

621.3

Т33

С.Д. КУПАЛЯН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

часть 3





ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

Под редакцией Г. И. АТАБЕКОВА

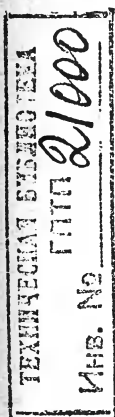
ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

С. Д. КУПАЛЯН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

3-е ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ ИЗДАНИЕ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов высших технических
учебных заведений



«ЭНЕРГИЯ»

МОСКВА 1970

БНЕТ

К-92

УДК 621.30

Т33

Купалян С. Д.

К 92 Теоретические основы электротехники, ч. 3, Электромагнитное поле. М., 1970.

248 с. с илл.

Курс «Теоретические основы электротехники» состоит из трех частей: ч. I «Линейные электрические цепи», ч. II «Нелинейные цепи» и ч. III «Электромагнитное поле».

Содержание курса соответствует программе Министерства высшего и среднего специального образования СССР по одноименной дисциплине.

В настоящей, третьей, части, написанной С. Д. Купаляном, рассмотрены электромагнитные явления, которые практически используются в различных областях электротехники и радиотехники. Формулируются основные законы и выясняется их физическое содержание. Приводятся методы исследования и расчета полей.

Каждая глава снабжена небольшим количеством задач и вопросов для самопроверки.

Книга предназначена для студентов электротехнических специальностей и факультетов, изучающих данную дисциплину как с отрывом, так и без отрыва от производства.

3-3-8

6П2.1

134-70

КУПАЛЯН СТЕПАН ДАВИДОВИЧ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ,

под редакцией Г. И. АТАБЕКОВА, ч. III,

Электромагнитное поле

Редактор И. В. Антик

Технический редактор Н. В. Сергеев

Переплет художника Д. И. Чернышева

Корректор З. Б. Шлайфер

Сдано в набор 17/IV 1970 г. Подписано к печати 16/X 1970 г. Т-15443. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 11,75. Тираж 70 000 экз. Цена 60 коп. Зак. 1152.

Издательство «Энергия». Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» им. А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание книги значительно переработано. Заново написана гл. 5, дополнены гл. 6 и 7.

С учетом возможных отклонений в учебном процессе от принятого в данной книге порядка изложения материал расположен по параграфам таким образом, чтобы можно было без особых затруднений пользоваться книгой и при другой последовательности чтения курса.

В книгу включены преимущественно те вопросы, которые имеют общетеоретическое значение для последующих специальных дисциплин.

В приложениях добавлен справочный материал по цилиндрическим функциям.

Автор выражает свою признательность рецензенту настоящего издания, доктору техн. наук, проф. Р. И. Караеву за ряд ценных замечаний и советов, способствовавших улучшению книги.

С. Д. Купалян

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Третья часть курса «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) посвящена теории электромагнитного поля. В ней рассматриваются электромагнитные явления, которые практически используются в различных областях электротехники и радиотехники. Формулируются основные законы и выясняется их физическое содержание. Рассматриваются методы исследования и расчета электромагнитных полей.

Исходя из методических соображений, курс построен по принципу перехода от более простых разделов к более сложным.

Вначале излагается теория электростатического поля. Даются определения физических величин, характеризующих поле. Приводятся методы расчета электростатических полей.

Затем рассматривается стационарное электрическое поле в проводящей среде. Формулируются законы постоянного тока в дифференциальной форме.

Далее исследуются магнитные поля постоянных токов. Приводятся методы расчета магнитных полей.

Последующая часть курса посвящена изучению переменных электромагнитных полей. Даются выводы основных уравнений электродинамики — уравнений Максвелла и приводятся методы расчета электромагнитных полей. Рассматриваются условия возбуждения и распространения электромагнитных волн в неограниченной среде и направляющих системах.

В книгу не включены вопросы, обычно излагаемые в специальных курсах. С целью систематизации материала некоторые основные определения и понятия, относящиеся к теории поля, рассмотренные в первых двух частях учебника, приводятся и в настоящей, третьей, части.

Предполагается, что изучение курсов физики и высшей математики, включая и векторный анализ, предшествует прохождению теории электромагнитного поля. Для справок в конце книги приведена сводка формул векторного анализа.

Каждая глава завершается перечнем вопросов для самопроверки и небольшим числом задач.

В качестве задачника рекомендуется книга В. А. Говоркова и С. Д. Купаляна «Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах», изд. «Высшая школа», 1963.

Содержание книги согласовано с утвержденной учебно-методическим управлением МВ и ССО СССР в 1960 г. программой курса теоретических основ электротехники.

Принятая в книге терминология соответствует терминологии, рекомендованной комитетом технической терминологии АН СССР. Буквенные обозначения приведены в соответствии с ГОСТ 1494-61. В книге применена Международная система единиц (СИ) по ГОСТ 9867-61, введенная в СССР в 1963 г.

Автор признателен проф. В. Ю. Ломоносову и доц. Л. И. Столову за тщательное рецензирование рукописи, давшее возможность внести в нее ряд значительных улучшений, а также доц. Д. В. Бычкову за помощь, оказанную при подготовке книги к печати.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. Г. И. Атабекову за помощь и советы при написании книги.

С. Д. Купалян

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — векторный потенциал.
 B — магнитная индукция.
 C — электрическая емкость.
 D — электрическая индукция (электрическое смещение).
 E — напряженность электрического поля.
 e — мгновенное значение э. д. с., основание натуральных логарифмов.
 F — механическая сила.
 f — частота.
 H — напряженность магнитного поля.
 I — постоянный ток, действующее значение переменного тока.
 i — мгновенное значение тока.
 $\hat{i}$ — единичный вектор оси x .
 J — намагниченность.
 j — мнимая единица $\sqrt{-1}$.
 $\hat{j}$ — единичный вектор оси y . $\hat{k}$ — единичный вектор оси z .
 k_0 — диэлектрическая восприимчивость.
 k_m — магнитная восприимчивость.
 L — индуктивность.
 l — длина.
 P — активная (средняя) мощность.
 p — мгновенная мощность.
 P — поляризованность.
 Q — электрический заряд, неизменный во времени.
 q — электрический заряд.
 R — активное сопротивление, одна из прямоугольных сферических координат.
 r — одна из прямоугольных цилиндрических координат.
 S — поверхность, площадь.
 T — период.
 t — время.

U — постоянное напряжение, действующее значение переменного напряжения.
 u — мгновенное значение напряжения.
 V — объем, область пространства.
 v — скорость.
 W_0 — энергия электрического поля.
 W_m — энергия магнитного поля.
 z_B — волновое сопротивление.
 α — коэффициент затухания (поглощения).
 β — коэффициент фазы.
 γ — удельная проводимость.
 δ — плотность тока проводимости.
 δ_{cm} — плотность тока смещения.
 ϵ — диэлектрическая проницаемость.
 η — плотность поверхностного тока.
 θ — одна из сферических координат.
 λ — длина волны.
 μ — магнитная проницаемость.
 Γ — коэффициент распространения.
 $\vec{P}$ — вектор Пойнтинга.
 ρ — объемная плотность заряда.
 σ — поверхностная плотность заряда.
 τ — линейная плотность заряда.
 ϕ — потенциал скалярный.
 Φ — магнитный поток.
 Ψ — магнитное потокоцепление.
 ψ — одна из цилиндрических или сферических координат.
 ω — угловая частота.

ВВЕДЕНИЕ

Содержанием настоящей книги является макроскопическая теория электромагнитного поля, основу которой составляют сформулированные Максвеллом уравнения электродинамики. Вывод Максвелла о существовании электромагнитных волн был в свое время лишь гениальной гипотезой. Только после опытов Г. Герца, получившего в лабораторных условиях электромагнитные волны, после исследований П. Н. Лебедева, показавшего, что свет оказывает давление, и измерившего это давление, наконец, после величайшего изобретения А. С. Попова, применившего электромагнитные волны для передачи сигналов, теория Максвелла получила должное экспериментальное обоснование.

Представление об электромагнитном поле, как об одном из видов материи, является основным положением современной физики.

В. И. Ленин дал общее определение материи: «Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них»¹.

Электромагнитное поле, как и вещество, обладает массой, энергией, количеством движения и моментом количества движения, т. е. свойствами материи, которые подчиняются основным законам физики.

Электромагнитное поле имеет свои особенности, отличающие его от вещества. Электромагнитное поле, как и всякий вид материи, образуется только за счет других видов материи. Оно может также превращаться в другие виды материи, подчиняясь при этом основному закону природы о несотворимости и неуничтожаемости материи и ее движения.

¹ В. И. Ленин, Соч., изд. 5, т. 18, стр. 131.

Электромагнитное поле характеризуется наличием магнитного и электрического полей, связанных непрерывным взаимным превращением. Эти поля представляют собой две стороны единого электромагнитного поля, различные его проявления.

При изучении электромагнитного поля методически целесообразно рассматривать вначале отдельно неизменное во времени электрическое поле и его взаимодействие с неподвижными заряженными телами. Затем исследовать неизменное во времени магнитное поле и взаимодействие его с телами, по которым проходит постоянный ток. После освоения методов расчета электростатических и магнитостатических полей переход к рассмотрению законов электромагнитного поля и распространения электромагнитных волн будет менее трудным.

Понятие физического поля, одного из видов материи, не следует отождествлять с математическим понятием поля некоторой функции. Термином поле вектора (скаляра) в математике обозначают область пространства, в каждой точке которого рассматриваемому вектору (скаляру) приписывается определенное значение.

В этом смысле можно говорить о поле вектора — напряженности E (или H), о поле скаляра — потенциала φ и т. д.

Математическое понятие поля удобно применять при описании свойств физического поля.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1-1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД

При изучении электрических явлений во многих практически важных случаях можно не учитывать атомистического строения электричества. Хотя заряженные тела содержат огромное количество движущихся элементарных частиц, не будет ошибкой считать общий заряд тела неподвижным и распределенным непрерывно. Такое суммарное или макроскопическое изучение стационарных электрических явлений оправдывается тем, что результаты расчетов вполне согласуются с опытом. Поэтому электрические заряды можно считать бесконечно делимыми и пользоваться понятием плотности заряда. Если заряд q распределен в пространстве, то объемная плотность заряда

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Соответственно заряд

$$q = \int_V \rho dV.$$

Если заряд q распределен по поверхности S , то поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

а заряд можно определить по формуле

$$q = \int_S \sigma dS.$$

Аналогично определяется и линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl},$$

где dl — элемент линии, вдоль которой распределен заряд, равный

$$q = \int \tau dl.$$

Если размеры заряженного тела малы по сравнению с расстоянием от него до точек, в которых рассматривается поле, то заряд такого тела называют точечным. Очевидно, что плотность точечного заряда можно считать равной бесконечности.

Два точечных заряда одного знака отталкиваются друг от друга. Сила отталкивания F в вакууме определяется законом Кулона

$$F = k \frac{Qq}{R^2}.$$

Здесь Q — первый точечный заряд; q — второй точечный заряд; R — расстояние между ними; k — коэффициент пропорциональности, численное значение которого зависит от выбора системы единиц измерения.

Надо помнить, что закон Кулона справедлив только для точечных заряженных тел. Только в этом случае форма заряженных тел не влияет на силу взаимодействия.

Если заряженные тела находятся не в вакууме, а в однородной, изотропной, т. е. обладающей одинаковыми свойствами во всех направлениях, непроводящей среде, то сила отталкивания, как показывает опыт, меньше в ϵ раз

$$F = k \frac{Qq}{\epsilon R^2}.$$

Безразмерная величина ϵ называется диэлектрической проницаемостью среды, в которой находятся заряженные тела.

В приложении 1 приведены значения ϵ для различных диэлектриков.

Направление силы взаимодействия F совпадает с прямой, соединяющей точечные заряженные тела или, короче говоря, точечные заряды (рис. 1-1). Если заряды Q и q

имеют разные знаки, сила взаимодействия между ними будет силой притяжения.

Сила, действующая на заряд q , запишется в векторной форме следующим образом:

$$\mathbf{F} = k \frac{Qq}{\epsilon R^2} \mathbf{1}_R,$$

где $\mathbf{1}_R$ — единичный вектор, направленный от точки с зарядом Q к точке с зарядом q .

В системе СИ заряд измеряется в кулонах (κ), сила в ньютонах (μ), расстояние в метрах (μ). Коэффициент k в той же системе единиц при рационализированной форме записи формул равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Величина ϵ_0 называется электрической постоянной. Она равна:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м},$$

где c — численное значение скорости света в свободном пространстве, выраженное в метрах в секунду.

Произведение диэлектрической проницаемости ϵ , иногда называемой относительной диэлектрической проницаемостью, и электрической постоянной ϵ_0 , обозначают буквой ϵ_a и называют абсолютной диэлектрической проницаемостью. Она, как и электрическая постоянная, измеряется в фарадах на метр (ф/м).

Окончательное выражение силы, действующей на заряд q , примет вид:

$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R. \quad (1-1)$$

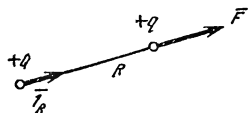


Рис. 1-1. Два точечных заряда в однородном диэлектрике.

1-2. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электрический заряд всегда связан с электромагнитным полем. Если заряд неподвижен, электрическое поле заряда называется электростатическим.

Для описания и измерения электростатического поля пользуются выражением силы отталкивания или притяжения,

которое испытывает пробное заряженное тело, помещенное в это поле. Чем меньше величина пробного заряда, внесенного в поле, тем меньшая действует на него сила, однако отношение их представляет собой конечную величину.

Предел отношения силы F , действующей на пробный заряд, к величине этого заряда q , когда он стремится к нулю, называют напряженностью электрического поля:

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q}.$$

Напряженность электрического поля точечного заряда

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} 1_R. \quad (1-2)$$

Напряженность электрического поля в системе СИ измеряется в вольтах на метр (в/м).

Силу взаимодействия двух точечных зарядов Q и q можно выразить следующим образом:

$$F = Eq. \quad (1-3)$$

Следует отметить, что хотя напряженность электростатического поля определяется силой взаимодействия двух зарядов, сама она не является силой. Если в поле отсутствует пробный заряд q , механическая сила взаимодействия равна нулю, но напряженность поля E в каждой точке будет отлична от нуля

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} 1_R.$$

Поэтому электростатическое поле можно рассматривать как векторное поле напряженности E .

Электрическим смещением или электрической индукцией называют величину D , которая в однородных и изотропных средах пропорциональна напряженности электрического поля. Коэффициент пропорциональности равен абсолютной диэлектрической проницаемости

$$D = \epsilon_a E = \epsilon \epsilon_0 E.$$

В системе единиц СИ электрическая индукция измеряется в кулонах на квадратный метр (к/м²).

В вакууме электрическое смещение

$$D = \epsilon_0 E.$$

Необходимо отметить, что в некоторых средах (например, в анизотропных кристаллах) векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ могут не совпадать по направлению. Диэлектрическая проницаемость выражается в таком случае как тензор.

Если поле создается несколькими точечными зарядами, то общая напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в любой точке равна геометрической сумме

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \sum_{m=1}^n \frac{Q_m}{R_m^2} \mathbf{1}_{Rm},$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ — напряженности электрического поля в данной точке, возбужденные зарядами $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Это положение имеет важное значение. Оно указывает на то, что для электрического поля применим принцип наложения.

В общем случае электростатическое поле могут возбудить неподвижные объемные, поверхностные и линейные заряды. Разбив объемы V , поверхности S и линии l на элементы dV, dS, dl , можно записать величину заряда каждого элемента

$$dq_1 = \rho dV; \quad dq_2 = \sigma dS; \quad dq_3 = \tau dl,$$

где ρ — объемная, σ — поверхностная, а τ — линейная плотности заряда.

Заряды dq_1, dq_2, dq_3 можно считать точечными ввиду малости элементов dV, dS и dl . Тогда по формуле (1-2)

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{dq_1}{4\pi\epsilon_a R_1^2} \mathbf{1}_{R1} = \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R_1^2} \mathbf{1}_{R1};$$

$$d\mathbf{E}_2 = \frac{dq_2}{4\pi\epsilon_a R_2^2} \mathbf{1}_{R2} = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a R_2^2} \mathbf{1}_{R2};$$

$$d\mathbf{E}_3 = \frac{dq_3}{4\pi\epsilon_a R_3^2} \mathbf{1}_{R3} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R_3^2} \mathbf{1}_{R3}.$$

Суммируя геометрически векторы $d\mathbf{E}_1$ по объему V , $d\mathbf{E}_2$ по поверхности S , $d\mathbf{E}_3$ по линии l , получаем результирующую напряженность поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3. \quad (1-4)$$

Уравнение (1-4) позволяет вычислить $\mathbf{E}$, если известно распределение зарядов в пространстве. Вычисление сводится к определению проекций вектора $\mathbf{E}$ в такой системе координат, в которой расчеты получаются наиболее простыми.

Свойства электрического поля будут полностью определены, если для каждой точки поля будет известна величина вектора E .

1-3. БЕЗВИХРЕВОЙ ХАРАКТЕР ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если в электрическое поле с напряженностью E внести точечный заряд q , то под действием силы поля (1-3) заряд начнет перемещаться. Работа, совершенная силами поля при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2,

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Электростатическое поле обладает весьма важным свойством — работа сил поля вдоль замкнутой кривой равна нулю. Чтобы доказать правильность высказанного положения, достаточно показать, что циркуляция вектора E (линейный интеграл по замкнутой кривой) равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

В случае точечного заряда, подставив значение E из формулы (1-2), получим:

$$\oint_L \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R d\mathbf{l}.$$

Так как $\mathbf{1}_R d\mathbf{l} = d\mathbf{l} \cos(\mathbf{R}, d\mathbf{l}) = dR$, а $\oint_L \frac{dR}{R^2}$ вдоль замкнутой кривой L равен нулю (подынтегральное выражение является полным дифференциалом), то циркуляция вектора E равна нулю.

Так как точка $R = 0$ является особой точкой поля, то при выборе контура интегрирования L ее необходимо обойти.

Предположим, что электростатическое поле возбуждается не точечным, а произвольно распределенным зарядом. Если разбить этот заряд на бесконечно малые элементы dq , то каждый такой элементарный заряд можно считать точечным. Для такого заряда вектор напряженности электрического поля будет определяться по формуле (1-2):

$$d\mathbf{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R.$$

Результирующая напряженность электростатического поля E , созданного всеми элементарными зарядами dq , может быть получена геометрическим суммированием векторов dE .

Так как циркуляция каждого вектора dE равна нулю, то и циркуляция результирующего вектора E равна нулю:

$$\oint_L E dl = 0.$$

Пользуясь теоремой Стокса, можно преобразовать циркуляцию

$$\oint_L E dl = \int_S \text{rot } E dS.$$

Так как циркуляция вектора напряженности электрического поля равна нулю, то и ротор его равен нулю:

$$\text{rot } E = 0. \quad (1-5)$$

Соотношение (1-5) выражает основное свойство электростатического поля — оно безвихревое.

1-4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

Так как электрическое поле безвихревое ($\text{rot } E = 0$), то можно найти такую скалярную функцию φ , градиент которой, взятый со знаком плюс или минус, равен вектору напряженности поля E :

$$\text{grad } \varphi = \pm E. \quad (1-6)$$

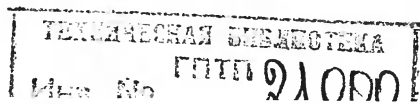
В теории поля выбирают знак минус, который указывает на то, что напряженность поля направлена в сторону убывания φ . Скалярная функция φ называется потенциальной функцией или просто потенциалом.

Приращение потенциала между двумя бесконечно близкими точками поля равно $d\varphi = -E dl$. Если точки находятся на линии вектора E , то $d\varphi = -E dn$, где dn — расстояние между выбранными точками.

Потенциал любой точки поля можно определить из выражения

$$\varphi = - \int E dl + \text{const}. \quad (1-7)$$

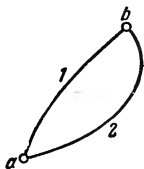
Постоянная интегрирования определяется заданием точки с нулевым потенциалом. Потенциал измеряется в вольтах (в).



Разность потенциалов между двумя точками поля a и b и напряженность поля связаны соотношением

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1-8)$$

Легко показать, что разность потенциалов не зависит от формы пути интегрирования, а зависит только от положения начальной и конечной точек. Проведем в поле произвольную замкнутую кривую $a-1-b-2-a$ (рис. 1-2).



Так как циркуляция вектора $\mathbf{E}$ равна нулю, то

$$\oint_{a1b2a} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

Рис. 1-2. Перемещение из одной точки поля в другую по двум путям.

Разобьем этот интеграл на два интеграла; их сумма равна нулю:

$$\int_{a1b} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{b2a} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

или

$$\int_{a1b} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{b2a} \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Если изменить направление обхода $b2a$ на обратное, то знак интеграла при этом изменится и

$$\int_{a1b} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{a2b} \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

т. е. значение линейного интеграла не зависит от выбора пути, а зависит только от положения точек a и b .

Потенциал поля точечного заряда легко найти, подставив в формулу (1-7) значение $\mathbf{E}$ из формулы (1-2):

$$\varphi = - \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R d\mathbf{l} + \text{const.}$$

Так как $\mathbf{1}_R d\mathbf{l} = dR$, то

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R} + \text{const.}$$

Если принять потенциал равным нулю при $R = \infty$, то постоянная интегрирования обратится в нуль и

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R}. \quad (1-9)$$

Потенциал поля неподвижных объемных, поверхностных и линейных зарядов можно получить методом наложения

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_a R} + \int \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_a R} + \int \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R}.$$

Зная потенциал, можно найти напряженность электрического поля по формуле (1-6):

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.$$

В поле объемных зарядов вектор $\mathbf{E}$ везде конечен и непрерывен. В поле поверхностных зарядов вектор $\mathbf{E}$ конечен всюду, но претерпевает разрыв на поверхности S , по которой распределен заряд. В поле линейных зарядов вектор $\mathbf{E}$ обращается в бесконечность на линии L , вдоль которой распределен заряд.

1-5. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электростатическое поле графически изображается с помощью эквипотенциальных поверхностей и линий вектора поля. Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $\varphi = \text{const}$.

Задавая различные значения постоянной, получают семейство поверхностей. Для наглядности на чертеже эквипотенциальные поверхности наносятся так, чтобы разность потенциалов двух соседних поверхностей отличалась на одну и ту же величину:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi; \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \Delta\varphi = \varphi_1 + 2\Delta\varphi;$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi = \varphi_1 + n\Delta\varphi.$$

Там, где эквипотенциальные поверхности располагаются ближе, напряженность поля больше. Эквипотенциальные поверхности друг с другом не пересекаются, так как потенциал — функция однозначная. След пересечения эквипотенциальной поверхности с плоскостью чертежа называют эквипотенциальной линией. Кроме эквипотенциальных поверхностей, изображают на чертеже линии вектора. Это кривые, в каждой точке которых направление вектора поля совпадает с касательной. Линии вектора напряженности электростатического поля пересекаются с эквипотенциальными поверхностями под прямым углом. Дифференциальное уравнение линий вектора можно записать как

$$[\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}] = 0. \quad (1-10)$$

В этом выражении $d\mathbf{l}$ — элемент линии вектора. В декартовой системе координат произведение распадается на три уравнения (см. приложение 2):

$$E_y dz - E_z dy = 0; \quad E_z dx - E_x dz = 0;$$

$$E_x dy - E_y dx = 0.$$

Линии вектора можно изобразить на чертеже следующим образом. Одна из эквипотенциальных поверхностей разбивается на прямоугольные площадки. Размер площадок подбирается таким образом, чтобы поток вектора поля сквозь них имел одну и ту же величину. На чертеж наносится по одной линии вектора на каждую площадку, причем так, чтобы эта линия проходила через центр площадки. При таком изображении в тех областях поля, в которых напряженность больше, линии вектора сгущаются.

В электростатическом поле линии вектора разомкнутые кривые. Они начинаются у положительных зарядов и кончаются у отрицательных. Если бы линия вектора была замкнута, циркуляция $\mathbf{E}$ вдоль нее не могла бы равняться нулю, а это противоречило бы основному уравнению электростатики

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0.$$

1-6. ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ ДИЭЛЕКТРИКА И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Как было указано выше (1-2), напряженность поля $\mathbf{E}$, возбужденного зарядом Q , в вакууме и в непроводящем веществе неодинакова. В непроводящей среде напряженность электрического поля в ϵ раз меньше, чем в пустоте. Изменение напряженности вызывается поляризацией диэлектрика.

Поляризация может происходить различным образом в зависимости от строения молекул диэлектрика. При отсутствии внешнего поля диэлектрик в целом можно считать электрически нейтральным. При наличии внешнего поля диэлектрик перестает быть нейтральным — он поляризуется. Заряды, выявившиеся при поляризации, связаны с молекулами и могут лишь незначительно перемещаться только

внутри этих молекул. Такие заряды называют *с в я з а н н ы м и*. В отличие от них заряды, которые можно перенести с одного тела на другое, называют *с в о б о д н ы м и*. Связанные заряды при поляризации создадут свое поле, напряженность которого будет направлена противоположно напряженности внешнего поля. Поэтому напряженность результирующего поля в диэлектрике будет меньше, чем напряженность внешнего поля. Степень поляризации диэлектрика характеризуется *в е к т о р о м п о л я р и з о в а н н о с т и* $\mathbf{P}$, который для однородных и изотропных диэлектриков в относительно слабых полях пропорционален напряженности электрического поля

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 k_3 \mathbf{E}. \quad (1-11)$$

Безразмерная величина k_3 называется *д и э л е к т р и ч е с к о й в о с п р и м ч и в о с т ь ю*.

Поляризованность среды $\mathbf{P}$ показывает, насколько электрическая индукция в данной среде отличается от электрической индукции в вакууме:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E}.$$

Следовательно,

$$k_3 = \epsilon - 1.$$

Поляризованность $\mathbf{P}$, так же как и электрическое смещение $\mathbf{D}$, измеряется в кулонах на квадратный метр (к/м^2).

1-7. ТЕОРЕМА ГАУССА

Теорема Гаусса является одной из фундаментальных теорем теории поля. Она гласит: *поток вектора электрической индукции $\mathbf{D}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме свободных зарядов Q , расположенных в объеме, ограниченном этой поверхностью*

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = \sum Q. \quad (1-12)$$

Докажем вначале эту теорему для случая, когда имеется один точечный заряд. Поверхность S выбирается произвольно. Электрическая индукция в этом случае $\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{1}_R$, а ее поток

$$\oint_S \frac{Q}{4\pi R^2} \mathbf{1}_R \, d\mathbf{S}.$$

$$\frac{1_R dS}{R^2} = \frac{dS_R}{R^2} = d\Omega$$

представляет собой телесный угол. Под углом $d\Omega$ виден элемент поверхности dS , если вершина телесного угла совмещена с точкой, в которой находится заряд Q (рис. 1-3). Телесный угол, под которым видна вся поверхность S , равен 4π стерadian.

Подставив значение $d\Omega$, получим:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \frac{Q}{4\pi} \oint_S d\Omega = Q.$$

Так как $\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}$, то

$$\oint_S \epsilon_a \mathbf{E} dS = Q.$$

Если $\epsilon_a = \text{const}$, то

$$\oint_S \mathbf{E} dS = \frac{Q}{\epsilon_a}.$$

Докажем теорему для случая произвольно распределенного заряда. Любая система зарядов может быть разложена на элементарные заряды dQ , каждый из которых можно считать точечным. Для каждого такого элементарного заряда справедлива теорема Гаусса. Суммируя элементарные потоки и заряды в объеме, ограниченном поверхностью S , получаем:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \Sigma Q,$$

где ΣQ — алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри объема, ограниченного поверхностью S .

Если заряд расположен вне объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , то поток

Рис. 1-3. Поток вектора смещения сквозь замкнутую поверхность.

вектора $\mathbf{D}$ сквозь такую поверхность равен нулю. Теорема Гаусса широко используется при расчете электрических полей.

1-8. ТЕОРЕМА ГАУССА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Преобразуем поток вектора электрической индукции по теореме Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV.$$

В случае объемного распределения заряда $Q = \int_V \rho dV$.

Так как по теореме Гаусса

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q,$$

то

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V \rho dV.$$

Объем V был выбран произвольно, и равенство справедливо для всех его значений. При таком условии подынтегральные функции должны быть равны и

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (1-13)$$

Полученное выражение представляет собой дифференциальную форму теоремы Гаусса. Оно отмечает то обстоятельство, что *источники электрического поля находятся только в тех местах, в которых имеются электрические заряды.*

Для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью ϵ можно записать:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (1-14)$$

Формулы (1-13) и (1-14) справедливы и в случае переменного во времени электромагнитного поля.

1-9. УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Как было показано выше, электростатическое поле можно рассчитать, пользуясь методом наложения и выражениями напряженности и потенциала поля точечного заряда или пользуясь интегральной теоремой Гаусса. Оба метода расчета применимы только при расчете полей простой конфигурации.

В общем случае расчет поля состоит в решении уравнений Пуассона и Лапласа.

Чтобы получить эти уравнения, используем соотношения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a};$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Подставив $\mathbf{E}$, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Дивергенцию градиента принято называть лапласианом и обозначать $\nabla^2 \varphi$. Следовательно,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \quad (1-15)$$

В тех точках поля, в которых нет заряда,

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (1-16)$$

Формула (1-15) носит название уравнения Пуассона. Формула (1-16) — уравнения Лапласа. Решение может быть записано в виде интеграла:

$$\varphi = \int_V \frac{\rho dV}{4\pi\varepsilon_a R}. \quad (1-17)$$

Введение понятия потенциала облегчает расчет электростатических полей. Он сводится к определению одной скалярной функции φ , зная которую, можно легко определить напряженность поля из выражения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Непосредственное определение напряженности поля из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

свелось бы к нахождению трех скалярных функций, соответствующих трем проекциям вектора $\mathbf{E}$, что значительно сложнее.

1-10. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Покажем, что если найдена напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, которая удовлетворяет уравнениям электростатического поля и заданным граничным условиям, то это решение является единственным.

Пусть E_1 такое решение. Тогда $\operatorname{div}(\epsilon_a E_1) = \rho$ и $\operatorname{rot} E_1 = 0$.

Предположим, что имеется другое решение E_2 . Тогда должны иметь место равенства $\operatorname{div}(\epsilon_a E_2) = \rho$ и $\operatorname{rot} E_2 = 0$.

Найдем дивергенцию и ротор вектора разности $E_1 - E_2$:

$$\operatorname{div}(E_1 - E_2) = \operatorname{div} E_1 - \operatorname{div} E_2 = 0;$$

$$\operatorname{rot}(E_1 - E_2) = \operatorname{rot} E_1 - \operatorname{rot} E_2 = 0.$$

Если у какого-либо вектора, в данном случае $E_1 - E_2$, и дивергенция и ротор во всех точках поля равны нулю, то такой вектор равен нулю: $E_1 - E_2 = 0$. Следовательно, $E_1 = E_2$, т. е. оба решения одинаковы.

1-11. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Если проводнику сообщить заряд, то под действием сил отталкивания элементы этого заряда будут перемещаться по проводнику и сосредоточиваться на его поверхности в слое, который можно считать бесконечно тонким. Внутри проводника электростатическое поле существовать не может. Напряженность электрического поля E внутри проводника должна равняться нулю. Все точки проводника должны иметь один и тот же потенциал, а это значит, что *поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность*.

Если внести металлический проводник во внешнее электрическое поле, то под действием сил поля свободные электроны начнут перемещаться по проводнику. На одной части поверхности проводника сосредоточатся отрицательные заряды, на противоположной — положительные. Напряженность электрического поля внутри проводника станет равной нулю. Поверхность проводника будет границей электростатического поля, которое локализовано в диэлектрике, окружающем проводник.

Описанное свойство проводников используют в технике при электростатическом экранировании электрической аппаратуры. Экранируемый аппарат помещают в металлическую сетку — экран. В каком бы внешнем электростатическом поле ни находился сетчатый экран, в области, ограниченной этим экраном, электростатического поля практически не будет.

1-12. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

На границе двух различных сред векторы поля должны удовлетворять определенным условиям, которые называются граничными.

Рассмотрим границу двух непроводящих сред, диэлектрические проницаемости которых равны ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 1-4). Пусть на границе этих сред имеется свободный заряд с поверхностной плотностью σ . Проведем замкнутую цилиндрическую поверхность S так, чтобы одна ее половина была расположена в первом диэлектрике, другая во втором. По теореме Гаусса поток вектора электрической индукции будет равен зарядам, которые находятся внутри объема, ограниченного замкнутой поверхностью S :

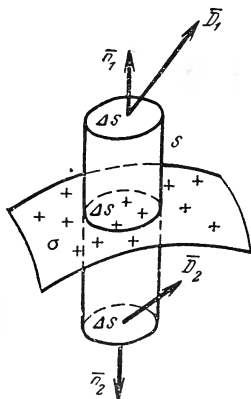


Рис. 1-4. Граничные условия для вектора смещения.

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \sigma \Delta S.$$

Представим поток вектора $\mathbf{D}$ в виде суммы трех потоков:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \int_{\Delta S} \mathbf{D}_1 dS + \int_{\Delta S} \mathbf{D}_2 dS + \int_{S_{\text{бок}}} \mathbf{D} dS.$$

Если площадка ΔS невелика, то можно считать, что во всех точках этой площадки вектор $\mathbf{D}$ имеет одну и ту же величину, тогда

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_1 dS = D_{1n} \Delta S;$$

$$\int_{\Delta S} \mathbf{D}_2 dS = -D_{2n} \Delta S.$$

Если высоту цилиндра уменьшать так, чтобы площадки ΔS стремились к границе между диэлектриками, то поток через боковую поверхность будет стремиться к нулю. В пределе он обратится в нуль, и тогда $D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = \sigma\Delta S$. После сокращения на ΔS мы получим первое граничное условие:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma$$

или

$$\epsilon_{1a} E_{1n} - \epsilon_{2a} E_{2n} = \sigma. \quad (1-18)$$

Нормальная составляющая вектора электрической индукции на границе двух непроводящих сред претерпевает скачок, равный поверхностной плотности свободных зарядов, распределенных на границе.

Если $\sigma = 0$, то

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad \varepsilon_{1a} E_{1n} = \varepsilon_{2a} E_{2n}. \quad (1-19)$$

Нормальная составляющая вектора D на границе непрерывна.

Для получения второго граничного условия проведем замкнутую линию L так, чтобы одна ее часть находилась в первом диэлектрике, другая — во втором (рис. 1-5). Зададимся направлением обхода по часовой стрелке и составим циркуляцию вектора напряженности по контуру 1-2-3-4. В электростатическом поле циркуляция вектора E равна нулю.

Представим циркуляцию в виде четырех линейных интегралов:

$$\int_{12} E_1 dl + \int_{23} E dl + \int_{34} E_2 dl + \int_{41} E dl = 0.$$

Если длина отрезка Δl невелика, то вектор E можно считать одинаковым на всем отрезке. Тогда

$$\int_{12} E_1 dl = E_{1\tau} \Delta l;$$

$$\int_{34} E_2 dl = E_{2\tau} \Delta l.$$

Если отрезки 2-3 и 4-1 постепенно уменьшать так, чтобы в пределе они стали равными нулю, а отрезки Δl совпали с граничной поверхностью, то остальные два интеграла обратятся в нуль и $E_{1\tau} \Delta l - E_{2\tau} \Delta l = 0$. После сокращения на Δl получим второе граничное условие:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}. \quad (1-20)$$

На границе двух непроводящих сред касательные составляющие вектора напряженности электрического поля равны. Надо отметить, что на поверхности раздела двух сред потенциал непрерывен $\varphi_1 = \varphi_2$.

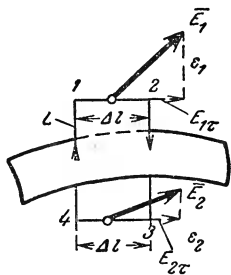


Рис. 1-5. Граничные условия для вектора напряженности.

Если одна из сред проводящая, то граничные условия несколько изменятся. В проводящей среде векторы поля равны нулю, а потенциал всех точек проводника один и тот же. Пусть первая среда диэлектрик с проницаемостью ϵ , вторая — проводник; тогда граничные условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} E_2 &= 0; \quad D_2 = 0; \quad \varphi_2 = \text{const}; \\ D_{1n} &= D_1 = \sigma, \text{ или } \epsilon_a E_1 = \sigma; \\ E_{1\tau} &= 0, \text{ или } D_{1\tau} = 0. \end{aligned}$$

1-13. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Для того чтобы два одноименных точечных заряженных тела с зарядами Q_1 и Q_2 приблизились друг к другу, необходимо совершить работу против действия сил отталкивания. Энергия взаимодействия двух зарядов равна этой работе. Если один из зарядов останется неподвижным, а другой будет иметь возможность перемещаться, то силы поля совершат работу за счет убыли энергии взаимодействия. Если один из зарядов удалится в бесконечность, то совершенная при этом работа будет равна всей энергии взаимодействия.

При перемещении заряда Q_2 из точки 2, в которой напряженность поля равна E_2 , в бесконечность работа сил поля

$$\int_2^{\infty} F dl = \int_2^{\infty} E_2 Q_2 dl = Q_2 \int_2^{\infty} E_2 dl.$$

Так как потенциал в точке 2 от заряда Q_1 равен $\varphi_2 = - \int_2^{\infty} E_2 dl$, то выполненная работа равна $-Q_2 \varphi_2$, а равная ей и противоположная по знаку энергия взаимодействия $W_9 = Q_2 \varphi_2$.

При перемещении заряда Q_1 из точки 1 в бесконечность совершается такая же по величине работа; следовательно, энергия взаимодействия равна $W_9 = Q_1 \varphi_1$.

Удобно энергию взаимодействия зарядов записать следующим образом:

$$W_9 = \frac{Q_1 \varphi_1 + Q_2 \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 Q_k \varphi_k.$$

Можно показать, что в случае n зарядов энергия взаимодействия запишется следующим образом:

$$W_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k \varphi_k. \quad (1-21)$$

Формула (1-21) учитывает только энергию взаимодействия. Собственная энергия точечного заряда формально равна бесконечности, так как, для того чтобы сосредоточить заряд конечной величины в точке, надо было бы затратить бесконечно большую работу. Следовательно, формулой (1-21), так же как и остальными формулами, полученными на основании закона Кулона, можно пользоваться тогда, когда заряды отстоят друг от друга на расстояниях, значительно больших, чем размеры тел, несущих эти заряды.

1-14. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если поле возбуждается объемными и поверхностными зарядами, то элементарные заряды $dQ = \rho dV$ и $dQ = \sigma dS$ можно считать точечными и использовать формулу (1-21).

Энергия электростатического поля W_0 может быть записана следующим образом:

$$W_0 = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV + \oint_S \frac{\varphi \sigma dS}{2}. \quad (1-22)$$

Теоретически границами поля являются бесконечно удаленные точки, в которых $E = 0$, и поверхности проводников, на которых $\varphi = \text{const}$; практически же границы поля будут там, где оно перестает проявляться с избранной степенью точности.

Выражение энергии электрического поля можно записать и в другой форме. Из курса векторного анализа известно, что дивергенция произведения скаляра φ и вектора $\mathbf{D}$ равна (см. приложение 2):

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div} \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{grad} \varphi.$$

Используя это, можно записать:

$$\frac{1}{2} \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \int_V \frac{\varphi \text{div} \mathbf{D}}{2} dV + \int_V \frac{\mathbf{D} \text{grad} \varphi}{2} dV.$$

Так как $\text{div} \mathbf{D} = \rho$; $\text{grad} \varphi = -\mathbf{E}$;

$$\int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_S \varphi \mathbf{D} dS,$$

то

$$\oint_S \frac{\varphi \mathbf{D}}{2} dS = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV.$$

На поверхности проводника плотность заряда равна электрическому смещению. Если рассмотреть точку на поверхности проводника, то при противоположных направлениях положительной нормали к поверхности и вектора $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} d\mathbf{S} = -D dS = -\sigma dS.$$

Тогда

$$-\oint_S \frac{\varphi \sigma}{2} dS = \int_V \frac{\varphi \rho}{2} dV - \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV$$

и энергия электрического поля

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\rho \varphi}{2} dV + \oint_S \frac{\sigma \varphi}{2} dS = \int_V \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} dV.$$

В однородных и изотропных средах $\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$ и, следовательно,

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\varepsilon_a E^2}{2} dV. \quad (1-23)$$

Формула (1-23) позволяет определить энергию электрического поля как в отдельных областях, так и во всем поле; для этого только надо взять соответствующие пределы интегрирования.

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что носителем энергии является электрическое поле, причем энергия распределена во всем пространстве с объемной плотностью

$$\frac{dW_{\text{э}}}{dV} = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{2} = \frac{\varepsilon_a E^2}{2}.$$

Там, где напряженность E отлична от нуля, силы поля могут совершить работу за счет энергии поля.

1-15. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Если заряженные тела меняют свое положение в пространстве, то энергия электрического поля изменяется. Рассмотрим поле заряженных проводников. Пусть перемеще-

ние этих проводников происходит настолько медленно, что магнитные явления можно не принимать во внимание. Перемещение тел в поле может совершаться как силами поля, так и внешними силами, причем могут встретиться два случая: 1) заряды проводников при перемещении остаются неизменными и 2) потенциалы проводников при перемещении остаются неизменными.

Рассмотрим первый случай. Заряженные проводники, изолированные от источников энергии, перемещаются за счет сил поля на бесконечно малое расстояние. Работу сил поля обозначим $dW_{\text{мех}}$. Энергия электрического поля уменьшится на величину $dW_{\text{э}}$. По закону сохранения энергии $dW_{\text{мех}} + dW_{\text{э}} = 0$. Следовательно,

$$dW_{\text{мех}} = -dW_{\text{э}} = -d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k Q_k}{2}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k d\varphi_k.$$

В связи с уменьшением энергии уменьшаются и потенциалы всех точек поля. Если работа, затраченная на перемещение заряженных проводников, совершается внешними силами, то энергия поля возрастает:

$$dW_{\text{мех}} = dW_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_k d\varphi_k,$$

и потенциалы точек поля увеличиваются. Заряды при этом остаются неизменными.

Во втором случае потенциалы проводников принимают неизменными. Для этого необходимо, чтобы проводники были соединены с источниками энергии. Энергия, отдаваемая источниками $dW_{\text{ист}}$, должна равняться работе сил поля $dW_{\text{мех}}$, затраченной на перемещение заряженных тел плюс приращение энергии электрического поля

$$dW_{\text{ист}} = dW_{\text{мех}} + dW_{\text{э}}.$$

Если заряд k -го проводника меняется на величину dQ_k , то энергия, отданная источником, равна $\varphi_k dQ_k$. Энергия, затраченная источником при бесконечно малом изменении заряда всех проводников, равна:

$$dW_{\text{ист}} = \sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

Изменение энергии электрического поля можно записать следующим образом:

$$dW_{\text{э}} = d\left(\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k Q_k}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

Следовательно,

$$dW_{\text{э}} = \frac{1}{2} dW_{\text{ист}}.$$

Работа сил поля равна:

$$dW_{\text{мех}} = dW_{\text{ист}} - dW_{\text{э}} = \frac{1}{2} dW_{\text{ист}}.$$

Энергия, отдаваемая источником, затрачивается поровну на работу сил поля и на изменение энергии электрического поля.

Если перемещение происходит за счет работы внешних сил, то

$$dW_{\text{вн}} = -dW_{\text{мех}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

Энергия электрического поля при этом уменьшается на величину

$$-dW_{\text{э}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

Следовательно, энергия источника равна:

$$dW_{\text{ист}} = -\sum_{k=1}^n \varphi_k dQ_k.$$

Знак минус указывает на то, что источник не затрачивает, а получает энергию.

В электрическом поле силы действуют не только на проводники. Если в поле находятся диэлектрики, проницаемость которых отлична от проницаемости окружающей среды, то на них также будут действовать силы. Величину силы, действующей на тела, помещенные в электрическое поле, определяют по формуле

$$dW_{\text{э}} = \pm F_l dl \quad \text{или} \quad F_l = \pm \frac{dW_{\text{э}}}{dl}.$$

Знак плюс берется при $\varphi_k = \text{const}$; знак минус — при $Q_k = \text{const}$.

1-16. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Расчет электростатических полей чаще всего сводится к определению напряженности поля E при заданном распределении зарядов, возбуждающих поле. Если непосредственное определение E приводит к математическим трудностям, удобнее определить вначале потенциал поля φ по заданному распределению зарядов, а затем, зная потенциал, определить напряженность E . Обратная задача заключается в определении закона распределения зарядов по заданной напряженности поля E .

Наиболее общим методом расчета полей является метод интегрирования уравнений поля. Однако в ряде случаев можно использовать частные методы, которые позволяют проще и быстрее решать поставленную задачу.

К ним относятся: метод наложения, метод зеркальных изображений, метод, основанный на применении теоремы Гаусса, метод конформных преобразований, графические методы и ряд других методов [Л. 6]. В некоторых случаях используются два или более метода одновременно.

Рассмотрим некоторые из перечисленных методов.

Метод наложения

Если распределение заряда в пространстве задано, то, разделив этот заряд на бесконечно малые элементы dQ и считая их точечными, можно определить потенциал и напряженность поля по формулам

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a R};$$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R.$$

Складывая алгебраические величины $d\varphi$, можно определить потенциал

$$\varphi = \int d\varphi = \int \frac{dQ}{4\pi\epsilon_a R}.$$

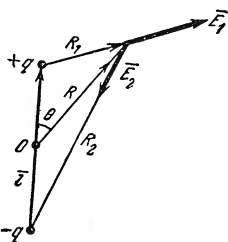
Напряженность E определится или интегрированием $E = \int dE$, или по формуле

$$E = -\text{grad } \varphi.$$

Пример 1-1. Определить поле электрического диполя.

Электрическим диполем называется совокупность двух разных по величине и противоположных по знаку точечных зарядов q , находящихся

на небольшом расстоянии l друг от друга (рис. 1-6). Отрезок l можно изобразить в виде вектора, направленного от отрицательного заряда к положительному. Он называется плечом диполя. Произведение заряда диполя q на плечо l называют моментом диполя $p = ql$. В некоторой точке поля потенциал от положительного заряда равен:



$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_a R_1}.$$

Потенциал от отрицательного заряда в той же точке

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_a R_2}.$$

Следовательно, результирующий потенциал в этой точке равен:

Рис. 1-6. Напряженность поля электрического диполя.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_a R_1 R_2}.$$

Для точек, достаточно удаленных от диполя ($R_1 \approx R_2 \gg l$), можно принять $R_1 \approx R_2 = R$; $R_2 - R_1 \approx l \cos \theta$. Тогда

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^2}.$$

Напряженность электрического поля определится по формуле $E = -\text{grad } \varphi$. Проекцию вектора E удобнее всего записать в сферической системе координат. Начало координат совместим с серединой отрезка l , а угол θ будем отсчитывать от направления вектора l по часовой стрелке. Проекции напряженности электрического поля при этих предположениях (см. приложение 3) равны:

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}; \\ E_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_a R^3}; \\ E_\psi &= -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Численное значение вектора E равно:

$$|E| = E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2 + E_\psi^2}.$$

Вектор электрической индукции определится из соотношения

$$D = \epsilon_a E.$$

При решении задачи была использована формула, определяющая потенциал точечного заряда, и применен метод наложения.

Пример 1-2. Положительный заряд Q равномерно распределен на кольцевой линии радиуса a . Определить потенциал и напряженность электрического поля точек, лежащих на оси z (рис. 1-7).

В точке k потенциал

$$\varphi_k = \oint_L \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_a R};$$

где $\tau = Q/2\pi a$ — линейная плотность заряда.

Расстояние любого элементарного заряда $dQ = \tau dl$ от точки k

$$R = \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Потенциал в искомой точке

$$\varphi_k = \int \frac{Q dl}{2\pi a \cdot 4\pi\epsilon_a \sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

В цилиндрической системе координат проекции напряженности электрического поля E запишутся следующим образом (см. приложение 3):

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0;$$

$$E_\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 0;$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_a (z^2 + a^2)^{3/2}} = E.$$

Поле обладает осевой симметрией, а также симметрией относительно плоскости, в которой распределен заряд. Поэтому потенциал

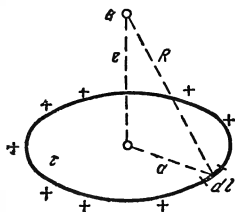


Рис. 1-7. Определение потенциала поля кольцевого заряда.

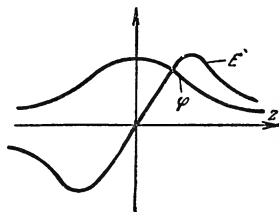


Рис. 1-8. Потенциал и напряженность поля.

точек, лежащих на оси, зависит только от координаты z , а вектор E имеет только одну проекцию E_z .

Читателю рекомендуется определить $E_{\text{макс}}$.

Кривые $\varphi = f_1(z)$ и $E = f_2(z)$ изображены на рис. 1-8.

Как и в примере 1-1, был использован метод наложения. Так как суммирование потенциалов от элементарных зарядов свелось к интегрированию простых функций, то целесообразность применения метода наложения очевидна.

Метод зеркальных изображений

Если электрические заряды расположены вблизи границы двух или нескольких разнородных сред, то векторы поля можно определить, применив искусственный метод расчета, который носит название метода зеркальных изображений. Идея метода заключается в том, что вместо неоднородной среды рассматриваются среды однородные, влияние же неоднородности учитывается введением фиктивных зарядов. Определив векторы поля от совместного действия этих зарядов, записывают граничные условия основной задачи и, пользуясь ими, находят величину введенных фиктивных зарядов и искомые векторы поля.

Пример 1-3. Заряд Q расположен в диэлектрике с проницаемостью ϵ на расстоянии d от проводящей плоскости (рис. 1-9). Требуется определить векторы поля в диэлектрике.

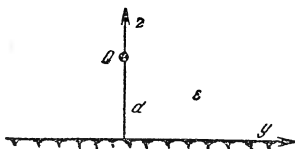


Рис. 1-9. Точечный заряд вблизи неограниченной проводящей плоскости.

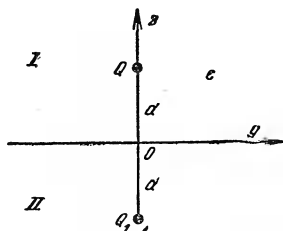


Рис. 1-10. Два точечных заряда в однородном диэлектрике.

Граничным условием для рассматриваемой задачи является равенство нулю касательной составляющей напряженности электростатического поля на проводящей поверхности. Покажем, что поле двух зарядов, заданного Q и фиктивного Q_1 , равноудаленных от граничной поверхности, т. е. отстоящих друг от друга на расстоянии $2d$, и расположенных в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ , такое же, как и исследуемое поле. Величина заряда Q_1 определится из граничного условия. В области I (рис. 1-10) заряд и среда такие же, как и в основной задаче. При одинаковых граничных условиях, по теореме единственности решения уравнений поля, векторы поля в обеих задачах должны быть одинаковыми. На плоскости xOy напряженность поля двух точечных зарядов по (1-2)

$$E_{\text{гр}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_R + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_a R^2} \mathbf{1}_{R_1}.$$

По условию касательная составляющая $E_{\text{гр}}$ равняется нулю, т. е.

$$\frac{Q \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_a R^3} + \frac{Q_1 \sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_a R^3} = 0.$$

Следовательно, $Q_1 = -Q$. Фиктивный заряд должен быть равен заданному по величине и иметь противоположный знак.

В любой точке пространства над плоскостью xOy , т. е. в объеме, занятом полем,

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R_I^3} \mathbf{1}_{RI} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R_{II}^3} \mathbf{1}_{RII};$$

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R_I} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_a R_{II}}.$$

Плотность поверхностных зарядов, индуцированных на граничной плоскости

$$\sigma_{\text{инд}} = -\epsilon_a E_{\text{нгр}} = -\frac{Qd}{2\pi R^3} = -\frac{Qd}{2\pi (x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}.$$

Можно показать, что весь заряд, индуцированный на граничной поверхности проводящей среды, равен фиктивному заряду. Для этого надо произведение $\sigma_{\text{инд}} dS$ проинтегрировать по всей плоскости xOy :

$$\begin{aligned} Q_{\text{инд}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\text{инд}} dS = 4 \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \sigma_{\text{инд}} dx = -\frac{2Qd}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{2Qd}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2 + d^2} = -\frac{2Qd}{\pi} \frac{1}{d} \arctg \frac{y}{d} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -Q. \end{aligned}$$

Следует заметить, что заряд Q притягивается к проводящей плоскости с силой

$$F = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_a d^2}.$$

В области под плоскостью xOy поля нет, так как среда, заполняющая эту область, проводящая.

Пример 1-4. Заряд Q расположен вблизи плоскости раздела двух диэлектриков (рис. 1-11) и отстоит от нее на расстоянии d . Проницаемость диэлектрика, в которой находится заданный заряд, равна ϵ_1 . Проницаемость второго диэлектрика ϵ_2 . Требуется определить напряженность электростатического поля и потенциал в обоих диэлектриках. На плоскости раздела должны иметь место следующие соотношения: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$. Второе соотношение справедливо в том случае, когда на поверхности раздела двух диэлектриков нет свободных зарядов. Решение рассматриваемой задачи можно свести к решению двух более простых задач. Рассмотрим первую из них.

В однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 на расстоянии $2d$ друг от друга расположены два точечных заряда Q и Q_1 . Заряды равноудалены от плоскости xOy (рис. 1-12). Сравнивая рис. 1-11 и рис. 1-12, можно установить, что для области I над плоскостью xOy условия обеих задач совпадают. Среда одинаковая, заряд один и тот же. Следовательно, если для произвольной точки, лежащей на плоскости xOy , в обеих задачах вектор E будет одинаковым, то и в любой точке области I на основании теоремы единственности решение уравнений поля должно быть одинаковым. Напряженность и потенциал поля двух то-

ческих зарядов можно определить методом наложения:

$$E = E' + E'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{1a}R_I^3} \mathbf{1}_{RI} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_{1a}R_{II}^3} \mathbf{1}_{RII};$$

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{1a}R_I} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_{1a}R_{II}},$$

где R_I и R_{II} — расстояния от зарядов Q и Q_1 соответственно до исследуемой точки.

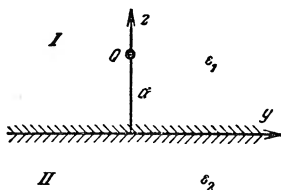


Рис. 1-11. Точечный заряд вблизи границы двух диэлектриков.

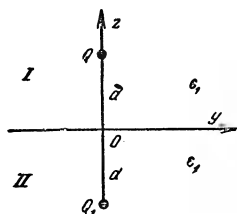


Рис. 1-12. Два точечных заряда в однородной среде.

Эти же формулы будут справедливы для основной задачи в области I, если будут выполнены граничные условия.

На плоскости xOy

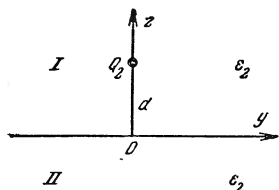


Рис. 1-13. Точечный заряд в диэлектрике.

$$E_\tau = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{1a}R^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_{1a}R^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R};$$

$$E_n = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_{1a}R^2} \frac{d}{R} + \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_{1a}R^2} \frac{d}{R}.$$

По условию $E_{1\tau} = E_\tau$; $E_{1n} = E_n$.

Рассмотрим вторую, простую задачу.

В однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_2 находится точечный заряд Q_2 . Он отстоит (рис. 1-13) на расстоянии d от плоскости xOy . Сравнивая рис. 1-11 и 1-13, находим, что для области II под плоскостью xOy условия обеих задач совпадают. Диэлектрик один и тот же; зарядов нет. Если на плоскости xOy значение вектора E в обеих задачах будет одинаковым, то по теореме единственности E в любой точке области II определится как напряженность поля точечного заряда Q_2 .

