-окрестности. В связи с этим положение равновесия, удовлетворяющее приведенному определению, иногда называют устойчивым по отношению к малым отклонениям или «устойчивым в малом». В определении никак не оговариваются границы или размеры области начальных отклонений, при которых движение остается в окрестности положения равновесия. С этой точки зрения положение A на рис. VI.1 устойчиво независимо от размеров «лунки» вблизи A, а положения B и C неустойчивы, сколь бы полога ни была кривая вблизи точки B или сколь бы длинно ни было «плато» C.

Устойчивость обеспечивает пребывание системы вблизи положения равновесия при достаточно малых отклонениях, но не гарантирует возвращения в положение равновесия или даже асимптотическое стремление к нему при $t \to \infty$. Между тем интуитивно ясно, что даже в простейшем случае, показанном на рис. VI.1, устойчивость может сопровождаться (например, если учесть наличие сил сопротивления) или не сопровождаться (например, когда нет иных сил, кроме веса) асимптотическим стремлением к равновесию. Чтобы учесть это различие, вводится понятие об *асимптотической устойчивости*.

Положение равновесия q_j^0 называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, если, кроме того, существует такая Δ-окрестность точки $q_j = q_j^0$, $\dot q_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, что для всех $|q_j^0 - q_j| < \Delta$, $|\dot q_j(0)| < \Delta$ выполняются условия

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = q_j^0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot q_j(t) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{23}$$

Если иметь в виду простейший случай, представленный на рис. VI.1, то кажется, что при выполнении условия (23) заведомо имеется и устойчивость, т. е. выполнено условие (22). Вообще говоря, это не так, и может оказаться, что условие (23) выполнено, а условие (22) не выполнено. Так, например, обстоит дело, если после любого начального отклонения $q_j^0 = a$ будет возникать движение, при котором $q_j(t)$ достигает некоторого конечного значения, скажем, равного 1, в момент $t = 1/a$, а далее с ростом t монотонно уменьшается до нуля (рис. VI.3). Легко видеть, что при этом условие (23) выполнено, а условие (22) не выполнено. Между тем такое протекание интегральных кривых возможно для систем дифференциальных уравнений, алгебраически разрешенных относительно старших производных, а значит, и для уравнений Лагранжа.

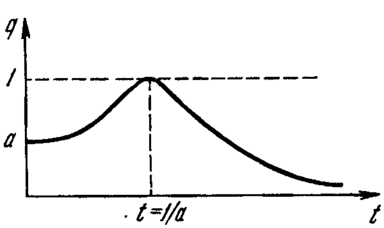

Рис. VI.3.

Обратим внимание читателя на то, что область $\delta(\varepsilon)$, о которой шла речь в определении обычной устойчивости, зависит от ε, а область Δ, о которой идет речь в определении асимптотической устойчивости, от ε не зависит. Поэтому для каждого значения ε существует некоторая область $\delta^*(\varepsilon)$, являющаяся пересечением областей $\delta(\varepsilon)$ и Δ. Движения, начавшиеся в δ^*-окрестности начала координат, не только не выходят за пределы ε-окрестности, но и стремятся к началу координат при $t \to \infty$.

Наша цель состоит в том, чтобы сформулировать (а в некоторых случаях и доказать) критерии, позволяющие установить, устойчиво ли положение равновесия. Критерии такого рода мы рассмотрим отдельно для консервативных систем, диссипативных систем и систем общего вида.

2. Суждение об асимптотической устойчивости по линейному приближению. Вернемся к уравнениям линейного приближения (15). Из того факта, что решения системы уравнений линейного приближения (15) имеют вид

$$q = \sum_k C_k e^{\lambda_k t},$$

где λ_k — корни характеристического уравнения (16), сразу следует, что для того чтобы положение равновесия системы, которая описывается уравнениями (15), было асимптотически устойчивым, надо, чтобы все действительные λ_k были отрицательны, а все комплексно сопряженные λ_k имели отрицательные действительные части

$$\operatorname{Re} \lambda_k < 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m = 2n),$$

т. е. чтобы все точки, изображающие эти корни, были расположены в комплексной плоскости слева от мнимой оси (рис. VI.4).

Непосредственно не ясно, каким образом асимптотическая устойчивость, определяемая линейными уравнениями (15), связана с асимптотической устойчивостью, определяемой истинными исходными нелинейными уравнениями (10). Наличие этой связи устанавливает следующая

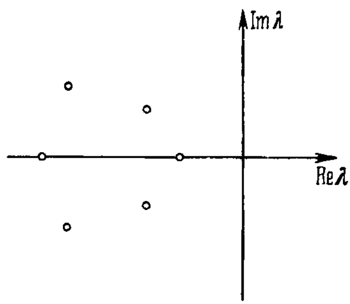

Рис. VI.4.

Теорема (Ляпунова). *Если все корни характеристического уравнения (16) системы дифференциальных уравнений линейного приближения (15) имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия $q = 0$ исходной системы, описываемой уравнениями (10), асимптотически устойчиво. Если хотя бы один корень характеристического уравнения (16) имеет положительную действительную часть, то положение равновесия, определяемое системой (10), неустойчиво.*

Отсылая читателей, интересующихся доказательством этой теоремы, к книгам по устойчивости движения[1]), обратим внимание на следующие обстоятельства. Теорема Ляпунова о линейном приближении определяет только достаточные условия асимптотической устойчивости равновесия, так как она не решает вопроса о том, устойчиво ли равновесие в том случае, когда характеристическое уравнение (16) линейного приближения (15) наряду с корнями с отрицательными действительными частями имеет чисто мнимые корни (т. е. корни, которым на рис. VI.4 соответствуют точки, расположенные на самой мнимой оси). Такие случаи называются *особыми*. В особых случаях равновесие может быть как устойчивым, так и неустойчивым, и вопрос об исследовании устойчивости в случаях такого рода представляет собой трудную задачу, которая не может быть решена только рассмотрением линейного приближения (15) и требует учета членов высших порядков в разложениях функций, входящих в уравнения (10).

Теорема Ляпунова об устойчивости линейного приближения сводит задачу об определении того, является ли равновесие асимптотически устойчивым, к чисто алгебраической задаче: задано характеристическое уравнение (16); требуется, не решая этого уравнения, определить, все ли его корни расположены слева от мнимой оси, т. е. имеют отрицательные действительные части. Задача такого рода носит название задачи (проблемы) Гурвица[2]). Существует ряд критериев, позволяющий непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения (16), *не решая его*, ответить на вопрос, все ли корни характеристического уравнения расположены слева от мнимой оси. Полиномы, которые удовлетворяют этому условию, иногда называют *гурвицевыми*.

---

[1]) См., например, Четаев Н. Г. Устойчивость движения.—М.: Гостехиздат, 1955.

[2]) Проблема Гурвица возникла при следующих обстоятельствах: Максвелл, изучая причины потери устойчивости регулятора прямого действия паровой машины, установил, что задача эта сводится к выяснению того, имеют ли все корни некоторого алгебраического уравнения отрицательные действительные части. Решив эту задачу для частного случая уравнений третьей степени, он сформулировал ее в общем виде, и по его предложению она была объявлена задачей на заданную тему на премию Адамса. Эту задачу решил и премию Адамса получил Раус, установивший алгоритм, позволяющий по коэффициентам уравнения решить, все ли его корни расположены слева от мнимой оси. Позже, не зная о работах Максвелла и Рауса, известный словацкий инженер-турбостроитель Стодола пришел к той же задаче, исследуя причины потери устойчивости регулируемых гидравлических турбин. Он обратил на эту задачу внимание цюрихского математика Гурвица, который, также не зная о работах Максвелла и Рауса, самостоятельно решил ее, придав критерию замкнутую форму. Связь между алгоритмом Рауса и критерием Гурвица была установлена позднее.

3. Критерии асимптотической устойчивости линейного приближения. Из различных критериев, дающих решение задачи Гурвица, мы приведем здесь только сам критерий Гурвица и графический критерий (часто более удобный для практического использования), предложенный А. В. Михайловым в 1938 г.

Прежде чем сформулировать эти критерии, укажем важный необходимый признак устойчивости. Для этого раскроем определитель в характеристическом уравнении (16), и, собрав подобные члены, представим левую часть уравнения в виде полинома степени m[1])

$$A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\lambda + A_m, \tag{24}$$

где коэффициенты A_i являются алгебраическими функциями от коэффициентов a_{ik} уравнений линейного приближения (15).

Необходимое условие устойчивости. *Для того чтобы характеристический полином* (24) *был гурвицевым, т. е. имел все корни, расположенные слева от мнимой оси, необходимо* (*но не достаточно*!), *чтобы все коэффициенты* A_h ($h = 0, 1, \ldots, m$) *были строго положительными.*

Этот необходимый признак устанавливается сразу, если использовать теорему Безу и записать характеристический полином (24) в виде

$$A_0 \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i), \tag{25}$$

где λ_i — корни характеристического уравнения. (Мы считаем, что $A_0 > 0$; если это не так, то характеристический полином надо предварительно умножить на -1.)

Действительно, если подставить в полином (25) в качестве λ_i отрицательные действительные числа или комплексные числа с отрицательной действительной частью и учесть, что последние входят в эти произведения лишь комплексно сопряженными парами (так как коэффициенты полинома — действительные числа), то получится полином, в котором все коэффициенты отличны от нуля и положительны.

Необходимое условие позволяет сразу исключить из рассмотрения полиномы, в которых имеются отрицательные коэффициенты либо пропуск членов, — такие полиномы заведомо не являются гурвицевыми. Приступим теперь к рассмотрению критерия устойчивости в случае, когда это необходимое условие выполнено.

---

[1]) Если ие рассматривать вырожденные случаи, то в задачах механики $m = 2n$, т. е. степень полинома (24) всегда четная. Устанавливаемые далее критерии устойчивости не используют этого обстоятельства и верны при любом m.

Критерий Гурвица (в форме Льенара — Шипара). Составим из коэффициентов характеристического полинома (24) определитель, носящий название *старшего определителя Гурвица*:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_m \end{vmatrix}. \tag{26}$$

Старший определитель Гурвица Δ_m имеет порядок m. Первая строка определителя образована всеми коэффициентами с нечетными индексами, вторая — с четными, а каждая следующая пара строк представляет собой предыдущую пару, сдвинутую на один столбец вправо. Освобождающиеся при этом места, а также места определителя, куда следовало бы вписать коэффициенты A_i с индексом, бо́льшим m, заполняются нулями.

Рассмотрим кроме определителя Δ_m последовательность его главных диагональных миноров, т. е. определителей, которые получаются из Δ_m последовательным вычеркиванием последнего столбца и последней строки:

$$\Delta_1 = A_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ A_0 & A_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 \\ A_0 & A_2 & A_4 \\ 0 & A_1 & A_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_{m-1} = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \dots & 0 \\ A_0 & A_2 & A_4 & \dots & 0 \\ 0 & A_1 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & A_{m-1} \end{vmatrix}. \tag{27}$$

Критерий Гурвица[1]) (в форме Льенара — Шипара) утверждает следующее: *для того чтобы характеристический полином* (24) *со всеми отличными от нуля и положительными коэффициентами был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы в последовательности определителей* (27) *все определители с четными индексами*

[1]) Мы не доказываем здесь критерия Гурвица. Алгебраическое доказательство сравнительно сложно (см., например, Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — 11-е изд., стереотип. — М.: Наука, 1975, и Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 3-е изд., исправл. — М.: Наука, 1967, где критериям Рауса и Гурвица посвящена специальная глава). Значительно проще доказательство, основанное на редукции, которая, не переводя корней характеристического уравнения через мнимую ось, удаляет один из них в бесконечность слева от мнимой оси. Такое доказательство сравнительно несложно, но проведение его требует знания деталей характера отображений мнимой оси плоскости корней на пространство коэффициентов характеристического уравнения (см. Айзерман М. А. Теория автоматического регулирования. — М.: Наука, 1966, с. 171 — 173).

(*либо все определители с нечетными индексами*) *были строго положительными*[1]).

Критерий Михайлова. Вернемся теперь к характеристическому полиному (24) и заменим в нем переменное λ мнимым переменным $i\omega$:

$$A_0(i\omega)^m + A_1(i\omega)^{m-1} + \ldots + A_m. \tag{28}$$

Собрав действительные и мнимые члены, получим комплексную функцию действительного переменного ω

$$f(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega). \tag{29}$$

Рассмотрим теперь комплексную плоскость, по осям которой отложены значения U и V. Подставляя в функцию (29) последовательно значения ω от 0 до $+\infty$, можно по точкам построить годограф этой комплексной функции (см. рис. VI.5, на котором стрелкой указано направление роста ω). Если менять ω от 0 до $-\infty$, то построенный таким образом годограф будет зеркальным отображением относительно действительной оси годографа, построенного для положительных значений ω. В самом деле, при замене ω на $-\omega$ значение функции $U(\omega)$, содержащей только четные степени ω, не меняется, а функция $V(\omega)$, содержащая только нечетные степени ω, меняет знак. Часть годографа, соответствующая отрицательным значениям ω, показана на рис. VI.5 штриховой кривой.

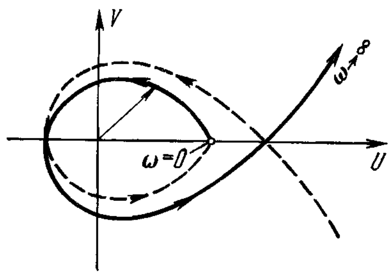

Рис. VI.5.

Построенный таким образом годограф (для положительных значений ω) называется *годографом характеристического полинома* (24) или *годографом Михайлова*. Определяемый формулой (29) вектор, конец которого при изменении ω от 0 до $+\infty$ описывает годограф Михайлова (этот вектор показан на рис. VI.5), называется *характеристическим вектором*.

[1]) При практическом использовании критерия Гурвица рекомендуется не развертывать определители по элементам строки или столбца, а свести старший определитель Гурвица к треугольной форме, т. е. к такой форме, чтобы все элементы, расположенные слева от главной диагонали, были равны нулю. При этом должны использоваться лишь преобразования, не меняющие знаков ни самого определителя, ни его диагональных миноров. После того как старший определитель Гурвица представлен в треугольной форме, критерий Гурвица сводится к требованию положительности всех элементов этого определителя, расположенных на главной диагонали (подробнее см. книгу М. А. Айзермана, упомянутую в предыдущем примечании).

Критерий Михайлова утверждает следующее: *для того чтобы характеристический полином был гурвицевым, необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова начинался при* $\omega=0$ *на действительной положительной полуоси и чтобы при изменении* ω *от* 0 *до* $+\infty$ *аргумент характеристического вектора монотонно возрастал от нуля до* $m\pi/2$.

При выполнении условий этого критерия годограф Михайлова последовательно проходит первый, второй, третий, четвертый, пятый (т. е. вновь первый) и т. д. квадранты плоскости U, V, уходя в бесконечность в m-м квадранте.

Доказательство критерия Михайлова[1]). Заменив в формуле (25) λ на $i\omega$, получим уравнение годографа Михайлова в виде

$$A_0 \prod_{j=1}^{m} (i\omega-\lambda_j). \tag{30}$$

Рассмотрим один сомножитель $i\omega-\lambda_j$ и выясним, как меняется его аргумент при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. На плоскости комплексного переменного корень λ_j представляется фиксированной точкой, а $i\omega$ — точкой, расположенной на мнимой оси и при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ «пробегающей» эту ось. Сомножитель $i\omega-\lambda_j$ представляется вектором, отложенным из точки λ_j к точке, «пробегающей» мнимую ось (рис. VI.6). Сразу видно, что если точка λ_j расположена слева от мнимой оси, то при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ аргумент этого вектора меняется монотонно на $+\pi$. Если же точка λ_i расположена справа от мнимой оси, то аргумент вектора меняется на $-\pi$. Обращаясь к формуле (30) и учитывая, что изменение аргумента произведения равно сумме изменений аргументов сомножителей, заключаем, что общее изменение аргумента характеристического вектора, «вычерчивающего» годограф Михайлова, будет равно $m\pi/2$, если все корни λ_i характеристического уравнения расположены слева от мнимой оси, и будет заведомо меньше, чем $m\pi/2$, если хотя бы один корень расположен справа от мнимой оси. Отсюда следует, что годограф Михайлова будет протекать так, как это

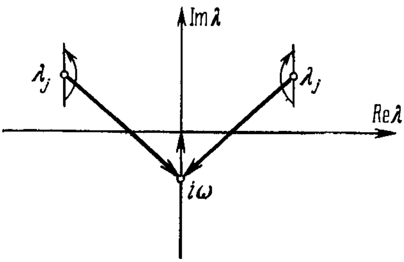

Рис. VI.6.

[1]) Критерий Михайлова является прямым следствием применения к функции комплексного переменного (29) принципа аргумента Коши. Однако критерий Михайлова можно доказать и непосредственно, без обращения к принципу аргумента; именно такое доказательство будет проведено здесь.

предписывается критерием, тогда и только тогда, когда исследуемый характеристический полином является гурвицевым, т. е. когда все его корни расположены слева от мнимой оси.

Пример. Рассмотрим характеристический полином степени $m=8$ и различное возможное протекание годографа Михайлова в этом случае (рис. VI.7). Из критерия Михайлова следует, что характеристические полиномы, для которых годограф Михайлова

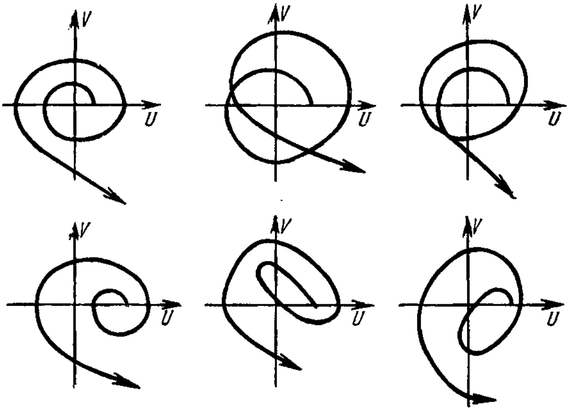

Рис. VI.7.

протекает так, как показано в верхней части рисунка, — гурвицевы, а характеристические полиномы, годограф которых протекает так, как это показано в нижней части рисунка, заведомо не являются гурвицевыми.

4. Устойчивость равновесия консервативной системы. Потенциальные ямы и барьеры. Рассмотрим теперь условия устойчивости равновесия консервативной системы. Критерии устойчивости, приведенные выше, непригодны для этой цели. Дело в том, что у характеристического уравнения линейного приближения для консервативной системы все корни чисто мнимые[1]) и асимптотическая устойчивость не может иметь места. Выделить устойчивые положения равновесия в консервативной системе позволяет

Теорема (Лагранжа — Дирихле[2])). *Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия, являющаяся непрерывной функцией*[3]) *q, имеет строгий изолированный*

[1]) Это утверждение будет доказано ниже.

[2]) Применительно к частному случаю поля сил тяжести эту теорему знал еще Торричелли (1644 г.). Для потенциальных полей в общем случае ее высказал Лагранж (1788 г.), но лишь Дирихле (1846 г.) строго доказал теорему.

[3]) Формально для доказательства теоремы требуется лишь непрерывность функции $V(q)$. В механике, однако, предполагается существование производных $\partial V/\partial q$, так как только тогда имеют смысл понятия «обобщенная сила», «уравнения Лагранжа» и т. д.

минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.

Доказательство. Рассмотрим положение равновесия $q_1^0, \ldots, q_n^0$, в котором потенциальная энергия $V(q)$ имеет строгий минимум. Поместим в точку $q_1^0, \ldots, q_n^0$ начало координат, т. е. будем считать, что

$$q_1^0 = \ldots = q_n^0 = 0.$$

В связи с тем, что потенциальная энергия V определена с точностью до аддитивной постоянной, распорядимся выбором этой постоянной так, чтобы в данном положении потенциальная энергия обращалась в нуль:

$$V(q^0) = 0. \tag{31}$$

Тогда из определения строгого минимума следует, что в n-мерном координатном пространстве существует такая Δ-окрестность начала координат, что если

$$|q_j| < \Delta \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

то

$$V(q) > 0 \tag{33}$$

в любой точке окрестности (кроме начала координат, где $V(0) = 0$).

Перейдем теперь к $2n$-мерному фазовому пространству $q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Здесь началу координат также соответствует исследуемое состояние равновесия. Рассмотрим в этом пространстве $2n$-мерную окрестность начала координат, в которой q_j $(j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условию (32). Во всех точках этой окрестности полная энергия системы $E = T + V$ положительна, кроме начала координат, где $E = 0$. Это следует из условия (33) и из того факта, что кинетическая энергия $T = T_2$ обращается в нуль лишь тогда, когда все $\dot{q}_j$ равны нулю, и $T > 0$, когда хотя бы одна из $\dot{q}_j$ отлична от нуля.

Выберем теперь в фазовом пространстве произвольную ε-окрестность, целиком лежащую внутри Δ-окрестности и содержащую начало координат в качестве внутренней точки. На границе этой ε-окрестности функция E непрерывна и ограничена, а сама граница представляет собой замкнутое ограниченное множество точек. Поэтому в силу теоремы Вейерштрасса существует принадлежащая границе ε-окрестности точка, где E достигает минимума на границе. Пусть этот минимум равен $E = E^*$. В связи с тем, что всюду на границе ε-окрестности $E > 0$, во всех точках этой границы

$$E \geqslant E^* > 0. \tag{34}$$

Выберем $E^{**} < E^*$ и определим такую δ-окрестность, что всюду в ней $E < E^{**}$. Она заведомо лежит внутри ε-окрестности (рис. VI.8) и всегда существует в силу непрерывности функции E и того, что $E=0$ в начале координат и $E>0$ в ε-окрестности.

Рассмотрим произвольную точку A, принадлежащую этой δ-окрестности, и примем соответствующие ей значения q_{jA} и $\dot{q}_{jA}$ ($j=1, \ldots, n$) за начальные:

$$|q_j(0)|=|q_{jA}|<\delta, \quad |\dot{q}_j(0)|=|\dot{q}_{jA}|<\delta. \tag{35}$$

Обозначим через E_A энергию E системы в этой точке. В силу того, что точка A лежит в δ-окрестности,

$$E_A \leqslant E^{**} < E^*.$$

Начальным данным (35) соответствует некоторое движение изучаемой системы. Но система консервативна, и поэтому во время движения ее энергия не меняется:

$$E(t)=E_A<E^*. \tag{36}$$

Из неравенства (36) сразу следует, что фазовая траектория, начинающаяся внутри δ-окрестности, не достигает границ ε-окрестности, так как на границе ε-окрестности $E \geqslant E^*$. Поэтому для любой ε-окрестности можно указать такую δ-окрестность, что если начальные данные удовлетворяют неравенствам (35), то при всех $t \geqslant 0$ удовлетворяются неравенства

$$|q_j(t)|<\varepsilon, \quad |\dot{q}_j(t)|<\varepsilon$$
$$(j=1, \ldots, n).$$

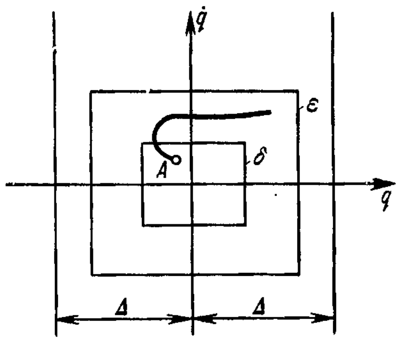

Рис. VI.8.

Теорема доказана.

Из доказательства видно, что теорема остается справедливой и в том случае, когда система отличается от консервативной наличием гироскопических сил. Действительно, добавление гироскопических сил не меняет ни положения равновесия [1]), ни того факта, что энергия системы сохраняется во время движения [2]). При доказательстве теоремы использовался лишь этот факт безотносительно к тому, по каким причинам он имеет место.

Теорема Лагранжа определяет лишь достаточный признак устойчивости равновесия консервативной системы: если положе-

[1]) Это следует из принципа возможных перемещений — работа гироскопических сил на возможных перемещениях равна нулю.

[2]) См. § 3 гл. IV.

нию равновесия соответствует строгий минимум функции $V(q)$, то оно устойчиво; однако устойчивыми могут быть положения равновесия, которые не совпадают с точками строгого минимума функции $V(q)$. Необходимые и достаточные условия устойчивости равновесия консервативной системы до сих пор не найдены. В связи с этим предлагались различные достаточные признаки неустойчивости консервативных систем. Ниже приводятся без доказательства три теоремы, устанавливающие признаки такого рода.

Первая теорема Ляпунова. *Если потенциальная энергия $V(q)$ консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и если это обстоятельство устанавливается из рассмотрения членов второй степени в разложении $V(q)$ в ряд по степеням q, то это положение равновесия неустойчиво.*

Вторая теорема Ляпунова. *Если в положении равновесия консервативной системы функция $V(q)$ имеет строгий максимум и это обстоятельство устанавливается из рассмотрения членов наименьшей степени $m \geqslant 2$ в разложении $V(q)$ в ряд по степеням q, то это положение равновесия неустойчиво.*

Теорема Четаева. *Если потенциальная энергия $V(q)$ является однородной функцией q и если в положении равновесия она не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Рассмотрим теперь вопрос о «потенциальных ямах» и «потенциальных барьерах», которые могут иметь место при движении системы в потенциальном поле. Эти понятия тесно связаны с тем фактом, что положения равновесия таких систем могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Связь эту удобно продемонстрировать на простейшем примере, представленном на рис. VI.1.

Рассмотрим положение A (рис. VI.1). Это положение соответствует минимуму потенциальной энергии, и любое движение, начавшееся вблизи точки A, происходит вблизи нее. Если материальная точка первоначально была далеко от A, но двигалась по показанному на рис. VI.1 рельефу и попала в окрестность A с малой скоростью, то она уже не выйдет из этой окрестности. С другой стороны, для того чтобы материальная точка, попавшая в окрестность A, могла выйти из нее, точке должна быть придана энергия, превышающая некоторое пороговое значение. Если с этой целью повышается потенциальная энергия материальной точки при нулевой ее скорости, то материальная точка выйдет из окрестности A только при условии, что ее потенциальная энергия будет доведена до значения, соответствующего ближайшему к ней максимуму потенциального рельефа (точка B). В этом смысле существует потенциальный порог или барьер, который надо преодолеть, чтобы «вырвать» материальную точку из окрестности точки A. Того же можно достигнуть, увеличивая кинетическую энергию материальной точки, но и в этом случае должен быть преодолен энергетический порог — кинетическая энергия должна быть достаточна для того, чтобы материальная точка достигла точки B.

В простейших случаях удается не только установить наличие «потенциального барьера», но и полностью определить границы «потенциальной ямы». Рассмотрим, например, движение материальной точки вдоль прямой в потенциальном поле, зависящем только от положения точки на прямой.

Пусть обобщенная координата q — расстояние материальной точки от некоторого фиксированного на прямой начала отсчета. Из условия сохранения полной энергии

$$\frac{m\dot{q}^2}{2}+V(q)=h=\text{const},$$

где $V(q)$ — потенциальная энергия, а h — произвольная постоянная, равная начальной энергии, имеем

$$\dot{q}=\pm\sqrt{h-V(q)}\sqrt{m/2}. \qquad (37)$$

Построим график функции $V(q)$ и ниже него изобразим фазовую плоскость q, $\dot{q}$ системы (рис. VI.9). Точки, соответствующие положениям устойчивого и неустойчивого равновесия, отмечены на фазовой плоскости точкой и крестиком. Зададим поочередно

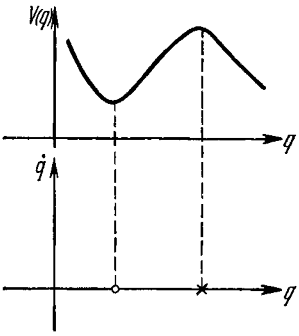

Рис. VI.9.

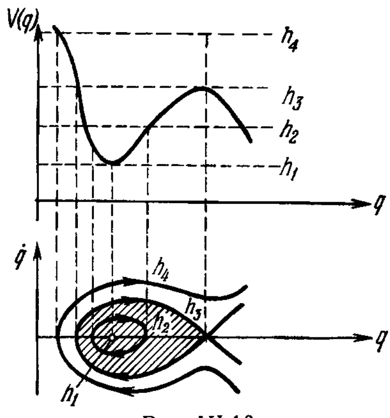

Рис. VI.10.

значения $h=h_1$, h_2 и т. д.[1]) и проведем горизонтальные прямые на уровне $V=h$ (рис. VI.10); используя формулу (37), построим фазовую траекторию. Непосредственно видно, что при $h_1<h<h_3$ фазовая траектория замкнута и движение вдоль нее не выходит из окрестности устойчивого равновесия. Если $h>h_3$ (например,

[1]) При этом прямые $h=h_1$ и $h=h_3$ касаются кривой $V(q)$ в точках ее минимума и максимума соответственно.

$h=h_4$), то фазовая траектория не замкнута и такова, что при движении вдоль нее изображающая точка неограниченно удаляется от положения устойчивого равновесия. Траектории этих типов разграничиваются траекторией, которая проходит через точку неустойчивого равновесия и соответствует $h=h_3$. Таким образом, $h=h_3$ и определяет энергетический барьер в этой задаче. В связи с тем, что каждая точка фазовой плоскости задает начальные данные $q(0)$, $\dot{q}(0)$, т. е. определяет движение, траектория, соответствующая $h=h_3$, выделяет те значения $q(0)$ и $\dot{q}(0)$, при которых движение остается в окрестности равновесия (заштрихованная область на рис. VI.10) и определяет в этой задаче «конфигурацию потенциальной ямы».

Вполне аналогично обстоит дело и в общем случае движения консервативной системы с n степенями свободы. Потенциальная энергия — функция от n переменных $q_1, \ldots, q_n$, и в пространстве состояний могут быть указаны области, содержащие точки, где V достигает минимума. Эти области образуют «потенциальные ямы»: система, попавшая в эту область с малыми скоростями, не может выйти из нее до тех пор, пока ей не будет придана энергия, достаточная для преодоления «потенциального барьера».

5. Устойчивость равновесия диссипативной системы. Функция Ляпунова. Рассмотрим теперь строго диссипативную систему, т. е. стационарную систему, отличающуюся от консервативной наличием таких непотенциальных обобщенных сил Q_j^*, что

$$N^* = \sum Q_j^* \dot{q}_j < 0, \tag{38}$$

если хотя бы одна производная $\dot{q}_j \neq 0$. Выше (см. § 3 гл. IV) было показано, что в стационарном случае $dE/dt = N^*$, и поэтому для строго диссипативной системы $dE/dt < 0$, т. е. во время движения энергия непрерывно убывает.

Достаточные условия устойчивости равновесия строго диссипативных систем определяет

Теорема. *Если в положении равновесия строго диссипативной стационарной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум и если это положение равновесия является изолированным, то оно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. При доказательстве теоремы Лагранжа для консервативных систем мы, предполагая лишь, что в рассматриваемой точке функция V имеет строгий минимум и что энергия сохраняется во время движения, установили устойчивость равновесия в этой точке. Это доказательство тем более сохраняется, если считать, что во время движения E убывает. Поэтому нет необходимости заново доказывать устойчивость равновесия в условиях, когда система не консервативна, а диссипативна; чтобы доказать теорему, надо дополнительно показать лишь, что при условиях этой теоремы существует такая Δ-окрестность начала координат фазового пространства, что движения, начавшиеся в этой окрестности, удовлетворяют условиям[1])

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t)=0, \quad \lim_{t\to\infty} \dot{q}_j(t)=0 \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{39}$$

Выберем положительное число a. Если положить $\varepsilon=a$, то в силу обычной устойчивости можно по a найти окрестность $\delta(a)$. На выбор числа $a>0$ наложим лишь одно ограничение: в a-окрестности начала координат фазового пространства не содержится иных положений равновесия. Такой выбор числа a всегда возможен, так как по условию теоремы положение равновесия является изолированным.

Докажем теперь, что если выполнены условия теоремы, то в качестве Δ-окрестности может быть выбрана указанная выше $\delta(a)$-окрестность.

Рассмотрим произвольное движение, начавшееся в $\delta(a)$-окрестности начала координат фазового пространства и в силу устойчивости равновесия не выходящее за пределы a-окрестности. Назовем его движением P.

В процессе движения P в силу условий теоремы сохраняется неравенство $dE/dt<0$, т. е. энергия E монотонно убывает, оставаясь все время положительной. Следовательно, при движении P существует предел

$$\lim_{t\to\infty} E(t)=E_\infty.$$

Это предельное значение E_∞ заведомо неотрицательно. Если $E_\infty=0$, то это означает, что во время движения P как $|q_j|\to 0$, так и $|\dot{q}_j|\to 0$, поскольку в пределах δ-окрестности $E=0$ только в начале координат в силу предположения теоремы о том, что изучаемому равновесию соответствует *изолированный* минимум функции $V(q)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось доказать лишь, что E_∞ не может быть положительным числом. Предположим обратное, т. е. допустим, что $E_\infty>0$. Условие $E=E_\infty>0$ выделяет в фазовом пространстве гиперповерхность S, и если в процессе движения $E(t)\to E_\infty>0$, то это означает, что движение P неограниченно приближается к поверхности S. Действительно, так как изображающая точка $(q(t), \dot{q}(t))$ при движении P расположена в a-окрестности, то, выбирая произвольную последовательность моментов времени $t_k\to\infty$ $(k\to\infty)$,

[1]) Как и при доказательстве теоремы Лагранжа, без ограничения общности предполагается, что изучаемому положению равновесия соответствует начало координат фазового пространства. Потенциальная энергия за счет выбора аддитивной постоянной нормируется так, что в положении равновесия $V(0)=0$.

получаем последовательность точек $a_k=(q(t_k),\ \dot{q}(t_k))$. Поскольку последовательность a_k ограничена, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $a_s=(q(t_s),\ \dot{q}(t_s))$ — указанная подпоследовательность, и пусть

$$a_s \to a^* = (q^*,\ \dot{q}^*).$$

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} E(q(t),\ \dot{q}(t)) = E_\infty$, то $E(q(t_s),\ \dot{q}(t_s)) \to E_\infty$, и из непрерывности функции $E(q,\ \dot{q})$ следует, что $E(q^*,\ \dot{q}^*)=E_\infty$, а это значит, что точка a^* лежит на поверхности S.

Примем теперь точку a_s за начальную и «выпустим» из нее движение P_s. Так как точки a_s «принадлежат» движению P, движение, начавшееся в a_s, будет совпадать с продолжением движения P. Поэтому значения энергии E в движениях P_s будут удовлетворять неравенствам

$$E_s(t) \geqslant E_\infty.$$

С другой стороны, «выпуская» движение из точки $a^*=(q^*,\ \dot{q}^*)$ в силу условия теоремы получаем, что обязательно существует такой конечный момент времени $\bar{t}$, для которого $dE^*(t)/dt<0$ (здесь $E^*(t)$ — значение энергии в движении P^*). Поэтому $E^*(\bar{t})<E_\infty$. Следовательно, значения энергии в движениях P_s и в движении P^* в момент времени $\bar{t}$ отличаются на конечную величину $E_\infty - E^*(\bar{t})$, несмотря на то, что начальные точки $(q_s,\ \dot{q}_s)$ и $(q^*,\ \dot{q}^*)$ этих движений сколь угодно близки, а это противоречит теореме о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных. Уравнения же Лагранжа всегда алгебраически разрешимы относительно старших производных, и предполагается, что для них теорема эта верна. Мы пришли к противоречию, показывающему, что предположение $E_\infty>0$ ошибочно. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости консервативной системы и только что доказанной теоремы об асимптотической устойчивости диссипативной системы мы нигде не использовали того факта, что функция E имеет смысл механической энергии системы. При доказательстве теоремы Лагранжа были использованы лишь следующие три свойства функции E:

1) функция E положительна во всех точках ε-окрестности начала координат фазового пространства и обращается в нуль в одной точке — в начале координат;

2) функция E непрерывна в начале координат;

3) производная по времени от функции E, вычисленная при любом движении, происходящем в ε-окрестности, равна нулю всюду в этой окрестности, кроме начала координат.

Условие о том, что в рассматриваемой точке функция $V(q)$ имеет строгий минимум, понадобилось нам только для того, чтобы показать, что полная энергия системы удовлетворяет этим условиям и что поэтому ее можно использовать для построения приведенных доказательств. Доказательства полностью сохранились бы при введении в рассмотрение какой-либо другой функции фазовых координат (обобщенных координат системы и их производных), удовлетворяющей указанным выше трем условиям, хотя уже и не имеющей смысл механической энергии.

Приведем теперь теорему, которая является далеко идущим обобщением теоремы Лагранжа для консервативных систем и доказанной выше теоремы для диссипативных систем и вместе с тем является частным случаем общей теоремы об устойчивости движений, доказанной Ляпуновым.

Эта теорема касается систем дифференциальных уравнений общего вида

$$\dot{x}_i = X_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{40}$$

Уравнения Лагранжа (10) легко сводятся к уравнениям вида (40).

Теорема Ляпунова. *Если можно найти такую непрерывную функцию $V(x)$, что*

а) *она имеет положительные значения в некоторой малой ε-окрестности начала координат и в ней обращается в нуль лишь в начале координат и*

б) *полная производная от этой функции по времени, вычисленная в силу уравнений* (40)[1], *неположительна во всех точках ε-окрестности начала координат, то исследуемое положение равновесия $x=0$ устойчиво. Если дополнительно известно, что эта производная отрицательна во всех точках ε-окрестности начала координат и обращается в нуль лишь в самом начале координат, то положение равновесия $x=0$ устойчиво асимптотически.*

Доказательство теоремы дословно повторяет доказательство теоремы Лагранжа — Дирихле для консервативной системы (когда утверждается, что производная dV/dt неположительна) и доказательство теоремы об условиях устойчивости равновесия диссипативной системы (когда утверждается, что производная dV/dt отрицательна всюду в ε-окрестности).

Доказанная выше теорема Лагранжа и теорема об условиях устойчивости равновесия для диссипативной системы являются частными случаями этой теоремы, которые получаются, если в качестве функции V взять полную энергию системы. Условия

---

[1]) Производной функции $V(x)$, вычисленной в силу уравнений (40), называют функцию фазовых координат, которая строится следующим образом:

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x). \tag{41}$$

указанных теорем и обеспечивают как раз то, что полная энергия системы может служить такой функцией V, т. е. удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова. В общем случае функция V, удовлетворяющая этим условиям, называется *функцией Ляпунова*.

Заметим, что если для системы уравнений (40) известен какой-либо первый интеграл, т. е. функция, которая при движении системы не изменяется, и если эта функция непрерывна в малой окрестности начала координат, положительна в ней и имеет в самом начале координат нулевое значение, то такой интеграл уравнений (40) является для этих уравнений функцией Ляпунова. Действительно, производная от такой функции, вычисленная в силу тех же уравнений (40), заведомо равна нулю. Поэтому наличие первого интеграла, удовлетворяющего указанным выше условиям, гарантирует устойчивость равновесия системы (40) (разумеется, не асимптотическую). Полная энергия консервативной системы как раз является примером интеграла такого рода. Из этого замечания сразу следует, что полная энергия консервативной системы не является единственным примером первого интеграла, который может быть использован для доказательства устойчивости.

Пример. В качестве примера решения задачи об устойчивости движения путем надлежащего выбора функции Ляпунова V рассмотрим задачу об устойчивости перманентных вращений твердого тела, движущегося по инерции относительно неподвижной точки. В гл. V было показано, что уравнения движения по инерции тела с неподвижной точкой можно записать так:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt}+(C-B)\,qr&=0,\\ B\frac{dq}{dt}+(A-C)\,pr&=0,\\ C\frac{dr}{dt}+(B-A)\,pq&=0. \end{aligned}\tag{42}$$

Переменными в этом уравнении являются p, q, r — проекции вектора угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ системы координат, жестко связанной с телом; эти оси выбраны по главным осям инерции тела (см. гл. V), а A, B, C — константы. В гл. V перманентными вращениями были названы движения, которые происходят в одном из следующих трех случаев:

1° $p=p_0=\text{const}, \quad q=r=0;$

2° $q=q_0=\text{const}, \quad p=r=0;$

3° $r=r_0=\text{const}, \quad p=q=0.$

Иначе говоря, перманентными называются вращения, которые происходят с постоянной угловой скоростью вокруг одной из главных осей инерции, проходящих через неподвижную точку. В качестве примера рассмотрим случай 1°; остальные два случая исследуются аналогично.

В обозначениях $x_1 = p - p_0$, $x_2 = q$, $x_3 = r$ уравнения (42) принимают вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{B - C}{A} x_2 x_3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{C - A}{B} x_3 (x_1 + p_0),$$
$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{A - B}{C} x_2 (x_1 + p_0).$$

Рассмотрим случай, когда A меньше как B, так и C. В качестве функции Ляпунова выберем функцию

$$V = [Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0x_1]^2 + B(B - A)x_2^2 + C(C - A)x_3^2. \quad (43)$$

Легко видеть, что эта функция непрерывна, обращается в нуль в начале координат и положительна в остальных точках вблизи него. Следовательно, функция V удовлетворяет условиям, при которых она может служить функцией Ляпунова для рассматриваемой задачи. С другой стороны, легко видеть, что производная dV/dt, вычисленная в силу уравнений движения, тождественно обращается в нуль, т. е. выбранная функция является первым интегралом уравнений движения. Хотя теперь функция V и не является полной энергией системы, мы, применяя теорему Ляпунова, сразу устанавливаем, что перманентное вращение 1° устойчиво.

Предположив теперь, что A больше, чем B, и больше, чем C, и взяв в качестве функции Ляпунова ту же самую функцию, но заменив у членов, стоящих вне квадратной скобки, знак плюс на минус, вновь приходим к тому же выводу.

В гл. V было показано, что коэффициенты A, B и C представляют собой моменты инерции относительно осей ξ, η, ζ соответственно. Отсюда сразу следует, что при движении тела с неподвижной точкой перманентное вращение вокруг тех главных осей, относительно которых момент инерции наименьший и наибольший, будет устойчивым. Применяя теорему Четаева о неустойчивости, можно показать, что перманентное вращение вокруг третьей оси (момент инерции относительно которой — средний по величине) неустойчиво.

