

Сборник задач по теории механизмов и машин. Автор-составитель И. И. Артоболевский и Э. Б. Эдельштейн. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975, 256 стр.

Сборник содержит 386 типовых задач по теории механизмов и машин и соответствует программе, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования СССР. В сборник включены задачи по теории структуры механизмов, кинематике, кинестатике и динамике механизмов с высшими и низшими парами.

Сборник предназначен для студентов машиностроительных, механических и приборостроительных специальностей, изучающих курс теории механизмов и машин. Каждый раздел задачника снабжен кратким методическим введением с примерами решения типовых задач, что облегчает использование сборника студентами заочных факультетов.

*Иван Иванович Артоболевский, Борис Витальевич Эдельштейн*

**СБОРНИК ЗАДАЧ  
ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

М., 1975 г., 256 стр. с илл.

Редакторы *И. И. Розальская и Л. Г. Овакимян.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.* Корректор *Н. Д. Дорхова.*

Печать с матриц. Подписано к печати 7/IV 1975 г. Бумага 60×90<sup>1/16</sup>, тип. № 1. Физ. печ. л. 16. Условн. печ. л. 16. Уч.-изд. л. 16,94. Тираж 63 000 экз. Цена книги 61 коп. Заказ № 1925.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26.

30106—067  
А 053 (02)-75 141-75

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
-----------------------	---

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

#### ГЛАВА ПЕРВАЯ СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

§ 1. Структура механизмов. Основные определения . . . . .	7
§ 2. Классификация механизмов . . . . .	8
§ 3. Составление кинематических схем механизмов . . . . .	15
§ 4. Классификация плоских механизмов . . . . .	16

#### ГЛАВА ВТОРАЯ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 5. Аналитическое определение положений, скоростей и ускорений звеньев механизмов . . . . .	33
§ 6. Планы положений, скоростей и ускорений механизмов . . . . .	37
§ 7. Нахождение мгновенных центров скоростей и ускорений. Построение центроид . . . . .	62
§ 8. Кинематический анализ передач . . . . .	65

#### ГЛАВА ТРЕТЬЯ СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 9. Определение сил инерции в механизмах . . . . .	78
§ 10. Уравновешивание сил инерции звеньев механизмов . . . . .	85
§ 11. Трение в кинематических парах . . . . .	96
§ 12. Силовой расчет механизмов. Определение реакций в кинематических парах . . . . .	103
§ 13. Применение рычага Жуковского для определения уравновешивающей силы . . . . .	118

#### ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 14. Приведение сил (моментов) и масс (моментов инерции) в механизмах . . . . .	124
§ 15. Определение закона движения звена приведения машинного агрегата . . . . .	131

§ 16. Определение маховых масс машинного агрегата . . . . .	158
§ 17. Определение механического коэффициента полезного действия . . . . .	175
§ 18. Динамика механизмов с переменной массой звеньев . . . . .	181

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ (КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ)

#### ГЛАВА ПЯТАЯ

##### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫШШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

19. Проектирование центроидных механизмов . . . . .	187
20. Проектирование механизмов со взаимогнбаемыми профилями . . . . .	192
21. Проектирование трехзвенных фрикционных механизмов . . . . .	199
22. Проектирование трехзвенных зубчатых передач . . . . .	201
23. Проектирование одноступенчатых планетарных зубчатых передач . . . . .	211
24. Проектирование кулачковых механизмов . . . . .	214

#### ГЛАВА ШЕСТАЯ

##### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С НИЖШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

§ 25. Задача о существовании кривошипа . . . . .	231
§ 26. Задача о положениях . . . . .	232
<b>Ответы к задачам</b> . . . . .	235
Перевод единиц МКГСС (технической) в единицы системы МКС (СИ) . . . . .	254
Таблица значений эвольвентной функции (Приложение 1) . . . . .	255
Таблица значений $\cos \alpha$ (Приложение 2) . . . . .	255
Условные обозначения, принятые в тексте (Приложение 3) . . . . .	256

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельное решение учащимися ряда примеров по каждому отделу курса теории механизмов и машин имеет большое значение: оно не только учит практическому применению методов кинематического и динамического анализа и синтеза механизмов, не только развивает расчетную технику, но и обогащает учащегося представлением о новых, ему еще неизвестных схемах механизмов и их свойствах, тем самым расширяя его технический кругозор.

При составлении настоящего сборника задач по теории механизмов и машин авторы стремились привести в нем примеры механизмов, взятых из различных областей техники и представляющих интерес не только с учебной точки зрения, но и с точки зрения их использования при решении различных инженерных задач.