Для точечного заряда

$$E_{II} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_{2a}R^2} \mathbf{1}_R;$$

$$\varphi_{II} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_{2a}R}.$$

На плоскости xOy

$$E_{1\tau} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_{2a}R^2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R};$$

$$E_{1n} = -\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_{2a}R^2} \frac{d}{R}.$$

По условию необходимо, чтобы $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $E_{1n} = E_{2n}$. Учитывая граничные условия основной задачи (рис. 1-11), получаем:

$$\frac{Q\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_{1a}R^3} + \frac{Q_1\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_{1a}R^3} = \frac{Q_2\sqrt{x^2 + y^2}}{4\pi\epsilon_{2a}R^3};$$

$$-\frac{Qd}{4\pi R^3} + \frac{Q_1d}{4\pi R^3} = -\frac{Q_2d}{4\pi R^3}$$

или

$$Q + Q_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} Q_2;$$

$$-Q + Q_1 = -Q_2.$$

Пользуясь этими выражениями, можно определить неизвестные фиктивные заряды

$$Q_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q;$$

$$Q_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} Q.$$

Знаки зарядов Q и Q_2 всегда одинаковые. Знаки зарядов Q_1 и Q одинаковые при $\epsilon_1 > \epsilon_2$ и разные при $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Если $\epsilon_1 = \epsilon_2$, то заряд $Q = 0$, заряд $Q_2 = Q$. Получается поле точечного заряда в однородной среде. Если вторая среда является проводником, то можно положить $\epsilon_2 = \infty$, тогда $Q_1 = -Q$; $Q_2 = 0$.

Применение теоремы Гаусса

Пример 1-5. Найти напряженность электрического поля и потенциал, если заряд Q равномерно распределен в шаровой области радиуса a . Среда однородная и изотропная с диэлектрической проницаемостью ϵ . Начало сферической системы координат поместим в центре шаровой области. Проведем шаровую поверхность S радиуса $R > a$ (рис. 1-14).

Поле обладает шаровой симметрией. Поэтому вектор $\mathbf{D}$ имеет только радиальную проекцию. Для всех точек, имеющих одинаковое значение R , величина D будет одной и той же.

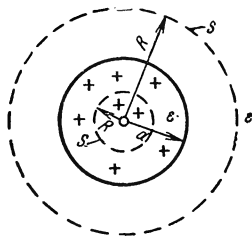


Рис. 1-14. Заряд, равномерно распределенный в объеме шара.

Целесообразно использовать теорему Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = D \oint_S dS = D \cdot 4\pi R^2 = Q.$$

Суммарный заряд внутри поверхности $Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$, где ρ — объемная плотность заряда.

По теореме Гаусса

$$4\pi R^2 D = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho,$$

откуда

$$D = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{a^3 \rho}{3R^2}.$$

Напряженность электрического поля

$$E = \frac{D}{\epsilon_a} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a R^2}.$$

Поле вне области $R = a$ получилось таким же, как и поле точечного заряда Q , расположенного в точке $R = 0$. Так как радиус R был выбран произвольно, то полученные формулы справедливы для всех значений $R > a$.

Проведем шаровую поверхность S для области $R < a$. Заряд внутри объема, ограниченного этой поверхностью, равен $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho$. Поэтому, пользуясь теоремой Гаусса, можно записать:

$$4\pi R^2 D = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho,$$

откуда

$$D = \frac{R\rho}{3} = \frac{QR}{4\pi a^3}$$

и соответственно

$$E = \frac{R\rho}{3\epsilon_a} = \frac{QR}{4\pi \epsilon_a a^3}.$$

Потенциал поля определится по формуле (1-7).

При $R > a$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a R} + \text{const.}$$

Положив $\varphi = 0$ при $R = \infty$, получим постоянную интегрирования $\text{const} = 0$ и

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi \epsilon_a R} = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_a R}.$$

При $R < a$

$$\varphi = -\frac{R^2 \rho}{6\epsilon_a} + \text{const.}$$

Потенциал непрерывен и однозначен, следовательно, при $R = a$

$$\Phi_{R>a} = \Phi_{R<a},$$

откуда

$$\text{const} = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_a}.$$

Поэтому потенциал в области $R < a$

$$\Phi = \frac{\rho (3a^2 - R^2)}{6\epsilon_a}.$$

Кривые $\Phi = f_1(R)$ и $E = f_2(R)$ показаны на рис. 1-15.

Подсчитаем энергию электрического поля в объеме $V_1 = \frac{4}{3} \pi a^3$:

$$W_\Phi = \int_{V_1} \frac{\rho \Phi_{R<a}}{2} dV.$$

Вне области V_1 при $R > a$ нет свободных объемных зарядов ρ . Подставив значение $\Phi_{R<a}$ и учитывая, что $dV = 4\pi R^2 dR$, найдем:

$$W_\Phi = \frac{\pi a^5 \rho^2}{3\epsilon_a} - \frac{\pi \rho^2}{3\epsilon_a} \int_0^a R^4 dR = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_a}.$$

Воспользуемся формулой (1-23):

$$W_\Phi = \int_{V_1} \frac{\epsilon_a E_{R<a}^2}{2} dV + \int_{V_2} \frac{\epsilon_a E_{R>a}^2}{2} dV,$$

где V_1 — объем шаровой области радиуса $R = a$; V_2 — весь объем пространства вне V_1 .

Подставив значения $E_{R<a}$ и $E_{R>a}$, получим:

$$W_\Phi = \int_0^a \frac{\epsilon_a R^2 \rho^2 \cdot 4\pi R^2 dR}{2 \cdot 9\epsilon_a^2} + \int_0^\infty \frac{\epsilon_a a^6 \rho^2 \cdot 4\pi R^2 dR}{2 \cdot 9R^4 \epsilon_a^2} = \frac{4\pi \rho^2 a^5}{15\epsilon_a}.$$

В области V_1 сосредоточена $1/6$ часть энергии поля. Остальная часть энергии находится в области V_2 .

Рассмотренный пример показывает, что теорему Гаусса целесообразно использовать в тех случаях, когда поле симметричное.

Пример 1-6. Металлический цилиндр круглого сечения находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ .

Длина цилиндра L намного больше его радиуса a .

Цилиндр несет на себе положительный заряд Q . Требуется определить напряженность электрического поля E и потенциал Φ . Внутри цилиндра поля нет: $E = 0$. Все точки цилиндра имеют один и тот же потенциал. Вне цилиндра поле симметрично и плоскопараллельно.

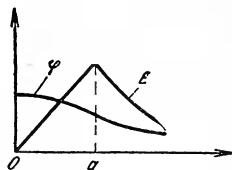


Рис. 1-15. Потенциал и напряженность поля объемного заряда.

Изменение характера поля вблизи концов цилиндра можно не учитывать, т. е. считать его бесконечно длинным. Напряженность поля E имеет одинаковые значения в точках, равноудаленных от оси цилиндра. Направление вектора E нормально к оси. Проведем замкнутую поверх-

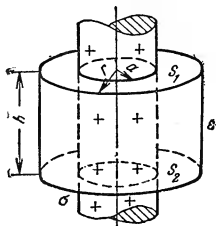


Рис. 1-16. Заряженный металлический цилиндр.

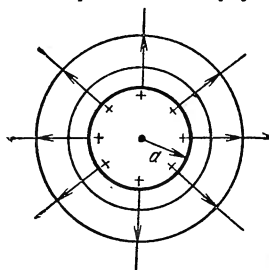


Рис. 1-17. Поле заряженного цилиндра.

ность S так, как показано на рис. 1-16, и применив теорему Гаусса, можно записать:

$$\oint_S E dS = \frac{Q_S}{\epsilon_a} = \frac{2\pi a h \sigma}{\epsilon_a}$$

или

$$E \int_{S_{\text{бок}}} dS + \int_{S_1} E dS \cos 90^\circ + \int_{S_2} E dS \cos 90^\circ = \frac{2\pi a h \sigma}{\epsilon_a}.$$

Так как

$$\int_{S_{\text{бок}}} dS = 2\pi r h,$$

то

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_a r L},$$

а

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_a r L} 1_r.$$

Чтобы найти потенциал, надо воспользоваться формулой (1-7):

$$\varphi = - \int E dl + \text{const} = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_a L} \int \frac{dr}{r} + \text{const} = - \frac{Q}{2\pi \epsilon_a L} \ln r + \text{const}.$$

Картина поля изображена на рис. 1-17.

Эквипотенциальные поверхности будут цилиндрическими, коаксиальными с поверхностью проводника. Линии вектора E представляют собой радиальные прямые.

Как видно из полученных формул, E и φ меняются при изменении расстояния r от выбранной точки поля до оси цилиндра, а от радиуса цилиндра a не зависят. Это обстоятельство позволяет при исследовании

поля заменить металлический цилиндр конечного радиуса заряженной осью, совпадающей с осью проводника. Поле в области $r \geq a$ при такой замене останется без изменения, конечно, при условии, что заряд в обоих случаях один и тот же.

В отличие от поля цилиндра поле заряженной оси будет существовать во всем пространстве, причем если линейную плотность заряда принять равной $\tau = Q/l$, то напряженность электрического поля заряженной оси будет равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r} 1_r, \quad (1-24)$$

а потенциал определится из выражения

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln r + \text{const.} \quad (1-25)$$

В случае коаксиального кабеля с внутренним проводником радиуса a и наружным проводником радиуса b выражения E и φ в диэлектрике между проводами ($a \leq r \leq b$) будут такими же, как и в случае одного заряженного цилиндра,

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a r l} 1_r;$$

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln r + \text{const.}$$

Здесь Q — абсолютное значение заряда одного из проводников кабеля; l — длина кабеля. Если потенциал наружного проводника принять равным нулю, то постоянная интегрирования определится из выражения

$$0 = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln b + \text{const}$$

и потенциал равен:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{b}{r}. \quad (1-26)$$

В области $0 \leq r \leq a$ и $b \leq r \leq \infty$ поля нет.

Пример 1-7. Поле двух параллельных разноименно заряженных осей.

Две параллельные оси, отстоящие друг от друга на расстоянии $2x_0$, несут одинаковый по величине и противоположный по знаку заряд Q . Линейная плотность заряда равна:

$$\pm \tau = \frac{\pm Q}{l} = \text{const.}$$

Пользуясь методом наложения и формулами (1-24) и (1-25), для заряженной оси можно записать:

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_1} 1_{r1} - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a r_2} 1_{r2}; \\ \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_a} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{const.} \end{aligned} \quad (1-27)$$

где r_1 — расстояние от выбранной точки поля до положительно заряженной оси; r_2 — до отрицательно заряженной оси.

Если принять потенциал равным нулю при $r_1 = r_2$, то постоянная интегрирования обратится в нуль. Картина поля изображена на рис. 1-18. Следы пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью xOy — окружности, удовлетворяющие равенству $r_2/r_1 = \text{const} = k$.

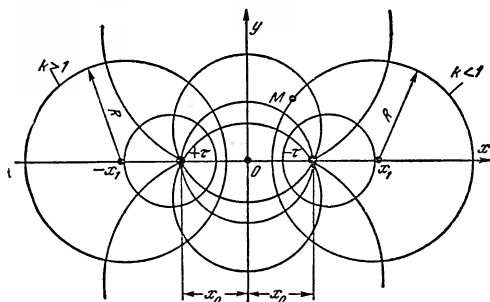


Рис. 1-18. Поле двух разноименно заряженных осей.

Обозначим x и y координаты произвольной точки M , через которую проходит эквипотенциальная линия. Расстояние от точки M до положительно заряженной оси равно (рис. 1-18):

$$r_1 = \sqrt{(x_0 + x)^2 + y^2}.$$

От отрицательно заряженной оси расстояние до точки M равно:

$$r_2 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}.$$

Отношение их равно:

$$k = \frac{\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(x_0 + x)^2 + y^2}}.$$

После преобразований можно записать равенство

$$x^2 - 2x_0x \frac{1+k^2}{1-k^2} + y^2 = -x_0^2,$$

прибавив к обеим частям которого величину

$$x_0^2 \frac{(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2},$$

получим уравнение искомой эквипотенциальной линии:

$$\left(x - x_0 \frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4k^2 x_0^2}{(1-k^2)^2}.$$

Это уравнение окружности с радиусом

$$R = \pm \frac{2kx_0}{1-k^2}$$

и координатами центра

$$x_1 = \pm x_0 \frac{1+k^2}{1-k^2}; \quad y_1 = 0.$$

Знак плюс берется при $k < 1$, т. е. для полупространства с отрицательно заряженной осью, а знак минус — при $k > 1$, т. е. для полупространства с положительно заряженной осью. В первом случае окружности расположены справа от оси Oy , во втором случае — слева.

Величины x_0 , x_1 и R связаны соотношением

$$x_0^2 = x_1^2 - R^2, \quad (1-28)$$

в чем можно убедиться, подставив значения x_1 и R . Можно показать, что линии вектора E представляют собой семейство окружностей

$$x^2 + (y - y_1)^2 = x_0^2 + y_1^2,$$

которые проходят через заряженные оси. Радиус их равен $\sqrt{x_0^2 + y_1^2}$, а координаты центров $x = 0$ и $y = y_1$.

Пример 1-8. Поле двухпроводной линии передачи электрической энергии.

Два параллельных цилиндрических провода радиуса a расположены на расстоянии $d \gg a$ друг от друга. Длина линии l . Заряд одного провода $+Q$, другого $-Q$. Диэлектрическая проницаемость окружающей

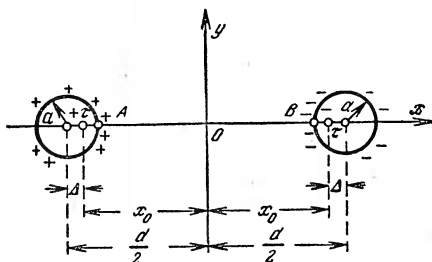


Рис. 1-19. Два параллельных заряженных цилиндра.

среды ϵ . Длина линии настолько велика, что искажением поля у концов линии можно пренебречь. Так как заряды влияют друг на друга, то распределение их по поверхности проводов будет неравномерным. Чтобы найти потенциал и напряженность электростатического поля линии, надо определить такое расположение двух фиктивных заряженных осей, при котором поверхность проводов линии совпадает с соответствующими эквипотенциальными поверхностями этих осей. Поле вне проводов такое же, как поле заряженных осей. Внутри проводов электростатического поля нет. Пользуясь формулой (1-28) и учитывая (рис. 1-19), что $x_1 = 0,5 d$, $R = a$; $\tau = Q/l$, можно найти расстояние Δ между геометрическими осями проводов и фиктивными заряженными осями

$$\Delta = \frac{d}{2} - x_0 = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - a^2}$$

и потенциал любой точки $M(x, y)$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2} - \Delta - x\right)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2} - \Delta + x\right)^2 + y^2}}. \quad (1-29)$$

Пример 1-9. Емкость коаксиального кабеля.

Пользуясь формулой (1-26), можно записать потенциал внешнего и внутреннего проводников кабеля:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{b}{a}; \quad \varphi_2 = 0.$$

Емкость кабеля будет равна:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Подставив значения постоянных π , ϵ_0 и записав вместо натурального логарифма десятичный, получим формулу емкости единицы длины кабеля, приведенную в § 11-1 ч. I:

$$C_0 = \frac{0,241 \text{ в}}{\ln \frac{b}{a}} 10^{-10} \text{ ф/м.}$$

Пример 1-10. Емкость двухпроводной линии передачи электрической энергии.

Так как все точки одного провода в электрическом поле имеют одинаковый потенциал, то запишем его, пользуясь формулой (1-29) (рис. 1-19), для точки A с координатами $x = -\left(\frac{d}{2} - a\right)$, $y = 0$, и для точки B с координатами $x = \frac{d}{2} - a$, $y = 0$. Потенциалы этих точек

$$\varphi_A = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{d - a - \Delta}{a - \Delta};$$

$$\varphi_B = \frac{Q}{2\pi\epsilon_a l} \ln \frac{a - \Delta}{d - a - \Delta}.$$

Следовательно, емкость линии

$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{d - a - \Delta}{a - \Delta}}.$$

Так как $a \gg \Delta$, а $d \gg a$, то с достаточной степенью точности емкость двухпроводной линии можно считать равной:

$$C = \frac{\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{d}{a}}.$$

Для воздушной линии $\epsilon_a \approx \epsilon_0$. Подставив значения π , ϵ_0 и заменив натуральный логарифм десятичным, получим формулу емкости единицы длины линии, приведенную в § 11-1, ч. I:

$$C_0 = \frac{12,07}{\lg \frac{d}{a}} 10^{-12} \text{ ф/м.}$$

Метод интегрирования уравнений поля

Электростатическое поле описывается уравнениями Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_a}$$

и Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Уравнение Пуассона записывается для области, в которой распределены объемные заряды, а уравнение Лапласа описывает поле в остальном пространстве. Интегрирование должно быть выполнено с учетом граничных условий.

Точка нулевого потенциала задается произвольно. В поле объемных зарядов напряженность поля E должна быть конечной величиной. Рассмотрим следующую задачу.

В однородное электростатическое поле с напряженностью $E_0 = \text{const}$ помещен металлический шар радиуса a . Шар не заряжен. Диэлектрик, окружающий шар, имеет проницаемость ϵ . Определить напряженность поля вокруг шара. Начало сферических координат поместим в центре шара. Координату θ будем отсчитывать по часовой стрелке от направления вектора E_0 (рис. 1-20).

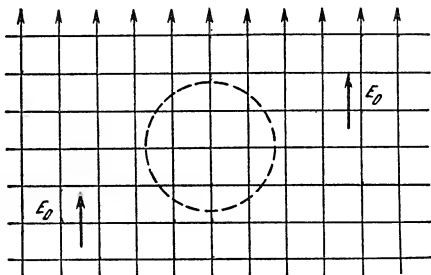


Рис. 1-20. Картина однородного поля.

Из соображений симметрии можно установить, что напряженность поля и потенциал будут зависеть только от двух сферических координат R и θ . Так как шар металлический, то внутри шара $E = 0$. Вне шара поле описывается уравнением Лапласа (см. приложение 3)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты R , другая только от θ :

$$\varphi = f_1(R) f_2(\theta) = f_1 f_2.$$

Чтобы определить эти функции, подставим их произведение в уравнение Лапласа. Получим:

$$f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial R^2} + \frac{2f_2}{R} \frac{\partial f_1}{\partial R} + \frac{f_1}{R^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} + \frac{f_1 \cos \theta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = 0.$$

Умножив обе части на $R^2/f_1 f_2$, получим:

$$\frac{R^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial R^2} + \frac{2R}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial R} = - \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{f_2 \sin \theta} \frac{\partial f_2}{\partial \theta}.$$

Равенство это должно быть справедливо при любых значениях R и θ . Это возможно лишь в том случае, когда каждая из частей уравнения равна некоторой постоянной. Обозначим эту постоянную через $k = \text{const}$.

Уравнение Лапласа разобьется на два уравнения:

$$- \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\theta^2} - \frac{\cos \theta}{f_2 \sin \theta} \frac{df_2}{d\theta} = k^2;$$

$$\frac{R^2}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dR^2} + \frac{2R}{f_1} \frac{df_1}{dR} = k^2.$$

Первое уравнение является частным случаем уравнения Лежандра, которое удовлетворяется специальными сферическими функциями, содержащими полиномы Лежандра.

В рассматриваемой задаче искомое решение равно $f_2(\theta) = \cos \theta$, причем постоянная k^2 должна быть равна 2. В этом легко убедиться подстановкой написанного решения в уравнение.

Второе уравнение примет вид:

$$R^2 \frac{d^2 f_1}{dR^2} + 2R \frac{df_1}{dR} - 2f_1 = 0.$$

Введем новую независимую переменную w так, чтобы $R = e^w$, тогда

$$dR = e^w dw; \quad \frac{dw}{dR} = e^{-w}.$$

Найдем

$$\frac{df_1}{dR} = \frac{df_1}{dw} \frac{dw}{dR} = e^{-w} \frac{df_1}{dw}$$

и

$$\frac{d^2 f_1}{dR^2} = \frac{d}{dw} \left(e^{-w} \frac{df_1}{dw} \right) \frac{dw}{dR} = e^{-2w} \frac{d^2 f_1}{dw^2} - e^{-2w} \frac{df_1}{dw}.$$

Подставив найденные выражения в решаемое уравнение, получим:

$$\frac{d^2 f_1}{dw^2} + \frac{df_1}{dw} - 2f_1 = 0.$$

Решение полученного уравнения даст искомую функцию

$$f_1 = A_1 e^{\alpha_1 w} + A_2 e^{\alpha_2 w}.$$

Корни характеристического уравнения $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$.

Следовательно,

$$f_1 = A_1 e^w + A_2 e^{-2w} = A_1 R + \frac{A_2}{R^2}.$$

Окончательное решение уравнения Лапласа примет вид:

$$\varphi = f_1 f_2 = \left(A_1 R + \frac{A_2}{R^2} \right) \cos \theta.$$

Зная потенциал, легко найти напряженность поля.

Проекции E в сферической системе координат

$$E_R = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} = -\left(A_1 - \frac{2A_2}{R^3} \right) \cos \theta;$$

$$E_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(A_1 + \frac{A_2}{R^3} \right) \sin \theta;$$

$$E_\psi = 0.$$

Чтобы найти постоянные интегрирования A_1 и A_2 , необходимо учесть граничные условия. При $R = \infty$ влияние шара не сказывается и $E = E_0$, следовательно,

$$E_{R=\infty} = -A_1 \cos \theta = E_0 \cos \theta,$$

откуда

$$A_1 = -E_0.$$

Поверхность металлического шара является эквипотенциальной, поэтому $\varphi = \text{const}$ при $R = a$ и всех значениях переменной θ , что возможно только при условии

$$A_1 a + \frac{A_2}{a^2} = 0.$$

Следовательно,

$$A_2 = -A_1 a^3 = E_0 a^3.$$

Подставив значения A_1 и A_2 , получим искомый потенциал поля

$$\varphi = E_0 \left(\frac{a^3}{R^2} - R \right) \cos \theta$$

и проекции напряженности электрического поля

$$E_R = E_0 \left(\frac{2a^3}{R^3} + 1 \right) \cos \theta;$$

$$E_\theta = E_0 \left(\frac{a^3}{R^3} - 1 \right) \sin \theta.$$

Численное значение E равно:

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\theta^2}.$$

Наибольшая напряженность поля в точке $R = a$ и $\theta = 0$

$$E_{\text{макс}} = 3E_0.$$

Если момент некоторого диполя принять равным

$$p = 4\pi\epsilon_a a^3 E_0,$$

то проекции напряженности электрического поля в рассматриваемой задаче можно записать следующим образом:

$$E_R = E'_R + E''_R = E_0 \cos \theta + \frac{2p}{4\pi\epsilon_a R^3} \cos \theta,$$

$$E_\theta = E'_\theta + E''_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_a R^3} \sin \theta.$$

Искомое поле получится наложением двух полей, однородного с напряженностью

$$E_0 = E'_R \mathbf{1}_R + E'_\theta \mathbf{1}_\theta$$

и поля диполя с моментом p и напряженностью

$$E'' = E''_R \mathbf{1}_R + E''_\theta \mathbf{1}_\theta.$$

Металлический шар, внесенный в однородное электрическое поле, меняет картину поля так, как изменил бы ее диполь с моментом p , внесенный в то же поле.

Найдем плотность зарядов, индуцированных на поверхности шара. Согласно граничному условию (1-18)

$$D_{R=a} = \sigma = \epsilon_a E_{R=a}.$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = 3\epsilon_a E_0 \cos \theta.$$

На одной половине шара индуцируется положительный заряд, на другой — равный ему по величине отрицательный заряд:

$$|Q| = \int_S \sigma dS = \int_0^{\pi/2} 3\epsilon_a E_0 \cos \theta \cdot 2\pi a \sin \theta d\theta = 3\epsilon_a E_0 \pi a^2.$$

Если положить, что заряд эквивалентного диполя равен этой величине, то плечо диполя $l = \frac{p}{Q} = \frac{4}{3} a$.

На рис. 1-21 изображена картина поля.

Метод сеток

Приближенный числовой расчет плоскопараллельного поля можно произвести методом сеток [Л. 6].

Пусть распределение потенциала вдоль некоторой плоской кривой задано. Требуется определить потенциалы то-

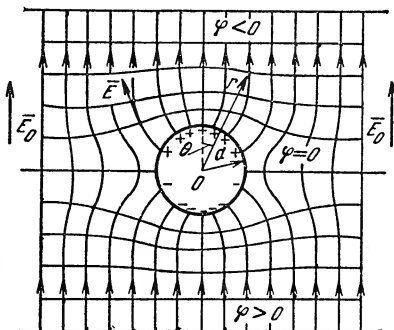


Рис. 1-21. Незаряженный металлический шар в однородном поле.

чек площади, ограниченной заданной кривой (рис. 1-22). Нанесем на чертеж квадратную сетку. Длина стороны

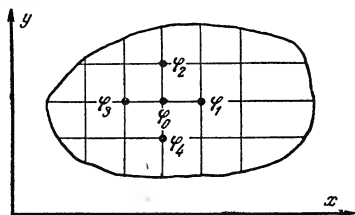


Рис. 1-22. Метод сеток.

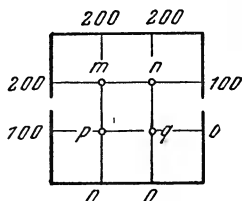


Рис. 1-23. Определение потенциала методом сеток.

квадрата a задается в соответствии с принятой точностью расчета. Согласно уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Выбираем пять соседних точек. Потенциал их обозначим

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4.$$

Если расстояние a невелико, то

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{a^2} - \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{a^2}.$$

Соответственно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{a^2} - \frac{\varphi_0 - \varphi_4}{a^2}.$$

Сложив полученные уравнения, получим:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 \approx \frac{1}{a^2} (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0).$$

Следовательно, потенциалы точек связаны соотношением

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - 4\varphi_0 = 0.$$

Порядок расчета можно проследить на следующем примере.

Потенциалы периметра квадрата заданы (рис. 1-23). Требуется определить потенциалы точек: m , n , p и q .

Задаемся произвольно потенциалами. Например, $\varphi_m = 160$; $\varphi_n = 120$; $\varphi_p = 80$; $\varphi_q = 40$.

Для точки m сумма потенциалов четырех соседних точек равна 600. Величина $4\varphi_m = 640$. Соответствующая разность $\Delta_m = 600 - 640 = -40$.

Точно также определяется

$$\Delta_n = 500 - 480 = 20; \quad \Delta_p = 300 - 320 = -20;$$

$$\Delta_q = 200 - 160 = 40.$$

Скорректируем значения потенциалов. Разделим разность Δ на четыре и полученное число прибавим к величине соответствующего потенциала φ , учитывая при этом знак.

В нашем примере

$$\frac{\Delta_m}{4} = -10; \quad \frac{\Delta_n}{4} = 5; \quad \frac{\Delta_p}{4} = -5; \quad \frac{\Delta_q}{4} = 10.$$

Следовательно новые значения потенциалов будут:

$$\varphi'_m = 150; \quad \varphi'_n = 125, \quad \varphi'_p = 75, \quad \varphi'_q = 50.$$

При второй проверке получим:

$$\Delta'_m = 0, \quad \Delta'_n = 0, \quad \Delta'_p = 0, \quad \Delta'_q = 0.$$

Обычно корректировку приходится производить несколько раз, пока не будет получено распределение потенциала, совпадающее в пределах выбранной точности, с заданным условиями задачи распределением потенциала на граничной кривой.

1-17. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЗАРЯДОВ В СИСТЕМЕ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

При исследовании процессов в линиях электропередач может встретиться следующая задача. Даны несколько параллельных проводов. Взаимное их расположение и электрические заряды на них известны. Требуется определить потенциалы этих проводов. Обозначим потенциал произвольной точки p между проводами, обусловленный зарядом Q_m одного из проводов, через φ_{pm} . Так как потенциал и заряд пропорциональны, то

$$\varphi_{pm} = B_{pm} Q_m.$$

Коэффициент B_{pm} — величина постоянная.

Если число всех проводов обозначить n , то потенциал в точке p , обусловленный зарядами всех проводов, можно

определить, пользуясь принципом наложения:

$$\varphi_p = \varphi_{p1} + \varphi_{p2} + \dots + \varphi_{pm} + \dots + \varphi_{pn} = B_{p1} Q_1 + B_{p2} Q_2 + \dots + B_{pm} Q_m + \dots + B_{pn} Q_n.$$

Если точку p выбрать на поверхности первого провода, то его потенциал

$$\varphi_1 = B_{11} Q_1 + B_{12} Q_2 + \dots + B_{1n} Q_n.$$

Аналогично можно записать потенциалы остальных проводов:

$$\varphi_2 = B_{21} Q_1 + B_{22} Q_2 + \dots + B_{2n} Q_n;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n = B_{n1} Q_1 + B_{n2} Q_2 + \dots + B_{nn} Q_n.$$

Предположим, что все заряды, кроме Q_l , равны нулю, а $Q_l = 1$. Тогда $\varphi_k = B_{kl}$. Следовательно, коэффициент B_{kl} численно равен потенциалу провода k , когда заряд провода l равен единице, а заряды остальных проводов равны нулю. Постоянные B называются потенциальными коэффициентами. Они всегда положительны. При перестановке индексов величина коэффициента не меняется; $B_{kl} = B_{lk}$.

Если полученную систему уравнений решить относительно зарядов, то

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= A_{11} \varphi_1 + A_{12} \varphi_2 + \dots + A_{1n} \varphi_n, \\ &\dots \dots \dots \\ Q_n &= A_{n1} \varphi_1 + A_{n2} \varphi_2 + \dots + A_{nn} \varphi_n. \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

Постоянные A называются емкостными коэффициентами. Связь между потенциальными и емкостными коэффициентами следующая;

$$A_{kl} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta},$$

где определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1l} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & \dots & B_{2l} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{k1} & \dots & B_{kl} & \dots & B_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nl} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение

$$\Delta_{kl} = (-1)^{k+l} \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1l} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & \dots & B_{2l} & \dots & B_{2n} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ B_{k1} & \dots & B_{kl} & \dots & B_{kn} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nl} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты A с одинаковыми индексами положительны; с различными индексами — отрицательны. При перестановке индексов величина коэффициента не меняется $A_{kl} = A_{lk}$.

Пусть потенциал одного из проводов, например φ_l , равен единице, а потенциал остальных проводов равен нулю, тогда $A_{kl} = Q_k$. Следовательно, коэффициент A_{kl} численно равен заряду Q_k , когда потенциал $\varphi_l = 1$, а потенциал остальных проводов равен нулю.

Систему уравнений (1-30) можно записать и иначе:

$$Q_1 = A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + \dots + A_{1n}\varphi_n + A_{12}\varphi_1 - A_{12}\varphi_1 + \\ + A_{13}\varphi_1 - A_{13}\varphi_1 + \dots + A_{1n}\varphi_1 - A_{1n}\varphi_1 = C_{11}(\varphi_1 - 0) + \\ + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) + \dots + C_{1n}(\varphi_1 - \varphi_n),$$

где

$$C_{11} = A_{11} + A_{12} + A_{13} + \dots + A_{1n};$$

$$C_{12} = -A_{12}; C_{13} = -A_{13}, \dots, C_{1n} = -A_{1n}.$$

Аналогично можно преобразовать и остальные уравнения

$$Q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - 0) + \\ + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + C_{2n}(\varphi_2 - \varphi_n);$$

.....

$$Q_n = C_{n1}(\varphi_n - \varphi_1) + C_{n2}(\varphi_n - \varphi_2) + \dots + C_{nn}(\varphi_n - 0),$$

где

$$C_{kk} = A_{k1} + A_{k2} + \dots + A_{kk} + \dots + A_{kn};$$

$$C_{k1} = -A_{k1}, C_{k2} = -A_{k2}, \dots, C_{kl} = -A_{kl}.$$

Коэффициенты C называются **частичными емкостями**. Если индексы у частичной емкости одинаковые, ее называют **собственной частичной емкостью**. Если индексы разные — **взаимной частичной емкостью**.

Частичные емкости всегда положительны. При изменении порядка индексов коэффициент не меняется $C_{kl} = C_{lk}$.

Зная частичные емкости и потенциалы проводов, можно определить энергию электрического поля всей системы:

$$W_{\text{эл}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi_k Q_k}{2}.$$

Коэффициенты A могут быть определены экспериментально. Зная их, можно подсчитать частичные емкости. Частичные емкости учитываются не только при расчете электростатических полей. Например, при исследовании процессов в электронных лампах, в полупроводниковых триодах учитывают частичные емкости между электродами.

1-18. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1-1. Определить емкость плоского конденсатора. Площадь обкладки S . Расстояние между обкладками d . Проницаемость диэлектрика ϵ .

О т в е т:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}.$$

1-2. Определить емкость плоского конденсатора, если диэлектрик двухслойный. Площадь обкладки S . Толщина первого слоя d_1 ; проницаемость диэлектрика ϵ_1 . Толщина второго слоя d_2 , проницаемость диэлектрика ϵ_2 .

О т в е т:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}}.$$

1-3. Заряд Q равномерно распределен на плоском круглом диске радиуса a . Диэлектрическая проницаемость диска и окружающей среды ϵ . Найти напряженность электрического поля и потенциал на оси z , нормальной к диску и проходящей через его центр.

О т в е т:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon a^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right);$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon a^2} (\sqrt{z^2 + a^2} - z) + \text{const.}$$

1-4. Найти напряженность и потенциал поля металлического шара радиуса a с зарядом Q . Проницаемость диэлектрика, окружающего шар, ϵ . Задачу решить интегрированием уравнения Лапласа. Потенциал в бесконечности принять равным нулю.

О т в е т:

$$E = E_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R} \quad \text{при } a \leq R \leq \infty;$$

$$E = 0; \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon a} \quad \text{при } 0 \leq R \leq a.$$

1-5. Найти энергию электрического поля для случая, приведенного в задаче 1-4.

О т в е т:

$$W_э = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon a} = \frac{Q\varphi_a}{2}.$$

1-6. В однородное электростатическое поле с напряженностью $E_0 = \text{const}$ вносится металлический круглый цилиндр радиуса a . Длина цилиндра l .

Проницаемость диэлектрика ϵ . Вектор E нормален к оси цилиндра. Краевой эффект не учитывать. Определить напряженность результирующего поля в диэлектрике вокруг цилиндра.

О т в е т:

$$\varphi = E_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \cos \psi;$$

$$E_r = -E_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \psi;$$

$$E_\psi = E_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \psi;$$

r и ψ — цилиндрические координаты.

1-7. Построить картину поля двух равных точечных зарядов $+q$, расположенных на расстоянии d друг от друга в среде с проницаемостью ϵ .

1-8. Заряженная ось расположена параллельно плоскости раздела двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 на расстоянии d от этой плоскости. Линейная плотность заряда τ . Пользуясь методом зеркальных изображений, найти плотности фиктивных зарядов τ_1 и τ_2 , считая, что ось расположена в диэлектрике с проницаемостью ϵ .

1-9. Каким уравнением, Пуассона или Лапласа, описывается поле поверхностных зарядов? Как ведет себя вектор E у заряженной поверхности?

1-10. В поле каких зарядов вектор E может быть бесконечно большим? В каких точках $E = \infty$?

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

2-1. ТОК И ПЛОТНОСТЬ ТОКА ПРОВОДИМОСТИ

Если в проводнике существует электрическое поле, оно вызывает упорядоченное движение зарядов, представляющее собой ток проводимости. В металлических провод-

никах ток проводимости определяется движением электронов. Мерой тока служит предел отношения заряда Δq , проходящего сквозь заданную поверхность в течение некоторого времени Δt , к величине Δt , когда Δt стремится к нулю как к пределу:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

Ток — величина скалярная. Если значение тока не зависит от времени, ток называется постоянным. Ток измеряется в амперах (а). Плотностью тока называют векторную величину $\vec{\delta}$, численное значение которой равно пределу отношения тока, протекающего через некоторую площадку, расположенную нормально к направлению движения зарядов, к величине площади этой площадки, когда она стремится к нулю как к пределу:

$$\delta = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S_n} = \frac{di}{dS_n}.$$

Направление вектора $\vec{\delta}$ выбирается таким образом, чтобы оно совпадало с направлением движения положительных зарядов (или было противоположно направлению движения отрицательных зарядов). Ток и плотность тока связаны соотношением

$$i = \int_S \vec{\delta} dS. \quad (2-1)$$

Ток сквозь поверхность S равен потоку вектора плотности тока сквозь ту же поверхность. Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (a/m^2).

При постоянном токе распределение зарядов в проводнике не изменяется во времени. Поле таких зарядов такое же, как и в случае неподвижных зарядов, равных по величине и знаку и распределенных так же.

В ряде случаев, идеализируя задачу, можно рассматривать так называемые поверхностные токи, т. е. токи, которые протекают только по поверхности проводника. На поверхности, по которой течет ток, выбираем отрезок Δl , расположенный перпендикулярно направлению тока. Ток, протекающий через этот отрезок, обозначим Δi .

Величину

$$\eta = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{dl}{dt}$$

называют плотностью поверхностного тока. Она измеряется в амперах на метр (a/m).

2-2. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В однородном изотропном проводнике *плотность тока проводимости $\bar{\delta}$ пропорциональна напряженности электрического поля E*

$$\bar{\delta} = \gamma E. \quad (2-2)$$

Формула (2-2) выражает связь между плотностью тока проводимости и напряженностью электрического поля в данной точке проводящей среды и представляет собой закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент γ называется удельной проводимостью и измеряется в *сим/м*.

В главе первой было выяснено, что если в электростатическое поле внести проводник, то в нем произойдет перемещение зарядов. Заряды эти распределятся таким образом, что поле, созданное ими, компенсирует внешнее поле. Для того чтобы в проводнике длительно проходил ток, необходимо наличие электрического поля, силы которого перемещают заряды. Такое поле может быть создано и будет поддерживаться процессами неэлектростатического происхождения (химическими, термоэлектрическими и др.) и носит название *стороннего электрического поля*.

Так как при прохождении тока по проводнику все время происходит преобразование электрической энергии в тепловую, энергия поля должна непрерывно пополняться за счет внешнего источника. Только при этом условии может длительно существовать ток.

Следовательно, стороннее поле всегда связано с источником энергии, который преобразует какую-либо форму энергии (химическую, тепловую, механическую) в энергию электрическую и поддерживает ток в проводнике.

Напряженность стороннего электрического поля обозначают $E_{\text{стор}}$. Если на заряд q в проводнике действует сторонняя сила $F_{\text{стор}}$, то

$$E_{\text{стор}} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_{\text{стор}}}{q}.$$

Если в проводнике одновременно действуют и электростатические и сторонние силы, напряженность результирующего поля равна:

$$E_{\text{рез}} = E + E_{\text{стор.}}$$

Линейный интеграл напряженности стороннего поля между двумя точками a и b заданного пути интегрирования $a - l - b$ называют электродвижущей силой (э. д. с.)

$$e_{a1b} = \int_{a1b} E_{\text{стор.}} dl.$$

Если путь интегрирования замкнут, то величина

$$e = \oint_L E_{\text{стор.}} dl \quad (2-3)$$

называется э. д. с., действующей в контуре L . Линейный интеграл напряженности результирующего поля называется напряжением вдоль пути интегрирования или падением напряжения на этом участке

$$u_{a1b} = \int_{a1b} E_{\text{рез}} dl.$$

Величины напряжения и э. д. с. зависят от выбора пути интегрирования.

Напомним, что в электростатическом поле

$$\oint_L E dl = 0,$$

а линейный интеграл $\int_a^b E dl$ не зависит от выбора пути интегрирования. Он равен разности потенциалов начальной и конечной точек пути

$$\int_a^b E dl = \varphi_a - \varphi_b.$$

Связь между напряжением, разностью потенциалов и э. д. с. следующая:

$$\int_{a1b} E_{\text{рез}} dl = \int_{a1b} E dl + \int_{a1b} E_{\text{стор.}} dl$$

или

$$u_{a1b} = \varphi_a - \varphi_b + e_{a1b}.$$

Если путь интегрирования представляет собой замкнутую кривую, то

$$u = \oint_L E_{\text{рез}} dl = \oint_L E_{\text{стор.}} dl = e$$

(так как циркуляция вектора напряженности E электростатического поля всегда равна нулю). В контуре L сумма падений напряжения равна э. д. с. Напряжение и э. д. с. измеряются в вольтах (θ).

Рассмотрим проводящий контур $a-1-b-2-a$ (рис. 2-1). На участке $b-2-a$ действуют сторонние силы, и на этом участке

$$\int_{b2a} E_{\text{стор}} dl = e.$$

На участке $a-1-b$ сторонних сил нет, поэтому $u_{a1b} = \varphi_a - \varphi_b$.

В замкнутой цепи сумма падений напряжения равна э. д. с.

$$u_{a1b} + u_{b2a} = e,$$

или

$$\varphi_a - \varphi_b = e - u_{b2a}.$$

Разность потенциалов между двумя точками рассматриваемого контура меньше э. д. с., действующей в этом контуре.

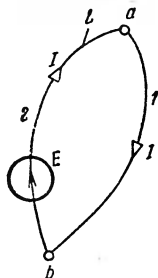


Рис. 2-1. Перемещение из одной точки поля в другую по разным путям.

Ток на участке $a-1-b$ идет от точки a (точки высшего потенциала) к точке b (точке низшего потенциала).

Если бы в цепи не было сторонних сил, то потенциалы точек a и b выравнялись бы и ток прекратился. Наличие сторонних сил заставляет заряды перемещаться от точки b к точке a по пути $b-2-a$ и поддерживает потенциалы точек a и b постоянными. Энергия стороннего поля расходуется на тепловые потери как на участке $a-1-b$, так и на участке

$b-2-a$. В тех областях проводника, в которых имеются сторонние силы, закон Ома записывается следующим образом:

$$\bar{\delta} = \gamma E_{\text{рез}} = \gamma (E + E_{\text{стор}}). \quad (2-4)$$

Закон Ома в дифференциальной форме справедлив как для постоянных, так и для переменных электрических полей.

2-3. ЗАКОН ДЖОУЛЯ — ЛЕНЦА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Мощность тепловых потерь в проводнике равна произведению тока и напряжения $P = IU$.

Если рассмотреть в проводящей среде элемент объема dV (рис. 2-2), то мощность тепловых потерь

$$dP = dI dU = \delta dS E dl = \delta E dV,$$

откуда

$$\frac{dP}{dV} = \delta E = \gamma E^2 = \frac{\delta^2}{\gamma}. \quad (2-5)$$

Формула (2-5) является дифференциальной формой закона Джоуля—Ленца. Мощность тепловых потерь в объеме V можно выразить следующим образом:

$$P = \int_V \gamma E^2 dV. \quad (2-6)$$

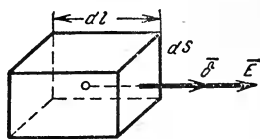


Рис. 2-2. Элемент объема в проводящей среде.

2-4. ПЕРВЫЙ ЗАКОН КИРХГОФА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Замкнутая поверхность S охватывает узел цепи, к которому подходят токи I_1 и I_2 и из которого выходят токи I_3 и I_4 (рис. 2-3). Согласно первому закону Кирхгофа в интегральной форме

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4.$$

Выразим токи через плотность тока, считая положительную нормаль к поверхности S направленной в наружную сторону,

$$I_1 = - \int_{S_1} \bar{\delta} dS; \quad I_2 = - \int_{S_2} \bar{\delta} dS;$$

$$I_3 = \int_{S_3} \bar{\delta} dS; \quad I_4 = \int_{S_4} \bar{\delta} dS$$

или

$$\int_{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \bar{\delta} dS = 0. \quad (2-7)$$

Так как вне площадок S_1, S_2, S_3, S_4 плотность тока равна нулю, то можно распространить интеграл на всю

замкнутую поверхность S , тогда

$$\oint_S \bar{\delta} dS = 0.$$

Поток вектора плотности тока сквозь замкнутую поверхность равен нулю. Это значит, что заряд, входящий в любой объем, равен заряду, выходящему из него за тот же промежуток времени. Постоянный ток непрерывен. Линии вектора $\bar{\delta}$ замкнуты.

По теореме Остроградского

$$\oint_S \bar{\delta} dS = \int_V \operatorname{div} \bar{\delta} dV.$$

Так как поверхность S , а следовательно, и объем V выбраны произвольно, то можно считать, что

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = 0. \quad (2-8)$$

Плотность тока проводимости не имеет источников. Формула (2-8) выражает в дифференциальной форме непрерывность постоянного тока. Так как дивергенция плотности тока проводимости равна нулю,

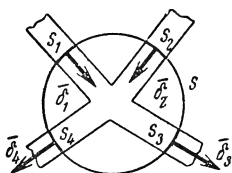


Рис. 2-3. Поток вектора плотности тока сквозь замкнутую поверхность.

то линии вектора $\bar{\delta}$ замкнуты; поэтому формулу (2-8) называют уравнением непрерывности для постоянного тока.

Постоянный ток имеет в различных сечениях неразветвленной цепи одно и то же значение, так как в противном случае были бы такие участки, в которых заряд или увеличивается, или уменьшается, а это невозможно.

Отметим, что дивергенция плотности переменного тока может быть отлична от нуля, так как в цепях переменного тока могут быть участки, на которых заряды увеличиваются или уменьшаются (конденсатор в цепи переменного тока).

2-5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим границу двух проводящих сред, проводимости которых равны γ_1 и γ_2 . Построим цилиндрическую поверхность S так, как показано на рис. 2-4.

Ток сквозь эту поверхность равен нулю, так как она замкнутая. Так как ток равен потоку вектора плотности

тока, то

$$\oint_S \bar{\delta} dS = 0 = \int_{\Delta S_1} \bar{\delta}_1 dS + \int_{\Delta S_2} \bar{\delta}_2 dS + \int_{S_{\text{бок}}} \bar{\delta} dS.$$

Если высоту цилиндра уменьшить так, чтобы площадки $\Delta S_1 = \Delta S_2$ совпали с граничной поверхностью, и учитывая, что для небольших ΔS вектор $\bar{\delta}$ можно считать одинаковым во всех точках этих площадок, получим:

$$\delta_{1n} \Delta S - \delta_{2n} \Delta S = 0.$$

Ток сквозь боковую поверхность при этом станет равным нулю. Сокращая на ΔS , получим граничное условие $\delta_{1n} = \delta_{2n}$.

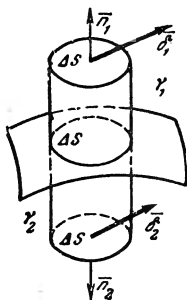


Рис. 2-4. Граничные условия для вектора плотности тока.

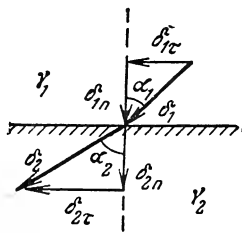


Рис. 2-5. Преломление линий вектора плотности тока.

Нормальная составляющая вектора плотности тока на границе двух сред непрерывна.

Если на границе этих сред нет сторонних сил, то касательные составляющие вектора напряженности электрического поля также должны быть непрерывны у границы $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Если векторы $\bar{\delta}$ и E образуют с нормалью к границе угол α_1 в первой среде и угол α_2 — во второй (рис. 2-5), то

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2;$$

$$\delta_1 \cos \alpha_1 = \delta_2 \cos \alpha_2.$$

Так как

$$\delta_1 = \gamma_1 E_1; \quad \delta_2 = \gamma_2 E_2,$$

то

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2}.$$

2-6. ПОЛЕ ШАРОВОГО ЭЛЕКТРОДА

Для заземления электрической цепи ее соединяют с помощью провода с металлическим проводником, зарытым в землю. Такой проводник называется заземлителем. Ток, проходящий в землю через заземлитель, встречает сопротивление, которое называется сопротивлением заземления. Вблизи от заземлителя, на поверхности земли, могут возникнуть большие напряжения.

Исследуем поле сферического заземлителя. Металлический шар радиуса a находится в грунте с проводимостью γ . К шару при помощи изолированного провода подводится постоянный ток I , который возвращается в цепь на достаточном удалении от заземлителя. По условиям симметрии линии вектора плотности тока $\vec{\delta}$ вблизи заземлителя будут направлены радиально. На расстоянии R от центра шара плотность тока

$$\vec{\delta} = \frac{I}{4\pi R^2} \mathbf{1}_R.$$

По закону Ома напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \frac{\vec{\delta}}{\gamma} = \frac{I}{4\pi\gamma R^2} \mathbf{1}_R.$$

Эквипотенциальные поверхности будут концентрическими сферами. Напряжение между произвольной точкой M и точкой, которая находится на поверхности заземлителя,

$$U = \int_a^R E dR = \frac{I}{4\pi\gamma} \int_a^R \frac{dR}{R^2} = \frac{I}{4\pi\gamma a} \left(1 - \frac{a}{R}\right).$$

При увеличении расстояния R напряжение U стремится к пределу

$$U_0 = \frac{I}{4\pi\gamma a}.$$

U_0 называется напряжением растекания. Отношение напряжения растекания к току носит название сопротивления растеканию:

$$r_p = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma a}.$$

На расстоянии $R \approx 100 a$ практически $U \approx U_0$. В случае полусферического заземлителя, к которому подводится ток, равный $I/2$, сопротивление растеканию

$$r_p = \frac{1}{2\pi\gamma a}.$$

2-7. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

В области, в которой нет сторонних э. д. с., поле постоянного тока потенциальное. Потенциал и напряженность поля в такой области связаны соотношением

$$\mathbf{E} = - \operatorname{grad} \varphi.$$

Так как постоянный ток непрерывен, поле не имеет источников

$$\operatorname{div} \vec{\delta} = 0.$$

По закону Ома

$$\vec{\delta} = \gamma \mathbf{E}.$$

В среде с постоянной проводимостью $\gamma = \text{const}$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Подставив значение $\mathbf{E}$, получим

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Следовательно, для определения потенциала поля в рассматриваемой области необходимо решить уравнение Лапласа и учесть граничные условия.

Электростатическое поле в диэлектрике при отсутствии свободных объемных зарядов описывается уравнением Лапласа. Поэтому если две одинаково ограниченные области: проводящая (без сторонних э. д. с) и диэлектрическая (без свободных зарядов) имеют на граничной поверхности одинаковое распределение потенциала, то внутри каждой из этих областей распределение потенциала будет также одинаковым. Это обстоятельство позволяет пользоваться формулами, полученными при расчете электростатических полей, в случае поля постоянного тока. При этом емкость необходимо заменить проводимостью, абсолютную диэлектрическую проницаемость заменить удельной проводимостью.

Например, чтобы определить проводимость изоляции коаксиального кабеля, можно воспользоваться формулой емкости кабеля (пример 1-9)

$$C = \frac{2\pi\epsilon_a l}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Произведя замену, можно легко получить:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{2\pi\gamma l}{\ln \frac{b}{a}}.$$

2-8. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

2-1. По прямой цилиндрической трубе протекает постоянный ток $I = 5a$. Внешний радиус трубы $a_2 = 3 \text{ см}$. Внутренний радиус $a_1 = 2 \text{ см}$. Найти плотность тока δ и плотность поверхностного тока η .

О т в е т:

$$\delta = 0,318 \text{ а/см}^2; \eta = 0.$$

2-2. Толщина трубы (задача 2-1) бесконечно мала; $a_2 = a_1 = 3 \text{ см}$. Чему равны δ и η ?

О т в е т:

$$\delta = \infty; \eta = 0,265 \text{ а/см}.$$

2-3. Постоянный ток, плотность которого равна $\delta = 0,1 \text{ а/мм}^2$, протекает в противоположных направлениях по двум параллельным медным пластинам, расположенным на расстоянии $d = 2 \text{ см}$ одна от другой. Удельная проводимость меди $\gamma = 57 \cdot 10^6 \text{ см/м}$. Напряжение между пластинами $U = 50 \text{ в}$. Определить тангенциальную и нормальную составляющие вектора E на поверхности пластин, считая поле между пластинами однородным.

О т в е т:

$$E_{\tau} = 175 \cdot 10^{-4} \text{ в/м}; E_n = 2500 \text{ в/м}.$$

2-4. Определить мощность тепловых потерь в плоском конденсаторе с несовершенным диэлектриком, проводимость которого равна $\gamma = 10^{-12} \text{ см/м}$. Площадь обкладки $S = 100 \text{ см}^2$, расстояние между обкладками $d = 1 \text{ см}$. Приложенное постоянное напряжение равно 500 в.

О т в е т:

$$P = 25 \cdot 10^{-8} \text{ вт}.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, ПОСТОЯННОЕ ВО ВРЕМЕНИ

3-1. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

При исследовании магнитного поля необходимо установить его свойства. О свойствах поля судят по воздействию поля на неполевую форму материи — на вещество. Воздействие это зависит как от свойств поля, так и от свойств вещества, вносимого в поле.

Основным свойством неизменного во времени магнитного поля является силовое воздействие его как на движущиеся в нем заряженные тела, так и на неподвижные проводники с электрическим током.

Как показывает опыт, магнитное поле обладает определенной направленностью, оно является векторным полем. Для изучения свойств поля и количественного описания его необходимо ввести физическую величину, которая определила бы интенсивность поля в каждой точке пространства. Такой величиной, характеризующей магнитное поле, является вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$. Зная значение и направление вектора $\mathbf{B}$, можно установить свойства магнитного поля и вызываемых им явлений. Вектор $\mathbf{B}$ можно, например, определить по силе, с которой магнитное поле действует на контур с током.

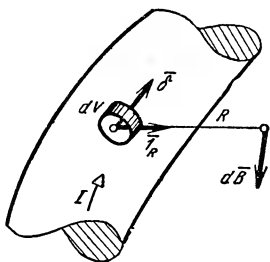


Рис. 3-1. Магнитная индукция поля постоянного тока.

Пусть проводник с постоянным током I помещен в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$. Если размеры поперечного сечения проводника малы по сравнению с длиной, его можно считать линейным. Линейным элементом тока называют произведение тока на элемент длины проводника $I dl$.

Сила, действующая на линейный элемент тока, может быть определена по формуле

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l} \cdot \mathbf{B}]. \quad (3-1)$$

Проинтегрировав выражение (3-1), можно определить силу, действующую на весь проводник. Сила $\mathbf{F}$ зависит от величины тока, от размеров и ориентации проводника, от величины магнитной индукции, которая характеризует интенсивность поля. Измерив силу F , ток I , зная длину проводника и его положение в поле, можно определить магнитную индукцию $\mathbf{B}$.

Магнитная индукция измеряется в теслах ($тл$). В системе СГСМ она изменяется в гауссах ($гс$):

$$1 \text{ тл} = 10^4 \text{ гс}.$$

Всякий электрический ток образует вокруг себя магнитное поле. Связь между током и возбужденным им в пу-

стоте магнитным полем может быть выражена в дифференциальной форме следующим образом (рис. 3-1):

$$dB_0 = \frac{\mu_0 [\bar{\delta} \cdot \mathbf{1}_R] dV}{4\pi R^2},$$

где $\bar{\delta}$ — плотность тока в проводнике; dV — элементарный объем проводника; R — расстояние от dV до точки, в которой определяется $\mathbf{B}$; μ_0 — магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

Если размеры поперечного сечения проводника малы по сравнению с длиной проводника и расстоянием до точки наблюдения (проводник линейный), можно положить:

$$[\bar{\delta} \cdot \mathbf{1}_R] dV = [\bar{\delta} \cdot \mathbf{1}_R] S dl = [(\bar{\delta} S) dl \cdot \mathbf{1}_R] = I [dl \cdot \mathbf{1}_R].$$

Следовательно,

$$dB_0 = \frac{\mu_0 I [dl \cdot \mathbf{1}_R]}{4\pi R^2}. \quad (3-2)$$

Проинтегрировав (3-2), можно определить:

$$B_0 = \oint_L \frac{\mu_0 I [dl \cdot \mathbf{1}_R]}{4\pi R^2},$$

где L — контур, по которому проходит постоянный ток I .