Теорема Ляпунова позволяет установить, является ли исследуемое положение равновесия в общем случае устойчивым (либо асимптотически устойчивым) в зависимости от того, можно или нельзя подобрать функцию Ляпунова для конкретной рассматриваемой задачи. Сама по себе теорема не дает каких-либо рекомендаций в отношении того, каким образом можно выяснить вопрос о существовании такой функции. Известны, однако, теоремы, обращающие теорему Ляпунова, т. е. устанавливающие, что во всех случаях, когда имеет место устойчивость, такая функция заведомо существует. Поэтому каждый раз при проверке устойчивости с помощью теоремы Ляпунова возникает творческая задача, которая не может быть решена с помощью какого-либо наперед заданного алгоритма, — найти такую функцию и тем самым установить устойчивость. Разумеется, если это сделать не удалось, то это еще не значит, что равновесие неустойчиво, так как остается открытым вопрос: нельзя ли каким-либо иным способом все же найти функцию Ляпунова для рассматриваемой задачи. В этом смысле использование теоремы Ляпунова — дело опыта и удачи. Однако значение этой теоремы состоит не только в том, что она дает в руки исследователя средство для творческого решения задачи, но и в том, что, опираясь на нее, можно доказать теорему об устойчивости по линейному приближению, о которой речь шла выше.

§ 6. Движение консервативной системы в малой окрестности положения равновесия (в линейном приближении)

В предыдущем параграфе мы исследовали лишь вопрос об устойчивости равновесия, т. е. качественно оценили движения, возникающие при малом отклонении от положения равновесия. В этом параграфе будет детально изучаться характер движений, которые протекают вблизи положений устойчивого равновесия. Будем считать, что начальные отклонения лежат в столь малой окрестности начала координат фазового пространства, что в силу устойчивости движение не выходит за пределы малой окрестности начала координат и с достаточной точностью описывается уравнениями линейного приближения (15).

В общем случае тот факт, что уравнения (15) получались линеаризацией уравнений Лагранжа, не придает этим уравнениям каких-либо особенностей, которые позволили бы выписать их решение и изучить возникающие движения проще, чем это могло бы быть сделано при исследовании системы линейных уравнений самого общего вида. Иначе обстоит дело в том случае, когда система консервативна и матрица $\mathbf{C} = \|c_{jk}\|$ является матрицей положительно определенной квадратичной формы[1]). Тогда в уравнениях линейного приближения

$$\mathbf{A}\ddot{q} + \mathbf{C}q = 0 \tag{44}$$

[1]) Матрица $\mathbf{C}$ может не обладать этим свойством, даже если выполнены условия теоремы Лагранжа — Дирихле. Так, например, у консервативной системы с $V = q_1^4 + q_1^4$ в положении равновесия $q_1 = q_2 = 0$ функция V имеет строгий минимум, а $\mathbf{C} \equiv 0$.

обе матрицы **A** и **C** будут положительно определенными, и это обстоятельство позволит упростить получение решений и их анализ.

В линейной алгебре доказывается теорема о том, что две квадратичные формы, одна из которых является положительно определенной, могут быть одновременно приведены к сумме квадратов с помощью неособенного линейного преобразования

$$q_j = \sum_{l=1}^{n} v_{jl}\theta_l. \tag{45}$$

При этом после приведения все коэффициенты положительно определенной формы будут равны единице, а коэффициенты второй формы — действительным числам r_l:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \dot{\theta}_l^2, \tag{46}$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} r_l\theta_l^2. \tag{47}$$

Матрица $\| v_{jl} \|$ этого преобразования и числа r_l, которые получаются в результате, определяются методами линейной алгебры. Эти n чисел r_l являются корнями алгебраического уравнения n-й степени

$$\Delta = \det \| \mathbf{C} - r\mathbf{A} \| = \begin{vmatrix} c_{11} - ra_{11} & \dots & c_{1n} - ra_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} - ra_{n1} & \dots & c_{nn} - ra_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{48}$$

Уравнение (48) называется *вековым*[1]).

Все корни r_l векового уравнения — действительные числа. Если обе формы, приводимые к сумме квадратов, являются положительно определенными, как в рассматриваемом случае, то все числа r_l положительны. Это доказывается в линейной алгебре, но можно установить и непосредственно — в противном случае форма (47) не была бы положительна в малой окрестности начала координат, а это свойство должно сохраняться при преобразованиях координат (45).

Координаты θ_l ($l = 1, \dots, n$) также представляют собой обобщенные координаты системы. Обобщенные координаты $\theta_1, \dots, \theta_n$, в которых кинетическая и потенциальная энергии имеют вид (46) и (47), называются *главными* (или *нормальными*) *координатами системы*. В силу указанной выше теоремы линейной алгебры для

---

[1]) Название «вековое уравнение» связано с тем, что такое уравнение впервые было выведено в небесной механике в связи с исследованием вековых колебаний орбит планет.

каждой консервативной системы можно выбрать (и притом единственным образом) главные обобщенные координаты.

Приняв за обобщенные координаты главные координаты $\theta_1, \ldots$ $\ldots, \theta_n$ и получив поэтому T и V в виде (46) и (47), подставим лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} (\dot{\theta}_l^2 - r_l \theta_l^2) \tag{49}$$

в уравнения Лагранжа.

После выполнения предписываемых этими уравнениями операций частного и полного дифференцирования получаем

$$\ddot{\theta}_l + r_l \theta_l = 0 \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{50}$$

— систему из n *независимых* уравнений, описывающих порознь изменение каждой из главных координат θ_l.

Интегралы уравнений (50) имеют вид

$$\theta_l = C_l \sin\left(\sqrt{r_l}\, t + \varphi_l\right) \qquad (l = 1, \ldots, n). \tag{51}$$

Сравним теперь вековое уравнение

$$\det \| \mathbf{C} - r\mathbf{A} \| = 0$$

с характеристическим уравнением этой же консервативной системы

$$\det \| \mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C} \| = 0.$$

Они переходят одно в другое при $-r = \lambda^2$, поэтому

$$\lambda = \pm \sqrt{-r} = \pm i \sqrt{r}.$$

Из того факта, что в рассматриваемом случае все корни r_k векового уравнения являются действительными положительными числами, следует, что все $2n$ корней характеристического уравнения консервативной системы — чисто мнимые. Обозначим их так:

$$\lambda = \pm i\omega;$$

тогда

$$r = -\lambda^2 = -(\pm 1)^2 i^2 \omega^2 = \omega^2$$

и

$$\sqrt{r} = \omega.$$

Поэтому уравнение (51) можно переписать в виде

$$\theta_l = C_l \sin(\omega_l t + \varphi_l). \tag{52}$$

Числа ω_l называются *собственными частотами* изучаемой консервативной системы. Буквами C_l и φ_l в выражении (52) обозначены произвольные постоянные, которые обычным образом определяются через начальные условия.

Итак, *при движении консервативной системы в окрестности положения устойчивого равновесия (соответствующего по условию минимуму потенциальной энергии) каждая из главных координат совершает около положения равновесия гармоническое колебание с одной из собственных частот.*

Подставляя выражение (52) в формулу преобразования (45), находим закон движения в исходных обобщенных координатах:

$$\boxed{q_j = \sum_{l=1}^{n} \nu_{jl} C_l \sin(\omega_l t + \varphi_l) \qquad (j = 1, \ldots, n).} \tag{53}$$

Отсюда сразу следует, что функции $q_j(t)$ для всех j, вообще говоря, получаются суперпозицией n гармонических колебаний с собственными частотами ω_l.

Эти гармонические колебания

$$\theta_l = C_l \sin(\omega_l t + \varphi_l) \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

называются *главными колебаниями* системы. Можно выбрать начальные данные так, чтобы среди n чисел $C_1, \ldots, C_n$ только какое-либо одно, например C_h, было отлично от нуля. В этом случае

$$q_j = \nu_{jh} C_h \sin(\omega_h t + \varphi_h),$$

т. е. в системе реализуется h-е главное колебание. Наоборот, ни при каких начальных данных в системе не может быть реализовано гармоническое колебание, частота которого не являлась бы одной из собственных частот. Поэтому если каким-либо образом удается указать начальные данные, при которых в системе реализуется некоторое гармоническое колебание, то расчет системы при этих начальных данных позволяет определить одну из собственных частот. Этот прием иногда позволяет найти все собственные частоты системы.

В качестве примера рассмотрим малые колебания двух одинаковых плоских маятников, связанных пружиной (рис. VI.11, *а*). Интуитивно ясно, что если отклонить маятники на один и тот же угол α и отпустить их затем с нулевыми начальными скоростями (рис. VI.11, *б*), то во время колебаний длина пружины меняться не будет, и, следовательно, маятники будут колебаться однаково, так, как они колебались бы, если бы не были связаны пружиной. Отсюда сразу следует, что одной из собственных частот этой системы является собственная частота одного из маятников при отсутствии пружины.

Интуитивно ясно также, что если отклонить маятники на одинаковые углы в противоположные стороны (рис. VI.11, *в*), то колебания маятников также будут гармоническими. Они противоположны по фазе, но совпадают по амплитуде и частоте. Средняя точка пружины при этом останется неподвижной. Поэтому вторая собственная частота системы будет равна собственной частоте, которую имел бы один из маятников при наличии пружины половинной длины с закрепленным вторым концом, т. е. пружины,

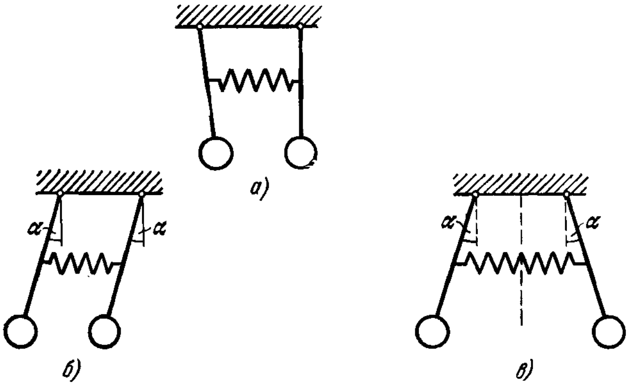

Рис. VI.11.

жесткость которой равна удвоенной жесткости истинной пружины, связывающей маятники. Система, изображенная на рис. VI.11, имеет две степени свободы; мы нашли два главных колебания, возможных в этой системе, т. е. все ее главные колебания.

Вернемся к уравнениям (53), т. е. к колебаниям консервативной системы с n степенями свободы.

Амплитуды суммируемых главных колебаний зависят от множителей ν_{jl}. Матрица преобразования (45) к главным координатам, составленная из этих множителей,

$$\| \nu_{jl} \|_{j,\ l=1}^{n},$$

называется поэтому *амплитудной матрицей* (или *матрицей амплитудных векторов*). Для каждого набора начальных данных q_j^0, $\dot{q}_j^0$ $(j=1, \ldots, n)$ определяются значения произвольных постоянных C_l и φ_l $(l=1, \ldots, n)$. Числа φ_l определяют сдвиги фаз между гармоническими колебаниями, соответствующими отдельным собственным частотам, — эти сдвиги фаз одинаковы у всех обобщенных координат системы q_j $(j=1, \ldots, n)$. Амплитуды каждого из этих гармонических колебаний, разные у разных координат q_j, определяются элементами ν_{jl} амплитудной матрицы.

Какая-либо функция $q_h(t)$ может не содержать главного колебания с какой-либо собственной частотой ω_r (и притом при любых начальных условиях), если $\nu_{hr}=0$. Даже если все элементы амплитудной матрицы отличны от нуля, все же может случиться, что главное колебание с собственной частотой ω_r отсутствует в выражении для h-й координаты, но это может быть лишь при условии, что $C_r = 0$, т. е. при некоторых специальных начальных данных. И в таких случаях главных колебаний с частотой ω_r не происходит.

В связи с тем, что изученные выше движения консервативных систем происходят в малой окрестности положений устойчивого равновесия, их часто называют *малыми колебаниями* консервативных систем.

В заключение этого параграфа сделаем следующее замечание об *амплитудных векторах* $\mathbf{v}_i$ (векторах-столбцах матрицы $\|\mathbf{v}_{jl}\|$). В силу того, что преобразование (45) неособенное, амплитудные векторы линейно независимы. Более того, если $\mathbf{v}_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{in}\}$ и $\mathbf{v}_k = \{v_{k1}, \ldots, v_{kn}\}$ — два различных амплитудных вектора ($i \neq k$), то можно показать, что их «скалярное произведение с весами a_{ik}»

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ik} v_{is} v_{ks}$$

равно нулю. В этом выражении a_{ik} — коэффициенты в выражении для кинетической энергии

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k.$$

В этом смысле амплитудные векторы «ортогональны».

§ 7. Действие внешней силы, зависящей явно от времени, на произвольную стационарную систему при ее движении вблизи положения устойчивого равновесия (в линейном приближении)

Предположим теперь, что стационарная система совершает колебания вблизи положения асимптотически устойчивого равновесия, но в отличие от случая, рассмотренного выше, будем предполагать, что на систему помимо обобщенных сил, зависящих от обобщенных координат и скоростей, действует также и обобщенная сила, зависящая явно от времени.

Чтобы рассмотреть действие такой обобщенной силы, будем считать, что та часть обобщенных сил, которая зависит от q и $\dot{q}$, уже учтена при составлении уравнений линейного приближения. В отличие от формул (14) мы представим теперь эти уравнения при отсутствии силы, явно зависящей от времени, в виде

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{54}$$

т. е. опустим знак *, указывающий, что соответствующие коэффициенты получены при разложении в ряд функции $Q_j^*(q, \dot{q})$, так как это обстоятельство не будет играть далее существенной роли.

Учитывая дополнительную обобщенную силу, зависящую явно от времени, представим уравнения линейного приближения стационарной системы в виде

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k) = Q_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n),} \tag{55}$$

где $Q_j(t)$ — зависящие явно от времени части обобщенных сил. Предполагается, что в процессе движения они остаются малыми по модулю и не выводят систему из малой окрестности положения равновесия — к этому вопросу мы еще вернемся ниже.

В связи с тем, что система уравнений (55) является линейной, а для линейных систем имеет место принцип суперпозиции, можно рассмотреть движение системы под действием какой-либо одной силы из $Q_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$, предположив, что все остальные равны нулю. Определив порознь движения, возникающие под действием каждой из таких обобщенных сил, их следует затем сложить.

Учитывая это обстоятельство, положим

$$Q_2(t) = Q_3(t) = \ldots = Q_n(t) = 0, \tag{56}$$

т. е. будем считать, что отлична от нуля только обобщенная сила $Q_1(t)$, относящаяся к первой обобщенной координате, а все остальные обобщенные силы такого рода равны нулю.

Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений (55) складывается из двух слагаемых: первым является общее решение соответствующей однородной системы, получающейся из (55) при $Q_j(t) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ (обозначим его через q^*), а вторым — частное решение соответствующей неоднородной системы (обозначим это частное решение через q^{**}). Тогда

$$q_j = q_j^* + q_j^{**} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{57}$$

Что касается общего решения однородной системы q^*, то оно находится по общим правилам интегрирования линейных однородных уравнений и в рассматриваемом случае движения вблизи положения асимптотически устойчивого равновесия заведомо стремится к положению равновесия при неограниченном возрастании времени t. В связи с этим движение $q(t)$ стремится в пределе к движению $q^{**}(t)$, которое обусловлено наличием в правых частях уравнений зависящей явно от времени вынуждающей силы $Q_1(t)$.

Движения q^*, которые бы возникали при отсутствии такой вынуждающей силы, называются *свободными*. Если этими движениями являются колебания, то их называют *свободными колебаниями*. Движение q^{**}, которое возникает благодаря наличию вынуждающей силы, зависящей явно от времени, и к которому в пределе стремится суммарное движение, называют *вынужденным движением* (в случае колебаний говорят о *вынужденных колебаниях*).

В этом разделе мы будем изучать только вынужденные движения, помня о том, что общее движение складывается из вынужденных и из свободных движений.

1. Гармоническая вынуждающая сила. Частотная характеристика. Предположим, что обобщенная сила Q_1 является гармонической функцией от t,

$$Q_1(t) = A\sin\Omega t. \tag{58}$$

Здесь A — амплитуда, а Ω — частота внешней вынуждающей силы Q_1.

Нам удобно далее вместо истинной обобщенной силы рассматривать комплексную функцию

$$\tilde{Q}_1(t) = Ae^{i\Omega t} = A(\cos\Omega t + i\sin\Omega t). \tag{59}$$

Интересующая нас действительная функция (58) получается как мнимая часть этого комплексного выражения:

$$Q_1(t) = \operatorname{Im}\tilde{Q}_1(t). \tag{60}$$

Рассмотрим уравнения (55), в которых $Q_1(t)$ определяется выражением (59), а $Q_2 = Q_3 = \ldots = Q_n = 0$. Нас интересует частное решение такой системы дифференциальных уравнений. Зная это решение и учитывая формулу (60), можно выделить в полученном решении мнимую часть и найти истинные вынужденные колебания.

Частное решение уравнений (55) с правой частью (59) будем искать в виде

$$\tilde{q}_j = B_j e^{i\Omega t} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{61}$$

Подставив эти выражения в наши уравнения и сократив на экспоненциальный множитель, отличный от нуля при любом t, получим

$$\sum_{k=1}^{n} [a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk}] B_k = \delta_{1j}A \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{62}$$

(здесь δ_{1j} — обычный символ Кронекера: $\delta_{1j} = 1$ при $j = 1$ и $\delta_{1j} = 0$ при $j \neq 1$.)

Если ввести обозначения

$$d_{jk}(i\Omega) = a_{jk}(i\Omega)^2 + b_{jk}(i\Omega) + c_{jk}, \tag{63}$$

то уравнения (62) представятся в виде

$$\sum_{k=1}^{n} d_{jk}(i\Omega) B_k = \delta_{1j}A \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{64}$$

Уравнения (62) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных B_k; коэффициентами этих уравнений являются комплексные величины, определяемые по формулам (63).

Решая систему (64) линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами по правилу Крамера, получаем

$$B_k = \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} A, \tag{65}$$

где в знаменателе стоит определитель матрицы из коэффициентов системы алгебраических уравнений (64)

$$\Delta = \det \| d_{jk}(i\Omega) \| = \begin{vmatrix} d_{11}(i\Omega) & \ldots & d_{1n}(i\Omega) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ d_{n1}(i\Omega) & \ldots & d_{nn}(i\Omega) \end{vmatrix} \tag{66}$$

Легко видеть, что если в этом определителе заменить $i\Omega$ на комплексное переменное λ, то он совпадает с характеристическим полиномом (24). Но у асимптотически устойчивой системы все нули характеристического полинома расположены слева от мнимой оси. Поэтому в таком случае определитель (66) отличен от нуля при любом Ω.

В числителе в формуле (65) стоит определитель Δ_{1k} — алгебраическое дополнение расположенного в первой строке и k-м столбце элемента определителя Δ.

Как определитель Δ, стоящий в знаменателе выражений (65) и не зависящий от индекса k, так и определители Δ_{1k}, стоящие в числителе этих выражений, представляют собой полиномы от Ω с комплексными коэффициентами. Поэтому отношение определителей в выражении (65) является дробно-рациональной функцией. Вид этой функции зависит от k. Заметим здесь же, что степень числителя в любом случае не превосходит степени знаменателя. Более того, легко видеть, что в невырожденных случаях степень числителя заведомо меньше степени знаменателя.

Обозначим эту дробно-рациональную функцию через $W_{1k}(i\Omega)$:

$$\frac{\Delta_{1k}}{\Delta} = W_{1k}(i\Omega) = |W_{1k}| e^{i \arg W_{1k}}. \tag{67}$$

Тогда искомое частное решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (55) при учете обобщенной силы (59) можно представить в виде

$$\tilde{q}_k = A\,|W_{1k}(i\Omega)|\, e^{i\,[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)]} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{68}$$

Вспомним теперь, что мы заменили интересующую нас обобщенную силу (58) комплексным выражением (59) и что (58) является мнимой частью выражения (59). Выделив в полученном частном решении (68) мнимую часть, находим искомое частное решение системы (55) при условии (58), а именно

$$\boxed{q_k^{**} = A\,|W_{1k}(i\Omega)|\sin[\Omega t + \arg W_{1k}(i\Omega)] \qquad (k = 1, \ldots, n).} \qquad (69)$$

Сравнивая формулы (69), определяющие вынужденные движения, возникшие благодаря действию вынуждающей силы (58), с выражением для этой силы, устанавливаем, что в этом случае вынужденные движения представляют собой гармонические колебания той же частоты, но с иными амплитудами и со сдвигом фаз. Амплитуды и фазы вынужденных колебаний полностью определяются введенной выше комплексной функцией $W_{1k}(i\Omega)$, и для данной системы зависят поэтому только от частоты внешней силы Ω.

Введенная выше функция $W_{1k}(i\Omega)$, играющая столь важную роль при определении вынужденных колебаний, называется *частотной характеристикой системы*, или, как говорят иногда, ее *амплитудно-фазовой характеристикой*. Индексы при W_{1k} показывают, что эта дробно-рациональная функция мнимого переменного зависит, с одной стороны, от того, к какой координате относится внешняя гармоническая сила, — это обстоятельство подчеркивается первым индексом (в рассматриваемом нами случае, когда сила действует на первую координату, этот индекс равен 1), и, с другой стороны, от того, вынужденные колебания какой координаты исследуются, — это обстоятельство подчеркивается вторым индексом k. В зависимости от того, на какую координату действует внешняя сила и какая координата наблюдается, получаются разные частотные характеристики. Из формулы (67) следует, что при изменении места приложения внешней силы и номера координаты, за которой ведется наблюдение, изменяется лишь числитель дробно-рациональной функции W, знаменатель же во всех случаях одинаков.

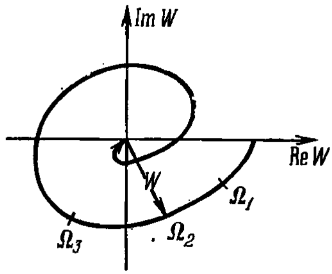

Рис. VI.12.

Рассмотрим теперь несколько подробнее только что введенную важную характеристику системы — ее частотную характеристику. В комплексной плоскости можно построить гóдограф функции W (рис. VI.12). Для этого надо, подставляя в выражение (67) значения Ω, меняющиеся от 0 до $+\infty$, подсчитывать порознь действительные и мнимые части этого выражения и по точкам строить годограф. Начинаясь на действительной оси (так как W при $\Omega = 0$ равно отношению свободных членов полиномов Δ_{1k} и Δ), этот годограф стягивается к нулю (как уже было указано выше, в выражении (67) степень знаменателя в невырожденных случаях выше степени числителя). Если теперь отдельно рассмотреть изменения модуля и аргумента вектора $W(i\Omega)$ в зависимости от Ω, то получатся характеристики, которые называются соответственно *амплитудной* и *фазовой* характеристиками системы (рис. VI.13 и VI.14).

Зная частотную характеристику системы, можно определить ам-

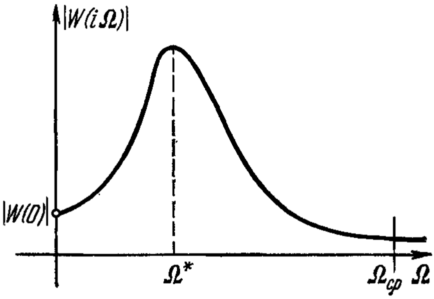

Рис. VI.13.

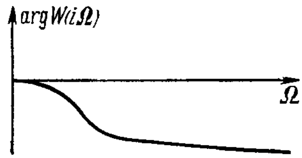

Рис. VI.14.

плитуду и сдвиг фазы вынужденного колебания координаты при любой частоте внешней силы, скажем Ω_1. Для того чтобы сделать это, надо по рис. VI.12 (либо по рис. VI.13 и VI.14

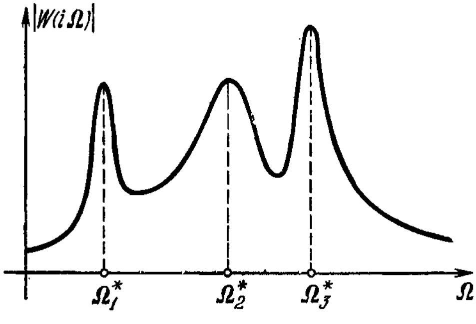

Рис. VI.15.

соответственно) найти при $\Omega = \Omega_1$ модуль и аргумент функции $W(i\Omega)$, затем умножить амплитуду вынуждающей силы на $|W(i\Omega_1)|$ и сдвинуть фазу гармонической функции, выражающей силу, на $\arg W(i\Omega_1)$.

Если амплитудная характеристика системы (рис. VI.13) при некотором значении $\Omega = \Omega^*$ имеет отчетливо выраженный пик, т. е. если $|W(i\Omega)|$ при $\Omega \approx \Omega^*$ значительно больше, чем $|W(i\Omega)|$ при остальных значениях Ω, то при одной и той же амплитуде внешней силы Q_1 амплитуда отклика резко возрастает, когда частота внешней силы приближается к значению $\Omega = \Omega^*$. Это явление называется *резонансом*, а частота Ω^* — *резонансной частотой* системы. Разумеется, амплитудная характеристика системы может иметь несколько пиков при различных значениях Ω^* (рис. VI.15). В этом случае говорят, что система резонирует на нескольких частотах. В рассматриваемом здесь общем случае стационарной системы понятие «резонанс» является не точным, а скорее интуитивным, так как оно связано с недостаточно четким понятием «отчетливо выраженный пик». Это понятие приобретает точный смысл лишь в случае, когда система консервативна (см. ниже).

В силу того что амплитудная характеристика, как уже было указано выше, стягивается к нулю с ростом Ω, можно указать такое значение «частоты среза» $\Omega = \Omega_{ср}$, что при всех $\Omega > \Omega_{ср}$ и при заданном A решение q_k^{**} по модулю будет меньше некоторого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ (см. рис. VI.13 и VI.16, *а*). Задавшись этим числом ε и определив таким образом значение $\Omega_{ср}$, говорят, что рассматриваемая система в малых колебаниях «пропускает» лишь частоты от нуля до $\Omega = \Omega_{ср}$, а частоты, бо́льшие $\Omega_{ср}$, «не пропускает». В этом смысле механические системы являются *фильтром высоких частот*. Наоборот, можно таким образом подобрать коэффициенты a, b и c рассматриваемой системы уравнений, чтобы амплитудная характеристика системы имела вид, представленный на рис. VI.16, *б*, т. е. чтобы модуль амплитудной характеристики был больше наперед выбранного числа ε лишь тогда, когда Ω лежит между двумя числами $\Omega_{ср1}$ и $\Omega_{ср2}$, и был бы меньше числа ε вне этого диапазона. В таких случаях говорят, что система является *полосовым фильтром*, пропускающим полосу частот, заключенную между $\Omega_{ср1}$ и $\Omega_{ср2}$.

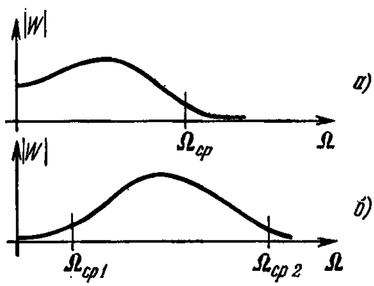

Рис. VI.16.

Рассмотрим теперь консервативную систему. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — ее собственные частоты (см. § 6 этой главы). Собственными колебаниями системы служат гармонические колебания с этими частотами, а это означает, что все корни характеристического уравнения консервативной системы — чисто мнимые и что они равны

$$\pm i\omega_1, \ \pm i\omega_2, \ \ldots, \ \pm i\omega_n.$$

Тогда из теоремы Безу сразу следует, что левая часть характеристического уравнения системы имеет вид

$$\Delta(\lambda) = A_0 \prod_{l=1}^{n} (\lambda - i\omega_l)(\lambda + i\omega_l) = \prod_{l=1}^{n} (\lambda^2 + \omega_l^2)$$

(об этом уже шла речь выше), т. е. *содержит лишь четные степени* λ. Ясно, что и алгебраическое дополнение любого элемента определителя $\Delta(\lambda)$ обладает этим же свойством. Поэтому в случае консервативной системы частотные характеристики, определяемые формулами (67), являются не комплексными, а действительными функциями, и $|W(i\Omega)|$ принимает бесконечные значения при

$$\Omega_1 = \omega_1; \quad \Omega_2 = \omega_2; \ \ldots; \ \Omega_n = \omega_n.$$

Поэтому амплитудная характеристика консервативной системы имеет вид, показанный на рис. VI.17, т. е. *консервативная система резонирует на всех своих собственных частотах и только на них.* Здесь понятие резонансной частоты имеет точный смысл: у консервативной системы резонансной частотой называется значение Ω, при котором амплитудная характеристика системы имеет разрыв второго рода.

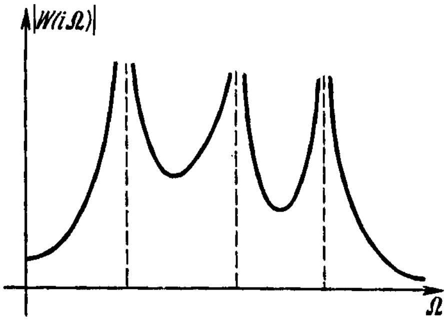

Рис. VI.17.

Из изложенного следует, что в случае, когда частота внешней силы приближается к любой из собственных частот консервативной системы, амплитуды вынужденных колебаний всех ее обобщенных координат неограниченно возрастают[1]).

Рассмотрим теперь фазовую характеристику консервативной системы. В связи с тем, что для консервативной системы $W_{1k}(i\Omega)$ — действительная функция, аргумент ее может быть равен лишь нулю или кратен $-\pi$ в зависимости от знака этой функции. Поэтому фазовой характеристикой консервативной системы служит кусочно-постоянная функция, равная 0 или крат-

---

[1]) Мы не выясняем здесь, по какому закону происходит это нарастание амплитуд во времени. Читатель, интересующийся подробностям, найдет их в любом курсе теории колебаний (см., например, Булгаков Б. В. Колебания. — М.: Гостехиздат, 1954).

ная $-\pi$. Она имеет разрыв первого рода при всех значениях Ω, равных собственным частотам системы

$$\Omega_1 = \omega_1, \quad \Omega_2 = \omega_2, \ \ldots, \ \Omega_n = \omega_n.$$

В случае консервативной системы с одной степенью свободы, возмущаемой гармонической обобщенной силой, уравнение движения имеет вид

$$a\ddot{q} + cq = A \sin \Omega t.$$

Свободные колебания системы

$$q^* = C \sin(\omega t + \varphi)$$

происходят с собственной частотой

$$\omega = \sqrt{c/a},$$

а вынужденные колебания описываются функцией

$$q^{**} = \frac{A}{a} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \tag{70}$$

В этом простейшем случае

$$W(i\Omega) = \frac{1}{a(i\Omega)^2 + c} = \frac{1}{c - a\Omega^2} = \frac{1}{a(\omega^2 - \Omega^2)},$$

амплитудная характеристика имеет вид

$$|W(i\Omega)| = \frac{1}{a} \left| \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \right|,$$

а фазовая характеристика такова:

$$\arg W(i\Omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \Omega < \omega, \\ -\pi & \text{при } \Omega > \omega. \end{cases}$$

Эти три характеристики показаны на рис. VI.18.

Читателю рекомендуется самому найти явное выражение для вынужденных колебаний консервативной системы с n степенями свободы, придерживаясь следующего плана.

1° Найти матрицу преобразования обобщенных сил $Q_1, Q_2, \ldots \ldots, Q_n$ (для системы координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$) в обобщенные силы $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ (для главных координат $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$). Для этого надо приравнять выражения элементарной работы через обобщенные силы Q и Θ, представить в этом равенстве q как функции Θ при помощи преобразования (45) и изменить порядок суммирования. Читатель установит тогда, что искомая матрица преобразования Q в Θ получается транспонированием амплитудной матрицы ν_{ik}.

2° После того как обобщенные силы для главных координат найдены, вынужденные колебания каждой из этих координат θ_j определяются по формуле (70).

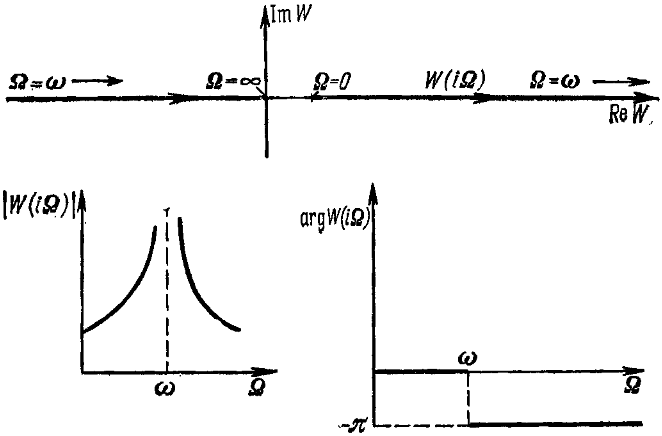

Рис. VI.18.

3° Вынужденные колебания координат q_j находятся по формуле (45).

2. Периодическая, но не гармоническая вынуждающая сила. Рассмотрим теперь случай, когда на первую обобщенную координату действует не гармоническая, а периодическая обобщенная сила с периодом T, заданная функцией $Q_1^*(t)$, удовлетворяющей условию

$$Q_1^*(t) = Q_1^*(t+T), \qquad (71)$$

например функцией, график которой изображен на рис. VI.19.

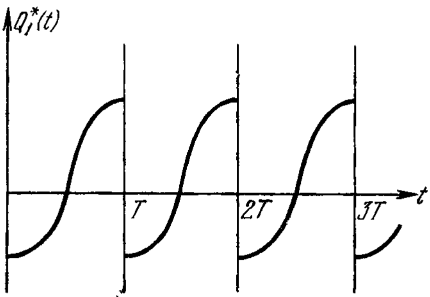

Рис. VI.19.

Мы будем предполагать, что периодическая функция $Q_1^*(t)$ представима рядом Фурье

$$Q_1^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\Omega t + \varphi_k),$$
$$\Omega = 2\pi/T, \qquad (72)$$

где амплитуды гармоник A_k и соответствующие сдвиги фаз φ_k определяются по обычным правилам разложения периодической функции в ряд Фурье, а $\Omega = 2\pi/T$ — круговая частота. Теперь внешняя сила, действующая на первую координату, представлена как сумма гармонических колебаний. В силу линейности системы и действующего поэтому принципа суперпозиции каждая из этих гармонических сил вызывает независимое вынужденное колебание, а общее вынужденное колебание, возникающее под действием такой периодической силы, получается суммированием этих независимых колебаний. Для определения каждого из вынужденных колебаний, которое возникает в том случае, когда внешняя сила представляется не всем рядом (72), а лишь какой-либо одной гармоникой, например k-й, можно воспользоваться полученной выше формулой (69) — надо лишь заменить всюду Ω на $k\Omega$. Поэтому вынужденное колебание j-й координаты q_j, которое возникает под действием периодической силы, действующей на первую координату q_1 и выражающуюся рядом (72), может быть представлено в виде

$$q_j^{**} = \sum A_k \mid W_{1j}(ik\Omega) \mid \sin[k\Omega t + \arg W_{1j}(ik\Omega)]. \qquad (73)$$

Из этой формулы видно, что вынужденные колебания, возникающие в системе под действием внешней силы (72), полностью определяются частотной характеристикой системы так же, как и в случае, когда рассматривалась гармоническая сила. Но теперь на частотной характеристике надо рассматривать не только точку, соответствующую частоте Ω, но и все точки, соответствующие частотам $k\Omega$ ($k = 0$, 1, ...). Отмечая эти точки на частотной характеристике (рис. VI.20) и вспоминая о наличии полосы пропускания, благодаря чему практически оказывается необходимым рассмотреть лишь конечное (и обычно небольшое) число таких точек, мы можем для каждой из этих точек определить модуль частотной характеристики и ее аргумент и, подставив их в формулу (73), найти вынужденное колебание. Этот ряд можно изобразить графически, откладывая в точках 0, Ω, 2Ω, ... оси Ω значения амплитуд гармоник A_k и соответствующих сдвигов фаз φ_k (рис. VI.21). Такой график называется *линейчатым спектром* воздействия. Аналогично возникающее в результате вынужденное движение также представимо рядом Фурье и изображается своим линейчатым спектром. Частотная характеристика $W(i\Omega)$ в этом случае играет роль оператора, преобразующего линейчатый спектр возмущающей силы в линейчатый спектр вынужденного движения.

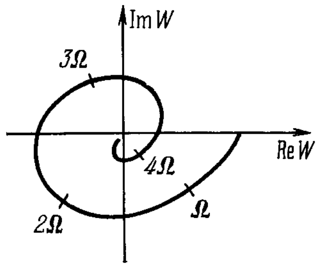

Рис. VI.20.

Сделаем теперь замечание, общее как для случая, когда рассматривалась гармоническая сила, так и для исследуемого здесь случая периодического негармонического возмущения. Если рассматривается действие внешней силы на систему, находящуюся в положении асимптотически устойчивого равновесия, то из формул (69) и (73) видно, что вынужденное движение по модулю может быть сделано сколь угодно малым, если внешнее воздействие мало по модулю. Действительно, в формулу (69) входит как множитель амплитуда A внешней силы, а в формулу (73) — величины A_k, являющиеся коэффициентами Фурье в разложении

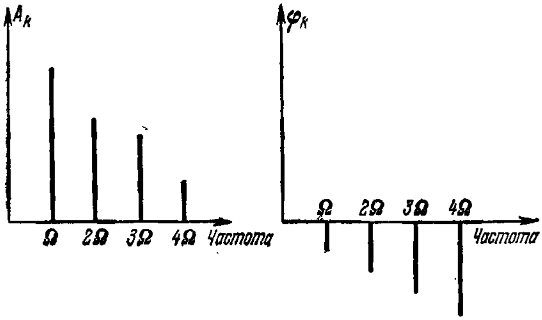

Рис. VI.21.

внешней периодической силы в ряд; в указанном случае $|W_{1j}(ki\Omega)|$ ограничен, а A и все A_k стремятся к нулю, если внешнее периодическое воздействие по модулю стремится к нулю. В силу этого вынужденное движение остается в сколь угодно малой окрестности исследуемого положения асимптотически устойчивого равновесия, если внешнее воздействие по модулю достаточно мало. Именно это обстоятельство дает возможность изучать действие внешней силы на систему в линейном приближении — если амплитуда внешнего воздействия достаточно мала, то результирующее движение не выходит за пределы малой окрестности положения равновесия, в котором движение с достаточной точностью может быть описано линейными дифференциальными уравнениями.

3. Малая по модулю вынуждающая непериодическая сила, представимая интегралом Фурье. Рассмотрим теперь движение стационарной системы, возникающее под действием вынуждающей силы при следующих условиях. Будем предполагать, что вынуждающая сила была равна нулю до некоторого момента времени, принятого нами за нуль отсчета времени, т. е. что до этого момента система находилась в положении устойчивого равновесия и что, начиная с момента $t=0$, на систему действует вынуждающая сила, зависящая от времени, но малая по модулю, так что движения, вызванные этой силой, могут быть описаны соответствующими уравнениями линейного приближения. Иначе говоря, предполагается, что все $q_j=\dot{q}_j=0$ при $t<0$ и что движение возникает лишь благодаря тому, что $Q\neq 0$ при $t>0$. Таким образом, теперь мы уже не разделяем свободные и вынужденные движения и изучаем полные движения, возникающие благодаря действию возмущающей силы, но начальные условия считаем нулевыми.

Как и ранее, опираясь на принцип суперпозиции, без уменьшения общности будем считать, что вынуждающая сила, зависящая явно от времени, действует только на первую координату. Тогда нам предстоит рассмотреть действие силы, удовлетворяющей условию

$$Q_1^*(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \quad Q_1^*(t) \not\equiv 0 \text{ при } t > 0. \tag{74}$$

Выше, когда речь шла о периодической силе, мы представляли ее рядом Фурье. Теперь, когда периодичность не предполагается, мы будем считать, однако, что сила $Q_1^*(t)$ удовлетворяет условиям, при которых она представима интегралом Фурье

$$Q_1^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{Q_1^*}(i\Omega)\, e^{i\Omega t}\, d\Omega, \tag{75}$$

где ядро интеграла, как обычно, выражается в виде

$$\Phi_{Q_1^*}(i\Omega) = \int_0^{\infty} Q_1^*(t)\, e^{-i\Omega t}\, dt. \tag{76}$$

Соответствие между функцией действительного переменного $Q_1^*(t)$ и функцией мнимого переменного $\Phi(i\Omega)$, установленное формулой (76), записывается так:

$$\Phi_{Q_1^*}(i\Omega) \stackrel{.}{\to} Q_1^*(t).$$

Функция Φ_Q носит название *фурье-преобразования* функции Q_1^* или ее *комплексного спектра*.

Нам понадобятся далее следующие простые соотношения из теории преобразований Фурье.