Порядок изложения учебного материала в настоящем сборнике соответствует принятой в большинстве вузов последовательности прохождения курса теории механизмов и машин.

В методических указаниях, предшествующих каждому параграфу, дается решение типовых задач. Все задачи, предлагаемые в сборнике, снабжены ответами. Если по условию задачи предусматривается графическое решение, то ответ содержит необходимый чертеж.

Методические указания и отделы задачника соответствуют учебнику: И. И. Артоболовский, Теория механизмов, изданному в издательстве «Наука» в 1967 году.

В конце ряда методических указаний имеется ссылка на соответствующие параграфы этого учебника для тех студентов, которые пожелают более подробно ознакомиться с теорией вопросов, рассматриваемых в задачах.

В задачнике, согласно ГОСТ 9867-61, используется международная система единиц измерения СИ (SI). В конце книги приводится таблица перевода единиц измерения системы МКГСС в единицы измерения СИ.



Авторы стремились к тому, чтобы сборник мог служить полезным учебным пособием не только для студентов очной системы обучения, но и для учащихся вечерних и заочных вузов.

Особую благодарность авторы приносят профессору А. П. Бессонову, доценту А. В. Желиговскому и кафедре теории механизмов и машин Московского технологического института пищевой промышленности (заведующий кафедрой профессор В. В. Горгинский), сделавшим ряд ценных замечаний при рецензировании рукописи, а также своим коллегам по кафедре теории механизмов и машин Московского ордена Ленина авиационного института им. С. Орджоникидзе, взявшим на себя труд внимательного просмотра всей рукописи в целом, содержания отдельных задач, ответов к ним и разрешившим воспользоваться рядом примеров, которые были использованы в их преподавательской деятельности. Авторы благодарны также доценту кафедры теории механизмов и машин Всесоюзного заочного машиностроительного института Л. Г. Овакимяну, проведшему тщательное научное редактирование рукописи.

Авторы просят все замечания по настоящему изданию направлять по адресу: Москва В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, для И. И. Артоболевского и Б. В. Эдельштейна.

Авторы

## ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

### АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

#### ГЛАВА ПЕРВАЯ

#### СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

##### § 1. Структура механизмов. Основные определения

1°. *Механизмом* называется искусственно созданная система тел, предназначенная для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Одно или несколько жестко соединенных твердых тел, входящих в состав механизма, называется *звеном*. Звено, принимаемое за неподвижное, называется *стойкой*. Звенья механизма, положения которых назначаются непосредственно значением выбранных независимых параметров — *обобщенных координат*, называются *ведущими*, а звенья механизма, положения и перемещения которых однозначно зависят от положений и перемещений ведущих звеньев, называются *ведомыми*.

2°. *Кинематической парой* называется соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение. Поверхности, линии, точки звена, по которым оно может соприкасаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются *элементами* кинематической пары.

3°. *Кинематической цепью* называется связанная система звеньев, образующих между собою кинематические пары. Кинематические цепи подразделяются на простые и сложные, замкнутые и незамкнутые.

*Простой кинематической цепью* называется цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

*Сложной кинематической цепью* называется цепь, у которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

*Замкнутой кинематической цепью* называется цепь, каждое звено которой входит по крайней мере в две кинематические пары.

*Незамкнутой кинематической цепью* называется цепь, у которой есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

4°. Подавляющее большинство механизмов, применяющихся в инженерной практике, образованы замкнутыми кинематическими цепями. Поэтому механизм (состоящий только из твердых тел) может быть определен также следующим образом.

*Механизмом* называется кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) относительно любого из них (стойки) все остальные звенья (ведомые) совершают однозначно определяемые движения.

Число степеней свободы механизма относительно стойки называют *степенью подвижности* и обычно обозначают буквой  $w$ . Большинство механизмов, используемых в технике, имеют степень подвижности, равную единице, но иногда встречаются механизмы с двумя и более степенями подвижности; такие механизмы называются *дифференциальными*.

5°. В сборнике принята классификация кинематических пар по Артоболевскому. Все кинематические пары разделяются на *пять* классов. Номер класса

кинematicкой пары определяется числом условий связи, которые наложены на движение одного звена пары относительно другого. Отсюда следует, что пара I класса может быть названа *плитподвижной*, пара II класса — *четырёхподвижной* и т. д.

Для решения вопроса, к какому классу относится та или иная кинematicкая пара, следует поступать так. Одно из звеньев, входящих в кинematicкую пару, представить неподвижным. Связать с ним систему координат  $Oxyz$  и, ориентируясь по ней, проследить, какие движения другого звена пары невозможны из шести движений, которые оно имело бы возможность совершать, не входя в пару. Число этих невозможных движений (как равное числу связей в паре) представит собою номер класса пары.