Если контур с током находится в каком-либо веществе, то величина магнитной индукции будет отличной от B_0 в μ раз:

$$\mathbf{B} = \mu B_0 = \oint_L \frac{\mu \mu_0 I [dl \cdot \mathbf{1}_R]}{4\pi R^2}. \quad (3-3)$$

Безразмерная величина μ называется магнитной проницаемостью. Ее называют также относительной магнитной проницаемостью. Произведение магнитной проницаемости и магнитной постоянной обозначают μ_a и называют абсолютной магнитной проницаемостью.

Изменение магнитной индукции в различных средах при одном и том же значении тока объясняется тем, что магнитное поле возбуждается не только током, проходящим по проводнику, но и внутримолекулярными токами вещества, окружающего проводник. Другим основным вектором магнитного поля является вектор напряженности $\mathbf{H}$, равный магнитной индукции $\mathbf{B}$, деленной на абсолютную

магнитную проницаемость μ_a :

$$H = \frac{B}{\mu_a}. \quad (3-4)$$

Напряженность магнитного поля в отличие от магнитной индукции не зависит от свойств среды.

Для линейного проводника с током

$$H = \oint \frac{I [dl \cdot r]}{4\pi R^2}.$$

Выражение (3-4) представляет собой закон Био—Савара—Лапласа в интегральной форме.

Как было отмечено выше, магнитная индукция B в различных средах при одном и том же возбуждающем поле тока I (при одной и той же напряженности) разная.

Величина индукции обусловлена не только током в проводе I , но и внутримолекулярными токами вещества, окружающего провод. Опыт показывает, что всякое вещество, внесенное в магнитное поле, намагничивается. Внутримолекулярные токи под действием внешнего поля определенным образом ориентируются и их магнитное поле, слагаясь с внешним полем, меняет его.

Собственное макроскопическое магнитное поле вещества можно характеризовать вектором J , который называется вектором намагниченности. Этот вектор определяет, насколько магнитная индукция в данной среде $B = \mu_a H$ отличается от магнитной индукции в вакууме $B_0 = \mu_0 H$ при одной и той же напряженности магнитного поля

$$B - B_0 = \mu_0 J.$$

В однородных средах при слабых магнитных полях напряженность и намагниченность пропорциональны:

$$J = k_m H.$$

Безразмерный коэффициент k_m называется магнитной восприимчивостью.

Связь между тремя векторами магнитного поля можно записать следующим образом:

$$B = \mu_0 J + \mu_0 H = \mu_0 (1 + k_m) H = \mu_0 \mu H = \mu_a H. \quad (3-5)$$

Следовательно,

$$\mu = 1 + k_m.$$

Напряженность магнитного поля H и намагниченность J в системе СИ измеряются в амперах, деленных на метр (a/m). В системе СГСМ напряженность магнитного поля измеряется в эрстедах (э), причем $1 a/m = 4\pi \cdot 10^{-3}$ э.

Опыт показывает, что все вещества обладают магнитными свойствами. Однако у большинства из них магнитные свойства очень слабо выражены. У диамагнитных веществ магнитная проницаемость немного меньше единицы (например, у висмута $\mu = 0,99983$). У парамагнитных веществ μ немного больше единицы (например, у платины $\mu = 1,00036$). Только у ферромагнитных веществ (сталь, никель, пермаллой и др.) магнитная проницаемость значительно больше единицы (порядка $10^2 - 10^4$), причем проницаемость — величина переменная, $\mu = f(H)$. В электротехнических расчетах для всех неферромагнитных веществ принимают $\mu = 1$. В дальнейшем рассматриваются только неферромагнитные среды и принимается $\mu_a = \mu_0 = \text{const.}$

3.2. МАГНИТНЫЙ ПОТОК И ЕГО НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Поток вектора магнитной индукции

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS \quad (3-6)$$

называют магнитным потоком. Магнитный поток измеряется в веберах (вб). В системе СГСМ магнитный поток измеряется в максвеллах (мкс):

$$1 \text{ вб} = 10^8 \text{ мкс.}$$

Магнитную индукцию можно определить как плотность магнитного потока. Если площадь S перпендикулярна вектору $\mathbf{B}$ и поле однородное, то $\Phi = BS$.

Установлено, что магнитный поток сквозь замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} dS = 0. \quad (3-7)$$

Пользуясь теоремой Остроградского, можно записать:

$$\oint_S \mathbf{B} dS = \int_V \text{div } \mathbf{B} dV = 0.$$

Это равенство справедливо для любого объема. Следовательно,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (3-8)$$

Формула (3-7) выражает принцип непрерывности магнитного потока в интегральной форме, формула (3-8) — в дифференциальной форме. Магнитное поле не имеет истоков. Оно является соленоидальным полем.

Картина магнитного поля графически изображается с помощью линий вектора $\mathbf{B}$ (магнитных линий). Эти линии всегда замкнуты либо уходят в бесконечность. Положительным направлением их выбирается то направление, куда будет обращен северный полюс магнитной стрелки, внесенной в поле.

В средах с постоянной магнитной проницаемостью

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

3-3. ЗАКОН ПОЛНОГО ТОКА

Основным законом, характеризующим свойства магнитного поля, является закон полного тока, который устанавливает связь между напряженностью магнитного поля и током. Он гласит: *циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, которые охвачены контуром интегрирования:*

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I_{\text{полн}}.$$

Положительное направление тока связано с направлением обхода контура правилом правого винта. Если обозначить плотность тока $\bar{\delta}_{\text{полн}}$, то ток, проходящий через поверхность S , ограниченную кривой L ,

$$I_{\text{полн}} = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} dS.$$

Пользуясь теоремой Стокса, можно записать равенство

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} dS.$$

Следовательно,

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} dS = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} dS.$$

Так как это равенство справедливо для всех значений предела интегрирования S , то подынтегральные функции равны между собой:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \bar{\delta}_{\text{полн}}.$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальную форму записи закона полного тока для неизменных во времени полей и носит название первого уравнения Максвелла. Оно указывает на то, что магнитное поле вихревое. В вихревом поле работа сил поля по замкнутым кривым не всегда равна нулю.

Пользуясь уравнениями $\text{rot } \mathbf{H} = \bar{\delta}_{\text{полн}}$, $\text{div } \mu_a \mathbf{H} = 0$, можно рассчитать магнитное поле. Для области, не занятой токами (вне проводников с токами),

$$\mu_a = \text{const}; \quad \bar{\delta} = 0; \quad \text{rot } \mathbf{H} = 0; \quad \text{div } \mu_a \mathbf{H} = 0.$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям электростатического поля в диэлектрической среде при отсутствии объемных зарядов. Следовательно, поле в области, не занятой токами, можно рассматривать как потенциальное и характеризовать скалярной функцией φ_m , положив $\text{grad } \varphi_m = -\mathbf{H}$. Величину φ называют скалярным магнитным потенциалом.

3-4. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Если требуется определить напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ по заданной плотности тока $\bar{\delta}$, то непосредственное решение первого уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \bar{\delta}$ может привести к сложным расчетам. В некоторых случаях удобнее вначале определить величину $\mathbf{A}$, которая называется векторным потенциалом и связана с величиной $\mathbf{H}$ соотношением

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (3-9)$$

Так как написанное выражение определяет векторный потенциал не однозначно, надо задать дивергенцию $\mathbf{A}$. Положим $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Если подставить в первое уравнение Максвелла вместо напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ равную ей величину $\frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$, то получим $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a \bar{\delta}$.

Известно, что

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

(см. приложение 2).

Так как по условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \bar{\delta}.$$

Векторный потенциал магнитного поля определяется по уравнению Пуассона. Решив дифференциальное уравнение, находим $\mathbf{A}$. Решение уравнения может быть записано и в виде интеграла

$$\mathbf{A} = \int_V \frac{\mu_a \bar{\delta}}{4\pi R} dV, \quad (3-10)$$

где R — расстояние от точки, в которой определяется векторный потенциал, до элементов объема dV , на которые разбит весь объем V ; $\bar{\delta}$ — плотность постоянного тока. Этим решением удобно пользоваться тогда, когда интеграл легко вычисляется. Если ток течет по линейному проводнику, то

$$\int_V \frac{\bar{\delta} dV}{R} = \oint_L \frac{dl}{R} \int_S \bar{\delta} dS = I \oint_L \frac{dl}{R},$$

Векторный потенциал магнитного поля линейного тока

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint_L \frac{dl}{R}. \quad (3-11)$$

3-5. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ МАГНИТНЫМ ПОТОКОМ И ВЕКТОРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

По определению магнитный поток равен:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Используя соотношение

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H} = \mathbf{B},$$

получаем:

$$\Phi = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав этот интеграл по теореме Стокса, получим:

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} dl. \quad (3-12)$$

Магнитный поток сквозь поверхность S равен циркуляции векторного потенциала вдоль кривой L , ограничивающей эту поверхность. Итак, для определения магнитного потока, пронизывающего площадку S , вычисляется циркуляция векторного потенциала по контуру L , ограничивающему поверхность S . Формулой (3-12) удобно пользоваться тогда, когда известно значение A на контуре L .

3-6. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

На границе двух сред векторы магнитного поля B и H должны удовлетворять определенным условиям, которые называются граничными.

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую поверхность S , которая проведена так, как показано на рис. 3-2. Пло-

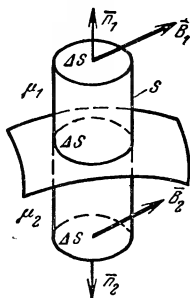


Рис. 3-2. Граничные условия для вектора магнитной индукции.

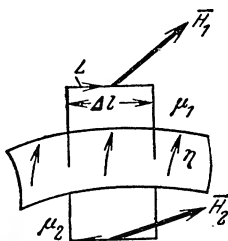


Рис. 3-3. Граничные условия для вектора напряженности магнитного поля.

щадки ΔS небольшие, и поэтому можно считать, что вектор B имеет одинаковые значения во всех точках данной площадки. Поток вектора B через всю поверхность S равен нулю, так как поверхность замкнутая. С другой стороны, поток может быть разбит на три части: Φ_1 — поток сквозь верхнюю площадку; Φ_2 — поток сквозь нижнюю площадку и Φ_6 — поток сквозь боковую поверхность цилиндра, причем сумма этих потоков должна равняться нулю

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_6 = 0.$$

Так как

$$\Phi_1 \approx B_1 \Delta S \cos(B_1, n_1) = B_{1n} \Delta S;$$

$$\Phi_2 \approx B_2 \Delta S \cos(B_2, n_2) = -B_{2n} \Delta S,$$

то $B_{1n} \Delta S - B_{2n} \Delta S + \Phi_6 = 0$.

Если высоту цилиндра уменьшить так, чтобы верхняя и нижняя площадки ΔS совпали с граничной поверхностью, то поток сквозь боковую поверхность обратится в нуль, и тогда

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Следовательно, нормальная составляющая вектора магнитной индукции на границе двух сред непрерывна. Это первое граничное условие. Так как $B_{1n} = \mu_1 \mu_0 H_{1n}$, $B_{2n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n}$, то

$$H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n},$$

т. е. нормальные составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе двух сред обратно пропорциональны магнитным проницаемостям этих сред.

Чтобы получить второе граничное условие, составим циркуляцию вектора $\mathbf{H}$ вдоль кривой L (рис. 3-3). По закону полного тока

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{полн}}.$$

Циркуляцию по контуру можно представить в виде суммы трех интегралов, взятых: по верхнему участку Δl , по нижнему участку длиной Δl и по боковым участкам. Если Δl мало и направление обхода контура совпадает с направлением движения часовой стрелки, то можно записать:

$$H_1 \Delta l \cos(\mathbf{H}_1, \Delta \mathbf{l}) + H_2 \Delta l \cos(\mathbf{H}_2, \Delta \mathbf{l}) + \int_{l_{\text{бок}}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{\text{полн}}.$$

Уменьшая длину боковых сторон так, чтобы участки Δl совпадали с граничной поверхностью, получаем:

$$H_{1\tau} \Delta l - H_{2\tau} \Delta l = I_{\text{полн}}.$$

Если по граничной поверхности течет конечной величины ток с поверхностной плотностью $\eta = dI/dl$, то полный ток равен:

$$I_{\text{полн}} = \eta \Delta l.$$

Следовательно,

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta.$$

На границе двух сред касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля претерпевает скачок, равный плотности поверхностного тока, протекающего по границе. Если $\eta = 0$, т. е. по граничной поверхности ток не протекает, то $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, т. е. касательная составляющая вектора $\mathbf{H}$ непрерывна на границе двух сред.

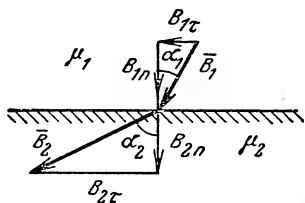


Рис. 3-4. Преломление линий вектора магнитной индукции.

Так как

$$H_{1\tau} = \frac{B_{1\tau}}{\mu_1 \mu_0}; \quad H_{2\tau} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2 \mu_0},$$

то

$$B_{1\tau} = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_{2\tau}.$$

На рис. 3-4 изображена одна из линий вектора $\mathbf{B}$ у границы двух сред с проницаемостью μ_1 и μ_2 . Нетрудно получить соотношение

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}} = \frac{B_{2\tau} \frac{\mu_1}{\mu_2}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2$$

или

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Соотношение это представляет собой закон преломления линий вектора $\mathbf{B}$ на границе двух сред.

3-7. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Энергию магнитного поля линейного контура с током можно подсчитать по формуле (ТОЭ, ч. I, гл. 1)

$$W_m = \frac{\Psi I}{2}$$

или в случае одного витка

$$W_m = \frac{\Phi I}{2},$$

где Ψ — магнитное потокосцепление; Φ — магнитный поток.

Чтобы определить, каким образом энергия распределяется в объеме, занятом полем, преобразуем написанное выражение. Площадь S , ограниченную контуром, разобьем

на элементарные площадки dS (рис. 3-5). Магнитный поток сквозь каждую площадку равен:

$$d\Phi = \mathbf{B} dS.$$

Весь поток, сцепленный с контуром, получится при интегрировании элементарных потоков сквозь площадь S

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS.$$

Построим на контурах, ограничивающих площадки dS , силовые трубки. Так как в магнитном поле линии вектора $\mathbf{B}$ всегда замкнуты, то силовые трубки получатся замкнутыми. Они заполнят весь объем V , занятый магнитным полем. Если обозначить ось трубки L , то циркуляция вектора $\mathbf{H}$ вдоль оси любой трубки будет равна току контура

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I.$$

Энергия, заключенная в объеме каждой трубки,

$$dW_m = \frac{I d\Phi}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{B} dS \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}.$$

Так как магнитный поток $d\Phi$ в пределах одной трубки неизменен, то он не зависит от переменной $d\mathbf{l}$ и может быть внесен под знак интеграла как постоянная величина

$$dW_m = \oint_L \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} d\mathbf{l} dS.$$

Энергия, заключенная во всех трубках, равна энергии магнитного поля

$$W_m = \int dW_m = \int_S \oint_L \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} d\mathbf{l} dS = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV.$$

Таким образом мы получили новое выражение для энергии магнитного поля контура с током

$$W_m = \int_V \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a \mathbf{H}^2}{2} dV = \int_V \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_a} dV. \quad (3-13)$$

Эта формула справедлива и в случае нескольких контуров с током. Она позволяет определить энергию магнит-

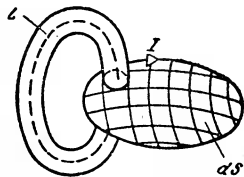


Рис. 3-5. Вычисление энергии магнитного поля.

ного поля в самом общем случае. Энергию магнитного поля можно записать и таким образом, чтобы в выражение вошли векторный потенциал $\mathbf{A}$ и плотность тока $\bar{\delta}$. Так как $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} dV.$$

Пользуясь выражением (см. приложение 2)

$$\text{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H},$$

можно записать:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{H} dV.$$

Преобразовав первый интеграл по теореме Остроградского, получим:

$$\int_V \text{div} [\mathbf{A}\mathbf{H}] dV = \oint_S [\mathbf{A}\mathbf{H}] dS,$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V .

Так как магнитное поле занимает неограниченный объем, то S можно представить себе как шаровую поверхность бесконечно большого радиуса R . Вектор $[\mathbf{A}\mathbf{H}]$ убывает в функции расстояния не медленнее $1/R^3$, тогда как поверхность растет не быстрее R^2 .

Следовательно, при $R \rightarrow \infty$

$$\oint_S [\mathbf{A}\mathbf{H}] dS = 0.$$

Тогда, записав по первому уравнению Максвелла вместо $\text{rot } \mathbf{H}$ плотность тока $\bar{\delta}$, получим:

$$W_m = \int_V \frac{\bar{\delta} \mathbf{A}}{2} dV,$$

причем интегрирование распространяется только на область V , занятую токами. Вне этой области $\bar{\delta} = 0$ и величина интеграла не изменится.

3-8. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если заряженная частица входит в магнитное поле с некоторой скоростью, то под действием сил поля траектория ее движения изменится.

В свою очередь заряженная частица при движении влияет на поле, изменит его интенсивность. Однако если заряд частицы невелик, его действием на поле можно пренебречь и считать, что магнитная индукция не зависит от величины заряда q_0 . Как показывает опыт, сила, действующая на движущуюся заряженную частицу, будет направлена перпендикулярно к скорости движения $\mathbf{v}$ и к направлению магнитной индукции $\mathbf{B}$ и будет равна:

$$F_m = q_0 [\mathbf{vB}]. \quad (3-14)$$

Сила F_m будет равна нулю в двух случаях. Во-первых, если частица находится в покое, $v = 0$; магнитное поле не действует на неподвижный заряд. Во-вторых, $F_m = 0$, когда частица движется вдоль линий вектора $\mathbf{B}$ и угол между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ равен 0 или 180° . В этом случае движение происходит по инерции, с постоянной скоростью, равной начальной скорости, с которой заряженная частица вошла в магнитное поле. Сила F_m будет наибольшей, если скорость движения частицы направлена перпендикулярно к линиям вектора $\mathbf{B}$. В этом случае

$$F_{m, \text{макс}} = q_0 v B.$$

Так как сила F_m всегда направлена перпендикулярно к скорости $\mathbf{v}$, она не производит работы, не меняет абсолютной величины скорости, следовательно, не изменяет и кинетической энергии движущейся частицы.

Уравнение движения определяется законом Ньютона:

$$F_m = m_0 \frac{dv}{dt} = q_0 [\mathbf{vB}],$$

где m_0 — масса частицы.

Так как $F_m \perp \mathbf{v}$, то и ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \perp \mathbf{v}$. Следовательно, движение будет происходить с неизменной скоростью $|\mathbf{v}|$; изменяться будет только направление вектора скорости. Нормальное ускорение, радиус кривизны траектории и скорость движения связаны соотношением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_0^2}{R_0}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Магнитное поле, однородное и неизменное во времени, $\mathbf{B} = \text{const}$. Начальная скорость $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{B}$. Сила $F_m = q_0 v_0 B$, так как в этом случае $|\mathbf{v}| = v_0$. При отсутствии других сил

движение частицы будет происходить по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной к направлению **B**. Радиус окружности

$$R_0 = \frac{v_0^3}{\frac{dv_0}{dt}} = \frac{m_0 v_0^3}{F_m} = \frac{m_0 v_0}{q_0 B}.$$

При прочих равных условиях чем больше масса m_0 , тем меньше кривизна траектории. Период вращения будет равен:

$$T_c = \frac{2\pi R_0}{v_0} = \frac{2\pi m_0}{q_0 B}.$$

Соответственно угловая частота

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c} = \frac{q_0 B}{m_0}.$$

Радиус кривизны траектории можно записать и следующим образом:

$$R_0 = \frac{v_0}{\omega_c}.$$

Если начальная скорость v_0 составляет угол α с направлением вектора **B**, вектор скорости можно разложить на две составляющие: вдоль линий вектора **B** и в направлении, перпендикулярном им:

$$v_\tau = v \cos \alpha; \quad v_n = v \sin \alpha.$$

Сила, действующая на частицу,

$$F_m = q_0 v_n B.$$

Составляющая скорости v_τ постоянна как по величине, так и по направлению. Составляющая v_n , оставаясь постоянной по величине, под действием силы F_m изменяет свое направление. Следовательно, движение частицы складывается из двух движений: прямолинейного со скоростью v_τ вдоль линий вектора **B** и равномерного движения по окружности вокруг этих линий со скоростью v_n , причем угол α будет постоянным

$$\alpha = \arctg \frac{v_n}{v_\tau} = \text{const.}$$

Траектория результирующего движения будет винтовой линией (рис. 3-6). Радиус R_0 и шаг h винтовой линии

определяются по формулам

$$R_0 = \frac{m_0 v_n}{q_0 B} = \frac{m_0 v \sin \alpha}{q_0 B};$$

$$h = v_\tau T_c = 2\pi \frac{m_0 v \cos \alpha}{q_0 B}.$$

Если частица с зарядом q_0 движется в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ и в электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}$, то, кроме силы $\mathbf{F}_m$, на нее будет действовать еще одна сила

$$\mathbf{F}_e = q_0 \mathbf{E}.$$

Результирующая сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_e = q_0 \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \} \quad (3-15)$$

носит название лоренцовой силы.

Если частица с зарядом q_0 движется только в однородном электрическом поле, причем направление скорости

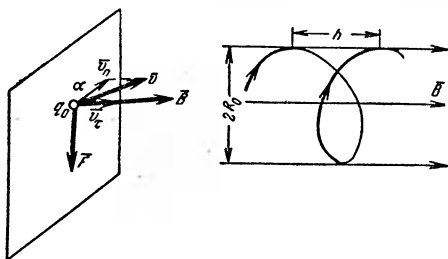


Рис. 3-6. Траектория заряженной частицы в магнитном поле.

совпадает с направлением линий вектора $\mathbf{E}$, движение частицы будет равномерно-ускоренным, по прямолинейной траектории. Скорость движения в этом случае определяется по формуле

$$v = v_0 + \omega t.$$

Так как ускорение $\omega = F_e/m_0$, а $F_e = q_0 E$, то

$$v = v_0 + \frac{q_0 E t}{m_0}.$$

Пусть частица с зарядом q_0 и массой m_0 , двигаясь равномерно, в момент $t = 0$ входит в электрическое поле (рис. 3-7). Поле однородное.

Напряженность поля $E = \text{const}$. Скорость движения в точке O равна v_0 , причем $v_0 \perp E$. Требуется определить величину h отклонения от первоначальной траектории.

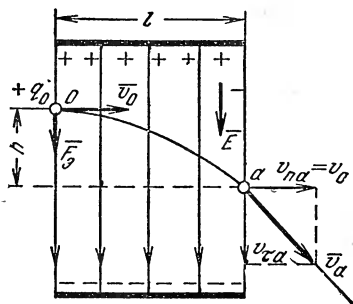


Рис. 3-7. Движение заряженной частицы в однородном электрическом поле.

В электрическом поле движение частицы будет складываться из равномерно-ускоренного движения под действием силы $F_e = q_0 E$ со скоростью $v_\tau = \omega t$ и равномерного движения со скоростью $v_n = v_0 = \text{const}$ в направлении, параллельном первоначальному. Так как в точке O скорость $v = v_0 = v_n$, то в этой точке $v_\tau = 0$. Если принять $t = 0$ в момент, когда частица вошла в поле, то в любой последующий момент t составляющая скорости

$$v_\tau = \omega t.$$

Ускорение ω , вызванное силой F_e , равно:

$$\omega = \frac{F_e}{m_0} = \frac{q_0 E}{m_0}.$$

Следовательно,

$$v_\tau = \frac{q_0 E t}{m_0}.$$

В момент t_1 , когда частица достигает точки a ,

$$v_{\tau a} = \frac{q_0 E t_1}{m_0}.$$

Время, в течение которого частица двигалась в поле,

$$t_1 = \frac{l}{v_0}.$$

Отклонение от первоначальной траектории

$$h = \frac{\omega_1 t_1^2}{2} = \frac{q_0 E t_1^2}{2 m_0 v_0^3}. \quad (3-16)$$

Величина отклонения при прочих равных условиях обратно пропорциональна кинетической энергии. В точке a

скорость движения будет равна:

$$v_a = \sqrt{v_0^2 + v_{\tau a}^2}$$

В поперечном электрическом поле заряженная частица движется по параболе. Вне поля путь частицы будет прямолинейным, по касательной к параболе в точке a . Угол α между новой и первоначальной траекториями определится по формуле

$$\alpha = \arctg \frac{v_0}{v_{\tau a}} = \arctg \frac{q_0 E l}{m_0 v_0^2}.$$

При выводе было сделано допущение, что однородность поля не нарушается у его границ (краевой эффект не учитывается).

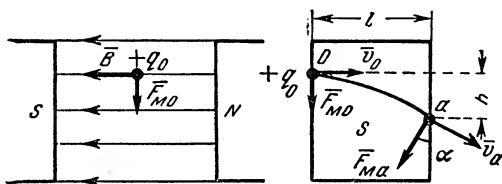


Рис. 3-8. Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле.

Если заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией $\mathbf{B} = \text{const}$ и $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{B}$, то величину отклонения можно приближенно подсчитать по формуле, аналогичной формуле (3-16),

$$h = \frac{F_m l^2}{2m_0 v_0} = \frac{q_0 B l^2}{2m_0 v_0}.$$

Чем меньше угол отклонения α (рис. 3-8), тем точнее определяется величина h .

Если неподвижный проводник, по которому проходит ток, находится в магнитном поле, силы поля, действуя на упорядоченно движущиеся в проводнике заряды, отклонят их в направлении, перпендикулярном току. У края проводника будет происходить накопление движущихся зарядов, что приведет к возникновению поперечного электрического поля. Описанное явление носит название эффекта Холла.

В металлических проводниках ток представляет собой упорядоченное движение электронов. Обозначив заряд

электрона q_0 , силу, действующую на электрон, можно определить по формуле

$$F_m = -q_0 [vB],$$

где v — средняя скорость движения электрона вдоль проводника; B — магнитная индукция.

Если обозначить напряженность поперечного электрического поля E_T , то на электрон будет действовать еще одна сила

$$F_E = -q_0 E_T.$$

При равновесии

$$F_m = -F_E.$$

Следовательно,

$$E_T = -[vB].$$

Так как в металлах концентрация электронов велика, средняя скорость движения их вдоль проводника будет небольшой, поэтому эффект Холла в металлах проявляется слабо. В полупроводниках (таких, в которых движутся частицы одного знака) эффект Холла сказывается значительно сильнее.

Эффект Холла используется в так называемых датчиках Холла — приборах, используемых в измерительных схемах, и в ряде других случаев [Л. 12].

3-9. МЕТОДЫ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Расчет магнитного поля чаще всего сводится к определению вектора напряженности H . Величины токов и положения проводников, по которым эти токи протекают, должны быть заданы. Если рассматривается поле в неферромагнитной среде, можно считать, что

$$\mu_a = \mu\mu_0 \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м.}$$

Если непосредственное определение напряженности магнитного поля H связано с большими математическими трудностями, удобно вводить векторный потенциал. Определив векторный потенциал, можно легко найти напряженность поля.

При расчете магнитных полей могут быть применены следующие методы:

метод наложения; применение закона полного тока в интегральной форме; применение первого уравнения

Максвелла; применение уравнений Пуассона и Лапласа для векторного потенциала; метод зеркальных изображений; метод конформных преобразований; графический метод расчета и ряд других методов [Л. 6]. Ниже на ряде конкретных примеров будут рассмотрены некоторые из перечисленных выше методов.

Пример 3-1. По прямому цилиндрическому проводу круглого сечения протекает ток I . Радиус провода a . Требуется определить напряженности магнитного поля внутри и вне провода, считая его уединенным и бесконечно длинным.

В силу симметрии линии вектора $\mathbf{H}$ являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси провода. Центры этих окружностей лежат на оси цилиндра. На одинаковых расстояниях от оси цилиндра численное значение вектора $\mathbf{H}$ одно и то же

$$H = f(r).$$

Рассмотрим линию вектора $\mathbf{H}$ внутри провода. Циркуляция $\mathbf{H}_{\text{вн}}$ по этой линии равна охваченному току

$$\oint_L \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{l} = I \frac{r^2}{a^2}.$$

Так как $\mathbf{H}_{\text{вн}}$ вдоль контура интегрирования имеет одинаковое численное значение и направлена по касательной к линии L , то

$$\oint_L \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{l} = H_{\text{вн}} \cdot 2\pi r.$$

Приравняв циркуляцию и полный ток, получим:

$$H_{\text{вн}} = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

На поверхности проводника напряженность поля имеет наибольшее значение.

Если контур интегрирования L провести вдоль линии вектора $\mathbf{H}$ вне провода, циркуляция $\mathbf{H}_{\text{вн}}$ равна току в проводе:

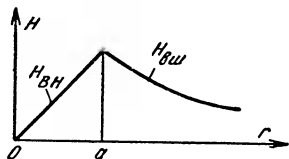
$$H_{\text{вн}} \cdot 2\pi r = I.$$

Следовательно,

$$H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi r}.$$

На границе $r = a$

$$H_{\text{вн}} = H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi a}.$$



На рис. 3-9 показана кривая $H = f(r)$.

Определим векторный потенциал $\mathbf{A}$. Направление векторного потенциала

Рис. 3-9. Напряженность магнитного поля цилиндрического проводника с током.

совпадает с направлением вектора плотности тока. Следовательно, для прямого проводника с током вектор $\mathbf{A}$ направлен параллельно оси провода. Если ось z цилиндрической системы координат совместить с осью провода, то векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{H}$ будут иметь по одной проекции $A = A_z$; $H = H_\psi$, которые зависят от координаты r . Так как по определению векторного потенциала

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H},$$

то в рассматриваемом случае

$$-\frac{dA_z}{dr} = \mu_a H_\psi.$$

Внутри провода

$$A_{\text{вн}} = - \int \mu_a H_{\text{вн}} dr + \text{const} = - \frac{\mu_a I r^2}{4\pi a^2} + \text{const}.$$

Если принять $A_{\text{вн}} = 0$ при $r = a$, постоянная интегрирования равна:

$$\text{const} = \frac{\mu_a I}{4\pi}.$$

Поэтому

$$A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right).$$

Вне провода

$$A_{\text{вн}} = - \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r + \text{const}.$$

Так как векторный потенциал непрерывен, то при $r = a$ $A_{\text{вн}} = A_{\text{вн}}$. Постоянная интегрирования в выражении $A_{\text{вн}}$ равна:

$$\text{const} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln a.$$

Следовательно,

$$A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}.$$

Линии вектора $\mathbf{H}$ определяются равенством $r = \text{const}$. Вдоль них векторный потенциал постоянен. Это положение справедливо для любого плоскопараллельного магнитного поля.

Магнитный поток внутри провода на участке длиной l

$$\Phi_{\text{вн}} = \int_S \mu_a H_{\text{вн}} dS.$$

При выбранных на рис. 3-10 направлениях тока и обхода площадки скалярное произведение

$$\mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{S} = H_{\text{вн}} dS = \frac{lr}{2\pi a^2} l dr.$$

Следовательно,

$$\Phi_{\text{вн}} = \frac{\mu_a l l}{2\pi a^2} \int_{r=0}^a r dr = \frac{\mu_a l l}{4\pi}.$$

Чтобы подсчитать потокоосцепление $\Psi_{\text{вн}}$, найдем часть тока I , с которым сцеплен поток $d\Phi_{\text{вн}}$, пронизывающий площадку $dS = l dr$. Эта часть тока будет относиться к току I , как πr^2 относится к πa^2 .

Искомое потокоосцепление определяется из выражения

$$\Psi_{\text{вн}} = \int_S d\Psi_{\text{вн}} = \int_S \frac{r^2}{a^2} d\Phi_{\text{вн}}.$$

Так как $d\Phi_{\text{вн}} = \mu_a \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{S} = \frac{\mu_a l r}{2\pi a^2} l dr$, то $\Psi_{\text{вн}} = \mu_a l l / 8\pi$. Следовательно, потокоосцепление в рассматриваемом случае в 2 раза меньше потока.

Зная потокоосцепление, можно найти внутреннюю индуктивность одиночного провода

$$L_{\text{вн}} = \frac{\Psi_{\text{вн}}}{I} = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

Как видно из формулы, $L_{\text{вн}}$ не зависит от радиуса провода. Внешний поток и потокоосцепление будут равны. Внешняя индуктивность одиночного провода будет равна бесконечности, так как обратный провод бесконечно удален от рассматриваемого.

Энергию магнитного поля в объеме $V = \pi a^2 l$ можно подсчитать по двум формулам:

$$W_{\text{м. вн}} = \frac{\Psi_{\text{вн}} I}{2}$$

или

$$W_{\text{м. вн}} = \int_{V_{\text{вн}}} \frac{\mu_a H_{\text{вн}}^2}{2} dV.$$

В обоих случаях она равна:

$$W_{\text{м. вн}} = \frac{\mu_a I^2 l}{16\pi}.$$

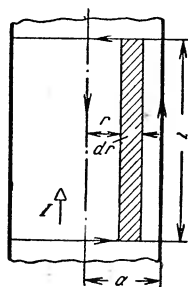


Рис. 3-10. Определение магнитного потока внутри проводника с током.

Пример 3-2. Определить индуктивность двухпроводной линии передачи электрической энергии. Провода параллельны, и расстояние между их осями d . Радиусы проводов одинаковы и равны a (рис. 3-11).

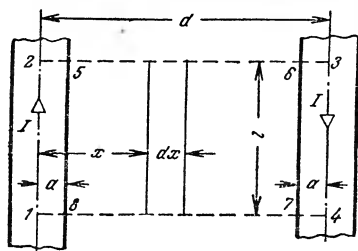


Рис. 3-11. Определение магнитного поля двухпроводной линии.

Магнитный поток, сцепленный с линией на участке длиной l , можно записать в виде суммы трех потоков $\Phi = \Phi_{56785} + \Phi_{12581} + \Phi_{63476}$. Первое слагаемое представляет собой внешний магнитный поток

$$\Phi_{\text{вн}} = \int_S \mathbf{B}_{\text{вн}} dS = \int_S \mu_0 \mathbf{H}_{\text{вн}} dS.$$

Пользуясь принципом наложения, можно найти магнитную индукцию $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ как сумму двух векторов, каждый из которых представляет собой магнитную

индукцию одиночного провода. При этом допускается некоторая неточность, так как благодаря эффекту близости в двухпроводной линии ток не будет равномерно распределен по сечению, как это имеет место в одиночном проводе.

Если выбрать направление обхода контура по линии 56785, а токи в проводах направить так, как показано на рис. 3-7, векторы $\mathbf{B}_{\text{вн}}$ и $d\mathbf{S}$ совпадут по направлению и внешний магнитный поток

$$\Phi_{\text{вн}} = 2 \int_{x=a}^{d-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Так как $\Phi_{\text{вн}}$ сцеплен с током I 1 раз, то потокосцепление $\Psi_{\text{вн}}$ будет равно потоку $\Phi_{\text{вн}}$:

$$\Psi_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 I l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Внутренний магнитный поток и потокосцепление, если не учитывать наличие второго провода, можно определить из выражений

$$\Phi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I l}{4\pi}; \quad \Psi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I l}{8\pi}.$$

Так как линия двухпроводная, то

$$\Phi_{\text{вн}} = \Phi_{25812} + \Phi_{63476} = 2\Phi'_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I l}{2\pi}.$$

Соответственно

$$\Psi_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I l}{4\pi}.$$

Зная потокосцепление, можно определить индуктивность двухпроводной линии

$$L = \frac{\Psi_{\text{вн}} + \Psi_{\text{вн}}}{I} = \frac{\mu_0 l}{4\pi} \left(4 \ln \frac{d-a}{a} + \mu \right).$$

Для проводов из неферромагнитного материала магнитная проницаемость μ может быть принята равной единице.

Обычно в линии расстояние $d \gg a$. Поэтому и величина $4 \ln \frac{d-a}{a} \gg 1$. Положив $d - a \approx d$ и отбросив второе слагаемое в выражении индуктивности, находим:

$$L \approx \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{a}.$$

После замены натурального логарифма десятичным, учитывая, что $\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} = 12,56 \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$, получим выражение индуктивности на единицу длины линии:

$$L_0 = \frac{L}{l} = 0,921 \cdot 10^{-6} \lg \frac{d}{a}, \text{ гн/м}.$$

Формула эта приведена в ч. 1, § 11-1.

Пример 3-3. Исследовать магнитное поле трубчатого проводника с постоянным током I . Размеры трубы показаны на рис. 3-12. Воспользуемся первым уравнением Максвелла. Область, занятую полем, можно разбить на три части и для каждой из них записать первое уравнение Максвелла:

$$\text{при } 0 \leq r \leq b \quad \text{rot } \mathbf{H}_1 = 0;$$

$$\text{при } b \leq r \leq c \quad \text{rot } \mathbf{H}_2 = \delta;$$

$$\text{при } c \leq r \leq \infty \quad \text{rot } \mathbf{H}_3 = 0.$$

Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью трубы и будем считать, что ток I направлен параллельно оси z . В силу симметрии вектор $\mathbf{H}$ имеет только одну проекцию H_ϕ , которая меняется в функции от координаты r . Вектор плотности тока будет направлен параллельно оси z

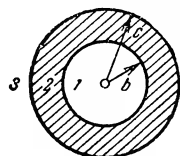


Рис. 3-12. Цилиндрическая труба с током.

$$\bar{\delta} = k \delta_z = k \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)}.$$

Если развернуть выражение $\text{rot } \mathbf{H}$ в цилиндрической системе координат (см. приложение 3) и учесть, что $H = H_\phi$, $\delta = \delta_z$, то получим:

$$\frac{1}{r} \frac{d(H_1 r)}{dr} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{d(H_2 r)}{dr} = \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)}; \quad \frac{1}{r} \frac{d(H_3 r)}{dr} = 0.$$

После интегрирования определим напряженность магнитного поля во всех трех областях:

$$H_1 = \frac{K_1}{r}; \quad H_2 = \frac{I r}{2\pi (c^2 - b^2)} + \frac{K_2}{r};$$

$$H_3 = \frac{K_3}{r}.$$

Для определения постоянных интегрирования K_1 , K_2 и K_3 надо учесть, что H — величина конечная. Кроме того, так как на границе нет поверхностных токов, H_τ — величина непрерывная.

Постоянная $K_1 = 0$, так как иначе H_1 при $r = 0$ обратилась бы в бесконечность. Следовательно, в области $0 \leq r \leq b$ поля нет, напряженность всюду равна нулю $H_1 = 0$.

При $r = b$ должно иметь место равенство $H_1 = H_2$ или

$$0 = \frac{Ib}{2\pi(c^2 - b^2)} + \frac{K_2}{b},$$

откуда

$$K_2 = -\frac{Ib^2}{2\pi(c^2 - b^2)}.$$

Напряженность магнитного поля в области $b \leq r \leq c$

$$H_2 = \frac{I(r^2 - b^2)}{2\pi(c^2 - b^2)r}.$$

При $r = c$ согласно граничному условию $H_2 = H_3$

$$\frac{I}{2\pi c} = \frac{K_3}{c}$$

или

$$K_3 = \frac{I}{2\pi}.$$

Тогда в области $c \leq r \leq \infty$

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

На рис. 3-13 показана кривая $H = f(r)$. Если бы по сплошному цилиндрическому проводнику радиуса c протекал ток такой же величины I , то поле в области $r > c$ было бы таким же, как и в случае трубчатого проводника.

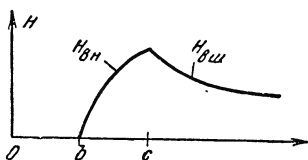


Рис. 3-13. Напряженность магнитного поля трубы с током.

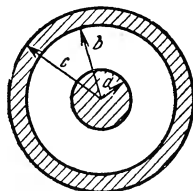


Рис. 3-14. Коаксиальный кабель.

Пример 3-4. Исследовать магнитное поле коаксиального кабеля, по которому протекает постоянный ток I . Размеры проводников кабеля указаны на рис. 3-14. Определим векторный потенциал A с помощью уравнений Пуассона и Лапласа. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью кабеля. Пусть направление тока в цилиндрическом проводнике кабеля совпадет с направлением оси z . Так как ток постоянный и кабель симметричный, ток распределяется по сечению

проводников равномерно. Плотность тока в центральном проводнике

$$\bar{\delta}_1 = k\delta_{1z} = k \frac{I}{\pi a^2}.$$

В наружном трубчатом проводнике

$$\bar{\delta}_2 = -k\delta_{2z} = -k \frac{I}{\pi (c^2 - b^2)}.$$

Направления векторов $\bar{\delta}_1$ и $\bar{\delta}_2$ прямо противоположны. Направление векторного потенциала магнитного поля совпадает с направлением вектора плотности тока, следовательно, A имеет одну проекцию A_z .

Уравнение Пуассона для области $0 \leq r \leq a$ запишется следующим образом:

$$|\nabla^2 A_1|_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{1z}}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta_{1z},$$

причем δ_1 и A_1 зависят только от одной переменной r .

Интегрируя, получаем:

$$A_1 = A_{1z} = -\frac{\mu_a \delta_1 r^2}{4} + K_1 \ln r + K_2.$$

Напряженность поля

$$H = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } A.$$

В развернутом виде, учитывая, что $H = H_\psi$, $A = A_z$, получаем:

$$H_\psi = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

Следовательно,

$$H_1 = \frac{\delta_1 r}{2} - \frac{K_1}{\mu_a r}.$$

Так как напряженность поля — величина конечная, то постоянная K_1 должна равняться нулю. Кроме того, предположим, что на поверхности проводника при $r = a$ векторный потенциал равен нулю, тогда

$$K_2 = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi}.$$

В области $0 \leq r \leq a$

$$H_1 = H_{1\psi} = \frac{I r}{2\pi a^2};$$

$$A = A_{1z} = \frac{\mu \mu_0 I (a^2 - r^2)}{4\pi a^2}.$$

На оси векторный потенциал

$$A_0 = \frac{\mu \mu_0 I}{4\pi}.$$

В области $a \leq r \leq b$ поле описывается уравнением Лапласа

$$\nabla^2 A_2 = 0.$$

После интегрирования находим:

$$A_2 = K_3 \ln r + K_4;$$

$$H_2 = -\frac{K_3}{\mu_0 r}.$$

Для определения постоянных интегрирования используем граничные условия.

При $r = a$ $H_{1\tau} = H_{2\tau}$; $A_1 = A_2$.

Касательная составляющая H на границе непрерывна, так как поверхностных токов на границе нет.

При $r = a$

$$\frac{I}{2\pi a} = -\frac{K_3}{\mu_0 a}$$

и

$$K_3 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}.$$

Далее

$$K_3 \ln a + K_4 = 0,$$

или

$$K_4 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a.$$

В пространстве между проводниками кабеля

$$H_2 = H_{2\psi} = \frac{\delta_1 a^2}{2r} = \frac{I}{2\pi r};$$

$$A_2 = A_{2z} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a}.$$

Магнитное поле в центральном проводнике и между центральным и наружным трубчатым проводником ничем не отличается от поля цилиндрического проводника (пример 3-1). В области $b \leq r \leq c$, т. е. в толще трубы, после интегрирования уравнения Пуассона получим:

$$H_3 = \frac{\delta_2 r}{2} - \frac{K_5}{\mu_0 \mu r};$$

$$A_3 = -\frac{\mu_0 \mu \delta_2 r^2}{4} + K_5 \ln r + K_6.$$

При $r = b$

$$H_2 = H_3 \text{ и } A_2 = A_3,$$

что дает:

$$K_5 = -\frac{\mu_0 \mu I c^2}{2\pi (c^2 - b^2)};$$

$$K_6 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu I c^2}{2\pi (c^2 - b^2)} \ln b - \frac{\mu_0 \mu I b^2}{4\pi (c^2 - b^2)}.$$

Следовательно, в области $b \leq r \leq c$

$$H_3 = \frac{I(c^2 - r^2)}{2\pi r(c^2 - b^2)};$$

$$A_3 = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_0 \mu c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{b}{r} + \mu_0 \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu (r^2 - b^2)}{2(c^2 - b^2)} \right\}.$$

Вне кабеля

$$H_{\text{вн}} = 0;$$

$$A_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_0 \mu c^2}{c^2 - b^2} \ln \frac{b}{c} + \mu_0 \ln \frac{a}{b} + \frac{\mu_0 \mu}{2} \right\}.$$

На рис. 3-15 изображены кривые H и A в функции от r .

Пример 3-5. Определить индуктивность коаксиального кабеля, размеры которого изображены на рис. 3-14. Длина кабеля l . Магнитное потокоцепление складывается из трех потокоцеплений

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3.$$

Потокоцепление внутри проводника (см. пример 3-1)

$$\Psi_1 = \frac{\mu_0 \mu l l}{8\pi}.$$

Магнитный поток и потокоцепление в области между двумя проводниками кабеля одинаковы и равны (пример 3-1):

$$\Psi_2 = \frac{\mu_0 l l}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a}.$$

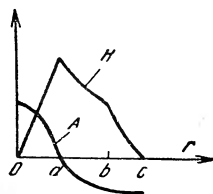


Рис. 3-15. Напряженность магнитного поля и векторный потенциал коаксиального кабеля.

Потокоцепление Ψ_3 определяется из выражения

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \int_{a_1}^{a_2} d\Psi_3 = \int_{a_1}^{a_2} d\Phi_3 \frac{a_2^2 - r^2}{a_2^2 - a_1^2} = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_0 \mu l l (a_2^2 - r^2)^2}{2\pi r (a_2^2 - a_1^2)^2} dr = \\ &= \frac{\mu_0 \mu l l}{2\pi} \left\{ \frac{a^4}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \ln \frac{a^2}{a_1} - \frac{1}{4} \frac{3a_2^3 - a_1^3}{a_2^2 - a_1^2} \right\}. \end{aligned}$$

Индуктивность кабеля

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \frac{a_1}{a} + \frac{\mu a_1^2}{(a_2^2 - a_1^2)^2} \ln \frac{a_2}{a_1} - \frac{\mu a_2^3}{2(a_2^2 - a_1^2)} \right\}.$$

Если проводники не ферромагнитные, магнитная проницаемость их равна единице.

Если не учитывать внутреннее потокоцепление, выражение для L упростится:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a_1}{a}.$$

Подставив значение магнитной постоянной и записав вместо натурального логарифма десятичный, получим индуктивность коаксиаль-

ного кабеля на единицу длины:

$$L_0 \approx 0,46 \cdot 10^{-6} \lg \frac{b}{a}, \text{ гн/м.}$$

Здесь $b = a_1$.

Формула эта приведена в ч. I, § 11-1.

Пример 3-6. Исследовать магнитное поле двухпроводной линии, считая провода линейными. Постоянный ток, протекающий по проводам, равен I . Расстояние между проводами равно d . Векторный потенциал линейного провода

$$A = \frac{\mu_a I}{4\pi} \oint \frac{dl}{R}.$$

Начало декартовой системы координат поместим так, как показано на рис. 3-16. Провода параллельны оси x и находятся от нее на одина-

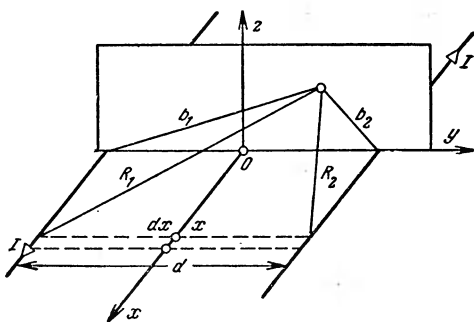


Рис. 3-16. Два параллельных линейных тока.

ковом расстоянии $d/2$. Векторный потенциал будет иметь только одну составляющую A_x . Пользуясь методом наложения и считая $\mu_a = \mu_0$, находим:

$$\begin{aligned} A &= A_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{b_2^2 + x^2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b_2^2 + x^2}} \right) dx = \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\ln \frac{x + \sqrt{b_1^2 + x^2}}{x + \sqrt{b_2^2 + x^2}} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Отношение

$$\frac{x + \sqrt{b_1^2 + x^2}}{x + \sqrt{b_2^2 + x^2}},$$

когда x стремится к бесконечности, стремится к единице. Следовательно, логарифм этого отношения будет равен нулю при $x = \infty$.

Тогда

$$A = A_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b_2}{b_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}}{\sqrt{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2}}.$$

Зная векторный потенциал, можно определить напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

В декартовой системе координат, так как $A_y = A_z = 0$,

$$H_x = 0; \quad H_y = \frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_x}{\partial z}; \quad H_z = -\frac{1}{\mu_a} \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Подставив значение A_x , получим:

$$\begin{aligned} H_x &= 0; \\ H_y &= \frac{Iz}{2\pi} \left(\frac{1}{b_2^3} - \frac{1}{b_1^3} \right); \\ H_z &= -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{y + \frac{d}{2}}{b_2^3} - \frac{y - \frac{d}{2}}{b_1^3} \right). \end{aligned}$$

Пример 3-7. Прямой линейный проводник с постоянным током I расположен параллельно плоскости раздела двух сред на расстоянии d от нее (рис. 3-17). Среда I , в которой находится проводник с током, имеет проницаемость μ_1 . Проницаемость второй II среды μ_2 . Определить напряженность магнитного поля в обеих средах.

Так как на границе двух сред нет поверхностных токов, то на плоскости раздела xOy должны иметь место соотношения

$$H_{I\tau} = H_{II\tau}; \quad \mu_1 H_{In} = \mu_2 H_{II n}.$$

Рассмотрим вместо заданной задачи две другие, которые решаются легче.

В первой задаче (рис. 3-18) рассматривается поле двух параллельных линейных проводов с токами I и I_1 , направленными в противоположные стороны. Среда, в которой находятся эти провода, однородная с проницаемостью μ_1 . Расстояние между проводами $2d$. Сравнивая рис. 3-17 и 3-18, убеждаемся, что в области I (над плоскостью xOy) условия для обеих задач одинаковы. Если подобрать фиктивный ток I_1 таким образом, чтобы были выполнены граничные условия основной задачи, можно вектор поля в области I легко рассчитать. Сравнивая рис. 3-19 и 3-17, убеждаемся, что в области II (под плоскостью xOy)

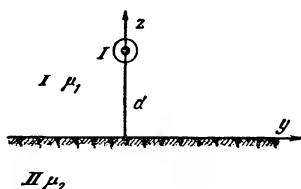


Рис. 3-17. Линейный ток вблизи плоской границы.

условия обеих задач одинаковы. Следовательно, при выполнении граничных условий вектор поля в области II можно легко определить.

Рассмотрим точку m на граничной плоскости (рис. 3-18).

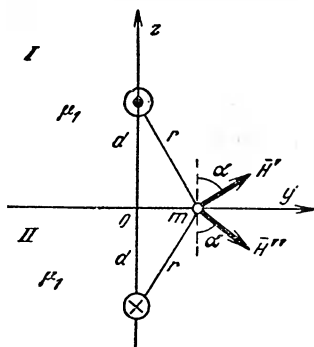


Рис. 3-18. Два линейных тока в однородной среде.

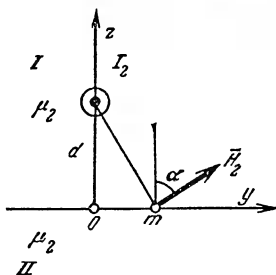


Рис. 3-19. Линейный ток в однородной среде.

Напряженность магнитного поля и ее составляющие в этой точке определяются методом наложения:

$$H_{\tau \text{ рез}} = \frac{I}{2\pi r} \sin \alpha + \frac{I_1}{2\pi r} \sin \alpha;$$

$$H_{n \text{ рез}} = \frac{I}{2\pi r} \cos \alpha - \frac{I_1}{2\pi r} \cos \alpha.$$

В той же точке рис. 3-19 напряженность магнитного поля и ее составляющие от тока I_2 равны:

$$H_{\tau 2} = \frac{I_2}{2\pi r} \sin \alpha; \quad H_{n2} = \frac{I_2}{2\pi r} \cos \alpha.$$

Согласно граничным условиям

$$H_{\tau 1} = H_{\tau \text{ рез}} = H_{\tau 2};$$

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_1 H_{n \text{ рез}} = \mu_2 H_{n2}$$

или

$$\frac{\sin \alpha}{2\pi r} (I + I_1) = \frac{\sin \alpha}{2\pi r} I_2;$$

$$\frac{\mu_1 \cos \alpha}{2\pi r} (I - I_1) = \frac{\mu_2 \cos \alpha}{2\pi r} I_2.$$

Следовательно,

$$I + I_1 = I_2;$$

$$I - I_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} I_2.$$

Решив эти уравнения, получим фиктивные токи:

$$I_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} I;$$

$$I_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} I.$$

Зная фиктивные токи, находим векторы магнитного поля в области I:

$$\mathbf{H}_I = \frac{I}{2\pi r'} \mathbf{1}_{r'} + \frac{I_1}{2\pi r''} \mathbf{1}_{r''};$$

$$\mathbf{B}_I = \mu_1 \mu_0 \mathbf{H}_I,$$

где r' — расстояние от выбранной точки до первого провода; r'' — расстояние от той же точки до второго провода.

Векторы магнитного поля в области II

$$\mathbf{H}_{II} = \frac{I_2}{2\pi r_2} \mathbf{1}_{r_2};$$

$$\mathbf{B}_{II} = \mu_2 \mu_0 \mathbf{H}_{II},$$

где r_2 — расстояние от выбранной точки до провода с током I_2 .

3-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

3-1. По прямому цилиндрическому стальному проводу круглого сечения радиусом $a = 3$ мм протекает постоянный ток $I = 0,5$ а. Магнитная проницаемость материала провода $\mu = 200$. Определить напряженность и индукцию магнитного поля внутри и вне провода.

О т в е т:

$$H_{\text{вн}} = \frac{792}{r} 10^{-4}, \text{ а/м};$$

$$\mathbf{B} = 200 \mu_0 \mathbf{H};$$

$$H_{\text{вн}} = 88r \cdot 10^2, \text{ а/м}.$$

3-2. Определить векторный потенциал A однородного магнитного поля в цилиндрических координатах, если магнитная индукция направлена параллельно оси z и равна $B_0 = \text{const}$.

О т в е т:

$$A = A_\psi = \frac{B_0 r}{2}.$$

3-3. Определить векторный потенциал в сферической системе координат. Данные те же, что в задаче 3-2. Координата θ отсчитывается от оси z .

О т в е т:

$$A = A_\psi = \frac{B_0 R}{2} \sin \theta.$$

3-4. Определить индуктивность тороида круглого сечения, считая, что магнитный поток распределен в нем равномерно. Магнитная прони-

цаемость $\mu = \text{const}$. Сечение тороида S . Длина средней силовой линии l . Число витков обмотки w .

О т в е т:

$$L = \frac{\mu \mu_0 w^2 S}{l}.$$

3-5. Определить индуктивность тороида (задача 3-4), считая, что в нем имеется узкий зазор λ .

О т в е т:

$$L = \frac{\mu \mu_0 w^2 S}{l + \mu \lambda}.$$

3-6. Начертить картину магнитного поля двухпроводной линии с постоянным током I . Расстояние между проводами d . Сечение проводов настолько мало, что их можно считать линейными. Пользоваться методом наложения.

3-7. Найти силу взаимодействия на единицу длины между двумя параллельными прямолинейными проводами с токами I_1 и I_2 .

О т в е т:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}.$$

3-8. Найти вектор плотности тока в точке, в которой напряженность магнитного поля, записанная в цилиндрической системе координат, равна:

$$\mathbf{H} = I_\phi C \frac{r^2}{3a}.$$

О т в е т:

$$\bar{\delta} = I_z C \frac{r}{a}.$$

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

4-1. ПОЛНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток в проводящей среде был определен как упорядоченное движение электрических зарядов под действием сил поля. Такой ток называют **током проводимости**. Плотность тока проводимости $\bar{\delta}$ пропорциональна напряженности электрического поля E и зависит от проводимости среды γ :

$$\bar{\delta} = \gamma E.$$

Если заряженные тела или частицы движутся в непроводящей среде или в вакууме со скоростью v , то они обра-

зуют ток, называемый током переноса. Плотность тока переноса $\bar{\delta}_{\text{пер}}$ пропорциональна объемной плотности заряда ρ и зависит от скорости движения

$$\bar{\delta}_{\text{пер}} = \rho v.$$

В молекулах диэлектрика, который вносится во внешнее электрическое поле, под действием сил поля связанные заряды будут смещаться и образуют ток поляризации. Плотность тока поляризации $\bar{\delta}_{\text{поляр}}$ пропорциональна скорости изменения вектора поляризованности $\mathbf{P}$:

$$\bar{\delta}_{\text{поляр}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Для сред, в которых поляризованность пропорциональна напряженности поля $\mathbf{P} = \epsilon_0 k_3 \mathbf{E}$, плотность тока поляризации

$$\bar{\delta}_{\text{поляр}} = \epsilon_0 k_3 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Все три перечисленных вида тока представляют собой перемещение электрических зарядов. Каждый из этих токов сопровождается магнитным полем.