Пусть

$$\Phi_{f(t)}(i\Omega) \stackrel{.}{\to} f(t), \tag{77}$$

т. е. $\Phi_{f(t)}(i\Omega)$ есть фурье-преобразование функции $f(t)$. Тогда фурье-преобразования первой, второй и старших производных от функции $f(t)$ строятся по следующим правилам:

$$\begin{gathered}
i\Omega\Phi_{f(t)} - f(0) \stackrel{.}{\to} \frac{df(t)}{dt}, \\
(i\Omega)^2 \Phi_{f(t)}(i\Omega) - i\Omega f(0) - f'(0) \stackrel{.}{\to} \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(i\Omega)^m \Phi_{f(t)}(i\Omega) - (i\Omega)^{m-1} f(0) - (i\Omega)^{m-2} f'(0) - \dots \\
\dots - f^{m-1}(0) \stackrel{.}{\to} \frac{d^m f(t)}{dt^m},
\end{gathered} \tag{78}$$

где

$$f^k(0) = \left.\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right|_{t=0} \qquad (k=2, \ldots, m-1).$$

В нашей задаче далее мы будем интересоваться лишь функциями, начальные значения которых равны нулю. Опуская поэтому в формуле (78) начальные значения, получаем еще более простые формулы для вычисления фурье-преобразований производных по известному фурье-преобразованию самой функции:

$$\begin{gathered} i\Omega\Phi_{f(t)}(i\Omega) \doteq\!\!> \frac{df(t)}{dt}, \\ (i\Omega)^2\Phi_{f(t)}(i\Omega) \doteq\!\!> \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (i\Omega)^m\Phi_{f(t)}(i\Omega) \doteq\!\!> \frac{d^mf(t)}{dt^m}. \end{gathered} \tag{79}$$

Вернемся теперь к дифференциальным трехчленам, которые содержатся в интересующих нас уравнениях линейного приближения (55). Фурье-преобразование такого трехчлена находится его умножением на $e^{i\Omega t}$ и последующим интегрированием по Ω от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\begin{aligned} a_{jk}(i\Omega)^2\Phi_{q_k}(i\Omega) + b_{jk}(i\Omega)\Phi_{q_k}(i\Omega) + c_{jk}\Phi_{q_k}(i\Omega) = \\ = d_{jk}(i\Omega)\Phi_{q_k}(i\Omega) \doteq\!\!> a_{jk}\ddot{q}_k + b_{jk}\dot{q}_k + c_{jk}q_k. \end{aligned} \tag{80}$$

Таким образом, фурье-преобразование интересующего нас трехчлена получается из фурье-преобразований координаты q_k просто умножением на те самые множители $d_{jk}(i\Omega)$, которые фигурировали выше при построении частотных характеристик. Поэтому в результате преобразования Фурье система дифференциальных уравнений (55) в случае $Q_1(t) = Q_1^*(t)$, $Q_j(t) = 0$, $(j = 2, \ldots, n)$ переходит в систему линейных алгебраических уравнений относительно фурье-преобразований

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} d_{1k}(i\Omega)\Phi_{q_k}(i\Omega) = \Phi_{Q_1^*}(i\Omega), \\ \sum_{k=1}^{n} d_{jk}(i\Omega)\Phi_{q_k}(i\Omega) = 0 \qquad (j=2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{81}$$

Сравнивая формулы (81) с формулами (64), которые служили для определения амплитуд вынужденных колебаний по амплитуде действующей гармонической силы, мы видим, что они совпадают. Однако входящие в них переменные имеют разный смысл: в уравнениях (64) этими переменными являются искомые амплитуды, а в уравнениях (81) — фурье-преобразования интересующих нас движений и внешней силы.

Разрешая уравнения (81) относительно фурье-преобразования какой-либо координаты, получаем

$$\Phi_{q_j}(i\Omega)=\frac{\Delta_{1j}}{\Delta}\Phi_{Q_1^*(t)}(i\Omega), \tag{82}$$

где Δ и Δ_{1j} имеют тот же смысл, что и в (65). Используя введенное ранее обозначение (65), получаем

$$\boxed{\Phi_{q_j}(i\Omega)=W_{1j}(i\Omega)\,\Phi_{Q_1^*(t)}(i\Omega).} \tag{83}$$

Таким образом, частотная характеристика, введенная ранее, выступает теперь в новой роли: фурье-преобразование функции q_j в случае представимой интегралом Фурье силы $Q_1^*(t)$ получается умножением фурье-преобразования этой силы на соответствующую частотную характеристику системы $W_{1j}(i\Omega)$. В случае гармонического воздействия частотная характеристика связывает комплексные амплитуды воздействия и возникающего вынужденного движения, а в случае непериодического воздействия эта же частотная характеристика таким же образом связывает комплексные спектры воздействия и возникающего в результате движения.

Задача состоит теперь в том, чтобы по вычисленному таким образом спектру изучаемого движения найти само движение.

Определение преобразуемой функции по фурье-преобразованию называется *обратным преобразованием Фурье*, и наша цель — найти его.

С этой целью выделим действительную и мнимую части комплексного спектра Φ_{q_j} (см. формулу (83)), т. е. представим его в виде

$$\Phi_{q_j(t)}(i\Omega)=P(\Omega)+iS(\Omega). \tag{84}$$

Возвращаясь теперь к формуле (75), определяющей обратное преобразование Фурье, подставляя под знак интеграла (75) выражение комплексного спектра координаты q_k (84) и выражая экспоненциальную функцию через тригонометрические, получаем

$$q_j(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[P(\Omega)+iS(\Omega)][\cos\Omega t+i\sin\Omega t]\,d\Omega. \tag{85}$$

Левая часть — заведомо действительная функция, правая же часть содержит и мнимые члены. Очевидно, что вся совокупность членов в правой части выражения (85), содержащих множитель i, равна нулю[1]).

---

[1]) Если выписать мнимую часть выражения (85) и приравнять ее нулю, то получаются условия, связывающие действительную и мнимую части комплексного спектра координаты q_k. Условие равенства этой части нулю тесно связано с так называемыми условиями физической реализуемости процесса.

Учитывая это и отбрасывая мнимые члены в правой части (85), получаем

$$q_j(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[P(\Omega)\cos\Omega t-S(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega. \tag{86}$$

Вспомним теперь, что по постановке рассматриваемой задачи все q_j тождественно равны нулю при $t<0$. Поэтому если заменить в правой части формулы (86) t на $-t$, то левая часть должна обратиться тождественно в нуль:

$$0\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[P(\Omega)\cos\Omega t+S(\Omega)\sin\Omega t]d\Omega. \tag{87}$$

Сложив левые и правые части формул (86) и (87), получим более простое выражение

$$q_j(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\Omega)\cos\Omega t\,d\Omega. \tag{88}$$

Пусть действительная часть комплексного спектра координаты q_j — четная функция. В таком случае вместо (88) можно написать еще более простой интеграл

$$q_j(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}P(\Omega)\cos\Omega t\,d\Omega. \tag{89}$$

Формула (88) или соответственно формула (89) сводит задачу определения движения стационарной системы, возникающего вблизи положения устойчивого равновесия под действием внешней силы, начинающей действовать с момента $t=0$ при нулевых начальных условиях, к одной квадратуре в действительной области. Зная действующую силу $Q_1^*(t)$, можно вычислить комплексный спектр ее и координаты q_j и затем выделить действительную часть спектра q_j. Полученная таким образом действительная функция действительного аргумента $P(\Omega)$ называется *действительной частотной характеристикой возмущения*, и зная ее, можно без особого труда любым приближенным способом подсчитать интеграл (88) или (89). Самый простой способ для этого — представить кривую $P(\Omega)$ кусочно-линейной функцией и провести интегрирование по отрезкам прямых.

Таким образом, движение в окрестности положения устойчивого равновесия может быть найдено в случае, когда внешнее воздействие либо гармоническое, либо периодическое, но не гармоническое, либо, наконец, не периодическое, но представимое интегралом Фурье. Центральным для решения этой задачи являются понятия комплексного спектра и частотной характеристики, которая в свою очередь является далеко идущим обобщением понятия «резонансная кривая», введенного в механику еще при исследовании консервативных систем.

Заметим, что и в случае непериодического воздействия умножение возмущающей силы на постоянный множитель приводит к тому, что этот же множитель оказывается в правой части выражения (88) либо (89) для возникающих отклонений. Отсюда следует, что и в этом случае, если внешнее возмущение достаточно мало по модулю, то и отклонения обобщенных координат будут малы, а это значит, что движение не выйдет за пределы окрестности, где допустима линеаризация уравнений.

Подведем теперь итоги этого параграфа. Введя выше понятие об устойчивости, мы установили сам факт, что движение, начавшееся благодаря малым отклонениям от устойчивого положения равновесия, не выходит за пределы малой его окрестности или даже асимптотически стремится к положению равновесия. Мы видим теперь, что малые по модулю внешние возмущения (все равно гармонические, периодические или непериодические, но представимые интегралом Фурье) в асимптотически устойчивых случаях приводят к движениям, также не покидающим малую окрестность. Именно поэтому линеаризация задачи, т. е. замена исходных уравнений Лагранжа их простым линейным приближением, играет столь существенную роль при изучении движений, возникающих в окрестности положений равновесия.

Область, в которой можно пользоваться линейными уравнениями, сама по себе, разумеется, не определяется этими уравнениями и зависит от старших членов соответствующих разложений нелинейных функций в ряды. В этом смысле понятия «малые отклонения» и «малые колебания» условны. Слово «малое» в этих терминах говорит не буквально о малости самих отклонений или их областей, а скорее о малости наших знаний о границах этих областей. Во многих задачах механики оказывается, что области эти достаточно велики и покрывают полностью область отклонений, с которыми практически приходится иметь дело при любых действующих на систему внешних силах. В иных случаях, однако, оказывается, что области эти весьма ограничены, и замена нелинейных уравнений Лагранжа их линейным приближением требует в таких случаях большой осмотрительности.

В настоящее время не существует общих приемов, позволяющих в любом случае установить область, в которой можно с достаточной точностью пользоваться линейной аппроксимацией. Область эта в каждом конкретном случае определяется экспериментальной проверкой и опытом решения аналогичных задач.

Глава VII

ДВИЖЕНИЕ В ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

§ 1. Введение

Эта глава посвящена изучению движений материальной системы в том случае, когда все внешние и внутренние силы, действующие на точки системы, потенциальны, т. е. когда существует функция координат точек системы и, быть может, времени

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_N, y_N, z_N; t) \tag{1}$$

такая, что для каждой точки системы проекции равнодействующей приложенных к ней сил могут быть представлены так:

$$F_{ix} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \quad F_{iy} = \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}, \quad F_{iz} = \frac{\partial\Phi}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{2}$$

Если функция (1), удовлетворяющая условиям (2), существует, то говорят, что движение системы происходит в потенциальном поле с силовой функцией (1) и с потенциальной энергией

$$\Pi = -\Phi.$$

В предыдущих главах были установлены следующие важные факты, касающиеся движений в потенциальных полях.

1° Если в «исходных» декартовых координатах существует потенциальная функция (1), то при любом выборе «новых» (обобщенных) координат q_j $(j = 1, \ldots, n)$ существует функция $V(q_1, \ldots \ldots, q_n; t)$, такая, что

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Чтобы найти эту функцию $V(q_1, \ldots, q_n; t)$, надо в выражении для $\Phi(x, y, z; t)$ заменить все декартовы координаты точек их выражениями через обобщенные координаты, используя формулы преобразования (8) из гл. IV.

2° Уравнения Лагранжа, описывающие движение в потенциальных полях, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $L = T - V$ — лагранжиан системы.

Уравнения (4) описывают движения как в стационарном, так и в нестационарном поле.

3° Если поле стационарно, т. е. если П не зависит явно от времени, то система консервативна. При движении консервативной системы ее полная энергия E, подсчитанная относительно декартовой системы координат, не изменяется. Этим же свойством обладает полная энергия консервативной системы E, подсчитанная относительно любой иной системы координат $q_1, \ldots, q_n$, если преобразование «новых координат» q в декартовы стационарно, т. е. не зависит явно от времени. В этом случае $T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^{n} a_{jk}(q)\, \dot{q}_j \dot{q}_k$ — квадратичная форма от обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими только от обобщенных координат,

$$L = T_2 - V(q),$$

и уравнения Лагранжа (4) приводятся к виду

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}(q)\, \ddot{q}_k = (*) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где $(*)$ означает совокупность членов, зависящих лишь от q и $\dot{q}$, но не зависящих от $\ddot{q}$.

В силу теоремы, доказанной в § 3 гл. IV,

$$\det \| a_{jk}(q) \| \neq 0,$$

и поэтому система (5) алгебраически разрешима относительно старших производных, т. е. может быть представлена в виде

$$\ddot{q}_j = G_j(q, \dot{q}) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

и, как и в общем случае уравнений Лагранжа, начальное состояние системы, т. е. совокупность всех q_j и $\dot{q}_j$ при $t = 0$, полностью определяет последующее движение.

Используя эти ранее установленные факты, мы получим теперь уравнения, специально приспособленные для описания движений в потенциальных полях, и изучим некоторые общие свойства таких движений. Весь материал этой главы в равной мере относится к системам, для которых существует обобщенный потенциал. Более того, за редкими исключениями, которые будут далее оговорены, он относится как к натуральным, так и к ненатуральным системам (см. § 5 гл. IV). Это связано с тем, что далее мы будем исходить из предположения, что движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа (4), и лишь в отдельных особо оговариваемых случаях будем предполагать, что лагранжиан имеет вид $L=T-V$. Но в любом случае будет предполагаться, что

$$\det\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\|_{j,k=1}^{n} \neq 0,$$

т. е. что уравнения Лагранжа могут быть разрешены относительно $\ddot{q}_j$ и представлены в виде уравнений (6).

§ 2. Канонические уравнения (уравнения Гамильтона)

Начнем с простейшего примера. Рассмотрим материальную точку, движущуюся в стационарном потенциальном поле. В качестве обобщенных координат возьмем декартовы координаты движущейся точки

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Кинетическая энергия этой системы равна

$$T = T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

а функция Лагранжа равна $L = T - V(q_1, q_2, q_3)$. Следовательно, в этом примере

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Таким образом, в рассматриваемом простейшем примере частные производные, фигурирующие в первых членах уравнений Лагранжа, имеют простой физический смысл — они совпадают с проекциями количества движения (импульса) точки на оси x, y и z.

Имея это в виду, условимся и в общем случае составленные так частные производные называть *обобщенными импульсами* и введем обозначение

$$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.} \tag{7}$$

Используя это обозначение, уравнения Лагранжа для произвольной системы, движущейся в потенциальном поле, можно записать так:

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Лагранжиан L является функцией координат q, скоростей $\dot{q}$, а в нестационарном случае также и времени. Поэтому и обобщенные импульсы являются, вообще говоря, функциями тех же переменных

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = f_j(q, \dot{q}, t) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

В силу соотношений (7) частная производная от импульса по какой-либо обобщенной скорости имеет вид

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \qquad (k, j = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

В случае натуральной системы

$$L = T - V = T_0 + T_1 + T_2 - V,$$

и поэтому

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = a_{jk}.$$

Определитель матрицы, составленный из коэффициентов a_{jk}, отличен от нуля в силу основной теоремы лагранжева формализма,

$$\det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \right\| = \det \| a_{jk} \| \neq 0. \tag{11}$$

В случае ненатуральной системы неравенство (11) выполнено в силу ограничений, накладываемых на выбор лагранжиана L. В силу (11) система равенств (9) может быть всегда разрешена относительно обобщенных скоростей, т. е. представлена в виде

$$\dot{q}_j = \varphi_j(q, p, t) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Таким образом, если в некоторый момент известны обобщенные координаты и обобщенные скорости, то по формулам (9) можно подсчитать обобщенные импульсы. Наоборот, если в некоторый момент известны обобщенные координаты и обобщенные импульсы, то по формулам (12) всегда можно подсчитать обобщенные скорости. В этом смысле безразлично, задавать ли в каждый момент помимо обобщенных координат обобщенные скорости или обобщенные импульсы.

Совокупность обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени называют *лагранжевыми переменными* некоторой системы, а совокупность для этой же системы обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени — ее *гамильтоновыми переменными*. Задания движения системы в лагранжевых и гамильтоновых переменных эквивалентны в том смысле, что всегда существует взаимно однозначный переход от одной системы переменных к другой.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $\psi(q, \dot{q}, t)$ от лагранжевых переменных, и используя соотношения (12), выразим обобщенные скорости через обобщенные импульсы:

$$\psi(q, \dot{q}, t) = \psi(q, \varphi(q, p, t), t) = F(q, p, t).$$

Полученная таким образом функция гамильтоновых переменных называется *союзным выражением* для исходной функции лагранжевых переменных и обозначается так:

$$F(q, p, t) = \hat{\psi}(q, \dot{q}, t). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь выражение [1])

$$\sum p_j \dot{q}_j - L$$

как функцию «смешанных переменных» q, $\dot{q}$, p и t и подсчитаем его дифференциал

$$d\left(\sum p_j \dot{q}_j - L\right) = \sum (p_j\, d\dot{q}_j + \dot{q}_j\, dp_j) - \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\, d\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt.$$

Используя формулы (7), перепишем это равенство так:

$$d\left(\sum p_j \dot{q}_j - L\right) = \sum \dot{q}_j\, dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \tag{14}$$

Обратим теперь внимание на выражение, стоящее в левой части этого равенства под знаком полного дифференциала. Выражение, союзное к этому, является функцией гамильтоновых переменных, обозначается буквой H и называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом* системы

$$\boxed{H(q, p, t) = \sum \widehat{p_j \dot{q}_j} - \hat{L}.} \tag{15}$$

Понятие гамильтониана является одним из центральных понятий при изучении движения в потенциальных полях. С этим понятием нам предстоит иметь дело на протяжении всей главы.

В связи с тем, что при переходе к новым переменным значение полного дифференциала функции не меняется, левая часть равенства (14) численно равна dH, и поэтому

$$dH = \sum \dot{q}_j\, dp_j - \sum \frac{\partial L}{\partial q_j}\, dq_j - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \tag{16}$$

С другой стороны, полный дифференциал от гамильтониана как функции гамильтоновых переменных имеет вид

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial q_j}\, dq_j + \sum \frac{\partial H}{\partial p_j}\, dp_j + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt. \tag{17}$$

---

[1]) Как и в предыдущих главах, всюду в этой главе суммирование по j от 1 до n обозначается просто знаком $\sum$ без указаний пределов суммирования.

Почленно сравнивая формулы (16) и (17), получаем систему уравнений

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{18}$$

и, кроме того, равенство

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{19}$$

Эти соотношения получены нами как формальное следствие перехода к новым переменным; в частности, не было поставлено условие, чтобы обобщенные координаты q удовлетворяли уравнениям Лагранжа. Потребуем теперь, чтобы это условие выполнялось; тогда уравнения (18) будут представлять собой *уравнения движения* и в силу уравнений Лагранжа (8) могут быть записаны так:

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n).} \tag{20}$$

В правых частях уравнений (20) стоят функции только гамильтоновых переменных. Поэтому система уравнений (20) замкнута относительно этих переменных и представляет собой систему $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка, которые полностью определяют изменение во времени координат q и обобщенных импульсов p, если заданы начальные условия, т. е. значения координат и импульсов в момент $t = 0$. Если заданы начальные значения лагранжевых переменных, то, используя формулы (9), можно подсчитать начальные значения обобщенных импульсов, получить таким образом начальные данные для уравнений (20), и, проинтегрировав эту систему уравнений, полностью определить движение в гамильтоновых переменных. Зная, как изменяются во времени координаты и обобщенные импульсы, можно затем, если это необходимо, по формулам (12) подсчитать, как изменяются во времени скорости $\dot{q}$.

В этом смысле уравнения (20) представляют собой эквивалент уравнений Лагранжа (4). Уравнения (20) разрешены относительно старших производных и представлены в симметричной и удобной форме. Их называют *каноническими уравнениями* или *уравнениями Гамильтона* для движения в потенциальных полях.

Равенство (19), полученное нами дополнительно, устанавливает важные свойства гамильтониана: частные производные гамильтониана и лагранжиана по времени отличаются лишь знаком. Отсюда сразу следует, что в том случае, когда лагранжиан не зависит явно от времени, гамильтониан также не зависит явно от времени.

Выясним теперь физический смысл гамильтониана H натуральной системы.

Интересуясь лишь численным значением гамильтониана, можно записать его как функцию лагранжевых переменных

$$H=\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L. \tag{21}$$

Ограничиваясь теперь рассмотрением натуральных систем и вспоминая, что лагранжиан, как и кинетическая энергия натуральной системы, может быть представлен суммой трех форм — квадратичной L_2, линейной L_1 и нулевой степени L_0 относительно скоростей $\dot{q}$, перепишем равенство (21) так:

$$H=\sum \frac{\partial (L_2+L_1+L_0)}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j-(L_2+L_1+L_0).$$

Воспользуемся теоремой Эйлера об однородных функциях, утверждающей, что если $W(x)$ — однородная функция k-й степени, то

$$\sum_i \frac{\partial W(x)}{\partial x_i}x_i = kW(x).$$

В силу этой теоремы

$$\sum \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = 2L_2 \quad \text{и} \quad \sum \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = L_1,$$

так что

$$H=(2L_2+L_1)-(L_2+L_1+L_0)=L_2-L_0.$$

Но $L_2=T_2$, $L_0=T_0-V$, следовательно,

$$H=T_2-(T_0-V). \tag{22}$$

Если рассматриваемое преобразование от «исходной» декартовой системы координат к «новым» координатам $q_1, \ldots, q_n$ стационарно, т. е. не зависит явно от времени, то $T_0=0$ и функция H равна полной энергии:

$$H=T+V=E. \tag{23}$$

Таким образом, *у натуральной системы при стационарных преобразованиях координат в любой момент времени гамильтониан численно совпадает с полной энергией системы.*

Если V не зависит явно от t, т. е. если система консервативна, то E, а значит и H, не изменяется во время движения.

Рассмотрим теперь произвольную систему, натуральную либо ненатуральную[1]), у которой гамильтониан не зависит явно от

---

[1]) В случае ненатуральной системы, вообще говоря, H может не зависеть от t не только в том случае, когда система консервативна, а преобразования координат стационарны. Может случиться, что и потенциальная энергия, и формулы преобразования координат явно зависят от времени, но при подсчете H время t сокращается и в выражение H явно не входит.

времени. В системах такого рода

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0, \tag{24}$$

но в силу уравнений Гамильтона (20)

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt}&=\sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\\&=\sum\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t},\end{aligned}$$

и если $\partial H/\partial t=0$, то и $dH/dt=0$, т. е. во время движения гамильтониан не меняется:

$$H=\text{const}. \tag{25}$$

В тех случаях, когда система не консервативна, но имеет место равенство (24) [1]), формула (25) устанавливает интеграл уравнений движения, подобный интегралу энергии в натуральных консервативных системах. Поэтому при выполнении условия (24) гамильтониан называется *обобщенной энергией*, а утверждение (25) — *обобщенным законом сохранения энергии*. Системы, удовлетворяющие условию (24), далее называются *обобщенно консервативными системами*.

В заключение этого параграфа обратим внимание на следующую важную аналогию. Если $\partial H/\partial q_j=0$, то $\partial L/\partial q_j=0$, т. е. $\dot{p}_j=0$, и, следовательно, в этом случае $p_j=\text{const}$. Если же $\partial H/\partial t=0$, то $H=\text{const}$. В этом смысле обобщенную энергию H можно рассматривать как «импульс для координаты t». В канонических уравнениях Гамильтона время t выступает в роли независимой переменной, оно еще «не уравнено в правах» с координатами q. Далее в этой главе, рассматривая интегральные инварианты, мы полностью исключим особую роль «координаты t» по сравнению с q, и тогда подмеченная выше аналогия и роль H как «импульса для координаты t» станут еще более очевидными.

§ 3. Первые интегралы уравнений движения. Скобки Пуассона. Циклические координаты

В предыдущих главах мы уже встречались с понятием первого интеграла уравнений движения. Роль таких первых интегралов играли различные функции, которые во время движения не изменяются в силу законов сохранения — закона сохранения количества движения (импульса), закона сохранения момента количества движения (кинетического момента системы), закона сохранения механической энергии и т. д. Формулы, выражающие

---

[1]) Это возможно только для ненатуральной системы.

эти законы, содержат лишь координаты и их первые производные, но не содержат вторых производных от координат. В предыдущих главах приводились примеры того, как можно использовать законы сохранения для упрощения уравнений движения, а в некоторых случаях для полного определения движения в обход трудностей, с которыми сопряжено интегрирование дифференциальных уравнений движения в общем виде.

Произвольная функция от гамильтоновых переменных — времени, координат и обобщенных импульсов — называется *первым интегралом уравнений движения*, если во время любого движения значение этой функции не меняется,

$$f(q,\ p,\ t)=\mathrm{const}, \tag{26}$$

т. е. если при подстановке в нее вместо координат и обобщенных импульсов решений уравнений Гамильтона $q=q(q^0,\ p^0,\ t)$ и $p=$ $=p(q^0,\ p^0,\ t)$ эта функция тождественно обращается в константу, зависящую только от начальных данных q^0 и p^0.

Предположим, что задано m первых интегралов

$$f_i(q,\ p,\ t)=C_i=\mathrm{const} \qquad (i=1,\ \ldots,\ m). \tag{27}$$

Среди этих m интегралов могут быть и зависимые, т. е. некоторые из равенств, входящих в систему (27), могут оказаться следствиями остальных. Такие зависимые первые интегралы не могут быть использованы для упрощения уравнений движения, и нас интересуют лишь системы независимых первых интегралов (27). Если $m=2n$ и если все равенства, входящие в систему (27), независимы, то система первых интегралов называется *полной*. В силу независимости функций, входящих в эту систему, полная система из $m=2n$ первых интегралов может быть разрешена относительно аргументов — ими являются координаты и обобщенные импульсы — и представлена в виде

$$q_j=\varphi_j(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_{2n}),\quad p_j=\psi_j(t,\ C_1,\ \ldots,\ C_{2n}) \qquad (j=1,\ \ldots,\ n).$$

В этом случае все координаты и обобщенные импульсы полностью определены как функции времени и $2n$ констант. Эти константы могут рассматриваться как произвольные постоянные, обычным образом определяемые по начальным данным. Поэтому $2n$ первых интегралов полностью определяют движение системы при любых начальных данных.

Если система первых интегралов (27) содержит менее $2n$ равенств, т. е. если $m<2n$, то знания m первых интегралов недостаточно для того, чтобы полностью определить движение, однако эти первые интегралы можно использовать для того, чтобы упростить уравнения движения, в частности, для того, чтобы снизить порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих движение.

Определим теперь условия, которым должна удовлетворять какая-либо функция гамильтоновых переменных для того, чтобы быть первым интегралом уравнений движения.

Предположим, что некоторая функция $f(q, p, t) = \text{const}$ является первым интегралом уравнений движения. Вычислим производную $df[q(t), p(t), t]/dt$, где $q(t)$ и $p(t)$ — решения уравнений Гамильтона.

Дифференцируя обе части равенства $f(q, p, t) = \text{const}$ по времени и используя уравнения Гамильтона (20), получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j}\dot{p}_j\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) = 0. \tag{28}$$

Это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(q, p, t)$ была первым интегралом. Его можно записать компактнее, если ввести понятие скобки Пуассона.

Назовем *скобкой Пуассона* двух функций φ и ψ от гамильтоновых переменных и обозначим через (φ, ψ) выражение следующего вида:

$$(\varphi, \psi) = \sum\begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial q_j & \partial\varphi/\partial p_j \\ \partial\psi/\partial q_j & \partial\psi/\partial p_j \end{vmatrix} = \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_j}\frac{\partial\psi}{\partial p_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\right). \tag{29}$$

Выражение, стоящее в формуле (28) под знаком второй суммы, представляет собой скобку Пуассона от функции f и гамильтониана H. Поэтому условие (28) можно переписать так:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0. \tag{30}$$

Если бы мы располагали полной системой первых интегралов, то задача интегрирования дифференциальных уравнений полностью была бы заменена задачей обращения этих интегралов. Поэтому в тех случаях, когда заданная система этих интегралов не является полной, т. е. когда $m < 2n$, центральной является задача об увеличении числа первых интегралов. На первый взгляд эта задача кажется несложной. Действительно, если взять произвольную функцию m переменных и подставить вместо этих переменных известные нам m первых интегралов, то в результате получится новая функция гамильтоновых переменных, которая также будет сохранять неизменное значение во время движения

$$\Phi(q, p, t) = F[f_1(q, p, t), \ldots, f_m(q, p, t)] = \text{const}.$$

Однако очевидно, что полученный так первый интеграл не является независимым — он получается как следствие уже имевшихся ранее m первых интегралов. Поэтому такое «размножение» первых интегралов уравнений движения лишено смысла.

Иной прием для получения новых первых интегралов из уже известных связан с введенным выше понятием скобки Пуассона.

Пусть f и φ — первые интегралы. Составим из них скобку Пуассона (29).

Теорема (Якоби — Пуассона). *Скобка Пуассона от двух интегралов уравнений движения сама является интегралом уравнений движения.*

Доказательство. При доказательстве теоремы Якоби — Пуассона будут использованы следующие четыре свойства скобок Пуассона:

$$1^\circ \qquad (f, \varphi) = -(\varphi, f);$$
$$2^\circ \qquad (cf, \varphi) = c(f, \varphi);$$
$$3^\circ \qquad \partial(f, \varphi)/\partial t = (\partial f/\partial t, \varphi) + (f, \partial\varphi/\partial t);$$
$$4^\circ \qquad ((f, \varphi), \psi) + ((\varphi, \psi), f) + ((\psi, f), \varphi) \equiv 0.$$

Первые три равенства сразу следуют из свойств определителей, входящих в формулу (29), а равенство 4° непосредственно проверяется по этой формуле [1]).

Теорема Якоби — Пуассона утверждает по существу, что из равенств

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f, H) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\psi, H) = 0 \tag{31}$$

следует равенство

$$\frac{\partial (f, \psi)}{\partial t} + ((f, \psi), H) = 0. \tag{32}$$

Используем сначала свойство 3°:

$$\partial(f, \psi)/\partial t = (\partial f/\partial t, \psi) + (f, \partial\psi/\partial t).$$

Из предположений теоремы (31) и из свойств 1° и 2° следует тогда, что

$$\partial(f, \psi)/\partial t = (-(f, H), \psi) + (f, -(\psi, H)) = ((H, f), \psi) + ((\psi, H), f).$$

Поэтому левая часть равенства (32) сводится к виду

$$((f, \psi), H) + ((\psi, H), f) + ((H, f), \psi),$$

т. е. в силу свойства 4° равна 0. Теорема доказана.

Теорема Якоби — Пуассона позволяет «накапливать» новые первые интегралы. Действительно, составляя разные скобки Пуассона из уже известных первых интегралов, можно получить новые интегралы; затем можно составить скобки Пуассона от каждой пары так полученных первых интегралов или от них и «старых» первых интегралов и т. д. Казалось бы, процесс этот может про-

---

[1]) Равенство 4° называют иногда *тождеством Пуассона*. Доказательство этого тождества см. в книге: Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — 2-е изд., исправл. — М.: Наука, 1966, с. 98—99.

должаться неограниченно долго, и таким образом может быть получено сколь угодно много новых первых интегралов. Однако среди интегралов, которые получаются путем составления скобок Пуассона, могут быть как независимые первые интегралы, так и зависимые от уже известных первых интегралов. Для упрощения уравнений движения нужны лишь независимые первые интегралы, а их не более чем $2n$. Поэтому из первых интегралов, которые получаются при помощи теоремы Якоби — Пуассона, нужно отбирать независимые.

В частном случае обобщенно консервативной системы гамильтониан H является интегралом уравнений движения; поэтому если некоторая функция $f(q, p, t)$ — интеграл уравнений движения, то ее первая, вторая и т. д. частные производные по времени также являются интегралами этих уравнений. Действительно, для таких систем в силу теоремы Якоби — Пуассона $(f, H) = \mathrm{const}$ и из условия (30) следует, что

$$\partial f/\partial t = -(f, H) = \mathrm{const}.$$

Повторив это рассуждение, но взяв вместо функции f ее частную производную по t, получим такое же утверждение для второй частной производной по времени и т. д.

В качестве примера того, как получаются и каким образом используются первые интегралы уравнений движения, рассмотрим важный вопрос о циклических координатах.

Координата q_j называется *циклической*, если лагранжиан (а значит, и гамильтониан) системы не зависит явно от этой координаты, т. е. для циклических координат имеют место равенства $\partial L/\partial q_j = 0$, и поэтому уравнение Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad \text{или} \quad \dot{p}_j = 0,$$

т. е.

$$p_j = \mathrm{const}.$$

Это равенство означает, что импульс, соответствующий циклической координате, не изменяется во время движения. Следовательно, каждый раз, когда система имеет циклическую координату, существует и первый интеграл уравнений движения. В данном случае функция (27) тождественно равна импульсу, соответствующему циклической координате[1]).

[1]) Читателю рекомендуется самому убедиться в том, что в случае движения точки в центральном поле, который был рассмотрен в § 7 гл. III, всегда существует циклическая координата. Для этого надо вспомнить, что движение в центральном поле является плоским; в качестве обобщенных координат выбрать полярные координаты в этой плоскости и, составив функцию Лагранжа, установить, что эта функция не зависит явно от полярного угла. Читатель может легко убедиться и в том, что закон сохранения секториальной скорости при движении в центральном поле является лишь примером рассматриваемого здесь первого интеграла, обусловленного наличием циклической координаты.

Пусть система имеет m циклических координат, и пусть

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_{n-m} \tag{33}$$

— координаты нециклические, а

$$q_{n-m+1},\ \ldots,\ q_n \tag{34}$$

— координаты циклические. Гамильтониан системы в данном случае зависит от нециклических координат (33) и от их импульсов. Действительно, в выражении для гамильтониана циклические координаты (34) не содержатся по условию, а соответствующие им импульсы хотя и содержатся, но в силу уравнений Гамильтона могут быть заменены m константами C_j $(j=n-m+1,\ \ldots,\ n)$:

$$H(q_1,\ \ldots,\ q_{n-m};\ \ p_1,\ \ldots,\ p_{n-m};\ \ C_{n-m+1},\ \ldots,\ C_n;\ t). \tag{35}$$

В силу этого можно выписать независимую систему канонических уравнений для нециклических координат:

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ \ldots,\ n-m). \tag{36}$$

Таких уравнений будет $2(n-m)$, и они представляют собой систему замкнутых уравнений, совершенно не зависящих от циклических координат, а вместо циклических импульсов правые части этих уравнений содержат m произвольных постоянных.

Предположим, что система уравнений (36) проинтегрирована, т. е. найдены все нециклические координаты и соответствующие импульсы как функции времени. Эти функции зависят от $2(n-m)$ произвольных постоянных, появляющихся при интегрировании системы дифференциальных уравнений (36), так как порядок этой системы равен $2(n-m)$, и, кроме того, от m произвольных постоянных C_j, которые с самого начала входили в выражение для функции H в силу (35):

$$\left.\begin{aligned} q_j&=q_j(t;\ C_{n-m+1},\ \ldots,\ C_n;\ S_1,\ \ldots,\ S_{2(n-m)}),\\ p_j&=p_j(t;\ C_{n-m+1},\ \ldots,\ C_n;\ S_1,\ \ldots,\ S_{2(n-m)})\\ &\qquad (j=1,\ \ldots,\ n-m). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Воспользовавшись выражением (35) для гамильтониана, составим уравнения Гамильтона для циклических координат

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j}=\frac{\partial H}{\partial C_j}=\psi_j(t;\ q_1,\ \ldots,\ q_{n-m};\ p_1,\ \ldots,\ p_{n-m};\ C_{n-m+1},\ \ldots,\ C_n)$$

и, учитывая выражения (37), получим

$$\frac{dq_j}{dt}=\psi_j^*(t;\ C;\ S)\qquad (j=n-m+1,\ \ldots,\ n). \tag{38}$$

В равенствах (38) переменные разделяются, т. е. каждое из уравнений (38) можно представить в виде

$$dq_j = (\partial H/\partial C_j)\ dt = \psi_j^*(t;\ C;\ S)\,dt.$$

Зависимость циклических координат от времени находится интегрированием:

$$q_j = \int \psi_j^*(t,\ C,\ S)\,dt + N_j \qquad (j = n - m + 1,\ \ldots,\ n). \tag{39}$$

Циклические импульсы в данном случае не требуется определять — они просто равны произвольным постоянным C_j. При интегрировании вносится m дополнительных произвольных постоянных N_j. Общее число произвольных постоянных в конечном результате будет равно $2n$, т. е. в точности равно порядку общей системы уравнений Гамильтона, составленной для всех гамильтоновых переменных. Таким образом, при наличии m циклических координат порядок системы, которую приходится интегрировать, уменьшается на $2m$, поскольку уравнения (36) для нециклических координат «отщепляются», и после того, как эти уравнения проинтегрированы, циклические координаты находятся с помощью m независимых квадратур (39).

Рассмотренный пример циклических координат характерен для способа использования первых интегралов с целью понижения порядка рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Общий метод механики в таких случаях как раз и состоит в том, чтобы, используя наличие первых интегралов, «отщепить» часть уравнений системы и затем использовать независимые квадратуры.

Для дальнейшего обсуждения первых интегралов уравнений движения (законов сохранения) требуется использовать аппарат вариационного исчисления, который нужен нам также и для иных целей, связанных с изучением движений в потенциальных полях. Поэтому в следующем параграфе будут кратко изложены элементы вариационного исчисления, а затем, применяя соответствующий аппарат к теории движения в потенциальных полях, мы вернемся, в частности, к вопросу об общей теории первых интегралов уравнений движения.

§ 4. Элементы вариационного исчисления. Действие по Гамильтону. Вариация действия

До сих пор в этом курсе изучение движения сводилось к составлению и исследованию дифференциальных уравнений, описывающих это движение. Исходным для дифференциальных уравнений любого вида был второй закон Ньютона, устанавливающий связь между ускорением и величиной действующей силы в этот же момент. Поэтому в основе дифференциальных уравнений, которыми мы пользовались до сих пор, всегда лежали локальные свойства движения, т. е. связи между характеризующими его скалярными или векторными величинами, рассмотренными в один и тот же момент времени. Задача описания движения в целом сводилась к интегрированию полученных дифференциальных уравнений, и мы уже знакомы с возникающими здесь трудностями.

Такой локальный подход не является единственно возможным при изучении движения. В конечном итоге траектория движения — кривая в некотором пространстве, и поэтому возможен иной подход к изучению движения. При этом подходе интересуются не локальными свойствами движения, а его глобальными свойствами — тем, чем эта траектория движения в целом отличается от других кривых в том же пространстве.

Если локальному подходу соответствовал аппарат дифференциальных уравнений, то глобальному подходу соответствует аппарат вариационного исчисления. В связи с тем, что основы вариационного исчисления обычно незнакомы студентам к моменту, когда изучается классическая механика, автор вынужден предпослать изложению вопросов, связанных с глобальным подходом, некоторые сведения о вариационном исчислении, ограничиваясь лишь самыми необходимыми фактами; мы рассмотрим к тому же не общий, а лишь частный, но достаточный для наших целей случай, когда сравниваются кривые, принадлежащие одному и тому же однопараметрическому семейству (пучку).

Отображение, которое ставит в соответствие каждой функции из некоторого множества определенное число, называется *функционалом.* (Пример функционала — определенный интеграл.)

Рассмотрим однопараметрическое семейство кривых, определенных в $(n+1)$-мерном *расширенном координатном пространстве* $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$:

$$q_1=q_1(t, \alpha), \ \ldots, \ q_n=q_n(t, \alpha), \tag{40}$$

где α — параметр, задание которого однозначно определяет кривую семейства. В качестве функционала условимся рассматривать определенный интеграл от какой-либо функции Φ, зависящей от всех или некоторых из координат q, скоростей $\dot{q}$ и, вообще говоря, времени t, взятый от момента t_0 до t_1:

$$I_\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\Phi(q, \dot{q}, t)\,dt. \tag{41}$$

Семейство функций (40) определяет в расширенном координатном пространстве семейство отрезков кривых [1]) (рис. VII 1). Возь-

[1]) На рис. VII.1 и на последующих рисунках, иллюстрирующих поведение кривых в многомерных пространствах, условно изображено трехмерное пространство Надписи на осях выбраны так, чтобы они напоминали читателю о том, сколько измерений имеет рассматриваемое пространство.

мем нижние концы этих отрезков на некоторой кривой, получающейся подстановкой $t_0(\alpha)$ вместо t в формулы (40). Тогда эти формулы параметрически зададут кривую в расширенном координатном пространстве (α — параметр). Пусть другие концы отрезков кривых (40) будут расположены в расширенном координатном пространстве на кривой, которая параметрически задается подстановкой $t_1(\alpha)$ вместо t в формулы (40). Каждому значению параметра α соответствует точка на «нижней» кривой, точка на «верхней» кривой и кривая, соединяющая эти две точки. Выбор однопараметрического семейства (40) нестеснен какими-либо ограничениями, и, значит, соответствующие кривые в расширенном координатном пространстве могут, вообще говоря, пересекаться, а начальные или конечные точки двух кривых, соответствующих различным α, могут совпадать.

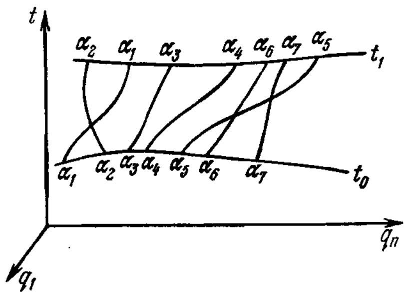

Рис. VII.1.

Коль скоро параметр α выбран, функции (40) зависят только от одного аргумента — времени, их можно продифференцировать по времени и подставить полученные выражения q и $\dot{q}$ в функционал (41). Тогда функция Φ, стоящая под знаком интеграла, будет функцией только от времени, так что можно вычислить интеграл (41) и после подстановки пределов определить число — значение I_Φ. Таким образом, каждой кривой рассматриваемого пучка (40) функционал (41) ставит в соответствие некоторое определенное число, и в этом смысле на однопараметрическом пучке кривых значение функционала является просто функцией параметра α. Эта функция может при некоторых значениях α принимать *стационарные* значения; кривые, которые получаются при подстановке в (40) этих значений α, носят название *экстремалей*.

Таким образом, экстремалями заданного семейства кривых (40) являются те кривые, на которых функционал имеет стационарные значения.

Имея дело с семейством функций (40) от двух переменных, условимся далее обозначать буквой d операцию частного дифференцирования по явно входящему времени (при неизменном параметре α), а буквой δ — операцию частного дифференцирования по параметру α (при фиксированном значении времени t):

$$\begin{aligned} df(t, \alpha) &= (\partial f/\partial t)\, dt, \\ \delta f(t, \alpha) &= (\partial f/\partial \alpha)\, d\alpha. \end{aligned} \qquad (42)$$

Дифференциал δf называется *вариацией* функции f. Вариация, как и всякий дифференциал, представляет собой линейную часть приращения варьируемой функции, но при подсчете вариации приращение функции подсчитывается не при изменении аргумента t, а при изменении параметра α и фиксированном t, т. е. при переходе от одной функции из заданного семейства к другой функции из этого же семейства.

В рассматриваемом нами простейшем случае однопараметрического пучка по самому определению понятия «стационарное значение функционала» условие стационарности функционала сводится к виду

$$\delta I_{\Phi}=0, \tag{43}$$

где I_{Φ} понимается как функция α в указанном выше смысле.

В вариационном исчислении устанавливается следующая теорема, определяющая необходимые условия стационарности функционала.