На рис. 1 изображена низшая (сферическая) кинematicкая пара. Элементом кинematicкой пары на первом звене является сферическая поверхность радиуса  $R$ , а на звене 2 — сферическая поверхность того же радиуса  $R$ , охватывающая сферическую поверхность на звене 1. Проведя через центр  $O$  сферы прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , связанную со звеном 1, замечаем, что звено 2 не может перемещаться поступательно вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , но может свободно вращаться вокруг этих же осей. Следовательно, эту кинematicкую пару надо отнести к третьему классу (невозможны три из шести движений).

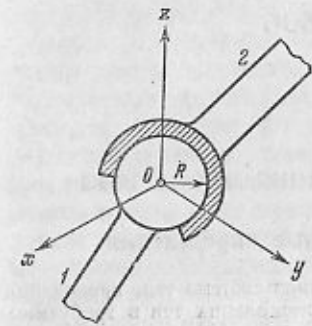


Рис. 1. Сферическая кинematicкая пара.

Рассмотрим еще один пример. Пусть (рис. 1) на движение звеньев, входящих в сферическую пару, наложено условие, что они совершают плоскопараллельное движение относительно плоскости  $Oyz$ . В данном случае, помимо ранее наложенных связей, появились еще две общие связи — невозможность вращения вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$ . Эту кинematicкую пару надо отнести к пятому классу.

(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 1, 2, 11—14.)

### ЗАДАЧИ 1—10

Определить класс кинematicкой пары, образованной звеньями 1 и 2. Указать, какие из шести независимых движений (трех поступательных и трех вращательных) одного звена относительно другого невозможны в кинematicкой паре.

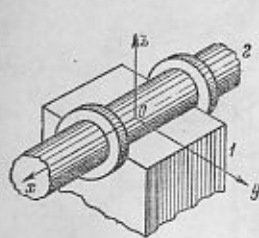
### ЗАДАЧИ 11—14

Определить класс кинematicкой пары, образованной звеньями 1 и 2, если оба звена, вошедшие в кинematicкую пару, совершают плоскопараллельное движение относительно плоскости  $Oyz$ .

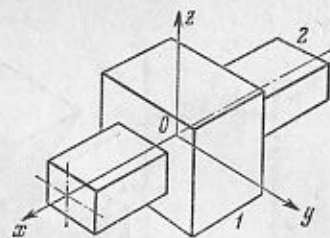
## § 2. Классификация механизмов

1°. Все механизмы можно разделить на *плоские* и *пространственные*. У плоского механизма точки его звеньев описывают траектории, лежащие в параллельных плоскостях. У пространственного механизма точки его звеньев описывают неплоские траектории или траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях.

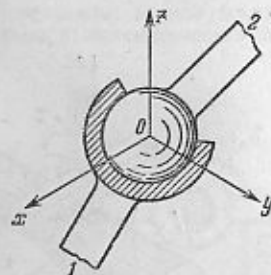
На рис. 2 изображен плоский шарнирный четырехзвенный механизм, а на рис. 3 — плоский механизм двухступенчатого редуктора. На рис. 4 показан пространственный механизм. На рис. 5 изображена пространственная зубчатая передача, образованная коническими колесами.



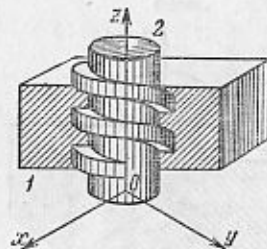
К задаче 1.



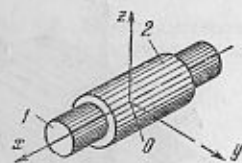
К задаче 2.



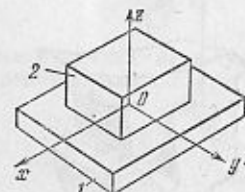
К задаче 3.



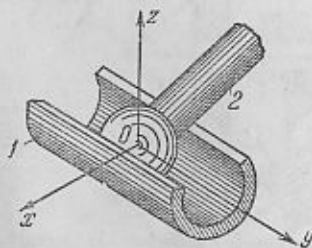
К задаче 4.



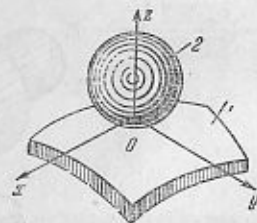
К задаче 5.



К задаче 6.