Максвелл предложил называть также электрическим током изменение во времени электрического поля в вакууме, так как при этом также образуется магнитное поле. Этот вид тока называют током смещения в вакууме. Плотность его $\bar{\delta}_{0 \text{ см}}$ пропорциональна скорости изменения напряженности электрического поля

$$\bar{\delta}_{0 \text{ см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Отличие тока смещения в вакууме от других видов тока заключается в том, что он не вызывает тепловых потерь.

Токи проводимости и переноса могут быть как в постоянных, так и в переменных во времени электрических полях. Токи поляризации и смещения в вакууме могут быть только в переменных электрических полях.

Таким образом, электрическим током называют два разнородных явления — движение электрических зарядов и изменение электрического поля во времени. Основным свойством любого тока является его способность возбуждать магнитное поле.

Полным электрическим током называется совокупность всех явлений, при которых образуется магнитное поле.

В общем случае плотность полного тока равна сумме плотностей тока проводимости, переноса, поляризации и смещения в вакууме

$$\bar{\delta}_{\text{полн}} = \bar{\delta} + \bar{\delta}_{\text{пер}} + \bar{\delta}_{\text{поляр}} + \bar{\delta}_{\text{осм}}.$$

Сумму тока поляризации и тока смещения в вакууме называют током смещения в диэлектрике. Плотность тока смещения в диэлектрике равна:

$$\bar{\delta}_{\text{см}} = \bar{\delta}_{\text{осм}} + \bar{\delta}_{\text{поляр}} = \epsilon_0 (1 + k_a) \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Току смещения присуще свойство распространяться в диэлектрике так же, как току проводимости присуще свойство распространяться по проводнику.

В дальнейшем мы не будем рассматривать токов переноса. Поэтому под полным током мы будем подразумевать сумму тока проводимости и тока смещения.

Плотность полного тока в этом случае

$$\bar{\delta}_{\text{полн}} = \bar{\delta} + \bar{\delta}_{\text{см}} = \gamma E + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (4-1)$$

Полный ток может возникнуть как в проводящей, так и в непроводящей средах.

В хорошо проводящей среде токи проводимости настолько больше токов смещения, что последними можно пренебречь. В диэлектрике с малыми потерями, наоборот, токи смещения значительно больше токов проводимости и поэтому токи проводимости можно не учитывать. В полупроводящей среде токи проводимости и токи смещения соизмеримы, поэтому обе составляющие полного тока должны быть учтены.

Предположение Максвелла о том, что в диэлектрике возбуждаются токи смещения, подобно тому как в проводнике токи проводимости, объясняет тот факт, что электрические устройства могут излучать в окружающее пространство энергию, которая распространяется в диэлектрике вместе с электромагнитными волнами.

4-2. ДИВЕРГЕНЦИЯ ПЛОТНОСТИ ТОКА ПРОВОДИМОСТИ

Постоянные токи могут быть только в замкнутых цепях. Линии вектора плотности постоянного тока непрерывны и $\text{div } \bar{\delta} = 0$. Постоянный ток через произвольную замкну-

тую поверхность должен быть всегда равен нулю. Заряд в объеме, ограниченном такой поверхностью, остается неизменным во времени.

Переменные токи могут иметь место и в незамкнутых цепях (например, цепь с конденсатором). Следовательно, в переменных полях цепи с токами проводимости могут быть незамкнутыми. Там, где заканчиваются линии вектора плотности тока проводимости $\bar{\delta}$, могут накапливаться заряды; поток вектора плотности тока проводимости через замкнутую поверхность может не равняться нулю.

Пусть в объеме V , ограниченном поверхностью S , имеется заряд q , объемная плотность которого равна ρ . Если через поверхность S выходит ток проводимости i , то заряд q станет уменьшаться и ток будет равен:

$$i = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Выразив ток через плотность тока проводимости $\bar{\delta}$, получим интегральную форму уравнения непрерывности

$$\oint_S \bar{\delta} dS = - \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Это уравнение можно записать в дифференциальной форме.

Выразив заряд q через объемную плотность заряда

$$q = \int_V \rho dV$$

и преобразовав поток вектора $\bar{\delta}$ по теореме Остроградского

$$\oint_S \bar{\delta} dS = \int_V \operatorname{div} \bar{\delta} dV,$$

получим:

$$- \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \bar{\delta} dV.$$

Так как поверхность S , а следовательно, и ограниченный ею объем V были выбраны произвольно, то написанное равенство не зависит от пределов. Поэтому подынтегральные функции должны быть равны и

$$\operatorname{div} \bar{\delta} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (4-2)$$

Дивергенция плотности тока проводимости равна скорости убывания плотности объемных зарядов.

Плотность тока проводимости может иметь источники и стоки в виде изменяющихся во времени объемных зарядов.

4-3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ПОЛНОГО ТОКА

Покажем, что полный ток непрерывен, что дивергенция плотности полного тока всегда равна нулю. Так как плотность полного тока равна сумме плотности тока проводимости и плотности тока смещения

$$\bar{\delta}_{\text{полн}} = \bar{\delta} + \bar{\delta}_{\text{см}} = \bar{\delta} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{ то}$$

$$\text{div } \bar{\delta}_{\text{полн}} = \text{div } \bar{\delta} + \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Так как пространственные координаты от времени не зависят, то можно изменить порядок дифференцирования

$$\text{div } \bar{\delta}_{\text{полн}} = \text{div } \bar{\delta} + \frac{\partial (\text{div } \mathbf{D})}{\partial t}.$$

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\text{div } \mathbf{D} = \rho$. Согласно (4-2) $\text{div } \bar{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Поэтому

$$\text{div } \bar{\delta}_{\text{полн}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (4-3)$$

что и требовалось доказать.

Плотность полного тока представляет собой соленоидальный вектор, не имеющий источников и стоков.

4-4. ПЕРВОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Первое уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму закона полного тока:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = i_{\text{полн}} = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} d\mathbf{S}.$$

Преобразовав по теореме Стокса циркуляцию вектора $\mathbf{H}$, получим:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S}.$$

Тогда можно записать равенство

$$\int_S \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{S} = \int_S \bar{\delta}_{\text{полн}} d\mathbf{S}.$$

Так как это равенство справедливо для всех значений предела интегрирования S , то подынтегральные функции равны и

$$\text{rot } \mathbf{H} = \bar{\delta}_{\text{полн}}. \quad (4-4)$$

Это уравнение называется первым уравнением Максвелла.

Так как плотность полного тока равна сумме плотности тока проводимости $\bar{\delta} = \gamma \mathbf{E}$ и плотности тока смещения $\bar{\delta}_{\text{см}} = \partial \mathbf{D} / \partial t$, то первое уравнение Максвелла примет вид:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (4-5)$$

Для сред с постоянной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon = \text{const}$.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4-6)$$

Физический смысл этого уравнения заключается в утверждении, что *вихревое магнитное поле возбуждается как токами проводимости, так и изменяющимся во времени электрическим полем.*

Для идеальных диэлектриков с проводимостью $\gamma = 0$ получим:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4-7)$$

Первое уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением во времени напряженности электрического поля и изменением в пространстве напряженности магнитного поля и указывает на то, что электромагнитное поле всегда находится в движении.

Известно, что дивергенция ротора тождественно равна нулю $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$. Поэтому и $\text{div } \bar{\delta}_{\text{полн}} = 0$. Как было показано выше [формула (4-3)], это условие всегда выполняется.

4-5. ВТОРОЕ УРАВНЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Второе уравнение Максвелла представляет собой дифференциальную форму записи закона электромагнитной индукции, согласно которому в витке при изменении сцепленного с ним магнитного потока Φ наводится э. д. с.,

равная

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Максвелл обобщил этот закон, указав, что изменяющийся во времени магнитный поток возбуждает электрическое поле и при отсутствии витка.

В поле с индукцией $\mathbf{B}$ магнитный поток сквозь произвольную поверхность S , ограниченную контуром L , равен:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Если напряженность индуцированного электрического поля обозначить E , то наведенная в контуре э. д. с. $e = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l}$.

Будем считать, что поверхность S и контур L неподвижны и не деформируются, тогда

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Положительное направление обхода контура L и положительное направление нормали к поверхности S выбираются так, чтобы они образовали правовинтовую систему.

Частные производные введены потому, что э. д. с. может индуцироваться не только за счет изменения магнитного потока во времени, но и за счет движения или деформации контура.

По теореме Стокса можно преобразовать циркуляцию

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Следовательно,

$$\int_S \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Равенство интегралов справедливо для любой поверхности S , поэтому подынтегральные функции равны и

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4-8)$$

Полученное выражение называется вторым уравнением Максвелла.

Физический смысл его заключается в утверждении, что *изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает вихревое электрическое поле*. Так как $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$, то линии вектора $\mathbf{E}$ могут быть замкнутыми, причем они должны охватывать линии вектора $\mathbf{B}$. Направление линий векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ указаны на рис. 4-1 для случая, когда $\partial \mathbf{B} / \partial t < 0$.

Напомним, что в электростатическом поле, которое является безвихревым, $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Линии вектора $\mathbf{E}$ всегда разомкнуты, они начинаются у положительных зарядов и заканчиваются у отрицательных.

Для сред с постоянной магнитной проницаемостью второе уравнение Максвелла примет вид:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (4-9)$$

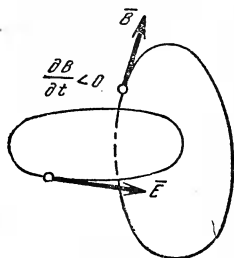


Рис. 4-1. Линии векторов поля.

Второе уравнение Максвелла устанавливает зависимость между изменением во времени напряженности магнитного поля и изменением в пространстве напряженности электрического поля.

4-6. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Электромагнитное поле характеризуется четырьмя векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$. Для сред с постоянной проницаемостью эти векторы связаны соотношениями

$$\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}.$$

Поэтому при расчете достаточно определить только два вектора. Обычно определяют векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Однако для однозначности определения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ этих уравнений недостаточно. Вектор по заданному ротору однозначно не определяется. Поэтому надо задать еще и дивергенцию векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

По теореме Гаусса в дифференциальной форме $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, при постоянном значении ε

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Основное свойство магнитного поля — его соленоидальность ($\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$) позволит определить дивергенцию вектора $\mathbf{H}$. При постоянном значении μ $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

Следовательно, полная система уравнений электромагнитного поля для сред с постоянными параметрами $\varepsilon_a = \varepsilon \varepsilon_0 = \text{const}$; $\mu_a = \mu \mu_0 = \text{const}$; $\gamma = \text{const}$ запишется следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}.$$

Эти уравнения представляют собой основные уравнения электромагнитного поля.

При решении конкретных задач должны быть учтены начальные и граничные условия. Например, в момент $t = 0$ должны быть заданы значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во всех точках объема V , в котором исследуется поле; кроме того, должны быть известны значения этих векторов на граничной поверхности S в течение всего промежутка времени от 0 до t .

На границе двух сред значения параметров ε , μ , γ меняются скачком. Следовательно, на поверхности раздела будет иметь место разрыв непрерывности векторов поля, причем граничные условия, полученные для постоянных во времени полей (1-12), (3-6) сохраняют силу и для мгновенных значений проекций векторов электромагнитного поля:

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau};$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta;$$

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$$

Если на поверхности раздела нет свободных зарядов, $\sigma = 0$. Если на граничной поверхности нет тока, $\eta = 0$.

Физический смысл основных уравнений электромагнитного поля заключается в том, что *магнитное поле всегда*

вихревое и возбуждается оно как движущимися зарядами, так и изменяющимся во времени электрическим полем. Электрическое поле может быть вихревым (в этом случае оно возбуждается изменяющимся во времени магнитным полем) и безвихревым (если оно возбуждается постоянными во времени электрическими зарядами). Электрическое и магнитное поля связаны непрерывным взаимным превращением и представляют собой различные проявления единого электромагнитного поля, которое находится в движении и несет с собой запас энергии

$$w_{\text{эм}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV. \quad (4-10)$$

Для постоянных во времени процессов уравнения поля распадаются на две независимые системы:

для электростатического поля $\text{rot } \mathbf{E} = 0$; $\text{div } \epsilon_a \mathbf{E} = \rho$
и для магнитостатического поля $\text{rot } \mathbf{H} = \bar{\delta}$; $\text{div } \mu_a \mathbf{H} = 0$.

4-7. ТЕОРЕМА УМОВА — ПОЙНТИНГА

Теорема Умова — Пойнтинга выражает закон сохранения энергии в электромагнитном поле. Она связывает изменение энергии в каком-либо объеме с потоком ее через поверхность, ограничивающую этот объем.

Энергия электромагнитного поля в объеме V

$$w_{\text{эм}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV + \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV.$$

Она непрерывно меняется во времени.

Изменение (увеличение) энергии в указанном объеме

$$\frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} = \int_V \epsilon_a \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV + \int_V \mu_a \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dV.$$

Запишем уравнения Максвелла для среды с $\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и $\gamma = \text{const}$:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Из этих уравнений найдем:

$$\epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \gamma \mathbf{E};$$

$$\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \text{rot } \mathbf{E}.$$

Тогда изменение энергии электромагнитного поля может быть выражено следующим образом:

$$\frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} = \int_V \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} dV - \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV - \int_V \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} dV.$$

Из курса векторного анализа известно, что

$$\text{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} = - \int_V \text{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] dV - \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV.$$

Обозначим векторное произведение

$$[\mathbf{E} \mathbf{H}] = \Pi.$$

Его называют вектором Пойнтинга.

Величина Π измеряется в ваттах на квадратный метр ($\text{вт}/\text{м}^2$).

По теореме Остроградского

$$\int_V \text{div } \Pi dV = \oint_S \Pi dS$$

и, следовательно,

$$- \oint_S \Pi dS = \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t}. \quad (4-11)$$

Полученное выражение носит название теоремы Умова — Пойнтинга: *поток вектора Пойнтинга, входящий в замкнутую поверхность S , равен сумме двух мощностей, одна из которых $\int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV = p_{\text{тепл}}$ является мощностью тепловых потерь внутри объема V , ограниченного поверхностью S , а другая $\partial w_{\text{эм}}/\partial t = p_{\text{эм}}$ соответствует изменению энергии электромагнитного поля в том же объеме.*

Мощность тепловых потерь $p_{\text{тепл}}$ всегда положительна. Мощность $p_{\text{эм}}$, соответствующая изменению энергии электромагнитного поля, может быть и положительной и отри-

цательной. Если она положительна, то электромагнитная энергия внутри объема V увеличивается.

Положительная нормаль к замкнутой поверхности и вектор $d\mathbf{S}$ направлены в наружную сторону. Поэтому, для того чтобы поток вектора $\bar{\Pi}$, входящий через поверхность S , был положительным, вектором $\bar{\Pi}$ должен быть преимущественно направлен внутрь объема V (угол между $\bar{\Pi}$ и $d\mathbf{S}$ должен быть преимущественно тупым).

Вектор Пойнтинга можно определить как величину, которая равна энергии, проходящей в 1 сек сквозь поверхность, равную 1 м^2 , перпендикулярную к направлению $\bar{\Pi}$.

При выводе теоремы Умова — Пойнтинга мы предполагали, что в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью S , нет источников энергии. Если в объеме V такие источники имеются, причем мгновенная мощность источников равна $\rho_{\text{ист}}$, то теорему надо записать следующим образом:

$$\rho_{\text{ист}} = \oint_S \bar{\Pi} d\mathbf{S} + \int_V \gamma \mathbf{E}^2 dV + \frac{\partial \omega_{\text{эм}}}{\partial t}.$$

Мощность источников в объеме V равна сумме мощностей: тепловых потерь, мощности изменения энергии электромагнитного поля в объеме V и мощности энергии, выходящей через граничную поверхность S рассматриваемого объема.

4-8. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ ЗАПИСИ

Если проекции векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ изменяются во времени по синусоидальному закону, причем фазы всех трех прямоугольных проекций одинаковы, то уравнения Максвелла можно записать в комплексной форме. Пусть вектор напряженности электрического поля имеет проекции:

$$E_x = E_{xm} \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \{ E_{xm} e^{j\psi} e^{j\omega t} \};$$

$$E_y = E_{ym} \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \{ E_{ym} e^{j\psi} e^{j\omega t} \};$$

$$E_z = E_{zm} \sin(\omega t + \psi) = \text{Im} \{ E_{zm} e^{j\psi} e^{j\omega t} \}.$$

Комплексной амплитудой вектора $\mathbf{E}$ назовем вектор

$$\dot{\mathbf{E}}_m = (iE_{xm} + jE_{ym} + kE_{zm}) e^{j\psi} = \mathbf{E}_m e^{j\psi}.$$

Мгновенное значение вектора $\mathbf{E} = \text{Im} \{ \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} \}$.

Аналогично можно записать комплексную амплитуду напряженности магнитного поля

$$\dot{\mathbf{H}}_m = (iH_{xm} + jH_{ym} + kH_{zm}) e^{j\varphi} = \mathbf{H}_m e^{j\varphi}$$

и мгновенное значение

$$\mathbf{H} = \text{Im} \{ \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t} \}.$$

Если в уравнения Максвелла подставить вместо $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ величины $\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}$, то полученные решения будут справедливы не только для мнимых составляющих, входящих в уравнение величин, но и для действительных составляющих. При этом запись уравнений значительно упростится, так как множитель $e^{j\omega t}$ сократится.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Подставив вместо $\mathbf{H}$ величину $\dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t}$ (мнимая часть которой равна $\mathbf{H}$), а вместо $\mathbf{E}$ величину $\dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t}$, получим:

$$e^{j\omega t} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = e^{j\omega t} \gamma \dot{\mathbf{E}}_m + \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m j\omega e^{j\omega t}.$$

После сокращения на $e^{j\omega t}$ мы получим первое уравнение Максвелла в комплексной форме записи

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{\mathbf{E}}_m. \quad (4-12)$$

Аналогично можно получить и остальные уравнения электромагнитного поля в комплексной форме записи; второе уравнение Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m, \quad (4-13)$$

а также

$$\text{div} (\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m) = 0;$$

$$\text{div} (\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m) = \dot{\rho}.$$

Решив эти уравнения и определив комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$, легко найти мгновенные значения векторов поля из выражений

$$\mathbf{E} = \text{Im} \{ \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} \};$$

$$\mathbf{H} = \text{Im} \{ \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t} \}.$$

Если векторы поля меняются во времени по косинусоидальному закону, то в этом случае

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \{ \dot{\mathbf{E}}_m e^{j\omega t} \};$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \{ \dot{\mathbf{H}}_m e^{j\omega t} \}.$$

Удобство комплексной формы записи основных уравнений поля заключается в том, что время t исключается из этих уравнений.

4-9. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Покажем, что если при решении уравнений Максвелла для определенных начальных и граничных условий получены значения векторов поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то это решение единственное.

Предположим, что электромагнитное поле исследуется в определенной области пространства V , которая ограничена замкнутой поверхностью S . Параметры ϵ , μ и γ постоянны. Начальные и граничные условия заданы следующим образом. В момент $t = 0$ значения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ заданы во всех точках области V . На поверхности S известны касательные составляющие одного из векторов поля (предположим, $\mathbf{E}$) для всех моментов времени от 0 до t . Тогда уравнения Максвелла однозначно определяют векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой точке области V и в любой момент t .

Предположим противное, т. е. что существует другое решение уравнений Максвелла, причем значения векторов поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_1$ удовлетворяют перечисленным выше начальным и граничным условиям. Рассмотрим два новых вектора $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} - \mathbf{H}_1$. Очевидно, что $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$ также являются решением уравнений Максвелла, но начальные и граничные условия для них будут несколько иными. При $t = 0$ во всех точках области V , $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$ должны равняться нулю, так как в этот момент $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$. На поверхности S во все моменты времени от 0 до t касательная составляющая вектора $\mathbf{E}_2$ также должна быть равна нулю. Следовательно, вектор $\mathbf{E}_2$ может иметь на поверхности S только нормальную составляющую.

Применим к полю векторов $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$ теорему Умова — Пойнтинга

$$-\oint_S [\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] dS = \int_V \gamma \mathbf{E}_2^2 dV + \frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t}.$$

На поверхности S произведение

$$[\mathbf{E}_2 \mathbf{H}_2] dS = 0,$$

так как в любой точке граничной поверхности S направление $\mathbf{E}_2$ совпадает с нормалью. Теорема Умова — Пойнтинга примет вид:

$$\int_V \gamma \mathbf{E}_2^2 dV + \frac{\partial w_{\text{эм}}}{\partial t} = 0.$$

Первое слагаемое этого выражения, равное мощности тепловых потерь, может быть только величиной положительной или равной нулю. Тогда $\partial w_{\text{эм}}/\partial t$ должна быть или отрицательной величиной (если $w_{\text{эм}}$ убывает), или равной нулю (если $w_{\text{эм}} = \text{const}$). Согласно начальным условиям в момент $t = 0$ во всех точках рассматриваемой области векторы поля равны нулю $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{H}_2 = 0$; следовательно, и

$$\frac{dw_{\text{эм}}}{dV} = \frac{\epsilon_a \mathbf{E}_2^2}{2} + \frac{\mu_a \mathbf{H}_2^2}{2} = 0.$$

Энергия не может принимать отрицательных значений, поэтому она должна оставаться равной нулю. Следовательно, векторы $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$ равны нулю в любой момент t и в любой точке области V . Это значит, что $\mathbf{E} - \mathbf{E}_1 = 0$, $\mathbf{H} - \mathbf{H}_1 = 0$, т. е. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$ и $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}$ и, следовательно, второе решение совпадает с первым.

4-10. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ ИЛИ ОБОБЩЕННЫЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Для определения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по заданным $\bar{\delta}$ и ρ необходимо решить полную систему уравнений Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \bar{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\text{div } (\mu_a \mathbf{H}) = 0;$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Будем считать, что параметры среды ϵ , μ , γ постоянны и заданы. Искомые векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ и заданные величины $\bar{\delta}$ и ρ зависят от трех пространственных координат и времени.

Непосредственное решение уравнений Максвелла обычно связано с большими трудностями. Задачу можно упростить, если ввести вспомогательные функции φ и A пространственных координат и времени. Их называют обобщенными электродинамическими потенциалами.

Зависимости между E и H , а также между A и φ устанавливаются таким образом, чтобы основные уравнения поля приняли наиболее удобный для решения вид.

Положим

$$\operatorname{rot} A = \mu_a H = B,$$

что возможно, так как B соленоидальный вектор:

$$\operatorname{div} B = 0.$$

Для однозначного определения вектора A надо задать еще и его дивергенцию, но подберем ее позже так, чтобы упростить полученные выражения.

Вектор A будем называть обобщенным векторным потенциалом.

Выразим напряженность магнитного поля через векторный потенциал

$$H = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} A.$$

Подставим значение H во второе уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} E = -\mu_a \frac{\partial \left(\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} A \right)}{\partial t}.$$

Заменив последовательность дифференцирования и сократив на μ_a , получим:

$$\operatorname{rot} E = -\operatorname{rot} \frac{\partial A}{\partial t}$$

или

$$\operatorname{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0.$$

Следовательно, вектор $E + \frac{\partial A}{\partial t}$ потенциальный и можно найти такую скалярную функцию φ , для которой он служит градиентом:

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Величину φ назовем обобщенным скалярным потенциалом. Мы связали уравнениями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}; \quad (4-14)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \quad (4-15)$$

векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с обобщенными потенциалами $\mathbf{A}$ и φ .

Для определения $\mathbf{A}$ и φ используем остальные уравнения электромагнитного поля.

Первое уравнение Максвелла можно записать следующим образом:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A} \right) = \bar{\delta} + \epsilon_a \frac{\partial \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right)}{\partial t}$$

или

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_a \bar{\delta} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\epsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Обозначим $\epsilon_a \mu_a = 1/v^2$. Отметим, что величина v имеет размерность скорости. Развернем выражение ротора от ротора:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_a \bar{\delta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{\delta} + \text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Можно выбрать $\text{div } \mathbf{A}$ так, чтобы уравнение упростилось, положив

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Тогда векторный потенциал определится из уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \bar{\delta}. \quad (4-16)$$

Если записать это векторное уравнение в прямоугольной декартовой системе координат, то, считая, что

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z;$$

$$\bar{\delta} = i\delta_x + j\delta_y + k\delta_z,$$

получим три уравнения Даламбера:

$$\nabla^2 A_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_x;$$

$$\nabla^2 A_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_y;$$

$$\nabla^2 A_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_a \delta_z.$$

Если в уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon_a$ подставить значение $\mathbf{E}$, то получим:

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \frac{\rho}{\epsilon_a},$$

или, так как $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta^2 \varphi$, то

$$\nabla^2 \varphi + \frac{\partial (\operatorname{div} \mathbf{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}.$$

Подставив выражение $\operatorname{div} \mathbf{A}$, получим:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_a}. \quad (4-17)$$

Для определения скалярного потенциала также надо решить уравнение Даламбера.

Введя обобщенные потенциалы $\mathbf{A}$ и φ , мы свели уравнения Максвелла к четырем однотипным уравнениям Даламбера и этим значительно упростили задачу расчета электромагнитного поля. Определив обобщенные электродинамические потенциалы $\mathbf{A}$ и φ из выражений (4-16) и (4-17), можно легко определить векторы поля по (4-14) и (4-15).

Решения уравнений Даламбера можно записать в виде интегралов

$$\varphi_t = \int_V \frac{\rho \left(t - \frac{R}{v} \right)}{4\pi\epsilon_a R} dV; \quad (4-18)$$

$$\mathbf{A}_t = \int_V \frac{\mu_a \bar{\delta} \left(t - \frac{R}{v} \right)}{4\pi R} dV. \quad (4-19)$$

Чтобы найти скалярный потенциал в точке N в момент t , надо разбить объем V на элементы dV , определить величину

заряда в этом элементарном объеме $dq = \rho \left(t - \frac{R}{v} \right) dV$ в момент $t - R/v$ (где R — расстояние от элемента объема dV до точки N , а $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ — скорость распространения электромагнитной энергии в диэлектрике с проницаемостью ϵ_a и μ_a). Разделив этот заряд на $4\pi\epsilon_a R$ и проинтегрировав по всем элементарным объемам dV , в которых имеется заряд с плотностью ρ , мы получим скалярный потенциал в данной точке в момент t .

Аналогично определяются и проекции векторного потенциала. Важно отметить, что *изменения свободных объемных зарядов и токов проводимости сказываются в различных точках поля не мгновенно, а спустя некоторое время R/v , необходимое для того, чтобы электромагнитная волна прошла расстояние R* . Поэтому потенциалы A и ϕ называются запаздывающими.

Для вакуума v равно скорости света

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек.}$$

В диэлектрике с проницаемостью ϵ при $\mu = 1$ величина скорости распространения электромагнитной энергии

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \approx \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}} \text{ м/сек.}$$

Так как величина v большая, то запаздывание скажется только при достаточно большом удалении точки от места расположения зарядов и токов и тем сильнее, чем больше это удаление.

В областях поля, не имеющих объемных зарядов и токов проводимости, уравнения, определяющие обобщенные потенциалы, примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 A - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

Эти соотношения называются волновыми уравнениями.

При решении уравнений Даламбера и волновых уравнений должны быть учтены для каждой конкретной задачи начальные и граничные условия. Если область V , в которой исследуется поле, состоит из нескольких однородных сред, то на границах этих сред должны соблюдаться следующие

соотношения:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}; \quad D_{1n} - D_{2n} = \sigma;$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta; \quad B_{1n} = B_{2n};$$

$$\Phi_1 = \Phi_2; \quad A_1 = A_2.$$

В этих соотношениях:

σ — поверхностная плотность свободных зарядов на границе двух сред; η — плотность поверхностного тока на граничной поверхности.

4-11. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Источником электромагнитных волн являются изменяющиеся во времени токи и заряды.

Всякая электрическая цепь, по которой протекает переменный ток, может излучать электромагнитные волны.

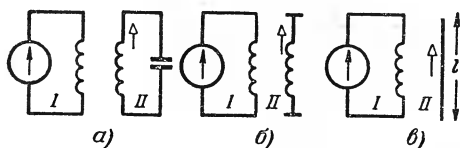


Рис. 4-2. Видоизменение колебательного контура.

Эти волны, распространяясь в диэлектрике, окружающем источник, несут с собой определенную энергию. Величина излучаемой энергии зависит от величины и частоты тока, от конфигурации цепи и от свойств диэлектрика, окружающего излучающую цепь. Для промышленной частоты $f = 50$ гц излучаемая мощность настолько незначительна, что ею пренебрегают. Мощность излучения необходимо учитывать, начиная от частоты $f = 10^5$ гц и выше (т. е. частот, которые применяются в радиотехнике).

Рассмотрим цепь синусоидального тока, изображенную на рис. 4-2, а. Пусть ток в контуре II равен i , а напряжение на емкости равно u_C . Энергия магнитного поля $W_m = L \frac{i^2}{2}$,

энергия электрического поля $W_e = C \frac{u_C^2}{2}$. Энергия пульсирует с частотой, равной удвоенной частоте тока. Часть этой энергии вместе с электромагнитной волной отрывается

от контура и распространяется в диэлектрике, окружающем цепь, со скоростью $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$. Контур II можно видоизменить так, как показано на рис. 4-2, б и в. Следовательно, прямолинейный провод длиной l , по которому протекает переменный ток, может излучать электромагнитные волны. Такой провод представляет собой простейшую антенну.

Пусть длина провода l в цепи, изображенной на рис. 4-3, значительно меньше длины волны λ . Тогда можно считать, что синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, протекающий по проводу, по всей его длине имеет одну и ту же величину. Кроме того, учитывая, что сечение провода мало по сравнению с его длиной, можно считать провод линейным. Назовем такой провод с током элементарным вибратором.

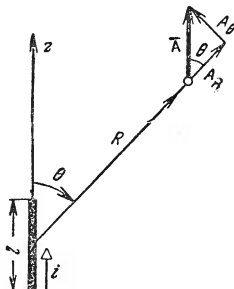


Рис. 4-3. Векторный потенциал магнитного поля элементарного вибратора.

Диэлектрик вокруг провода однородный и изотропный; проницаемости ϵ и μ — величины постоянные. Проводимость диэлектрика γ принята равной нулю.

Определим поле элементарного вибратора. Начало прямоугольных декартовых координат поместим посередине провода. Ось z направим вдоль провода. Будем считать, что объемных зарядов в поле нет. Чтобы найти векторы поля E и H , решим уравнения Максвелла с помощью обобщенных электродинамических потенциалов. Скалярный потенциал равен нулю, так как $\rho = 0$. Векторный потенциал определится из выражения

$$\bar{A}_t = \int_V \frac{\mu_a \bar{\delta}(t - \frac{R}{v})}{4\pi R} dV.$$

Токи проводимости протекают только в самом проводе, поэтому V представляет собой объем этого провода и

$$A_t = \int \int \frac{\mu_a \bar{\delta}(t - \frac{R}{v})}{4\pi R} dS dl.$$

Вектор плотности тока направлен вдоль провода, следовательно, он имеет только одну проекцию δ_z на ось z . Поэтому и векторный потенциал будет иметь только одну проекцию на ту же ось z

$$A_{tz} = \int_S \int_l \frac{\mu_a \delta_z \left(t - \frac{R}{v}\right)}{4\pi R} dS dl.$$

Ток в проводе

$$i = \int_S \bar{\delta} dS = \int_S \delta_z dS,$$

причем, так как сечение провода S мало, расстояние R от любой точки сечения до исследуемой точки поля можно считать одним и тем же. Введя значение тока в выражение векторного потенциала, получаем:

$$A_{tz} = \int_l \frac{\mu_a i \left(t - \frac{R}{v}\right)}{4\pi R} dl = \int_l \frac{\mu_a I_m \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{R}{v}\right) \right\}}{4\pi R} dl.$$

Так как $l \ll \lambda$, то величина тока по длине провода не меняется и ее можно вынести за знак интеграла. Будем считать, что поле исследуется на таком расстоянии от вибратора, что величина R одинакова для всех элементов dl . В этом предположении

$$A_{tz} = \frac{\mu_a I_m l \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{R}{v}\right) \right\}}{4\pi R} = \text{Im} \left\{ \frac{\mu_a \dot{I}_m l e^{j\omega t} e^{-j\frac{\omega R}{v}}}{4\pi R} \right\}.$$

Комплексная амплитуда векторного потенциала равна:

$$\dot{A}_m = \frac{\mu_a \dot{I}_m l}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega R}{v}}.$$

Дальнейший расчет удобнее вести в сферической системе координат. Угол θ будем отсчитывать от вертикальной оси (рис. 4-3). В сферической системе координат векторный потенциал имеет две проекции A_R и A_θ . Комплексные амплитуды этих проекций равны:

$$\dot{A}_{Rm} = \dot{A}_m \cos \theta = \frac{\mu_a \dot{I}_m l \cos \theta}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega R}{v}};$$

$$\dot{A}_{\theta m} = -\dot{A}_m \sin \theta = -\frac{\mu_a \dot{I}_m l \sin \theta}{4\pi R} e^{-j\frac{\omega R}{v}}.$$

Комплексные амплитуды проекций векторного потенциала зависят только от двух координат R и θ .

Напряженность магнитного поля определится из формулы $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \mathbf{A}$.

В сферической системе координат у вектора $\mathbf{H}$ только одна проекция H_ψ отлична от нуля. Ее комплексная амплитуда будет равна:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\psi m} &= \frac{1}{\mu_a R} \left\{ \frac{\partial (\dot{A}_{\theta m} R)}{\partial R} - \frac{\partial \dot{A}_{Rm}}{\partial \theta} \right\} = \\ &= \frac{\dot{I}_m l \frac{\omega^2}{v^2} \sin \theta}{4\pi} e^{-j \frac{\omega R}{v}} \left\{ \frac{j}{\frac{\omega R}{v}} + \frac{1}{\frac{\omega^2 R^2}{v^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Напряженность электрического поля E можно определить по первому уравнению Максвелла. Так как вне вибратора нет токов проводимости $\bar{\delta} = 0$, то $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m$.

Вектор $\dot{\mathbf{E}}$ будет иметь только две проекции, комплексные амплитуды которых соответственно равны:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{Rm} &= \frac{1}{j\omega\epsilon_a R \sin \theta} \frac{\partial (H_{\psi m} \sin \theta)}{\partial \theta} = \\ &= \frac{2\dot{I}_m l \frac{\omega^3}{v^3} \cos \theta}{4\pi\epsilon_a \omega} e^{-j \left(\frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} \right)} \left\{ \frac{j}{\frac{\omega^2 R^2}{v^2}} + \frac{1}{\frac{\omega^3 R^3}{v^3}} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\theta m} &= -\frac{1}{j\omega\epsilon_a R} \frac{\partial (\dot{H}_{\psi m} R)}{\partial R} = \frac{\dot{I}_m l \frac{\omega^3}{v^3} \sin \theta}{4\pi\epsilon_a \omega} \times \\ &\times e^{-j \left(\frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} \right)} \left\{ -\frac{1}{\frac{\omega R}{v}} + \frac{j}{\frac{\omega^2 R^2}{v^2}} + \frac{1}{\frac{\omega^3 R^3}{v^3}} \right\}. \end{aligned}$$

Зная комплексные амплитуды, легко найти мгновенные значения проекций векторов поля. Например, $H_\psi = H = \text{Im} \{ \dot{H}_{\psi m} e^{j\omega t} \}$. Аналогично определяются E_R и E_θ .

Полученные формулы можно несколько упростить в области, для которой $R \ll \lambda$ (так называемая ближняя зона), и в области, для которой $R \gg \lambda$ (так называемая дальняя или волновая зона).

4-12. ПОЛЕ ВИБРАТОРА В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

$$\text{В ближней зоне } \frac{1}{\omega R} < \frac{2}{\omega^2 R^2} < \frac{1}{\omega^3 R^3}.$$

Поэтому, пренебрегая малыми величинами и учитывая, что $e^{-j\frac{\omega R}{v}} \approx 1$, можно упростить выражения проекций векторов поля и записать:

$$\dot{H}_{\psi m} = \dot{H}_m = \frac{i_m l \sin \theta}{4\pi R^2};$$

$$\dot{E}_{Rm} = \frac{2i_m l \cos \theta}{4\pi\epsilon_a \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}};$$

$$\dot{E}_{\theta m} = \frac{i_m l \sin \theta}{4\pi\epsilon_a \omega R^3} e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Напряженность магнитного поля элементарного вибратора в ближней зоне определяется так же, как и в случае стационарного тока (закон Био — Савара). Фаза совпадает с фазой тока. Магнитное поле токов смещения этой формулой не учитывается, не учитывается также и запаздывание, так как множитель $e^{-j\frac{\omega R}{v}}$ принят равным единице ввиду малости $\omega R/v = 2\pi R/\lambda$.

Проекции напряженности электрического поля совпадают с выражением проекций вектора $\dot{E}$ поля диполя с зарядом $Q_m = I_m/\omega$. Фазы проекций вектора $\dot{E}$ и заряда q совпадают.

Мгновенные значения проекции векторов поля определяются из выражений

$$H_{\psi} = H = \frac{I_m l \sin \theta}{4\pi R^2} \sin(\omega t + \xi);$$

$$E_R = \frac{2Q_m l \cos \theta}{4\pi\epsilon_a R^3} \sin\left(\omega t + \xi - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$E_{\theta} = \frac{Q_m l \sin \theta}{4\pi\epsilon_a R^3} \sin\left(\omega t + \xi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Вектор Пойнтинга $\bar{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ имеет две проекции Π_R и Π_{θ} .

Среднее значение каждой из этих проекций за период равно нулю. Средняя мощность магнитного и электрического полей равна нулю.

В ближней зоне энергия пульсирует между источником и полем. Энергия излучения не учитывается. Границы ближней зоны зависят от частоты; чем выше частота, тем ближе граница зоны к источнику.

Для частоты $f = 50$ гц $\lambda = 6\,000$ км и поэтому практически в любом удалении от источника зону можно считать ближней. Для радиочастот, которые могут достигнуть значений до 10^{10} гц и выше, длина волны измеряется в сантиметрах, и поэтому почти все пространство вокруг источника может рассматриваться как дальняя зона. Проекция вектора E сдвинута по фазе относительно вектора H на $\pi/2$. Поэтому средняя мощность магнитного и электрического полей в ближней зоне принимается равной нулю.

Ближняя зона носит также название зоны квазистационарности, так как для мгновенных значений векторов переменного поля применимы с достаточной точностью законы постоянных во времени полей. Чем меньше частота, тем точнее приближенные формулы определяют проекции векторов поля. Надо помнить, что условие $l \ll R$ должно оставаться в силе.

4-13. ПОЛЕ ВИБРАТОРА В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Дальнюю зону мы определили как область, для которой $R \gg \lambda$.

Для этой области

$$\frac{1}{\omega R} > \frac{1}{\omega^2 R^2} > \frac{1}{\omega^3 R^3}.$$

Пренебрегая малыми величинами, получим следующие выражения для проекций векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{\phi m} = \dot{H}_m &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi v R} e^{-j\left(\frac{\omega R}{v} - \frac{\pi}{2}\right)}; \\ \dot{E}_{\theta m} = \dot{E}_m &= \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \varepsilon_0 v^2 R} e^{-j\left(\frac{\omega R}{v} - \frac{\pi}{2}\right)}; \\ \dot{E}_{Rm} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-21)$$

Векторы поля имеют по одной проекции и взаимно перпендикулярны. Мгновенные значения их соответственно

равны:

$$H = H_{\psi} = \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi v R} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right);$$

$$E = E_{\theta} = \frac{I_m l \omega \sin \theta}{4\pi \epsilon_a v^2 R} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right).$$

Полученные выражения представляют собой уравнения бегущих волн; так как эквифазные поверхности представляют собой сферы, то волны называются сферическими. Дальнюю зону называют также волновой зоной. По мере удаления от вибратора амплитуды волн убывают обратно пропорционально первой степени R .

Чтобы найти скорость перемещения фазы — фазовую скорость $v_{\phi} = dR/dt$, предположим, что в момент t_1 в точке R_1 фаза волны

$$\omega t_1 - \frac{\omega R_1}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi.$$

За время dt фаза переместится на расстояние dR , следовательно,

$$\omega (t_1 + dt) - \frac{\omega}{v} (R_1 + dR) + \frac{\pi}{2} + \xi = \omega t_1 - \frac{\omega R_1}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi.$$

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ м/сек.}$$

т. е. в дальней зоне фазовая скорость равна скорости распространения электромагнитной энергии. Длиной волны называют расстояние, на которое переместится фаза за период $T = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{f}$:

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{v}}.$$

Величину ω/v называют коэффициентом фазы или волновым числом. Чем больше ω/v , тем более запаздывает фаза вектора поля (**Е** или **Н**) относительно фазы тока в вибраторе.

Найдем отношение амплитуд векторов **Е** и **Н**. Назовем это отношение волновым сопротивлением

$$z_B = \frac{E_m}{H_m} = \frac{1}{\epsilon_a v} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \approx \frac{120\pi \sqrt{\mu}}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ ом.}$$

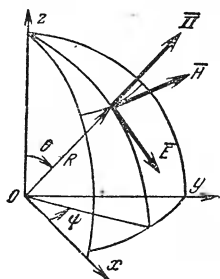
Для диэлектрической среды $\mu \approx 1$ и $z_b \approx \frac{377}{\sqrt{\epsilon}}$. Для воздуха $\epsilon \approx 1$, поэтому $z_b \approx 377$ ом. Так как фазы векторов одинаковые, то отношение их мгновенных значений также равно волновому сопротивлению.

Вектор Пойнтинга $\vec{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$ имеет только одну проекцию по оси R :

$$\Pi = \Pi_R = \frac{I_m^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_a v^3 R^2} \left\{ 1 - \cos 2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right) \right\}.$$

В отличие от значений Π в ближней зоне величина вектора Пойнтинга в дальней зоне остается все время положительной. Энергия, движущаяся вместе с волной от источника в сторону возрастающих R , представляет собой энергию излучения.

В любом объеме V энергии электрического и магнитного полей равны между собой:



$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\epsilon_a (z_b H)^2}{2} dV = \\ &= \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = W_m. \end{aligned}$$

Рис. 4-4. Векторы поля в волновой зоне.

На рис. 4-4 изображены мгновенные значения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\vec{\Pi}$.

Таким образом, в дальней (волновой) зоне:

а) поле распространяется в виде сферических волн с фазовой скоростью $v_\phi = v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$, м/сек;

б) векторы поля имеют по одной проекции: $E = E_\theta$; $H = H_\phi$; $\Pi = \Pi_R$, которые взаимно перпендикулярны, причем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ касательны к эквифазной поверхности, а вектор $\vec{\Pi}$ нормален к ней;

в) фазы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ одинаковые; они отстают от фазы тока вибратора на угол $\frac{\omega R}{v} - \frac{\pi}{2}$, который растет пропорционально расстоянию R от вибратора;

г) амплитуды E_m и H_m , пропорциональные $\sin \theta$, убывают обратно пропорционально расстоянию R ;

д) в любом объеме поля энергия электрического поля равна энергии магнитного поля $W_e = W_m$;

е) через каждые полпериода направление векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ меняется на обратное, направление же вектора Пойн-

тинга все время остается одним и тем же, что указывает на непрерывное излучение энергии источником в окружающее пространство.

4-14. МОЩНОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

Чтобы найти мощность, излучаемую вибратором, воспользуемся теоремой Умова — Пойнтинга. Проведем в волновой зоне сферическую поверхность S радиуса R . В любой точке этой поверхности вектор Пойнтинга направлен по нормали и модуль его равен:

$$\Pi = \frac{I_m^2 I^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_a v^3 R^2} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right).$$

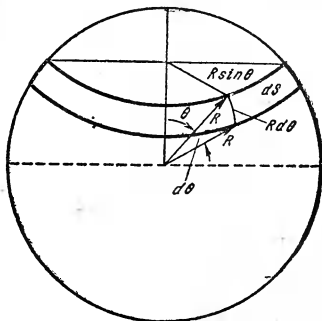


Рис. 4-5. Вычисление мощности излучения.

Поток вектора Пойнтинга, входящий в поверхность, равен мощности излучения, соответствующей изменению энергии электромагнитного поля в объеме, ограниченном этой поверхностью. Так как проводимость среды γ равна нулю и тепловые потери отсутствуют, то

$$-\oint_S \Pi dS = p_{\text{изл}} = \frac{I_m^2 I^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_a v^3 R^2} \times \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right) \oint_S \sin^2 \theta dS.$$

Разобьем поверхность S на элементы dS , как это показано на рис. 4-5. Величина

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta.$$

Так как

$$\oint_S \sin^2 \theta dS = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8\pi R^2}{3},$$

то мгновенное значение мощности излучения

$$p_{\text{изл}} = \frac{I_m^2 I^2 \pi \omega^2}{12\pi^2 \epsilon_a v^3} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} + \xi \right).$$

Подставим $\omega = 2\pi f$ и $\frac{1}{\epsilon_a v} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}}$ и найдем среднее значение мощности излучения за период:

$$P_{\text{изл}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{\text{изл}} dt = \frac{80\pi^2 I^2 l^2 f^2}{\sqrt{\epsilon} v^2} = \frac{80\pi^2}{\sqrt{\epsilon}} \frac{I^2 l^2}{\lambda^2}.$$

Так как скорость распространения электромагнитной энергии v — величина большая, то мощность излучения следует учитывать только при высоких частотах.

Отношение средней мощности излучения к квадрату действующего значения тока в антенне называют сопротивлением излучения:

$$r_{\text{изл}} = \frac{P_{\text{изл}}}{I^2} = \frac{80\pi^2 l^2 f^2}{\sqrt{\epsilon} v^2} = \frac{80\pi^2}{\sqrt{\epsilon}} \frac{l^2}{\lambda^2}.$$

Мощность и сопротивление излучения пропорциональны квадрату частоты. Для воздуха $\epsilon \approx 1$, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{изл}} &= 80\pi^2 \frac{I^2 l^2}{\lambda^2}; \\ r_{\text{изл}} &= 80\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4-22)$$

4-15. ИЗЛУЧЕНИЕ РАМОЧНОЙ АНТЕННЫ

Рассмотрим излучение рамочной антенны при синусоидальном токе. На достаточно большом расстоянии от антенны, при условии, что длина волны значительно превышает периметр рамы, форма антенны на характер поля не влияет. Поэтому пусть антенна представляет собой плоский, круглый виток радиуса a . Так как мы предположили, что $\lambda \gg 2\pi a$, то в один и тот же момент времени ток на любом отрезке контура будет одним и тем же.

Расположим виток в плоскости xOy (рис. 4-6). Пусть ось z проходит через центр витка. Проекции векторов поля запишем в сферической системе координат, причем координату θ будем отсчитывать от оси z по часовой стрелке. Так как поле симметрично относительно оси z ,

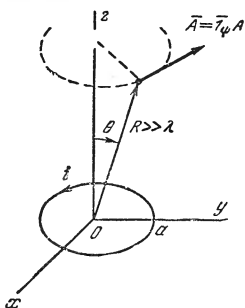


Рис. 4-6. Магнитный диполь.

то координата ψ в выражения векторов поля не войдет и производные проекции векторов поля по координате ψ будут равны нулю.

Векторный потенциал кругового витка с синусоидальным током $i = I_m \sin \omega t$ на расстоянии $R \gg \lambda$ равен:

$$A = A_\psi = \frac{\mu_a (\pi a^2) \omega I_m \sin \theta}{4\pi v R} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} + \frac{\pi}{2} \right),$$

где

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}.$$

Комплексная амплитуда векторного потенциала

$$\dot{A}_m = \frac{\mu_a \pi a^2 I_m \sin \theta}{2\lambda R} e^{-j \left(\frac{\omega R}{v} - \frac{\pi}{2} \right)}. \quad (4-23)$$

Векторы поля определяются из соотношений

$$\dot{H}_m = \frac{1}{\mu_a} \text{rot } \dot{A}_m, \quad \dot{E}_m = \frac{1}{j\omega \epsilon_a} \text{rot } \dot{H}_m.$$

В дальней зоне при $R \gg \lambda$ векторы поля будут иметь по одной проекции:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m = \dot{H}_{\theta m} &= \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \theta}{\lambda^2 R} e^{-j \left(\frac{\omega R}{v} + \pi \right)}, \\ \dot{E}_m = \dot{E}_{\psi m} &= \frac{\pi^2 a^2 I_m \sin \theta}{\lambda^2 R} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} e^{-j \frac{\omega R}{v}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

Мгновенные значения проекций векторов поля

$$H = H_\theta = - \frac{I_m \pi^2 a^2 \sin \theta}{\lambda^2 R} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} \right);$$

$$E = E_\psi = \frac{I_m \pi^2 a^2 \sin \theta}{\lambda^2 R} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} \right).$$

Как и в случае, рассмотренном в (4-13); полученные выражения представляют собой уравнения бегущих сферических волн. Фазовая скорость волны

$$v_\phi = v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ м/сек}$$

равна скорости распространения электромагнитной энергии в данной среде. Отношение амплитуд векторов поля

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ ом},$$

представляет собой волновое сопротивление среды z_v , которое в данном случае число действительное.

Векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, касательной к эквифазной поверхности. По фазе они сдвинуты на π радиан (находятся в противофазе).

Фазы векторов поля меняются пропорционально расстоянию R от излучателя.

Вектор Пойнтинга имеет одну проекцию

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_R = -E_\phi H_R = \\ &= \left(\frac{I_m \pi^2 a^2 \sin \theta}{\lambda^2 R} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin^2 \left(\omega t - \frac{\omega R}{v} \right). \end{aligned}$$

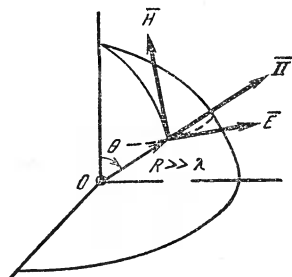


Рис. 4-7. Поле магнитного диполя в волновой зоне.

Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и Π изображены на рис. 4-7. В любом объеме поля V , в дальней зоне, энергия электрического поля равна энергии магнитного поля:

$$W_e = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\epsilon_a \left(-H \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \right)^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_a H^2}{2} dV = W_m.$$

Чтобы найти мощность излучения, воспользуемся теоремой Пойнтинга:

$$P_{\text{изл}} = - \oint_S \Pi_{\text{ср}} dS = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4 I^2.$$

Сопротивление излучения

$$r_{\text{изл}} = \frac{P_{\text{изл}}}{I^2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \right)^4.$$

Если среда, окружающая излучатель, — воздух, то

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{изл}} &\approx 3 \cdot 10^5 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 I^2, \text{ вт;} \\ r_{\text{изл}} &\approx 3 \cdot 10^5 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4, \text{ ом.} \end{aligned} \right\} \quad (4-25)$$

Выражения (4-25) определяют мощность и сопротивление излучения линейной антенны. Сравнивая эти величины с мощностью и сопротивлением излучения рамочной (круговой) антенны, следует отметить, что незамкнутые системы при прочих равных условиях излучают большую мощность.

4-16. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

4-1. В среде с проводимостью $\gamma = 0,001 \text{ см/м}$, диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 4$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ напряженность электрического поля равна $E = 2 \sin(3\pi \cdot 10^4 t + \psi)$.

Требуется определить амплитуду плотности тока смещения и плотности тока проводимости

О т в е т: $666 \cdot 10^{-6} \text{ а/м}^2$; $2 \cdot 10^{-3} \text{ а/м}^2$.

4-2. Записать уравнения Максвелла в прямоугольной декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

4-3. Преобразовать уравнения Максвелла, записанные для идеального диэлектрика ($\gamma = 0$), так, чтобы получить волновые уравнения

$$\nabla^2 E - \mu_0 \epsilon_a \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 H - \mu_0 \epsilon_a \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Объемную плотность зарядов ρ считать равной нулю.

4-4. Преобразовать уравнения Максвелла, записанные для хорошо проводящей среды ($\epsilon \approx 0$), так, чтобы получить уравнения, аналогичные уравнению теплопроводности

$$\nabla^2 E = \mu_a \gamma \frac{\partial E}{\partial t}; \quad \nabla^2 H = \mu_a \gamma \frac{\partial H}{\partial t}.$$

4-5. Записать волновые уравнения (задача 4-3) для комплексных амплитуд, если угловая частота равна ω .

4-6. Записать уравнение задачи 4-4 для комплексных амплитуд.

4-7. В полупроводящей среде векторы поля меняются во времени по синусоидальному закону. Определить отношение амплитуд плотности тока смещения и плотности тока проводимости.

О т в е т: $\omega \epsilon_a / \gamma$.

4-8. Мгновенные значения векторов поля заданы:

$$E = E_x = E_{0m} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z);$$

$$H = H_y = H_{0m} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z - \varphi).$$

Показать, что среднее значение вектора Пойнтинга $\mathbf{P}_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \mathbf{H} dt$ может быть определено как вещественная часть ком-

плексного числа $\frac{1}{2} \dot{E}_m \dot{H}_m^*$, где $\dot{E}_m$ — комплексная амплитуда напряженности электрического поля; $\dot{H}_m^*$ — комплексное число, сопряженное с комплексной амплитудой $\dot{H}_m$ напряженности магнитного поля.

4-9. Определить мощность и сопротивление излучения элементарного электрического вибратора. Действующее значение тока в вибраторе 80 а, длина вибратора 100 м. Частота $3 \cdot 10^5 \text{ гц}$. Диэлектрик — воздух.

О т в е т: 50 540 вт; 7,9 ом.

ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

5-1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При исследовании процесса излучения электромагнитной энергии было установлено, что в области, достаточно удаленной от вибратора ($R \gg \lambda$), поле имеет волновой характер.

Так как эквифазные поверхности представляли собой сферы, то волны назывались сферическими (гл. 4). Если радиус сферы R достаточно велик, небольшую часть сферической поверхности можно считать плоской и волну в этой области рассматривать как плоскую.

Плоской электромагнитной волной называется волна, у которой поверхность равных фаз представляет собой плоскость.

Плоская волна называется однородной, если векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ при соответствующем выборе направления осей координат зависят от одной пространственной координаты и времени.

Следовательно, во всех точках эквифазной плоскости в один и тот же момент величина вектора $\mathbf{E}$ (вектора $\mathbf{H}$) одинакова.

Если зависимость векторов поля от времени синусоидальная или косинусоидальная, то волна называется монохроматической или гармонической.

Если плоская волна линейно поляризована, то направления векторов $\mathbf{E}$ (и перпендикулярных к ним векторов $\mathbf{H}$) во всем пространстве параллельны друг другу.

Рассмотрим однородную линейно поляризованную плоскую монохроматическую электромагнитную волну. Вектор $\mathbf{E}$ может иметь три взаимно перпендикулярные проекции, например, в декартовой системе координат:

$$E_x = E_{xm} \sin(\omega t + \psi_1),$$

$$E_y = E_{ym} \sin(\omega t + \psi_2),$$

$$E_z = E_{zm} \sin(\omega t + \psi_3).$$

Так как волна линейно поляризована, то фазы всех трех проекций должны быть одинаковы $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = \psi$, а отношение амплитуд является постоянным числом:

$$\frac{E_{ym}}{E_{xm}} = a = \text{const}, \quad \frac{E_{zm}}{E_{xm}} = b = \text{const}.$$

Тогда направление вектора $\mathbf{E}$ во всех точках поля одно и то же, углы, которые образует вектор $\mathbf{E}$ с осями координат, постоянны, что видно из выражений

$$\cos(\mathbf{E}, \mathbf{x}) = \frac{E_x}{E} = \text{const};$$

$$\cos(\mathbf{E}, \mathbf{y}) = \frac{E_y}{E} = \text{const};$$

$$\cos(\mathbf{E}, \mathbf{z}) = \frac{E_z}{E} = \text{const},$$

причем

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = E_x \sqrt{1 + a^2 + b^2}.$$

В частном случае, если направление вектора параллельно одной из координатных осей, вектор имеет только одну проекцию. Аналогичные соотношения получаются и для вектора $\mathbf{H}$.