Для того чтобы функционал

$$I=\int_a^b \Phi\left(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_n;\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots,\ \frac{dy_n}{dx}\right)dx, \tag{44}$$

определенный на однопараметрическом семействе кривых

$$y_i(x,\ \alpha) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n), \tag{45}$$

имел при $\alpha=0$ стационарное значение (а кривая $y_i(x,\ 0)$ была соответственно экстремалью), необходимо, чтобы при $\alpha=0$ удовлетворялись уравнения

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial(dy_i/dx)}-\frac{\partial\Phi}{\partial y_i}=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n). \tag{46}$$

Уравнения (46) были получены Эйлером и носят название *уравнений Эйлера вариационного исчисления.*

Мы приводим здесь эту основную теорему вариационного исчисления без доказательств, так как нам предстоит доказать ее в следующем параграфе.

Если положить в формулах (44) — (46) $x=t$, $y_i=q_i$, а в качестве постоянных чисел a и b взять t_0 и t_1, то функционал (44), фигурирующий в этой теореме, примет вид (41), а семейство (45) совпадает с семейством (40). В этих обозначениях уравнения Эйлера (46) запишутся так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{47}$$

Читатель легко обнаружит идентичность уравнений Эйлера (47) и уравнений Лагранжа: достаточно в качестве функции Φ — ядра рассматриваемого функционала (41) — взять лагранжиан L. Отсюда сразу следует естественность введения в рассмотрение функционала следующего вида:

$$\boxed{I=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ \dot{q},\ t)\,dt.} \tag{48}$$

Записанный так функционал, определенный на пучке (40), носит название *действия по Гамильтону* и играет важную роль при исследовании движения в потенциальных полях. Из сказанного следует, что движение, удовлетворяющее уравнениям Лагранжа, представляет экстремаль функционала (48). В следующем параграфе мы докажем приведенную выше теорему Эйлера для однопараметрического пучка специального типа, пока же выведем формулу для вариации действия; эта формула потребуется нам в дальнейшем.

В рассматриваемом случае (см. рис. VII.1) как t_0, так и t_1 — функции α. Поэтому вариация действия по Гамильтону может быть записана так:

$$\delta I=\delta\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(q,\ \dot{q},\ t)\,dt. \tag{49}$$

Вспоминая теперь, что символ вариации означает просто дифференцирование по параметру α, и используя обычные правила дифференцирования интеграла по параметру в случае, когда пределы интегрирования зависят от параметра, получаем

$$\delta I=L_1\delta t_1(\alpha)-L_0\delta t_0(\alpha)+\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\delta L(q,\ \dot{q},\ t)\,dt, \tag{50}$$

где индексы 1 и 0 у лагранжиана L означают подстановку в этот лагранжиан вместо t соответственно t_1 и t_0, а вместо функций q и $\dot{q}$ — функций, которые получаются при замене t в выражениях для $q(t,\ \alpha)$ и $\dot{q}(t,\ \alpha)$ на t_1 и t_0 соответственно.

Займемся сначала интегралом, входящим в правую часть формулы (50), и перепишем его, выполнив операцию дифференцирования функции L по параметру α:

$$\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\delta L(q,\ \dot{q},\ t)\,dt=\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\,\delta q_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta \dot{q}_j\right)dt, \tag{51}$$

но

$$\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta\dot{q}_j\,dt = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d\delta q_j}{dt}\,dt = \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,d\delta q_j. \tag{52}$$

В последнем интеграле в формуле (52) пределы интегрирования надо понимать как указание на то, что при подстановке пределов функция, по которой ведется интегрирование, должна быть взята в моменты t_0 и t_1 соответственно. Взяв последний интеграл по частям, получим

$$\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,d\delta q_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j\Big|_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} - \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j\,dt. \tag{53}$$

Подставим теперь это выражение в формулу (51):

$$\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \delta L\,dt = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\,\delta q_j\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,dt. \tag{54}$$

Подставляя далее выражения (54) в формулу (50) и используя определение импульса p_j, получаем

$$\delta I = -\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,dt +$$
$$+\left(L_1\delta t_1(\alpha) + \sum p_j^1\,[\delta q_j]_{t=t_1(\alpha)}\right) - \left(L_0\delta t_0(\alpha) + \sum p_j^0\,[\delta q_j]_{t=t_0(\alpha)}\right). \tag{55}$$

Обратим внимание на то, что в формуле (55) записи

$$[\delta q_j]_{t=t_1(\alpha)} \quad \text{и} \quad [\delta q_j]_{t=t_0(\alpha)}$$

означают следующее: нужно вычислить дифференциал q_j по явно входящему α, а затем в полученном выражении заменить t на $t_1(\alpha)$ или $t_0(\alpha)$ соответственно, например,

$$[\delta q_j]_{t=t_1(\alpha)} = \left[\frac{\partial q_j(t,\alpha)}{\partial \alpha}\,d\alpha\right]_{t=t_1(\alpha)} = \left[\frac{\partial q_j(t,\alpha)}{\partial \alpha}\right]_{t=t_1(\alpha)} d\alpha. \tag{56}$$

Обозначим теперь через

$$\delta q_j^1 \quad \text{и} \quad \delta q_j^0 \tag{57}$$

результат следующей операции: в выражении $q_j(t, \alpha)$ сначала делается замена t на $t_1(\alpha)$ или $t_0(\alpha)$ и лишь после этого вычисляется дифференциал по α. Дифференциалы (57) имеют смысл линейной части приращений q_j, вызванных смещением концов кривых при изменении α. Подсчитаем определенные так дифференциалы и установим связь между ними и выражениями (56):

$$\delta q_j^1(t, \alpha) = \delta q_j[t_1(\alpha), \alpha] = \frac{\partial q_j[t_1(\alpha), \alpha]}{\partial\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{\partial q_j[t_1(\alpha), \alpha]}{\partial t_1(\alpha)} \frac{dt_1(\alpha)}{d\alpha} d\alpha + \left[\frac{\partial q_j(t, \alpha)}{\partial\alpha}\right]_{t=t_1(\alpha)} d\alpha =$$

$$= \left[\frac{\partial q_j(t, \alpha)}{\partial t}\right]_{t=t_1(\alpha)} \delta t_1(\alpha) + \left[\frac{\partial q_j(t, \alpha)}{\partial\alpha} d\alpha\right]_{t=t_1(\alpha)} =$$

$$= \dot q_j^1 \delta t_1(\alpha) + [\delta q_j]_{t=t_1(\alpha)} \qquad (58)$$

и аналогично

$$\delta q_j^0(t, \alpha) = \dot q_j^0 \delta t_0(\alpha) + [\delta q_j]_{t=t_0(\alpha)}. \qquad (59)$$

Подставим теперь эти выражения в формулу (55):

$$\delta I = -\int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,dt +$$

$$+\left[\sum p_j^1 \delta q_j^1 - \sum p_j^1 \dot q_j^1 \delta t_1(\alpha) + L_1 \delta t_1(\alpha)\right] -$$

$$-\left[\sum p_j^0 \delta q_j^0 - \sum p_j^0 \dot q_j^0 \delta t_0(\alpha) + L_0 \delta t_0(\alpha)\right].$$

Представив гамильтониан H в виде (21), это можно записать так:

$$\boxed{\delta I = \left(\sum p_j \delta q_j - H\delta t\right)\Big|_0^1 - \int\limits_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \sum \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,dt,} \qquad (60)$$

где запись $\Big|_0^1$ означает подстановку, при которой δq_j заменяется на δq_j^1 и δq_j^0 соответственно, функции L и H берутся в моменты t_1 и t_0, а δt заменяется на δt_1 и δt_0.

Формула (60) является общей формулой для вариации действия, заданного на однопараметрическом пучке (40).

Рассмотрим теперь три разные задачи. Решая каждую из этих задач, мы воспользуемся формулой (60) для вариации действия, но в каждой задаче будем различным образом задавать пучок кривых, на которых осуществляется варьирование. Этот пучок иногда будет задаваться не в расширенном координатном, а в каком-либо ином пространстве [1]. В таких случаях потребуется

---

[1]) Пространства, используемые в данной главе, описаны в § 2 гл. VI. Это:

n-мерное координатное пространство q;

$(n+1)$-мерное расширенное координатное пространство q, t;

$2n$-мерное фазовое пространство q, p (или, что все равно, q, $\dot q$);

$(2n+1)$-мерное расширенное фазовое пространство q, p, t (или q, $\dot q$, t).

предварительно «перенести пучок» в расширенное координатное пространство, т. е. преобразовать задачу к условиям, при которых выведена формула (60). Первой из этих задач является доказательство так называемого вариационного принципа Гамильтона, т. е. по существу вывод уравнений Эйлера вариационного исчисления. Вторая задача состоит в установлении связей между законами сохранения и инвариантностью уравнений движения по отношению к различным преобразованиям координат и времени. Наконец, третья задача связана с изучением некоторых общих свойств движений в потенциальных полях — с интегральными инвариантами.

§ 5. Вариационный принцип Гамильтона

Рассмотрим $(n+1)$-мерное расширенное координатное пространство $q_1, \ldots, q_n, t$ и выберем в этом пространстве две произвольные не совпадающие точки A и B, соответствующие моментам времени t_0 и t_1 (рис. VII.2). Пусть некоторая динамическая система, движущаяся в потенциальном поле, задана ее лагранжианом (или гамильтонианом). Путь этой системы из точки A в точку B, удовлетворяющий соответствующим уравнениям Лагранжа (или каноническим уравнениям), называется *прямым путем* (жирная линия на рис. VII.2).

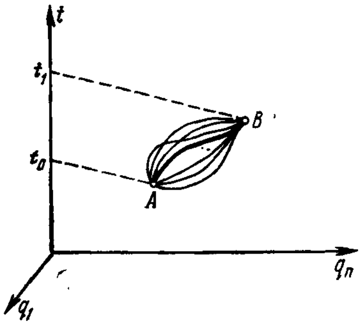

Рис. VII.2.

Обратим внимание читателя на то, что вопрос о существовании прямого пути, ведущего из произвольной точки A в произвольную точку B, нетривиален. Ведь построение проводится в расширенном координатном пространстве; следовательно, выбор точки в нем определяет n координат, но не определяет скоростей или соответствующих импульсов. Поэтому выбор одной точки в расширенном координатном пространстве еще не предопределяет движения. В рассматриваемом случае задаются две точки (A и B), т. е. задается $2n$ данных, но они относятся не только к начальной точке, а к начальной и конечной точкам в совокупности. Таким образом, для определения прямого пути получается не задача Коши об интегрировании системы дифференциальных уравнений по полной системе начальных данных, а краевая задача. К вопросу о существовании и единственности решения поставленной так задачи нам еще придется вернуться; пока же будем исходить из предположения, что прямой путь существует и является единственным. Помимо прямого пути проведем произвольное семейство кривых, соединяющих точки A и B так, чтобы они совместно с прямым путем образовывали бы однопараметрическое семейство кривых. Обозначим через α параметр этого семейства и предположим, что прямой путь соответствует $\alpha=0$.

Рассмотрим действие по Гамильтону на этом пучке кривых. Сравнивая возникающую так задачу с задачей, рассмотренной в § 4 при выводе общей формулы для приращения действия по Гамильтону, обратим внимание на то, что все кривые введенного сейчас в рассмотрение пучка (рис. VII.2) пересекаются в начальной и в конечной точках A и B. Это значит, что в точках A и B ни значения координат, ни значения времени t не меняются при изменении параметра α, т. е.

$$\delta q_j^1=\delta q_j^0=\delta t_1=\delta t_0=0;$$

поэтому в формуле (60) проинтегрированная часть обращается в нуль:

$$\left(\sum p_j\,\delta q_j - H\,\delta t\right)\Big|_0^1=0$$

и общая формула для приращения функционала для такого пучка (рис. VII.2) принимает вид

$$\delta I=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\delta q_j\,dt. \qquad (61)$$

На прямом пути удовлетворяются уравнения Лагранжа системы; поэтому все выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла в формуле (61), тождественно равны нулю. Отсюда сразу следует, что на прямом пути вариация действия по Гамильтону равна нулю, т. е. *что прямой путь является экстремалью рассматриваемой вариационной задачи — на прямом пути действие по Гамильтону достигает стационарного значения.*

Установленное выше утверждение о том, что прямой путь доставляет действию по Гамильтону стационарное значение, называется *вариационным принципом* (или *началом*) *Гамильтона.* Принцип Гамильтона замечателен тем, что он выделяет прямой путь среди всех окольных путей, которые могут быть проведены между двумя точками расширенного координатного пространства, устанавливает общее свойство прямого пути, его отличие от иных кинематически возможных, но не реализующихся в рассматриваемом потенциальном поле путей[1]).

---

[1]) Если система содержит механические голономные связи, а q_j — ее обобщенные координаты, то по самому определению обобщенных координат движение по любой кривой, ведущей из точки A в точку B, не противоречит механическим связям.

Обратим внимание теперь на то, что справедливо и обратное утверждение: если соответствующая $\alpha=0$ кривая из пучка, представленного на рис. VII.2, такова, что действие по Гамильтону достигает на этой кривой стационарного значения и при $\alpha=0$ вариация действия равна нулю, то эта кривая удовлетворяет уравнению Лагранжа, т. е. является прямым путем. Действительно, если положить равной нулю вариацию действия в левой части уравнения (61) и вспомнить затем, что вариации координат δq_j независимы и могут быть выбраны произвольно, то отсюда следует, что выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла, порознь равны нулю, т. е. что уравнения Лагранжа удовлетворяются всегда, когда в формуле (61) левая часть обращается в нуль.

Это последнее утверждение играет важную роль потому, что оно позволяет положить в основу классической механики в качестве исходного постулата не второй закон Ньютона (или его ковариантную запись — уравнения Лагранжа), а вариационный принцип Гамильтона. Действительно, по крайней мере для движений в потенциальных полях, постулируя вариационный принцип Гамильтона, можно получить из него как следствие уравнения Лагранжа. В теоретической физике иногда оказывается удобным вводить исходную аксиоматику в форме соответствующего вариационного принципа, устанавливающего общие свойства движения в глобальных терминах, и уже из этого принципа получать уравнения движения.

Утверждение, обратное принципу Гамильтона, важно и по другой причине: оно позволяет установить, как изменяется лагранжиан при преобразовании координат и времени, и тем самым разъяснить, что собственно имеется в виду, когда утверждается, что уравнения Лагранжа ковариантны по отношению к таким преобразованиям. Рассмотрим преобразования

$$q_j=\varphi_j(q^*,\ t^*),\quad t=\psi(q^*,\ t^*),\qquad j=1,\ \ldots,\ n,\tag{62}$$

где q^* и t^* — «новые» координаты и время, q и t — «старые» координаты и время, а φ_j и ψ — достаточно гладкие функции. Предположим, что (62) разрешимы относительно новых переменных q^*, t^*.

Пусть в «старых» координатах динамическая система имеет лагранжиан $L(q,\ dq/dt,\ t)$, и пусть $q_j(t_j;\ q^0,\ \dot{q}^0)$, $j=1,\ \ldots,\ n$, — решение соответствующих уравнений Лагранжа. В пространстве q, t эти решения определяют семейство кривых. В пространстве q^*, t^* им соответствует «новое» семейство кривых.

Поставим теперь следующие вопросы: всегда ли существует «новый» лагранжиан $L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*)$, такой, чтобы построенное указанным способом «новое» семейство кривых являлось решением «новых» уравнений Лагранжа с этим лагранжианом L^*?

Как определить «новый» лагранжиан $L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*)$ по «старому» лагранжиану $L(q,\ dq/dt,\ t)$?

Чтобы ответить на эти вопросы, выпишем действие по Гамильтону для «старой» системы

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L(q,\ dq/dt,\ t)\,dt$$

и выполним в нем замену переменной t на t^* в соответствии с преобразованием (62). При этой замене используется соотношение $t=\psi(q^*(t^*),\ t^*)$, и поэтому

$$q(t)=q(\psi(q^*(t^*),\ t^*))=\varphi(q^*(t^*),\ t^*).$$

Таким образом, операция замены переменной t на t^* эквивалентна подстановке в подынтегральное выражение зависимостей (62). В результате получаем

$$I^*=\int_{\psi_0}^{\psi_1} L[\varphi,\ d\varphi/d\psi,\ \psi]\,d\psi=\int_{t_0^*}^{t_1^*} L[\varphi,\ d\varphi/d\psi,\ \psi](d\psi/dt^*)\,dt^*,$$

или

$$I^*=\int_{t_0^*}^{t_1^*} L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*)\,dt^*, \tag{63}$$

где функция L^* равна

$$L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*)=L(\varphi,\ d\varphi/d\psi,\ \psi)(d\psi/dt^*) \tag{64}$$

и где, в свою очередь,

$$\frac{d\varphi_j}{d\psi}=\frac{\sum\limits_k \frac{\partial\varphi_j}{\partial q_k^*}\frac{dq_k^*}{dt^*}+\frac{\partial\varphi_j}{\partial t^*}}{\sum\limits_k \frac{\partial\psi}{\partial q_k^*}\frac{dq_k^*}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial t^*}},$$

а $d\psi/dt^*$ совпадает со знаменателем этой дроби.

Легко показать, что экстремаль является инвариантом преобразований, т. е. если преобразования (62) выполняются одновременно над кривой пучка, представляющей собой экстремаль, и над функционалом, то преобразованная кривая остается экстремалью для преобразованного функционала. Отсюда и из обратного утверждения принципа Гамильтона (см. выше) сразу следует, что преобразованный прямой путь удовлетворяет уравнениям Лагранжа с лагранжианом L^*, который определяется по формуле (64).

Таким образом уравнения Лагранжа ковариантны по отношению к любым преобразованиям координат и времени вида (62), а «новый» лагранжиан (как функция «новых» переменных) может быть вычислен по формуле (64), если известен «старый» лагранжиан (как функция «старых» переменных) и формулы преобразования (62). Из формулы (64) следует, что «новый» лагранжиан получается из «старого» простой заменой переменных

$$L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*) = L(\varphi,\ d\varphi/d\psi,\ \psi) \tag{65}$$

тогда и только тогда, когда время не преобразуется, т. е. когда $t = \psi(q^*,\ t^*) \equiv t^*$ и $d\psi/dt^* = 1$.

Разумеется, как в том случае, когда время не преобразуется и L^* может быть вычислен по формуле (65), так и в том случае, когда время преобразуется и L^* вычисляется по формуле (64), «новый» лагранжиан (как функция «новых» переменных), вообще говоря, отличается от «старого» лагранжиана (как функции «старых» переменных). Именно поэтому мы говорим о ковариантности (а не об инвариантности) уравнений Лагранжа по отношению к любым преобразованиям вида (62). Но, разумеется, среди преобразований (62) содержатся и преобразования специального вида, такие, что для них L^* как функция «новых» переменных имеет совершенно такой же вид, что и L как функция «старых» переменных, т. е.

$$L^*(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*) = L(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*),$$

и «новый» лагранжиан можно получить из «старого» просто «приписыванием звездочек» ко всем переменным. По отношению к таким специальным преобразованиям уравнения Лагранжа не только ковариантны, но и инвариантны. Эти соображения будут использованы в следующем параграфе при формулировке теоремы Э. Нётер.

Обратим теперь внимание читателя на то, что лагранжиан динамической системы определен с точностью до добавления к нему полной производной от произвольной функции q и t. Это утверждение имеет следующий смысл: динамические системы с лагранжианами L и $L + dF/dt$ имеют один и тот же прямой путь, какова бы ни была функция $F(q,\ t)$.

Действительно, рассмотрим действие

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

и действие

$$\tilde{I} = \int_{t_0}^{t_1} (L + dF/dt)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt + \int_{t_0}^{t_1} dF = I + F\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}.$$

Вариации $\delta\tilde{I}$ и δI равны, поскольку $\delta F|_{t=t_1} = \delta F|_{t=t_0} = 0$ в силу того, что как при $t = t_0$, так и при $t = t_1$ все кривые рассматриваемого пучка (рис. VII.2) проходят через одну и ту же точку расширенного координатного пространства. Поэтому из того факта, что на прямом пути $\delta I = 0$, следует, что на том же пути $\delta\tilde{I} = 0$, а это значит, что одна и та же кривая является прямым путем для уравнений Лагранжа с лагранжианом L и с лагранжианом $\tilde{L}$.

Вернемся теперь к принципу Гамильтона и выясним, какого типа стационарная точка — максимум, минимум или точка перегиба — достигается действием на прямом пути. Ответ на этот вопрос тесно связан с указанными в начале этого параграфа особенностями краевой задачи, которая возникает при проведении прямого пути.

Если точка B достаточно близка к точке A, то эта краевая задача всегда имеет лишь конечное число решений [1]). При удалении точки B от точки A может, однако, оказаться, что существуют такие точки, что, выбрав их в качестве точки B, мы получим краевую задачу с бесконечным числом решений. Такого рода точки расширенного координатного пространства называются *кинетическими фокусами*, сопряженными с точкой A.

Рассмотрим какой-либо прямой путь, идущий из точки A в точку B. Если на этом прямом пути между точками A и B нет кинетического фокуса, то интересующий нас экстремум действия по Гамильтону является минимумом. В том же случае, когда между точками A и B на прямом пути расположен кинетический фокус, то действие по Гамильтону хотя и экстремально на прямом пути, но утверждение, что этим экстремумом всегда является минимум действия, уже не верно; в зависимости от условий исследуемой динамической задачи это может быть минимум, максимум или экстремум иного типа [2]).

Приводя здесь без доказательства эти краткие сведения о связи между особенностями возникающей стационарной точки с особенностями краевой задачи, определяющей прямой путь, приведем лишь два примера, разъясняющих, каким образом в задачах механики появляются кинетические фокусы.

---

[1]) Более того, обычно в этом случае решение единственно. Если существует несколько решений, то пучок, изображенный на рис. VII.2, строится так, чтобы он содержал лишь один из прямых путей (при $\alpha = 0$), а окольные пути выбираются в окрестности этого прямого пути.

[2]) Эти утверждения верны только в том случае, когда на выбор окольных путей не накладываются какие-либо дополнительные условия. Если же при наличии на прямом пути кинетического фокуса ограничиться выбором окольных путей, также проходящих через этот фокус, то на прямом пути будет достигаться минимум действия по Гамильтону.

Пример 1. Рассмотрим движение материальной точки по инерции на сфере (рис. VII.3); известно, что траекториями такого движения всегда служат дуги больших кругов. Выберем на сфере произвольную точку A и отметим диаметрально противоположную ей точку A'. Через точку A и любую иную точку B сферы, не совпадающую с A', можно провести лишь один большой круг, а через точки A и A' — бесконечное множество больших кругов.

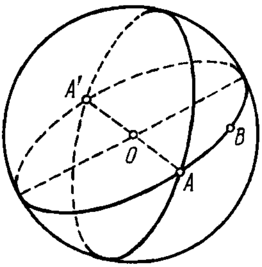

Рис. VII.3.

В качестве обобщенных координат возьмем углы φ и ψ — «долготу» и «широту». В расширенном координатном пространстве φ, ψ, t отметим в момент t_0 координаты t_0, φ_A, ψ_A точки A. Будем считать далее, что в момент t_0 материальной точке придана начальная скорость $\boldsymbol{v}_0$ и что в момент t_0+T материальная точка впервые достигает точки A' с координатами t_0+T, $\varphi_{A'}$, $\psi_{A'}$.

Отметим в расширенном координатном пространстве точки (t_0, φ_A, ψ_A), $(t_0+T, \varphi_{A'}, \psi_{A'})$, $(t_0+2T, \varphi_A, \psi_A)$, $(t_0+3T, \varphi_{A'}, \psi_{A'})$ и т. д. Если изменять направление начальной скорости $\boldsymbol{v}_0$, сохраняя ее величину, то в расширенном координатном пространстве будет определено множество прямых путей, проходящих через все эти точки. Через любую иную точку расширенного координатного пространства проходит лишь один из прямых путей.

Теперь непосредственно видно, что точка t_0+T, $\varphi_{A'}$, $\psi_{A'}$ является кинетическим фокусом для точки t_0, φ_A, ψ_A.

Обратимся вновь к рис. VII.3. Из точки A в точку B ведут два прямых пути — по меньшей и по большей дугам большого круга; выбор одного из них определяется направлением начальной скорости. Путь по меньшей дуге не проходит через точку A', и на этом пути действие по Гамильтону достигает минимума; путь по большей дуге проходит через кинетический фокус A', и на этом пути действие также достигает стационарного значения, но уже не минимально.

Пример 2. Рассмотрим линейный осциллятор, т. е. линейную колебательную систему с одной степенью свободы, описываемую уравнением

$$a\ddot{q}+cq=0.$$

Если в момент $t=0$ положить $q(0)=0$, то все возможные пути $q(t)$, отличающиеся значением начальной скорости $\dot{q}(0)$, пересекаются в моменты $t=T/2, T, 3T/2, \ldots$, где $T=2\pi\sqrt{a/c}$ —

период колебаний (рис. VII.4). Поэтому точка $q=0$, $t=T/2$ является кинетическим фокусом для начальной точки $q=0$, $t=0$; если прямой путь выбирается, исходя из краевых условий $q=0$, $t=0$ и $q=q^1>0$, $t=t_1<T/2$, то на этом пути действие минимально (по сравнению с окольными путями); если же прямой путь определяется краевыми условиями $q=0$, $t=0$ и $q=q^1<0$, $t=t_1$, $T/2<t_1<<T$, то по-прежнему прямой путь является единственным, по-прежнему на этом пути действие достигает стационарного значения, но уже не минимума.

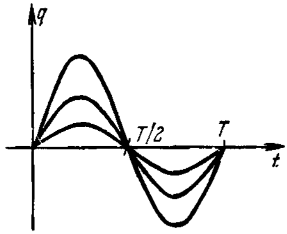

Рис. VII.4.

Этот пример легко обобщить. Рассмотрим малые колебания консервативной системы, имеющей n степеней свободы, около положения устойчивого равновесия. В гл. VI было показано, что при движении такой системы

$$q=\sum A_j\nu_j \sin\omega_j t+\sum B_j\nu_j\cos\omega_j t,$$

где ν_j — амплитудные векторы.

Рассмотрим два несовпадающих прямых пути, ведущих из точки (q_0, t_0) в точку (q_1, t_1). Этим двум прямым путям соответствуют два несовпадающих набора чисел $\{A_j^{\mathrm{I}}, B_j^{\mathrm{I}}\}$ и $\{A_j^{\mathrm{II}}, B_j^{\mathrm{II}}\}$:

$$q^{\mathrm{I}}=\sum A_j^{\mathrm{I}}\nu_j\sin\omega_j t+\sum B_j^{\mathrm{I}}\nu_j\cos\omega_j t,$$
$$q^{\mathrm{II}}=\sum A_j^{\mathrm{II}}\nu_j\sin\omega_j t+\sum B_j^{\mathrm{II}}\nu_j\cos\omega_j t.$$

Из условия

$$q^{\mathrm{I}}(t_0)=q^{\mathrm{II}}(t_0),$$

получаем

$$\sum A_j^{\mathrm{I}}\nu_j\sin\omega_j t_0+\sum B_j^{\mathrm{I}}\nu_j\cos\omega_j t_0=\sum A_j^{\mathrm{II}}\nu_j\sin\omega_j t_0+\sum B_j^{\mathrm{II}}\nu_j\cos\omega_j t_0,$$

или

$$\sum\nu_j\left[\left(A_j^{\mathrm{I}}-A_j^{\mathrm{II}}\right)\sin\omega_j t_0+\left(B_j^{\mathrm{I}}-B_j^{\mathrm{II}}\right)\cos\omega_j t_0\right]=0.$$

Амплитудные векторы линейно независимы; поэтому все выражения в квадратных скобках должны быть равны нулю:

$$\left(A_j^{\mathrm{I}}-A_j^{\mathrm{II}}\right)\sin\omega_j t_0+\left(B_j^{\mathrm{I}}-B_j^{\mathrm{II}}\right)\cos\omega_j t_0=0 \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Аналогично из условия

$$q^{\mathrm{I}}(t_1)=q^{\mathrm{II}}(t_1)$$

получаем

$$\left(A_j^{\mathrm{I}}-A_j^{\mathrm{II}}\right)\sin\omega_j t_1+\left(B_j^{\mathrm{I}}-B_j^{\mathrm{II}}\right)\cos\omega_j t_1=0 \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Итак, мы получили систему из $2n$ уравнений относительно $A_j^{\mathrm{I}}-A_j^{\mathrm{II}}$ и $B_j^{\mathrm{I}}-B_j^{\mathrm{II}}$ $(j=1, \ldots, n)$. Пусть $A_j^{\mathrm{I}}=A_j^{\mathrm{II}}$ и $B_j^{\mathrm{I}}=B_j^{\mathrm{II}}$ для всех j, кроме $j=s$; тогда в этой системе из $2n$ уравнений $2(n-1)$ уравнений обращаются в тождества вида $0=0$, и остаются два уравнения

$$(A_s^{\mathrm{I}}-A_s^{\mathrm{II}})\sin\omega_s t_0+(B_s^{\mathrm{I}}-B_s^{\mathrm{II}})\cos\omega_s t_0=0,$$
$$(A_s^{\mathrm{I}}-A_s^{\mathrm{II}})\sin\omega_s t_1+(B_s^{\mathrm{I}}-B_s^{\mathrm{II}})\cos\omega_s t_1=0$$

с «неизвестными» $A_s^{\mathrm{I}}-A_s^{\mathrm{II}}$ и $B_s^{\mathrm{I}}-B_s^{\mathrm{II}}$. Если

$$\Delta_s=\begin{vmatrix}\sin\omega_s t_0 & \cos\omega_s t_0\\ \sin\omega_s t_1 & \cos\omega_s t_1\end{vmatrix}=\sin\omega_s(t_0-t_1)\neq 0,$$

то эта система имеет лишь тривиальное нулевое решение и исследуемые прямые пути совпадают.

Если $\Delta_s=0$, то существует бесчисленное множество решений (при $t_0-t_1=k\pi/\omega_s$), для которых $A_s^{\mathrm{I}}\neq A_s^{\mathrm{II}}$ и $B_s^{\mathrm{I}}\neq B_s^{\mathrm{II}}$. В этом случае краевым условиям

$$q^{\mathrm{I}}(t_0)=q^{\mathrm{II}}(t_0)=a,\quad q^{\mathrm{I}}(t_1)=q^{\mathrm{II}}(t_1)=b$$

удовлетворяют несовпадающие пути

$$q^{\mathrm{I}}=A_s^{\mathrm{I}}\nu_s\sin\omega_s t+B_s^{\mathrm{I}}\nu_s\cos\omega_s t+\sum_{j\neq s}A_j^{\mathrm{I}}\nu_j\sin\omega_j t+\sum_{j\neq s}B_j^{\mathrm{I}}\nu_j\cos\omega_j t,$$
$$q^{\mathrm{II}}=A_s^{\mathrm{II}}\nu_s\sin\omega_s t+B_s^{\mathrm{II}}\nu_s\cos\omega_s t+\sum_{j\neq s}A_j^{\mathrm{II}}\nu_j\sin\omega_j t+\sum_{j\neq s}B_j^{\mathrm{II}}\nu_j\cos\omega_j t,$$
$$t_1=t_0+\pi/\omega_j.$$

Перебирая таким образом индексы $s=1,\ldots,n$, в случае n несоизмеримых частот находим n кинетических фокусов, сопряженных с начальной точкой A_0.

§ 6. Связь законов сохранения (первых интегралов) со свойствами пространства и времени. Теорема Эммы Нётер

В этом параграфе вариационный подход к задаче механики и, в частности, полученная в § 4 общая формула для вариации функционала будут использованы для того, чтобы установить связь между законами сохранения, которые были получены в предыдущих главах, и общими свойствами пространства и времени, которые находят свое выражение в инвариантности законов механики относительно преобразований систем отсчета. Установление этой связи позволит понять внутреннюю природу законов сохранения и причины, по которым эти законы существуют. Такое понимание особенно важно, ибо оно иногда позволяет предвидеть первые интегралы и тем самым облегчить исследование уравнений, описывающих движение.

Приступая к подготовке материала, который требуется для того, чтобы сформулировать теорему Эммы Нётер, устанавливающую эту связь, рассмотрим какое-либо однопараметрическое семейство преобразований системы отсчета, т. е. координат и времени:

$$q_j^* = \varphi_j(q, t, \alpha) \quad (j=1, \ldots, n), \qquad t^* = \psi(q, t, \alpha), \tag{66}$$

где индекс $*$ приписан «новым» координатам и «новому» времени, а α — некоторый параметр. Предположим, что преобразование (66) удовлетворяет двум следующим условиям:

1° Это преобразование тождественно при $\alpha = 0$, т. е.

$$\varphi_j(q, t, 0) = q_j \quad (j=1, \ldots, n), \qquad \psi(q, t, 0) = t. \tag{67}$$

2° Для этого преобразования существует обратное:

$$q_j = \tilde{\varphi}_j(q^*, t^*, \alpha) \quad (j=1, \ldots, n), \qquad t = \tilde{\psi}(q^*, t^*, \alpha). \tag{68}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему Эммы Нётер.

Теорема Нётер. *Пусть задана система движущихся в потенциальном поле материальных точек, имеющая лагранжиан* $L(q, dq/dt, t)$, *и пусть существует однопараметрическое семейство преобразований* (66), *удовлетворяющее условиям* 1° *и* 2°. *Пусть, далее, лагранжиан* L *инвариантен по отношению к таким преобразованиям, т. е. «новый» лагранжиан* L^* *(вычисленный по формуле* (64)) *не зависит от* α *и как функция* q^*, dq^*/dt^*, t^* *имеет совершенно такой же вид, как и «старый» лагранжиан* L *как функция* q, dq/dt, t. *Тогда существует функция* $\Phi(q, p, t)$, *которая не изменяется во время движения этой системы, т. е. является первым интегралом движения. Эта функция имеет вид*

$$\boxed{\Phi(q, p, t) = \sum p_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0},} \tag{69}$$

где H — *гамильтониан рассматриваемой системы.*

Доказательство. Рассмотрим два расширенных координатных пространства; одно из них соответствует «старым», а другое «новым» координатам и времени, полученным в результате преобразования (66). В первом из этих пространств (в пространстве q, t) выберем две произвольные точки (q_0, t_0) и (q_1, t_1) и проведем между этими точками какую-либо кривую $q(t)$. Тогда однопараметрическое семейство преобразований (66) порождает во втором расширенном координатном пространстве q^*, t^* однопараметрическое семейство кривых $q^*(t^*, \alpha)$ (рис. VII.5). Оно получается, если из равенств (66)

$$q_j^* = \varphi_j[q(t), t, \alpha] \quad (j=1, \ldots, n), \qquad t^* = \psi[q(t), t, \alpha] \tag{70}$$

исключить t.

В силу первого условия, т. е. в силу формул (67), параметру $\alpha=0$ соответствует исходная кривая, т. е. при $\alpha=0$

$$q_j^*(t^*)=q_j(t^*) \qquad (j=1, \ldots, n).$$

Началу и концу кривой $q(t)$, т. е. точкам (q_0, t_0) и (q_1, t_1) из пространства (q, t), соответствуют в пространстве q^*, t^* кривые, заданные параметрически (параметр α) формулами

$$\left.\begin{array}{c} q_{j0}^*=\varphi_j[q(t_0), t_0, \alpha] \\ (j=1, \ldots, n), \\ t_0^*=\psi[q(t_0), t_0, \alpha] \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{c} q_{j1}^*=\varphi_j[q(t_1), t_1, \alpha] \\ (j=1, \ldots, n), \\ t_1^*=\psi[q(t_1), t_1, \alpha]. \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Эти формулы получаются из формул (70), если вместо t подставить t_0 и t_1 соответственно.

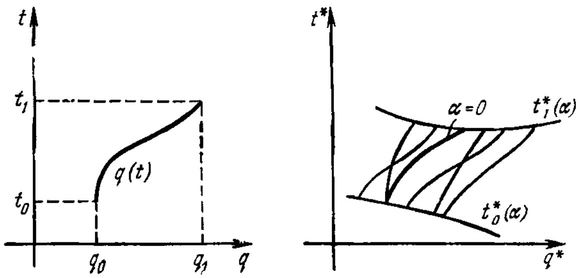

Рис. VII.5.

Примем в качестве кривой $q(t)$ отрезок от $t=t_0$ до $t=t_1$ прямого пути системы с лагранжианом L. Рассмотрим действие по Гамильтону на этом пути:

$$I=\int_{t_0}^{t_1} L[q(t), \dot{q}(t), t]\,dt. \qquad (72)$$

Заменив в интеграле (72) переменную t на t^*, получим (см. стр. 281)

$$I=\int_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)} L^*(q^*, dq^*/dt^*, t^*)\,dt^*,$$

где функция L^* строится по формуле (64). С учетом новых обозначений (см. условие 2°):

$$L^*=L(\tilde{\varphi}, d\tilde{\varphi}/d\tilde{\psi}, \tilde{\psi})\,d\tilde{\psi}/dt^*. \qquad (73)$$

В силу условий теоремы Э. Нётер L^* не зависит от α и как функция своих аргументов совпадает с L:

$$L^*(q^*, dq^*/dt^*, t^*)=L(q^*, dq^*/dt^*, t^*).$$

Таким образом, если выполнены условия теоремы Нётер, то интеграл (72) можно записать следующим образом:

$$I=\int\limits_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)} L(q^*,\ dq^*/dt^*,\ t^*)\,dt^*. \tag{74}$$

Рассмотрим теперь интеграл (74) как функционал, заданный на однопараметрическом семействе кривых $q^*(t^*, \alpha)$. В равенстве (74) левая часть не зависит от α. Это очевидно, так как при замене переменной интегрирования значение определенного интеграла не меняется. Поэтому в рассматриваемом случае интеграл (74) имеет одно и то же значение на всех кривых из семейства $q^*(t^*, \alpha)$ и, следовательно, при всех α

$$\delta I\equiv 0.$$

Интеграл (74) имеет вид действия по Гамильтону, заданного на однопараметрическом семействе кривых, и поэтому можно воспользоваться общей формулой (60) для вариации действия δI. В силу (60) имеем

$$\delta I=\left(\sum p_j^*\delta q_j^*-H^*\,\delta t^*\right)\Big|_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)}-\int\limits_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)}\sum\left(\frac{d}{dt^*}\frac{\partial L}{\partial(dq_j^*/dt^*)}-\frac{\partial L}{\partial q_j^*}\right)\delta q_j^*\,dt^*=0. \tag{75}$$

Равенство (75) верно при любом α, но мы воспользуемся им лишь при $\alpha=0$. В силу условия 1° при $\alpha=0$ равенства (66) превращаются в тождества, т. е. $q^*(t^*, 0)$ зависит от t^* точно так же, как $q(t)$ зависит от t. Но $q(t)$ — прямой путь и на нем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(dq_j/dt)}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n).$$

Следовательно, при $\alpha=0$ обращаются в нуль и все выражения, стоящие в скобках под знаком интеграла в формулах (75).

Поэтому

$$\left\{\left(\sum p_j^*\,\delta q_j^*-H^*\,\delta t^*\right)\Big|_{t_0^*(\alpha)}^{t_1^*(\alpha)}\right\}_{\alpha=0}=0. \tag{76}$$

Напомним, что сначала надо подставить пределы $t_1^*(\alpha)$ и $t_0^*(\alpha)$ в $q_j^*(t^*, \alpha)$, а затем выполнить операции δ, т. е. дифференцирования по параметру. Но при $\alpha=0$

$$t_1^*(\alpha)=t_1, \quad t_0^*(\alpha)=t_0$$

и в соответствии с формулами преобразования (66)

$$q_j^*(t_1(\alpha),\ \alpha)=\varphi_j(q(t_1),\ t_1,\ \alpha), \qquad q_j^*(t_0(\alpha),\ \alpha)=\varphi_j(q(t_0),\ t_0,\ \alpha).$$

Поэтому

$$\delta q_j^* (t_1^* (\alpha), \alpha) = \frac{\partial \varphi_j (q (t_1), t_1, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha,$$

$$\delta q_j^* (t_0 (\alpha), \alpha) = \frac{\partial \varphi_j (q (t_0), t_0, \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Учитывая при подстановке пределов эти равенства и тот факт, что $(p_j^*)_{\alpha=0} = p_j$, а $t_1^* (0) = t_1$ и $t_0^* (0) = t_0$, после сокращения на независимое приращение $d\alpha$ из равенства (76) получаем

$$\sum p_j^1 \left(\frac{\partial \varphi_j^1}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - H^1 \left(\frac{\partial \psi^1}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \sum p_j^0 \left(\frac{\partial \varphi_j^0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} - H^0 \left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}, \quad (77)$$

где верхний индекс указывает, берется ли соответствующая функция при $t = t_0$ или $t = t_1$.

Вспомним, что прямой путь и точки t_0 и t_1 на нем были выбраны произвольно. Отсюда следует, что функция (69) вообще не меняется вдоль кривой $q(t)$, т. е. на любом прямом пути.

Теорема Эммы Нётер доказана.

Покажем теперь, как, используя только теорему Нётер, можно получить все законы сохранения (первые интегралы), которые были установлены выше из иных соображений.

Закон сохранения механической энергии для консервативной системы. Рассмотрим консервативную (или обобщенно консервативную) систему. В качестве семейства преобразований (66) возьмем «сдвиг по времени»:

$$q_j^* = q_j \quad (j = 1, \ldots, n); \qquad t^* = t + \alpha. \quad (78)$$

Непосредственно видно, что преобразование (78) удовлетворяет условиям 1° и 2°. Лагранжиан (так же как и гамильтониан) консервативной системы не зависит явно от времени, а $dt^* = dt$, т. е. функция $d\psi/dt^*$ в данном случае равна единице. Поэтому преобразование (66) заведомо не меняет вид лагранжиана (и, разумеется, гамильтониана) и из теоремы Нётер следует, что консервативная система должна иметь первый интеграл вида (69). Но в данном случае все функции φ_j в силу преобразования (78) тождественно равны q_j, т. е. не зависят от α, и, следовательно, производные от них по параметру α равны нулю, а $\partial\psi/\partial\alpha = 1$ и формула (69) принимает вид

$$-\Phi = H = \text{const}.$$

Таким образом, из теоремы Нётер следует, что при движении обобщенно консервативной системы ее обобщенная энергия H не меняется. При движении же консервативной системы $H = T + V$ и не меняется ее полная механическая энергия.