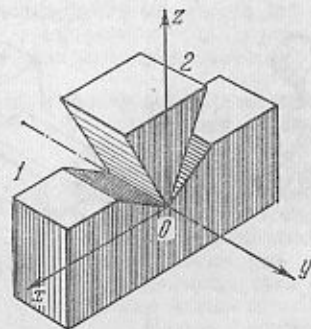


К задаче 7.

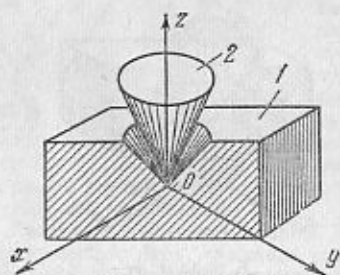


К задаче 8.

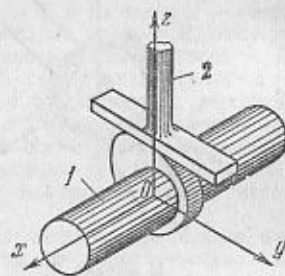




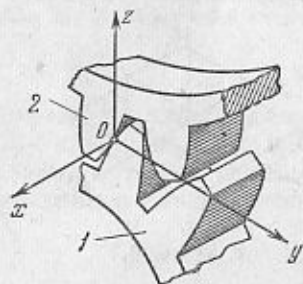
К задаче 9.



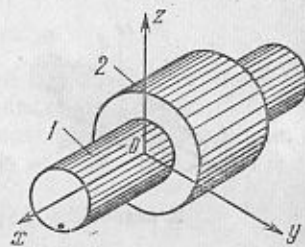
К задаче 10.



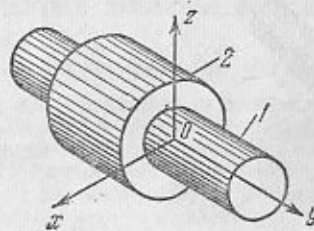
К задаче 11.



К задаче 12.



К задаче 13.



К задаче 14.

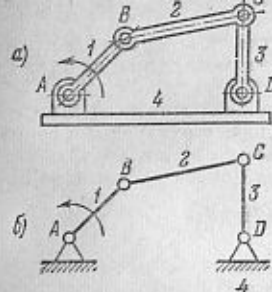


Рис. 2. Плоский шарнирный четырехзвенный механизм: а) полуконструктивная схема, б) кинематическая схема.

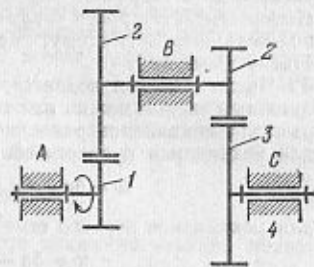


Рис. 3. Двухступенчатый редуктор с цилиндрическими зубчатыми колесами.

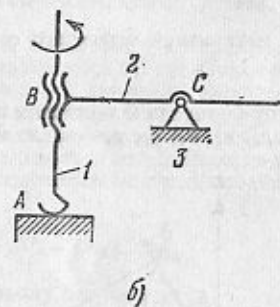
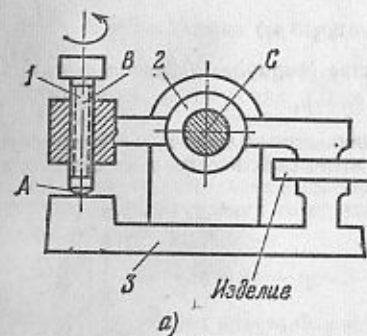


Рис. 4. Пространственный механизм зажима: а) полуконструктивная схема, б) кинематическая схема.

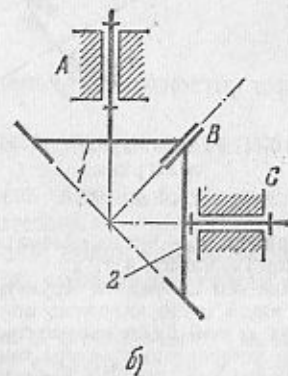
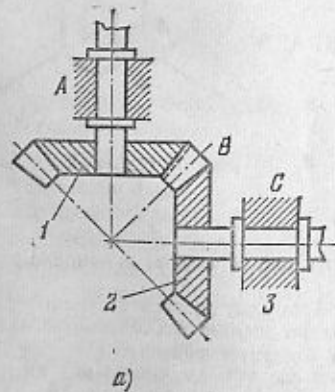


Рис. 5. Зубчатая передача с коническими колесами: а) полуконструктивная схема, б) кинематическая схема.

2°. Механизмы различаются еще по семействам, которых существует пять — от нулевого до четвертого.