5-2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение плоской волны в однородной среде. Расположим координатные оси таким образом, чтобы один из векторов поля, например вектор $\mathbf{E}$, имел одну проекцию E_x . Пусть E_x зависит только от одной пространственной координаты z и от времени t , причем зависимость от времени синусоидальная. Параметры среды ϵ , μ и γ постоянные.

Запишем второе уравнение Максвелла в комплексной форме в декартовой системе координат, причем будем считать, что в поле нет свободных зарядов:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m \quad \begin{cases} 0 = -j\omega\mu_a \dot{H}_{xm}; \\ \frac{\partial E_{xm}}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_{ym}; \\ 0 = -j\omega\mu_a \dot{H}_{zm}. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае у вектора $\mathbf{H}$ только одна проекция H_y , отлична от нуля. Комплексная амплитуда ее равна:

$$\dot{H}_{ym} = \dot{H}_m = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial z}. \quad (5-1)$$

Так как комплексная амплитуда зависит только от одного переменного, то вместо частных производных можно

записать обычные производные:

$$\dot{H}_{ym} = -\frac{1}{j\omega\mu_a} \frac{d\dot{E}_{xm}}{dz}.$$

Первое уравнение Максвелла гот $\dot{H}_m = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{E}_m$ примет вид:

$$-\frac{dH_{ym}}{dz} = (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{E}_{xm}.$$

Подставив значение $\dot{H}_{ym}$ и отбросив индексы у проекции векторов, получим уравнение

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} = -j\omega\mu_a (\gamma + j\omega\epsilon_a) \dot{E}_m = 0.$$

Назовем коэффициентом распространения комплексное число

$$\Gamma = (\alpha + j\beta) = \sqrt{j\omega\mu_a (\gamma + j\omega\epsilon_a)}. \quad (5-2)$$

Введя величину Γ в уравнение, получаем:

$$\frac{d^2\dot{E}_m}{dz^2} - \Gamma^2 \dot{E}_m = 0.$$

Решение уравнения имеет следующий вид:

$$\dot{E}_m = \tilde{M}_1 e^{-\Gamma z} + \tilde{M}_2 e^{\Gamma z}. \quad (5-3)$$

Перейдя к мгновенным значениям и положив $\tilde{M}_1 = M_1 e^{j\xi_1}$, $\tilde{M}_2 = M_2 e^{j\xi_2}$, получим:

$$E = E_x = M_1 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi_1) + M_2 e^{\alpha z} \sin(\omega t + \beta z + \xi_2) = E_{\text{пад}} + E_{\text{отр}}. \quad (5-4)$$

Первая составляющая напряженности электрического поля $E_{\text{пад}}$ называется прямой или падающей волной. Она распространяется в сторону возрастающих z . Вторая $E_{\text{отр}}$, распространяющаяся в сторону убывающих z , называется обратной или отраженной волной. Мгновенное значение E равно сумме ординат прямой и обратной волн.

Напряженность магнитного поля

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu_a} \left(-\Gamma \tilde{M}_1 e^{-\Gamma z} + \Gamma \tilde{M}_2 e^{\Gamma z} \right).$$

Комплексную величину

$$Z_B = z_B e^{j\varphi_B} = \frac{j\omega\mu_a}{\Gamma} \quad (5-5)$$

называют волновым сопротивлением.

Введя эту величину в формулу, получаем:

$$\dot{H}_m = \frac{\tilde{M}_1}{Z_B} e^{-\Gamma z} - \frac{\tilde{M}_2}{Z_B} e^{\Gamma z}. \quad (5-6)$$

Переходя к мгновенным значениям, будем иметь:

$$H = H_y = \frac{M_1}{z_B} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi_1 - \varphi_B) - \\ - \frac{M_2}{z_B} e^{\alpha z} \sin(\omega t + \beta z + \xi_2 - \varphi_B) = H_{\text{пад}} - H_{\text{отр}}. \quad (5-7)$$

Мгновенное значение напряженности магнитного поля равно разности ординат падающей и отраженной волн. Полученные выражения представляют собой уравнения плоских электромагнитных волн.

Мгновенное значение вектора Пойнтинга

$$\bar{\Pi} = [EH].$$

5-3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛН

Прямая или падающая волна напряженности электрического поля

$$E_{\text{пад}} = M_1 e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \xi_1)$$

представляет собой волну, распространяющуюся в направлении положительной оси z . Фаза ее меняется в функции от z и t . Эквифазные поверхности представляют собой плоскости, перпендикулярные оси z .

Скорость перемещения плоскости равных фаз волны v_Φ называется фазовой скоростью. Величина фазовой скорости $v_\Phi = dz/dt$. В момент t_1 в точке z_1 фаза волны равна: $\omega t_1 - \beta z_1 + \xi_1$. За время dt фаза переместится на расстояние dz . Следовательно, ее значение равно:

$$\omega(t_1 + dt) - \beta(z_1 + dz) + \xi_1.$$

Приравняв эти выражения, получим:

$$\omega dt - \beta dz = 0,$$

откуда

$$v_\Phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

Фазовая скорость падающей волны $H_{\text{пад}}$ имеет такую же величину.

Отраженные волны $E_{\text{отр}}$ и $H_{\text{отр}}$ перемещаются с такой же фазовой скоростью, но в обратном направлении. Для них

$$v_{\phi} = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Среды, для которых фазовая скорость зависит от частоты, называются диспергирующими. Коэффициент β при мнимой части Γ называется коэффициентом фазы или волновым числом.

Амплитуды волны затухают в направлении распространения; прямая волна — в направлении оси z , отраженная — в обратном направлении.

Быстрота затухания зависит от действительной составляющей коэффициента распространения Γ . Она обозначается буквой α и называется коэффициентом затухания или поглощения.

Отношение амплитуд соответствующих волн E и H равно модулю волнового сопротивления:

$$\frac{E_{m \text{ пад}}}{H_{m \text{ пад}}} = \frac{E_{m \text{ отр}}}{H_{m \text{ отр}}} = z_{\text{в}}.$$

Падающие волны E и H (так же как и отраженные) сдвинуты по фазе на угол $\phi_{\text{в}}$, равный аргументу волнового сопротивления.

Если среда не ограничена в направлении распространения, то отраженных волн нет и постоянная M_2 обратится в нуль.

Длиной волны λ называют расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π рад. Пусть это расстояние соответствует $z_2 - z_1 = \lambda$, тогда

$$(\omega t - \beta z_1 + \xi_1) - (\omega t - \beta z_2 + \xi_1) = 2\pi;$$

$$\beta(z_2 - z_1) = 2\pi, \quad \beta\lambda = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (5-8)$$

Так как

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta},$$

то

$$\lambda = \frac{v_{\phi}}{f}.$$

Произведение длины волны и частоты равно фазовой скорости.

На рис. 5-1 показаны кривые $E_{\text{пад}} = f_1(z)$ и $E_{\text{отр}} = f_2(z)$ для различных моментов времени.

Кривые $H_{\text{пад}}$ и $H_{\text{отр}}$ можно построить аналогично.

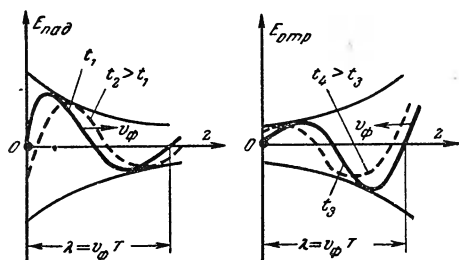


Рис. 5-1. Бегущие волны.

a — падающая (прямая) волна; b — отраженная (обратная) волна.

Определим вещественную и мнимую части коэффициента распространения.

Так как

$$\Gamma = \sqrt{j\omega\mu_a(\gamma + j\omega\epsilon_a)} = \alpha + j\beta,$$

то, взяв квадраты и приравняв вещественные слагаемые, получим:

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2\mu_a\epsilon_a = -\frac{\omega^2}{v^2}.$$

Определим квадрат модуля коэффициента распространения:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega\mu_a \sqrt{\gamma^2 + \omega^2\epsilon_a^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}(\omega\mu_a \sqrt{\gamma^2 + \omega^2\epsilon_a^2} - \omega^2\mu_a\epsilon_a)} = \\ &= \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2\epsilon_a^2} + 1} - 1\right)}, \\ \beta &= \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2\epsilon_a^2} + 1} + 1\right)}. \end{aligned}$$

Коэффициент распространения можно записать и следующим образом:

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\mu_a \left(-j\frac{\gamma}{\omega} + \epsilon_a\right)} = j\omega \sqrt{\mu_a \tilde{\epsilon}_a'}.$$

Величину

$$\tilde{\epsilon}'_a = \epsilon_a - j \frac{\gamma}{\omega}$$

называют комплексной диэлектрической проницаемостью.

Если ввести $\tilde{\epsilon}'_a$ в выражение волнового сопротивления, оно преобразуется и

$$Z_v = \frac{j\omega\mu_a}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\tilde{\epsilon}'_a}}.$$

Модуль и аргумент волнового сопротивления равны:

$$z_v = \sqrt[4]{\frac{\mu_a^2 \omega^2}{\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_a^2}}, \quad \varphi_v = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

а) В каждой точке поля мгновенное значение напряженности электрического поля равно сумме ординат падающей и отраженной волн; мгновенное значение напряженности магнитного поля равно разности ординат падающей и отраженной волн.

б) Направление вектора $\mathbf{E}$, одинаковое во всех точках поля, перпендикулярно к направлению вектора $\mathbf{H}$, причем оба вектора перпендикулярны к направлению распространения.

Поэтому плоские волны относятся к классу так называемых поперечных электромагнитных волн ТЕМ (Transverse Electro-Magnetic).

в) Отношение амплитуд волн $E_{\text{пад}}$ и $H_{\text{отр}}$, так же как и отношение амплитуд волн $E_{\text{отр}}$ и $H_{\text{отр}}$, равно модулю волнового сопротивления z_v .

г) Фазы падающих волн, так же как и фазы отраженных волн, сдвинуты одна относительно другой на угол, равный аргументу волнового сопротивления φ_v .

д) Падающая и отраженная волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью $v_\phi = \frac{\omega}{\beta} = \lambda f$ в прямо противоположных направлениях.

е) Амплитуды волн затухают в направлении своего распространения. Быстрота затухания зависит от величины коэффициента поглощения α .

ж) Если среда не ограничена в направлении распространения, то отраженных волн нет: $E = E_{\text{пад}}$, $H = H_{\text{пад}}$.

5-4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Идеальным называют диэлектрик, проводимость γ которого равна нулю. Например, нижние слои атмосферы во многих случаях можно считать идеальным диэлектриком.

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны в идеальном диэлектрике, считая, что $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = 1$. Параметры волны запишутся следующим образом. Коэффициент поглощения $\alpha = 0$, и поэтому коэффициент распространения является мнимым числом:

$$\Gamma = j\beta = j\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0} = j \frac{\omega}{v}.$$

Коэффициент фазы $\beta = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_0}$.

Фазовая скорость $v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_0}} = v \approx \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\epsilon}}$, м/сек, равна скорости распространения электромагнитной энергии.

Волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} = \frac{j\omega \mu_a}{\Gamma} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}} = R_{\text{в}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}}, \text{ ом}$$

является вещественным числом.

Уравнения (5-3) и (5-6) примут следующий вид:

$$\dot{E}_m = E_{\text{мпад}} + \dot{E}_{\text{мотр}} = \tilde{M}_1 e^{-j \frac{\omega}{v} z} + \tilde{M}_2 e^{j \frac{\omega}{v} z},$$

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{\text{мпад}} - \dot{H}_{\text{мотр}} = \frac{\tilde{M}_1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}}} e^{-j \frac{\omega}{v} z} - \frac{\tilde{M}_2}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}}} e^{j \frac{\omega}{v} z}.$$

Можно обозначить:

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_a}} = R_{\text{в}}.$$

Если среда не ограничена в направлении распространения, то мгновенные значения векторов поля определяются ординатами прямой или падающей волны, постоянная $M_2 = 0$.

Пусть при $z = 0$, $E_m = E_{0m}$, а $\xi_1 = 0$, тогда

$$E = E_x = E_{0m} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right\},$$

$$H = H_y = \frac{E}{R_B} = \frac{E_{0m}}{R_B} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right\},$$

$$\Pi = |\bar{\Pi}| = |[\mathbf{E}\mathbf{H}]| = \Pi_z = \frac{E_{0m}^2}{R_B} \sin^2 \left\{ \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right\}.$$

На рис. 5-2 изображены кривые зависимости $E = f_1(z)$ и $H = f_2(z)$ для фиксированного момента времени t .

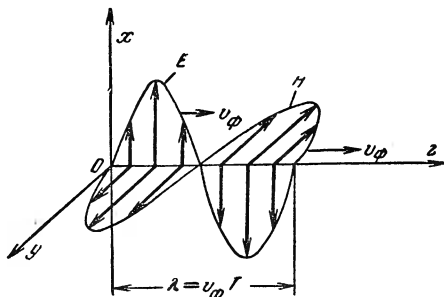


Рис. 5-2. Падающие волны напряженности электрического и напряженности магнитного полей.

Покажем, что энергия электрического поля в объеме V равна энергии магнитного поля в том же объеме:

$$W_{\text{э}} = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \int_V \frac{\epsilon_a H^2 R_B^2}{2} dV = \int_V \frac{\mu_0 H^2}{2} dV = W_{\text{м}}.$$

Вместе с плоской волной в направлении оси z перемещается энергия, излучаемая источником поля. Через площадку в 1 м^2 , перпендикулярную оси z , проходит за 1 сек энергия, численно равная значению вектора Пойнтинга на этой площадке.

Полученные результаты показывают, что амплитуды векторов поля неизменны и, следовательно, волна распространяется без затухания (среда непоглощающая).

Волны E и H , распространяясь с одинаковой скоростью

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = v,$$

совпадают по фазе (так как волновое сопротивление — число вещественное). Скорость распространения не зависит от

частоты. Отношение комплексных амплитуд векторов поля $\dot{E}_m/\dot{H}_m = Z_B$ равно волновому сопротивлению

$$Z_B = z_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}} = R_B, \quad \varphi_B = 0.$$

5.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ В ХОРОШО ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

В хорошо проводящей среде токи проводимости значительно больше токов смещения и поэтому последними можно пренебречь. При определении параметров волны можно положить $\gamma \gg \omega\epsilon_a \approx 0$.

Коэффициент распространения при этом равен:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_a\gamma} = \sqrt{\omega\mu_a\gamma} e^{j45^\circ} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}} = k + jk = \sqrt{2}ke^{j45^\circ}. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициент поглощения равен коэффициенту фазы.

Волновое сопротивление примет вид:

$$Z_B = z_B e^{j\varphi_B} \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{j45^\circ}.$$

Фазовая скорость

$$v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\gamma}}.$$

Длина волны определится из выражения

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{\frac{8\pi^2}{\omega\mu_a\gamma}} = \sqrt{\frac{4\pi}{f\mu_a\gamma}}.$$

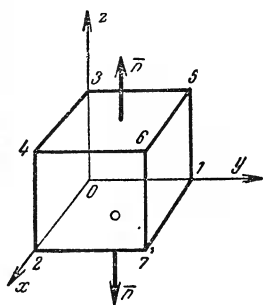
Если среда не ограничена в направлении распространения, то мгновенные значения векторов поля

$$\begin{aligned} E &= E_x = E_{0m} e^{-kz} \sin(\omega t - kz); \\ H &= H_y = \frac{E_{0m}}{z_B} e^{-kz} \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

В этих выражениях E_{0m} обозначает амплитуду вектора E в точке $z = 0$. Величина ξ_1 принята равной 0. Амплитуды векторов поля уменьшаются в направлении распространения. Определим среднюю за период мощность тепловых потерь в объеме V и покажем, что она равна потоку сред-

него значения вектора Пойнтинга сквозь выбранную поверхность S .

Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V параллелепипеда (рис. 5-3). Среда хорошо проводящая, ее проводимость γ и магнитная проницаемость $\mu = \text{const}$ заданы. Плоская гармоническая волна с частотой $\omega = 2\pi f$ распространяется в направлении



оси z . Амплитуда вектора E в точке $z = 0$ равна E_{0m} , длина сторон $O1; O2; O3$ равна a метров. Мощность тепловых потерь за период равна:

$$P_{\text{тепл}} = \frac{1}{T} \int_0^T p_{\text{тепл}} dt.$$

По закону Джоуля — Ленца

$$p_{\text{тепл}} = \int_V \gamma E^2 dV.$$

Рис. 5-3. Вычисление потерь в поглощающей среде.

В случае плоской волны, распространяющейся без отражения в хорошо проводящей среде,

$$E = E_x = E_{0m} e^{-kz} \sin(\omega t - kz).$$

Коэффициент затухания и коэффициент фазы в этом случае равны друг другу и определяются выражением

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}.$$

Искомая мощность равна:

$$P_{\text{тепл}} = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 a^2}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}} (1 - e^{-2ka}).$$

Среднее значение вектора Пойнтинга за период

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt.$$

Так как векторы поля в рассматриваемом случае имеют по одной проекции, то

$$\Pi = \Pi_z = E_x H_y = \frac{E_{0m}^2}{z_b} e^{-2kz} \sin(\omega t - kz) \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right)$$

и вектор Пойнтинга имеет одну проекцию Π_z . Следовательно,

$$\Pi_{cp} = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 e^{-2kz}}{4z_B}.$$

Волновое сопротивление хорошо проводящей среды равно по абсолютной величине

$$z_B = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}}.$$

Подставив это значение, получим:

$$\Pi_{cp} = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 e^{-2kz}}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}}.$$

Поток вектора Пойнтинга отличен от нуля только сквозь площадки $01720 = S_1$ и $35643 = S_2$ (рис. 5-3). По теореме Умова — Пойнтинга

$$\begin{aligned} - \oint_S \bar{\Pi}_{cp} dS &= P_{\text{тепл}} = - \int_{S_1} \Pi_{cp} dS \cos 180^\circ - \int_{S_2} \Pi_{cp} dS \cos 0^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 a^2}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}} (1 - e^{-2ka}). \end{aligned}$$

Вычисленный поток оказался равным средней мощности тепловых потерь. Энергия, которая входит в выбранный объем за некоторое время, например период T , равна:

$$W_1 = -T \int_{S_1} \Pi_{cp} dS \cos 180^\circ = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 T a^2}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}}.$$

Энергия, которая выходит из этого объема за то же время, равна:

$$W_2 = \int_{S_2} \Pi_{cp} dS \cos 0^\circ = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 T a^2}{4} e^{-2ka} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}}.$$

Энергия тепловых потерь в объеме V за то же время равна:

$$W_{\text{тепл}} = P_{\text{тепл}} T = \frac{\sqrt{2} E_{0m}^2 T a^2}{4} \sqrt{\frac{\gamma}{\omega \mu_a}} (1 - e^{-2ka}).$$

Сравнивая величины этих энергий, получаем:

$$W_1 = W_2 + W_{\text{тепл}}.$$

Анализируя полученные результаты, приходим к следующему выводу. В хорошо проводящей среде ($\omega\epsilon_a \approx 0$) волны E и H распространяются с одинаковой скоростью

$$v_\phi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a \gamma}}, \text{ которая зависит от частоты.}$$

Амплитуды векторов поля затухают в направлении распространения, что вызывается поглощением энергии средой (тепловые потери). Быстрота затухания амплитуд характеризуется множителем e^{-kz} , где

$$k = \beta = \alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu_a \gamma}{2}}. \quad (5-9)$$

На расстоянии, равном длине волны λ , векторы поля практически обращаются в нуль, так как $e^{-\beta\lambda} = e^{-2\pi} \approx 0$. Отношение комплексных амплитуд $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$, равное волновому сопротивлению, число комплексное:

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = Z_v = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Следовательно, волны E и H сдвинуты по фазе на 45° .

Значения параметров волны для различных сред представлены в табл. 5-1.

5-6. ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

При передаче радиосигналов только в исключительных случаях имеют дело с синусоидальными функциями времени одной частоты. Обычно сигнал состоит из группы волн с определенным спектром частот. Каждая волна распространяется со скоростью $v_\phi = \omega/\beta$, причем и фазовая скорость и коэффициент фазы β могут зависеть от частоты. В этом случае фазовая скорость уже не может характеризовать скорости распространения сигнала. Чтобы определить скорость распространения всей группы волн, пользуются понятием групповой скорости.

Ниже рассматривается случай, когда сигнал занимает полосу частот, малую по сравнению со средней частотой. Например, он состоит из двух синусоидальных волн, частоты которых соответственно равны: $\omega + \Delta\omega$ и $\omega - \Delta\omega$. Пусть волны распространяются в направлении оси z и имеют равные амплитуды. Коэффициенты фазы также незначительно отличаются друг от друга: $\beta + \Delta\beta$ и $\beta - \Delta\beta$.

Таблица 5-1

Параметр	Полупроводник, $\gamma \neq 0$, $\omega \varepsilon_a \neq 0$	Идеальный диэлектрик, $\gamma = 0$	Хороший проводник, $\omega \varepsilon_a = 0$
Коэффициент распространения Γ	$\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu_a(\gamma + j\omega\varepsilon_a)}$	$j\beta$	$k + jk$
Коэффициент поглощения α	$\frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2} + 1} - 1 \right)}$	0	$\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}$
Коэффициент фазы β	$\frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega^2 \varepsilon_a^2} + 1} + 1 \right)}$	$\frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_0}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}$
Модуль волнового сопротивления z_B	$\sqrt[4]{\frac{\mu_a^2 \omega^2}{\gamma^2 + \omega^2 \varepsilon_a^2}}$	$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}}$
Аргумент волнового сопротивления φ_B	$0 < \arctg \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
Длина волны λ	$\frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$	$\frac{c}{f\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{f\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{f\mu_a\gamma}}$
Фазовая скорость v_Φ	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu_a\gamma}}$

Ордината суммарного сигнала

$$\begin{aligned} E &= E_m \sin [(\omega + \Delta\omega) t - (\beta + \Delta\beta) z] + \\ &+ E_m \sin [(\omega - \Delta\omega) t - (\beta - \Delta\beta) z] = \\ &= 2E_m \cos (\Delta\omega t - \Delta\beta z) \sin (\omega t - \beta z). \end{aligned}$$

Величина $2E_m \cos (\Delta\omega t - \Delta\beta z)$ представляет собой огибающую суммарного сигнала. Эта огибающая медленно перемещается в направлении оси z со скоростью $v_{гр} = \Delta\omega/\Delta\beta$. Скорость $v_{гр}$ называют групповой скоростью. Она в данном случае характеризует скорость перемещения в пространстве точек огибающей, например, наибольшего значения суммарного сигнала.

В самом общем случае групповая скорость определяется по формуле

$$v_{гр} = \frac{1}{d\beta/d\omega}. \quad (5-10)$$

Связь между групповой и фазовой скоростями следующая:

$$z_{гр} = \frac{v_{\phi}}{1 - \frac{\omega}{v_{\phi}} \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}.$$

В том случае, когда v_{ϕ} не зависит от частоты, групповая и фазовая скорости равны.

5-7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Поляризация характеризует ориентацию вектора E электромагнитной волны.

Как было указано выше (§ 5-1), в случае линейной поляризации плоской электромагнитной волны вектора E , не меняя своего направления во всех точках пространства, изменяется по абсолютной величине.

Если область, в которой распространяется плоская гармоническая волна — идеальный диэлектрик, то амплитуды векторов поля имеют постоянную величину. Затухание, которое имело бы место в случае конечной проводимости среды, не играет роли в поляризации. Ограничимся рассмотрением линейно поляризованной волны, распространяющейся в направлении положительной оси z . Если вектор E направлен по оси x (рис. 5-4), то вектор H будет направлен

по оси y и выражения векторов поля примут вид:

$$\mathbf{E} = iE_x = iE_m \sin(\omega t - \beta z + \psi);$$

$$\mathbf{H} = jH_y = j \frac{E_m}{R_B} \sin(\omega t - \beta z + \psi),$$

где $\beta = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu_0}$ — волновое число;

$$R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \text{ — волновое сопротивление.}$$

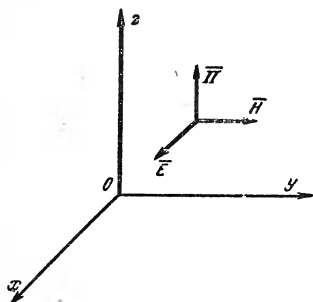


Рис. 5-4. Векторы плоской линейно поляризованной волны.

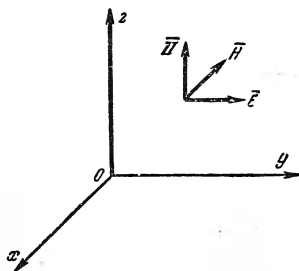


Рис. 5-5. Векторы плоской линейно поляризованной волны.

Если вектор $\mathbf{E}$ направлен параллельно оси y (рис. 5-5), то

$$\mathbf{E} = jE_y = jE_m \sin(\omega t - \beta z + \psi);$$

$$\mathbf{H} = -iH_x = -i \frac{E_m}{R_B} \sin(\omega t - \beta z + \psi).$$

В случае произвольной ориентации вектора $\mathbf{E}$ в плоскости xOy (рис. 5-6) его можно разложить на составляющие E_x и E_y , тогда

$$\mathbf{E} = iE_x + jE_y = iE \cos \varphi + jE \sin \varphi,$$

где φ — угол между направлением вектора $\mathbf{E}$ и осью x .

Обозначив $E_m \cos \varphi = E_{m1}$, $E_m \sin \varphi = E_{m2}$, получим:

$$\mathbf{E} = iE_{m1} \sin(\omega t - \beta z + \psi) + jE_{m2} \sin(\omega t - \beta z + \psi).$$

Длина вектора

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

а угол φ определится из соотношения

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{E_x}{E_y}.$$

Следовательно, наложение двух гармонических линейно поляризованных волн, векторы $\mathbf{E}$ которых взаимно перпендикулярны, а фазы совпадают, дает линейно поляризованную волну.

Рассмотрим теперь две гармонические линейно поляризованные волны, электрические векторы которых взаимно перпендикулярны, а амплитуда и начальные фазы неодинаковые:

$$\begin{aligned} E_1 &= iE_x = iE_{1m} \sin(\omega t - \beta z + \psi_1) = iE_{1m} \times \\ &\times \{\sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_1 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= jE_y = jE_{2m} \sin(\omega t - \beta z + \psi_2) = \\ &= jE_{2m} \{\sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_2 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_2\}. \end{aligned}$$

Чтобы найти геометрическое место, которое описывает конец вектора $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ при фиксированной координате z , надо решить совместно уравнения

$$E_x = E_{1m} \{\sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_1 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_1\};$$

$$E_y = E_{2m} \{\sin(\omega t - \beta z) \cos \psi_2 + \cos(\omega t - \beta z) \sin \psi_2\}.$$

После преобразований получим:

$$\sin(\omega t - \beta z) = \frac{\frac{E_x}{E_{1m}} \sin \psi_2 - \frac{E_y}{E_{2m}} \sin \psi_1}{\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \cos \psi_2 \sin \psi_1};$$

$$\cos(\omega t - \beta z) = \frac{\frac{E_y}{E_{2m}} \cos \psi_1 - \frac{E_x}{E_{1m}} \cos \psi_2}{\cos \psi_1 \sin \psi_2 - \cos \psi_2 \sin \psi_1}.$$

Возведя в квадрат и сложив, получим:

$$\frac{E_x^2}{E_{1m}^2} + \frac{E_y^2}{E_{2m}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{1m} E_{2m}} \cos(\psi_2 - \psi_1) - \sin^2(\psi_2 - \psi_1) = 0,$$

которое аналогично уравнению кривой второго порядка:

$$aE_x^2 + bE_y^2 + 2cE_x E_y + d = 0.$$

В случае эллипса $ab - c^2$ должно быть больше нуля, что имеет место в рассматриваемом случае. Таким образом, вектор $\mathbf{E}$, перпендикулярный направлению распростране-

ния z , в фиксированной точке пространства вращается, изменяя свое абсолютное значение так, что конец его описывает эллипс (рис. 5-7). Рассмотренный вид поляризации называется эллиптической. При изменении координаты z конец вектора $\vec{E}$ скользит по поверхности прямого цилиндра с эллиптическим сечением.

Оси эллипса могут не совпадать с осями x и y . Поворотом координатных осей их можно совместить.

Можно показать, что конец вектора $\vec{H}$ также перемещается по эллипсу. Большие оси обоих эллипсов взаимно перпендикулярны. В зависимости от направления вращения вектора $\vec{E}$ поляризация называется

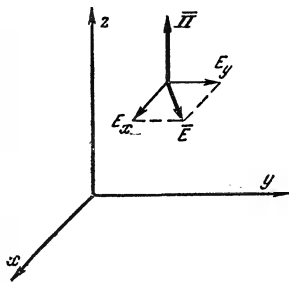


Рис. 5-6. Векторы плоской линейно поляризованной волны.

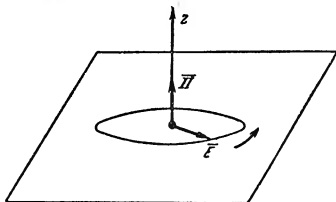


Рис. 5-7. Эллиптически поляризованная волна.

правой или левой. В случае правой поляризации направление вращения и направление распространения подчиняются правилу правого винта (рис. 5-7).

Если $ab - c^2 = 0$, что будет иметь место при $E_{1m} = E_{2m}$ и $\psi_1 = \psi_2$, уравнение эллипса вырождается в прямую и поляризация волны будет линейной.

Если $E_{1m} = E_{2m}$ и $\psi_2 - \psi_1 = \pi/2$, рассматриваемое уравнение переходит в уравнение окружности. В этом случае поляризация называется круговой. Конец вектора $\vec{E}$ при изменении координаты z описывают винтовую линию на поверхности прямого цилиндра с круглым сечением.

5-8. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ

Выше рассматривались процессы при распространении плоской волны в неограниченной среде.

Рассмотрим теперь распространение волны в пространстве, которое состоит из нескольких разнородных областей.

Особенно важно знать поведение волны на граничной поверхности.

Волна, распространяющаяся в одной области, попадая на граничную поверхность, частично отражается, а частично проходит во вторую область. Направление распространения в общем случае меняется. Ниже будут рассмотрены два случая. Первый случай — когда направление распространения падающей волны нормально к граничной поверхности. Второй — когда направление распространения падающей

волны образует с граничной поверхностью угол, отличный от прямого.

В обоих случаях граничную поверхность будем считать плоской и неограниченной. Волна распространяется из среды *I* в среды *II* (рис. 5-8). Каждая из сред однородная, но с различными постоянными параметрами ϵ_1 , ϵ_2 , γ_1 и γ_2 .

Магнитная проницаемость обеих сред одинакова и равна единице.

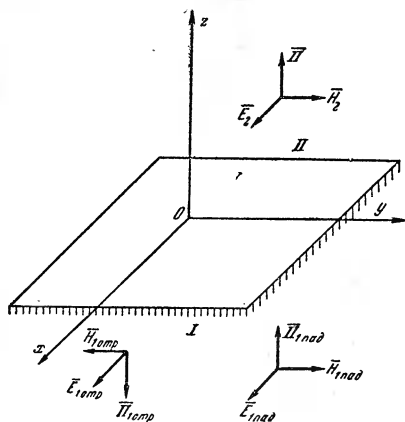


Рис. 5-8. Плоская граница двух сред.

Рассмотрим случай нормального падения плоской, гармонической линейно поляризованной волны.

В этом случае направление распространения перпендикулярно к граничной поверхности, а плоскости постоянных фаз ей параллельны.

Оси координат на рис. 5-8 выбраны таким образом, что плоскость xOy совпадает с граничной плоскостью. Вектор E направлен параллельно оси x , а направление распространения падающей волны совпадает с направлением оси z . В этом случае векторы поля будут иметь по одной проекции: $E = E_x$, $H = H_y$, $\Pi = \Pi_z$, причем эти проекции зависят только от координаты z и времени t .

Так как волна гармоническая, зависимость от времени t синусоидальная, то уравнения волн можно записать в комплексной форме.

Пусть обе среды — идеальные диэлектрики: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

В области I будут иметь место падающая и отраженная волны:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{1m} &= \dot{E}_{m\text{пад}} + \dot{E}_{m\text{отр}} = \tilde{M}_1 e^{-j\beta_1 z} + \tilde{M}_2 e^{j\beta_1 z}; \\ \dot{H}_{1m} &= H_{m\text{пад}} - \dot{H}_{m\text{отр}} = \frac{\tilde{M}_1}{R_{B1}} e^{-j\beta_1 z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_{B1}} e^{j\beta_1 z},\end{aligned}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_{\Phi 1}} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0}, \quad R_{B1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}}.$$

Во второй области будет распространяться только одна падающая волна, так как эта область не ограничена в направлении распространения:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{2m} &= \tilde{M}_3 e^{-j\beta_2 z}, \\ H_{2m} &= \frac{\tilde{M}_3}{R_{B2}} e^{-j\beta_2 z},\end{aligned}$$

где

$$\beta_2 = \frac{\omega}{v_{\Phi 2}} = \omega \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0 \mu_0}, \quad R_{B2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2 \epsilon_0}}.$$

Если положить при $z = 0$, $\dot{E}_{m\text{пад}} = E_{0m}$, то постоянная

$$\tilde{M}_1 = E_{0m}.$$

Согласно граничным условиям тангенциальные составляющие векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе должны быть равны (на границе нет поверхностных токов).

Следовательно, при $z = 0$

$$\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = \tilde{M}_3; \quad \frac{\tilde{M}_1}{R_{B1}} - \frac{\tilde{M}_2}{R_{B1}} = \frac{\tilde{M}_3}{R_{B2}}.$$

Решив эти уравнения, получим:

$$\tilde{M}_2 = \frac{R_{B2} - R_{B1}}{R_{B2} + R_{B1}} E_{0m} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} E_{0m} = m E_{0m};$$

$$\tilde{M}_3 = \frac{2R_{B2}}{R_{B2} + R_{B1}} E_{0m} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} E_{0m} = n E_{0m}.$$

Постоянную

$$m = \frac{R_{B2} - R_{B1}}{R_{B2} + R_{B1}} = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}$$

называют коэффициентом отражения.

Постоянную

$$n = \frac{2R_{B2}}{R_{B2} + R_{B1}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}}$$

называют коэффициентом преломления (прохождения).

Если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, то $0 < m < 1$, $n > 1$. Фазы $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$ одинаковы, фазы $H_{\text{пад}}$ и $H_{\text{отр}}$ сдвинуты на 180° .

Если $\epsilon_1 < \epsilon_2$, то $-1 < m < 0$, $0 < n < 1$. Фазы $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{отр}}$ сдвинуты на 180° . Фазы $H_{\text{пад}}$ и $H_{\text{отр}}$ одинаковы.

При $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $m = 0$, $n = 1$ отраженной волны не будет. Волна свободно проходит во вторую область.

В первой области амплитуды E_{1m} и H_{1m} в связи с отражением волн меняются с изменением координаты z . Например, E_{1m} меняется от значения $E_{0m}(1 + m)$ до значения $E_{0m}(1 - m)$. Расстояние между двумя соседними максимумами равно:

$$\frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{2f \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0}}.$$

Чем меньше коэффициент отражения (ϵ_1 и ϵ_2 мало отличаются друг от друга), тем менее сказывается зависимость E_{1m} от координаты z . При значительном различии ϵ_1 и ϵ_2 коэффициент отражения близок к единице и амплитуды E_{1m} меняются от значений, близких к $2E_{0m}$, до значений, близких нулю.

Во второй области амплитуды векторов поля — величины постоянные, так как среда без потерь и неограниченная.

Рассмотрим случай, когда область I — идеальный диэлектрик ($\epsilon_1 = \text{const}$, $\gamma_1 = 0$, $\mu_{a1} = \mu_0$), а область II — хороший проводник с проводимостью γ и магнитной проницаемостью $\mu_{a2} = \mu\mu_0 = \text{const}$.

В первой области

$$\dot{E}_{1m} = \tilde{M}_1 e^{-i\beta z} + \tilde{M}_2 e^{i\beta z};$$

$$H_{1m} = \frac{\tilde{M}_1}{R_B} e^{-i\beta z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_B} e^{i\beta z},$$

где

$$\beta = \frac{\omega}{v_\Phi} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0}, \quad R_B = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}}.$$

Во второй области, которая не ограничена в направлении распространения,

$$\dot{E}_{2m} = \tilde{M}_3 e^{-kz} e^{-ikz};$$

$$\dot{H}_{2m} = \frac{\tilde{M}_3}{z_B e^{j45^\circ}} e^{-kz} e^{-ikz},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}, \quad z_B = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}}.$$

Положив $\tilde{M} = E_{0m}$ и используя условия на границе $z = 0$, получим:

$$\tilde{M}_2 = \frac{z_B e^{j45^\circ} - R_B}{z_B e^{j45^\circ} + R_B} E_{0m} = \tilde{m} E_{0m};$$

$$\tilde{M}_3 = \frac{2z_B e^{j45^\circ}}{z_B e^{j45^\circ} + R_B} E_{0m} = \tilde{n} E_{0m}.$$

В данном случае коэффициенты отражения $\tilde{m}$ и преломления $\tilde{n}$ — числа комплексные.

В области *I* векторы поля ведут себя примерно так же, как в рассмотренном выше случае. В области *II* вследствие поглощения энергии амплитуды векторов поля затухают.

Быстрота затухания амплитуд характеризуется глубиной проникновения волны в металл.

Глубиной проникновения называют расстояние Δ в направлении распространения волны, на котором амплитуда вектора напряженности убывает в $e = 2,7$ раза. Если в данной точке z_1 поля амплитуда вектора напряженности равна $E_{2m}' = M_3 e^{-kz_1}$, то на расстоянии $z_1 + \Delta$ она будет равна $E_{2m}'' = E_{2m}'/e$. Следовательно, $e = \frac{E_{2m}'}{E_{2m}''} = \frac{e^{-kz_1}}{e^{-k(z_1 + \Delta)}} = e^{k\Delta}$, или $k\Delta = 1$.

Глубина проникновения волны

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}.$$

Она зависит от частоты, магнитной проницаемости и удельной проводимости среды. Даже в диапазоне низких частот глубина проникновения — величина небольшая.

Например, для меди

$$\Delta = \frac{60}{\sqrt{f}}, \text{ мм,}$$

а для алюминия

$$\Delta = \frac{82,6}{\sqrt{f}}, \text{ мм.}$$

Так как длина волны в среде *II*

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\Delta,$$

то амплитуда векторов поля на расстоянии, равном длине волны, убывает в $e^{k\lambda_2} = e^{2\pi} = 535,5$ раз.

Поэтому на расстоянии от поверхности металла, равном длине волны, векторы поля практически обращаются в нуль.

В идеальном проводнике ($\gamma = \infty$) глубина проникновения $\Delta = 0$. Поле в идеальном проводнике отсутствует.

Рассмотрим теперь случай: область I — идеальный однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ , а область II — идеальный проводник с проводимостью $\gamma = \infty$.

Так как проводимость среды в области II ($z \geq 0$) равна бесконечности, то волна полностью отражается от граничной поверхности. В области II поля нет; $E_2 = 0$, $H_2 = 0$. Комплексные амплитуды векторов поля в области I ($z \leq 0$):

$$\dot{E}_m = \tilde{M}_1 e^{-j\beta z} + \tilde{M}_2 e^{j\beta z} = \dot{E}_{m \text{ пад}} + \dot{E}_{m \text{ отр}};$$

$$\dot{H}_m = \frac{\tilde{M}_1}{R_B} e^{-j\beta z} - \frac{\tilde{M}_2}{R_B} e^{j\beta z} = \dot{H}_{m \text{ пад}} - \dot{H}_{m \text{ отр}}.$$

На границе при $z = 0$ напряженность электрического поля должна равняться нулю. Следовательно, $\tilde{M}_1 + \tilde{M}_2 = 0$ или $\tilde{M}_1 = -\tilde{M}_2 = \tilde{M}$. Коэффициент отражения $m = -1$, коэффициент прохождения $n = 0$.

Положим $\dot{M} = E_{0m}$. Тогда

$$\dot{E}_m = -2e^{j\frac{\pi}{2}} E_{0m} \sin \beta z,$$

$$\dot{H}_m = 2 \frac{E_{0m}}{R_B} \cos \beta z.$$

Мгновенные значения векторов поля определяются из выражений

$$E = E_x = 2E_{0m} \sin \beta z \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H = H_y = 2 \frac{E_{0m}}{R_B} \cos \beta z \sin \omega t,$$

представляющих собой уравнения стоячих волн. На границе при $z = 0$ будет узел волны E и пучность волны H . Вектор Пойнтинга

$$\Pi = \Pi_z = E_x H_y = - \frac{E_{0m}^2}{R_B} \sin 2\beta z \sin 2\omega t.$$

Среднее значение Π за период равно нулю. По граничной плоскости протекают поверхностные токи. Плотность

их равна напряженности магнитного поля на поверхности проводника:

$$\eta = \eta_x = H_y = 2 \frac{E_0 m}{R_B} \sin \omega t.$$

5-9. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ

Пусть направление распространения плоской гармонической волны составляет с граничной плоскостью между двумя разнородными средами угол, отличный от прямого. Обе среды — идеальные диэлектрики.

Направление распространения падающей волны в первой среде обозначим через s_1 .

Волна, встретив граничную поверхность, частично отразится от нее, частично перейдет во вторую среду.

Направления распространения отраженной и преломленной волн обозначим через s_0 и s_2 . Назовем плоскостью падения плоскость, на которой лежат вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к граничной плоскости.

На рис. 5-9 координатные оси x , y , z направлены таким образом, чтобы плоскость yOx совпала с граничной, а плоскость yOz совпала с плоскостью падения.

Угол φ_1 между направлением распространения падающей волны s_1 и нормалью к граничной плоскости (в данном случае с осью $+z$) называют у г л о м п а д е н и я. Угол φ_0 между направлением распространения отраженной волны s_0 и нормалью к граничной плоскости называют у г л о м о т р а ж е н и я. Угол $\angle s_2 Oz = \varphi_2$ называют у г л о м п р е л о м л е н и я.

Расстояние r_1 плоскости постоянной фазы падающей волны до начала координат в общем случае равно:

$$r_1 = x_1 \cos(s_1, x) + y \cos(s_1, y) + z_1 \cos(s_1, z),$$

причем

$$\cos^2(s_1, x) + \cos^2(s_1, y) + \cos^2(s_1, z) = 1.$$

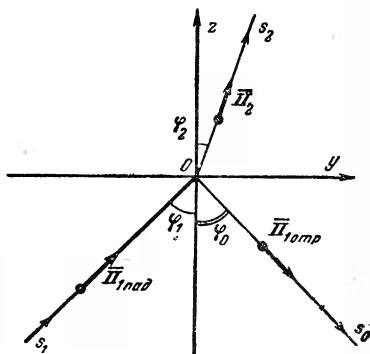


Рис. 5-9. Отражение и преломление плоской волны при наклонном падении.

Так как при выбранном на рис. 5-9 направлении координатных осей $\cos(s_1, x) = 0$, угол $s_1Oz = \varphi_1$, то

$$r_1 = y_1 \sin \varphi_1 + z_1 \cos \varphi_1.$$

Аналогично можно записать и расстояния от начала координат до плоскости равных фаз отраженной и преломленной волн:

$$r_0 = y_0 \sin \varphi_0 - z_0 \cos \varphi_0;$$

$$r_2 = y_2 \sin \varphi_2 + z_2 \cos \varphi_2.$$

Мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного поля всех трех волн можно записать следующим образом:

$$E_{\text{пад}} = E_{1m} \sin(\omega t - \beta_1 r_1 + \psi_1), \quad H_{\text{пад}} = E_{\text{пад}}/R_{B1};$$

$$E_{\text{отр}} = E_{0m} \sin(\omega t - \beta_1 r_0 + \psi_0), \quad H_{\text{отр}} = E_{\text{отр}}/R_{B1};$$

$$E_{\text{пр}} = E_{2m} \sin(\omega t - \beta_2 r_2 + \psi_2), \quad H_{\text{пр}} = E_{\text{пр}}/R_{B2},$$

где

$$\beta_1 = \frac{\omega}{v_{\varphi 1}} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_0 \mu_0};$$

$$\beta_2 = \frac{\omega}{v_{\varphi 2}} = \omega \sqrt{\epsilon_2 \epsilon_0 \mu_0};$$

$$R_{B1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1 \epsilon_0}};$$

$$R_{B2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2 \epsilon_0}}.$$

Им соответствуют комплексные амплитуды

$$\dot{E}_{m \text{ пад}} = E_{1m} e^{j(\psi_1 - \beta_1 r_1)} = \dot{E}_{1m} e^{-j\beta_1 r_1};$$

$$\dot{H}_{m \text{ пад}} = \dot{E}_{m \text{ пад}}/R_{B1};$$

$$\dot{E}_{m \text{ отр}} = E_{0m} e^{j(\psi_0 - \beta_1 r_0)} = \dot{E}_{0m} e^{-j\beta_1 r_0},$$

$$\dot{H}_{m \text{ отр}} = \dot{E}_{m \text{ отр}}/R_{B1};$$

$$\dot{E}_{m \text{ пр}} = E_{2m} e^{j(\psi_2 - \beta_2 r_2)} = \dot{E}_{2m} e^{-j\beta_2 r_2};$$

$$\dot{H}_{m \text{ пр}} = \dot{E}_{m \text{ пр}}/R_{B2}.$$

На граничной плоскости при $z = 0$ тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{E}$ непрерывны:

$$E_{\tau \text{ пад}} + E_{\tau \text{ отр}} = E_{\tau \text{ пр}}.$$

Так как при $z = 0$

$$r_1 = y \sin \varphi_1;$$

$$r_0 = y \sin \varphi_0;$$

$$r_2 = y \sin \varphi_2,$$

то

$$E_{\tau \text{ пад}} = E_{\tau 1 m} \sin(\omega t - \beta_1 y \sin \varphi_1 + \psi_1);$$

$$E_{\tau \text{ отр}} = E_{\tau 0 m} \sin(\omega t - \beta_1 y \sin \varphi_0 + \psi_0);$$

$$E_{\tau \text{ отр}} = E_{\tau 2 m} \sin(\omega t - \beta_2 y \sin \varphi_2 + \psi_2).$$

Граничное условие будет соблюдено только в том случае, если

$$\beta_1 \sin \varphi_1 = \beta_1 \sin \varphi_0 = \beta_2 \sin \varphi_2.$$

Полученное выражение позволяет формулировать два закона.

а) Угол падения равен углу отражения (закон отражения):

$$\varphi_1 = \varphi_0.$$

б) Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления — величина постоянная, равная отношению фазовых скоростей в первой и второй средах (закон преломления):

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \text{const.}$$

Закон отражения справедлив для плоских волн любой поляризации и при разных частотах. Что касается закона преломления, то, так как диэлектрическая проницаемость среды, а следовательно, и фазовая скорость волны зависят от частоты (явление дисперсии), то отношение синусов углов падения и преломления, постоянное при фиксированной частоте, меняется при изменении частоты.

Зная амплитуду и фазу $E_{\text{пад}}$ и диэлектрические проницаемости обеих сред, можно, используя граничные условия, найти $E_{\text{отр}}$ и $E_{\text{пр}}$. Вначале будут рассмотрены два частных случая:

- 1) когда $E_{\text{пад}}$ совпадает с плоскостью падения;
- 2) когда $E_{\text{пад}}$ перпендикулярен плоскости падения.

Установив законы отражения и преломления в этих двух случаях, можно определить их и в случае произвольного направления $E_{\text{пад}}$. Для этого надо разложить $E_{\text{пад}}$ на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых дол-

жен совпадать с плоскостью падения, и воспользоваться принципом наложения.

1. Пусть вектор $\mathbf{E}'$ лежит в плоскости падения. Тогда вектор $\mathbf{H}'$ будет параллелен оси x .

Выберем для векторов $\mathbf{H}'_1$, $\mathbf{H}'_0$ и $\mathbf{H}'_2$ положительное направление, совпадающее с направлением оси x (рис. 5-10).

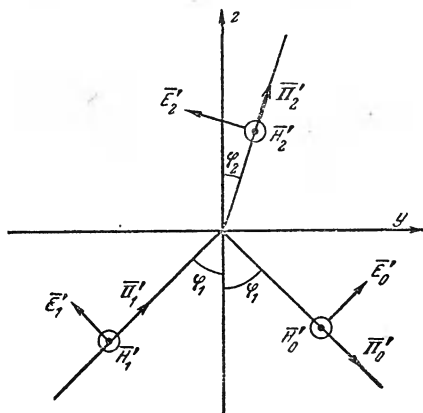


Рис. 5-10. Отражение и преломление волны (вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения).

Так как на граничной плоскости нет поверхностных токов, то тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{H}'$ по обе стороны граничной поверхности при $z = 0$ и любом x должны быть одинаковы. Следовательно, должны быть одинаковы и их комплексные амплитуды:

$$\dot{H}'_{1m} + \dot{H}'_{0m} = \dot{H}'_{2m}.$$

Тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{E}$ на границе также должны быть одинаковыми:

$$-\dot{E}'_{1m} \cos \varphi_1 + \dot{E}'_{0m} \cos \varphi_0 = -\dot{E}'_{2m} \cos \varphi_2.$$

Так как $\varphi_1 = \varphi_0$, а $\dot{H} = \dot{E} \sqrt{\epsilon \epsilon_0 / \mu}$, то, решив совместно оба уравнения, получим:

$$\dot{E}'_{0m} = \dot{E}'_{1m} \frac{\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2)}{\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2)} = \dot{E}'_{1m} \frac{R_{B1} \cos \varphi_1 - R_{B2} \cos \varphi_2}{R_{B1} \cos \varphi_1 + R_{B2} \cos \varphi_2},$$

$$\dot{E}'_{2m} = \dot{E}'_{1m} \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \dot{E}'_{1m} \frac{2 R_{B1} \cos \varphi_1}{R_{B1} \cos \varphi_1 + R_{B2} \cos \varphi_2}.$$

Полученные формулы носят название формул Френеля. Они позволяют определить комплексные амплитуды векторов поля отраженной и преломленной волн по известной комплексной амплитуде напряженности электрического поля падающей волны $\vec{E}'_{1m}$. Штрих в выражении комплексных амплитуд указывает на то, что рассматривается частный случай, когда $\vec{E}$ лежит в плоскости падения.

Отношение $\vec{E}'_{0m}/\vec{E}'_{1m} = \tilde{m}'$ называется коэффициентом отражения в этом частном случае.

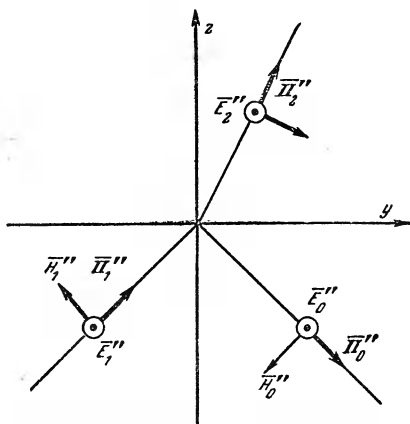


Рис. 5-11. Отражение и преломление волны (вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости падения).

Отношение $\vec{E}'_{2m}/\vec{E}'_{1m} = \tilde{n}'$ называется коэффициентом прохождения (преломления).

2. Пусть вектор $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости падения (рис. 5-11), т. е. при выбранном направлении координатных осей параллелен оси x . Вектор $\vec{H}$ будет расположен в плоскости xOz . Положительное направление для векторов $\vec{E}$, $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_2$ выбираем параллельно оси x . Граничные условия (при $z = 0$) следующие:

$$\vec{E}'_{1m} + \vec{E}'_{0m} = \vec{E}'_{2m};$$

$$-\vec{H}'_{1m} \cos \varphi_1 + \vec{H}'_{0m} \cos \varphi_1 = -\vec{H}'_{2m} \cos \varphi_2.$$

Так как $H = E \sqrt{\epsilon \epsilon_0 / \mu_0}$, то, решив эти уравнения, получим формулы Френеля для рассматриваемого частного

случая:

$$\dot{E}_{0m}'' = -\dot{E}_{1m}'' \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = -\dot{E}_{1m}'' \frac{R_{B1} \cos \varphi_2 - R_{B2} \cos \varphi_1}{R_{B1} \cos \varphi_2 + R_{B2} \cos \varphi_1};$$

$$\dot{E}_{2m}'' = \dot{E}_{1m}'' \frac{2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)} = \dot{E}_{1m}'' \frac{2R_{B2} \cos \varphi_1}{R_{B1} \cos \varphi_2 + R_{B2} \cos \varphi_1}.$$

Коэффициент отражения в этом частном случае равен $\frac{\dot{E}_{0m}''}{\dot{E}_{1m}''} = \tilde{m}$. Коэффициент прохождения (преломления) равен $\frac{\dot{E}_{2m}''}{\dot{E}_{1m}''} = \tilde{n}''$.

5-10. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

5-1. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в среде с проницаемостью $\epsilon = 4$ и проводимостью $\gamma = 10^{-3}$ ссм/м. Определить отношение амплитуд плотности тока смещения и плотности тока проводимости для частот $f_1 = 15 \cdot 10^3$ гц; $f_2 = 15 \cdot 10^6$ гц; $f_3 = 15 \cdot 10^7$ гц. В каком случае среду можно считать хорошо проводящей, полупроводящей, непроводящей?

О т в е т:

$3,3 \cdot 10^{-3}$ (проводящая среда); 0,33 (полупроводящая среда); 33 (непроводящая среда).

5-2. Определить длину волны (данные задачи 5-1) и сравнить ее с длиной волны в идеальном диэлектрике с проницаемостью $\epsilon = 1$.

О т в е т:

816 м (20 000 м); 69,5 м (200 м); 1 м (2 м).

5-3. Решить задачу 5-1, если $\epsilon = 80$, $\gamma = 4$ ссм/м.

О т в е т:

$1,66 \cdot 10^{-6}$; $1,66 \cdot 10^{-3}$; 0,166.

5-4. Определить длину волны по данным задачи 5-3.

О т в е т:

12,9 м; 1,29 м; 0,117 м.

5-5. Определить расстояние в направлении распространения волны, на котором амплитуда напряженности электрического поля уменьшится в 10^6 раз. Данные задачи 5-1.

О т в е т:

1 800 м; 210 м; 147 м.

5-6. Решить задачу 5-5 по данным задачи 5-3.

О т в е т:

28,4 м; 2,84 м; 0,307 м.

5-7. Построить кривые β , v_ϕ и λ в функции от частоты:

а) для идеального диэлектрика с $\epsilon = 4$;

б) для хорошего проводника с $\gamma = 10^7$ ссм/м; $\mu = 1$.

5-8. Определить волновое сопротивление для меди:

$\gamma = 57 \cdot 10^6$ ссм/м при частоте $f = 10^{10}$ гц.

О т в е т:

$z_B = 0,0374$ ом; $\varphi_B = 45^\circ$.

5-9. Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в неограниченном идеальном диэлектрике, у которого $\epsilon = 4$. В момент $t = 0$ $E = E_m = 2$ мв/м. Найти численные значения E и H в момент $t = 1$ мксек в точке, удаленной от данной в направлении распространения на расстояние 300 м, частота $f = 10^7$ гц.