Закон сохранения импульса для циклических координат. Рассмотрим теперь систему с циклической координатой q_1 и покажем, что импульс, соответствующий циклической координате, не меняется. Для этого используем «сдвиг по циклической координате»:

$$q_1^* = q_1 + \alpha, \qquad q_j^* = q_j \quad (j = 2, \ldots, n); \quad t^* = t. \tag{79}$$

Непосредственно видно, что это преобразование удовлетворяет условиям 1° и 2°. Лагранжиан (а значит, и гамильтониан) системы не зависит от циклических координат, и следовательно, вид этих функций не меняется при преобразовании (79). Следовательно, в силу теоремы Нётер имеет место первый интеграл вида (69). Но при преобразовании (79) $\partial\varphi_1/\partial\alpha = 1$, остальные $\partial\varphi_j/\partial\alpha = 0$ $(j = 2, \ldots, n)$ и $\partial\psi/\partial\alpha = 0$. Следовательно, в данном случае формула (69) принимает вид

$$\Phi = p_1 = \text{const}.$$

Далее мы получим два закона сохранения, имеющие место при рассмотрении замкнутых систем. В связи с этим сделаем следующее общее замечание. Требование замкнутости системы означает, что все силы, действующие на материальные точки системы, зависят лишь от взаимного расположения точек и расстояний между ними. В связи с этим любые преобразования координат, сохраняющие взаимное расположение точек и расстояния между ними, не изменяют уравнения движения, т. е. не меняют вид лагранжиана.

Закон сохранения количества движения для замкнутых систем. Рассмотрим теперь замкнутую систему, движущуюся в потенциальном поле. В качестве обобщенных координат примем декартовы координаты точек и применим «сдвиг вдоль одной из осей координат», например вдоль оси x:

$$x_i^* = x_i + \alpha, \qquad y_i^* = y_i, \qquad z_i^* = z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N); \qquad t^* = t \tag{80}$$

(здесь N — число точек системы).

В связи с тем, что при сдвиге начала координат вдоль какой-либо оси расстояние между точками системы не меняется, не меняется и потенциальная энергия системы, а значит, и функция Лагранжа. Очевидно, преобразование (80) удовлетворяет условиям 1° и 2°. Таким образом, все условия, которые теорема Нётер накладывает на однопараметрическое семейство преобразований, выполнены. В силу этой теоремы имеет место первый интеграл (69). В данном случае все $\partial\varphi_i/\partial\alpha$ для координат y и z, так же как и $\partial\psi/\partial\alpha$, равны нулю, а функции φ_i для координат x таковы, что $\partial\varphi_i/\partial\alpha = 1$. Поэтому в формуле (69) член, содержащий гамильтониан, обращается в нуль, а оставшаяся в правой части сумма равна

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{const},$$

но $\partial L/\partial \dot{x}_i = m_i \dot{x}_i$, и поэтому первый интеграл (69) имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = Q_x = \text{const}. \qquad (81)$$

Равенство (81) есть не что иное, как закон сохранения количества движения в проекции на ось x.

Совершенно аналогично, используя преобразования типа (80) для сдвига не вдоль оси x, а вдоль осей y и z, устанавливаем сохранение проекций количества движения на оси y и z соответственно. Таким образом, закон сохранения количества движения при движении замкнутой системы в потенциальном поле полностью доказан.

Закон сохранения кинетического момента для замкнутой системы. Вновь рассмотрим замкнутую систему, движущуюся в потенциальном поле, которое получается в результате взаимодействия точек системы. Как и ранее, в качестве обобщенных координат примем декартовы координаты точек и рассмотрим преобразование поворота системы координат вокруг, например, оси z:

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha, \\ y_i^* &= -x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha, \\ z_i^* &= z \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad t^* = t. \end{aligned} \qquad (82)$$

Непосредственно видно, что преобразование (82) удовлетворяет условию 1°, т. е. при $\alpha = 0$ превращается в тождественное преобразование. Легко проверить, что оно удовлетворяет и условию 2°, т. е. что система уравнений (82) разрешима относительно «старых» координат, ибо определитель этой системы равен $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$. При повороте системы координат взаимное расположение и расстояние между точками системы не меняются, и следовательно, не меняется потенциальное поле, а значит, не меняется и L. Таким образом, в силу теоремы Нётер и в этом случае имеет место первый интеграл (69). В случае преобразования (82) для координат x_i всех точек системы имеет место соотношение

$$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = [-x_i \sin\alpha + y_i \cos\alpha]_{\alpha=0} = y_i.$$

Аналогично для всех координат y_i

$$\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = [-x_i \cos\alpha - y_i \sin\alpha]_{\alpha=0} = -x_i.$$

С другой стороны, $\partial L/\partial \dot{x}_i = m_i \dot{x}_i$ и $\partial L/\partial \dot{y}_i = m_i \dot{y}_i$ и поэтому в данном случае

$$\Phi = \sum (m_i \dot{x}_i y_i - m_i \dot{y}_i x_i) = K_z = \text{const},$$

т. е. проекция кинетического момента на ось z сохраняется.

Совершенно аналогично, рассматривая поворот системы координат вокруг осей x и y, устанавливаем сохранение во время движения проекций кинетического момента на оси x и y соответственно, т. е. полностью доказываем закон сохранения кинетического момента для замкнутой системы, движущейся в потенциальном поле.

Таким образом, для случая движения в потенциальных полях мы получили из теоремы Нётер все законы сохранения, которые были рассмотрены выше. Теорема Нётер вскрыла природу их возникновения, связанную с инвариантностью уравнений движения при различных преобразованиях координат и времени. Закон сохранения энергии является следствием инвариантности уравнений консервативной системы при сдвиге вдоль оси времени, закон сохранения количества движения — результат инвариантности уравнений замкнутой системы по отношению к сдвигам вдоль осей координат, а закон сохранения кинетического момента — результат инвариантности уравнений замкнутой системы по отношению к поворотам вокруг осей координат.

Теорема Нётер может быть использована и в тех частных случаях, когда удается найти иные преобразования, сохраняющие лагранжиан.

§ 7. Интегральные инварианты

В § 5 были рассмотрены некоторые общие свойства прямого пути, отличающие его от прочих путей. В развитии такого подхода в этом параграфе будут рассматриваться некоторые общие свойства множества прямых путей. Все прямые пути этого множества принадлежат одной и той же динамической системе и отличаются один от другого выбором начальных данных.

Интегральным инвариантом называется интегральное выражение, зависящее от координат и импульсов и сохраняющееся неизменным на некоторым образом выделенных множествах прямых путей. Различные интегральные инварианты отличаются один от другого тем, какие множества прямых путей рассматриваются и как формулируются интегральные свойства, неизменные на этих множествах. Из интегральных инвариантов классической механики в этом параграфе будут рассмотрены лишь три: интегральный инвариант Пуанкаре — Картана, универсальный интегральный инвариант Пуанкаре и инвариант «фазовый объем».

1. Интегральный инвариант Пуанкаре — Картана. Рассмотрим динамическую систему, движущуюся в потенциальном поле и имеющую гамильтониан H. В $(2n+1)$-мерном расширенном фазовом пространстве q, p, t этой системы выберем произвольный замкнутый несамопересекающийся контур C_0 и выберем какую-либо точку на этом контуре, скажем, точку A. Эта точка полностью определяет систему гамильтоновых переменных t_A, q_A, p_A и может быть принята за начальную. Тогда при заданной функции H движение определяется однозначно и, следовательно, однозначно определяется соответствующий прямой путь в рассматриваемом расширенном фазовом пространстве. Теперь возьмем за начальную точку другую точку контура C_0 и тоже «выпустим» из нее прямой путь. Выполнив это построение для всех точек контура C_0, получим множество прямых путей. Это множество образует трубку, составленную из прямых путей (рис. VII.6), короче говоря, *трубку прямых путей*.

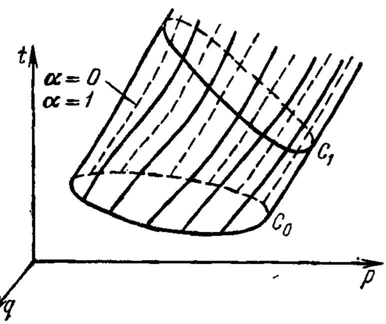

Рис. VII.6.

Введем теперь параметр α таким образом, чтобы выбором этого параметра однозначно определялась точка контура C_0, а значит, и один из прямых путей, образующих трубку. Распорядимся выбором параметра α так, чтобы при обходе контура C_0 он менялся от 0 до 1, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Можно, например, длину контура C_0 положить равной единице, выбрать какую-либо точку контура за исходную и в качестве параметра α взять длину дуги контура от исходной точки до рассматриваемой. Ясно, что при этом значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответствует одна и та же точка контура C_0 и, следовательно, один и тот же выпущенный из этой точки прямой путь.

Помимо расширенного фазового пространства введем в рассмотрение для этой же системы $(n+1)$-мерное расширенное координатное пространство q, t. Так как задание любой точки в расширенном фазовом пространстве определяет, в частности, q и t, каждой точке расширенного фазового пространства соответствует точка в расширенном координатном пространстве. Разумеется, это преобразование не взаимно однозначно — различным точкам расширенного фазового пространства, которые отличаются лишь значениями импульсов p, будет соответствовать одна и та же точка расширенного координатного пространства.

Итак, контур C_0 и построенная выше трубка прямых путей отображаются из расширенного фазового пространства в расширенное координатное пространство неоднозначно. В связи с неоднозначностью этого отображения прямые пути в расширенном координатном пространстве могут пересекаться (рис. VII.7), однако для нас это обстоятельство несущественно; важно лишь то, что каждое значение параметра α и в расширенном координатном пространстве определяет совершенно конкретную точку отображенного контура C_0 и совершенно конкретный прямой путь, проходящий через эту точку.

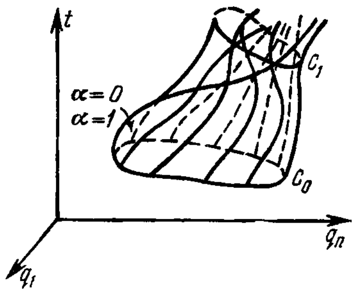

Рис. VII.7.

Вернемся к расширенному фазовому пространству и проведем на трубке прямых путей какой-либо произвольный контур C_1, охватывающий эту трубку (рис. VII.6). Построенный так контур перенесем в расширенное координатное пространство (рис. VII.7). В результате в расширенном координатном пространстве получится однопараметрическое семейство кривых, начала которых лежат на кривой C_0, а концы на кривой C_1, причем значениям параметра $\alpha=0$ и $\alpha=1$ будут заведомо соответствовать одни и те же кривые этого семейства (рис. VII.7).

Для построенного таким образом семейства можно рассмотреть действие по Гамильтону и вариацию действия. Для вариации действия по Гамильтону воспользуемся формулой (60). Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что все кривые однопараметрического семейства являются прямыми путями и, следовательно, на них тождественно выполняются уравнения Лагранжа. Поэтому интеграл, стоящий в правой части формулы (60), в данном случае тождественно обращается в нуль, и формулы для приращения функционала содержат только проинтегрированную часть:

$$\delta I=\left(\sum p_j^1\delta q_j^1-H^1\delta t_1\right)-\left(\sum p_j^0\delta q_j^0-H^0\delta t_0\right). \tag{83}$$

Проинтегрируем левую и правую части равенства (83) по α от $\alpha=0$ до $\alpha=1$:

$$\int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1}\delta I=\int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1}\left(\sum p_j^1\delta q_j^1-H^1\delta t_1\right)-\int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1}\left(\sum p_j^0\delta q_j^0-H^0\delta t_0\right). \tag{84}$$

Но

$$\int\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1}\delta I=I_{\alpha=1}-I_{\alpha=0}=0,$$

поскольку значениям $\alpha=0$ и $\alpha=1$, как уже было указано, соответствует одна и та же кривая семейства, а значит, одно и то же значение функционала I. Интегралы в правой части равенства (84) представляют собой контурные интегралы по контурам C_0 и C_1 соответственно. Поэтому равенства (84) можно переписать так:

$$\oint\limits_{C_1}\left(\sum p_j\,dq_j-H\,dt\right)=\oint\limits_{C_0}\left(\sum p_j\,dq_j-H\,dt\right).$$

Вспомним теперь, что исходный контур C_0 и контур на трубке прямых путей C_1 были выбраны совершенно произвольно. Отсюда сразу получаем, что *контурный интеграл*

$$J=\oint\limits_{C}\left(\sum p_j\,dq_j-H\,dt\right), \tag{85}$$

взятый по любому контуру C, охватывающему трубку прямых путей, не зависит от выбора этого контура.

Интеграл (85) называют *интегральным инвариантом Пуанкаре — Картана.*

Обратим теперь внимание на следующую особенность интегрального инварианта Пуанкаре — Картана. Если в дифференциальных уравнениях движения — все равно в уравнениях Лагранжа или Гамильтона — время t было выделено и входило иначе, чем координаты, так как по времени велось дифференцирование, то в контурный интеграл (85) дифференциал dt входит совершенно так же, как дифференциалы dq_j. Если бы мы рассматривали время как дополнительную координату q_{n+1}, а в качестве импульса, соответствующего этой координате, взяли гамильтониан с обратным знаком[1]), то контурный интеграл (85) можно было бы переписать так:

$$\oint\limits_{C}\sum_{j=1}^{n+1}p_j\,dq_j=\text{const}.$$

Итак, положим

$$t=q_{n+1},\qquad -H\,(q_1,\ \ldots,\ q_n;\quad p_1,\ \ldots,\ p_n;\ q_{n+1})=p_{n+1}$$

и разрешим второе из этих равенств относительно какого-либо импульса, например p_1:

$$p_1=-K\,(q_1,\ \ldots,\ q_{n+1};\ p_2,\ \ldots,\ p_{n+1}).$$

---

[1]) Для консервативных систем, когда гамильтониан совпадает с полной энергией, это означало бы, что в качестве «импульса, соответствующего координате t», берется полная энергия с обратным знаком.

Тогда интегральный инвариант (85) может быть представлен в форме

$$\oint_C \left(\sum_{j=2}^{n+1} p_j \, dq_j - K \, dq_1 \right) = \text{const},$$

которая внешне совпадает с формой интегрального инварианта Пуанкаре — Картана (85), только здесь выбранная координата q_1 и время «поменялись местами». Роль гамильтониана в этом случае играет функция K. Таким образом, и в пределах классической механики можно устранить исключительность времени и записать уравнения движения так, что роль времени играет любая из координат. Это представление уравнения движения оказывается иногда удобным (например, для консервативных систем) и будет использовано в последнем параграфе этой главы.

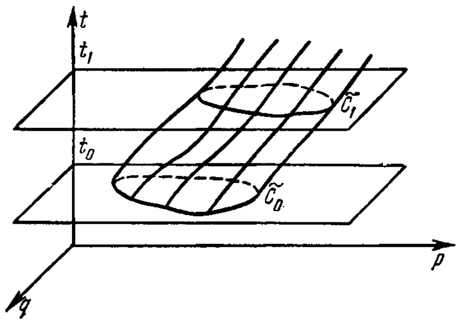

Рис. VII.8.

2. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Рассмотрим теперь интегральный инвариант Пуанкаре — Картана (85), взяв в качестве контуров, охватывающих трубку прямых путей, только «одновременные» контуры, т. е. контуры, которые получаются сечением этой трубки гиперплоскостями $t = \text{const}$ (рис. VII.8). Чтобы отличить «одновременные» контуры от контуров, произвольно проведенных на трубке прямых путей, будем обозначать их через $\tilde{C}$. Для всех точек такого контура t имеет одно и то же значение и, следовательно, для таких контуров дифференциал времени dt равен нулю. В силу этого интегральный инвариант Пуанкаре — Картана, рассматриваемый только на «одновременных» контурах, имеет вид

$$J_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum_{j=1}^{n} p_j \, dq_j = \text{const}. \tag{86}$$

Особенность интегрального инварианта, взятого в такой форме, состоит в том, что в подынтегральное выражение уже не входит гамильтониан, и следовательно, этот интегральный инвариант оказывается *одинаковым для всех динамических систем*, движущихся в произвольных потенциальных полях. Последнее утверждение имеет следующий смысл. Рассмотрим какой-либо контур, лежащий в плоскости $t = \text{const}$ (рис. VII.9), и «выпустим» из этого контура трубку прямых путей некоторой системы с гамильтонианом H_1. Введем теперь в рассмотрение какую-либо другую динамическую систему с гамильтонианом H_2 и «выпустим» из этого же контура трубку прямых путей этой системы. Разумеется, это будут разные, несовпадающие трубки прямых путей, хотя и «выпускаются» они из одного и того же контура. Выберем теперь произвольный момент времени $t = t_1$ и проведем плоскость $t_1 = \text{const}$, пересекающую эти две трубки прямых путей; в сечениях получатся два охватывающих эти трубки «одновременных» контура. Контурный интеграл (86), взятый по этим различным контурам, будет одинаков и будет в точности равен контурному интегралу, взятому по начальному контуру; это утверждение остается в силе для любой плоскости $t = \text{const}$.

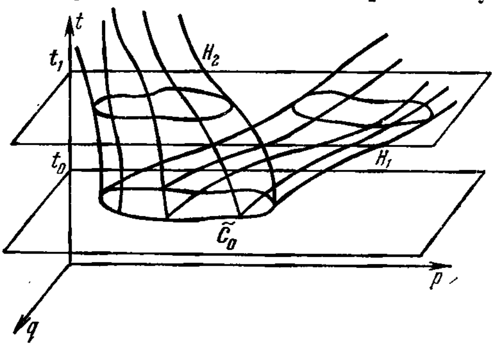

Рис. VII.9.

В этом смысле контурный интеграл (86) является универсальным, не зависящим от того, каково потенциальное поле, в котором движется система[1]), и поэтому называется *универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре*[2]).

3. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Для интегральных инвариантов Пуанкаре и Пуанкаре — Картана верно обратное утверждение.

Теорема. *Если контурный интеграл* (86) *не зависит от выбора контура $\tilde{C}$, охватывающего при $t = \text{const}$ трубку решений системы уравнений*

$$\dot{q}_j = Q_j(q, p, t), \quad \dot{p}_j = P_j(q, p, t) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{87}$$

[1]) Благодаря тому, что гамильтониан H вообще не входит в выражение для инварианта Пуанкаре, этот инвариант не зависит от H, какова бы ни была эта функция от q, p и t. В частности, она может не удовлетворять условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \right\|_{j, k=1}^{n} \neq 0,$$

гарантирующему возможность перехода от гамильтоновых переменных к лагранжевым.

[2]) Пуанкаре установил интегральный инвариант именно в такой универсальной форме, и лишь затем Картан, рассмотрев контуры, не расположенные в плоскости $t = \text{const}$, добавил член, содержащий гамильтониан. Поэтому интегральный инвариант (85) и носит название инварианта Пуанкаре — Картана.

то эта система гамильтонова, т. е. существует такая функция $H^*(q, p, t)$, *что*

$$Q_j = \frac{\partial H^*}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{88}$$

Если, кроме того, существует такая функция $F(q, p, t)$, *что на трубке решений системы* (87) *контурный интеграл*

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - F(q, p, t)\, dt\right)$$

имеет одно и то же значение при произвольном выборе контура C, *охватывающего трубку, то гамильтониан* H^* *системы* (87) *равен* $H^* = F(q, p, t) + f(t)$, *где* $f(t) = d\psi(t)/dt$, *а* $\psi(t)$ — *произвольная функция* t.

Доказательство. В силу условий теоремы $dJ_1/dt = 0$, т. е.

$$\oint_{\tilde{C}} \sum \left(\frac{dp_j}{dt}\,\delta q_j + p_j \frac{d\delta q_j}{dt}\right) = 0.$$

Взяв интеграл от $p_j\,(d\delta q_j/dt)$ по частям и опустив равные нулю (интеграл берется по замкнутому контуру!) проинтегрированные члены, получим

$$\oint_{\tilde{C}} \sum \left(\frac{dp_j}{dt}\,\delta q_j - \frac{dq_j}{dt}\,\delta p_j\right) = \oint_{\tilde{C}} \sum (P_j \delta q_j - Q_j \delta p_j) = 0.$$

В силу произвольности контура $\tilde{C}$ это равенство возможно только в том случае, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции, которую мы обозначим через $-H^*(q, p, t)$. Тогда

$$\sum (P_j \delta q_j - Q_j \delta p_j) = -\delta H^* = -\sum \left(\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\,\delta q_j + \frac{\partial H^*}{\partial p_j}\,\delta p_j\right),$$

или

$$Q_j = \frac{\partial H^*}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Первое утверждение теоремы доказано — система (87) гамильтонова. Но тогда для нее имеет место интегральный инвариант Пуанкаре — Картана

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - H^*\, dt\right) = \text{const}. \tag{89}$$

Пусть теперь для уравнений (87) выполнено второе условие теоремы, т. е. при произвольном выборе контура C, охватывающего трубку ее решений, имеет место равенство

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - F\, dt\right) = \text{const}.$$

Последние два равенства верны для любых контуров C, охватывающих трубку решений системы (87), в частности для контуров $\tilde{C}$, лежащих в плоскости $t=\text{const}$; поэтому

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - H^*\, dt\right) = \oint_{\tilde{C}} \sum p_j\, dq_j,$$

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - F\, dt\right) = \oint_{\tilde{C}} \sum p_j\, dq_j.$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$\oint_C (-F + H^*)\, dt = 0.$$

Это равенство возможно только тогда, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом некоторой функции

$$(H^* - F)\, dt = d\psi(q,\ p,\ t) = \sum \frac{\partial\psi}{\partial q_j} dq_j + \sum \frac{\partial\psi}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial\psi}{\partial t} dt.$$

Из этого равенства следует, что

$$\partial\psi/\partial q_j = 0, \quad \partial\psi/\partial p_j = 0, \qquad j = 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. что функция ψ не зависит от q и p, а зависит только от t, и что

$$H^* = F + f(t), \quad f(t) = d\psi(t)/dt.$$

Теорема доказана полностью.

В силу этой теоремы интегральный инвариант Пуанкаре — Картана (так же, как и принцип Гамильтона) может быть положен в основу механики. Действительно, если бы мы в качестве исходного постулата приняли существование интегрального инварианта Пуанкаре — Картана, то отсюда сразу следовало бы, что движение описывается уравнениями Гамильтона, а при условии

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial p_j\, \partial p_k} \right\|_{j,k=1}^{n} \neq 0$$

— и уравнениями Лагранжа.

4. Инвариантность фазового объема. Теорема Лиувилля. Выберем в фазовом пространстве q, p произвольную замкнутую область S_0 и рассмотрим какую-либо точку A этой области. Выбор точки фазового пространства предопределяет значения всех обобщенных координат и импульсов, и поэтому можно предположить, что начальные данные системы в некоторый момент времени t_0 задаются точкой A. Применим это рассуждение ко всем точкам A_i области S_0, т. е. будем считать все точки этой области «начальными» в момент времени t_0.

Проведем из каждой точки A_i области S_0 фазовую траекторию и отметим на каждой из этих траекторий точку B_i, соответствующую некоторому фиксированному моменту времени $t = t_0 + \tau$. Точки B_i образуют в фазовом пространстве новую область S_τ (рис. VII.10).

Таким образом, исходя из заданной в момент t_0 области S_0 с объемом V_0, можно построить область S_τ с объемом V_τ для любого момента $t = t_0 + \tau$, и в этом смысле объем V_τ является функцией t. Возникает вопрос о том, какой вид имеет эта функция $V_\tau = V(t)$, т. е. как изменяется фазовый объем V во время движения системы. Ответ на этот вопрос дает

Теорема Лиувилля. *Фазовый объем V не зависит от t, т. е. является инвариантом движения.*

Далее мы докажем эту теорему, имеющую важное приложение в статистической физике в связи с исследованием некоторых свойств статистических ансамблей.

Статистическим ансамблем называется множество одинаковых динамических систем, т. е. систем, описываемых одинаковыми уравнениями движения и отличающихся одна от другой лишь благодаря случайному «разбросу» начальных данных.

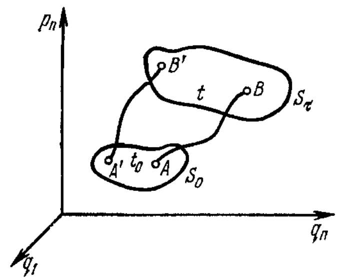

Рис. VII.10.

Рассмотрим теперь некоторый статистический ансамбль. Поскольку он состоит из одинаковых систем, фазовое пространство будет одним и тем же для всех систем ансамбля. В каждый момент времени каждая система ансамбля определяет некоторую точку этого фазового пространства, а все системы, принадлежащие статистическому ансамблю, — множество точек, т. е. некоторую область. В различные моменты времени состояния всех систем ансамбля определяют различные области, и в этом смысле область, характеризующая статистический ансамбль, перемещается в фазовом пространстве во время движения систем, образующих ансамбль.

Выберем в фазовом пространстве элементарную область ΔS и обозначим через Δr число систем рассматриваемого ансамбля, которые в данный момент определяют точки, расположенные в ΔS. Если ΔS мало, то отношение

$$\rho = \Delta r / \Delta V,$$

где ΔV — объем ΔS, является, вообще говоря, функцией фазовых координат q, p и времени t. При надлежащем нормировании ρ характеризует долю систем ансамбля, которые в момент t представляются точками области ΔS. Это отношение ρ для достаточно малых ΔV называется *плотностью статистического ансамбля*.

Если теперь выбрать в момент t_0 малую область ΔS_0, зафиксировать системы ансамбля, которые при $t=t_0$ представляются точками области ΔS_0, и далее вести наблюдение за ними (т. е. считать, что Δr неизменно) и учесть, что в силу теоремы Лиувилля объем ΔV также не меняется во время движения, то отсюда сразу следует, что отношение ρ не меняется во времени. Следовательно, *плотность статистического ансамбля не меняется во время его движения,* т. е.

$$\rho = \mathrm{const}.$$

Это утверждение представляет собой иную формулировку теоремы Лиувилля об инвариантности фазового объема.

В связи с тем, что плотность статистического ансамбля зависит только от фазовых координат и времени и не зависит от производных фазовых координат, утверждение $\rho=\mathrm{const}$ определяет первый интеграл уравнений движения.

Приступим теперь к доказательству теоремы Лиувилля. Эта теорема сразу следует из свойства любых решений гамильтоновой системы, которое устанавливает следующая

Лемма. *Пусть*

$$q_j=\varphi_j(t;\ t_0,\ q^0,\ p^0),\quad p_j=\psi_j(t;\ t_0,\ q^0,\ p^0)\qquad (j=1,\ \ldots,\ n)$$

— решения гамильтоновой системы, при заданных t_0 и t определяющие преобразование q^0, p^0 в q, p. Тогда якобиан $J(t_0,\ t)$ этого преобразования равен единице при любом t.

Доказательство. Произвольно выберем начальные данные t_0, q^0 и p^0. Тогда указанное преобразование при $t=t_0$ определяет

$$q_j=\varphi_j(t_0;\ t_0,\ q^0,\ p^0)\equiv q_j^0,\quad p_j=\psi_j(t_0;\ t_0,\ q^0,\ p^0)\equiv p_j^0$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n),$$

т. е. является тождественным преобразованием. Поэтому при $t=t_0$ якобиан J является определителем единичной матрицы E,

$$J=\det E=1,$$

и утверждение леммы тривиально.

Определитель J имеет вид

$$J=\begin{vmatrix} \partial\varphi_1/\partial q_1^0 & \ldots & \partial\varphi_1/\partial p_n^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial\varphi_n/\partial q_1^0 & \ldots & \partial\varphi_n/\partial p_n^0 \\ \partial\psi_1/\partial q_1^0 & \ldots & \partial\psi_1/\partial p_n^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial\psi_n/\partial q_1^0 & \ldots & \partial\psi_n/\partial p_n^0 \end{vmatrix}.$$

Подсчитаем теперь, чему равна производная dJ/dt [1]) при $t=t_0$. Вспоминая, что производная определителя равна сумме определителей, каждый из которых получается дифференцированием одной из строк, имеем

$$\frac{dJ}{dt}=\sum_{k=1}^{2n} J_k,$$

где

$$J_k=\begin{vmatrix} & & (*) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial q_1^0} \; \cdots & \frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial q_n^0} & & \frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial p_1^0} \; \cdots & \frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial p_n^0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & (*) & & \end{vmatrix} \quad k\text{-я строка.}$$

Здесь определитель J_k выписан для $k\leqslant n$, а символ (*) означает, что в соответствующей части определителя J_k стоят те же элементы, что и в исходном определителе J.

Учитывая, что $J=\det E$ при $t=t_0$, имеем

$$\begin{array}{cc} & \qquad\qquad k\text{-й столбец} \\ [J_k]_{t=t_0}= & \begin{vmatrix} \begin{matrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&&\ldots&1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \blacktriangle\;\cdots\;\blacktriangle & \left(\frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial q_k^0}\right)_{t=t_0} & \blacktriangle\;\cdots\;\blacktriangle \\ 0 & 0 & \begin{matrix}1&0&\ldots&0\\0&1&\ldots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\0&&\ldots&1\end{matrix} \end{vmatrix} \quad k\text{-я строка,} \end{array}$$

где символ $\blacktriangle$ заменяет в k-й строке элементы, значения которых не играют роли в дальнейших рассуждениях. Раскрывая этот определитель по элементам k-го столбца, в случае $1\leqslant k\leqslant n$ получаем

$$[J_k]_{t=t_0}=\left(\frac{\partial\dot\varphi_k}{\partial q_k^0}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\partial\dot q_k}{\partial q_k^0}\right)_{t=t_0}.$$

В случае $n<k\leqslant 2n$ аналогично имеем

$$[J_k]_{t=t_0}=\left(\frac{\partial\dot\psi_k}{\partial p_k^0}\right)_{t=t_0}=\left(\frac{\partial\dot p_k}{\partial p_k^0}\right)_{t=t_0},$$

[1]) Мы подсчитываем полную (а не частную) производную $dJ(t_0, t)/dt$, поскольку t_0 рассматривается как параметр.

поэтому

$$\left[\frac{dJ}{dt}\right]_{t=t_0}=\sum_{k=1}^{2n}[J_k]_{t=t_0}=\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\dot q_j}{\partial q_j^0}\right)_{t=t_0}+\left(\frac{\partial\dot p_j}{\partial p_j^0}\right)_{t=t_0}\right].$$

Заменяя в этом равенстве $\dot q_j$ и $\dot p_j$ их выражениями из канонических уравнений Гамильтона, получаем

$$\left[\frac{dJ(t_0,\ t)}{dt}\right]_{t=t_0}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_j^0}\frac{\partial H(q,\ p,\ t)}{\partial p_j}-\frac{\partial}{\partial p_j^0}\frac{\partial H(q,\ p,\ t)}{\partial q_j}\right)_{t=t_0}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 H(q^0,\ p^0,\ t_0)}{\partial q_j^0\partial p_j^0}-\frac{\partial^2 H(q^0,\ p^0,\ t_0)}{\partial p_j^0\partial q_j^0}\right)\equiv 0.$$

Таким образом, в момент $t=t_0$ мы имеем $J(t_0,\ t_0)=1$ и $[dJ(t_0,\ t)/dt]_{t=t_0}=0$. Заметим, что t_0 было выбрано произвольно и в качестве начальной может быть взята любая точка $t=t_1$ фазовой траектории. В силу этого $[dJ(t_1,\ t)/dt]_{t=t_1}=0$ для любого $t=t_1$. Пусть теперь $t_0<t_1<t$. Для того чтобы по известным в момент t_0 q_0 и p_0 определить q и p в момент t, можно исходные формулы преобразования использовать дважды: сначала по q_0, p_0 и t_0 найти q_1, p_1 и t_1, а затем принять q_1, p_1 и t_1 за начальные и определить q, p и t. При последовательном выполнении преобразований их якобианы перемножаются, так что $J(t_0,\ t)=J(t_0,\ t_1)\,J(t_1,\ t)$; поэтому

$$\left(\frac{dJ(t_0,\ t)}{dt}\right)_{t=t_1}=J(t_0,\ t_1)\left(\frac{dJ(t_1,\ t)}{dt}\right)_{t=t_1}.$$

Но выше было показано, что $dJ(t_1,\ t)/dt=0$ при любом $t=t_1$. Следовательно, и $(dJ(t_0,\ t)/dt)_{t=t_1}=0$. Таким образом, показано, что $J_{t=t_0}=1$ и $dJ/dt=0$ при любом $t>t_0$. Следовательно, $J=1$ при всех t. Лемма доказана.

Доказательство теоремы Лиувилля. Выберем в фазовом пространстве q, p замкнутую область S_0, соответствующую $t=t_0$ (рис. VII.10). Фазовое пространство имеет $2n$ измерений, и поэтому объем V_0 области S_0 выражается $2n$-кратным интегралом

$$V_0=\overbrace{\int\ldots\int}^{2n}_{S_0}dq_1^0\ldots dq_n^0 dp_1^0\ldots dp_n^0.$$

Воспользовавшись формулой преобразования кратного интеграла при преобразовании координат, определим фазовый объем V_τ в момент $t=t_0+\tau$:

$$V_\tau=\overbrace{\int\ldots\int}^{2n}_{S_0}|J|\,dq_1^0\ldots dq_n^0\,dp_1^0\ldots dp_n^0.$$

Но в силу доказанной леммы $J \equiv 1$, поэтому

$$V_\tau = V_0$$

при любом t. Теорема Лиувилля доказана.

5. Классификация интегральных инвариантов. Теорема Ли Хуачжуна. Мы рассмотрели лишь три интегральных инварианта — инвариант Пуанкаре — Картана, универсальный инвариант Пуанкаре и инвариант «фазовый объем». В классической механике вводятся и иные интегральные инварианты, которые мы не будем рассматривать, а остановимся лишь на общей их классификации.

В тех случаях, когда интегральный инвариант относится к какому-либо замкнутому контуру, он называется *относительным*. Интегральные инварианты Пуанкаре — Картана и Пуанкаре являются относительными, а инвариант «фазовый объем» таковым не является.

Инварианты, не содержащие гамильтониана и, следовательно, сохраняющиеся для всех динамических систем, движущихся в потенциальных полях, называются *универсальными*. Инвариант Пуанкаре и инвариант «фазовый объем» — универсальные, а инвариант Пуанкаре — Картана не относится к универсальным.

Порядок инварианта определяется размерностью множества, по которому производится интегрирование. Инвариант Пуанкаре — Картана и универсальный инвариант Пуанкаре являются инвариантами первого порядка, так как интегрирование в этих инвариантах производится по одномерному множеству (по контуру). Инвариант «фазовый объем» является инвариантом $2n$-го порядка, так как интегрирование производится по $2n$-мерной области — фазовому объему.

Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре имеет вид

$$J_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum p_j \delta q_j.$$

Универсальный относительный интегральный инвариант первого порядка в общем виде можно было бы записать так:

$$\tilde{J}_1 = \oint_{\tilde{C}} \sum [A_j(q, p, t)\,\delta q_j + B_j(q, p, t)\,\delta p_j]. \qquad (90)$$

Естественно возникает вопрос: существуют ли универсальные относительные инварианты первого порядка $\tilde{J}_1$, отличные от инварианта Пуанкаре J_1? Ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Ли Хуачжуном.

Теорема. *Любой универсальный относительный инвариант первого порядка $\tilde{J}_1$ может отличаться от инварианта Пуанкаре* *лишь постоянным множителем, т. е. для любого J_1 существует константа c такая, что*

$$\tilde{J}_1 = cJ_1.$$

Доказательство. Доказательство теоремы Ли Хуачжуна сводится к доказательству следующего утверждения: из того факта, что $\tilde{J}_1$ — относительный универсальный интегральный инвариант, следует, что

$$\sum [(A_j - cp_j)\,\delta q_j + B_j \delta p_j] = \delta\Phi, \tag{91}$$

где $c = \text{const}$, т. е. сумма, стоящая в левой части равенства (91), является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(q, p, t)$. Иначе говоря, это утверждение означает, что при любых j и k выполняются равенства

1° $$\frac{\partial A_j}{\partial q_k} = \frac{\partial A_k}{\partial q_j},$$

2° $$\frac{\partial B_j}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial p_j},$$

3° $$\frac{\partial (A_j - cp_j)}{\partial p_k} = \frac{\partial B_k}{\partial q_j}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial A_j}{\partial p_k} = c\delta_{jk} + \frac{\partial B_k}{\partial q_i},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Действительно, если это утверждение справедливо, то, представляя (91) в виде

$$\sum [A_j\,\delta q_j + B_j\,\delta p_j] = c \sum p_j\,\delta q_j + \delta\Phi$$

и интегрируя это равенство по любому замкнутому контуру $\tilde{C}$, немедленно приходим к утверждению теоремы Ли Хуачжуна:

$$\oint_{\tilde{C}} \sum [A_j\,\delta q_j + B_j\,\delta p_j] = c \oint_{\tilde{C}} \sum p_j\,\delta q_j.$$

Таким образом, наша задача сводится к доказательству равенств 1° — 3°.

Доказательство равенств 1° и 2°.

Если гамильтониан $H(q, p, t)$ и начальный контур

$$q = q_0(\alpha), \quad p = p_0(\alpha), \quad t = t_0(\alpha)$$

выбраны произвольно, то решения уравнений Гамильтона определяют трубку прямых путей

$$q = q(q_0(\alpha),\ p_0(\alpha),\ t_0(\alpha),\ t), \quad p = p(q_0(\alpha),\ p_0(\alpha),\ t_0(\alpha),\ t) \tag{92}$$

и каждое значение $t=\tilde{t}$ выделяет контур, охватывающий эту трубку. Если выражения (92) подставить в (90), то из того факта, что $\tilde{J}_1$ — инвариант, сразу следует, что

$$\frac{d\tilde{J}_1}{dt}=\oint_{\tilde{C}}\sum\left[\frac{dA_j}{dt}\delta q_j+\frac{dB_j}{dt}\delta p_j+A_j\frac{d\delta q_j}{dt}+B_j\frac{d\delta p_j}{dt}\right]=0.$$

Меняя порядок выполнения операций d/dt и δ и интегрируя два последних слагаемых по частям[1]), получаем

$$\frac{d\tilde{J}_1}{dt}=\oint_{\tilde{C}}\sum\left[\frac{dA_j}{dt}\delta q_j+\frac{dB_j}{dt}\delta p_j-\frac{dq_j}{dt}\delta A_j-\frac{dp_j}{dt}\delta B_j\right]=0, \tag{93}$$

где

$$\begin{aligned}\frac{dA_j}{dt}&=\frac{\partial A_j}{\partial t}+\sum_k\frac{\partial A_j}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_k\frac{\partial A_j}{\partial p_k}\dot{p}_k,\\ \frac{dB_j}{dt}&=\frac{\partial B_j}{\partial t}+\sum_k\frac{\partial B_j}{\partial q_k}\dot{q}_k+\sum_k\frac{\partial B_j}{\partial p_k}\dot{p}_k,\end{aligned} \tag{94}$$

$$\begin{aligned}\delta A_j&=\sum_k\frac{\partial A_j}{\partial q_k}\delta q_k+\sum_k\frac{\partial A_j}{\partial p_k}\delta p_k,\\ \delta B_j&=\sum_k\frac{\partial B_j}{\partial q_k}\delta q_k+\sum_k\frac{\partial B_j}{\partial p_k}\delta p_k.\end{aligned} \tag{95}$$

Подставим эти выражения в равенство (93) и изменим порядок суммирования; это дает

$$\oint_{\tilde{C}}\sum_j\left(\frac{dA_j}{dt}\delta q_j+\frac{dB_j}{dt}\delta p_j\right)-\oint_{\tilde{C}}\sum_k\left[\delta q_k\sum_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial B_j}{\partial q_k}\frac{dp_j}{dt}\right)+\right.$$
$$\left.+\delta p_k\sum_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial p_k}\frac{dq_j}{dt}+\frac{\partial B_j}{\partial p_k}\frac{dp_j}{dt}\right)\right]=0.$$

Заменив в первом контурном интеграле индекс j на k и сгруппировав члены, содержащие множителями δq_k и δp_k, можно

[1]) Интеграл берется по замкнутому контуру, и поэтому при интегрировании по частям проинтегрированная часть обращается в нуль.

записать это равенство так:

$$\oint_{\tilde{C}} \left\{ \sum_k \delta q_k \left[\frac{dA_k}{dt} - \sum_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial q_k} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial B_j}{\partial q_k} \frac{dp_j}{dt} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \sum_k \delta p_k \left[\frac{dB_k}{dt} - \sum_j \left(\frac{\partial A_j}{\partial p_k} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial B_j}{\partial p_k} \frac{dp_j}{dt} \right) \right] \right\} = 0.$$

Подставим сюда выражения (94) для dA_k/dt и dB_k/dt (предварительно поменяв местами индексы k и j):

$$\oint_{\tilde{C}} \left\{ \sum_k \delta q_k \left[\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_j \frac{dq_j}{dt} \left(\frac{\partial A_k}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_k} \right) + \sum_j \frac{dp_j}{dt} \left(\frac{\partial A_k}{\partial p_j} - \frac{\partial B_j}{\partial q_k} \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \sum_k \delta p_k \left[\frac{\partial B_k}{\partial t} + \sum_j \frac{dq_j}{dt} \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial p_k} \right) + \sum_j \frac{dp_j}{dt} \left(\frac{\partial B_k}{\partial p_j} - \frac{\partial B_j}{\partial p_k} \right) \right] \right\} = 0. \quad (96)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} Y_{kj} &= \frac{\partial A_k}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial q_k}, \quad & T_{kj} &= \frac{\partial B_k}{\partial q_j} - \frac{\partial A_j}{\partial p_k}, \\ Z_{kj} &= \frac{\partial B_k}{\partial p_j} - \frac{\partial B_j}{\partial p_k}, \quad & R_{kj} &= -T_{jk}; \end{aligned} \quad (97)$$

в них равенство (96) принимает вид

$$\oint_{\tilde{C}} \sum_k (\gamma_k \delta q_k + \rho_k \delta p_k) = 0, \quad (98)$$

где

$$\gamma_k = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{dq_j}{dt} Y_{kj} + \frac{dp_j}{dt} R_{kj} \right) \quad (99)$$

и

$$\rho_k = \frac{\partial B_k}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{dq_j}{dt} T_{kj} + \frac{dp_j}{dt} Z_{kj} \right). \quad (100)$$

Равенство (98) должно выполняться на любом контуре $\tilde{C}$ (т. е. при любом t). Это возможно лишь в том случае, когда подынтегральное выражение является полным дифференциалом, т. е. когда при любых k и ν

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial q_k}, \quad (101)$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \rho_\nu}{\partial p_k}, \quad (102)$$

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial p_\nu} = \frac{\partial \rho_\nu}{\partial q_k}. \quad (103)$$

Исследуем подробнее равенства (101). Подставляя в них выражения (99) для γ_k и учитывая, во-первых, что

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu}\frac{\partial A_k}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial A_\nu}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_k}{\partial q_\nu}-\frac{\partial A_\nu}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial}{\partial t}Y_{k\nu},$$

а, во-вторых, что q и p удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}Y_{k\nu}+\frac{\partial}{\partial q_\nu}\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}Y_{kj}-\frac{\partial H}{\partial q_j}R_{kj}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_j\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}Y_{\nu j}-\frac{\partial H}{\partial q_j}R_{\nu j}\right)=0 \qquad (104)$$

Заметим, что эти равенства имеют место при любом выборе функции H. Функции A и B (а следовательно, и функции Y и R) в силу универсальности интегрального инварианта (90) не зависят от H; можно поэтому установить общие свойства функций Y и R, выбирая функцию H каким-либо специальным образом. Воспользуемся этим обстоятельством и, задавая различные функции H, выясним условия, которым удовлетворяют функции Y и R.

1. Пусть $H=\mathrm{const}$; тогда равенство (104) принимает вид

$$\frac{\partial Y_{k\nu}}{\partial t}=0. \qquad (105)$$

2. Пусть $H=\sum_j \alpha_j q_j$; тогда с учетом (105) равенство (104) записывается так:

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu}\sum_j \alpha_j R_{kj}=\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_j \alpha_j R_{\nu j},$$

и поскольку α_j могут выбираться произвольно,

$$\frac{\partial R_{kj}}{\partial q_\nu}=\frac{\partial R_{\nu j}}{\partial q_k}. \qquad (106)$$

3. Пусть H не зависит от p (так что $\partial H/\partial p_j=0$ $(j=1,\ldots,n)$) и зависит от q так, что

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q_l\,\partial q_m}=\alpha_{lm}=\mathrm{const}.$$

В этом случае из (104) с учетом (105) и (106) следует, что

$$\sum_j \alpha_{\nu j}R_{kj}=\sum_j \alpha_{kj}R_{\nu j}.$$

Числа α_{lm} могут быть выбраны произвольно, но так, что $\alpha_{ml}=\alpha_{lm}$. Полагая $\alpha_{\nu j}=\alpha_{j\nu}=0$, получаем

$$R_{\nu j}=0 \quad \text{при} \quad \nu\neq j; \qquad (107)$$

полагая же $\alpha_{kk}=\alpha_{\nu\nu}\neq 0$, находим, что
$$R_{kk}=R_{\nu\nu}. \tag{108}$$
Теперь равенство (104) сводится к виду
$$\frac{\partial}{\partial q_\nu}\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} Y_{kj}=\frac{\partial}{\partial q_k}\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j} Y_{\nu j}. \tag{109}$$

4. Пусть $H=\sum_j \gamma_j p_j$; тогда из равенства (109), к которому свелось равенство (104), следует, что
$$\frac{\partial Y_{kj}}{\partial q_\nu}=\frac{\partial Y_{\nu j}}{\partial q_k}. \tag{110}$$

5. Пусть H не зависит от q и зависит только от p и притом так, что
$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_l\,\partial p_m}=\beta_{lm};$$
тогда, рассуждая так же, как в случае 3, находим, что
$$Y_{kj}=0 \quad \text{при} \quad k\neq j.$$
Вспоминая, что Y_{kj} является разностью (см. формулу (97))
$$Y_{kj}=\frac{\partial A_k}{\partial q_j}-\frac{\partial A_j}{\partial q_k},$$
устанавливаем, что при любых k и j
$$\frac{\partial A_k}{\partial q_j}=\frac{\partial A_j}{\partial q_k}.$$
Очевидно также, что $Y_{kk}=Y_{\nu\nu}=0$. Итак,
$$Y_{kk}=Y_{jj}=0, \quad Y_{kj}=0 \text{ при } k\neq j. \tag{111}$$

В связи с тем, что A и B входят в исходные соотношения (97) симметрично, совершенно аналогичные рассуждения приводят к равенствам
$$Z_{kk}=Z_{jj}=0, \quad Z_{kj}=0 \text{ при } k\neq j, \tag{112}$$
т. е. при любых k и j
$$\frac{\partial B_k}{\partial p_j}=\frac{\partial B_j}{\partial p_k}.$$

Равенства 1° и 2° доказаны.

Доказательство равенства 3°. Воспользуемся теперь равенством (103). С учетом (107), (111) и (112) оно дает
$$\frac{\partial R_{kk}}{\partial t}-\frac{\partial R_{kk}}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_k}=-\frac{\partial R_{\nu\nu}}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_\nu}.$$

Учитывая, что $R_{\nu\nu} = R_{kk}$, получаем равенство

$$\frac{\partial R_{kk}}{\partial t} - \frac{\partial R_{kk}}{\partial p_\nu}\frac{\partial H}{\partial q_k} + \frac{\partial R_{kk}}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} = 0,$$

верное при любом H.

Положив $H = \mathrm{const}$, имеем $\partial R_{kk}/\partial t = 0$; приняв $H = H(q)$ и $\partial H/\partial q_j \neq 0$, получаем $\partial R_{kk}/\partial p_\nu = 0$; в случае же $H = H(p)$, $\partial H/\partial p_j \neq 0$ имеем $\partial R_{\nu\nu}/\partial q_k = 0$, поэтому окончательно

$$\frac{\partial R_{\nu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial R_{\nu\nu}}{\partial q_s} = \frac{\partial R_{\nu\nu}}{\partial p_s} = 0,$$

откуда следует, что

$$R_{\nu\nu} = c = \mathrm{const}.$$

Учитывая, что $R_{k\nu} = 0$ для $\nu \neq k$, получаем $R_{\nu k} = \delta_{\nu k} c_\nu$, где $\delta_{\nu k}$ — символ Кронекера, причем в силу (108) константа c_ν при любом ν имеет одно и то же значение c. Следовательно,

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial p_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_\nu} = c\delta_{\nu k},$$

и равенство 3° доказано. Таким образом, полностью доказана и теорема Ли Хуачжуна.

§ 8. Канонические преобразования

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

ковариантны по отношению к любым преобразованиям координат q, t (см. стр. 280). Это значит, что как бы ни были выбраны преобразования q и t, для новых координат q_j^*, t^* всегда может быть указан лагранжиан L^*, такой, что в новых координатах уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_j^*} - \frac{\partial L^*}{\partial q_j^*} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Естественно возникает вопрос: по отношению к какому классу преобразований q и p ковариантны уравнения Гамильтона? Класс преобразований q, p, по отношению к которым уравнения Гамильтона ковариантны, называется классом *канонических преобразований*. Разъясним это определение подробнее.

Рассмотрим преобразование

$$q_j^* = \varphi_j(q, p, t), \quad p_j^* = \psi_j(q, p, t) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{113}$$

которое переводит «старые» гамильтоновы переменные q и p в «новые» гамильтоновы переменные q^* и p^* (время при этом не преобразуется: $t^* \equiv t$). Предположим, что равенства (113) могут быть разрешены относительно q и p, т. е. что якобиан преобразования (113) $J \neq 0$ и поэтому существуют обратные преобразования

$$q = \tilde{\varphi}(q^*, p^*, t), \quad p = \tilde{\psi}(q^*, p^*, t). \tag{113'}$$

Рассмотрим, далее, произвольную систему канонических уравнений Гамильтона с некоторым фиксированным гамильтонианом H и применим к ней преобразование (113). Может случиться, что полученные уравнения окажутся уравнениями Гамильтона с некоторым гамильтонианом H^*. Но может случиться и так, что уравнения, полученные в результате преобразования, уже не будут иметь вид уравнений Гамильтона.

Преобразование (113) *называется каноническим, если оно переводит любую гамильтонову систему*

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

в новую гамильтонову систему

$$\frac{dq_j^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*}, \quad \frac{dp_j^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Разумеется, «новый» гамильтониан H^* как функция новых переменных q^*, p^* может отличаться от «старого» гамильтониана H как функции старых переменных q, p — именно поэтому речь идет о ковариантности, а не об инвариантности канонических уравнений по отношению к преобразованиям (113).

Канонические преобразования могут быть использованы для того, чтобы упростить систему уравнений Гамильтона, сделать ее более удобной для интегрирования. Далее канонические преобразования будут использованы для того, чтобы получить из уравнений Гамильтона иную форму уравнений движения — уравнение в частных производных Гамильтона — Якоби.

В связи с понятием канонического преобразования естественно возникают две задачи.

1°. Задано преобразование (113). Определить, является ли оно каноническим.

2°. Задано преобразование (113) и известно, что оно каноническое. Задана также гамильтонова система с гамильтонианом $H(q, p, t)$. Определить гамильтониан $H^*(q^*, p^*, t)$ преобразованной системы.

Первую задачу решает теорема, устанавливающая необходимые и достаточные условия каноничности преобразования.

Теорема. *Для того чтобы преобразование* (113) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовали такая функция* $F(q, p, t)$ *и такое число* c, *чтобы тождественно выпол-*

нялось равенство

$$\boxed{\sum \psi_j\,\delta\varphi_j - c\sum p_j\,\delta q_j = -\,\delta F(q,\ p,\ t).} \tag{114}$$

В формуле (114) δ — оператор дифференцирования функции от q, p, t при «замороженном» времени, т. е.

$$\delta\varphi_j = d\varphi_j - \frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\,dt, \quad \delta F = dF - \frac{\partial F}{\partial t}\,dt.$$

Для независимых переменных операции δ и d совпадают. Поэтому

$$\delta q_j = dq_j.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость условий теоремы. Пусть преобразование (113) каноническое. Тогда оно преобразует «старую» гамильтонову систему в «новую» гамильтонову систему. Для преобразованной, «новой» системы имеет место универсальный интегральный инвариант Пуанкаре

$$\oint\limits_{\tilde{C}^*} \sum p_j^*\,\delta q_j^* = \text{const}. \tag{115}$$

Используя преобразование (113), переведем равенство (115) в пространство q, p, t

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \sum \psi_j\,\delta\varphi_j = \text{const}. \tag{116}$$

При этом замкнутый контур $\tilde{C}^*$ переходит в замкнутый контур $\tilde{C}$ в этой же плоскости $t=\tilde{t}$.

Равенство (116) верно при любом $\tilde{t}$. Поэтому его левая часть является универсальным интегральным инвариантом первого порядка. По теореме Ли Хуачжуна такой инвариант может отличаться от инварианта Пуанкаре лишь на постоянный множитель c. Следовательно,

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \sum \psi_j\,\delta\varphi_j = c\oint\limits_{\tilde{C}} \sum p_j\,\delta q_j,$$

или

$$\oint\limits_{\tilde{C}} \left[\sum \psi_j\,\delta\varphi_j - c\sum p_j\,\delta q_j\right] = 0.$$

Это равенство верно при любом выборе $\tilde{t}$ и при любом выборе контура $\tilde{C}^*$, а значит, и $\tilde{C}$ в плоскости $t=\tilde{t}$. Поэтому оно выполняется лишь в том случае, когда подынтегральное выражение — полный дифференциал некоторой функции при $t=\tilde{t}$. Обозначим ее $-F$. Тогда

$$\sum \psi_j\delta\varphi_j - c\sum p_j\,\delta q_j = -\,\delta F.$$

Необходимость условий теоремы доказана.

Докажем достаточность этих условий. Пусть существуют число c и функция $F(q, p, t)$ такие, что выполнено тождество (114). Пусть далее задана гамильтонова система

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

с гамильтонианом H, и пусть преобразования (113) переводят эту систему уравнений Гамильтона в некоторую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{q}_j^* = f_j(q^*, p^*, t), \quad \dot{p}_j^* = g_j(q^*, p^*, t). \tag{117}$$

В плоскости $t = \tilde{t} = \text{const}$ пространства q, p, t выберем произвольный замкнутый контур $\tilde{C}$ и выпустим из него трубку прямых

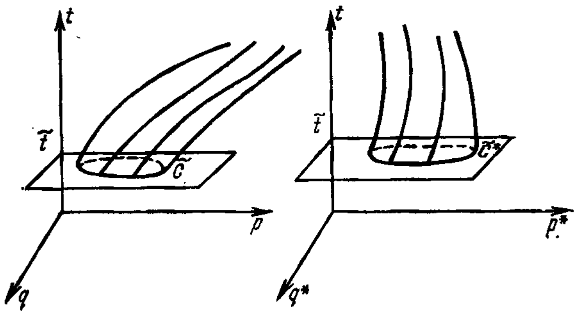

Рис. VII.11.

путей заданной гамильтоновой системы. Преобразование (113) переводит ее в трубку прямых путей системы (117), а контур $\tilde{C}$ — в некоторый замкнутый контур $\tilde{C}^*$, лежащий в той же плоскости $t = \tilde{t}$ (рис. VII.11).

Проинтегрируем теперь равенство (114) по контуру $\tilde{C}$:

$$\oint_{\tilde{C}} \left[\sum \psi_j \, \delta\varphi_j - c \sum p_j \, \delta q_j \right] = -\oint_{\tilde{C}} \delta F.$$

Правая часть этого равенства содержит интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала и, следовательно, равна нулю; поэтому

$$\oint_{\tilde{C}} \sum \psi_j \, \delta\varphi_j = c \oint_{\tilde{C}} \sum p_j \, \delta q_j.$$

Контурный интеграл, стоящий в правой части этого равенства, одинаков при любом контуре $\tilde{C}$ в любой плоскости $t = \tilde{t}$, так как исходная система гамильтонова и для нее имеет место интегральный инвариант Пуанкаре. Значит, не меняется при этом и интеграл

$$\oint_{\tilde{C}} \sum \psi_j \, \delta\varphi_j.$$

Производя в нем замену переменных с помощью заданного преобразования (113), убеждаемся, что и интеграл

$$\oint_{\tilde{C}^*} \sum p_j^* \, \delta q_j^*$$

не зависит от выбора контура $\tilde{C}^*$ в плоскостях $t = \tilde{t}$ и сохраняется на любых сечениях плоскостями $t = \tilde{t}$ трубки прямых путей уравнений (117). Следовательно, для уравнений (117) имеет место интегральный инвариант Пуанкаре. Поэтому в силу доказанной выше теоремы (см. стр. 298—299) система уравнений (117) является гамильтоновой, т. е. существует гамильтониан $H^*(q^*, p^*, t)$ такой, что в уравнениях (117)

$$f_j(q^*, p^*, t) = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*}, \quad g_j(q^*, p^*, t) = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Теорема доказана полностью.

По поводу доказанной теоремы сделаем следующее замечание. Теорема требует, чтобы выражение, стоящее в левой части тождества (114), было полным дифференциалом некоторой функции от q, p, t при «замороженном» времени $t = \tilde{t} = \text{const}$. Перепишем левую часть тождества (114) так:

$$\sum (\Phi_k \, \delta q_k + \Psi_k \, \delta p_k),$$

где

$$\Phi_k = \sum_j \psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} - c p_k, \quad \Psi_k = \sum_j \psi_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k}.$$

Условие того, что левая часть тождества (114) есть полный дифференциал (при $t = \tilde{t}$), имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial q_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_k} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} \quad (j, k = 1, \ldots, n).$$

В связи с этим условие того, что преобразование (113) каноническое, может быть сведено к системе равенств

$$\sum_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_s} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_s} \right) = 0, \quad \sum_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_s} \frac{\partial \psi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial p_s} \right) = 0,$$

$$\sum_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial q_s} \frac{\partial \psi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_j}{\partial q_s} \right) = \delta_{sk} c,$$

где $s, k=1, \ldots, n$, а δ_{sk} — символ Кронекера. Если ввести в рассмотрение скобки Лагранжа

$$[x, y]=\sum_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right),$$

где в качестве x и y могут быть рассмотрены любые переменные b и p, то выписанную выше систему равенств можно компактно записать так:

$$[q_s, q_k]=0, \quad [p_s, p_k]=0, \quad [q_s, p_k]=\delta_{sk}c.$$

Эти формулы позволяют эффективно установить, является ли заданное преобразование (113) каноническим; в том случае, когда преобразование оказывается каноническим, они позволяют вычислить величину c.

Приступим теперь к решению второй из сформулированных выше задач, т. е. задачи об определении гамильтониана H^* по заданному гамильтониану H.

Теорема. *Пусть преобразование* (113) *является каноническим, причем c и $F(q, p, t)$, при которых удовлетворяется тождество* (114), *известны. Тогда «новый» гамильтониан H^* определяется по «старому» гамильтониану H, если в функции*

$$H^*=cH+\frac{\partial F}{\partial t}+\sum\psi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial t} \tag{118}$$

выразить переменные q и p через q^* и p^* при помощи преобразований (113′), *обратных преобразованиям* (113).

Доказательство. Умножим равенство (118) на dt и вычтем результат из тождества (114)

$$\sum\psi_j\,\delta\varphi_j+\sum\psi_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\,dt-H^*\,dt=c\left[\sum p_j\,\delta q_j-H\,dt\right]-\frac{\partial F}{\partial t}\,dt-\delta F,$$

или учитывая, что $\delta q_j=dq_j$,

$$\sum\psi_j\,d\varphi_j-H^*\,dt=c\left(\sum p_j\,dq_j-H\,dt\right)-dF. \tag{119}$$

В пространстве q, p, t выберем произвольный замкнутый контур C и выпустим из него трубку прямых путей гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Пусть преобразования (113) переводят эту гамильтонову систему в некоторую «новую» систему гамильтоновых уравнений (по условию теоремы преобразование каноническое!), трубку прямых путей «старой» — в трубку прямых путей «новой» гамильтоновой системы, а замкнутый контур C — в замкнутый же контур C^*.

Проинтегрируем равенство (119) по контуру C. Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала dF равен нулю, получаем

$$\oint_C \left[\sum \psi_j\, d\varphi_j - H^*(\varphi,\ \psi,\ t)\, dt\right] = c \oint_C \left[\sum p_j\, dq_j - H\, dt\right].$$

Для системы с гамильтонианом H имеет место интегральный инвариант Пуанкаре — Картана. Поэтому интеграл в правой части выписанного равенства не зависит от выбора контура C на трубке прямых путей этой системы. Значит, не зависит от выбора этого контура и интеграл в левой части равенства

$$\oint_C \left[\sum \psi_j\, d\varphi_j - H^*(\varphi,\ \psi,\ t)\, dt\right] = \text{const}.$$

Произведем теперь в этом интеграле замену переменных с помощью заданного преобразования (113)

$$\oint_{C^*} \left[\sum p_j^*\, dq_j^* - H^*(q^*,\, p^*,\, t)\, dt\right] = \text{const}.$$

Это равенство устанавливает интегральный инвариант Пуанкаре — Картана для «новой» гамильтоновой системы, и в силу обратной теоремы теории интегральных инвариантов функция $H^*(q^*,\ p^*,\ t)$ является гамильтонианом этой системы. Теорема доказана.

Условимся теперь о следующей терминологии. Функцию F, входящую в формулы (114) и (119), будем называть *производящей функцией* (причины такого наименования будут разъяснены далее), а число c, входящее в эти формулы, — *валентностью преобразования*. Преобразование называется *унивалентным*, если условие (114) выполняется при $c = 1$.

Преобразование (113) называется *свободным*, если для первых n его уравнений

$$q_j^* = \varphi_j(q,\ p,\ t) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{120}$$

якобиан отличен от нуля:

$$\det \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right\| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{121}$$

При выполнении этого условия уравнения (120) можно разрешить относительно p:

$$p_j = \tilde{\varphi}_j(q,\ q^*,\ t) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{122}$$

и в случае свободного преобразования формулы (113) можно записать так:

$$p_j = \tilde{\varphi}_j(q, q^*, t), \quad p_j^* = \psi_j(q, p, t) = \psi_j(q, \tilde{\varphi}, t) = \tilde{\psi}_j(q, q^*, t) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{123}$$

В случае свободных канонических преобразований можно задаваться *произвольными* старыми и новыми обобщенными координатами q и q^* и определить по ним старые и новые импульсы p и p^*. Старые импульсы находятся из первой группы уравнений (123), а новые импульсы — из второй группы этих уравнений (при подстановке вместо p выражений, полученных ранее из первой группы уравнений).

В случае свободных преобразований производящая функция F, входящая в правую часть критерия каноничности (114), также может быть представлена как функция только обобщенных координат (старых и новых) и времени

$$F[q, \tilde{\varphi}(q, q^*, t), t] = S(q, q^*, t), \tag{124}$$

и формула (119), выражающая «новый» гамильтониан H^* через «старый» гамильтониан H, принимает вид

$$\left[\sum p_j^* \, dq_j^* - H^* \, dt\right] - c\left[\sum p_j \, dq_j - H \, dt\right] = -dS(q, q^*, t). \tag{125}$$

При переходе от формулы (119) к формуле (125) в первой квадратной скобке в левой части равенства ψ и φ заменены на p^* и q^* в соответствии с формулами (113).

Запишем теперь выражение для полного дифференциала, стоящего в правой части равенства (125), более подробно:

$$\left[\sum p_j^* \, dq_j^* - H^* \, dt\right] - c\left[\sum p_j \, dq_j - H \, dt\right] = -\sum \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j - \sum \frac{\partial S}{\partial q_j^*} dq_j^* - \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

Приравнивая члены, стоящие слева и справа в качестве множителей при дифференциалах одних и тех же переменных, можно записать равенства

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial q_j} = c p_j, \quad \frac{\partial S}{\partial q_j^*} = -p_j^* \quad (j = 1, \ldots, n)} \tag{126}$$

и, кроме того, равенство, связывающее старый и новый гамильтонианы:

$$\boxed{H^* = cH + \frac{\partial S}{\partial t}.} \tag{127}$$

Пусть теперь задана некоторая функция $S(q, q^*, t)$. Тогда в силу равенств (126) p_j^* и p_j будут функциями тех же аргументов; обозначим эти функции через $\tilde{\psi}_j$ и $\tilde{\varphi}_j$ соответственно:

$$p_j^* = -\frac{\partial S}{\partial q_j^*} = \tilde{\psi}_j(q, q^*, t), \quad p_j = \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial q_j} = \tilde{\varphi}_j(q, q^*, t) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{128}$$

Равенства (128) и (123) совпадают. Из этого следует, что выбор функции $S(q, q^*, t)$ однозначно определяет свободное преобразование (123), и равенство (127) позволяет по заданному старому гамильтониану H определить новый гамильтониан H^*. Однако определенный так гамильтониан H^* является функцией «смешанных переменных» q, p, q^*, t, ибо H зависит от q, p, t, а $\partial S/\partial t$ является функцией от q, q^*, t. Чтобы найти H^* как функцию только от q^*, p^* и t, надо выразить q и p через новые переменные q^* и p^*. Это можно сделать при помощи равенств (128), но только в том случае, когда первые n из этих равенств можно разрешить относительно q, т. е. когда

$$\det\left\| \frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial q_k} \right\| = \det(-1)^n \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial q_j^* \, \partial q_k} \right\| \neq 0. \tag{129}$$

Поэтому произвольно выбранная нами функция $S(q, q^*, t)$ должна удовлетворять условию (129).

Итак, произвольный выбор производящей функции S, удовлетворяющей условию (129), сразу позволяет получить как формулы для соответствующих свободных канонических преобразований, так и выражение для гамильтониана преобразованной системы через новые гамильтоновы переменные. В этом смысле выбор функции S и числа $c \neq 0$ задает свободное каноническое преобразование.

Наоборот, если задаются «старый» гамильтониан H и «новый» гамильтониан H^*, то равенство (127) служит для определения производящей функции S. Поэтому в случае свободных преобразований можно, задав гамильтониан непреобразованной системы и желаемый гамильтониан преобразованной системы, найти производящую функцию S и, зная ее, восстановить соответствующее каноническое преобразование.

Установленный выше критерий каноничности требует, чтобы левая часть выражения (114), содержащая параметр $c \neq 0$, при некотором значении этого параметра являлась бы полным дифференциалом. Иногда этот критерий используют в «упрощенной форме», полагая $c = 1$. Ясно, что в такой форме критерий не определяет уже необходимых и достаточных условий каноничности, а является лишь достаточным условием, и естественно возникает вопрос о том, сколь широко такое достаточное условие.

Чтобы выяснить это обстоятельство, рассмотрим два примера.

Пример 1. Рассмотрим гамильтонову систему с одной степенью свободы и однопараметрическое семейство линейных преобразований

$$q^* = 2q + \frac{1}{3}\alpha p, \quad p^* = q + \frac{2}{3}\alpha p,$$

где $\alpha \neq 0$ — параметр.

Преобразования эти невырожденные, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{3}\alpha \\ 1 & \frac{2}{3}\alpha \end{vmatrix} = \alpha \neq 0.$$

Импульсы p и p^* выражаются через q и q^* так:

$$p = -\frac{6}{\alpha} q + \frac{3}{\alpha} q^*, \quad p^* = -3q + 2q^*.$$

Из условия $\alpha \neq 0$ следует, что если преобразования этого семейства являются каноническими, то они будут также и свободными.

Поэтому чтобы установить каноничность преобразований, воспользуемся критерием каноничности в форме

$$\frac{\partial S}{\partial q} = cp, \quad \frac{\partial S}{\partial q^*} = -p^*.$$

Все преобразования рассматриваемого семейства будут свободными каноническими преобразованиями, если при любом $\alpha \neq 0$ можно подобрать $c \neq 0$ и функцию $S(q, q^*, t)$ так, что выполняются равенства

$$\frac{\partial S}{\partial q} = cp = c\left(-\frac{6}{\alpha} q + \frac{3}{\alpha} q^*\right), \quad \frac{\partial S}{\partial q^*} = -p^* = 3q - 2q^*.$$

Тогда из очевидного равенства

$$\frac{\partial}{\partial q^*}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial S}{\partial q^*}\right)$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial q^*}(cp) = \frac{\partial}{\partial q}(-p^*),$$

или

$$c\frac{\partial}{\partial q^*}\left(-\frac{6}{\alpha} q + \frac{3}{\alpha} q^*\right) = \frac{\partial}{\partial q}(3q - 2q^*),$$

т. е.

$$c = \alpha,$$

Учитывая это, из соотношений

$$\frac{\partial S}{\partial q} = cp = c\left(-\frac{6}{\alpha}q + \frac{3}{\alpha}q^*\right) = -6q + 3q^*,$$

$$\frac{\partial S}{\partial q^*} = -p^* = 3q - 2q^*$$

находим и производящую функцию

$$S = -3q^2 + 3qq^* - q^{*2} + \Psi(t).$$

Новый гамильтониан H^* вычисляется так:

$$H^* = \alpha H + \frac{\partial \Psi(t)}{\partial t}.$$

Таким образом, установлено, что все преобразования рассматриваемого семейства при $\alpha \neq 0$ являются свободными каноническими преобразованиями валентности $c = \alpha$. Если бы в этом простейшем примере мы попытались использовать «упрощенный» критерий с $c = 1$, то установили бы каноничность только преобразования при $\alpha = 1$ и не могли бы установить каноничность всех остальных преобразований этого семейства.

Пример 2. Рассмотрим для произвольной гамильтоновой системы с n степенями свободы тривиальное «переобозначение фазовых координат»

$$q_j^* = p_j, \quad p_j^* = q_j \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Непосредственно видно, что любая гамильтонова система с гамильтонианом $H(q, p, t)$ в силу этого преобразования переходит в гамильтонову систему с гамильтонианом $H^* = -H(p^*, q^*, t)$ и, следовательно, это преобразование каноническое. Из того факта, что H и H^* отличаются только на постоянный множитель, следует (см. формулу (127)), что S не зависит от t и $\partial S/\partial t = 0$. Но тогда

$$H^* = cH$$

и $c = -1$, поскольку $H^* = -H$.

Таким образом, в этом тривиальном примере каноничность преобразования вообще не следует из упрощенного критерия каноничности с $c = 1$.

Оба разобранных примера свидетельствуют о том, что учет $c \neq 1$ является не украшением теории, а отражает само существо дела.

В заключение этого параграфа заметим, что последовательное выполнение нескольких канонических преобразований также представляет собой каноническое преобразование с валентностью c, равной произведению валентностей выполненных преобразований, так что *множество канонических преобразований образует группу*. Унивалентные преобразования составляют ее подгруппу.

Заметим также, что преобразование «растяжения координат»

$$\hat{q} = q/c, \quad \hat{p} = p$$

представляет собой каноническое преобразование валентности $1/c$[1]). Поэтому, если задано преобразование

$$\tilde{q} = f(q^*, p, t), \quad \tilde{p} = \varphi(q^*, p, t)$$

и известно, что оно является каноническим и имеет валентность c, то можно выписать преобразование

$$\tilde{q} = f(q^*/c, p, t), \quad \tilde{p} = \varphi(q^*/c, p, t),$$

валентность которого равна произведению $(1/c)c = 1$, т. е. унивалентное преобразование. Поэтому каждому неунивалентному преобразованию можно поставить в соответствие унивалентное, но для этого надо знать валентность c исходного преобразования.

§ 9. Уравнение Гамильтона — Якоби

В предыдущем параграфе было установлено, каким образом можно заданную систему с некоторым гамильтонианом H преобразовать в другую систему с наперед заданным гамильтонианом H^* — для этого надо «старый» и «новый» гамильтонианы подставить в уравнение (127), найти из него производящую функцию S и при помощи этой функции определить (так, как это было указано в предыдущем параграфе) преобразование, переводящее систему со «старым» гамильтонианом в систему, имеющую «новый» гамильтониан.

Попробуем воспользоваться теперь этой возможностью, чтобы выработать единый метод, позволяющий заменить систему с некоторым гамильтонианом системой с наиболее простым возможным гамильтонианом, а именно с гамильтонианом, тождественно равным нулю. Если бы это оказалось возможным, то в «новых» переменных движение описывалось бы гамильтоновой системой

$$\frac{dq_j^*}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial p_j^*} = 0, \quad \frac{dp_j^*}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_j^*} = 0,$$

т. е. движение в «новых» переменных состояло бы в сохранении неизменными всех обобщенных координат и обобщенных импульсов

$$q_j^* = \alpha_j = \text{const}, \quad p_j^* = \beta_j = \text{const} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{130}$$

Зная это «движение в новых переменных», можно было бы при помощи формул (128) найти движение в исходных переменных

[1]) Это легко проверить при помощи критерия каноничности (см. выше).

и, казалось бы, таким образом обойти трудности, связанные с интегрированием канонических дифференциальных уравнений.

Попробуем, однако, реализовать эту программу. При $H^*=0$ уравнение (127) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+cH=0. \tag{131}$$

В этом уравнении «старый» гамильтониан является функцией «старых» гамильтоновых переменных q, p и t. Однако, используя первую группу равенств (126), можно все p, входящие в функцию H, заменить через $\partial S/\partial q$. Тогда уравнение (131) примет вид

$$\frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q,\ \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial q},\ t\right)=0.$$

Положив $S=S^*c$, получим уравнение

$$\boxed{\frac{\partial S^*}{\partial t}+H\left(q,\ \frac{\partial S^*}{\partial q},\ t\right)=0.} \tag{132}$$

Вспомним теперь, что искомая производящая функция S^* является функцией q, q^*, t. Но если бы функция, удовлетворяющая уравнению (132), была бы найдена, то, как уже говорилось выше, q^* и p^* были бы константами. Поэтому интересующая нас функция S^* должна зависеть помимо n констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (они входят вместо q^*) лишь от «старых» координат q и от t. Теперь видно, что уравнение (132) является уравнением в частных производных относительно искомой функции S^*. Это уравнение в частных производных называют *уравнением Гамильтона — Якоби*.

Для решения интересующей нас задачи нет нужды находить общее решение уравнения Гамильтона — Якоби. В силу сказанного выше нас интересует любая функция от q и t, удовлетворяющая тождественно этому уравнению и зависящая от n констант. Вспомним еще, что производящая функция должна удовлетворять условию (129). Теперь, когда вместо переменных q^* функция S^* зависит от n констант α, это дополнительное условие может быть переписано так:

$$\det\left\| \frac{\partial^2 S^*}{\partial q_k \partial \alpha_j} \right\|_{k,\,j=1}^{n} \neq 0. \tag{133}$$

Любая функция $S^*(q, \alpha, t)$, обращающая уравнение (132) в тождество, зависящая от n констант α и удовлетворяющая условию (133), называется *полным интегралом* уравнения (132). Для наших целей достаточно найти любой полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

Мы не будем здесь входить в детали, связанные с интегрированием уравнений в частных производных, и предположим лишь, что каким-либо образом полный интеграл уравнения (132) определен, т. е. найдена функция $S^*(q, \alpha, t)$, удовлетворяющая условию (133) и обращающая уравнение (132) в тождество. Тогда, подставляя в формулы преобразования, порожденного функцией $S=cS^*$, т. е. в формулы (126), «новые» гамильтоновы переменные (в силу выбора $H^*=0$ это константы (130)), получаем формулы преобразования в следующем виде:

$$\boxed{\frac{\partial S^*}{\partial q_j}=p_j, \quad \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_j}=-\beta_j \quad (j=1, \ldots, n).} \tag{134}$$

В силу того, что функция S^* как полный интеграл уравнения (132) зависит только от q, α и t, равенства (134) определяют конечные соотношения между q, p и t, зависящие от $2n$ констант α_j и β_j. Таким образом, равенства (134) задают в неявной форме движение в «старых» координатах. Они являются, следовательно, интегралами исходной системы уравнений Гамильтона[1])

$$q_j=\varphi_j(t, \alpha, \beta), \quad p_j=\psi_j(t, \alpha, \beta) \quad (j=1, \ldots, n). \tag{135}$$

Итак, мы реализовали намеченную в начале этого параграфа программу и определили движение системы, обходя интегрирование канонических уравнений Гамильтона. Правда, при этом нам понадобилось найти полный интеграл уравнения в частных производных.

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. В координатном пространстве в каждый момент нас интересует положение лишь одной движущейся в нем точки — она определяется мгновенными значениями обобщенных координат рассматриваемой системы. Между тем полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби в каждый момент определяет функцию S^*, заданную во всем координатном пространстве и имеющую вполне определенное значение в каждой точке этого пространства. В связи с тем, что функция S^* зависит также и от времени, можно представить себе ее как некоторую поверхность, заданную в координатном пространстве и непрерывно деформирующуюся (или движущуюся). Каким же образом задание функции, определенной на всем пространстве и изменяющейся во времени, может определить движение той единственной точки, которая интересует нас? Как связано движение этой точки с деформирующейся поверхностью?

---

[1]) Существует бесконечное число полных интегралов уравнения Гамильтона — Якоби (132). Каждый из них порождает соответствующее преобразование, т. е. определяет движение, но все они описывают одно и то же движение и различаются лишь тем, как вводятся произвольные постоянные α.

Чтобы ответить на эти вопросы, обратим внимание на первую группу равенств (134). Эта группа равенств указывает, что импульсы p_i являются составляющими n-мерного вектора $\boldsymbol{p}$, в каждый момент совпадающего с градиентом функции S^*,

$$\boldsymbol{p} = \operatorname{grad} S^*.$$

Точка движется в каждое мгновение так, что импульс совпадает с градиентом функции S^* в этой точке. Теперь легко понять, каким образом функция, заданная во всем координатном пространстве и изменяющаяся во времени, может определить движение точки в пространстве: где бы ни находилась эта точка, значение $\operatorname{grad} S^*$ в данном месте пространства и в данный момент времени определяет направление импульса, а значит, и направление вектора, компонентами которого являются обобщенные скорости.

Уравнение Гамильтона — Якоби в классической механике используется, главным образом, в тех случаях, когда по каким-либо причинам легче найти полный интеграл этого уравнения, чем проинтегрировать канонические уравнения. Примеры такого рода будут приведены в следующем параграфе. Роль уравнения Гамильтона — Якоби для теоретической физики состоит в том, что уравнение Шредингера, являющееся основным уравнением квантовой механики, в пределе переходит в уравнение Гамильтона — Якоби классической механики. Именно через уравнение Гамильтона — Якоби устанавливается контакт между классической и квантовой механикой.

§ 10. Движения в стационарном потенциальном поле (консервативные и обобщенно консервативные системы)

Во всех предыдущих параграфах данной главы мы рассматривали движение системы в потенциальном поле, но не требовали, чтобы поле это было стационарным. Именно поэтому мы предполагали, что лагранжиан, гамильтониан и иные функции, встречавшиеся нам по ходу изложения, могут зависеть явно от времени. В этом смысле изложенный выше материал охватывал движения в нестационарных потенциальных полях и, в частности, движение в потенциальном поле системы, имеющей механические реономные связи. Для случая, когда система натуральна, связи склерономны и поле стационарно, т. е. когда потенциальная функция не зависит явно от времени, выше было установлено лишь то, что гамильтониан совпадает с полной энергией системы. Отправляясь от этого факта, мы ввели понятие обобщенно консервативной системы как такой гамильтоновой системы, в которой гамильтониан не зависит явно от времени, а сам гамильтониан в этом случае назвали обобщенной энергией. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые особенности, которые возникают при изучении движения в стационарных потенциальных полях, т. е. при движении консервативных и обобщенно консервативных систем.

Мы установим сначала, какую форму принимает для таких систем интегральный инвариант Пуанкаре — Картана; после этого рассмотрим, как записать для них систему уравнений, вид которой напоминает уравнения Лагранжа или уравнения Гамильтона, но порядок ниже (за счет использования интеграла энергии); далее выясним, как выглядят в этом случае вариационный принцип Гамильтона и уравнение Гамильтона — Якоби и какие возможности открываются для определения полного интеграла этого уравнения.

Прежде чем приступить ко всему этому, сделаем одно общее замечание. При движении консервативной системы заведомо известен один первый интеграл — интеграл энергии. Это дает возможность понизить порядок системы уравнений на единицу. Но мы уже видели при использовании циклических координат (см. § 3 этой главы), что в системе, имеющей r циклических координат, порядок системы уравнений можно понизить на $2r$ и независимо выписать r квадратур.

Ранее мы неоднократно обращали внимание читателя на то, что H (соответственно E) играет роль «импульса для координаты t». Естественно возникает мысль, нельзя ли и в случае консервативной системы использовать имеющийся первый интеграл для того, чтобы понизить порядок системы уравнений не на единицу, а на два, и ввести независимую квадратуру.

Это оказывается возможным, если воспользоваться тем обстоятельством, что лагранжиан (или гамильтониан) системы не зависит явно от времени, и поэтому из уравнений можно исключить время. Это значит, что роль времени тогда должна играть какая-либо из координат q, например, q_1. В результате интегрирования таких уравнений остальные координаты должны быть выражены как функции этой специально выделенной координаты, а их зависимость от времени вводится затем отдельно при помощи одной квадратуры, определяющей зависимость выделенной координаты q_1 от t. Далее будет показано, как, используя этот прием, можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений, описывающих движение консервативной и обобщенно консервативной систем, на два и ввести независимую квадратуру.

1. Интегральные инварианты и уравнения движения консервативных и обобщенно консервативных систем. В связи с тем, что для консервативных и обобщенно консервативных систем имеет место интеграл энергии (обобщенной энергии), гамильтониан, совпадающий с энергией (обобщенной энергией) системы, не изменяется во времени движения и равен своему начальному значению, полностью определенному начальными данными,

$$H = H_0 = h = \text{const}. \tag{136}$$

Значение энергии определяется фазовыми координатами q и p. Поэтому в расширенном фазовом пространстве q, p, t может быть выделено «изоэнергетическое подпространство», соответствующее множеству точек, где выполняется условие (136). Особенностью консервативных и обобщенно консервативных систем является то, что во время движения системы точка, изображающая это движение в расширенном фазовом пространстве, может находиться лишь в этом «изоэнергетическом подпространстве». Если при выводе интегральных инвариантов выбрать исходный контур C_0 в этом подпространстве, то вся трубка прямых путей будет также лежать в этом подпространстве, а сам интегральный инвариант Пуанкаре — Картана примет вид

$$\oint_C \left(\sum p_j\, dq_j - H\, dt\right) = \text{const},$$

где, как и ранее, равенство контурного интеграла константе надо понимать в смысле независимости этого интеграла от выбора контура, охватывающего трубку прямых путей. Но теперь

$$\oint_C H\, dt = \oint_C h\, dt = h \oint_C dt.$$

Последний контурный интеграл равен нулю как контурный интеграл от полного дифференциала, поэтому

$$\oint_C H\, dt = 0$$

и интегральный инвариант Пуанкаре — Картана для консервативных и обобщенно консервативных систем записывается так:

$$\boxed{\oint_C \sum p_j\, dq_j = \text{const}.} \tag{137}$$

Обращаем внимание читателя на то, что, несмотря на сходство записи, интегральный инвариант Пуанкаре — Картана для консервативных систем (137) не совпадает с универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре, — ведь в случае инварианта Пуанкаре интегрирование производится по контуру $\tilde{C}$, расположенному в плоскости $t = \text{const}$, а в формуле (137) контурный интеграл берется по *произвольному* контуру C, охватывающему трубку прямых путей.