О т в е т:

$$E = 2 \cdot 10^{-3} \text{ в/м}; H = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ а/м.}$$

5-10. Найти коэффициент фазы, длину волны, фазовую скорость и волновое сопротивление (данные задачи 5-9).

О т в е т:

$$\beta = 0,419 \text{ 1/м}; \lambda = 1,5 \text{ м}; v_{\text{ф}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ м/сек}; R_{\text{в}} = 188,5 \text{ ом.}$$

5-11. Показать, что наложение двух круглополяризованных волн с противоположными направлениями вращения и одинаковыми амплитудами представляет собой линейно поляризованную волну с амплитудой, равной удвоенной амплитуде слагаемых волн.

5-12. Представить эллиптически поляризованную волну как сумму линейно поляризованной и поляризованной по кругу волн.

5-13. Показать, что сумма двух поляризованных по кругу волн с противоположным направлением вращения и с разными амплитудами представляет собой эллиптически поляризованную волну.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

6-1. ЯВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА

Установлено, что переменный ток, проходящий по проводнику, распределяется неравномерно по сечению проводника. Плотность тока в различных точках сечения будет неодинаковой.

В цилиндрическом проводнике круглого сечения наибольшая плотность тока будет у поверхности проводника, наименьшая на оси. Чем больше проводимость проводника и его магнитная проницаемость, чем больше частота тока, тем более неравномерным будет распределение тока. Явление это носит название **п о в е р х н о с т н о г о э ф ф е к т а**. В связи с поверхностным эффектом изменяются активное сопротивление и индуктивность проводника. С увеличением частоты активное сопротивление растет, а индуктивность уменьшается. При очень высоких частотах практически можно считать, что весь ток проходит по поверхности проводника, а внутренний магнитный поток обращается в нуль. Внутри проводника электромагнитного поля нет.

При исследовании процесса распространения плоской волны в проводящей среде было выяснено, что амплитуда проекций векторов поля уменьшается в направлении распространения. Меняется также и их фаза. Электромагнитная волна, проникая в глубь проводника через его поверхность, постепенно теряет свою энергию. Энергия волны преобразуется в тепло. Амплитуды векторов поля уменьшаются по величине в направлении распространения волны. Если на

поверхности проводника при нормальном падении волны амплитуды равны E_{0m} и H_{0m} , то на расстоянии z от поверхности в направлении распространения волны они уменьшатся в e^{kz} раз, где

$$k = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}.$$

Фазы векторов поля на поверхности проводника и на расстоянии z от поверхности будут отличаться на угол

$$kz = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} z = \frac{2\pi}{\lambda} z.$$

Соответственно уменьшится и плотность тока проводимости

$$\bar{\delta} = \gamma E.$$

В точке, удаленной от поверхности на расстоянии z , равном длине волны λ , векторы поля уменьшатся в $e^{k\lambda}$ раз. Так как

$$e^{k\lambda} = e^{2\pi},$$

то практически векторы поля обратятся в нуль.

При наличии нескольких токнесущих проводов на распределение тока по сечению окажут влияние и токи соседних проводов. Явление это носит название эффекта близости.

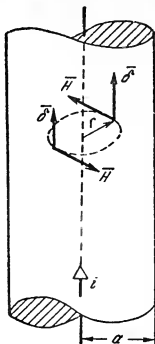
6.2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ПРОВОДНИКЕ

Рассмотрим явление поверхностного эффекта при прохождении синусоидального тока по металлическому цилиндрическому проводу круглого сечения. Токами смещения внутри провода можно пренебречь, так как они исчезающе малы по сравнению с токами проводимости. Провод будем считать прямым и очень длинным. Влиянием обратного провода пренебрегаем, т. е. считаем его достаточно удаленным. При сделанных предположениях будет иметься осевая симметрия. Линии вектора $\mathbf{H}$ являются окружностями, лежащими в плоскости, перпендикулярной к оси провода, с центрами на оси. На одном и том же расстоянии от оси модуль вектора напряженности магнитного поля

Рис. 6-1. Цилиндрический проводник с током.

будет одинаковым. Вектор плотности тока направлен параллельно оси провода и на одинаковом расстоянии от оси имеет одно и то же значение. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью провода и будем считать, что положительное направление тока совпадает с направлением оси z . Тогда векторы поля будут иметь по одной проекции (рис. 6-1)

$$\mathbf{H} = \mathbf{i}_\psi H; \quad \bar{\delta} = k\delta; \quad \mathbf{E} = k\mathbf{E} = k \frac{\delta}{\gamma}.$$



Обозначим радиус провода a и ток в проводе $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$. При установившемся режиме векторы $\mathbf{H}$ и $\bar{\delta}$ меняются во времени также по синусоидальному закону. Следовательно, поле можно описать уравнениями Максвелла, записанными в комплексной форме:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = \bar{\delta}_m; \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m; \quad \dot{\mathbf{E}}_m = \frac{\bar{\delta}_m}{\gamma}.$$

Раскрыв выражение ротора в цилиндрической системе координат и подставив вместо $\dot{\mathbf{E}}$ величину $\frac{1}{\gamma} \bar{\delta}_m$, получим:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dr} + \frac{\dot{H}_m}{r} = \dot{\delta}_m; \quad \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega\mu_a\gamma\dot{H}_m.$$

Частные производные заменены обычными, так как искомые величины зависят только от одной координаты r . Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu_a\gamma} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr};$$

$$\frac{d^2\dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} - j\omega\mu_a\gamma\dot{\delta}_m = 0.$$

Обозначим

$$\sqrt{j\omega\mu_a\gamma} = m.$$

Тогда

$$\frac{d^2\dot{\delta}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\delta}_m}{dr} - m^2\dot{\delta}_m = 0.$$

Полученное уравнение представляет собой видоизмененное уравнение Бесселя, каноническая форма которого следующая:

$$\frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{1}{w} \frac{df}{dw} + \left(1 - \frac{p^2}{w^2}\right) f = 0.$$

Каждому значению параметра p соответствует пара фундаментальных решений

$$f = \tilde{A} J_p(w) + \tilde{B} N_p(w).$$

Функция $J_p(w)$ называется функцией Бесселя первого рода p -го порядка. Величины $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — постоянные.

Приведем полученное выше уравнение к каноническому виду; положим

$$\sqrt{-j} mr = w.$$

Тогда

$$dw = \sqrt{-j} m dr;$$

$$dw^2 = -j m^2 dr^2.$$

Введя новое переменное w в уравнение и упростив его, получаем:

$$\frac{d^2 \delta_m}{dw^2} + \frac{1}{w} \frac{d\delta_m}{dw} + \delta_m = 0.$$

Сравнив это уравнение с канонической формой уравнения Бесселя, находим, что они совпадают при $p = 0$. Следовательно, решение уравнения удовлетворяется функциями Бесселя нулевого порядка. Вторая функция $N_p(w)$ называется функцией Бесселя второго рода p -го порядка (она называется также функцией Неймана):

$$\delta_m = \tilde{A} J_0(w) + \tilde{B} N_0(w).$$

Известно, что при $w = 0$ $N_p(0) = \infty$.

Так как плотность тока — величина конечная, то постоянная $\tilde{B}$ должна быть равной нулю; в противном случае на оси провода ($r = 0$) плотность тока получалась бы бесконечно большой. Таким образом, искомая плотность тока определяется выражением, в которое входит функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Эта функция монотонно возрастает и может быть представлена в виде знакпеременного ряда

$$J_0(w) = 1 - \frac{w^2}{2^2} + \frac{w^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{w^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

Так как w — число комплексное, то и функция $J_0(w)$ — комплексное число. Обозначим модуль функции b_0 , а аргумент β_0 : $J_0(w) = b_0 e^{j\beta_0}$.

Величину

$$-\frac{dJ_0(w)}{dw} = J_1(w)$$

называют функцией Бесселя первого рода первого порядка. Ее можно записать следующим образом:

$$J_1(w) = \frac{w}{2} \left(1 - \frac{w^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{w^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3} - \frac{w^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 4} + \dots \right) = b_1 e^{j\beta_1}.$$

В таблице (приложение 5) приведены значения b_0 , β_0 , b_1 , β_1 для различных значений аргумента w .

Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\int_0^w w J_0(w) dw = w J_1(w).$$

Для определения постоянной интегрирования выразим амплитуду заданного тока в проводе через плотность тока (рис. 6-2)

$$\begin{aligned} I_m &= \int_S \delta_m dS = \int_0^a \tilde{A} J_0(\sqrt{-j} mr) 2\pi r dr = \\ &= \tilde{A} \frac{2\pi a}{\sqrt{-j} m} J_1(\sqrt{-j} ma). \end{aligned}$$

Искомая постоянная равна:

$$\tilde{A} = \frac{I_m \sqrt{-j} m}{2\pi a J_1 \sqrt{-j} ma}.$$

Тогда плотность тока можно записать следующим образом:

$$\delta_m = \frac{I_m ma \sqrt{-j}}{\pi a^2} \frac{J_0(\sqrt{-j} mr)}{J_1(\sqrt{-j} ma)}.$$

Если начальная фаза заданного тока равна нулю: $I_m = I_m$, то

$$\delta_m = \frac{I_m ma}{\pi a^2} \frac{b_{0r}}{2} \frac{b_{0r}}{b_{1a}} e^{(\beta_{0r} - 45^\circ - \beta_{1a})} = \delta_m e^{j\xi}.$$

Величина $I_m / \pi a^2$ равна амплитуде средней плотности тока.

На рис. 6-3 показана кривая зависимости $\delta_m = f(r)$. С увеличением частоты плотность тока на оси убывает, а

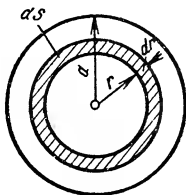


Рис. 6-2. Вычисление тока через сечение проводника.

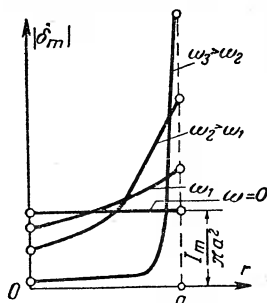


Рис. 6-3. Зависимость плотности тока от частоты и расстояния до оси цилиндрического проводника.

на поверхности растет. При $r = a$ плотность тока будет наибольшей

$$\delta_{m \text{ макс}} = \frac{I_m}{\pi a^2} \frac{m a}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} e^{j(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a})}.$$

Зная плотность тока, можно определить напряженность магнитного поля

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{1}{j m^2} \frac{d \delta_m}{dr} = \frac{I_m}{2 \pi a} \frac{J_1(\sqrt{-j} m r)}{J_1(\sqrt{-j} m a)} = \\ &= \frac{I_m}{2 \pi a} \frac{b_{1r}}{b_{1a}} e^{j(\beta_{1r} - \beta_{1a})} = H_m e^{j \xi}. \end{aligned}$$

На рис. 6-4 показана кривая $H_m = f(r)$. Наибольшее значение H принимает на поверхности провода. Если амплитуда тока не меняется, то с изменением частоты амплитуда напряженности поля H_m вне провода меняться не будет. Внутри проводника в одной и той же точке величина H_m с увеличением частоты уменьшается. Уменьшается и $\Phi_{\text{вн}}$.

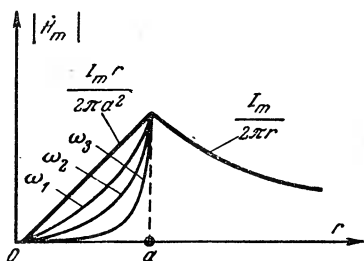


Рис. 6-4. Зависимость напряженности магнитного поля от частоты и от расстояния до оси цилиндрического проводника.

Так как модуль функций Бесселя растет с увеличением аргумента $mr = \sqrt{\omega \mu_a \gamma} r$, то чем выше

частота переменного тока, магнитная проницаемость и проводимость проводника, чем больше его радиус, тем сильнее сказывается явление поверхностного эффекта, тем быстрее затухает электромагнитная волна, проникающая в глубь проводника через его поверхность из окружающего провод диэлектрика.

6-3. АКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И ВНУТРЕННЯЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДА С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА

Активное сопротивление участка провода длиной l равно $r = P/I^2$, где P мощность тепловых потерь на участке.

Воспользуемся теоремой Пойнтинга в комплексной форме

$$P = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \oint_S [\dot{\mathbf{E}}_m \mathbf{H}_m^*] dS \right\}.$$

Поверхность интегрирования показана на рис. 6-5. На боковой поверхности

$$\mathbf{H}_m = \frac{I_m}{2\pi a} = \mathbf{H}_m^*;$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{I_m}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} e^{j(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a})} = \frac{\dot{\delta}_m}{\gamma},$$

следовательно,

$$[\dot{\mathbf{E}}_m \mathbf{H}_m^*] dS = -\frac{I_m^2}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \frac{1}{2\pi a} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} dS e^{j(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a})}.$$

Что касается потока через заштрихованные площадки, то он равен нулю. Поэтому искомая мощность

$$P = \frac{I_m^2 l}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}).$$

Активное сопротивление провода

$$r = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \cos(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}).$$

Индуктивное сопротивление, обусловленное внутренним магнитным полем,

$$\omega L_{\text{вн}} = \omega \frac{2W_{m \text{ макс}}}{I_m^2} = \frac{2}{I_m^2} \omega \int_V \frac{\mu_a H_m^2}{2} dV.$$

Так как

$$2\omega \int_V \frac{\mu_a H_m^2}{4} dV \approx \text{Im} \left\{ -\frac{1}{2} \oint_S [\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{H}}_m] dS \right\},$$

то

$$\omega L_{\text{BH}} = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}).$$

Внутренняя индуктивность

$$L_{\text{BH}} = \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2\omega} \frac{b_{0a}}{b_{1a}} \sin(\beta_{0a} - 45^\circ - \beta_{1a}).$$

На рис. 6-6 показаны кривые $r = f_1(\omega)$; $L_{\text{BH}} = f_2(\omega)$.

Как видно из рисунка, при увеличении частоты активное сопротивление растет, а индуктивность уменьшается.

При $\omega = 0$, т. е. в случае постоянного тока,

$$r_0 = \frac{l}{\pi a^2 \gamma}, \quad L_{0 \text{ BH}} = \frac{\mu_a l}{8\pi}.$$

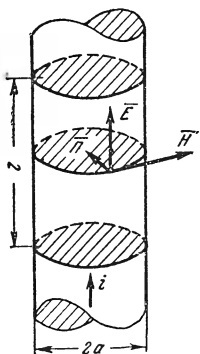


Рис. 6-5. Тепловые потери в проводнике.

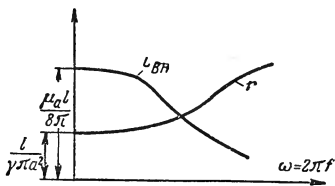


Рис. 6-6. Зависимость сопротивления и внутренней индуктивности цилиндрического проводника от частоты тока.

При очень большой частоте отношение b_{0a}/b_{1a} стремится к единице, а $\beta_{0a} - \beta_{1a}$ стремится к $\pi/2$. Следовательно, активное сопротивление

$$r \approx \frac{l}{\pi a^2 \gamma} \frac{ma}{2} \cos 45^\circ \approx r_0 \frac{a}{2\Delta}.$$

Подставив значения (для меди) $\gamma = 5,75 \cdot 10^7$ 1/ом·м, $\mu_a = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м, получим величину активного сопротивления на единицу длины медного провода

$$\frac{r}{l} = 4,165 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a}, \text{ ом/м.}$$

Следовательно, активное сопротивление двухпроводной линии в области радиочастот будет равно

$$R_0 \approx \frac{2r}{l} = 8,33 \cdot 10^{-8} \frac{\sqrt{f}}{a}, \text{ ом/м.}$$

Формула эта приведена в ч. I, § 11-1.

Читателю рекомендуется определить активное сопротивление r , пользуясь теоремой Пойнтинга.

6-4. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Одним из способов приближенного решения дифференциальных уравнений является способ последовательных приближений. Пусть требуется найти в интервале от $x = a$ до $x = x$ функцию $u = f(x)$ из уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = F(x) u,$$

где $F(x)$ задана, а при $x = a$, $u = A$, $du/dx = B$.

К такому виду легко привести уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + P(x) \frac{dw}{dx} + Q(x) w = 0$$

подстановкой $w = u\eta$ и соответственным подбором η .

Интегрируя уравнение, получаем:

$$\frac{du}{dx} = B + \int_a^x F(x) u dx$$

и после вторичного интегрирования

$$u = A + B(x - a) + \int_a^x dx \int_a^x F(x) u dx.$$

Обозначим $A + B(x - a) = u_1$, тогда

$$u = u_1 + \int_a^x dx \int_a^x F(x) u dx. \quad (*)$$

Подставим это значение u в уравнение (*)

$$u = u_1 + \int_a^x dx \int_a^x u_1 F(x) dx + \\ + \int_a^x dx \int_a^x F(x) dx \int_a^x dx \int_a^x F(x) u dx.$$

Продолжая поступать также, будем получать все новые и новые значения u . Обозначим действие

$$\int_a^x dx \int_a^x F(x) u_1 dx = \Phi_1(u_1),$$

а то же действие, повторенное дважды, т. е.

$$\int_a^x dx \int_a^x F(x) dx \int_a^x dx \int_a^x F(x) u_1 dx = \\ = \Phi_1\{\Phi_1(u_1)\} = \Phi_2(u_1)$$

и вообще

$$\Phi_1\{\Phi_{n-1}(u_1)\} = \Phi_n(u_1).$$

Тогда уравнение для u можно записать в виде

$$u = u_1 + \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_1) + \dots + \Phi_{n-1}(u_1) + \Phi_n(u_1).$$

Если при $n \rightarrow \infty$ $\Phi_n(u) \rightarrow 0$, то искомая функция u представляется в виде ряда, который сходится. Каждый член этого ряда получается умножением предыдущего на $F(x)$ и двукратным интегрированием от a до x .

Назовем u_1 первым приближением функции, $u_2 = u_1 + \Phi_1(u_1)$ — вторым, $u_3 = u_2 + \Phi_2(u_2)$ — третьим и т. д.

Очевидно, чем скорее убывают члены ряда, тем меньшее число слагаемых членов этого ряда приближенно заменит искомую функцию. Докажем сходимость ряда.

Пусть наибольшее значение $F(x) < M$, а $u_1 = A + B(x-a) < N$, тогда

$$|\Phi_1(u_1)| < \int_a^x dx \int_a^x NM dx = NM \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2},$$

$$|\Phi_2(u_1)| < \int_a^x dx \int_a^x NM^2 \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} dx = NM^2 \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

.....

$$|\Phi_{n-1}(u)| < M^{n-1} N \frac{(x-a)^{2(n-1)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2(n-1)}.$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\lim \frac{M^n (x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} = 0.$$

Остается показать, что $n \rightarrow 0$ и $\Phi_n(u) \rightarrow 0$. Для этого достаточно показать, что $|u|$ в интервале $x-a$ по численной величине не может превзойти конечного числа P .

Пусть такое число существует и $|u| < P$. Тогда

$$|\Phi_n(u)| < PM^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}.$$

Вместе с тем сумма

$$\begin{aligned} u_1 + \Phi_1(u_1) + \Phi_2(u_1) + \dots + \Phi_{n-1}(u_1) < \\ < N \left\{ 1 + M \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + M^2 \frac{(x-a)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \right. \\ \left. + M^{n-1} \frac{(x-a)^{2(n-1)}}{1 \cdot 2 \dots 2(n-1)} \right\} \leq \frac{N}{2} \left\{ e^{\sqrt{M}(x-a)} + e^{-\sqrt{M}(x-a)} \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим наибольшее значение этого выражения через Q . Тогда

$$|u| < Q + PM^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}.$$

Значит, число P надо взять таким, чтобы

$$P > Q + P \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n} M^n.$$

При достаточно большом n

$$\frac{M^n (x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n} < \varepsilon$$

можно сделать меньше сколь угодно малого наперед заданного положительного числа, значит, надо взять

$$P > \frac{Q}{1-\varepsilon}$$

и неравенства

$$|u| < P \text{ и } |\Phi_n(u)| < PM^n \frac{(x-a)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}$$

будут удовлетворены.

Пусть требуется найти распределение плотности синусоидального тока по круглому сечению прямого металлического цилиндра.

Основные уравнения электромагнитного поля удобнее записать в цилиндрической системе координат.

Плотность тока зависит только от одной координаты r , так как задача симметричная.

Уравнение $\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\delta}_m$ примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d(H_m r)}{dr} = \dot{\delta}_m.$$

Уравнение $\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$, так как $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\delta}_m/\gamma$ примет вид:

$$\frac{d\dot{\delta}_m}{dr} = j\omega\mu_a \gamma \dot{H}_m.$$

Тогда

$$\dot{H}_m = \frac{1}{r} \int \dot{\delta}_m r dr + \text{const},$$

$$\dot{\delta}_m = j\omega\mu_a \gamma \int \dot{H}_m dr + \text{const}.$$

При

$$r=0, \quad \dot{H}_m=0, \quad \dot{\delta}_m = \text{const} = \dot{A}_0.$$

В первом приближении примем плотность тока равномерно распределенной по сечению и равной

$$\dot{\delta}_{1m} = \dot{\delta}_m = \dot{A}_0.$$

Напряженность магнитного поля этого тока

$$\dot{H}_{1m} = \dot{H}_m = \frac{1}{r} \int_0^r \dot{A}_0 r dr = \dot{A}_0 \frac{r}{2}.$$

Магнитное поле, изменяясь во времени, наведет в цилиндре токи, плотность которых

$$\delta_m'' = j\omega\mu_a\gamma \int_0^r A_0 \frac{r}{2} dr = A_0 \frac{j\omega\mu_a\gamma r^2}{2^2}.$$

Второе приближение плотности тока

$$\delta_{2m} = \delta_m' + \delta_m'' = A_0 \left(1 + \frac{j\omega\mu_a\gamma r^2}{2^2} \right) = A_0 \left[1 - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^2}{2^2} \right].$$

Напряженность магнитного поля токов с плотностью δ_m'' будет равна

$$\dot{H}_m'' = \frac{1}{r} \int_0^r A_0 \frac{j\omega\mu_a\gamma r^2}{2^2} r dr = A_0 \frac{j\omega\mu_a\gamma r^3}{2^2 \cdot 4}.$$

Второе приближение напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned} \dot{H}_{2m} &= \dot{H}_m' + \dot{H}_m'' = A_0 \left(\frac{r}{2} + \frac{j\omega\mu_a\gamma r^3}{2^2 \cdot 4} \right) = \\ &= A_0 \frac{1}{V - j\omega\mu_a\gamma} \left[\frac{V - j\omega\mu_a\gamma r}{2} - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^3}{2^2 \cdot 4} \right]. \end{aligned}$$

Точно таким же образом находим:

$$\delta_m''' = A_0 \frac{(j\omega\mu_a\gamma r^2)^2}{2^2 \cdot 4^2};$$

$$H_m''' = A_0 \frac{(j\omega\mu_a\gamma)^2 r^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta_{3m} &= \delta_m' + \delta_m'' + \delta_m''' = \\ &= A_0 \left\{ 1 - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^2}{2^2} + \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^4}{2^2 \cdot 4^2} \right\}, \\ \dot{H}_{3m} &= A_0 \frac{1}{V - j\omega\mu_a\gamma} \left\{ \frac{V - j\omega\mu_a\gamma r}{2} - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^3}{2} + \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \right\}. \end{aligned}$$

Выражения, заключенные в скобки, при увеличении числа слагаемых обращаются в цилиндрические функции:

$$\begin{aligned} J_0(V - j\omega\mu_a\gamma r) &= \\ &= 1 - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^2}{2^2} + \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \\ J_1(V - j\omega\mu_a\gamma r) &= \\ &= \frac{V - j\omega\mu_a\gamma r}{2} - \frac{(V - j\omega\mu_a\gamma r)^3}{2^2 \cdot 4} + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи методом последовательных приближений привело к совершенно точному значению плотности тока. Постоянная A_0 легко определяется, если задан общий ток I , протекающий по цилиндру.

Если при решении задачи ограничиться первыми тремя приближениями, то степень точности решения определится из отношения

$$\frac{\dot{\delta}_{3m}}{\dot{\delta}_m} = \frac{1 - \frac{(\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}r)^2}{2^2} + \frac{(\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}r)^4}{2^2 \cdot 4^2}}{J_0(\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}r)}.$$

6-5. ПЕРЕМЕННЫЙ МАГНИТНЫЙ ПОТОК В ПЛОСКОМ ЛИСТЕ

В плоском стальном листе возбужден магнитный поток. Направление вектора $\mathbf{B}$ и размеры показаны на рис. 6-7. Требуется определить магнитную индукцию в различных точках сечения листа. Длина листа l достаточно велика. Ширина a значительно больше толщины b .

Пусть магнитный поток меняется во времени по синусоидальному закону и исследуется установившийся процесс. Уравнения Максвелла можно записать в комплексной форме:

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\delta}_m = \gamma \dot{\mathbf{E}}_m;$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m,$$

где $\dot{\delta}_m$ — комплексная амплитуда вихревых токов. Токами смещения пренебрегаем.

Будем считать в первом приближении магнитную проницаемость постоянной.

Рис. 6-7. Магнитный поток в плоском листе.

Известно, что магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля; поэтому результаты, которые будут получены в предположении $\mu = \text{const}$, могут быть использованы только для ориентировочных подсчетов.

Раскроем уравнения Максвелла в декартовой системе координат. Так как $a \gg b$, то можно считать, что векторы поля имеют по одной проекции и зависят только от координаты y :

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{H}_{zm} = \dot{f}_1(y); \quad \dot{\delta}_m = \dot{\delta}_{xm} = \dot{f}_2(y).$$

Уравнения Максвелла примут вид:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dy} = \gamma \dot{E}_m; \quad \frac{d\dot{E}_m}{dy} = j\omega\mu_a \dot{H}_m.$$

Введя магнитную индукцию

$$\dot{B}_m = \mu_a \dot{H}_m$$

и исключив

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dy},$$

получим уравнение, определяющее магнитную индукцию,

$$\frac{d^2 \dot{B}_m}{dy^2} - j\omega\mu_a \gamma \dot{B}_m = 0.$$

Решив это уравнение, получим:

$$\dot{B}_m = \tilde{M}_1 e^{\tilde{p}y} + \tilde{M}_2 e^{-\tilde{p}y},$$

где

$$\tilde{p} = \sqrt{j\omega\mu_a \gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a \gamma}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega\mu_a \gamma}{2}} = k + jk.$$

Если пренебречь влиянием потока соседних листов, то поле внутри рассматриваемого листа должно быть симметричным относительно плоскости xOz и изменение знака y не должно менять величины $\dot{B}_m$. Это возможно при

$$\tilde{M}_1 = \tilde{M}_2 = \tilde{M}.$$

Следовательно,

$$\dot{B}_m = \tilde{M} (e^{\tilde{p}y} + e^{-\tilde{p}y}) = 2\tilde{M} \operatorname{ch} \tilde{p}y.$$

Чтобы определить постоянную $\tilde{M}$, будем считать, что среднее по сечению значение комплексной амплитуды вектора магнитной индукции $\dot{B}_{\text{ср}}$ задано. Тогда, так как

$$\dot{B}_{\text{ср}} = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \dot{B}_m dy = \frac{2\tilde{M}}{b} \frac{\operatorname{sh} \frac{\tilde{p}b}{2}}{\frac{\tilde{p}}{2}},$$

$$\tilde{M} = \frac{\dot{B}_{\text{ср}} \tilde{p} b}{4 \operatorname{sh} \frac{\tilde{p} b}{2}}.$$

Комплексная амплитуда магнитной индукции

$$\dot{B}_m = \dot{B}_{\text{ср}} \frac{\tilde{p} b}{2} \frac{\operatorname{ch} \tilde{p} y}{\operatorname{sh} \frac{\tilde{p} b}{2}}.$$

Плотность вихревых токов в листе определится по закону Ома в дифференциальной форме $\dot{\delta}_m = \gamma \dot{E}_m$. Так как

$$\dot{E}_m = \frac{1}{\gamma} \frac{d\dot{H}_m}{dy} = \frac{1}{\gamma \mu_a} \frac{d\dot{B}_m}{dy},$$

то

$$\dot{\delta}_m = -\dot{B}_{\text{ср}} \frac{\tilde{p}^2 b}{2 \mu_a} \frac{\operatorname{sh} \tilde{p} y}{\operatorname{sh} \frac{\tilde{p} b}{2}} = -j \dot{B}_{\text{ср}} \frac{\omega \gamma b}{2} \frac{\operatorname{sh} \tilde{p} y}{\operatorname{sh} \frac{\tilde{p} b}{2}}.$$

Так как $\tilde{p} = k + jk$, то

$$|\operatorname{ch} \tilde{p} y| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ky + \cos 2ky}{2}};$$

$$|\operatorname{sh} \tilde{p} y| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ky - \cos 2ky}{2}}.$$

Модули B_m и $\dot{\delta}_m$ соответственно равны:

$$B_m = B_{\text{ср}} \frac{\omega \mu_a \gamma b}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ky + \cos 2ky}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}};$$

$$\delta_m = B_{\text{ср}} \frac{\omega \gamma b}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2ky - \cos 2ky}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}}.$$

На поверхности листа при $y = \pm \frac{b}{2}$ магнитная индукция имеет наибольшее значение:

$$B_{m \text{ макс}} = B_{\text{ср}} \frac{\omega \mu_a \gamma b}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ch} kb + \cos kb}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}}.$$

На оси при $y = 0$ магнитная индукция имеет минимальное значение:

$$B_{m \text{ мин}} = B_{\text{ср}} \frac{\omega \mu_a \gamma b}{2} \sqrt{\frac{2}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}}.$$

Отношение

$$\frac{B_{m \text{ макс}}}{B_{m \text{ мин}}} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} kb + \cos kb}{2}}$$

характеризует степень неравномерности распределения магнитного потока.

Наибольшая плотность вихревых токов получается также на поверхности листа при

$$y = \pm \frac{b}{2}:$$

$$\delta_{m \text{ макс}} = B_{m \text{ ср}} \frac{\omega \gamma b}{2}.$$

При $y = 0$ плотность токов равна нулю. Чем больше величина

$$kb = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} b,$$

тем сильнее сказывается неравномерность распределения магнитного потока и вихревых токов. На рис. 6-8 показаны кривые B_m и δ_m в функции от y .

Вихревые токи нагревают проводник. Мощность потерь можно определить по закону Джоуля — Ленца:

$$\frac{dP_{\text{тепл}}}{dV} = \frac{1}{2} \frac{\delta_m^2}{\gamma} = B_{m \text{ ср}}^2 \frac{\omega^2 \gamma b^2}{4} \frac{\operatorname{ch} 2ky - \cos 2ky}{\operatorname{ch} kb - \cos kb},$$

откуда

$$\begin{aligned} P_{\text{тепл}} &= la \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} B_{m \text{ ср}}^2 \frac{\omega^2 \gamma b^2}{4} \frac{\operatorname{ch} 2ky - \cos 2ky}{\operatorname{ch} kb - \cos kb} dy = \\ &= B_{m \text{ ср}}^2 \frac{\omega^2 la \gamma b^2}{4k} \frac{\operatorname{sh} kb - \sin kb}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}. \end{aligned}$$

Потери в единице объема равны:

$$\frac{P_{\text{тепл}}}{V} = B_{m \text{ ср}}^2 \frac{\omega kb}{4\mu_a} \frac{\operatorname{sh} kb - \sin kb}{\operatorname{ch} kb - \cos kb}.$$

Они растут с увеличением частоты и толщины листа. Чтобы сохранить неизменной величину мощности $P_{\text{тепл}}$ при увеличении частоты, надо уменьшать толщину листа.

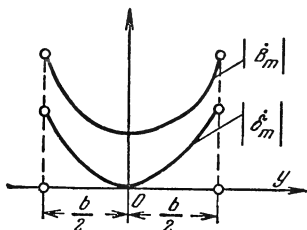


Рис. 6-8. Магнитная индукция и плотность вихревых токов.

При $kb \gg 1$ можно положить

$$\sin kb = kb - \frac{k^3 b^3}{3!};$$

$$\cos kb = 1 - \frac{k^2 b^2}{2!};$$

$$\operatorname{sh} kb = kb + \frac{k^3 b^3}{3!}; \quad \operatorname{ch} kb = 1 + \frac{k^2 b^2}{2!}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sh} kb - \sin kb}{\operatorname{ch} kb - \cos kb} = \frac{kb}{3}$$

и

$$\frac{P_{\text{тепл}}}{V} = \frac{B_{m \text{ ср}}^2}{2} \frac{\pi^2 f^2 b^2 \gamma}{3}.$$

По этой формуле определяются тепловые потери от вихревых токов без учета неравномерного распределения магнитного потока.

6-6. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ В ЛЕНТОЧНОЙ ЛИНИИ

По двум параллельным ленточным проводам (рис. 6-9) протекает синусоидальный ток с неизменной амплитудой I_m частотой $\omega = 2\pi f$. Провода достаточно длинные. Ширина

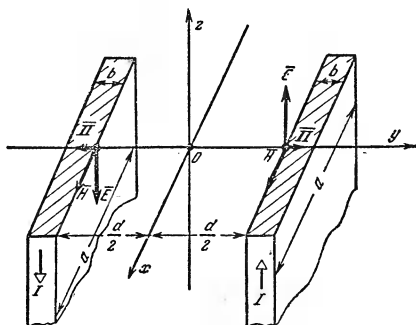


Рис. 6-9. Ленточная линия.

a значительно больше толщины b . Расстояние между проводами d соизмеримо с шириной. Вне проводов ($y > \frac{d}{2} + b$; $y < -\frac{d}{2} - b$) напряженность поля можно считать рав-

ной нулю, так как магнитные потоки, созданные обоими проводами, взаимно компенсируются. Между проводами поле можно считать плоскопараллельным. Вектор $\mathbf{H}$ будет иметь одну проекцию H_x , комплексная амплитуда которой зависит только от одной координаты y . В области $-\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}$ поле однородное и

$$H_m = \frac{I_m}{a}.$$

Определим закон изменения H_m и δ_m в толще проводов. Вектор $\vec{\delta}$ имеет одну проекцию δ_z . Уравнения Максвелла

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\vec{\delta}}_m = \gamma \dot{\mathbf{E}}_m;$$

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$$

применительно к рассматриваемому случаю запишутся следующим образом:

$$\frac{d\dot{H}_m}{dy} = \dot{\delta}_m; \quad \frac{d\dot{\delta}_m}{dy} = j\omega\mu_a \gamma \dot{H}_m.$$

Исключив $\dot{\delta}_m$, получим уравнение

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dy^2} - j\omega\mu_a \gamma \dot{H}_m = 0,$$

решение которого

$$\dot{H}_m = \tilde{M}_1 e^{-\tilde{p}y} + \tilde{M}_2 e^{\tilde{p}y},$$

где опять

$$\tilde{p} = \sqrt{j\omega\mu_a \gamma} = k + jk.$$

Для правого провода граничные условия следующие:

$$\dot{H}_m = 0 \text{ при } y = \frac{d}{2} + b;$$

$$\dot{H}_m = \frac{I_m}{a} \text{ при } y = \frac{d}{2}.$$

Следовательно,

$$\tilde{M}_1 = \frac{I_m}{a} \frac{e^{\frac{\tilde{p}d}{2}}}{1 - e^{-2\tilde{p}b}};$$

$$\tilde{M}_2 = -\frac{I_m}{a} \frac{e^{-\tilde{p}\left(\frac{d}{2} + 2b\right)}}{1 - e^{-2\tilde{p}b}}.$$

Напряженность магнитного поля в правом проводе

$$\dot{H}_m = \frac{I_m}{a} \frac{1}{1 - e^{-2\tilde{p}b}} \left\{ e^{-\tilde{p}\left(y - \frac{d}{2}\right)} - e^{\tilde{p}\left(y - \frac{d}{2} - 2b\right)} \right\}.$$

Плотность тока

$$\delta_m = \frac{I_m}{a} \frac{\tilde{p}}{e^{-2\tilde{p}b} - 1} \left\{ e^{-\tilde{p}\left(y - \frac{d}{2}\right)} + e^{\tilde{p}\left(y - \frac{d}{2} - 2b\right)} \right\}.$$

На рис. 6-10 показана кривая δ_m в функции от y .

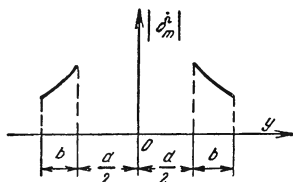


Рис. 6-10. Распределение плотности тока.

Электромагнитная волна проникает внутрь проводника из диэлектрика и затухает в направлении распространения. Плотность тока у внутренней поверхности ленты $\left(y = \frac{d}{2}\right)$ больше, чем у

наружной $\left(y = \frac{d}{2} + b\right)$. Для лево-

го провода наибольшая плот-

ность тока будет при $y = -\frac{d}{2}$, наименьшая при $y = -\frac{d}{2} - b$.

Внутреннее сопротивление линии на единицу длины можно найти по формуле

$$Z_{\text{овн}} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m a} = \frac{\delta_m}{\gamma a \dot{H}_m} = \frac{\tilde{p}}{\gamma a} \text{cth } \tilde{p}b = R_0 + j\omega L_{\text{овн}}.$$

Так как магнитное поле между проводами однородное, то

$$\omega L_{\text{вш}} = x_{\text{вш}} = \omega \frac{\Phi_{\text{мвш}}}{I_m}.$$

Магнитный поток

$$\dot{\Phi}_{\text{мвш}} = \mu_a \dot{H}_{\text{мвш}} d = \mu_a \frac{Id}{a} \dot{I}_m.$$

Следовательно,

$$x_{\text{вш}} = \omega \mu_a \frac{Id}{a}.$$

Полное сопротивление ленточной линии на единицу длины равно:

$$Z_0 = Z_{\text{овн}} + jx_{\text{вн}}.$$

6-7. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

6-1. Вывести формулу для определения величины активного сопротивления цилиндрического проводника с учетом поверхностного эффекта, пользуясь теоремой Умова — Пойнтинга. Длина провода l , радиус a , частота тока $\omega = 2\pi f$, удельная проводимость материала γ , магнитная проницаемость μ .

6-2. Определить активное сопротивление ленточного проводника при частоте $\omega = 10^5$ 1/сек. Длина провода $l = 100$ м; сечение $S = 2 \times 0,1$ см². Удельная проводимость материала $\gamma = 56 \cdot 10^6$ сим/м. Чему равно сопротивление того же проводника при постоянном токе?

О т в е т:

$949 \cdot 10^{-4}$ ом; $893 \cdot 10^{-4}$ ом.

6-3. Провода ленточной линии имеют сечение $2 \times 0,1$ см². Длина линии 100 м. Определить активное сопротивление линии на 1 м длины, если расстояние между лентами 1 мм, а частота переменного тока $\omega = 10^5$ 1/сек.

О т в е т:

$3,14 \cdot 10^{-3}$ ом/м.

6-4. По цилиндрическому медному проводнику круглого сечения протекает ток с частотой ω . Радиус провода $a = 1$ см, удельная проводимость $\gamma = 56 \cdot 10^6$ сим/м; магнитная проницаемость $\mu = 1$. Определить активное сопротивление и внутреннюю индуктивность на единицу провода для трех значений частоты: $\omega = 314$ 1/сек; $\omega = 10^3$ 1/сек; $\omega = 10^4$ 1/сек, а также при постоянном токе.

О т в е т: $5,85 \cdot 10^{-5}$ ом/м; $4,98 \cdot 10^{-8}$ гн/м;

$6,95 \cdot 10^{-5}$ ом/м; $4,5 \cdot 10^{-8}$ гн/м;

$10,4 \cdot 10^{-5}$ ом/м; $1,67 \cdot 10^{-8}$ гн/м;

$5,7 \cdot 10^{-5}$ ом/м; $5 \cdot 10^{-8}$ гн/м.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

ВОЛНОВОДЫ И ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

7-1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

В радиотехнических устройствах для передачи энергии от источника к антенне или от антенны к приемнику в диапазоне низких частот (метровые волны) используют двухпроводные линии. Часть передаваемой энергии тратится в линии на тепловые потери и на излучение. С увеличением частоты потери энергии в линии растут. Поэтому в диапазоне высоких частот (дециметровые волны) двухпроводные линии заменяются коаксиальными. Электромагнитное поле заключено внутри такой линии, и поэтому потерь на излучение нет. Тепловые потери в коаксиальной линии с увеличением частоты растут, во-первых, вследствие увеличения активного сопротивления из-за более резкого проявления поверхностного эффекта, во-вторых, из-за нагревания изоляционных прокладок, поддерживающих внутренний проводник кабеля.

В области сантиметровых волн для передачи энергии можно применять волноводы, которые представляют собой металлические трубы; поэтому в волноводе, так же как и в коаксиальной линии, практически нет потерь на излучение. Тепловые же потери в волноводе меньше, так как в нем нет центрального проводника. Благодаря простоте конструкции и малым потерям волновода нашли широкое применение в радиотехнических устройствах сверхвысоких частот. Как будет показано ниже, передача энергии по волноводу без значительного затухания возможна только при частотах выше некоторой предельной, которая называется «к р и т и ч е с к о й ч а с т о т о й в о л н о в о д а». Критическая частота зависит от размеров и формы волновода. Чем меньше сечение волновода, тем выше критическая частота. Для того чтобы размеры волновода получились практически приемлемыми, частота сигнала, передаваемого по волноводу, должна быть очень высокой, обычно не ниже 10^9 гц.

Волноводы служат не только для передачи сигналов очень высокой частоты. На их основе строится ряд элементов электрических схем, например в фильтрах для разделения различных каналов связи, в усилителях и т. п.

Исследованию электромагнитных процессов в волноводах посвящены работы многих советских ученых: Б. А. Введенского, А. Б. Аренберга, С. М. Рытова и др.

7-2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД

Рассмотрим процесс распространения электромагнитных волн в волноводах прямоугольного сечения. Для упрощения расчетов будем считать волновод идеальным, т. е. прием проводимость стенок металлической трубы равной бесконечности, а проводимость диэлектрика, заполняющего трубу (обычно воздух), равной нулю. Магнитную и диэлектрическую проницаемости диэлектрика $\mu = 1$ и ϵ будем считать постоянными и заданными. Расположение координатных осей и заданные размеры поперечного сечения волновода изображены на рис. 7-1.

Уравнения Максвелла для диэлектрика, заполняющего трубу, запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

Плотность тока проводимости и плотность объемных зарядов приняты равными нулю.

Пусть электромагнитные волны, возбуждаемые в волноводе, изменяются во времени по синусоидальному закону с частотой $\omega = 2\pi f$. Тогда при установившемся процессе векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть записаны в комплексной форме. Будем считать волновод бесконечно длинным и однородным. В этом случае волны будут распространяться без отражения. Так как волновод идеальный, то амплитуды проекций векторов поля не должны изменяться в направлении распространения (в нашем случае вдоль оси z). Это условие будет выполнено, если коэффициент распространения $\Gamma = \alpha + j\beta$ будет мнимым числом. Мгновенное значение любой из проекций векторов поля запишется следующим образом:

$f(x, y) \sin(\omega t - \beta z + \xi) = \text{Im} \{ \dot{f}_m e^{-\Gamma z} e^{j\omega t} \}$,
где $f(x, y)$ — модуль соответствующей комплексной амплитуды $\dot{f}_m$; ξ — ее аргумент, зависящий от x и y .

Развернув уравнения Максвелла в прямоугольной декартовой системе координат, подставив вместо векторов поля их комплексные выражения и сократив на $e^{-\Gamma z}$ и $e^{j\omega t}$, получим:

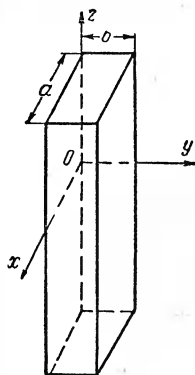


Рис. 7-1. Прямоугольный волновод.

$$\frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} + \Gamma \dot{H}_{ym} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{xm};$$

$$-\Gamma \dot{H}_{xm} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{ym};$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{xm}}{\partial y} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{zm};$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} + \Gamma \dot{E}_{ym} = -j\omega \mu_0 \dot{H}_{xm};$$

$$-\Gamma \dot{E}_{xm} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} = -j\omega \mu_0 \dot{H}_{ym};$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial y} = -j\omega \mu_0 \dot{H}_{zm}.$$

Если выразить $\dot{H}_{xm}$, $\dot{H}_{ym}$, $\dot{E}_{xm}$ и $\dot{E}_{ym}$ через $\dot{H}_{zm}$ и $\dot{E}_{zm}$ и обозначить $\epsilon_a \mu_0 = 1/v^2$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \left(\Gamma \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} - j\omega \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} \right); \\ \dot{E}_{ym} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \left(-\Gamma \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} + j\omega \mu_0 \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_{xm} &= \frac{1}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \left(j\omega \epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial y} - \Gamma \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial x} \right); \\ \dot{H}_{ym} &= -\frac{1}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \left(j\omega \epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

Подставив найденные проекции, получим два уравнения с неизвестными $\dot{E}_{zm}$ и $\dot{H}_{zm}$.

Для определения $\dot{E}_{zm}$ и $\dot{H}_{zm}$ необходимо решить уравнения:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) \dot{E}_{zm} = 0; \quad (7-2)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) \dot{H}_{zm} = 0. \quad (7-3)$$

Каждую из величин $\dot{E}_{zm}$ и $\dot{H}_{zm}$ можно определить одну независимо от другой. Общее решение задачи распространения электромагнитных волн в заданном направлении может быть получено суммированием результатов раздельного решения уравнений (7-2) и (7-3). Уравнения будут удовлетворены, если положить $\dot{H}_{zm} = 0$ и определить $\dot{E}_{zm}$ из уравнения (7-2); затем положить $\dot{E}_{zm} = 0$ и определить $\dot{H}_{zm}$ из уравнения (7-3).

По волноводу могут распространяться различного рода волны. Например, поперечные электрические (transverse electric) волны ТЕ, у которых вектор $\mathbf{E}$ не имеет составляющей в направлении распространения (в рассматриваемом случае вдоль оси z). Поперечные магнитные (transverse magnetic) волны ТМ, у которых вектор $\mathbf{H}$ не имеет составляющей в направлении распространения. Поперечные электромагнитные (transverse electromagnetic) волны ТЕМ, у которых оба вектора поля не имеют продольной составляющей, по волноводу распространяться не могут, так как при $E_z = 0$

и $H_z = 0$ по (7-1) все остальные проекции векторов поля также будут равны нулю.

Для возбуждения требуемого типа волн необходимо в начале волновода поместить устройство, которое создает поле соответствующего строения. Таким устройством может служить, например, небольшой стержень или рамка, присоединенные к источнику энергии.

7-3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ТЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Если поперечная электрическая волна ТЕ распространяется вдоль оси z , то проекция напряженности электрического поля на эту ось должна равняться нулю: $E_z = 0$. Решив уравнение (7-3), определим проекцию $\dot{H}_{zm}$. Предположим, что искомое решение равно произведению двух функций, одна из которых зависит только от координаты x , другая — только от y ; $\dot{H}_{zm} = f_1(x)f_2(y) = f_1f_2$. Подставив это произведение в дифференциальное уравнение, получим:

$$f_2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + f_1 \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) f_1 f_2 = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на произведение $f_1 f_2$; тогда

$$\frac{1}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = - \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) = \text{const}.$$

Уравнение будет удовлетворено, если положить:

$$\frac{1}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = -M = \text{const};$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = -N = \text{const},$$

причем должно соблюдаться равенство $M + N = \frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2$.

Решив полученные уравнения, найдем функции:

$$f_1 = f_1(x) = \tilde{K} \cos(\sqrt{M}x + \xi_1),$$

$$f_2 = f_2(y) = \tilde{K}_2 \cos(\sqrt{N}y + \xi_2).$$

Функции записаны в тригонометрической форме, так как корни характеристических уравнений мнимые. Искомое решение примет вид:

$$\dot{H}_{zm} = f_1(x) f_2(y) = \tilde{K} \cos(\sqrt{M}x + \xi_1) \cos(\sqrt{N}y + \xi_2),$$

где $\tilde{K} = \tilde{K}_1 \tilde{K}_2$.

Зная $\dot{H}_{zm}$, находим:

$$\dot{E}_{xm} = \tilde{K} \frac{j\omega\mu_0 V N}{\omega^2 + \Gamma^2} \cos(\sqrt{M}x + \xi_1) \sin(\sqrt{N}y + \xi_2);$$

$$\dot{E}_{ym} = -\tilde{K} \frac{j\omega\mu_0 V M}{\omega^2 + \Gamma^2} \sin(\sqrt{M}x + \xi_1) \cos(\sqrt{N}y + \xi_2).$$

Определим постоянные ξ_1 , ξ_2 , M и N из граничных условий. Так как стенки волновода идеально проводящие, то касательные составляющие вектора $\vec{E}$ на них отсутствуют:

$$E_y = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = a;$$

$$E_x = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b.$$

Эти условия будут выполнены при

$$\xi_1 = 0, \quad M = \frac{m^2\pi^2}{a^2},$$

$$\xi_2 = 0, \quad N = \frac{n^2\pi^2}{b^2},$$

где m и n — любые положительные целые числа 0, 1, 2, 3, ..., независимые одно от другого.

Постоянную $\tilde{K}$ можно определить, задав, например, мощность, которая передается по волноводу.

Подставив значения постоянных интегрирования, получим значения всех проекций векторов поля для волны ТЕ:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= \tilde{K} \frac{\omega\mu_0 e^{j\frac{\pi}{2}}}{\omega^2 + \Gamma^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \dot{E}_{ym} &= \tilde{K} \frac{\omega\mu_0 e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\omega^2 + \Gamma^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi x}{a}; \\ \dot{E}_{zm} &= 0; \\ \dot{H}_{xm} &= \tilde{K} \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ \dot{H}_{ym} &= \tilde{K} \frac{\Gamma}{\omega^2 + \Gamma^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \dot{H}_{zm} &= \tilde{K} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

Как видно из полученных уравнений, проекции векторов поля равны нулю при $m = 0$ и $n = 0$. Поэтому наиболее простой волной TE_{mn} будет волна TE_{10} ($m = 1, n = 0$) или TE_{01} ($m = 0, n = 1$). В этих случаях вектор $\mathbf{E}$ имеет одну проекцию, вектор $\mathbf{H}$ — две проекции. В случае более сложных волн ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$) вектор $\mathbf{E}$ имеет две проекции, вектор $\mathbf{H}$ — три проекции.

Активная мощность, передаваемая по волноводу, определяется выражением

$$P = \frac{1}{2} \int_S \bar{\Pi}_m d\bar{S} = \frac{1}{2} \int_S \Pi_{zm} dx dy = \\ = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} (E_{xm} H_{ym} - E_{ym} H_{xm}) dx dy.$$

7-А. КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА И ПАРАМЕТРЫ ВОЛНЫ В ВОЛНОВОДЕ

При решении уравнений Максвелла было получено соотношение $M + N = \frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2$. Подставив найденные выше значения постоянных M и N , определим величину коэффициента распространения:

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

Эта величина будет мнимой при условии

$$\frac{\omega^2}{v^2} > \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2},$$

или

$$\omega > \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Частота, при которой коэффициент распространения обращается в нуль, называется критической. Она равна:

$$\omega_{кр} = 2\pi f_{кр} = \pi v \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Соответственно

$$f_{кр} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_0}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Сигнал может распространяться по идеальному волноводу без затухания только при частоте выше критической. При частоте ниже критической коэффициент распространения будет вещественным числом и амплитуда проекций векторов поля затухает в направлении распространения. Вол-

новое состояние в волноводе невозможно. Таким образом, волновод обладает свойствами электрического фильтра, пропуская одни частоты ($\omega > \omega_{кр}$) и запирая путь для других ($\omega < \omega_{кр}$).

Рассмотрим соотношения при частоте $\omega > \omega_{кр}$. В этом случае коэффициент распространения — мнимое число: $\Gamma = j\beta_{mn}$. Величина

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2} - \frac{n^2\pi^2}{b^2}} = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 - \omega_{кр}^2}$$

называется коэффициентом фазы и представляет собой действительное число.

На рис. 7-2 изображена кривая зависимости β_{mn} от частоты. Пунктирная кривая изображает зависимость коэффициента фазы от частоты в неограниченном идеальном диэлектрике.

Зная коэффициент распространения, можно записать окончательно выражения для мгновенных значений проекций векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0; \\ E_x &= K \frac{\omega\mu_0}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{n\pi}{b} \times \\ &\times \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \left(\omega t - \beta_{mn}z + \frac{\pi}{2} \right); \\ E_y &= K \frac{\omega\mu_0}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{m\pi}{a} \times \\ &\times \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \left(\omega t - \beta_{mn}z - \frac{\pi}{2} \right); \\ H_x &= K \frac{\beta_{mn}}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{m\pi}{a} \times \\ &\times \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \left(\omega t - \beta_{mn}z + \frac{\pi}{2} \right); \\ H_y &= K \frac{\beta_{mn}}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{n\pi}{b} \times \\ &\times \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \left(\omega t - \beta_{mn}z + \frac{\pi}{2} \right); \\ H_z &= K \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} \times \\ &\times \sin (\omega t - \beta_{mn}z). \end{aligned} \right\} \quad (7-5)$$

Начальная фаза постоянной $\tilde{K}$ принята равной нулю. Зная коэффициент фазы, легко найти длину волны и фазовую скорость:

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_{mn}}.$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}}.$$

Если бы сигнал с частотой $\omega = 2\pi f$ распространялся в неограниченном идеальном диэлектрике, то длина волны была равна:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\epsilon_a \mu_0}}.$$

Обозначим

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}$$

и назовем ее критической длиной волны. Она имеет порядок периметра сечения волновода.

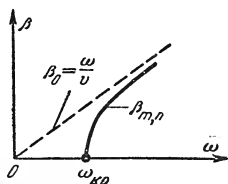


Рис. 7-2. Зависимость длины волны в волноводе и в неограниченной среде от частоты.

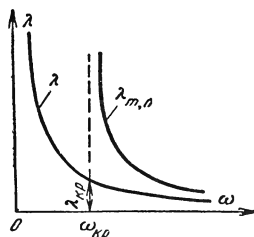


Рис. 7-3. Зависимость коэффициента фазы волны в волноводе от частоты.

Длину волны в волноводе можно записать следующим образом:

$$\lambda_{mn} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_{кр}^2}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}}.$$

Кривые зависимости λ_{mn} и λ от частоты изображены на рис. 7-3. Там же показана $\lambda_{кр}$. Длина волны в волноводе больше, чем длина волны в неограниченном пространстве.

Фазовая скорость волны

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{f_{кр}^2}{f^2}}}.$$

Фазовая скорость зависит от частоты; следовательно, в волноводе имеет место дисперсия, несмотря на то что диэлектрик идеальный и в волноводе нет потерь энергии.

На рис. 7-4 изображена кривая зависимости фазовой скорости от частоты. При частоте $\omega = \omega_{кр}$ фазовая скорость равна бесконечности, а при $\omega > \omega_{кр}$ фазовая скорость больше, чем скорость распространения электромагнитной энергии в неограниченном идеальном диэлектрике. При частоте $\omega < \omega_{кр}$ фазовая скорость является мнимой величиной, т. е. волновой процесс при такой частоте возбудить нельзя.

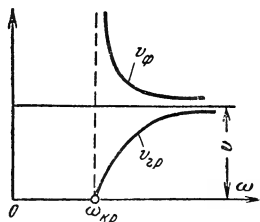


Рис. 7-4. Зависимость фазовой скорости и групповой скорости от частоты.

Надо помнить, что фазовая скорость волны и скорость распространения электромагнитной энергии в волноводе совершенно различные величины. Первая из них представляет собой скорость перемещения в пространстве точек, имеющих одинаковую фазу колебания. Поэтому она может быть сколь угодно большой. Скорость же распространения электромагнитной энергии — физическая величина и поэтому не может быть больше скорости света в пустоте.

Для характеристики быстроты распространения сигнала по волноводу пользуются выражением групповой скорости (5-10)

$$v_{гр} = \frac{1}{\frac{d\beta_{mn}}{d\omega}}.$$

Так как

$$\frac{d\beta_{mn}}{d\omega} = \frac{\frac{\omega}{v^3}}{\beta_{mn}} = \frac{v_{\phi}}{v^2},$$

то

$$v_{гр} = \frac{v^2}{v_{\phi}}.$$

Кривые зависимости групповой и фазовой скоростей от частоты показаны на рис. 7-4. При $\omega = \omega_{кр}$ групповая

скорость равна нулю. При $\omega > \omega_{кр}$ она меньше скорости распространения электромагнитной энергии в неограниченном идеальном диэлектрике:

$$v_{гр} < v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_0}}.$$

7.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ TE_{10} В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

В волноводе можно возбудить волны различных типов. Наиболее простой будет волна TE_{10} , которую можно получить, поместив металлический стержень в начале волновода, как показано на рис. 7-5. Переместив стержень (рис. 7-6), можно возбудить волну TE_{01} .

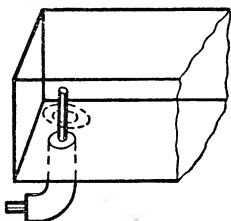


Рис. 7-5. Возбуждение волны TE в волноводе.

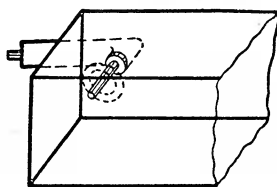


Рис. 7-6. Возбуждение волны TE_{01} в волноводе.

Стержень представляет собой продолжение центрального проводника коаксиального кабеля, который присоединен к источнику с синусоидальной э. д. с.

В случае волны TE_{10} при $m = 1$ и $n = 0$

$$\beta_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Напряженность электрического поля равна:

$$E = E_y = K \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \left(\omega t - \beta_{10} z - \frac{\pi}{2} \right).$$

Проекции напряженности магнитного поля

$$H_x = K \frac{\beta_{10} a}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \left(\omega t - \beta_{10} z + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_z = K \cos \frac{\pi x}{a} \sin (\omega t - \beta_{10} z).$$

Векторы поля не зависят от координаты y .

Вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости поперечного сечения волновода. Линии вектора $\mathbf{E}$ параллельны оси y . Они начинаются на одной стенке волновода и заканчиваются на противоположной. Плотность поверхностных зарядов на этих стенках легко получить из граничного условия

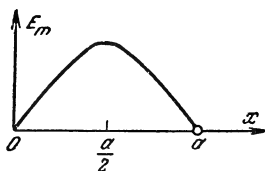


Рис. 7-7. Изменение амплитуды напряженности электрического поля по сечению волновода.

$$\sigma = D_n = \epsilon_a E_y = K \frac{a \omega \epsilon_a \mu_0}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \left(\omega t - \beta_{10} z - \frac{\pi}{2} \right).$$

В сечении, перпендикулярном направлению распространения z , мгновенные значения вектора $\mathbf{E}$ определяются ординатами стоячей волны, длина которой равна $2a$. Зависимость E_m от координаты x показана на рис. 7-7. При $x = a/2$ амплитуда вектора $\mathbf{E}$ достигает наибольшего значения $K \frac{\omega \mu_0 a}{\pi} = 2\mu_0 K f a$, которое зависит от постоянной K , частоты и ширины волновода.

В направлении распространения мгновенные значения напряженности электрического поля определяются ординатами бегущей волны длиной

$$\lambda_{10} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Фазовая скорость волны

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta_{10}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Критическая частота для волны TE_{10} , равная $f_{кр} = v/2a$, зависит от ширины волновода.

На рис. 7-8 изображены кривые зависимости E от z при $x = a/2$ в различные моменты времени t .

Линии вектора $\mathbf{H}$ лежат в плоскостях, параллельных плоскости zOx . Они представляют собой замкнутые кривые. При $x = 0$ и $x = a$ вектор $\mathbf{H}$ направлен параллельно оси z , причем его амплитуда $H_m = K$. При $x = a/2$ вектор $\mathbf{H}$ направлен параллельно оси x и амплитуда его $H_m = K \frac{\beta_{10} a}{\pi}$. В любой точке сечения волновода напряженность поля

определится из выражения

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_z^2}.$$

На рис. 7-9 изображены кривые зависимости H_{xm} и H_{zm} от координаты x . На рис. 7-10 изображена картина поля для различных волн TE_{mn} .

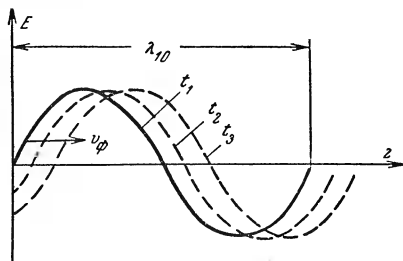


Рис. 7-8. Бегущая волна в волноводе.

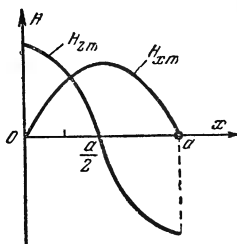


Рис. 7-9. Изменение амплитуд проекций напряженности магнитного поля по сечению волновода.

Мгновенное значение мощности, передаваемой по волноводу,

$$p = \int_S \bar{\Pi} dS = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=b} \Pi_z dx dy = K^2 \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^2 b}{\pi^2} \times \\ \times \cos^2(\omega t - \beta_{10} z) \int_{x=0}^{x=a} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = K^2 \frac{\omega \mu_0 \beta_{10} a^3 b}{2\pi^2} \cos^2(\omega t - \beta_{10} z).$$

Среднее значение мощности за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = K^2 \frac{\omega \beta_{10} \mu_0 a^3 b}{4\pi^2}.$$

Задаваясь величиной, передаваемой по волноводу мощности P , получим постоянную

$$K = 2\pi \sqrt{\frac{P}{\omega \beta_{10} \mu_0 a^3 b}}.$$

С увеличением мощности P растет значение постоянной K , а следовательно, растет и амплитуда напряженности электрического поля E . Возникает возможность пробоя

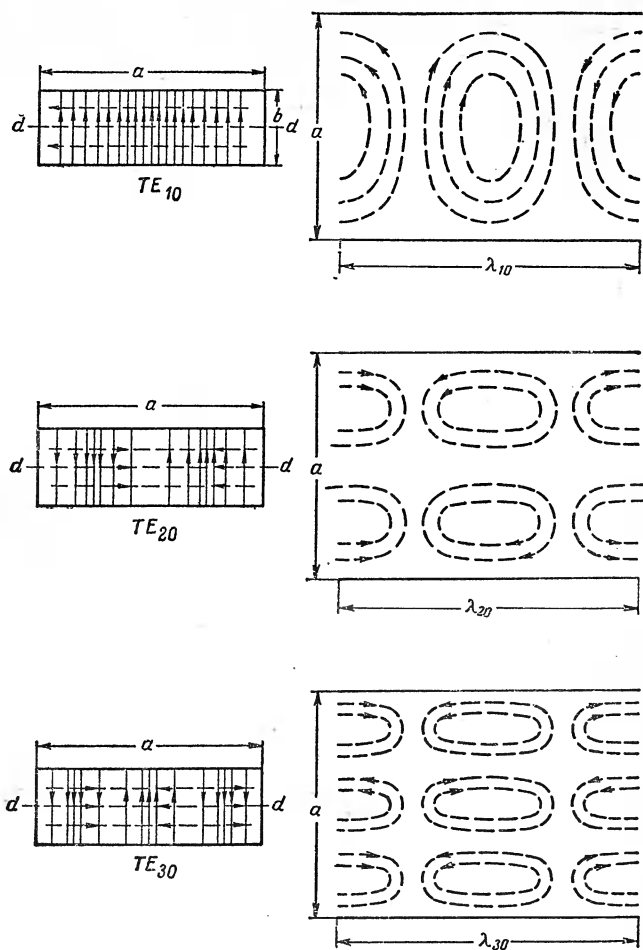
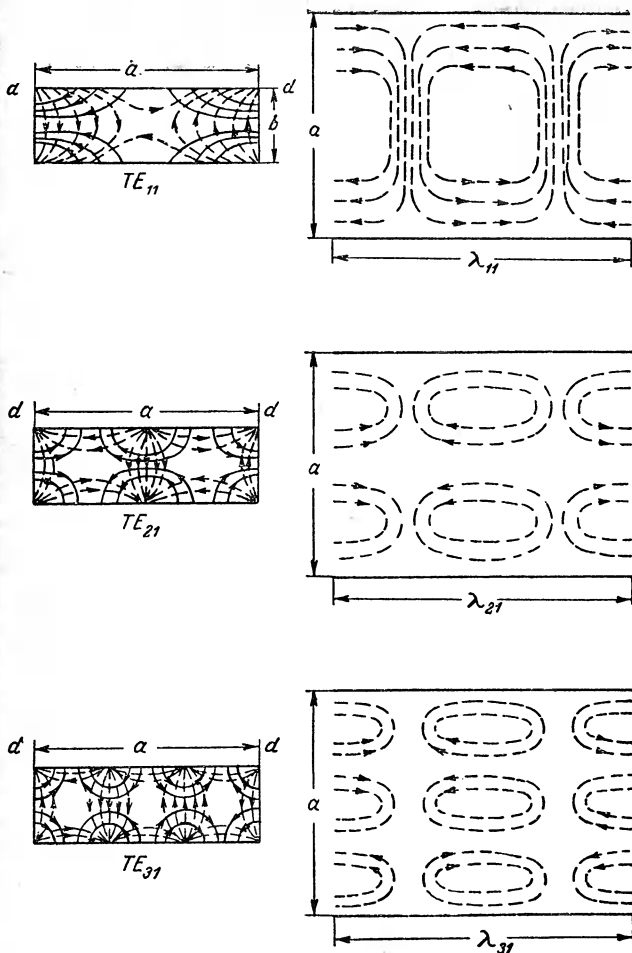


Рис. 7-10. Картины поля в прямоугольном волноводе. Волны сплошными —

диэлектрика. Если волновод предназначен для работы на больших высотах, где давление низко и благоприятны условия для ионизации (например, радиолокационные устройства на самолетах), вероятность пробоя увеличивается. Все это обуславливает ограничение величины передаваемой по волноводу мощности.



ТЕ. Пунктирными линиями показаны линии вектора $\mathbf{H}$, линии вектора $\mathbf{E}$.

7-6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ МАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ТМ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Если поперечная магнитная волна ТМ распространяется вдоль оси z , проекция напряженности поля на эту ось должна равняться нулю: $H_z = 0$.

Решив уравнение (7-2), определим проекцию $\dot{E}_{zm}$. Решение аналогично решению уравнения (7-3), приведенному в предыдущем параграфе. Окончательно получим:

$$\dot{E}_{zm} = \tilde{K} \sin(\sqrt{M}x + \xi_1) \sin(\sqrt{N}y + \xi_2),$$

причем $M + N = \frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2$.

Граничные уравнения запишутся следующим образом (рис. 7-10): при $x = 0$ и $x = a$ $E_{zm} = 0$; при $y = 0$ и $y = b$ $E_{zm} = 0$. Это дает $\xi_1 = 0$; $\xi_2 = 0$; $M = m^2\pi^2/a^2$; $N = n^2\pi^2/b^2$.

Величины m и n представляют собой целые положительные числа 0, 1, 2, ..., независимые одно от другого. $\tilde{K}$ — произвольная постоянная.

Таким образом,

$$\dot{E}_{zm} = \tilde{K} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Остальные проекции векторов поля равны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{xm} &= \tilde{K} \frac{j\beta_{mn}}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \dot{E}_{ym} &= -\tilde{K} \frac{j\beta_{mn}}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ H_{xm} &= \tilde{K} \frac{j\omega\epsilon_a}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}; \\ H_{ym} &= -\tilde{K} \frac{j\omega\epsilon_a}{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \dot{H}_{zm} &= 0 \text{ по условию.} \end{aligned} \right\} \quad (7-6)$$

При $m = 0$, $n = 0$, а также при $m = 0$, $n = 1$ или $m = 1$, $n = 0$ все проекции векторов поля обращаются в нуль. Поэтому у наиболее простой волны TM_{mn} числа m и n должны быть равны единице.

Картина поля для волны TM_{11} изображена на рис. 7-11.

Выражения для критической частоты, критической длины волны, коэффициента распространения, коэффициента фазы, фазовой скорости и групповой скорости такие же, как и

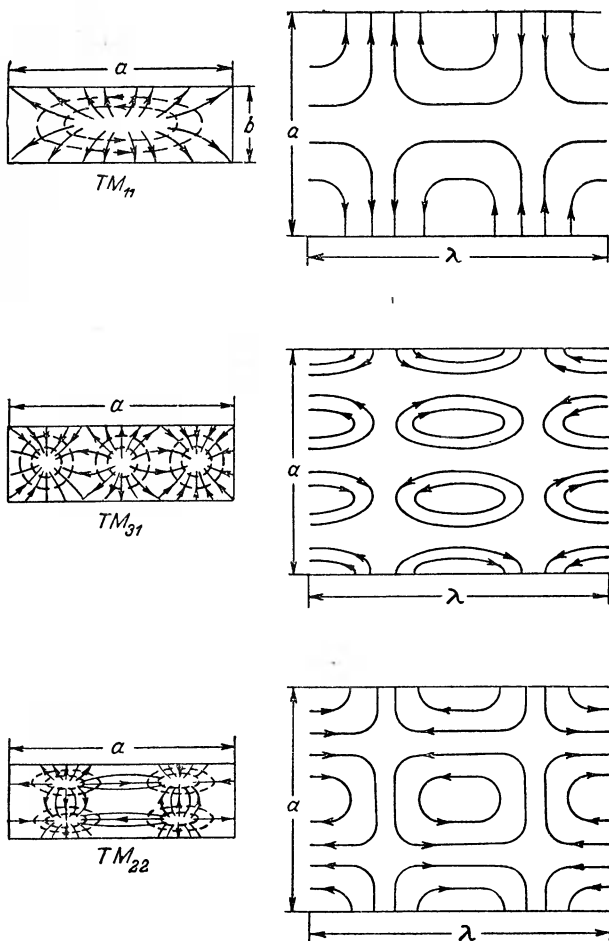


Рис. 7-11. Картины поля в прямоугольном волноводе. Волны ТМ.

в случае волны TE_{mn} . Все эти величины зависят от размеров волновода, проницаемости диэлектрика, заполняющего волновод, и от типа волны, т. е. значения чисел m и n .

На рис. 7-11 показана картина поля в прямоугольном волноводе для волн типа TM_{31} и TM_{22} .

7-7. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНОВОДЫ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Наряду с волноводами прямоугольного сечения применяются также цилиндрические волноводы круглого сечения. Векторы поля в таком волноводе определяются решением уравнений Максвелла, которые в данном случае удобнее записать в цилиндрической системе координат. Пусть координатные оси направлены так, как это показано на рис. 7-12. Предположим, что волновод идеальный и проводимость стенок трубы радиуса a равна бесконечности. Пусть диэлектрик, заполняющий трубу, также идеальный

$\gamma_d = 0$. Диэлектрическая проницаемость $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$ задана и постоянна. Так же как и в случае волновода прямоугольного сечения, будем считать, что векторы поля изменяются во времени по синусоидальному закону, что в волноводе нет отражения и в нем распространяется только прямая волна в направлении оси z . Тогда любую проекцию векторов поля можно записать следующим образом.

Например,

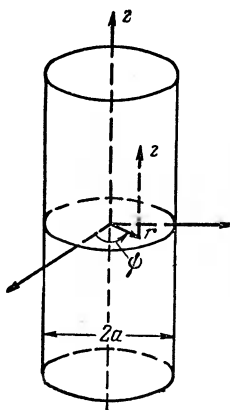
$$E_r = \text{Im} \{ \dot{E}_{rm} e^{-\Gamma z} e^{j\omega t} \},$$

где комплексная амплитуда $\dot{E}_{rm}$ от координаты z и времени t не зависит.

Рис. 7-12. Цилиндрический волновод круглого сечения.

Так как волновод идеальный, то амплитуда векторов поля не должна меняться в направлении распространения волны. Следовательно, коэффициент распространения должен быть мнимым числом $\Gamma = j\beta$.

Раскрыв уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат (приложение 3) и подставив вместо мгновенных значений проекций векторов поля соответствующие



комплексные выражения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial \psi} + \Gamma \dot{H}_{\psi m} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_{rm}; \\ -\Gamma \dot{H}_{rm} - \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial r} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_{\psi m}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (\dot{H}_{\psi m} r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{rm}}{\partial \psi} &= j\omega \varepsilon_a \dot{E}_{zm}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial \psi} + \Gamma \dot{E}_{\psi m} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{rm}; \\ -\Gamma \dot{E}_{rm} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{\psi m}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (\dot{E}_{\psi m} r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{rm}}{\partial \psi} &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{zm}. \end{aligned} \right\} \quad (7-7)$$

Как и в случае прямоугольного волновода, рассмотрим в отдельности распространение поперечной магнитной ТМ и поперечной электрической ТЕ волн.

7-8. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ МАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ТМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Если вдоль волновода распространяется поперечная магнитная волна ТМ, то проекция вектора напряженности магнитного поля в направлении распространения должна равняться нулю.

Подставив в уравнение (7-7) $\dot{H}_{zm} = 0$ и выразив проекции векторов поля через проекцию $\dot{E}_{zm}$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{rm} &= -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r}; \\ \dot{E}_{\psi m} &= -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial \psi}; \\ \dot{H}_{rm} &= \frac{j\omega \varepsilon_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial \psi}; \\ \dot{H}_{\psi m} &= -\frac{j\omega \varepsilon_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r}, \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

где

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Уравнение, по которому определится $\dot{E}_{zm}$, примет вид:

$$r^2 \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{zm}}{\partial \psi^2} + r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) \dot{E}_{zm} = 0.$$

Положив $\dot{E}_{zm} = f_1(r) f_2(\psi) = f_1 f_2$,
где f_1 и f_2 — неизвестные пока функции, получим:

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{r}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial r} + r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) + \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \psi^2} = 0.$$

Первые три члена этого уравнения зависят только от координаты r . Последний член зависит только от координаты ψ . Так как сумма всех четырех членов при всех значениях r и ψ должна равняться нулю, то необходимо, чтобы

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{d\psi^2} = \text{const} = -p^2;$$

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{r}{f_1} \frac{df_1}{dr} + r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) = \text{const} = p^2,$$

где p — произвольная постоянная.

Решение первого уравнения можно записать следующим образом:

$$f_2 = \tilde{K}_1 \cos \psi,$$

где $\tilde{K}_1$ — постоянное комплексное число.

Второе уравнение представляет собой разновидность уравнения Бесселя. Его легко привести к каноническому виду, положив

$$r \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} = w.$$

Тогда

$$dr = \frac{dw}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2}};$$

$$dr^2 = \frac{dw^2}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2}.$$

После замены переменной r новой переменной w , получим уравнение Бесселя p -го порядка:

$$\frac{d^2 f_1}{dw^2} + \frac{1}{w} \frac{df_1}{dw} + \left(1 - \frac{p^2}{w^2} \right) f_1 = 0.$$

Общее решение уравнения Бесселя следующее:

$$f_1 = \tilde{K}_2 J_p(w) + \tilde{K}_3 N_p(w);$$

где $\tilde{K}_3$ и $\tilde{K}_2$ — постоянные величины; $J_p(w)$ — функция Бесселя первого рода p -го порядка; $N_p(w)$ — функция Неймана того же порядка (ее называют также функцией Бесселя второго рода).

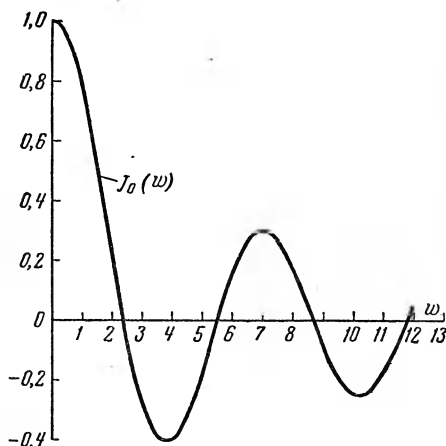


Рис. 7-13. График функции Бесселя нулевого порядка.

Известно, что $|N_p(w)|_{w=0} = \infty$. Так как векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — величины конечные, то решение не должно содержать функций Неймана, что возможно при $\tilde{K}_3 = 0$.

Следовательно,

$$f_1 = \tilde{K}_2 J_p(w),$$

а искомая проекция

$$\dot{E}_{zm} = f_1 f_2 = \tilde{K} J_p \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right) \cos p\psi.$$

Здесь $\tilde{K} = \tilde{K}_1 \tilde{K}_2$; Γ и p — постоянные величины, пока еще неизвестные. Определим их. Если угол ψ изменить на 2π радиан, то векторы поля не должны меняться. Это возможно только в том случае, если постоянная p равна целому числу $n = 0, 1, 2 \dots$ Тогда

$$\dot{E}_{zm} = \tilde{K} J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right) \cos n\psi.$$

Так как волновод идеальный, то на стенках трубы при $r = a$ проекция E_z должна равняться нулю. Следовательно,

$$J_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a\right) = 0.$$

На рис. 7-13 и 7-14 изображены функции Бесселя нулевого и первого порядков. Значения аргумента ω , при которых функция $J_n(\omega)$ обращается в нуль, называются корнями функции. Обозначим их ω_{mn} . Индекс $m = 1, 2 \dots$ указывает очередность корня. Значок

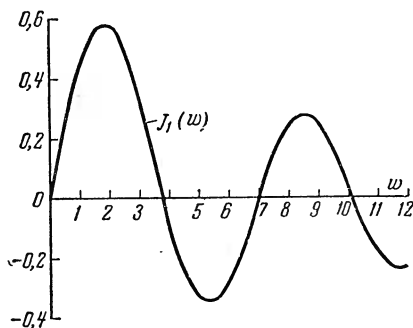


Рис. 7-14. График функции Бесселя первого порядка.

$n = 0, 1, 2 \dots$ соответствует порядку функции Бесселя, корнем которой является ω_{mn} . Функция $J_n(\omega)$ многократно обращается в нуль.

Значения нескольких первых корней функции следующие:

m	n		
	0	1	2
1	$\omega_{10} = 2,404$	$\omega_{11} = 3,832$	$\omega_{12} = 5,136$
2	$\omega_{20} = 5,520$	$\omega_{21} = 7,016$	$\omega_{22} = 8,417$
3	$\omega_{30} = 8,654$	$\omega_{31} = 10,173$	$\omega_{32} = 11,620$

На практике чаще всего пользуются волной, соответствующей первому корню.

Экстремальные значения функции Бесселя нулевого и первого порядков и соответствующие им значения аргумента ω следующие:

Очередность экстремума	Максимумы				Минимумы			
	$J_0(\omega)$	ω	$J_1(\omega)$	ω	$J_0(\omega)$	ω	$J_1(\omega)$	ω
1	1,000	0	0,582	1,841	-0,403	3,832	-0,346	5,331
2	0,300	7,016	0,273	8,536	-0,250	10,174	-0,233	11,706

Зная значения корней ω_{mn} функции Бесселя, можно найти постоянную Γ (коэффициент распространения), пользуясь соотношением

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a = \omega_{mn},$$

откуда

$$\Gamma = \sqrt{\frac{\omega_{mn}^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

Как было отмечено выше, для того чтобы волна распространялась по волноводу без затухания, необходимо чтобы коэффициент распространения был мнимым $\Gamma = j\beta_{mn}$, т. е. ω_{mn}/a должно быть меньше ω/v . Тогда

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega_{mn}^2}{a^2}}.$$

Частота, при которой $\beta_{mn} = 0$, называется критической. Она равна:

$$\omega_{кр} = 2\pi f_{кр} = \frac{\omega_{mn} v}{a}.$$

Распространение волны в идеальном волноводу без затухания возможно только при частотах $\omega > \omega_{кр}$. Что касается постоянной K , то она определится, если будет задана, например, мощность, передаваемая по волноводу, или амплитуда одного из векторов поля в определенной точке.

Чтобы записать окончательное выражение проекции E_z , подставим значение Γ в выражение аргумента функции

Бесселя:

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r = \frac{\omega_{mn}}{a} r.$$

Тогда

$$\dot{E}_{zm} = \tilde{K} J_n \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \cos n\psi.$$

Мгновенное значение

$$E_z = \text{Im} \{ \dot{E}_{zm} e^{-\Gamma z} e^{j\omega t} \} = K J_n \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \cos n\psi \sin(\omega t - \beta_{mn} z),$$

причем аргумент комплексного числа $\tilde{K}$ принят равным нулю. Остальные проекции векторов поля будут следующими:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= K \frac{\beta_{mn} a}{\omega_{mn}} J_n' \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \cos n\psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right); \\ E_\psi &= K \frac{\beta_{mn} a^2 n}{\omega_{mn}^2 r} J_n \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \sin n\psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right); \\ H_r &= K \frac{\varepsilon_a \omega a^2 n}{\omega_{mn}^2 r} J_n \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \sin n\psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right); \\ H_\psi &= K \frac{\varepsilon_a \omega a}{\omega_{mn}} J_n' \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) \cos n\psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7-9)$$

Здесь

$$J_n' \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right) = \frac{d J_n \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right)}{d \left(\frac{\omega_{mn}}{a} r \right)}$$

Параметры волны определяются по формулам:

длина волны в волноводе $\lambda_{mn} = 2\pi/\beta_{mn}$;

фазовая скорость $v_\phi = \omega/\beta_{mn}$;

групповая скорость $v_{гр} = \frac{v^2}{v_\phi} = \frac{v^2 \beta_{mn}}{\omega}$.

Они получились такими же, как и в случае волновода прямоугольного сечения, только коэффициент фазы β_{mn} (волновое число) выражается иначе:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega_{mn}^2}{a^2}}.$$

При заданных рабочей частоте ω и радиусе волновода a коэффициент фазы β_{mn} определяется типом волны. Наиболее простой будет волна TM_{10} .

7-9. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ TM_{10} В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Если $m = 1$, $n = 0$, то коэффициент фазы при заданной частоте ω будет равен $\beta_{10} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{2,405^2}{a^2}}$. Критическая частота $\omega_{кр} = 2,405 v/a$.

Критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{2\pi v}{\omega_{кр}} = \frac{2\pi a}{2,405} \approx 2,615 a.$$

Вектор $\mathbf{E}$ будет иметь две проекции [формула (7-9)]:

$$E_r = K \frac{\beta_{10} a}{2,405} J_1 \left(\frac{2,405}{a} r \right) \cos(\omega t - \beta_{10} z);$$

$$E_z = K J_0 \left(\frac{2,405}{a} r \right) \sin(\omega t - \beta_{10} z).$$

Модуль вектора напряженности электрического поля

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_z^2}.$$

Вектор $\mathbf{H}$ будет иметь только одну проекцию

$$H_\phi = H = K \frac{\varepsilon_a \omega a}{2,405} J_1 \left(\frac{2,405}{a} r \right) \cos(\omega t - \beta_{10} z).$$

Линии вектора $\mathbf{H}$ — окружности с центром на оси волновода.

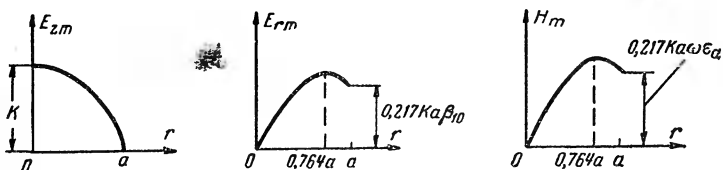


Рис. 7-15. Изменение амплитуд проекций векторов поля. Волна TM_{10} .

На рис. 7-15 показаны кривые $E_{zm} = f_1(r)$, $E_{rm} = f_2(r)$, $H_m = f_3(r)$.

Продольная составляющая E_z вектора напряженности электрического поля будет иметь наибольшую амплитуду на оси волновода ($r = 0$), и эта амплитуда будет равна K . На стенках трубы ($r = a$) по условию $E_z = 0$.

Радиальная составляющая E_r напряженности электрического поля имеет наибольшую амплитуду на расстоянии $r_1 < a$ от оси. Функция $J_1 \left(\frac{2,405}{a} r \right)$ при $r = r_1$ должна

иметь максимальное значение. Первый максимум этой функции, равный 0,582, будет иметь место при $\omega = 1,841$. Следовательно, $r_1 = \frac{1,841}{2,405} a = 0,764 a$. На таком же расстоянии от оси у напряженности магнитного поля H будет

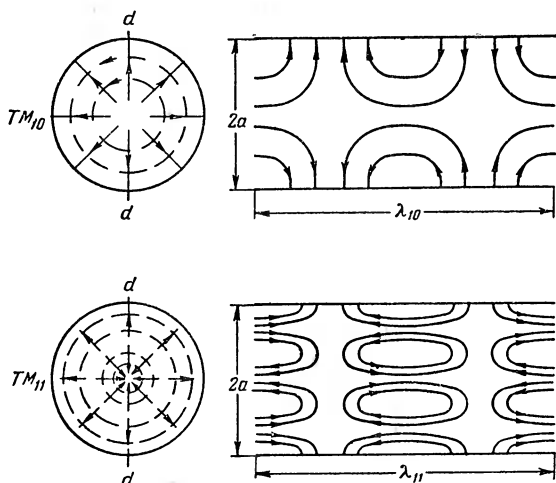


Рис. 7-16. Картины поля в круглом волноводе. Волны ТМ.

максимальная амплитуда. На оси при $r = 0$ $E = 0$ и $H = 0$. На стенках волновода при $r = a$

$$E_{rm} \approx 0,217 K a \beta_{10} \quad H_m = 0,217 K a \omega \epsilon_a.$$

Мгновенные значения проекций векторов поля в любом поперечном сечении волновода определяются ординатами стоячих волн. Для E_r и H узел находится на оси; пучность на расстоянии $r_1 = 0,764 a$ от оси. Для E_z узел находится на стенках волновода, пучность на оси.

Вдоль оси z мгновенные значения проекций векторов поля определяются ординатами синусоиды, перемещающейся со скоростью

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta_{10}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}}}.$$

Длина волны в волноводе $\lambda_{10} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}}}$, где $\lambda_0 = v/f$.

Читателю рекомендуется построить для тех же моментов времени кривые $E_z = f_1(z)$ и $E_r = f_2(z)$.

На рис. 7-16 изображены картины поля в волноводе: сплошными кривыми — линии вектора $\mathbf{E}$, пунктирными — линии вектора $\mathbf{H}$. Последние представляют собой окружности, лежащие в плоскости сечения волновода. На рис. 7-16 изображена также картина поля для волны TM_{11} .

Мгновенная мощность или количество энергии, проходящей в одну секунду через поперечное сечение волновода, определяется потоком вектора Пойнтинга сквозь это сечение:

$$p = \int_S \bar{\Pi} d\bar{S} = \int_0^a \Pi_z 2\pi r dr = \int_0^a E_r H_\phi 2\pi r dr = \\ = K^2 \frac{2\pi \beta_{10} \omega \varepsilon_a a^2}{2,405^2} \cos^2(\omega t - \beta_{10} z) \int_0^a r \left\{ J_1\left(\frac{2,405r}{a}\right) \right\}^2 dr.$$

Так как [Л. 2]

$$\int r \{J_1(kr)\}^2 dr = \frac{r^2}{2} \{[J_1(kr)]^2 - J_0(kr) J_2(kr)\}$$

и учитывая, что $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = 0$, $J_2(0) = 0$ и что $J_0(ka) = 0$, $J_1(ka) = 0,52$, $J_2(ka) = 0$, получим:

$$p = K^2 \frac{0,52, \pi \beta_{10} \omega \varepsilon_a a^4}{2,405^2} \cos^2(\omega t - \beta_{10} z).$$

Средняя мощность за период

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \approx 0,024 K^2 \beta_{10} \omega \varepsilon_a a^4.$$

Если мощность P , передаваемая по волноводу, задана, то постоянная

$$K = \sqrt{\frac{P}{0,024 \beta_{10} \omega \varepsilon_a a^4}}.$$

7-10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ТЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

При распространении волны ТЕ в цилиндрическом волноводе круглого сечения проекция вектора напряженности электрического поля в направлении распространения будет

равна нулю: $E_z = 0$. Записав уравнения Максвелла в цилиндрической системе координат и выразив проекции векторов поля через H_z , получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{j\omega\mu_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial \psi}; \\ \dot{E}_{\psi m} &= \frac{j\omega\mu_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial r}; \\ \dot{H}_{rm} &= -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial r}; \\ \dot{H}_{\psi m} &= -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (7-10)$$

Уравнение, по которому определится $\dot{H}_{zm}$, следующее:

$$r^2 \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial r^2} + r \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{zm}}{\partial \psi^2} + r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) \dot{H}_{zm} = 0.$$

Положив

$$\dot{H}_{zm} = f_1(r) f_2(\psi) = f_1 f_2,$$

получим:

$$\frac{r^2}{f_1} \frac{\partial^2 f_1}{\partial r^2} + \frac{r}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial r} + r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) + \frac{1}{f_2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \psi^2} = 0.$$

Решение такого типа уравнения было приведено выше (§ 7-5).

В рассматриваемом случае

$$\dot{H}_{zm} = \tilde{K} J_p \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right) \cos p\psi.$$

Постоянные p , Γ и $\tilde{K}$ находятся из следующих соображений.

Изменение угла ψ на 2π радиан не должно влиять на величину вектора поля. Следовательно, постоянная p может быть только целым числом $n = 0, 1, 2 \dots$

Тогда

$$\dot{H}_{zm} = \tilde{K} J_n \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right) \cos n\psi.$$

Так как волновод идеальный, то при $r = a$ у вектора напряженности электрического поля касательная к стенке

волновода составляющая должна равняться нулю $E_\psi = 0$. Но

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\psi m} &= \frac{j\omega\mu_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{H}_{zm}}{\partial r} = \\ &= \dot{K} \frac{j\omega\mu_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{dJ_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r\right)}{dr} \cos n\psi.\end{aligned}$$

Для того чтобы $E_\psi = 0$, необходимо, чтобы

$$\left| \frac{dJ_n\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r\right)}{dr} \right|_{r=a} = 0.$$

Обозначим аргумент функции Бесселя, при котором ее производная обращается в нуль, буквой κ_{mn} и назовем ее корнем производной функции. Общее выражение этого корня

$$\kappa_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a.$$

Индекс $m = 1, 2 \dots$ указывает номер очередного корня.

Первые три значения κ_{mn} для производных функций Бесселя нулевого и первого порядков приведены в таблице.

Номер корня m	Корни $\frac{dJ_0(w)}{dw}$	Корни $\frac{dJ_1(w)}{dw}$
1	$\kappa_{10} = 3,832$	$\kappa_{11} = 1,841$
2	$\kappa_{20} = 7,016$	$\kappa_{21} = 5,331$
3	$\kappa_{30} = 10,173$	$\kappa_{31} = 8,536$

Из теории функций Бесселя известно, что

$$\frac{dJ_n(w)}{dw} = \frac{n}{w} J_n(w) - J_{n+1}(w) = -\frac{n}{w} J_n(w) + J_{n-1}(w).$$

Зная корни производной функции Бесселя, можно определить постоянную Γ :

$$\Gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{\kappa_{mn}^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

Так как волновод идеальный, то волна может распространяться без затухания только в том случае, когда Γ величина мнимая, т. е. $\frac{\omega}{v} > \frac{\kappa_{mn}}{a}$, или частота передаваемого сигнала выше критической:

$$\omega > \omega_{кр} = \frac{\kappa_{mn}v}{a}.$$

В отличие от волновода с прямоугольным сечением, у которого критическая частота была одинаковой для однозначных волн TE_{mn} и TM_{mn} , у волновода с круглым сечением

$$\omega_{кр}^{TE} = \frac{\kappa_{mn}v}{a}, \quad \omega_{кр}^{TM} = \frac{\omega_{mn}v}{a}.$$

Выражения для параметров волны следующие:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\kappa_{mn}^2}{a^2}} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}};$$

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}};$$

$$v_{\Phi} = \frac{\omega}{\beta_{mn}};$$

$$v_{гр} = \frac{v^2}{v_{\Phi}}.$$

Критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{v}{f_{кр}} = \frac{2\pi v}{\omega_{кр}} = \frac{2\pi a}{\kappa_{mn}}.$$

Если длину волны в неограниченной диэлектрике обозначить

$$\lambda_0 = \frac{v}{f},$$

то

$$\lambda_{mn} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}}}.$$

Зависимость параметров волны частоты может быть изображена такими же кривыми, какие приведены на рис. 7-3 и 7-4.

Постоянная $\tilde{K}$ может быть определена, если известна мощность, передаваемая по волноводу, или задана ампли-

туда одной из проекций векторов. Зная коэффициент пространства $\Gamma = j \beta_{mn} = j \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\kappa_{mn}^2}{a^2}}$, можно записать окончательные выражения проекций векторов поля в случае волны TE:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= K \frac{\mu_a \omega a^2 n}{\kappa_{mn}^2 r} J_n \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right) \sin n \psi \sin \left(\omega t + \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right); \\ E_\psi &= K \frac{\mu_a \omega a^2}{\kappa_{mn}} \frac{dJ_n \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right)}{d \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right)} \cos n \psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right); \\ E_z &= 0; \\ H_r &= K \frac{\beta_{mn} a}{\kappa_{mn}} \frac{dJ_n \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right)}{d \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right)} \cos \psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z - \frac{\pi}{2} \right); \\ H_\psi &= K \frac{\beta_{mn} a^2 n}{\kappa_{mn}^2 r} J_n \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right) \sin n \psi \sin \left(\omega t - \beta_{mn} z + \frac{\pi}{2} \right); \\ H_z &= K J_n \left(\frac{\kappa_{mn}}{a} r \right) \cos n \psi \sin (\omega t - \beta_{mn} z). \end{aligned} \right\} (7-11)$$

Индекс n указывает порядок функции Бесселя и определяет число стоячих волн проекций векторов поля, которые укладываются вдоль окружности сечения волновода. На практике обычно применяются волны TE₁₀ и TE₁₁.

7-11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ TE₁₀ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

В случае волны TE₁₀ в формулы (7-11) необходимо подставить $m = 1$, $n = 0$, $\kappa_{mn} = \kappa_{10} = 3,832$ и учесть, что $dJ_0(\omega)/d\omega = -J_1(\omega)$.

У вектора **E** будет только одна проекция

$$E = E_\psi = K \frac{\mu_a \omega a}{3,832} J_1 \left(3,832 \frac{r}{a} \right) \sin \left(\omega t - \beta_{10} z - \frac{\pi}{2} \right).$$

У вектора **H** будут две проекции:

$$H_r = K \frac{\beta_{10} a}{3,832} J_1 \left(3,832 \frac{r}{a} \right) \sin \left(\omega t - \beta_{10} z + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_z = K J_0 \left(3,832 \frac{r}{a} \right) \sin (\omega t - \beta_{10} z).$$

На оси волновода при $r = 0$

$$H_{zm} = K = H_m.$$

Постоянная K равна амплитуде вектора напряженности магнитного поля на оси волновода.

На рис. 7-17 показаны кривые зависимости амплитуд проекций векторов поля от координаты r . Характер изменения E и H_r одинаков. На оси волновода при $r = 0$ и на его стенках при $r = a$ эти проекции равны нулю. Максимумы эти амплитуды достигнут при $\frac{\kappa_{10} r_m}{a} = 3,832 \frac{r_m}{a} = 1,841$, т. е. при расстоянии $r_m = 0,488a$ от оси волновода. Значение функции J_1 (1,841) в этом месте будет равно 0,582.

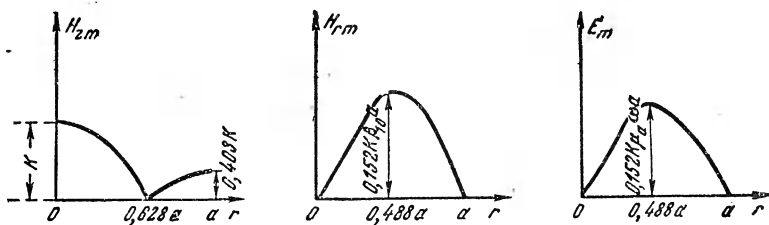


Рис. 7-17. Изменение амплитуд проекций векторов поля. Волна TE_{10} .

Проекция H_z имеет наибольшую амплитуду, равную K на оси волновода. При $r = \frac{2,405}{3,832} a = 0,628a$, проекция H_z обращается в нуль. На стенках волновода при $r = a$, амплитуда $H_{zm} = KJ_0(3,832) = 0,403 K$.

Так же как и в случае прямоугольного волновода мгновенные значения проекции векторов поля в поперечном сечении определяются ординатами стоячих волн. В направлении оси z мгновенные значения проекций векторов поля определяются ординатами бегущей волны, длина которой

$$\lambda_{10} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{3,832^2}{a^2}}}.$$

По волноводу без затухания могут распространяться волны с частотой выше критической, причем

$$\omega_{кр} = \frac{\kappa_{10} v}{a} = 3,832 \frac{v}{a}.$$

Однако в отличие от прямоугольного волновода критическая частота для волны ТЕ при $m = 1$ и $n = 0$ не будет наименьшей. Наименьшая критическая частота будет для волны ТЕ₁₁: $\omega_{кр} = \frac{\kappa_{11}v}{a} = 1,841 \frac{v}{a}$. Картины поля для волн ТЕ₁₀, ТЕ₁₁ изображены на рис. 7-18. Так как кар-

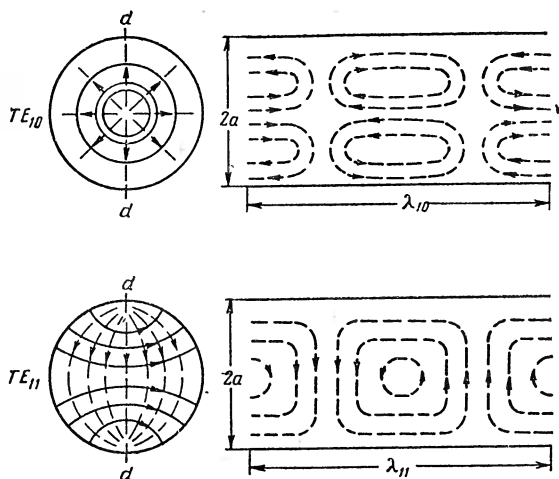


Рис. 7-18. Картины поля в круглом волноводе. Волны ТЕ.

тина поля для волны ТЕ₁₁ похожа на картину поля простейшей волны ТЕ₁₀ в прямоугольном волноводе, то ТЕ₁₁ в круглом волноводе называют основной волной.

7-12. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В ВОЛНОВОДАХ

При рассмотрении процессов в идеальных волноводах было сделано предположение, что сопротивление стенок трубы и проводимость диэлектрика, заполняющего ее, равны нулю. В таких волноводах распространение волн при частоте $\omega > \omega_{кр}$ происходит без затухания и коэффициент распространения — величина мнимая, $\Gamma = j\beta_{mn}$.

В реальных волноводах стенки имеют хотя и малое, но конечное сопротивление (медь, серебро). Проводимость диэлектрика также отлична от нуля. Поэтому часть энергии, передаваемой по волноводу, тратится на тепловые потери. Коэффициент распространения в этом случае будет

$$\Gamma = \alpha_{mn} + j\beta_{mn}.$$

Строгий учет потерь в волноводе связан со сложными вычислениями и не во всех случаях возможен. Поэтому обычно подсчитывают приближенное значение потерь. При этом делаются некоторые допущения, упрощающие расчет. Формулы, которые при этом получаются, определяют потери и коэффициент затухания α_{mn} с достаточной степенью точности.

При дальнейших расчетах мы сделаем два допущения:

1) будем считать, что потери в диэлектрике настолько малы, что ими можно пренебречь;

2) предположим, что в диэлектрике и на внутренней поверхности волновода векторы поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражаются так же, как и в случае идеального волновода.

Если диэлектриком является воздух, то первое допущение справедливо для достаточно широкого диапазона частот. Допущение второе справедливо потому, что тангенциальные составляющие векторов поля значительно меньше нормальных составляющих, так как стенки волновода имеют достаточно высокую проводимость. Поэтому, не допуская большой ошибки, можно считать, что на границе диэлектрик — металл $E_\tau \approx 0$, а амплитуда $H_{\tau m}$ не меняется в направлении оси z и выражается так же, как и в случае идеального волновода.

Коэффициент затухания можно определить исходя из следующих соображений. Пусть P_0 — среднее значение энергии, которая в течение 1 сек проходит через сечение волновода. На расстоянии z в направлении распространения волны за то же время пройдет меньшее количество энергии. Обозначим ее P . Так как энергия пропорциональна произведению векторов поля, а амплитуда каждого вектора убывает в $e^{-\alpha z}$ раз, то

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}.$$

На участке длиной 1 м ($z = 1$) передаваемая мощность изменится на величину

$$N = -\frac{dP}{dz} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} = P \cdot 2\alpha.$$

Следовательно, коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{N}{2P}.$$

Величина передаваемой мощности может быть определена как поток вектора Пойнтинга сквозь поперечное сечение волновода:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_S \bar{P} dS.$$

Мощность тепловых потерь на единицу длины волновода N определится по закону Джоуля — Ленца, причем для упрощения расчета можно предположить, что ток, протекающий по трубе, сосредоточен в слое толщиной $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}$, равной эквивалентной глубине проникновения волны в металл, причем в пределах этого слоя ток распределяется равномерно и его плотность численно равна плотности η поверхностного тока, протекающего по внутренней стенке такого же волновода, но без потерь. Сделанное предположение не приведет к большим погрешностям, так как в волноводе резко сказывается поверхностный эффект.

А. Потери в прямоугольном волноводе

Определим потери в волноводе прямоугольного сечения в случае распространения волны ТМ в направлении оси z (рис. 7-1). Проводимость стенок волновода γ , *сим/м*. Диэлектрик, заполняющий волновод, идеальный, проводимость его равна нулю.

Мгновенная мощность, передаваемая по волноводу,

$$p = \int_S \bar{P} dS = \int_0^a \int_0^b (E_x H_y - E_y H_x) dx dy.$$

Средняя за период мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

Так как мы допустили, что проекции векторов поля в диэлектрике имеют такое же выражение, как и в случае идеального волновода, то можно воспользоваться формулами (7-6).

После интегрирования получим:

$$P = K^2 \frac{\epsilon_a \omega \beta_{mn}}{8} \frac{ab}{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}.$$

Так как

$$\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \omega_{\text{кр}}^2 \epsilon_a \mu_a = \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{v^2},$$

а

$$\beta_{mn} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{\omega^2}},$$

то

$$P = \frac{1}{8} K^2 ab \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a} \frac{\omega^2}{\omega_{\text{кр}}^2}} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2}{\omega^2}}.$$

Чтобы найти мощность тепловых потерь N в трубе на единицу длины, воспользуемся типичным условием $\eta = H_{\tau}$.

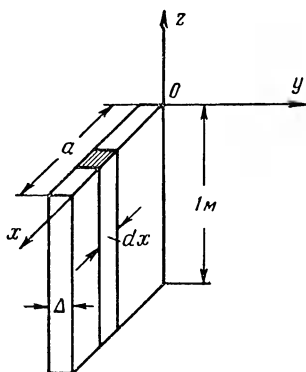


Рис. 7-19. Вычисление потерь в прямоугольном волноводе.

В случае волны ТМ $\eta_m = H_{ym}$ при $x = 0$ и при $x = a$, $\eta_m = H_{xm}$ при $y = 0$ и $y = b$. Так как амплитуда плотности поверхностного тока на противоположных стенках волновода одинакова, то можно подсчитать потери в одной стенке, а затем полученный результат удвоить.

Выделим на стенке волновода, совпадающей с плоскостью xOz (рис. 7-19), полоску шириной dx . Амплитуда поверхностного тока, протекающего по такой полоске, $\eta_m dx = H_{xm} dx$. Допустим, что ток с такой же амплитудой будет проходить в

реальном волноводе в слое толщиной Δ и шириной dx .

Мощность тепловых потерь на участке длиной $z = 1$ м будет равна:

$$dN' = \left(\frac{\eta_m dx}{V^2} \right)^2 \frac{dx}{\gamma \Delta},$$

откуда

$$N' = \frac{1}{4} K^2 \frac{\omega^2 \epsilon_a^2 a}{\gamma \Delta} \frac{\frac{n^2 \pi^2}{b^2}}{\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}.$$

Аналогично можно определить мощность тепловых потерь в стенке, совпадающей с плоскостью yOz :

$$N'' = \frac{1}{4} K^2 \frac{\omega^2 \epsilon_a^2 b}{\gamma \Delta} \frac{\frac{m^2 \pi^2}{a^2}}{\left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2}.$$

Суммируя полученные мощности, находим:

$$N = 2N' + 2N'' = \frac{1}{2} K^2 \frac{\epsilon_a^2 \omega^2 ab}{\pi^2 \gamma \Delta} \frac{\frac{m^2}{a^2} \frac{1}{a} + \frac{n^2}{b^2} \frac{1}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Учитывая, что $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}$, получим

$$N = \frac{1}{4} K^2 \sqrt{\frac{2 \mu_a \omega}{\gamma}} \frac{\epsilon_a^2 \omega^2 ab}{\pi^2} \frac{\frac{m^2}{a^2} \frac{1}{a} + \frac{n^2}{b^2} \frac{1}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Зная N и P , можно определить коэффициент затухания в неперax на метр:

$$\alpha = \frac{N}{2P} = \sqrt{\frac{2 \epsilon_a}{\gamma} \frac{\omega}{1 - \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2}}} \frac{\frac{m^2}{a^3} + \frac{n^2}{b^3}}{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}.$$

Первый множитель зависит от удельной проводимости стенок волновода и проницаемости диэлектрика; второй множитель зависит от размеров волновода и типа волны; третий множитель определяет зависимость α от частоты. При $\omega = \omega_{кр}$ коэффициент затухания $\alpha = \infty$. С возрастанием частоты ω он быстро падает, достигает минимума и затем медленно возрастает (рис. 7-20).

На рис. 7-20 показаны также кривые $\alpha = f(\omega)$ для различных типов волн.

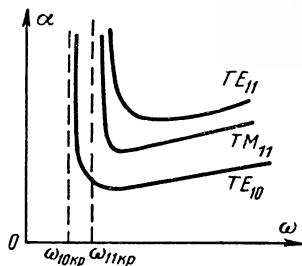


Рис. 7-20. Зависимость коэффициента затухания от частоты в прямоугольном волноводе.

Б. Потери в круглом цилиндрическом волноводе

В волноводах круглого сечения зависимость между коэффициентом затухания α и частотой ω по своему характеру такая же, как и в волноводах с прямоугольным сечением, за исключением волны TE_{m0} . У последней коэффициент α с увеличением частоты плавно убывает. Исследуем этот случай.

Так как для волны TE_{m0} $n = 0$, то проекция $E_r = 0$ и $H_\psi = 0$; кроме того, по условию (поперечная электрическая волна) $E_z = 0$. Остальные проекции

$$E_\psi = E = K \frac{\mu_a \omega a}{\kappa_{m0}} J'_0 \left(\frac{\kappa_{m0}}{a} r \right) \sin \left(\omega t - \beta_{m0} z + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_r = K \frac{\beta_{m0} a}{\kappa_{m0}} J'_0 \left(\frac{\kappa_{m0}}{a} r \right) \sin \left(\omega t - \beta_{m0} z - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_z = K J_0 \left(\frac{\kappa_{m0}}{a} r \right) \sin (\omega t - \beta_{m0} z).$$

Как и в случае прямоугольного волновода $\alpha = N/2P$, где N — потеря энергии в одну секунду на единицу длины трубы, P — энергия, проходящая в течение одной секунды через поперечное сечение волновода.

Мгновенная мощность

$$p = \int_S \bar{\Pi} dS = - \int_0^a E_\psi H_r \cdot 2\pi r dr.$$

Подставив выражения E_ψ и H_r , получим:

$$p = K^2 \frac{\pi \mu_a \omega^2 \beta_{m0}}{\kappa_{m0}^3} \cos^2 (\omega t - \beta_{m0} z) \int_0^a r \left[J'_0 \left(\frac{\kappa_{m0}}{a} r \right) \right]^2 dr.$$

Известно [Л. 2], что

$$\int r [J'_0(kr)]^2 dr = \frac{r^2}{2} \{ [J_1(kr)]^2 - J_0(kr) J_2(kr) \}.$$

При $r = 0$ полученное выражение равно нулю. При $r = a$ первое слагаемое в фигурной скобке равно нулю; следовательно, весь интеграл будет равен:

$$- \frac{a}{2} J_0(\kappa_{m0}) J_2(\kappa_{m0}).$$

Известно также [Л. 2], что

$$J_{n+1}(kr) = \frac{2n}{kr} J_n(kr) - J_{n-1}(kr).$$

Следовательно, при $r = a$

$$J_2(ka) = -J_0(ka).$$

Подставив полученные выражения в формулу, получим:

$$p = K^2 \frac{\pi \mu_a \omega a^4 \beta_{m0}}{\kappa_{m0}^3} \{J_0(\kappa_{m0})\}^2 \cos^2(\omega t - \beta_{m0} z).$$

Средняя за период мощность

$$P = K^2 \frac{\pi \mu_a \omega a^4 \beta_{m0}}{2 \kappa_{m0}^3} \{J_0(\kappa_{m0})\}^2.$$

Подсчитаем тепловые потери в стенках волновода, считая, что у внутренней поверхности стенки векторы поля выражаются так же, как и в случае идеального волновода.

Плотность поверхностного тока на стенке

$$\eta_\psi = \eta = H_z(r=a).$$

Действующее значение поверхностного тока на участке длиной $z = 1$ м

$$\frac{H_{zm}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K J_0(\kappa_{m0}).$$

Будем считать, как и в случае прямоугольного волновода, что ток проходит в слое толщиной $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \gamma}}$ (рис. 7-21) и в пределах этого слоя он распределен равномерно. Тогда тепловые потери в полоске трубы шириной и длиной 1 м

$$dN = I^2 dR = \frac{H_{zm}^2}{2} \frac{dl}{\gamma \Delta}.$$

Вся мощность тепловых потерь на участке длиной 1 м

$$\begin{aligned} N &= \frac{H_{zm}^2}{2} \frac{2\pi a}{\gamma \Delta} = \\ &= K^2 \frac{\pi a}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\omega \mu_a}}} \{J_0(\kappa_{m0})\}^2. \end{aligned}$$

Коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{N}{2P} = \frac{\kappa_{m0}^2}{\beta_{m0} a^3 \sqrt{2\omega\mu_a\gamma}}.$$

Он уменьшается с увеличением частоты.

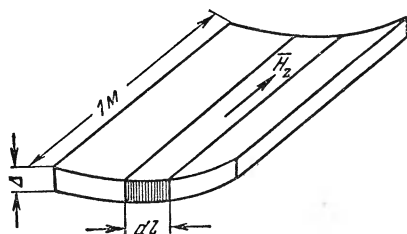


Рис. 7-21. Вычисление потерь в цилиндрическом волноводе.

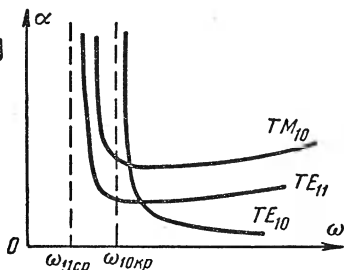


Рис. 7-22. Зависимость коэффициента затухания от частоты в цилиндрическом волноводе.

На рис. 7-22 приведена кривая $\alpha = f(\omega)$. На том же рисунке изображены кривые $\alpha = f(\omega)$ для других типов волн.

7-13. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Колебательные системы, которые применяются в диапазоне волн длиннее 1 м, обычно представляют собой соединение индуктивной катушки и конденсатора. Частота собственных колебаний такого контура

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где L — индуктивность катушки; C — емкость конденсатора.

Добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{P} = \frac{\sqrt{L/C}}{r},$$

где r — активное сопротивление контура; W_0 — энергия, запасенная в контуре; P — средняя за период мощность потерь.