Обратимся теперь к равенству (136) и подобно тому, как мы уже делали в § 7, разрешим это равенство относительно какого-либо обобщенного импульса, например относительно p_1:

$$p_1 = -K(q_1, \ldots, q_n; p_2, \ldots, p_n; h). \tag{138}$$

Используя это обозначение, можно придать инварианту (137) форму, подобную обычной форме интегрального инварианта Пуанкаре — Картана для неконсервативных систем:

$$\oint_C \left(\sum_{j=2}^{n} p_j\, dq_j - K\, dq_1 \right) = \text{const}. \tag{139}$$

Записанный так интегральный инвариант Пуанкаре — Картана для консервативных систем отличается от интегрального инварианта в общем случае движения в потенциальном поле в трех отношениях: во-первых, суммирование в первом члене ведется не от единицы до n, а от двух до n; во-вторых, вместо гамильтониана H в этом выражении стоит функция K, которая получилась, когда интеграл энергии (136) был разрешен относительно импульса p_1 (см. выражение (138)); в-третьих, роль t играет теперь q_1. Таким образом, воспользовавшись тем, что для консервативных и обобщенно консервативных систем гамильтониан не зависит явно от времени, мы исключили время из выражения интегрального инварианта Пуанкаре — Картана. Теперь совершенно так же, как в общих случаях движения систем в потенциальном поле из интегрального инварианта Пуанкаре — Картана следуют канонические уравнения Гамильтона, для консервативных и обобщенно консервативных систем из интегрального инварианта (139) следуют уравнения

$$\boxed{\frac{dq_j}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} \quad (j = 2, \ldots, n).} \tag{140}$$

Эти уравнения отличаются от уравнений Гамильтона в тех же отношениях, в каких интегральный инвариант (139) отличается от интегрального инварианта Пуанкаре — Картана: роль функции H играет функция K, вместо t стоит q_1 и j меняется не от 1 до n, а от 2 до n. Полученные таким образом уравнения (140) для консервативных систем являются аналогом уравнений Гамильтона и называются *уравнениями Уиттекера*. Уравнений Уиттекера на два меньше, чем уравнений Гамильтона, и следовательно, использовав интеграл энергии и исключив время, нам удалось снизить порядок системы на две единицы.

Введем для консервативных и обобщенно консервативных систем удобный аналог функции Лагранжа. Эта функция должна быть связана с функцией K таким же образом, каким обычная функция Лагранжа L связана с гамильтонианом H. По аналогии с обычной формулой

$$H = \sum p_j \dot{q}_j - L \tag{141}$$

введем функцию P:

$$K = \sum_{j=2}^{n} p_j \frac{dq_j}{dq_1} - P.$$

Введенная так функция P

$$\boxed{P = \sum_{j=2}^{n} p_j \frac{dq_j}{dq_1} - K} \tag{142}$$

называется *функцией Якоби*. В общем случае из уравнений Гамильтона сразу следуют уравнения Лагранжа с лагранжианом L, который связан с H соотношением (141); число таких уравнений Лагранжа равно n. Совершенно аналогично из полученных теперь для консервативных и обобщенно консервативных систем уравнений (140) следует система уравнений

$$\boxed{\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial (dq_j/dq_1)} - \frac{\partial P}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 2, \ldots, n).} \tag{143}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Якоби*. Легко видеть, что каждое из уравнений Якоби имеет второй порядок, что общий порядок системы уравнений Якоби равен $2n-2$ и что подобно уравнениям Лагранжа эта система разрешима относительно старших производных и, следовательно, при обычных предположениях решение полностью определяется начальными данными.

Предположим теперь, что удалось решить систему уравнений Уиттекера или Якоби. Это значит, что удалось найти все q_j $(j = 2, \ldots, n)$ как функции q_1 и такого числа произвольных постоянных, каков порядок системы, т. е. $2n-2$. Кроме того, эти решения будут, разумеется, содержать начальную энергию h, которая с самого начала входит в выражение для K (либо для P). Таким образом, мы определим

$$q_j = q_j(q_1;\ C_1, \ldots, C_{2n-2};\ h), \quad p_j = p_j(q_1;\ C_1, \ldots, C_{2n-2};\ h)$$
$$(j = 2, \ldots, n). \tag{144}$$

Для того чтобы выразить эти координаты и импульсы явно через время, подставим значения (144) в выражение (138) и найдем, таким образом, p_1 как функцию q_1 и тех же констант:

$$p_1 = p_1(q_1;\ C_1, \ldots, C_{2n-2};\ h). \tag{145}$$

Воспользуемся теперь первым из канонических уравнений Гамильтона — уравнением для q_1:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1}. \tag{146}$$

Правая часть этого равенства является функцией всех фазовых координат системы q, p. Заменим здесь $q_2, \ldots, q_n$ и $p_1, \ldots, p_n$ выражениями (144) и (145). В результате правая часть равенства (146) будет представлять собой функцию только от q_1 и от указанных выше констант:

$$\frac{dq_1}{dt}=F(q_1;\ C_1, \ldots, C_{2n-2};\ h),$$

и в полученном так уравнении переменные разделяются; следовательно, время можно ввести с помощью одной квадратуры:

$$\int \frac{dq_1}{F}=\int dt+C. \tag{147}$$

При этом вводится еще одна произвольная постоянная C, так что общее число произвольных постоянных доходит до требуемых $2n$.

Таким образом, поставленная задача полностью решена — при исследовании консервативных и обобщенно консервативных систем выписаны уравнения типа канонических уравнений Гамильтона (или типа Лагранжа), но порядок систем этих уравнений уменьшен на два за счет использования интеграла энергии и введения независимой квадратуры (147).

2. Вариационный принцип Мопертюи — Лагранжа. Рассмотрим теперь координатное пространство q и будем считать, что ось q_1 в этом пространстве играет такую же роль, какую в общем случае в расширенном координатном пространстве играла ось времени. В этом пространстве выберем две точки и проведем между ними прямой путь, соответствующий уравнениям Якоби для рассматриваемой консервативной (обобщенно консервативной) системы. На этом пути $H=h=\text{const}$. Проведем между этими же точками однопараметрический пучок окольных путей, расположенных в «изоэнергетическом подпространстве», т. е. таких, что вдоль них тоже $H=h$. В качестве функционала на этом пучке возьмем интеграл

$$W=\int_{q_1^0}^{q_1^1} P\,dq_1. \tag{148}$$

Введенный так функционал W является аналогом действия по Гамильтону I. Он получается из действия по Гамильтону, если функцию Лагранжа заменить на функцию Якоби, t на q_1 и ограничить выбор пучка сравниваемых кривых изоэнергетическим подпространством. Для введенного так функционала W уравнения Якоби являются уравнениями Эйлера вариационного исчисления (так же, как уравнения Лагранжа являются уравнениями Эйлера вариационного исчисления для действия по Гамильтону). Функционал (148) называется *действием по Лагранжу*. Из того факта, что уравнения Якоби являются эйлеровыми уравнениями для действия по Лагранжу, сразу следует, что вариация действия по Лагранжу равна нулю на прямом пути:

$$\delta W = 0. \tag{149}$$

Утверждение это является аналогом принципа Гамильтона для консервативных систем и носит название *вариационного принципа Мопертюи — Лагранжа*.

В частном случае, когда рассматривается натуральная (т. е. консервативная) система, действию по Лагранжу можно придать определенный механический смысл. Вспомним с этой целью выражения для P и K и представим функцию Якоби в виде

$$P = \sum_{j=2}^{n} p_j \frac{dq_j}{dq_1} + p_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \sum p_j \dot{q}_j. \tag{150}$$

Но из обычного выражения для гамильтониана следует, что

$$\sum p_j \dot{q}_j = H + L,$$

поэтому

$$P = \frac{1}{\dot{q}_1}(H + L) = \frac{1}{\dot{q}_1}(T + V + T - V) = \frac{2T}{\dot{q}_1}.$$

Подставляя это выражение в формулу (148) для действия по Лагранжу, получаем

$$W = \int_{q_1^0}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}_1}\, dq_1 = 2\int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_0}^{t_1} m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\, dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_i^0}^{s_i^1} (m_i \boldsymbol{v}_i) \cdot d\boldsymbol{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_i^0}^{s_i^1} m_i v_i(s_i)\, ds_i, \tag{151}$$

где s_i означает путь, пройденный i-й точкой системы. Выражение в правой части формулы (151) представляет собой, как легко видеть, работу векторов количеств движений системы на пройденном пути. Поэтому принцип Мопертюи — Лагранжа можно сформулировать так: *для натуральной консервативной системы работа векторов количеств движений на прямом пути достигает экстремального значения.*

Интересная аналогия усматривается при сопоставлении принципа Мопертюи — Лагранжа для консервативных систем с известным принципом Ферма, устанавливающим путь луча света в неоднородной среде. Согласно принципу Ферма свет в неоднородной среде распространяется так, чтобы было минимальным время прохождения луча света через среду

$$t=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{v(s)},$$

где $v(s)$ — «местная» скорость света в каждой точке, а s — его путь. Если для каждой точки среды ввести коэффициент преломления

$$n(s)=\frac{c}{v(s)},$$

где c — скорость света в пустоте, то время t прохождения луча света можно записать так:

$$t=\frac{1}{c}\int_{s_0}^{s}n(s)\,ds,$$

и принцип Ферма сведется к требованию

$$\delta\int_{s_0}^{s}n(s)\,ds=0.$$

Запишем теперь принцип Мопертюи — Лагранжа для материальной точки массы m

$$\delta\int_{s_0}^{s}mv\,ds=0.$$

Это выражение подобно тому, какое было получено из принципа Ферма; надо только вместо количества движения mv рассматривать функцию $n(s)$.

3. Уравнение Гамильтона — Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. В случае консервативной (обобщенно консервативной) системы в уравнение Гамильтона — Якоби входит функция H, не зависящая явно от времени. Поэтому уравнение это принимает вид

$$\frac{\partial S^*}{\partial t}+H\left(q,\ \frac{\partial S^*}{\partial q}\right)=0. \tag{152}$$

Пусть, как и ранее, h — начальная энергия. Будем искать решение уравнения (152) в виде

$$S^*=-ht+V\,(q_1,\ \ldots,\ q_n;\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1};\ h), \tag{153}$$

где α — константы, так что общее число констант с учетом h равно n. Уравнение (152) после подстановки в него выражения (153) записывается так:

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = h = \text{const}.} \qquad (154)$$

Уравнение (154) и является уравнением Гамильтона — Якоби для консервативных ($H = E$ — энергия системы) или обобщенно консервативных (H — сбобщенная энергия) систем. Таким образом, чтобы составить уравнение Гамильтона — Якоби для консервативной (обсбщенно консервативной) системы, нужно просто записать закон сохранения энергии (обобщенной энергии) и в выражении энергии заменить все импульсы частными производными искомой функции V по соответствующим координатам.

Предположим, что каким-либо образом удалось найти полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби, т. е. функцию V, зависящую от всех q и от n констант, причем последней из этих констант является $\alpha_n = h$. Эта функция V должна удовлетворять условию

$$\det \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial \alpha_k} \right\|_{j,\ k=1}^{n} \neq 0. \qquad (155)$$

Подставив полный интеграл V в формулу (153) и воспользовавшись затем обычными формулами (134) метода Гамильтона — Якоби, получим

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\partial S^*}{\partial q_j} = \frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j = 1, \ldots, n), \\ \beta_j &= -\frac{\partial S^*}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_j} \qquad (j = 1, \ldots, n-1), \\ \beta_n &= -\frac{\partial S^*}{\partial \alpha_n} = -\frac{\partial S^*}{\partial h} = t - \frac{\partial V}{\partial h}. \end{aligned} \qquad (156)$$

Уравнения (156) представляют собой в неявной форме конечные уравнения движения рассматриваемой консервативной (обобщенно консервативной) системы. Таким образом, зная полный интеграл уравнения (154), можно сразу получить уравнения движения в конечном виде.

При изучении консервативных и обсбщенно консервативных систем иногда легко найти полный интеграл уравнения в частных производных (154). Такая возможнссть возникает в тех случаях, когда гамильтониан $H(q, p)$ имеет специальный вид, допускающий разделение переменных. Будем говорить, что переменные разделяются, если полный интеграл уравнения (154) можно представить в виде

$$V = \sum_i V_i(q_i, \alpha).$$

Мы рассмотрим два случая такого рода[1]).

Случай 1. Этот случай имеет место, когда H представляет собой функцию от n функций $f_1, \ldots, f_n$, каждая из которых зависит только от «своих» гамильтоновых переменных,

$$H(q, p) = H[f_1(q_1, p_1), \ldots, f_n(q_n, p_n)], \tag{157}$$

и притом $\partial f_j/\partial p_j \neq 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Уравнение Гамильтона — Якоби в этом случае имеет вид

$$H\left[f_1\left(q_1, \frac{\partial V}{\partial q_1}\right), \ldots, f_n\left(q_n, \frac{\partial V}{\partial q_n}\right)\right] = h. \tag{158}$$

Положим

$$f_j(q_j, p_j) = \alpha_j; \tag{159}$$

тогда из (154) и (157) следует, что $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = h$. Разрешив систему равенств (159) относительно p_j:

$$p_j = f_j^*(q_j, \alpha_j) \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{160}$$

составим функцию

$$V = \sum \int f_j^*(q_j, \alpha_j)\, dq_j. \tag{161}$$

Покажем, что в рассматриваемом случае эта функция является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби (158). Непосредственно видно, что функция (161) тождественно удовлетворяет уравнению (158) и зависит от n констант, а условие (155) сводится в этом случае к виду

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j^*(q_j, \alpha_j)}{\partial \alpha_j} \neq 0. \tag{162}$$

Но $\partial f_j^*/\partial \alpha_j \neq 0$, если $\partial f_j/\partial p_j \neq 0$, а это условие предполагалось с самого начала. Поэтому неравенство (162) всегда выполняется. Теперь можно сразу выписать конечные выражения, описывающие движение[2]).

Пример. В качестве элементарного примера рассмотрим линейный осциллятор, т. е. точку массы m, движущуюся вдоль

---

[1]) Необходимые и достаточные условия возможности разделения переменных устанавливаются теоремой Штеккеля (подробнее см.: Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: Наука, 1966, с. 546—548).

[2]) В данном случае удобно сначала по формуле (153) найти функцию S^*, а потом воспользоваться формулами (134). Непосредственно использовать формулы (156) нельзя, так как при их выводе мы считали h независимой n-й константой, а в данном случае мы ввели n констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, и $h = H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ стала функцией от них.

оси x (координата q) в упругом поле с коэффициентом упругости c. В этом случае

$$H = E = f(q,\ p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2},$$

т. е. имеет место простейший вариант формулы (157), когда H совпадает с одной из функций f, а остальные f_j равны нулю. Уравнение Гамильтона — Якоби записывается так:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = h,$$

равенство (160) дает

$$p = f^*(q,\ \alpha) = \sqrt{2m\alpha - mcq^2}$$

и полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид

$$V = \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}\, dq.$$

В силу соотношения (153) при $h = \alpha$

$$S^* = -\alpha t + \int \sqrt{2m\alpha - mcq^2}\, dq,$$

а в силу (134)

$$p = \sqrt{2m\alpha - mcq^2},$$

$$\beta = t - \frac{1}{\omega}\int \frac{dq}{\sqrt{A^2 - q^2}} = t - \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{q}{A},$$

где $A^2 = 2\alpha/c$, а $\omega = \sqrt{c/m}$, т. е.

$$q = A\sin[\omega(t-\beta)],$$

и мы получили известный закон движения линейного осциллятора.

Случай 2. Этот случай имеет место тогда, когда гамильтониан (полная или обобщенная энергия) выражается последовательно «функцией от функции», где каждая функция зависит только от предыдущей функции и от «своих» переменных:

$$H = f_n[f_{n-1},\ q_n,\ p_n],$$

где

$$f_{n-1} = f_{n-1}[f_{n-2},\ q_{n-1},\ p_{n-1}],$$

где в свою очередь

$$f_{n-2} = f_{n-2}[f_{n-3},\ q_{n-2},\ p_{n-2}] \quad \text{и т. д.}$$

Предполагается, что $\partial f_j/\partial p_j \neq 0$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Положим

$$f_1(q_1,\ p_1) = \alpha_1, \quad f_2(q_2,\ p_2,\ \alpha_1) = \alpha_2, \ \ldots, \ f_n(q_n,\ p_n,\ \alpha_{n-1}) = \alpha_n$$

и разрешим эту систему равенств относительно p_j:

$$p_1 = f_1^*(q_1,\ \alpha_1), \quad p_2 = f_2^*(q_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2), \ \ldots, \ p_n = f_n^*(q_n,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$V=\sum_{j=1}^{n}\int f_j^*(q_j,\ \alpha_{j-1},\ \alpha_j)\,dq_j. \tag{163}$$

Непосредственно видно, что эта функция V удовлетворяет уравнению (154), которое в данном случае имеет вид

$$f_n\left\{\ldots f_3\left\{f_2\left[f_1\left(q_1,\frac{\partial V}{\partial q_1}\right);\quad q_2,\ \frac{\partial V}{\partial q_2}\right];\quad q_3,\ \frac{\partial V}{\partial q_3}\right\}\ldots;\quad q_n,\frac{\partial V}{\partial q_n}\right\}=h,$$

и что она зависит от n постоянных $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$. Как и в первом случае, легко проверить, что неравенство (155) выполнено. Поэтому функция (163) является полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби и, зная ее, можно выписать закон движения в конечной форме.

Пример. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки в поле всемирного тяготения. Взяв в качестве обобщенных координат сферические координаты

$$q_1=r,\quad q_2=\theta,\quad q_3=\psi,$$

имеем

$$T=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\cdot\dot\psi^2),\quad \Pi=-\frac{\gamma}{r},$$

и поэтому гамильтониан

$$H=E=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{1}{2mr^2}\left[p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}(p_\psi)^2\right]-\frac{\gamma}{r}$$

имеет как раз ту структуру, о которой идет речь в рассматриваемом случае, причем

$$f_1=p_\psi^2=\alpha_1^2,\quad f_2=p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\alpha_1^2=\alpha_2,\quad f_3=E=\alpha_3=h.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби теперь имеет вид

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)^2\right]\right\}-\frac{\gamma}{r}=h,$$

так что

$$f_1^*=p_\psi=\alpha_1,\quad f_2^*=p_\theta=\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}},$$

$$f_3^*=p_r=\sqrt{2m\alpha_3+2\frac{m\gamma}{r}-\frac{\alpha_2}{r^2}},$$

и поэтому функция V такова:

$$V=\alpha_1\int d\psi+\int\sqrt{\alpha_2-\frac{\alpha_1^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta+\int\sqrt{2m\left(\ {}_3+\frac{\gamma}{r}\right)-\frac{\alpha_2}{r^2}}\,dr.$$

В соответствии с формулами (156) находим

$$\beta_1 = -\psi + \alpha_1 \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta}}, \tag{164}$$

$$\beta_2 = -\int \frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2/\sin^2\theta}} + \int \frac{dr/r^2}{2\sqrt{2m\alpha_3 + 2m\gamma/r - \alpha_2/r^2}}, \tag{165}$$

$$\beta_3 = t - \int \frac{m\,dr}{\sqrt{2m\alpha_3 + 2m\gamma/r - \alpha_2/r^2}}. \tag{166}$$

Всегда можно выбрать координаты так, чтобы начальная скорость лежала в меридиональной плоскости, т. е. чтобы $d\psi/d\theta = 0$. Но тогда из формулы (164) следует, что $\alpha_1 = 0$, т. е. что $\psi = -\beta_1 = \text{const}$ и что движение плоское. Полагая $1/r = x$, получаем из формулы (165) при $\alpha_1 = 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c + 2kx - x^2}} = -2\beta_2\sqrt{\alpha_2} - \theta,$$

где $c = 2m\alpha_3/\alpha_2$ и $k = m\gamma/\alpha_2$. Несложные вычисления приводят к равенству

$$\arccos\frac{x-k}{\sqrt{k^2+c}} = \theta + \beta,$$

где $\beta = \pi/2 + 2\beta_2\sqrt{\alpha_2}$. Таким образом,

$$x = k + \sqrt{k^2+c}\cos(\theta + \beta),$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta+\beta)},$$

где $p = \frac{1}{k} = \frac{\alpha_2}{m\gamma}$, $e = \sqrt{1 + \frac{c}{k^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2\alpha_3}{m\gamma^2}}$, и мы приходим к уравнению конических сечений в полярных координатах r, θ (см. § 7 гл. III).

Приложение

ТЕОРИЯ СИСТЕМ СКОЛЬЗЯЩИХ ВЕКТОРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ

§ 1. Введение

В механике приходится иметь дело с векторными объектами: скоростями, ускорениями, силами и т. д. При этом часто оказывается удобным иметь дело не с отдельными векторами порознь, а сразу рассматривать и преобразовывать некоторое множество (систему) векторов. Так, например, совокупность всех сил, действующих на твердое тело, удобно рассматривать и преобразовывать как некий единый объект — множество векторов, изображающих эти силы.

В связи с задачами такого рода оказывается необходимым дополнить обычные законы векторной алгебры некоторыми новыми законами, связанными с преобразованием множеств (систем) векторов. Установление таких законов невозможно без некоторых ограничений на рассматриваемые множества. Эти ограничения должны быть достаточно широкими для того, чтобы охватить некоторые важные множества векторов, возникающие в задачах механики и достаточно жесткие для того, чтобы для выделяемого ими класса множеств можно было бы установить общие содержательные закономерности. Введение таких ограничений связано с понятием об эквивалентности двух различных множеств векторов.

Однако прежде чем ввести понятие об эквивалентности двух множеств векторов, мы в § 2 введем в рассмотрение две векторные характеристики — главный вектор и главный момент системы, — которые имеют смысл для любого множества векторов. Далее в § 3 дается определение эквивалентности систем векторов, и тем самым выделяется интересующий нас класс таких множеств. Наконец, в § 4 устанавливаются основные свойства множеств векторов выделенного класса.

Последний параграф посвящен приложениям полученных результатов к задачам механики.

§ 2. Главный вектор и главный момент системы векторов

В этом параграфе, говоря о векторе, мы имеем в виду обычное определение вектора как направленного отрезка, заданного длиной, направлением и точкой приложения. Любое число векторов, приложенных к разным точкам пространства или к одной его точке, образует множество или систему векторов.

Рассмотрим произвольное множество (систему) векторов $\{\boldsymbol{F}\} = \{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\}$. Выберем произвольную точку O и приложим к этой точке n векторов $\boldsymbol{F}_1^*, \boldsymbol{F}_2^*, \ldots, \boldsymbol{F}_n^*$ так, чтобы каждый вектор $\boldsymbol{F}_i^*$ по величине был равен $\boldsymbol{F}_i$, параллелен ему и направлен в ту же сторону. Сложим эти векторы по обычным правилам векторной алгебры (попарно, по правилу параллелограмма), т. е. построим вектор

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i^*.$$

Легко видеть, что при изменении точки O построенный так вектор $\boldsymbol{R}$ — *главный вектор* системы векторов $\{\boldsymbol{F}\}$ — как бы переносится в новую точку O_1 параллельно самому себе (рис. П.1). В этом смысле вектор $\boldsymbol{R}$ не зависит от выбора точки O и полностью определяется заданной системой векторов.

Рассмотрим теперь вектор $\boldsymbol{F}_i$ из системы $\{\boldsymbol{F}\}$. Выберем произвольно две

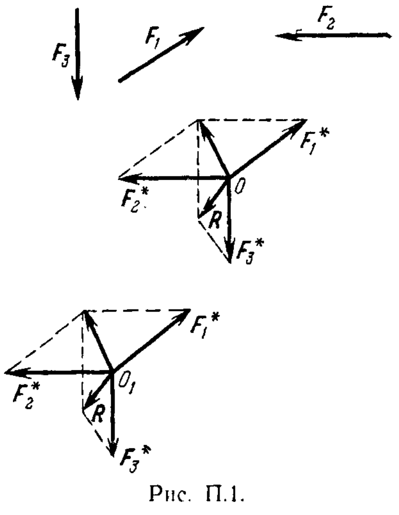

Рис. П.1.

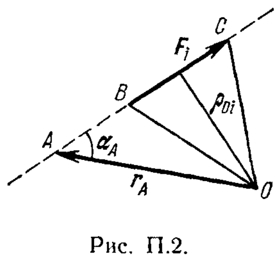

Рис. П.2.

точки: точку A на линии действия вектора $\boldsymbol{F}_i$ и точку O вне этой линии (рис. П.2). Пусть $\boldsymbol{r}_A$ — радиус-вектор, проведенный из точки O к точке A. Рассмотрим вектор, определяемый векторным произведением

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_i.$$

Модуль этого вектора равен

$$|\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)| = |\boldsymbol{F}_i|\,|\boldsymbol{r}_A|\sin\alpha_A = |\boldsymbol{F}|\,\rho_{Oi},$$

где ρ_{Oi} — расстояние от точки O до линии действия вектора $\boldsymbol{F}_i$ (рис. П.2), т. е. удвоенной площади треугольника BOC, построенного на векторе $\boldsymbol{F}_i$ как на основании и имеющего вершину в точке O. Вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$ направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O и линию действия вектора $\boldsymbol{F}_i$, так, что из конца вектора $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$ поворот вектора $\boldsymbol{r}_i$ на меньший угол до совмещения с $\boldsymbol{F}_i$ представляется происходящим против вращения часовой стрелки (рис. П.3).

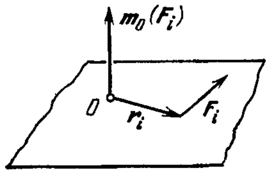

Рис. П.3.

Так определенный вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$ совершенно не зависит от выбора точки A — она играла лишь вспомогательную роль — и зависит лишь от вектора $\boldsymbol{F}_i$ и от выбора точки O.

Точка O называется *полюсом*, а вектор $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)$ — *моментом вектора* $\boldsymbol{F}_i$ *относительно полюса* O.

Построим теперь моменты всех векторов системы $\{\boldsymbol{F}\}$ относительно некоторого полюса O, сложим их по обычным правилам сложения векторов:

$$\boldsymbol{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i).$$

Вектор $\boldsymbol{M}_O$ называется *главным моментом* системы $\{\boldsymbol{F}\}$ относительно полюса O. Главный момент — вектор, приложенный в точке O; он зависит не только от системы векторов $\{\boldsymbol{F}\}$, но и от выбора полюса O.

Естественно возникает вопрос: как изменяется главный момент системы $\boldsymbol{M}_O$ при изменении полюса O? Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1 (теорема о переносе полюса). *Главный момент системы векторов относительно нового полюса O' равен сумме перенесенного в новый полюс главного момента системы, подсчитанного относительно старого полюса O, и момента главного вектора системы относительно нового полюса O' в предположении, что главный вектор $\boldsymbol{R}$ приложен в старом полюсе*:

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O). \qquad (1)$$

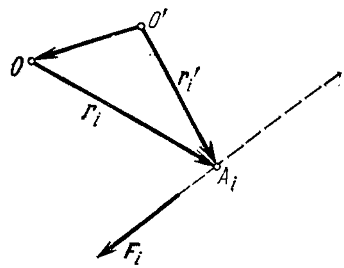

Рис. П.4.

Доказательство. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{F}_i$ из системы векторов $\{\boldsymbol{F}\}$ и выберем произвольно два полюса O и O', а также точку A_i на линии действия вектора $\boldsymbol{F}_i$ (рис. П.4). Из построения следует, что $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i + \overrightarrow{O'O}$, где $\overrightarrow{O'O}$ — вектор, проведенный из O' к O.

По определению

$$\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i. \qquad (2)$$

Подставим сюда выражение для $\boldsymbol{r}'_i$:

$$\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{F}_i)=(\boldsymbol{r}_i+\overrightarrow{O'O})\times\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\overrightarrow{O'O}\times\boldsymbol{F}_i.$$

Просуммируем теперь полученные равенства по всем векторам из $\{\boldsymbol{F}\}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{F}_i)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i+\overrightarrow{O'O}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i,$$

или

$$\boldsymbol{M}_{O'}=\boldsymbol{M}_O+\overrightarrow{O'O}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i, \tag{3}$$

где векторное произведение

$$\overrightarrow{O'O}\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O)$$

есть момент относительно O' вектора $\boldsymbol{R}$, приложенного в O. Вектор $\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R})$ приложен в точке O'. Поэтому для выполнения операции сложения векторов, определяемого формулой (3), вектор $\boldsymbol{M}_O$ должен быть перенесен в O'. Теорема доказана.

Из теоремы 1 сразу вытекают два важных следствия.

Следствие 1. *Если главный вектор системы равен нулю, то главный момент не зависит от выбора полюса.*

Следствие 2. *Две системы векторов, имеющие одинаковый главный момент относительно какого-нибудь полюса, имеют одинаковые главные моменты относительно любого полюса тогда и только тогда, когда эти системы имеют одинаковый главный вектор.*

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. *Если через полюсы O и O', относительно которых берутся главные моменты, провести прямую l, то проекции главных моментов на эту прямую равны.*

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\boldsymbol{M}_{O'}=\boldsymbol{M}_O+\overrightarrow{O'O}\times\boldsymbol{R}_O.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\boldsymbol{e}$ — орт прямой l:

$$\boldsymbol{M}_{O'}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{e}+(\overrightarrow{O'O}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{e}.$$

Но $\overrightarrow{O'O}$ и $\boldsymbol{e}$ коллинеарны, следовательно,

$$(\overrightarrow{O'O}\times\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{e}=0.$$

Поэтому $\boldsymbol{M}_{O'}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{e}$, т. е. $\text{Пр}_l\boldsymbol{M}_{O'}=\text{Пр}_l\boldsymbol{M}_O$. Теорема доказана.

Доказанная теорема делает естественным следующее определение: *главным моментом системы векторов относительно оси l*

называется проекция на эту ось главного момента системы относительно любой точки O, взятой на этой оси.

Главный момент системы относительно оси l обозначается M_l, а момент относительно оси l вектора $\boldsymbol{F}_i$ обозначается $m_l(\boldsymbol{F}_i)$. Для осей x, y, z имеют место соответственно обозначения M_x, M_y, M_z и $m_x(\boldsymbol{F}_i)$, $m_y(\boldsymbol{F}_i)$, $m_z(\boldsymbol{F}_i)$. Главный момент системы относительно оси l является не вектором, а скаляром и, следовательно, задается абсолютным значением и знаком.

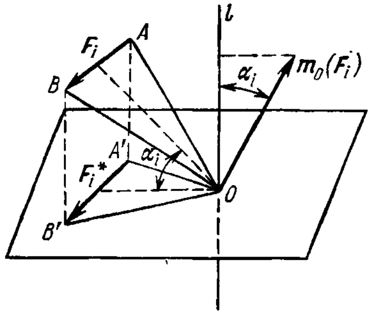

Рис. П.5.

Подсчитать главный момент системы $\{\boldsymbol{F}\}$ относительно некоторой оси удобнее всего так: провести перпендикулярную этой оси плоскость, спроектировать на нее все векторы из $\{\boldsymbol{F}\}$ и подсчитать главный момент этих проекций относительно точки пересечения оси с плоскостью (рис. П.5). Действительно,

$$m_l(\boldsymbol{F}_i) = \text{Пр}_l\, \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) = |\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i)| \cos\alpha_i = 2\,\text{Пл}\,\triangle\, OAB \cdot \cos\alpha_i,$$

но

$$\text{Пл}\,\triangle\, OAB \cdot \cos\alpha_i = \text{Пл}\,\triangle\, OA'B'.$$

Обозначим через $\boldsymbol{F}_i^*$ составляющую $\boldsymbol{F}_i$ в плоскости, перпендикулярной l. Тогда с точностью до знака

$$m_l(\boldsymbol{F}_i) = 2\,\text{Пл}\,\triangle\, OA'B' = |\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i^*)|$$

и

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_l(\boldsymbol{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i^*)|.$$

Вернемся к понятию о главном моменте системы векторов относительно полюса O. Выше уже было показано, что в отличие от главного вектора системы $\boldsymbol{R}$ главный момент $\boldsymbol{M}_O$ зависит от выбора полюса. Однако имеет место

Теорема 3. *Скалярное произведение главного момента системы векторов на главный вектор той же системы не зависит от выбора полюса.*

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O).$$

Умножим скалярно левую и правую части этого равенства на $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{M}_{O'} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O) \cdot \boldsymbol{R}.$$

Но векторы $\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O)$ и $\boldsymbol{R}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю. Теорема доказана.

Таким образом, произведение $M_O \cdot \boldsymbol{R}$ является *инвариантом системы векторов.*

Разложим главный момент относительно произвольной точки O на две составляющие: M_1, параллельную $\boldsymbol{R}$, и M_2, перпендикулярную направлению $\boldsymbol{R}$ (рис. П.6).

В силу теоремы 3 скалярное произведение $M_O \cdot \boldsymbol{R}$ не зависит от выбора полюса. Главный вектор $\boldsymbol{R}$ также обладает этим свойством. Следовательно, модуль вектора M_1

$$|\boldsymbol{M}_1| = \text{Пр}_R\, M_O = \frac{R \cdot M_O}{|\boldsymbol{R}|}$$

также не зависит от выбора полюса, и изменение $\boldsymbol{M}_O$ при смене полюса происходит только за счет изменения M_2.

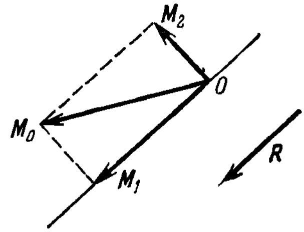

Рис. П.6.

Теорема 4. *Для любой системы векторов с $\boldsymbol{R} \neq 0$ всегда существует прямая, и притом единственная, в точках T которой $M_T = M_1$, т. е. главный момент коллинеарен $\boldsymbol{R}$. Эта прямая параллельна главному вектору $\boldsymbol{R}$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку O. Проведем плоскость П через M_O и главный вектор $\boldsymbol{R}_O$, отложенный из точки O. В плоскости П разложим M_O на параллельную $\boldsymbol{R}_O$ и перпендикулярную $\boldsymbol{R}_O$ составляющие. Проведем прямую l, перпендикулярную плоскости П, и возьмем произвольную точку N на этой прямой (рис. П.7).

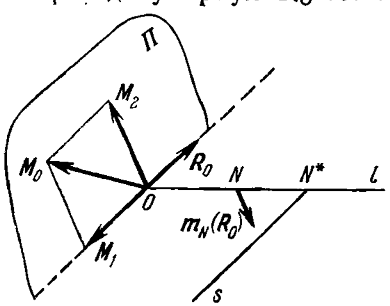

Рис. П.7.

Рассмотрим $\boldsymbol{m}_N(\boldsymbol{R}_O)$ — момент вектора $\boldsymbol{R}_O$, приложенного в точке O, относительно полюса N. Этот момент параллелен вектору M_2. Если перемещать полюс N вдоль прямой l, то величина момента $|\boldsymbol{m}_N(\boldsymbol{R}_O)|$ будет меняться. Если точка N «пробежит» всю прямую l, то модуль вектора $\boldsymbol{m}_N(\boldsymbol{R}_O)$ «пробежит» всю числовую ось от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому всегда можно — и притом единственным образом — выбрать $N = N^*$ так, чтобы $\boldsymbol{m}_{N^*}(\boldsymbol{R}_O) = -\boldsymbol{M}_2$. При этом выборе полюса N^*

$$M_{N^*} = M_O + \boldsymbol{m}_{N^*}(\boldsymbol{R}_O) = M_1 + \boldsymbol{M}_2 - M_2 = M_1,$$

т. е. в точке $N = N^*$ момент M_{N^*} коллинеарен $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}_2 = 0$.

Проведем через точку N^* прямую s, параллельную $\boldsymbol{R}$. Во всех точках T этой прямой

$$\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{M}_{N^*} + \boldsymbol{m}_T(\boldsymbol{R}_{N^*}).$$

Но $\boldsymbol{m}_T(\boldsymbol{R}_{N^*}) = 0$, так как $\boldsymbol{R}_{N^*}$ — главный вектор $\boldsymbol{R}$, приложенный в точке N^*, — проходит через точку T, и следовательно, $\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{M}_1$ во всех точках прямой s.

Возьмем точку O' вне прямой s; тогда

$$\boldsymbol{M}_{O'} = \boldsymbol{M}_{N^*} + \boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_{N^*})$$

и $\boldsymbol{M}_{O'} \neq \boldsymbol{M}_1$, так как $\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_{N^*}) \neq 0$.

Следовательно, прямая, во всех точках которой $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_1$, для любой системы векторов с $\boldsymbol{R} \neq 0$ существует и единственна. Теорема доказана.

Упомянутая в тексте теоремы 4 прямая является геометрическим местом минимальных моментов, так как во всех ее точках $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1$, а в других точках к $\boldsymbol{M}_1$ всегда добавляется $\boldsymbol{M}_2$. Она называется поэтому *осью минимальных моментов или центральной осью системы векторов.*

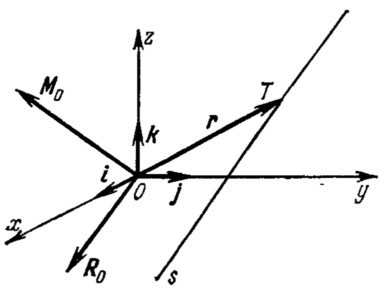

Рис. П.8.

Расположение центральной оси в пространстве целиком определяется заданной системой векторов и является ее важной характеристикой.

Найдем уравнение центральной оси. Зададим систему координат x, y, z с началом в произвольной точке O и с ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ и будем считать известными главный вектор $\boldsymbol{R}$ рассматриваемой системы векторов и $\boldsymbol{M}_O$ — ее главный момент относительно O, начала выбранной системы координат. Наша цель состоит в том, чтобы составить уравнение центральной оси этой системы в координатах x, y, z, содержащее только $\boldsymbol{M}_O$ и $\boldsymbol{R}$. В точках T центальной оси s, и только в них, вектор $\boldsymbol{M}_T$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{R}$, т. е. $\boldsymbol{M}_T = \eta \boldsymbol{R}$, где η — некоторое число. Поэтому в силу теоремы 1 (рис. П.8)

$$\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{M}_O + \overrightarrow{TO} \times \boldsymbol{R} = \eta \boldsymbol{R},$$

или

$$\boldsymbol{M}_O - \overrightarrow{OT} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O - \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \eta \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

Раскроем векторное произведение

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(yR_z - zR_y) + \boldsymbol{j}(zR_x - xR_z) + \boldsymbol{k}(xR_y - yR_x).$$

Проектируя теперь равенство (4) поочередно на оси x, y и z и исключая η, получаем искомое уравнение центральной оси

$$\frac{M_x-(yR_z-zR_y)}{R_x}=\frac{M_y-(zR_x-xR_z)}{R_y}=\frac{M_z-(xR_y-yR_x)}{R_z}. \qquad (5)$$

В этом уравнении M_x, M_y и M_z — проекции $\boldsymbol{M}_O$ на оси x, y, z, т. е. главные моменты относительно выбранных осей координат, а R_x, R_y и R_z — проекции главного вектора $\boldsymbol{R}$ на те же оси.

Используя понятие центральной оси и теорему 1, нетрудно установить всю картину распределения векторов $\boldsymbol{M}_O$ в пространстве для произвольной системы векторов с $\boldsymbol{R}\neq 0$. Для этого рассмотрим поверхность кругового цилиндра, ось которого совпадает с центральной осью системы (рис. П.9), а радиус равен r. Возьмем на этой поверхности точку O_1 и опустим из нее перпендикуляр на центральную ось. В этой точке

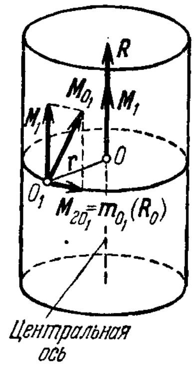

Рис. П.9.

$$\boldsymbol{M}_{O_1}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_{2O_1},$$

причем

$$\boldsymbol{M}_{2O_1}=\boldsymbol{m}_{O_1}(\boldsymbol{R}_O).$$

Модуль этого вектора $|\boldsymbol{M}_{2O_1}|=|\boldsymbol{R}|\,r$, поэтому

$$|\boldsymbol{M}_{O_1}|=\sqrt{|\boldsymbol{M}_1|^2+|\boldsymbol{R}|^2r^2}.$$

Таким образом, геометрическим местом точек, для которых главные моменты системы векторов равны по модулю, является поверхность кругового цилиндра, ось которого совпадает с центральной осью системы.

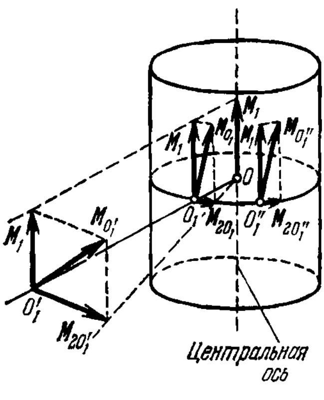

Рис. П.10.

При перемещении точки O_1 вдоль образующей цилиндра, т. е. параллельно центральной оси, вектор $\boldsymbol{M}_{O_1}$ не меняется ни по величине, ни по направлению. При перемещении O_1 по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной центральной оси, вектор $\boldsymbol{M}_{O_1}$ лишь поворачивается вместе с O_1, оставаясь в касательной плоскости; ориентация вектора $\boldsymbol{M}_{O_1}$ в этой плоскости не меняется. При перемещении же O_1 вдоль радиуса, т. е. при смене цилиндрической поверхности, $\boldsymbol{M}_{O_1}$ изменяется за счет изменения величины r (рис. П.10).

До сих пор мы считали, что у рассматриваемой системы векторов $\boldsymbol{R} \neq 0$. Если же $\boldsymbol{R} = 0$, то в силу теоремы 1 момент M_O не зависит от выбора полюса и понятие центральной оси или оси минимальных моментов лишено смысла — главные моменты для такой системы во всех точках пространства одинаковы.

§ 3. Эквивалентность и эквивалентные преобразования систем скользящих векторов

Для того чтобы наиболее удобным образом ввести понятие об эквивалентности двух множеств векторов и построить затем систему правил, позволяющих упрощать эти множества, определять, эквивалентны ли они, и т. д., введем предварительно понятие о векторном нуле.

Векторным нулем называется множество векторов, состоящее из двух векторов, равных по величине, действующих вдоль одной и той же прямой и направленных в противоположные стороны.

Множество систем векторов называется *множеством систем скользящих векторов*, а каждая система векторов из этого множества — *системой скользящих векторов* в том случае, когда, опираясь на физические соображения, можно ввести следующее соотношение эквивалентности: две системы из множества эквивалентны, если любая из них переходит в другую путем добавления или отбрасывания векторных нулей.

Задача о том, можно или нельзя в каждом конкретном случае ввести такое соотношение эквивалентности для систем векторов, не может быть решена формально, исходя из свойств этих систем векторов как математических объектов. Установление соотношения эквивалентности — новое аксиоматическое предположение, а вопрос о законности любого предположения такого рода каждый раз решается, исходя из физической сущности объектов, математической моделью которых являются рассматриваемые системы векторов. Например, интуитивно ясно, что при изучении движения (а не внутреннего состояния) твердого тела к совокупности сил, действующих на это тело, можно добавлять (или от нее можно отбрасывать) две силы, равные по величине и действующие вдоль одной и той же прямой в противоположные стороны. Поэтому множество векторов, изображающих систему сил, действующих на твердое тело, образует систему скользящих векторов. Легко видеть, однако, что совокупность сил взаимного притяжения, приложенных к двум разным телам, не составляет системы скользящих векторов, так как хотя силы взаимного притяжения всегда образуют векторный нуль, их отбросить нельзя, поскольку движение тел зависит, в частности, и от этих сил.