В диапазоне волн короче 1 м для возбуждения колебаний нужной частоты необходимо уменьшить индуктивность или емкость контура. Минимальная емкость контура ограничена конструктивными соображениями, поэтому увеличение частоты должно производиться путем уменьшения индуктивности, приводящего к уменьшению характеристического сопротивления контура $\sqrt{L/C}$. А так как с увеличением частоты увеличивается активное сопротивление (следствие усиления поверхностного эффекта и увеличения мощности излучения), то добротность контура Q резко падает. Поэтому обычный колебательный контур практически не пригоден в диапазоне дециметровых и сантиметровых волн.

В этом диапазоне частот применяют колебательные системы в виде объемных резонаторов, представляющих собой замкнутую металлическую оболочку, ограничивающую некоторый объем диэлектрика.

На рис. 7-23 показано, как, постепенно видоизменяя обычный колебательный контур, получают объемный резонатор. Индуктивная катушка (рис. 7-23, а) заменяется пластиной (рис. 7-23, б). Для дальнейшего уменьшения индуктивности параллельно включается несколько пластин (рис. 7-23, в). Объединив эти пластины, получают полый резонатор (рис. 7-23, г). В объемном резонаторе тепловые потери малы. Потери на излучение практически отсутст-

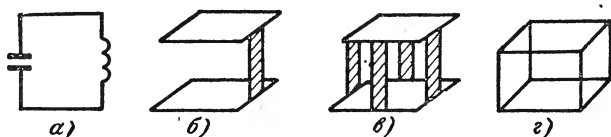


Рис. 7-23. Видоизменение колебательного контура.

а — колебательный контур; б, в — видоизмененный контур; г — полый объемный резонатор.

вуют, так как электромагнитное поле в диэлектрике экранировано металлической оболочкой. Индуктивность и емкость резонатора незначительны. Поэтому добротность объемного резонатора весьма высока (порядка 10^4).

Металлическая оболочка резонатора может иметь различную форму. На практике встречаются прямоугольные, цилиндрические, тороидальные и другие формы резонаторов.

Разработке теории объемных резонаторов посвящены работы советских ученых М. С. Неймана, Г. В. Кисулько и многих других.

7-14. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ОБЪЕМНЫЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрим электромагнитные процессы в идеальном прямоугольном объемном резонаторе (рис. 7-24). Уравнения

Максвелла для диэлектрика, ограниченного металлической оболочкой, запишутся следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Так как диэлектрик идеальный, то плотность тока проводимости принята равной нулю. Свободных объемных зарядов в диэлектрике нет, $\rho = 0$.

Продифференцировав первое уравнение Максвелла, получим:

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Из второго уравнения Максвелла определим величину $\partial \mathbf{H} / \partial t$. Подставив ее, найдем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Обозначив $\mu_0 \epsilon_a = 1/v^2$ и раскрыв выражение ротора от ротора, получим:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Так как по условию $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Решение полученного волнового уравнения будем искать в виде произведения двух функций:

$$E = f(t) \bar{\varphi}(x, y, z) = \bar{f} \bar{\varphi},$$

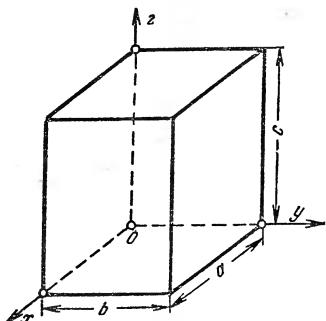


Рис. 7-24. Прямоугольный объемный резонатор.

одна из которых f зависит только от времени, а другая — $\bar{\varphi}$ — только от пространственных координат. Подставив написанное решение в волновое уравнение, получим:

$$v^2 \frac{\nabla^2 \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}{f}.$$

Это равенство может иметь место только в том случае, когда обе его части — величины постоянные, так как правая часть равенства зависит только от времени, а левая часть — только от пространственных координат.

Положим:

$$v^2 \frac{\nabla^2 \bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} = -\omega_0^2 = \text{const};$$

$$\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}{f} = -\omega_0^2 = \text{const}.$$

Можно показать, что величина ω_0 — положительное число.

Таким образом, для определения искомых функций $\bar{\varphi}$ и f надо решить уравнения

$$\nabla^2 \bar{\varphi} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \bar{\varphi} = 0;$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2 f = 0.$$

Частные производные заменяем обычными, так как функция f зависит только от времени.

Решение второго уравнения с точностью до постоянного множителя можно записать следующим образом:

$$f = \bar{f}(t) = e^{\pm j(\omega_0 t + \xi)}.$$

Постоянную начальную фазу можно выбрать произвольно, например, принять $\xi = 0$. Из двух знаков показателя степени оставим положительный.

Не определяя пока функции $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x, y, z)$, запишем выражение для напряженности электрического поля:

$$E = \bar{\varphi}(x, y, z) \bar{f}(t) = \bar{\varphi}(x, y, z) e^{j\omega_0 t}.$$

Оно указывает на то, что электромагнитное поле в идеальном резонаторе меняется во времени по гармоническому закону. Следовательно, при расчете объемных резонаторов

можно пользоваться уравнениями Максвелла, записанными в комплексной форме. Величина $\bar{\varphi}(x, y, z)$ представляет собой комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \dot{E}_m.$$

Чтобы определить ее, необходимо решить уравнение

$$\nabla^2 \bar{\varphi} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \bar{\varphi} = 0$$

или

$$\nabla^2 \dot{E}_m + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_m = 0.$$

Это векторное уравнение можно записать в виде трех скалярных уравнений:

$$\nabla^2 \dot{E}_{xm} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_{xm} = 0;$$

$$\nabla^2 \dot{E}_{ym} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_{ym} = 0;$$

$$\nabla^2 \dot{E}_{zm} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_{zm} = 0.$$

Решение этих уравнений должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$E_x = 0 \text{ при } y = 0, y = b \text{ и при } z = 0, z = c;$$

$$E_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a \text{ и при } z = 0, z = c;$$

$$E_z = 0 \text{ при } x = 0, x = a \text{ и при } y = 0, y = b.$$

Искомые решения можно записать следующим образом:

$$\dot{E}_{xm} = \tilde{K}_1 \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c};$$

$$\dot{E}_{ym} = \tilde{K}_2 \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c};$$

$$\dot{E}_{zm} = \tilde{K}_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c}.$$

Здесь $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3$ — постоянные интегрирования; m, n, p — целые числа 0, 1, 2, 3 ..., независимые друг от друга; a, b, c — размеры резонатора; x, y, z — координаты точки внутри резонатора.

Пользуясь вторым уравнением Максвелла, можно определить комплексные амплитуды проекций напряженности

магнитного поля:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{xm} &= \frac{\pi}{j\omega_0\mu_0} \left(\tilde{K}_2 \frac{p}{c} - \tilde{K}_3 \frac{n}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c}; \\ \dot{H}_{ym} &= \frac{\pi}{j\omega_0\mu_0} \left(\tilde{K}_3 \frac{m}{a} - \tilde{K}_1 \frac{p}{c} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c}; \\ \dot{H}_{zm} &= \frac{\pi}{j\omega_0\mu_0} \left(\tilde{K}_1 \frac{n}{b} - \tilde{K}_2 \frac{m}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{c}.\end{aligned}$$

Зная комплексные амплитуды, можно легко найти мгновенные значения проекций векторов поля. Они меняются во времени по синусоидальному закону. Например:

$$E_x = \operatorname{Im} \{ \dot{E}_{xm} e^{j\omega_0 t} \}.$$

Аналогично можно записать и остальные проекции.

Итак, проекции векторов поля получились в виде произведения гармонической функции времени и комплексной амплитуды, модуль которой зависит от пространственных координат, а аргумент представляет собой постоянную величину. В резонаторе распределение поля вдоль всех трех координатных осей носит характер стоячих волн. Числа m , n , p определяют количество полуволн, которые укладываются в направлении осей x , y , z . На гранях резонатора имеют место узлы касательных составляющих вектора $\mathbf{E}$ и нормальных составляющих вектора $\mathbf{H}$, пучности нормальных составляющих вектора $\mathbf{E}$ и касательных составляющих вектора $\mathbf{H}$. Нетрудно установить, что при $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$ векторы поля равны нулю. Точно так же, если два из трех индексов равны нулю, то поля в резонаторе нет. Поэтому наиболее простую структуру имеет волна с двумя индексами, равными единице, и одним индексом, равным нулю. В зависимости от того, какие из индексов равны единице, картина поля, оставаясь по характеру неизменной, сдвигается в пространство на 90° . Так как $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, то

$$\frac{\partial \dot{E}_{xm}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_{ym}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial z} = 0.$$

Подставив значение комплексных амплитуд, получим:

$$\tilde{K}_1 \frac{m}{a} + \tilde{K}_2 \frac{n}{b} + \tilde{K}_3 \frac{p}{c} = 0.$$

Это уравнение позволит определить одну из постоянных. Две из них остаются неопределенными. Одна из этих двух

может быть определена, если будет задана, например, первоначальная энергия, сообщенная резонатору. Другая постоянная остается неопределенной. Следовательно, написанные уравнения определяют неоднозначно поле для данного типа колебаний.

В прямоугольном резонаторе векторы поля для колебаний любого типа могут быть представлены в виде суммы двух векторов, соответствующих полям вполне определенной конфигурации. Характер этих полей определяется размерами резонатора и типом колебаний.

Для того чтобы изобразить картину поля в резонаторе, следует написать уравнения линий векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\frac{dx}{E_{xm}} = \frac{dy}{E_{ym}} = \frac{dz}{E_{zm}};$$

$$\frac{dx}{H_{xm}} = \frac{dy}{H_{ym}} = \frac{dz}{H_{zm}}.$$

7-15. ЧАСТОТА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗОНАТОРА

Подставим значение E_{xm} в уравнение

$$\nabla^2 \dot{E}_{xm} + \frac{\omega_0^2}{v^2} \dot{E}_{xm} = 0.$$

После преобразования получим:

$$\frac{\omega_0^2}{v^2} = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{p^2 \pi^2}{c^2}.$$

Это соотношение получится также, если подставить значения остальных комплексных амплитуд в аналогичные уравнения.

Частота собственных колебаний резонатора

$$\omega_0 = v\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}};$$

$$f_0 = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}.$$

Частота собственных колебаний резонатора зависит от его размеров a , b , c и от значения величин m , n , p , которые

определяют тип колебаний. Так как три числа m , n , p могут быть любыми целыми числами, то резонатор характеризуется бесконечным дискретным спектром собственных частот. Собственной длиной волны резонатора называют длину волны в неограниченной диэлектрике при частоте, равной частоте собственных колебаний резонатора:

$$\lambda_0 = \frac{v}{f_0} = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}}}.$$

Наименьшая частота собственных колебаний резонатора называется основной частотой.

В резонаторе происходит периодическое превращение энергии электрического поля в энергию магнитного поля и обратно. При отсутствии потерь колебания будут незатухающими. К реальным резонаторам для поддержания колебаний необходимо непрерывно подводить энергию, восполняющую потерянную.

Добротность резонатора определяется формулой

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{P} = \frac{2\pi W_0}{N_{\pi}},$$

где W_0 — энергия, запасенная в резонаторе; N_{π} — потери энергии за один период.

Установлено, что добротность резонатора будет тем выше, чем меньше его поверхность при заданном объеме. Как было отмечено выше, объемный резонатор является весьма совершенной колебательной системой.

7-16. ВОЛНА ПРОСТЕЙШЕГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Для волны простейшего типа можно положить $m = 1$; $n = 1$; $p = 0$.

В случае синусоидального во времени процесса

$$E = E_z = K \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \omega_0 t;$$

$$E_x = 0; E_y = 0.$$

$$H_x = K \frac{\pi}{\omega_0 \mu_0 b} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_y = K \frac{\pi}{\omega_0 \mu_0 a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right);$$

$$H_z = 0.$$

Постоянная K_z принята равной K . Так как во все проекции векторов поля входит одна постоянная K , то конфигурация поля определяется однозначно.

Частота собственных колебаний резонатора

$$\omega_0 = \frac{v\pi ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Собственная длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Как видно, размер с резонатора вдоль оси z на характер поля не влияет, но для того чтобы добротность волновода была достаточно большой величиной, c выбирают не меньше a или b .

Найдем уравнения линий векторов поля. Линии вектора $\mathbf{E}$ прямые, параллельные оси z , так как $E = E_z$.

Так как $H_z = 0$, то линии вектора $\mathbf{H}$ кривые, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости xOy . Уравнение этих линий определяется из соотношения

$$\frac{dx}{H_{xm}} = \frac{dy}{H_{ym}}.$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{H_{xm}}{H_{ym}} = - \frac{a \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}}{b \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \text{const.}$$

На рис. 7-25 показаны кривые зависимости E_m , H_{xm} , H_{ym} от соответствующих координат.

Покажем, что энергия, сообщенная резонатору, пульсирует, переходя из электрического поля в магнитное и обратно.

В момент $t = 0$ напряженность электрического поля $E = 0$, следовательно, вся энергия сосредоточена в магнитном поле.

В момент $t = \pi/2\omega_0$ напряженность магнитного поля станет равной нулю и вся энергия сосредоточится в электрическом поле. Так как резонатор идеальный, потерь в нем нет, энергия остается без изменения. Подсчитаем ее вели-

чину. Пусть $t = \pi/2\omega_0$. Тогда

$$W_0 = W_9 = \int_V \frac{\epsilon_a E^2}{2} dV = \frac{1}{8} \epsilon_a K^2 abc.$$

Если величина W_0 задана, то постоянная K определится из выражения

$$K = 2 \sqrt{\frac{2W_0}{\epsilon_a abc}}.$$

Определим добротность резонатора, считая, что проводимость стенок γ , *сим/м*, магнитная проницаемость μ_a , *гн/м*.

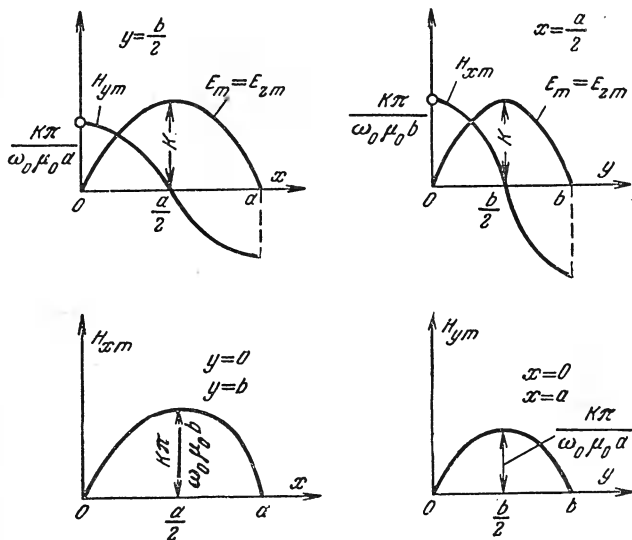


Рис. 7-25. Изменение амплитуд проекций векторов поля по различным сечениям резонатора.

Предположим для упрощения расчета, что векторы поля в диэлектрике имеют такое же выражение, как и в резонаторе без потерь. Так же как и при исследовании волноводов, будем считать, что ток равномерно распределен в слое толщиной $\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_a \gamma}}$ и по величине равен поверхностному току на стенках идеального резонатора. Так как токи на противоположных стенках резонатора одинаковы по амплитуде, то (рис. 7-24) $P = 2P_{a0c} + 2P_{b0c} + 2P_{a0b}$.

Средняя за период мощность, которая теряется в стенке aOc ,

$$P_{aOc} = \frac{1}{\gamma\Delta} \int_0^a \int_0^c \frac{H_m^2(x=0)}{2} dx dy = K^2 \frac{\pi^2 ac}{4\mu_a^2 \omega_0^3 \gamma b^2 \Delta}.$$

Аналогично находим:

$$P_{bOc} = K^2 \frac{\pi^2 bc}{4\mu_a^2 \omega_0^3 \gamma a^2 \Delta}.$$

Мощность, которая теряется в стенке aOb ,

$$\begin{aligned} P_{aOb} &= \frac{1}{\gamma\Delta} \int_0^a \int_0^b \frac{H_m^2(x=0) + H_m^2(y=0)}{2} dx dy = \\ &= K^2 \frac{\pi^2}{2\omega_0^3 \mu_a^2 \gamma \Delta} \left(\frac{a}{4b} + \frac{b}{4a} \right). \end{aligned}$$

Общая средняя мощность тепловых потерь в стенках резонатора

$$P = K^2 \frac{\pi^2}{2\mu_a^2 \omega_0^3 \gamma \Delta} \left(\frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} \right).$$

Следовательно, добротность рассматриваемого резонатора

$$Q = \frac{\epsilon_a \mu_a^2 \omega_0^3 \gamma abc \Delta}{4\pi^2 \left(\frac{ac}{b^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} \right)}.$$

В случае кубического резонатора при $a = b = c$ для простейшей волны ($m = 1$, $n = 1$, $p = 1$) формула значительно упростится:

$$Q = \frac{1}{3} \frac{\epsilon \mu a}{\Delta}.$$

Так как резонатор обычно выполняется из неферромагнитного материала (медь, латунь, серебро), и если диэлектрик — заполняющий его воздух, то добротность такого резонатора

$$Q = \frac{2\pi}{3} a \sqrt{f_0 \gamma \cdot 10^7}.$$

7-17. КОАКСИАЛЬНЫЕ ЛИНИИ

Необходимость применения очень высоких частот (не ниже 10^9 гц) при передаче энергии по волноводам ограничивает их применение. Кроме того, как было показано выше, поперечная электромагнитная волна ТЕМ переда-

ваться по волноводу не может. Поэтому для передачи сигналов в широком диапазоне частот (от самых малых, до частот порядка 10^6 гц) пользуются коаксиальным кабелем. Он позволяет передавать сигналы без помех, при сравнительно небольших потерях. По кабелю можно передавать телевизионные программы на большие расстояния; устанавливать одновременно сотни телефонных связей. Коаксиальным кабелем пользуются в радиолокационных установках. Так же как и волновод, кабель хорошо защищен от внешних помех. Все перечисленные положительные качества кабеля обеспечиваются его конструкцией (рис. 3-14).

Коаксиальный кабель состоит из двух проводников: трубы круглого сечения и цилиндрического провода. Проводники располагаются концентрически и изолируются друг от друга высококачественным диэлектриком (полиэтилен, полистирол и др.).

При исследовании процессов в кабеле будем считать его конструкцию совершенной, т. е. радиус внутреннего провода a и внутренний диаметр трубы $2b$ постоянными по всей длине кабеля, а диэлектрик, заполняющий трубу, однородным, с проницаемостью $\epsilon_a = \text{const}$ и проводимостью $\gamma_d = 0$.

Вначале примем сопротивление проводников кабеля равным нулю. Ось z цилиндрической системы координат направим по оси внутреннего провода. Тогда амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не будут зависеть от координаты z . При гармоническом законе изменения векторов поля во времени каждую из проекций $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно представить, например, следующим образом:

$$H_\psi = \text{Im} \{ \dot{H}_\psi e^{-\Gamma z} e^{j\omega t} \}.$$

Для того чтобы волна распространялась по кабелю без затухания, коэффициент распространения Γ , пока еще неизвестный, должен быть мнимым.

Так как поле обладает цилиндрической симметрией, то у вектора будет только одна проекция H_ψ ($H_r = 0$, $H_z = 0$). Кроме того, в выражения проекций векторов поля координата ψ не входит и, следовательно, их производные по ψ равны нулю.

Выясним, может ли по кабелю при заданных условиях распространяться поперечная электромагнитная волна ТЕМ, для которой $E_z = 0$, $H_z = 0$.

Уравнения Максвелла в рассматриваемом случае примут вид:

$$\Gamma \dot{H}_{\psi m} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{rm};$$

$$\Gamma \dot{E}_{rm} = j\omega \mu_a \dot{H}_{\psi m};$$

$$\frac{d(r\dot{H}_{\psi m})}{dr} = 0.$$

После умножения первых двух уравнений и деления на $\dot{H}_{\psi m} \dot{E}_{rm}$ получим:

$$\Gamma = j\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = j \frac{\omega}{v} = j\beta.$$

Коэффициент распространения получился мнимым, без всяких ограничений. Следовательно, волна ТЕМ может распространяться без затухания при любом значении частоты.

Так как

$$\frac{d(r\dot{H}_{\psi m})}{dr} = 0,$$

то

$$\dot{H}_{\psi m} = \dot{H}_m = \frac{\text{const}}{r}.$$

Чтобы найти постоянную интегрирования, зададимся комплексной амплитудой I_m тока, проходящего по внутреннему проводнику. Тогда по закону полного тока

$$\dot{H}_m = \frac{I_m}{2\pi a}.$$

Подставив $\Gamma = j\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$, получим:

$$\dot{E}_{rm} = \dot{E}_m = \dot{H}_m \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \frac{I_m}{2\pi a} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}.$$

Мгновенные значения векторов поля следующие:

$$H = H_{\psi} = H_m \sin(\omega t - \beta z),$$

$$E = E_r = H_m \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \sin(\omega t - \beta z).$$

Векторы поля **Е** и **Н** совпадают по фазе. В любой точке поля они взаимно перпендикулярны. Их отношение — число действительное, равно $\sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = 120\pi \sqrt{\mu/\epsilon}$.

В любом объеме V энергия электрического поля равна энергии магнитного поля.

Напряжение между проводниками кабеля

$$u = \int_a^b E dr = I_m \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \sin(\omega t - \beta z).$$

Током мы задались:

$$i = I_m \sin(\omega t - \beta z).$$

Так как кабель без потерь, то ток и напряжение совпадают по фазе. Кроме того, мы рассматривали режим одной бегущей волны (кабель без отражения), поэтому

$$z_{\text{вх}} = r = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Выше были определены индуктивность и емкость единицы длины идеального коаксиального кабеля:

$$L_0 = \frac{L}{l} = \frac{\mu_a}{2\pi} \ln \frac{b}{a};$$

$$C_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{b}{a}.$$

Если разделить амплитуду напряжения на амплитуду тока, то их отношение будет таким же.

Если проводники кабеля имеют конечное сопротивление, амплитуда векторов поля будет затухать в направлении распространения. Коэффициент распространения будет комплексной величиной:

$$\Gamma = \alpha + j\beta.$$

Сделав такие же предположения, как и при исследовании потерь в цилиндрическом волноводе, можно показать, что коэффициент затухания

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\epsilon_a}{\gamma}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}, \text{ нпн/м.}$$

На рис. 7-26 приведены кривые $\alpha = f(\omega)$ для коаксиального кабеля и для волновода.

Помимо волны ТЕМ в коаксиальном кабеле могут распространяться и волны других типов. Рассмотрим условия, при которых в идеальном кабеле может распространяться

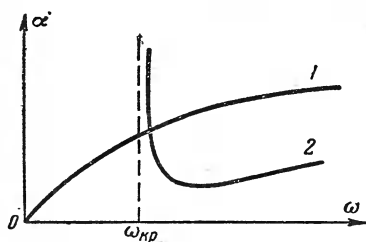


Рис. 7-26. Зависимость коэффициента затухания от частоты.

1 — кабель; 2 — волновод,

волна ТМ. Векторы поля в этом случае будут иметь проекции E_r , K_z и H_ψ , и уравнения Максвелла (см. § 4-6) примут вид:

$$\Gamma \dot{H}_{\psi m} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{rm},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \dot{H}_{\psi m})}{\partial r} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{zm},$$

$$\begin{aligned} -\Gamma \dot{E}_{rm} - \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r} &= \\ &= -j\omega \mu_a \dot{H}_{\psi m}. \end{aligned}$$

Выразим $\dot{H}_{\psi m}$ и $\dot{E}_{rm}$ через $\dot{E}_{zm}$:

$$\dot{H}_{\psi m} = -\frac{j\omega \epsilon_a}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r};$$

$$\dot{E}_{rm} = -\frac{\Gamma}{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} \frac{\partial \dot{E}_{zm}}{\partial r}.$$

Проекция $\dot{E}_{zm}$ определится из уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 \dot{E}_{zm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \dot{E}_{zm}}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2 \right) \dot{E}_{zm} = 0,$$

решение которого было приведено выше.

$$\dot{E}_{zm} = \dot{M}_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right) + \dot{M}_2 N_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} r \right).$$

Так как при $r = a$ и $r = b$ проекция E_z должна равняться нулю (проводники не имеют сопротивления), то

$$\dot{M}_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a \right) + \dot{M}_2 N_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a \right) = 0;$$

$$\dot{M}_1 J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b \right) + \dot{M}_2 N_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{N_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a \right)}{J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a \right)} = \frac{N_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b \right)}{J_0 \left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b \right)}.$$

В диапазоне высоких частот аргумент функций Бесселя получается достаточно большим и можно воспользоваться асимптотическими значениями функций:

$$J_0(ka) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \cos\left(ka - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$N_0(ka) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \sin\left(ka - \frac{\pi}{4}\right).$$

Подставив, получим:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} a - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} b - \frac{\pi}{4}\right),$$

или

$$\sin\left\{(b-a) \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2}\right\} = 0.$$

Равенство это справедливо при условии

$$(b-a) \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} + \Gamma^2} = n\pi, \quad \text{где } n = 1, 2, 3 \dots$$

Следовательно,

$$\Gamma = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} - \frac{\omega^2}{v^2}}.$$

Для того чтобы волна ТМ распространялась по кабелю без затухания, коэффициент распространения должен быть мнимым, что возможно только при условии

$$\frac{n\pi}{b-a} < \frac{\omega}{v}.$$

Следовательно, как и в волноводе, и в данном случае имеется предельная частота $\omega_{кр} = \frac{\pi n v}{b-a}$. Распространение возможно только при частотах выше критической.

Аналогичные соотношения получаются и для волны ТЕ.

Как правило, передача энергии по кабелю осуществляется волной ТЕМ. В кабеле могут возникнуть волны и других типов. Подбирая размеры a и b , можно довести $\omega_{кр} = \frac{\pi n v}{b-a}$ до такой величины, чтобы волны ТЕ и ТМ не могли распространяться. Однако при этом надо иметь в виду то обстоятельство, что при уменьшении толщины слоя диэлектрика $(b-a)$ увеличивается напряженность электрического поля и диэлектрик может быть пробит.

7-18. ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

7-1. Определить типы волн, которые могут распространиться в прямоугольном идеальном волноводе с сечением $a \times b = 2,5 \times 5 \text{ см}^2$ при частоте $f = 7,5 \cdot 10^9 \text{ гц}$. Диэлектрик — воздух. Найти критическую частоту и критическую длину волны. Найти длину волны в волноводе для каждого типа волн:

О т в е т: см. табл.

Тип волны	TE ₁₀	TE ₀₁	TE ₀₂	TE ₁₁	TM ₁₁
Критическая длина волны, см. . . .	50	100	50	44,7	44,7
Длина волн в волноводе, см	66,6	43,6	66,6	89,5	89,5

7-2. Показать, что волна ТЕМ не может существовать в прямоугольном волноводе.

7-3. По прямому идеальному волноводу сечением $a \times b = 2,5 \times 5 \text{ см}^2$ передается волна ТМ с частотой $f = 7,5 \cdot 10^9 \text{ гц}$. Диэлектрик — воздух. В центре сечения амплитуда продольной составляющей вектора напряженности электрического поля равна $E_{zm} = 10^{-5} \text{ в/м}$. Найти амплитуды токов, протекающих по стенкам волновода.

О т в е т:

$$I_{m \text{ верх}} = I_{m \text{ ниж}} = 8,45 \text{ а}; I_{m \text{ бок}} = 2,11 \text{ а}.$$

7-4. Определить мощность, которая передается по волноводу. Данные те же, что и в задаче 7-3.

О т в е т:

$$2 \text{ 310 вт.}$$

7-5. Определить мощность, которая передается по прямоугольному идеальному волновому с сечением $2,5 \times 5 \text{ см}$. Тип волны TE₀₁. Частота $f = 7,5 \cdot 10^9 \text{ гц}$. Наибольшее значение амплитуды вектора напряженности электрического поля $E_m = 10^5 \text{ в/м}$.

О т в е т:

$$7 \text{ 500 вт.}$$

7-6. Решить задачу 7-5 для случая волн: TE₁₀, TE₀₂, TE₁₁.

О т в е т:

$$5 \text{ 020 вт; } 5 \text{ 020 вт; } 4 \text{ 600 вт.}$$

7-7. В каких точках поперечного сечения прямоугольного волновода будут узлы стоячей волны напряженности электрического поля при типах волн: TE₀₁; TE₀₂; T₁₀; T₂₀; TE₁₁; TE₁₂; TM₁₁; TM₁₂.

7-8. В каких точках поперечного сечения прямоугольного волновода будут узлы стоячей волны напряженности магнитного поля при волнах типа указанных в задаче 7-7.

7-9. Определить частоту собственных колебаний и собственную длину волны идеального прямоугольного резонатора, если даны размеры: $a = 10 \text{ см}$; $b = 20 \text{ см}$; $c = 30 \text{ см}$ и числа $m = 1$; $n = 0$; $p = 1$. Диэлектрик — воздух.

О т в е т:

$$5\,652 \cdot 10^6 \text{ 1/сек; } 333 \text{ м.}$$

7-10. В резонаторе, данные о котором приведены в задаче 7-9, максимальная амплитуда напряженности магнитного поля равна $E_m = 10^5 \text{ в/м}$. Определить энергию, сосредоточенную в поле резонатора.

О т в е т:

$$665 \cdot 10^{-7} \text{ дж.}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения диэлектрической проницаемости
и удельной проводимости различных материалов

Диэлектрическая проницаемость		Удельная проводимость	
Материал	$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}$	Материал	$\gamma, \text{ см/м}$
Воздух	1,0006	Серебро	$5,9-6,3 \cdot 10^7$
Лед	2-3	Медь	$5,6-5,9 \cdot 10^7$
Трансформаторное масло	2,2-2,5	Алюминий	$3,3-3,6 \cdot 10^7$
Полиэтилен	2,25-2,3	Железо, сталь	$1,0-1,4 \cdot 10^7$
Полистирол	2,3-2,5	Свинец	$4,7-4,9 \cdot 10^6$
Резина	2,5-2,8	Морская вода	3
Фарфор	5,0-6,5	Фарфор	$10^{-13}-10^{-12}$
Стекло	5-16,5	Стекло	$10^{-14}-10^{-11}$
Слюда	6-7	Слюда	$10^{-13}-10^{-11}$
Вода	80-81	Почва	$10^{-4}-10^{-2}$
Металлы	10	Речная вода	$10^{-2}-10^{-1}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Основные формулы векторной алгебры
и векторного анализа

Выражение вектора через проекции:

$$\mathbf{A} = iA_x + jA_y + kA_z = \mathbf{1}_A \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \mathbf{1}_A A;$$

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{x}) = \frac{A_x}{A}; \quad \cos(\mathbf{A}, \mathbf{y}) = \frac{A_y}{A};$$

$$\cos(\mathbf{A}, \mathbf{z}) = \frac{A_z}{A}.$$

Сумма двух векторов:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{S} = iS_x + jS_y + kS_z;$$

$$S_x = A_x + B_x; \quad S_y = A_y + B_y;$$

$$S_z = A_z + B_z.$$

Разность двух векторов:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{R} = iR_x + jR_y + kR_z;$$

$$R_x = A_x - B_x; \quad R_y = A_y - B_y;$$

$$R_z = A_z - B_z.$$

Скалярное произведение двух векторов:

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = AB \cos(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

Векторное произведение двух векторов:

$$[\mathbf{A}\mathbf{B}] = \mathbf{n} AB \sin(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = i(A_y B_z - A_z B_y) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x).$$

Оператор набла:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Градиент потенциала:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathbf{n}.$$

Выражение потенциала через градиент:

$$\varphi = \int \text{grad } \varphi \, dl + \text{const.}$$

Поток вектора:

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int_S A_n \, dS.$$

Дивергенция вектора:

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{A} \, d\mathbf{S}}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}.$$

Теорема Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} \, dV.$$

Циркуляция вектора:

$$\mathcal{U} = \oint_L \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \oint_L A_t \, dl.$$

Ротор вектора:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].$$

Проекция ротора на произвольно направленную ось:

$$|\text{rot } \mathbf{A}|_n = \text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{A} \, d\mathbf{l}}{\Delta S} = \frac{d\mathcal{U}}{dS},$$

где ΔS — площадь, нормальная к оси.

Теорема Стокса:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S},$$

где L — периметр поверхности S .

Лапласиан скаляра φ :

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi.$$

Лапласиан вектора $\mathbf{A}$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{i} (\nabla^2 A_x) + \mathbf{j} (\nabla^2 A_y) + \mathbf{k} (\nabla^2 A_z).$$

Ротор градиента:

$$\text{rot grad } \varphi = 0.$$

Дивергенция ротора:

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0.$$

Дивергенция произведения скаляра и вектора:

$$\text{div} (\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div } \mathbf{D} + \mathbf{D} \text{ grad } \varphi.$$

Дивергенция векторного произведения двух векторов:

$$\text{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}.$$

Ротор от ротора:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Дифференциальные операции векторного анализа в различных системах координат

Операция	Система координат		
	декартова x, y, z	цилиндрическая r, ψ, z	сферическая R, θ, ψ
$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$	$i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$i_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + i_\psi \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$i_R \frac{\partial \varphi}{\partial R} + i_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i_\psi \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi}$
$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{R^2} \frac{\partial (R^2 A_R)}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial (A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}$
$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi$	$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}$
$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}]$	$i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$	$i_r \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z} \right\} + i_\psi \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right\} + k \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial (r A_\psi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \psi} \right\}$	$i_R \frac{1}{R \sin \theta} \left\{ \frac{\partial (A_\psi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \psi} \right\} + i_\theta \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial A_R}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \psi} - \frac{\partial (R A_\psi)}{\partial R} \right\} + i_\psi \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial (R A_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right\}$

Единицы измерения основных величин

Наименование величины	Рационализи- рованная система СИ		Нерационализируемая система	
	Наимено- вание единицы	Обоз- наче- ние	СГСЭ	СГСМ
			1 единица равна	1 единица равна
Длина	метр	<i>м</i>	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$	$1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$
Время	секунда	<i>сек</i>	<i>сек</i>	<i>сек</i>
Масса	кило- грамм	<i>кг</i>	$1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$	$1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг}$
Скорость	—	<i>м/сек</i>	10^{-2} м/сек	10^{-2} м/сек
Сила	ньютон	<i>н</i>	$1 \text{ дина } (\partial \text{н}) = 10^{-5} \text{ н}$	10^{-5} н
Энергия	джоуль	<i>дж</i>	$1 \text{ эрг} = 10^{-7} \text{ дж}$	10^{-7} дж
Мощность	ватт	<i>вт</i>	10^{-7} вт	10^{-7} вт
Заряд	кулон	<i>к</i>	$\frac{1}{3} 10^{-9} \text{ к}$	10 к
Ток	ампер	<i>а</i>	$\frac{1}{3} 10^{-9} \text{ а}$	10 а
Плотность тока	—	<i>а/м²</i>	$\frac{1}{3} 10^{-5} \text{ а/м}^2$	10^5 а/м^2
Потенциал, Э. д. с., напряжение	вольт	<i>в</i>	300 в	10^{-8} в
Сопротивление	ом	<i>ом</i>	$9 \cdot 10^{11} \text{ ом}$	10^{-9} ом
Проводимость	сиemens	<i>сим</i>	$\frac{1}{9} 10^{-11} \text{ сим}$	10^9 сим
Индуктивность	генри	<i>гн</i>	$9 \cdot 10^{11} \text{ гн}$	$1 \text{ см} = 10^{-9} \text{ гн}$
Емкость	фарада	<i>ф</i>	$1 \text{ см} = \frac{1}{9} 10^{-11} \text{ ф}$	10^9 ф
Напряженность электрического поля	—	<i>в/м</i>	$3 \cdot 10^4 \text{ в/м}$	10^{-6} в/м
Электрическое смещение	—	<i>к/м²</i>	$\frac{1}{12\pi} 10^{-5} \text{ к/м}^2$	$\frac{1}{4\pi} 10^5 \text{ к/м}^2$
Магнитный поток	вебер	<i>вб</i>	300 вб	$1 \text{ максвелл (мкс)} = 10^{-8} \text{ вб}$
Магнитная ин- дукция	тесла	<i>тл</i>	$3 \cdot 10^8 \text{ тл}$	$1 \text{ гаусс (гс)} = 10^{-4} \text{ тл}$
Напряженность магнитного поля	—	<i>а/м</i>	$\frac{1}{12\pi} 10^{-7} \text{ а/м}$	$1 \text{ эрстед (э)} = \frac{1}{4\pi} 10^3 \text{ а/м}$

Модули и аргументы функций Бесселя нулевого и первого порядка:

$$J_0(w) = b_0 e^{j\beta_0}; \quad J_1(w) = b_1 e^{j\beta_1},$$

где: $w = \sqrt{-j} \, mr$

mr	b_0	β_0°	b_1	β_1°
0,0	1,0000	0,000	0,0000	—45,000
0,1	1,0000	0,150	0,0500	—44,931
0,2	1,0001	0,567	0,1000	—44,714
0,3	1,0002	1,283	0,1500	—44,350
0,4	1,0003	2,823	0,2000	—43,854
0,5	1,0010	3,617	0,2500	—43,213
0,6	1,0020	5,150	0,3001	—42,422
0,7	1,0037	7,000	0,3502	—41,489
0,8	1,0063	9,150	0,4010	—40,358
0,9	1,0102	11,550	0,4508	—39,207
1,0	1,0155	14,217	0,5014	—37,837
1,1	1,0226	17,167	0,5508	—36,343
1,2	1,0319	20,333	0,6032	—34,706
1,3	1,0439	23,750	0,6549	—32,928
1,4	1,0584	27,367	0,7070	—31,011
1,5	1,0768	31,183	0,7599	—28,952
1,6	1,0983	35,167	0,8136	—26,768
1,7	1,1243	39,300	0,8683	—24,451
1,8	1,1545	43,550	0,9233	—22,000
1,9	1,1890	47,883	0,9819	—19,428
2,0	1,2286	52,283	1,0411	—16,732
2,1	1,2743	56,750	1,1022	—13,923
2,2	1,3250	61,233	1,1659	—11,000
2,3	1,3810	65,717	1,2325	— 7,970
2,4	1,4421	70,183	1,3009	— 4,838
2,5	1,5111	74,650	1,3740	— 1,613
2,6	1,5830	79,114	1,4505	1,701
2,7	1,6665	83,499	1,5300	5,099
2,8	1,7541	87,873	1,6148	8,570
2,9	1,8486	92,215	1,7045	12,111
3,0	1,9502	96,518	1,7998	15,714
3,1	2,0592	100,789	1,9012	19,372
3,2	2,1761	105,032	2,0089	23,081
3,3	2,3000	109,252	2,1236	26,833
3,4	2,4342	113,433	2,2459	30,622
3,5	2,5759	117,605	2,3766	34,445
3,6	2,7285	121,760	2,5155	38,295
3,7	2,8895	125,875	2,6640	42,171
3,8	3,0613	129,943	2,8226	46,067

m	b_0	β_0°	b_1	β_1°
3,9	3,2443	134,096	2,9920	49,978
4,0	3,4391	138,191	3,1729	53,905
4,1	3,6463	142,279	3,3662	57,840
4,2	3,8671	146,361	3,5722	61,789
4,3	4,1015	150,444	3,7924	65,743
4,4	4,3518	154,513	4,0274	69,706
4,5	4,6179	158,586	4,2783	73,672
4,6	4,9012	162,657	4,5460	77,638
4,7	5,2015	166,726	4,8317	81,615
4,8	5,5244	170,795	5,1390	85,590
4,9	5,8696	174,865	5,4619	89,571
5,0	6,2312	178,933	5,8118	93,549
5,1	6,6203	—176,988	6,1793	97,533
5,2	7,0339	—172,929	6,5745	101,518
5,3	7,4752	—168,860	6,9960	105,504
5,4	7,9455	—164,781	7,4456	109,492
5,5	8,4473	—160,721	7,9253	113,482
5,6	8,9821	—156,652	8,4370	117,473
5,7	9,5524	—152,583	8,9830	121,465
5,8	10,160	—148,513	9,5657	125,459
5,9	10,809	—144,444	10,187	129,454
6,0	11,501	—140,375	10,850	133,452
6,1	12,239	—136,306	11,558	137,450
6,2	13,027	—132,238	12,313	141,452
6,3	13,865	—128,170	13,119	145,454
6,4	14,761	—124,103	13,978	149,458
6,5	15,717	—120,036	14,896	153,462
6,6	16,737	—115,969	15,876	157,469
6,7	17,825	—111,902	16,912	161,477
6,8	18,986	—107,836	18,038	165,486
6,9	20,225	—103,772	19,228	169,498
7,0	21,548	—99,706	20,500	173,510
7,1	22,959	—95,642	21,858	177,523
7,2	24,465	—91,578	23,308	—178,464
7,3	26,074	—87,514	24,856	—174,446
7,4	27,790	—83,460	26,509	—170,429
7,5	29,622	—79,378	28,274	—166,411
7,6	31,578	—75,326	30,158	—162,392
7,7	33,667	—71,264	32,172	—158,373
7,8	35,896	—67,202	34,321	—154,354
7,9	38,276	—63,141	36,617	—150,330
8,0	40,817	—59,080	39,070	—146,308
8,1	43,532	—55,019	41,691	—142,284
8,2	46,429	—50,958	44,487	—138,261

$m r$	b_0	ρ_0°	b_1	ρ_1°
8,3	49,524	—46,898	47,476	—134,236
8,4	52,829	—42,838	50,670	—130,210
8,5	56,359	—38,778	54,081	—126,185
8,6	60,129	—34,718	57,725	—122,158
8,7	64,155	—30,659	61,618	—118,132
8,8	68,455	—26,600	65,779	—114,104
8,9	73,049	—22,541	70,222	—110,075
9,0	77,957	—18,484	74,971	—106,047
9,1	83,199	—14,423	80,048	—102,019
9,2	88,796	—10,365	85,466	—97,989
9,3	94,781	—6,307	91,259	—93,959
9,4	101,128	—2,249	97,449	—89,929
9,5	108,003	1,811	104,063	—85,898
9,6	115,291	5,868	111,131	—81,867
9,7	123,110	9,925	118,683	—77,836
9,8	131,429	13,983	126,752	—73,803
9,9	140,300	18,041	135,374	—69,771
10	149,831	22,099	144,586	—65,734

ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл Д. К., Избранные сочинения по теории электромагнитного поля, Гостехиздат, 1952.
2. Анго А., Математика для электро- и радионженеров, изд-во «Наука», 1964.
3. Бессонов Л. А., Теоретические основы электротехники, изд-во «Высшая школа», 1967.
4. Брунов Б. Я., Гольденберг Л. М., Кляцкин И. Г., Цейтлин Л. А., Теории электромагнитного поля, Госэнергоиздат, 1962.
5. Говорков В. А., Электрические и магнитные поля, изд-во «Энергия», 1967.
6. Говорков В. А., Купалян С. Д., Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах, изд-во «Высшая школа», 1970.
7. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В., Электромагнитные поля и волны, изд-во «Советское радио», 1956.
8. Даревский А. И., Кухаркин Е. С., Основы теории электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1965.
9. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С., Теоретические основы электротехники, Госэнергоиздат, 1961.
10. Круг К. А., Основы электротехники, Госэнергоиздат, 1952.
11. Кугушев А. М., Голубева Н. С., Основы радиоэлектроники, изд-во «Энергия», 1969.
12. Лавров В. М., Теория электромагнитного поля и основы распространения радиоволн, изд-во «Связь», 1964.
13. Нейман Л. Р., Демирчян К. С., Теоретические основы электротехники, тт. 1 и 2, изд-во «Энергия», 1966.
14. Нейман Л. Р., Демирчян К. С., Юринов В. М., Руководство к лаборатории электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1966.
15. Нетушил А. В., Поливанов К. М., Основы электротехники, ч. 3, Госэнергоиздат, 1956.
16. Никольский В. В., Теория электромагнитного поля, изд-во «Высшая школа», 1964.
17. Поливанов К. М., Теоретические основы электротехники, ч. 3, изд-во «Энергия», 1969.
18. Тамм И. Е., Основы теории электричества, изд-во «Наука», 1966.
19. Топтыгин И. Н., Батыгин В. В., Сборник задач по электродинамике, Физматгиз, 1962.
20. Федоров Н. Н., Основы электродинамики, изд-во «Энергия» 1965.
21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., Основы электродинамики, изд-во «Мир», 1965. Фейнмановские лекции по физике, тт. 5 и 6, изд-во «Мир», 1966.
22. Шимони К., Теоретическая электротехника, изд-во «Мир», 1964.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютная диэлектрическая про-
 ницаемость 13
 — магнитная проницаемость 68
 Активное сопротивление 165
 Бегущая волна 132
 Близкая зона поля вибратора маг-
 нитного 127
 — — — — электрического 121
 Вектор Пойнтинга 108
 — — комплексный 165
 Векторный потенциал 72
 — — поля линейного тока 73
 Вибратор элементарный магнитный
 126
 — — электрический 118
 Вихревые токи 174
 Волновая зона поля вибратора
 магнитного 128
 — — — — электрического 122
 Волновое сопротивление 123, 128,
 132
 Глубина проникновения волны 151
 Граничные условия в магнитном
 поле 74, 75
 — — — — электрическом поле 26,
 27
 — — — — электромагнитном поле
 117
 Групповая скорость 142
 Дальняя зона поля вибратора маг-
 нитного 128
 — — — — электрического 122
 Диэлектрическая восприимчивость
 21
 — проницаемость 13
 — комплексная 136
 Длина волны в волноводе 187, 208
 — — — — неограниченной среде 134
 — — — — резонаторе 225
 Добротность резонатора 228
 Емкость двухпроводной линии 46
 — коаксиального кабеля 46
 Емкостные коэффициенты 53
 Закон Био-Савара — Лапласа 68
 — Джоуля — Ленца 61
 — Кулона 12
 — отражения 155
 — полного тока 71
 — преломления 155
 — электромагнитной индукции 104
 Законы Кирхгофа 61
 Запаздывающие потенциалы элект-
 родинамические 112
 Заряды свободные 21
 — связанные 21
 Излучение электромагнитных волн
 117
 Индуктивность двухпроводной ли-
 нии внутренняя 88, 160
 — — — — полная 89
 — коаксиального кабеля 94
 Коаксиальная линия 228
 Коэффициент затухания волны в
 волноводе 212
 — — плоской волны 134
 — отражения 149
 — преломления 150
 — распространения волны в вол-
 новоде 211
 — — плоской волны 132
 — фазы волны в волноводе 186,
 208
 — — плоской волны 134
 Линии вектора магнитной индук-
 ции 70, 224
 — — напряженности электриче-
 ского поля 20, 224
 Лоренцова сила 81
 Магнитная восприимчивость 69
 — индукция 67
 — постоянная 68
 — проницаемость 68
 Магнитный диполь 126
 — поток 70
 Метод зеркальных изображений 36,
 95
 — наложения 33
 — последовательных приближений
 167
 — сеток 51
 Мощность излучения 125, 128
 — потерь в волноводе прямоуголь-
 ном 213
 — — — — цилиндрическом 216
 — — — — проводящей среде 140,
 141
 Намагниченность 69
 Напряжение 64
 Напряженность магнитного поля 69
 — электрического поля 13
 Непрерывность магнитного потока
 70
 — полного тока 102
 — постоянного тока 65
 Обобщенные электродинамические
 потенциалы 112
 Объемный резонатор 218, 219
 Отражение плоских волн 147, 148
 Отраженная волна 132
 Падающая волна 132

Параметры плоской волны 133—135
 Плотность заряда линейного 12
 — — — объемного 11
 — — — поверхностного 11
 — — — поверхностного тока 152
 — — — полного тока 100
 — — — тока переноса 99
 — — — проводимости 98
 — — — смещения в диэлектрике 99
 — — — — — пустоте 99
 Поверхностный эффект 159
 — — — в ленточной линии 176
 — — — цилиндрическом проводе 160
 Полная система уравнений Максвелла 105
 Поляризация волны круговая 147
 — — — линейная 130
 — — — эллиптическая 147
 Потенциал скалярный магнитный 72
 — — — электрический 17
 — — — электродинамический 112
 Потери в волноводе прямоугольном 213
 — — — — цилиндрическом 216
 Преломление плоских волн 147, 153
 Проводимость изоляции кабеля 66
 Распространение плоской волны в диэлектрике 137
 — — — — полупроводящей среде 131
 — — — — проводящей среде 139
 — — — сферической волны в диэлектрике 123
 Силы, действующие в магнитном поле 81
 — — — — электрическом поле 30
 Скалярный потенциал магнитного поля 72
 — — — — электрического поля 72
 — — — — электромагнитного поля 112
 Сопротивление волновое 123, 128, 132
 — — — излучения 125, 128
 Стоячие электрическое поле 58
 Стоячая волна 152
 Сферическая волна 123
 Теорема Гаусса 21
 — — — в дифференциальной форме 23
 — — — единственности 24, 111

Теорема Умова — Пойнтинга 107
 — — — в комплексной форме 165
 Ток переноса 99
 — — — поляризации 99
 — — — проводимости 99
 — — — смещения в диэлектрике 99
 — — — — — пустоте 99
 Угол отражения 153
 — — — падения 153
 — — — преломления 153
 Уравнение Бесселя 162, 198
 — — — волновое 129
 — — — Даламбера 115
 — — — Лапласа 23
 — — — Максвелла второе 104
 — — — первое 102
 — — — непрерывности 102
 — — — Пуассона 24
 Уравнения Максвелла в комплексной форме 109
 Фазовая скорость волны в волноводе 187
 — — — — плоской 133
 Формулы Френеля 156, 157
 Цилиндрический волновод 196, 216
 Циркуляция векторного потенциала 73
 — — — напряженности магнитного поля 71
 — — — — электрического поля 16
 Частичные емкости 53
 Частота критическая прямоугольного волновода 180, 185
 — — — цилиндрического волновода 180, 201
 — — — собственных колебаний резонатора 224
 Эквипотенциальная линия 19, 20
 — — — поверхность 19, 20
 Электрическая индукция 14, 21
 — — — постоянная 13
 Электрический диполь 118
 Электрическое смещение 14, 21
 Электродвижущая сила 59
 Электродинамические потенциалы 112, 115
 Электростатический экран 25
 Энергия поля магнитного 76
 — — — — электрического 29
 — — — — электромагнитного 107
 Эффект Холла 84

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	5
Предисловие к первому изданию	6
Введение	9
Глава первая. Электростатическое поле	11
1-1. Электрический заряд	11
1-2. Напряженность электростатического поля	13
1-3. Безвихревой характер электростатического поля	16
1-4. Электрический потенциал	17
1-5. Графическое изображение электростатического поля	19
1-6. Поляризованность диэлектрика и электрическая индукция	20
1-7. Теорема Гаусса	21
1-8. Теорема Гаусса в дифференциальной форме	23
1-9. Уравнения Пуассона и Лапласа	23
1-10. Теорема единственности	24
1-11. Проводники в электростатическом поле	25
1-12. Граничные условия в электростатическом поле	26
1-13. Энергия взаимодействия точечных заряженных тел	28
1-14. Энергия электростатического поля	29
1-15. Силы, действующие в электрическом поле	30
1-16. Методы расчета электростатических полей	33
1-17. Распределение потенциалов и зарядов в системе проводящих тел	52
1-18. Задачи и вопросы для самопроверки	55
Глава вторая. Электрическое поле в проводящих средах	56
2-1. Ток и плотность тока проводимости	56
2-2. Закон Ома в дифференциальной форме	58
2-3. Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме	61
2-4. Первый закон Кирхгофа в дифференциальной форме	61
2-5. Граничные условия	62
2-6. Поле шарового электрода	64
2-7. Аналогия между электрическим полем постоянного тока и электростатическим полем	65
2-8. Задачи и вопросы для самопроверки	66
Глава третья. Магнитное поле, постоянное во времени	66
3-1. Основные величины, характеризующие магнитное поле	66
3-2. Магнитный поток и его непрерывность	70

3-3. Закон полного тока	71
3-4. Векторный потенциал магнитного поля	72
3-5. Зависимость между магнитным потоком и векторным потенциалом	73
3-6. Граничные условия в магнитном поле	74
3-7. Энергия магнитного поля	76
3-8. Движение заряженной частицы в магнитном поле	78
3-9. Методы расчета магнитных полей	84
3-10. Задачи и вопросы для самопроверки	97
Глава четвертая. Электромагнитное поле	98
4-1. Полный электрический ток	98
4-2. Дивергенция плотности тока проводимости	100
4-3. Непрерывность полного тока	102
4-4. Первое уравнение Максвелла	102
4-5. Второе уравнение Максвелла	103
4-6. Полная система уравнений электромагнитного поля	105
4-7. Теорема Умова — Пойнтинга	107
4-8. Уравнения Максвелла в комплексной форме записи	109
4-9. Теорема единственности решения уравнений Максвелла	111
4-10. Запаздывающие или обобщенные электродинамические потенциалы	112
4-11. Излучение электромагнитных волн	117
4-12. Поле вибратора в ближней зоне	121
4-13. Поле вибратора в дальней зоне	122
4-14. Мощность и сопротивление излучения	125
4-15. Излучение рамочной антенны	126
4-16. Задачи и вопросы для самопроверки	129
Глава пятая. Плоские электромагнитные волны	130
5-1. Основные определения	130
5-2. Уравнение плоской волны	131
5-3. Исследование волн	133
5-4. Распространение плоской волны в идеальном диэлектрике	137
5-5. Распространение плоской волны в хорошо проводящей среде	139
5-6. Групповая скорость	142
5-7. Поляризация электромагнитных волн	144
5-8. Отражение и преломление волны на плоской поверхности при нормальном падении	147
5-9. Наклонное падение плоской волны	153
5-10. Задачи и вопросы для самопроверки	158
Глава шестая. Поверхностный эффект	159
6-1. Явление поверхностного эффекта	159
6-2. Поверхностный эффект в цилиндрическом проводнике	160
6-3. Активное сопротивление и внутренняя индуктивность цилиндрического провода с учетом поверхностного эффекта	165
6-4. Метод последовательных приближений	167
6-5. Переменный магнитный поток в плоском листе	172
6-6. Поверхностный эффект в ленточной линии	176
6-7. Задачи и вопросы для самопроверки	178

Глава седьмая. Волноводы и объемные резонаторы	179
7-1. Общие понятия	179
7-2. Прямоугольный волновод	180
7-3. Распространение поперечной электрической волны ТЕ в прямоугольном волноводе	183
7-4. Критическая частота и параметры волны в волноводе	185
7-5. Распространение волны TE_{10} в прямоугольном волноводе	189
7-6. Распространение поперечной магнитной волны ТМ в прямоугольном волноводе	193
7-7. Цилиндрические волноводы круглого сечения	196
7-8. Распространение поперечной магнитной волны ТМ в цилиндрическом волноводе	197
7-9. Распространение волны TM_{10} в цилиндрическом волноводе	203
7-10. Распространение поперечной электрической волны ТЕ в цилиндрическом волноводе	205
7-11. Распространение волны TE_{10} в цилиндрическом волноводе	209
7-12. Потери энергии в волноводах	211
7-13. Объемные резонаторы	218
7-14. Прямоугольный объемный резонатор	220
7-15. Частота собственных колебаний резонатора	224
7-16. Волна простейшего типа в прямоугольном резонаторе	225
7-17. Коаксиальные линии	228
7-18. Задачи и вопросы для самопроверки	234
<i>Приложение 1. Значения диэлектрической проницаемости и удельной проводимости различных материалов . . .</i>	<i>235</i>
<i>Приложение 2. Основные формулы векторной алгебры и векторного анализа</i>	<i>235</i>
<i>Приложение 3. Дифференциальные операции векторного анализа в различных системах координат</i>	<i>238</i>
<i>Приложение 4. Единицы измерения основных величин</i>	<i>239</i>
<i>Приложение 5. Модули и аргументы функций Бесселя нулевого и первого порядка</i>	<i>240</i>
<i>Литература</i>	<i>243</i>
<i>Алфавитный указатель</i>	<i>244</i>