Название «система скользящих векторов» принято потому, что только с помощью добавления или отбрасывания векторных нулей можно перемещать любой вектор системы вдоль линии его действия. Чтобы показать это, рассмотрим, например, множество из трех векторов (рис. П.11, *а*), предположив, что это множество составляет систему скользящих векторов. Выберем произвольную точку *O* на линии действия какого-либо из векторов системы, например первого, и приложим в этой точке векторный нуль, составленный из векторов *1'* и *1''*, равных по величине вектору *1* и действующих вдоль той же прямой (рис. П.11, *б*).

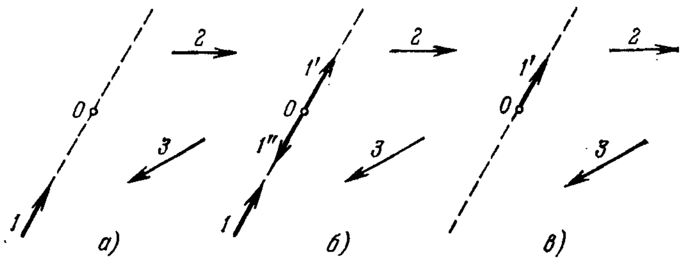

Рис. П.11.

Векторы *1* и *1''* также образуют векторный нуль — отбросим его. В результате получается система, показанная на рис. П.11, *в*. По определению она эквивалентна исходной, так как мы только добавляли и отбрасывали векторные нули, но теперь уже вектор *1* перемещен в точку *O* вдоль линии действия. Разумеется, так же можно было переместить любой иной вектор системы.

До сих пор мы рассматривали вектор как направленный отрезок, характеризуемый величиной, направлением и точкой приложения. Для системы скользящих векторов понятие точки приложения оказывается излишним. Благодаря постулируемому правилу, разрешающему добавлять и отбрасывать векторные нули, векторы систем как бы освобождаются от точек приложения, наделяются возможностью «скользить» вдоль линии действия [1]).

---

[1]) Из предположения, что к множеству векторов можно прибавлять (или что от него можно отбрасывать) векторные нули, следует, что понятие «точка приложения вектора» теряет смысл. Обратное утверждение неверно. Если определить систему скользящих векторов как множество векторов, лишенных точек приложения и определяемых лишь величиной, направлением и линией действия, то из такого определения не следует возможность отбрасывать или добавлять векторные нули (вспомните пример с двумя взаимно притягивающимися телами!). Все развиваемые далее теоремы о системах скользящих векторов опираются на возможность добавлять и отбрасывать векторные нули. Поэтому для того, чтобы проверить, изображается ли некоторое множество векторных объектов системой скользящих векторов, надо проверить, не изменятся ли изучаемые механические явления, если добавить или отбросить векторный нуль.

Система скользящих векторов называется *пучком векторов* (или просто *пучком*), если линии действия всех векторов системы пересекаются в одной точке (рис. П.12, *а*). Воспользовавшись тем, что только за счет добавления или отбрасывания векторных нулей всегда можно перемещать скользящий вектор по линии действия (см. выше), переместим все векторы пучка в точку O пересечения

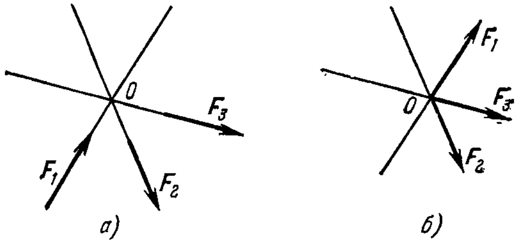

Рис. П.12.

их линий действия (рис. П.12, *б*). Теперь можно действовать с векторами, образующими пучок, как с обычными векторами, можно сложить их попарно по правилу параллелограмма и заменить одним вектором $\boldsymbol{\Phi}$ — их суммой. Естественно считать, что $\boldsymbol{\Phi}$ также является системой скользящих векторов, состоящей из одного вектора, и что эта система эквивалентна исходной.

Преобразования, связанные с добавлением или отбрасыванием векторных нулей и с заменой пучка векторов одним вектором, назовем *элементарными преобразованиями*.

Оба элементарных преобразования обратимы. Для добавления нулей это следует из определения — нули можно добавлять и отбрасывать. Для замены пучка суммой это следует из того, что для разложения вектора по заданным направлениям достаточно операции добавления и отбрасывания векторных нулей.

По определению элементарные преобразования переводят систему скользящих векторов в другую, эквивалентную ей, систему. Поэтому две системы заведомо эквивалентны, если они переводятся одна в другую последовательностью любого числа элементарных преобразований.

Эквивалентность системы скользящих векторов $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ системе $\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \ldots, \boldsymbol{G}_m$ условимся записывать так:

$$\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n\} \sim \{\boldsymbol{G}_1, \boldsymbol{G}_2, \ldots, \boldsymbol{G}_m\},$$

или короче

$$\{\boldsymbol{F}\} \sim \{\boldsymbol{G}\}.$$

Теорема 5. *Элементарные преобразования не меняют ни главного вектора, ни главного момента системы скользящих векторов.*

Доказательство. Для первого элементарного преобразования — добавления или отбрасывания векторного нуля — утверждение теоремы 5 очевидно: при образовании главного вектора два образующих нуль вектора взаимно уничтожаются. При образовании же главного момента главный момент двух векторов, образующих нуль, равен нулю. Действительно, если полюс O лежит

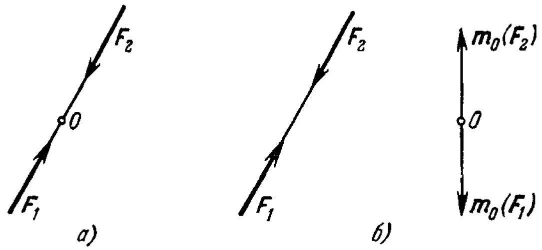

Рис. П.13.

на линии их действия (рис. П.13, a), нулю равен момент каждого из этих векторов порознь; если же полюс O не лежит на линии их действия (рис. П.13, б), то моменты этих векторов по модулю равны, а по направлению противоположны и взаимно уничтожаются при суммировании.

Столь же тривиально утверждение теоремы 5 в отношении главного вектора при втором элементарном преобразовании — замене пучка его суммой $\boldsymbol{\Phi}$.

По определению, если векторы $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ образуют пучок, то

$$\boldsymbol{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i,$$

причем не только линии действия всех векторов $\boldsymbol{F}_i$ ($i = 1, \ldots, n$), но и линия действия вектора $\boldsymbol{\Phi}$ проходят через точку O (рис. П.14). Подсчитаем момент вектора $\boldsymbol{\Phi}$ относительно произвольного полюса A. По определению

$$\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{\Phi}) = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{\Phi}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{r}_A$ — радиус-вектор, проведенный из A к любой точке на линии действия $\boldsymbol{\Phi}$. Выберем в качестве такой точки O. Аналогично для любого вектора пучка

$$\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F}_i,$$

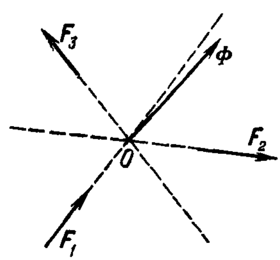

Рис. П.14.

где в качестве $\boldsymbol{r}_A$ можно взять тот же самый радиус-вектор, так как точка O лежит на линии действия любого из $\boldsymbol{F}_i$. Подставляя теперь в (6) выражение для $\mathbf{\Phi}$, получаем

$$m_A(\mathbf{\Phi})=\boldsymbol{r}_A\times\mathbf{\Phi}=\boldsymbol{r}_A\times\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_A\times\boldsymbol{F}_i=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{m}_A(\boldsymbol{F}_i)=\boldsymbol{M}_A. \qquad (7)$$

Итак, *для пучка скользящих векторов момент главного вектора равен главному моменту пучка.* Это утверждение иногда выделяют в отдельную теорему — так называемую *теорему Вариньона.*

§ 4. Преобразования систем скользящих векторов. Сведение систем скользящих векторов к простейшим системам

Система скользящих векторов, образующих пучок, всегда эквивалентна одному вектору. Система скользящих векторов, не образующих пучок, лишь в частных случаях эквивалентна одному вектору. Однако всегда имеет место

Теорема 6. *Любая система скользящих векторов эквивалентна двум векторам, один из которых проходит через произвольно заданную точку.*

Доказательство. Возьмем какой-либо вектор $\boldsymbol{F}_i$ из рассматриваемой системы и выберем произвольно три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

Выберем на линии действия $\boldsymbol{F}_i$ любую точку O_i, такую, что A, B, C и O_i не лежат в одной плоскости, перенесем вектор $\boldsymbol{F}_i$ в эту точку и разложим $\boldsymbol{F}_i$ по направлениям трех прямых, проходящих через точку O_i и через точки A, B и C (рис. П.15). Заменим вектор $\boldsymbol{F}_i$ тремя полученными так составляющими $\boldsymbol{F}_{iA}$, $\boldsymbol{F}_{iB}$ и $\boldsymbol{F}_{iC}$ и перенесем их вдоль линий действия в точки A, B, C.

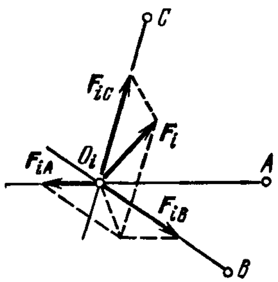

Рис. П.15.

Если мы поступим аналогично со всеми векторами системы, то в точках A, B и C получатся три пучка векторов; замена каждого пучка его суммой даст векторы $\mathbf{\Phi}_A$, $\mathbf{\Phi}_B$ и $\mathbf{\Phi}_C$. Эти три вектора эквивалентны исходной системе скользящих векторов, поскольку мы пришли к ним элементарными преобразованиями.

Проведем плоскость Π_C через вектор $\mathbf{\Phi}_C$ и точку A и плоскость Π_B через вектор $\mathbf{\Phi}_B$ и точку A (рис. П.16). На линии пересечения этих плоскостей возьмем произвольную точку D и проведем прямые BD, BA, CD и CA. Разложим $\mathbf{\Phi}_C$ и $\mathbf{\Phi}_B$ по этим направлениям соответственно, перенесем полученные векторы в точки A и D и заменим пучки, получившиеся при этом в точках A и D, их суммами $\mathbf{\Phi}_A^*$ и $\mathbf{\Phi}_D^*$. Теперь исходная система элементарными преобразованиями сведена к двум векторам $\mathbf{\Phi}_A^*$ и

Φ_D^*, причем точка A с самого начала была выбрана произвольно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь следующую задачу: заданы две различные системы скользящих векторов. Требуется определить, эквивалентны ли они, т. е. можно ли одну из них перевести в другую последовательностью элементарных преобразований. Опираясь на доказанную выше теорему 6, можно доказать следующую теорему, устанавливающую общий критерий эквивалентности двух систем скользящих векторов.

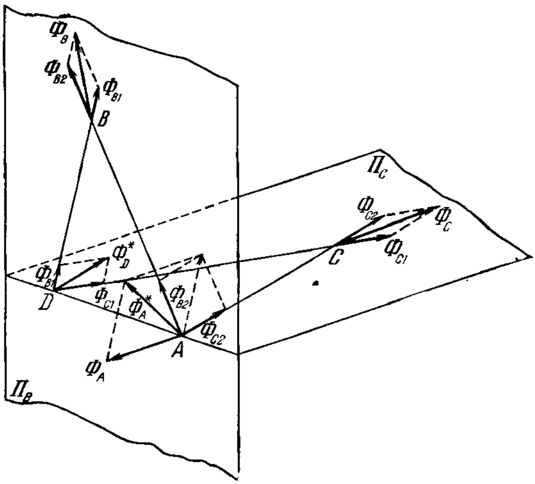

Рис. П.16.

Теорема 7. *Для эквивалентности двух систем скользящих векторов необходимо и достаточно, чтобы эти системы имели равные главные векторы и равные главные моменты относительно произвольно выбранного полюса.*

Замечание. Выбор полюса произволен, так как если моменты равны относительно какого-либо полюса, то они равны относительно любого другого полюса в силу равенства главных векторов.

Доказательство. Необходимость. Если две системы эквивалентны, то это означает, что любая из них получается из другой элементарными преобразованиями, а элементарные преобразования не меняют ни главного момента, ни главного вектора системы (теорема 5).

Достаточность. Пусть две системы $\{\boldsymbol{F}\}$ и $\{\boldsymbol{G}\}$ имеют одинаковые главные моменты и главные векторы. Покажем их эквивалентность. Введем систему $\{\boldsymbol{G}^*\}$ так, чтобы каждый вектор $\boldsymbol{G}_i^*$

из $\{G^*\}$ образовывал с вектором G_i из $\{G\}$ векторный нуль. Тогда система $\{G, G^*\}$, т. е. совокупность всех векторов G_i и G_i^*, эквивалентна векторному нулю и поэтому

$$\{F\} \sim \{F, G, G^*\}.$$

По условию главные векторы и главные моменты систем $\{F\}$ и $\{G\}$ совпадают. Следовательно, для систем $\{F\}$ и $\{G^*\}$ они противоположны. Поэтому главный вектор и главный момент системы $\{F, G^*\}$ равны нулю.

Рассмотрим систему $\{F, G^*\}$ и элементарными преобразованиями сведем ее к двум векторам (это возможно в силу теоремы 6). Элементарные преобразования не меняют ни главного вектора, ни главного момента, так что главный момент и главный вектор этих двух векторов также будут равны нулю. Но это возможно лишь тогда, когда два вектора образуют векторный нуль. Отсюда следует, что система $\{F, G^*\}$ эквивалентна векторному нулю и ее можно отбрасывать от любой системы, не нарушая эквивалентности.

Из изложенного следует, что

$$\{F\} \sim \{F, G^*, G\} \sim \{G\}.$$

Теорема доказана.

Введем теперь понятие *простейших систем* скользящих векторов. Назовем простейшими следующие четыре системы:

1) систему, состоящую из одного вектора (рис. П.17, *а*);

2) систему, состоящую из двух векторов, образующих векторный нуль (рис. П.17, *б*);

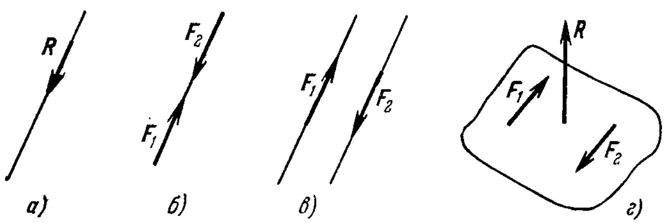

Рис. П.17.

3) систему, состоящую из двух векторов, равных по величине и действующих в противоположные стороны вдоль параллельных (не совпадающих) прямых (рис. П.17, *в*); такая система называется *парой*;

4) систему, состоящую из трех векторов, из которых два образуют пару, а линия действия третьего вектора перпендикулярна плоскости, в которой лежит пара (рис. П.17, *г*); система такого рода называется *винтом*.

Мы докажем теперь основную теорему теории систем скользящих векторов.

Теорема 8. *Произвольная система скользящих векторов эквивалентна одной из простейших.*

Доказательство. В § 2 было показано, что скалярное произведение $\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O$ является инвариантом, т. е. полностью определяется рассматриваемой системой векторов и не зависит от выбора полюса O. Но

$$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O=|\boldsymbol{R}||\boldsymbol{M}_O|\cos\alpha,$$

где α — угол между вектором $\boldsymbol{M}_O$ и вектором $\boldsymbol{R}$, построенным в O, а $|\boldsymbol{M}_O|\cos\alpha=M_1=\text{Пр}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M}_O$ — проекция вектора $\boldsymbol{M}_O$ на направление вектора $\boldsymbol{R}$.

Разделим теперь весь класс систем скользящих векторов на четыре подкласса, определив их следующим образом:

первый подкласс — системы, у которых $\boldsymbol{R}\neq 0$ и $M_1\neq 0$;

второй подкласс — системы, у которых $\boldsymbol{R}=0$ и $\boldsymbol{M}\neq 0$;

третий подкласс — системы, у которых $\boldsymbol{R}\neq 0$ и $M_1=0$ (в связи с тем, что $\boldsymbol{M}_O=0$, или в связи с тем, что $\boldsymbol{M}_O\neq 0$, но $\alpha=\pi/2$);

четвертый подкласс — системы, у которых $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}=0$.

Легко видеть, что каждая система скользящих векторов принадлежит одному и только одному из этих подклассов. Рассмотрим теперь каждый из этих четырех подклассов по отдельности.

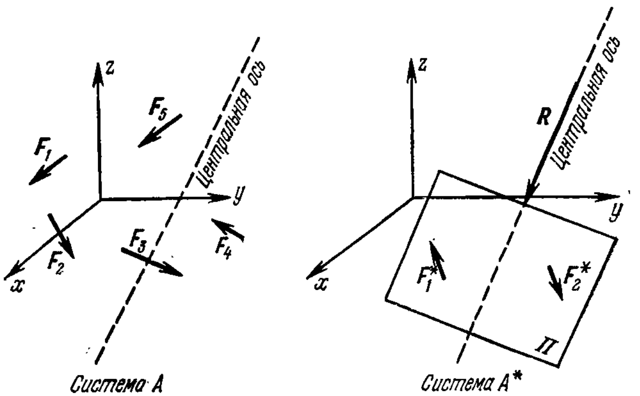

Рис. П.18.

Первый подкласс. Если система A скользящих векторов относится к первому подклассу, то у нее $\boldsymbol{R}\neq 0$ и в силу теоремы 4 существует центральная ось системы. Поставим в соответствие системе A другую систему A^*, состоящую из трех векторов, выбранных так: один из них по величине и направлению совпадает с главным вектором $\boldsymbol{R}$ системы A и действует вдоль ее центральной оси, а два других вектора F_1^* и F_2^* образуют пару в перпендикулярной центральной оси плоскости П, имеющую момент, в точности равный M_1 системы A. Система A^* является винтом (рис. П.18). Выберем полюс O на центральной оси системы A; тогда сразу видно, что главные векторы и главные моменты относительно O систем A и A^* одинаковы. Но в силу теоремы 7 системы A и A^* эквивалентны, следовательно, любая система из первого подкласса эквивалентна винту.

Второй подкласс. Пусть задана какая-либо система A из этого подкласса. У нее $\boldsymbol{R}=0$, но $\boldsymbol{M}\neq 0$. Поставим ей в соответствие другую систему A^*, состоящую из двух векторов, образующих пару, момент которой в точности равен $\boldsymbol{M}$ системы A. У пары по определению $\boldsymbol{R}=0$, и поэтому у системы A^* как $\boldsymbol{R}$, так и $\boldsymbol{M}$ совпадают с $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{M}$ заданной системы A. В силу теоремы 7 заданная система A эквивалентна системе A^*. Поэтому всякая система из второго подкласса эквивалентна паре.

Третий подкласс. Рассмотрим систему A из третьего подкласса. В силу теоремы 4 у нее существует центральная ось, так как $\boldsymbol{R}\neq 0$. Поставим в соответствие системе A другую систему A^*, состоящую только из одного вектора $\boldsymbol{R}$, действующего вдоль центральной оси и совпадающего по величине и направлению с главным вектором системы A (рис. П.19).

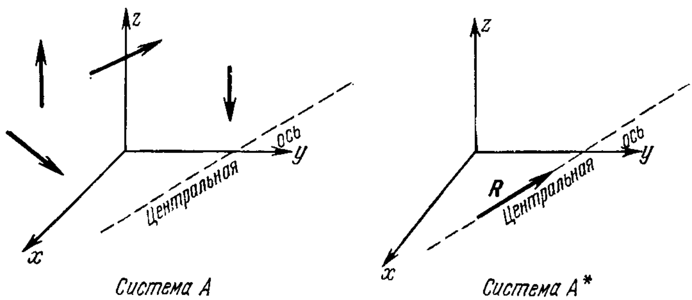

Рис. П.19.

Полюс O выберем на центральной оси. Системы A и A^* имеют по построению одинаковый главный вектор $\boldsymbol{R}$. Главный момент системы A^* относительно O равен нулю, так как ее единственный вектор проходит через O, а главный момент системы A относительно лежащего на центральной оси полюса равен нулю, так как эта система относится к третьему подклассу. Следовательно, в силу теоремы 7 системы A и A^* эквивалентны, т. е. каждая система из третьего подкласса эквивалентна системе, состоящей из одного вектора.

Четвертый подкласс. У системы A из этого подкласса $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}=0$. В качестве системы A^* выберем произвольный векторный нуль. Тогда у A^* также $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{M}_O=0$, как бы ни был выбран полюс O. Следовательно, любая система из этого подкласса эквивалентна векторному нулю.

Теорема 8 доказана.

В силу теоремы 8 все системы скользящих векторов подразделяются на четыре подкласса в зависимости от того, какой простейшей системе они эквивалентны. В ходе доказательства теоремы 8 была получена таблица IV.

Таблица IV

Подкласс	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{M}_O$	$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O$	Система приводится
Первый	$\boldsymbol{R}\neq0$	$M_1\neq0$	$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O\neq0$	К векторному винту
Второй	$\boldsymbol{R}=0$	$\boldsymbol{M}\neq0$	$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O=0$	К паре
Третий	$\boldsymbol{R}\neq0$	$M_1=0$	$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O=0$	К одному вектору
Четвертый	$\boldsymbol{R}=0$	$\boldsymbol{M}=0$	$\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}_O=0$	К векторному нулю

Сделаем теперь несколько замечаний о системах каждого из этих подклассов.

Начнем с систем из третьего подкласса. Каждая система из этого подкласса эквивалентна одному вектору; этот вектор называется *равнодействующим*. Равнодействующий вектор всегда совпадает с главным вектором системы, а линией его действия служит центральная ось. Выберем полюс O на центральной оси. У системы, принадлежащей третьему подклассу, главный момент относительно O равен нулю. Перейдем к полюсу O', не лежащему на центральной оси; тогда в силу теоремы 1

$$\boldsymbol{M}_{O'}=\boldsymbol{M}_O+\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O)=\boldsymbol{m}_{O'}(\boldsymbol{R}_O).$$

Но $\boldsymbol{R}_O$, т. е. главный вектор, приложенный в O, и является равнодействующим. Поэтому *главный момент системы из третьего подкласса относительно произвольного полюса равен моменту равнодействующего вектора относительно этого же полюса*. Это утверждение иногда называют *обобщенной теоремой Вариньона*[1]).

Теперь рассмотрим системы из второго подкласса. Каждая система из третьего подкласса эквивалентна единственной совер-

[1]) Напомним, что теоремой Вариньона (без добавления слова «обобщенная») называют это же утверждение для пучка с $\boldsymbol{R}\neq0$. Пучок векторов с $\boldsymbol{R}\neq0$ всегда принадлежит третьему подклассу, так как $\boldsymbol{M}_O=0$, если выбрать O в центре пучка. Поэтому в O и $M_1=0$. Но M_1 не зависит от выбора полюса, и условия $\boldsymbol{R}\neq0$, $M_1=0$ для такого пучка заведомо выполнены.

шенно конкретной простейшей системе[1]). Такого соответствия нет для систем из второго подкласса — каждой из них эквивалентно бесчисленное множество простейших систем — эквивалентных между собой пар.

Главный момент любой системы из второго подкласса (в том числе и главный момент пары) не зависит от выбора полюса, так как у таких систем по определению $\boldsymbol{R}=0$. Легко видеть, что главный момент пары направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы пары, и равен произведению величины одного из них на ρ — расстояние между векторами пары. Это расстояние называют *плечом пары* (рис. П.20), а главный момент пары называют просто *моментом пары*. Момент пары не меняется, если либо переносить пару, не меняя ее, в плоскости ее действия, либо при таком переносе изменять векторы пары и плечо так, чтобы их произведение не менялось, либо, наконец, если таким же образом переносить пару в параллельную плоскость. Этими тремя преобразованиями можно построить бесчисленное количество пар, эквивалентных заданной паре. Значит, и каждой системе из второго подкласса эквивалентна любая из бесчисленного числа различных пар, эквивалентных между собой.

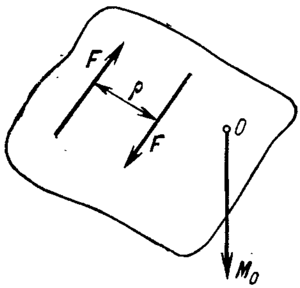

Рис. П.20.

Обратимся к системам из первого подкласса. Из приведенных выше рассуждений следует, что у винта можно заменить входящую в его состав пару любой эквивалентной ей, сохраняя при этом эквивалентность полученного винта исходному винту. В этом смысле каждая система из первого подкласса эквивалентна бесчисленному количеству винтов, эквивалентных между собой и отличающихся только парами.

Исследуем, наконец, системы из четвертого подкласса. Системы из этого подкласса, эквивалентные векторному нулю, называются *уравновешенными*. Условия того, что система скользящих векторов принадлежит четвертому подклассу

$$\boldsymbol{R}=0, \quad M_O=0 \tag{8}$$

(точка O произвольна), называются *условиями равновесия* системы скользящих векторов.

---

[1]) Обратное утверждение неверно. Различные системы из третьего подкласса, имеющие одинаковый главный вектор, эквивалентны одной и той же простейшей системе; разумеется, такие системы эквивалентны одна другой.

Рассматривая эти два условия в проекциях на оси координат, получаем следующие необходимые и достаточные условия равновесия системы скользящих векторов:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \tag{8'}$$

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_x(F_i)=0, \quad M_y=\sum_{i=1}^{n} m_y(F_i)=0, \quad M_z=\sum_{i=1}^{n} m_z(F_i)=0,$$

где M_x, M_y и M_z (соответственно m_x, m_y, m_z) — главные моменты системы (соответственно моменты отдельных ее векторов) относительно осей x, y и z. Таким образом, в общем случае независимо от числа векторов, входящих в систему, существует шесть скалярных равенств — условий равновесия. Для систем скользящих векторов какого-либо специального вида может оказаться, что условий равновесия меньше шести, так как при надлежащем выборе системы координат у таких систем некоторые из условий (8′) обращаются в тождества[1]).

Рассмотрим теперь подробнее некоторые частные виды систем скользящих векторов, которые часто встречаются в задачах механики.

1. Пучок скользящих векторов. Выберем полюс O в точке пересечения линий действия векторов пучка. Ясно, что $M_O=0$, и поэтому пучок может являться лишь системой из третьего (если $R\neq 0$) или четвертого (если $R=0$) подкласса (см. табл. IV). Поэтому пучок либо сводится к равнодействующему вектору, либо уравновешен.

Если $R\neq 0$, то равнодействующий вектор Φ существует; он совпадает с вектором R, если линия действия R проведена через O. Условия равновесия сводятся к равенству $R=0$ или — в скалярной форме — к трем равенствам

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0. \tag{9}$$

Условия $M_O=0$ в (8), а значит, и соответствующие три условия в (8′) сводятся в этом случае к тождествам вида $0\equiv 0$.

2. Плоская система скользящих векторов. В этом случае вектор M_O перпендикулярен плоскости, в которой лежат

---

[1]) А при ином выборе системы координат у таких систем условия (8) не будут независимыми.

векторы, а $\boldsymbol{R}$ лежит в ней (рис. П.21). Следовательно, $\boldsymbol{R}$, если он отличен от нуля, перпендикулярен $\boldsymbol{M}_O$, т. е. $M_1=0$.

Поэтому плоская система скользящих векторов заведомо не может принадлежать первому подклассу. Если у такой системы $\boldsymbol{R}\neq 0$, то она принадлежит третьему подклассу, т. е. сводится к равнодействующему вектору. Он лежит в этой же плоскости, по величине и направлению совпадает с $\boldsymbol{R}$, а для определения его линии действия достаточно определить какую-либо точку O плоскости, для которой $\boldsymbol{M}_O=0$, и провести через нее прямую, параллельную направлению $\boldsymbol{R}$. Такая прямая заведомо является центральной осью, ибо в ее точках $\boldsymbol{M}_O=0$; во всех иных точках $\boldsymbol{M}_O\neq 0$ (в силу теоремы 1).

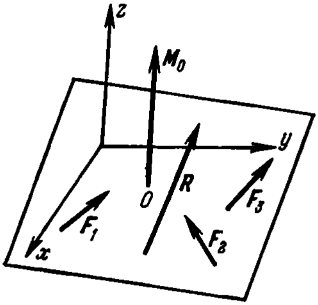

Рис. П.21.

Если у плоской системы векторов $\boldsymbol{R}=0$, но относительно произвольно выбранной точки $\boldsymbol{M}_O\neq 0$, то система эта принадлежит второму подклассу и эквивалентна любой паре с моментом $\boldsymbol{M}_O$. Наконец, плоская система уравновешена, если $\boldsymbol{R}=0$ и $\boldsymbol{M}_O=0$, т. е. выполнены условия (8). Равенства (8′) в этом случае не независимы. Действительно, расположим оси x и y в плоскости векторов (рис. П.21). Тогда при любом расположении векторов условия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i)=0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i)=0$$

выполняются тождественно, и вместо шести равенств (8′) в качестве условия равновесия получаем три равенства

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i)=0. \tag{10}$$

3. **Система параллельных скользящих векторов.** Рассмотрим систему скользящих векторов, у которых линии действия параллельны. В такой системе $\boldsymbol{R}$ также параллелен ее векторам, а вектор $\boldsymbol{M}$ перпендикулярен им. Значит, и в этом случае $M_1=0$, и подобная система также не может принадлежать первому подклассу.

Если у системы параллельных векторов $\boldsymbol{R}\neq 0$, то она сводится к равнодействующему вектору. В этом случае для нахождения его линии действия надо лишь найти точку O, относительно которой $M_O=0$, и провести через эту точку прямую, параллельную векторам системы.

Если $\boldsymbol{R}=0$, но $\boldsymbol{M}\neq 0$, то система эквивалентна паре с моментом $\boldsymbol{M}$. Наконец, в случае $\boldsymbol{R}=0$, $\boldsymbol{M}=0$ система уравновешена.

Если ось z направить параллельно векторам (рис. П.22), то условия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=0$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i)=0 \qquad (11)$$

обращаются в тождества вида $0\equiv 0$, а условия равновесия системы определяют три равенства

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i)=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i)=0. \qquad (12)$$

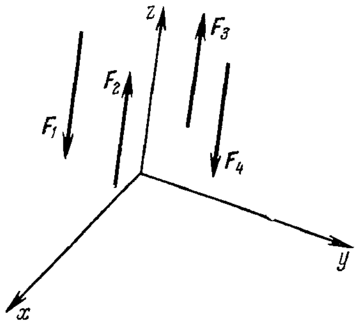

Рис. П.22.

В частном случае плоской системы параллельных векторов остаются лишь два условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i)=0, \qquad (13)$$

а все остальные условия выполняются тождественно; надо лишь ось x расположить в плоскости действия векторов (рис. П.23).

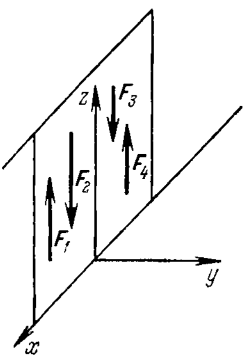

Рис. П.23.

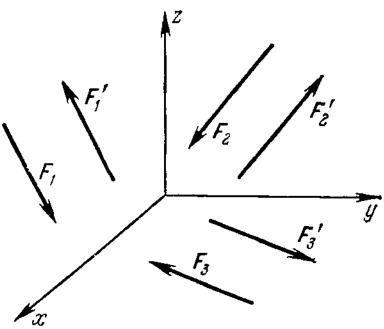

Рис. П.24.

4. Произвольная система пар. В этом случае (рис. П.24) заведомо $\boldsymbol{R}=0$. Если $\boldsymbol{M}\neq 0$, то система эквивалентна одной произвольно выбранной паре с моментом $\boldsymbol{M}$. Операцию замены

системы пар одной парой иногда называют *сложением пар*. Если $M=0$, то система уравновешена. Условия равновесия таковы:

$$\sum_{i=1}^{n} m_x(\boldsymbol{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_y(\boldsymbol{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} m_z(\boldsymbol{F}_i)=0; \qquad (14)$$

остальные три условия равновесия (8′) удовлетворяются тождественно.

§ 5. Применение теории систем скользящих векторов в механике

1. Система сил, приложенных к твердому телу. В качестве первого примера рассмотрим множество векторов, изображающих систему сил, приложенных к твердому телу.

Из физических соображений ясно, что в этом случае добавление и отбрасывание векторного нуля правомерно. В самом деле, две силы, приложенные к твердому телу и образующие векторный нуль, лишь растягивают либо сжимают тело. Они могли бы вызвать деформацию тела (если бы не предполагалось, что оно абсолютно твердо), но заведомо не влияют на его движение. Действительно, с одной стороны, движение центра инерции тела зависит лишь от главного вектора внешних сил, а с другой стороны, в уравнения Эйлера, описывающие движение тела относительно центра инерции, входят главные моменты всех внешних сил. Добавление или отбрасывание двух сил, образующих векторный нуль, не меняет ни главного вектора, ни главного момента системы сил и, следовательно, не отражается на движении тела. Поэтому множество векторов, изображающих любую совокупность сил, приложенных к твердому телу, является системой скользящих векторов, и теоремы, установленные в предыдущем параграфе, могут быть применены к системе сил, приложенных к твердому телу.

Отсюда сразу следует, что любая система сил, действующих на тело, может быть либо уравновешена, либо заменена одной силой — равнодействующей, или парой сил, или, наконец, тремя силами, образующими винт. В этом случае винт называется *динамой*. Условия, при которых имеет место каждый из этих четырех случаев, указаны в приведенной выше табл. IV.

Анализ условий равновесия (8′) при возможных частных расположениях сил (см. конец § 4) составляет предмет *геометрической* (или элементарной) *статики*. Эти условия позволяют выяснить, находится ли тело в равновесии под действием заданной совокупности сил, либо, наоборот, предполагая равновесие, найти несколько неизвестных скалярных величин (например, проекций сил, координат точек их приложения и т. д.), если число таких неизвестных величин не превышает числа независимых равенств в системе (8′). В таком случае говорят, что задача является *статически определимой.* Если число неизвестных величин превышает число независимых равенств в системе (8′), то задача *статически неопределима.* Решение статически неопределимых задач иногда возможно, если отказаться от гипотезы твердого тела и учесть его деформации, но тогда уже нельзя отбрасывать векторные нули, нельзя считать силы скользящими векторами, и вопрос о том, можно ли упростить систему сил и каким образом это сделать, должен рассматриваться особо.

2. Система угловых скоростей при движении n систем отсчета. Рассмотрим n систем отсчета, движущихся одна относительно другой (см. § 5 гл. I). Перенумеруем как-либо эти системы (считая неподвижную систему отсчета нулевой) и временно ограничимся случаем, когда каждая i-я из них в рассматриваемый момент совершает относительно предыдущей $(i-1)$-й системы мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_i$. Множество векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ составляет систему скользящих векторов. Чтобы показать это, рассмотрим мгновенное вращение двух систем отсчета с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, предположив, что векторы $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны, а их модули равны, так что $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$. Если принять движение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ за переносное, а с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ — за относительное, то скорость точки a в абсолютном движении (см. гл. I) будет равна

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_a = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{r}_a = (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}_1) \times \boldsymbol{r}_a = 0.$$

Поэтому отбрасывание от рассматриваемого множества векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ двух таких векторов, образующих векторный нуль (или добавление двух таких векторов), не изменяет абсолютной скорости любой точки n-й системы относительно нулевой. Эти физические соображения показывают, что в данном случае имеет место соотношение эквивалентности при добавлении и отбрасывании векторных нулей; следовательно, векторы $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ образуют систему скользящих векторов, и к ним полностью относится все, что было установлено выше для такой системы векторов.

Момент вектора $\boldsymbol{F}_i$ относительно полюса O по определению равен

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_i) = \boldsymbol{r}_O \times \boldsymbol{F}_i,$$

где $\boldsymbol{r}_O$ — радиус-вектор, проведенный из O к любой точке на линии действия вектора $\boldsymbol{F}_i$ (рис. П.25, *а*); скорость же $\boldsymbol{v}_i$ при мгновенном вращении с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_i$ составляет (рис. П.25, *б*)

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{r}$ проводится из любой точки на линии действия вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ к точке O. Если и в этом случае отсчитывать радиус-вектор $\boldsymbol{r}_O$ от точки O (рис. П.25, *в*), то получаем

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}_O \times \boldsymbol{\omega}_i.$$

Таким образом, при мгновенном вращении линейная скорость точки представляет собой момент вектора угловой скорости отно-

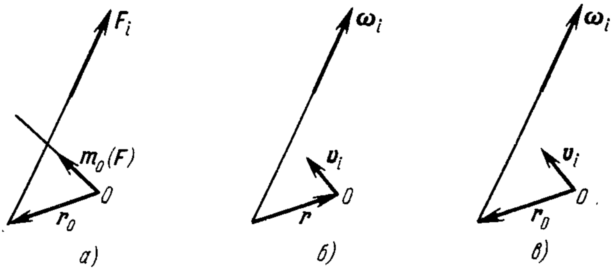

Рис. П.25.

сительно этой точки, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{\omega}_i)$. В связи с этим результирующая скорость точки O n-й системы относительно неподвижной,

$$\boldsymbol{v}_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{\omega}_i),$$

является главным моментом системы векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ относительно этой точки.

Главный вектор системы

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i$$

получается формальным переносом всех векторов $\boldsymbol{\omega}_i$ в одну и ту же точку и их сложением.

Отсюда сразу следует, что скорости $\boldsymbol{v}_{n,0}$ для точек n-й системы распределены так, как распределены главные моменты системы скользящих векторов, что, зная скорость $\boldsymbol{v}_{n,0}$ какой-либо одной точки, можно найти скорость любой другой точки по теореме о переносе полюса, что минимальную скорость имеют точки центральной оси системы векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ и т. д.

Применяя теперь к системе скользящих векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ теорему 8, сразу заключаем, что любая совокупность вращений может быть сведена к одному из четырех простейших случаев — векторному нулю, равнодействующему вектору, паре векторов и винту. Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

а) Сведение к векторному нулю. В этом случае n вращений в совокупности определяют покой — n-я система неподвижна относительно неподвижной системы координат x, y, z. Этот случай имеет место при условии, что главный вектор $\boldsymbol{\Omega}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\omega}_i=0$ и хотя бы для одной точки $\boldsymbol{v}_{n,0}=0$.

б) Сведение к одному вектору. Если $\boldsymbol{\Omega}\neq 0$, но проекция $\boldsymbol{v}_{n,0}$ на $\boldsymbol{\Omega}$ в какой-либо произвольно выбранной точке равна нулю, то система $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ заменяется одним вектором $\boldsymbol{\Omega}$, действующим вдоль центральной оси системы $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$, т. е. движение n-й системы отсчета относительно неподвижной x, y, z представляет собой мгновенное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

в) Сведение к паре. Если $\boldsymbol{\Omega}=0$, но $\boldsymbol{v}_{n,0}=\boldsymbol{v}_P\neq 0$ в какой-либо точке P, то система векторов $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ эквивалентна паре угловых скоростей («паре вращений») с моментом $\boldsymbol{v}_{n,0}$, т. е. n-я система отсчета движется относительно неподвижной поступательно со скоростью $\boldsymbol{v}_P$.

г) Сведение к винту. В наиболее общем случае, когда главный вектор системы $\boldsymbol{\Omega}\neq 0$ и в какой-либо точке P скорость $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_P\neq 0$ и не перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\Omega}$, система $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ сводится к винту. Это значит, что она эквивалентна вектору, совпадающему с $\boldsymbol{\Omega}$ и лежащему на центральной оси, и паре, находящейся в перпендикулярной $\boldsymbol{\Omega}$ плоскости и имеющей момент, равный проекции $\boldsymbol{v}_P$ на направление $\boldsymbol{\Omega}$. В этом случае мгновенное движение n-й системы отсчета относительно неподвижной складывается из поступательного движения вдоль направления центральной оси (т. е. вдоль направления, параллельного $\boldsymbol{\Omega}$) со скоростью, равной проекции $\boldsymbol{v}_P$ на $\boldsymbol{\Omega}$, и из вращения вокруг центральной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

Остановимся подробнее на случае в) сведения к паре. Непосредственно видно, что верно и обратное утверждение: если система совершает мгновенное поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}$, то его всегда можно заменить сложным движением — парой вращений, если угловые скорости этих вращений выбрать так, чтобы момент пары был равен $\boldsymbol{v}$.

Теперь мы можем перейти к общему случаю *произвольного* движения n систем отсчета одна относительно другой. В связи с тем, что любое движение в каждое мгновение может быть представлено как сумма поступательного движения и мгновенного вращения, а поступательное движение само может быть представлено парой вращений, можно ввести промежуточные системы отсчета и заменить произвольное мгновенное движение n систем только мгновенными вращениями m систем одна относительно другой ($m\geqslant n$). Поэтому все, что говорилось выше о сложении мгновенных вращений, относится и к общему случаю, когда мгновенные движения систем отсчета друг относительно друга произвольны.

Таким образом, при любом движении одних систем отсчета относительно других (при сложении любых движений) скорости результирующего движения в любое мгновение могут быть распределены по одному из перечисленных выше четырех простейших законов. Это отнюдь не противоречит тому факту, что движения могут быть весьма сложными и разнообразными — разнообразие движений получается за счет разнообразного изменения распределения скоростей (в пределах перечисленных четырех простейших) при переходе от одного момента времени к другому.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Марк Аронович Айзерман

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

М., 1980 г., 368 стр. с илл.

Редактор *Г. М. Ильичева*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *О. А. Бутусова, Н. Б. Румянцева*

ИБ № 11307

Сдано в набор 25.01.80. Подписано к печати 05.06.80. Бумага 60×90 1/16, тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 23. Уч.-изд. л. 22,99. Тираж 17500 экз. Заказ № 1188. Цена книги 1 руб.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15