Номер семейства равен числу общих условий связи, которые наложены на все звенья механизма. Поэтому, например, плоские механизмы следует отнести к третьему семейству.

3°. Число степеней подвижности замкнутой кинематической цепи с одним неподвижным звеном можно найти, воспользовавшись структурными формулами, которые для механизмов различных семейств имеют следующий вид:

для механизмов нулевого семейства (формула Сомова — Малышева):

$$\omega = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (2.1)$$

для механизмов первого семейства:

$$\omega = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2, \quad (2.2)$$

для механизмов второго семейства:

$$\omega = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3, \quad (2.3)$$

для механизмов третьего семейства — плоских и сферических (формула Чебышева):

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (2.4)$$

для механизмов четвертого семейства (формула Добровольского):

$$\omega = 2n - p_5. \quad (2.5)$$

В этих формулах  $\omega$  — степень подвижности механизма,  $n$  — число подвижных звеньев,  $p_5, p_4, p_3, p_2, p_1$  — число кинематических пар соответствующих классов.

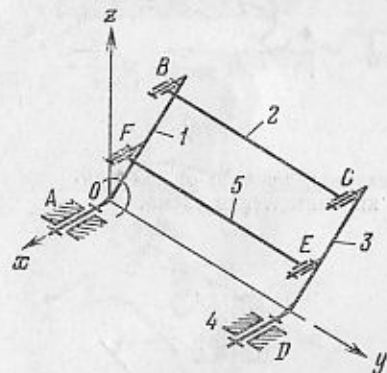


Рис. 6. Плоский шарнирный параллелограмм.

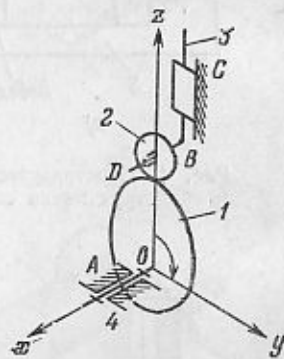


Рис. 7. Плоский кулачковый механизм.

гут перемещаться поступательно вдоль оси  $Ox$  и вращаться вокруг осей  $Oy$  и  $Oz$ . Следовательно, оба эти механизма принадлежат к *третьему* семейству.

В механизме на рис. 6 длины звеньев (расстояния между осями шарниров) подобраны так, что изменяемая фигура  $ABCD$  всегда будет параллелограммом: ( $l_{AB} = l_{CD}$ ,  $l_{BC} = l_{AD}$ ). Вследствие того, что  $l_{AF} = l_{ED}$  и  $l_{EF} = l_{AD}$ , звено 5 не стесняет движения остальных звеньев. Поэтому оно должно быть отнесено к *пассивной* связи и не учитывается при подсчете числа подвижных звеньев  $n$ . При отброшенном звене 5 степень подвижности механизма по формуле (2.4) равна

$$\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Это означает, что для придания определенности движения звеньям механизма достаточно задать движение одному звену.

Если бы не была отброшена пассивная связь (звено 5 и кинематические пары пятого класса  $F$  и  $E$ ), то при подсчете степени подвижности был бы получен неверный результат, так как в этом случае степень подвижности  $\omega$  была бы равна

$$\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0,$$

т. е. вместо механизма должна бы быть жесткая неизменяемая система, являющаяся фермой.

На рис. 7 представлен плоский кулачковый механизм, у которого на конце толкателя 3 имеется круглый ролик 2, поворачивающийся вокруг своей оси. Если ролик жестко связать с толкателем, то от этого закон движения толкателя, очевидно, не изменится. Круглый ролик, свободно поворачивающийся вокруг своей оси, вносит в механизм *лишнюю степень свободы*, и при подсчете степени подвижности механизма это вращательное движение принимается во внимание не должно. Считая, что ролик жестко связан с толкателем, подсчитываем степень подвижности механизма по формуле (2.4):

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Формальный же подсчет привел бы нас к такому результату:

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 15—17 и §§ 19, 20.)

## ЗАДАЧИ 15—20

15. Определить семейство и степень подвижности торцевого кулачкового механизма.
16. Определить семейство и степень подвижности винтового механизма.
17. Определить семейство и степень подвижности механизма зубчатой передачи с коническими колесами.
18. Определить семейство и степень подвижности механизма одинарного шарнира Гука (оси всех его вращательных пар пересекаются в одной точке  $O$ ).
19. Определить семейство и степень подвижности механизма шарнирного четырехзвенника (оси вращательных пар  $A, B, C$  и  $D$  параллельны).
20. Определить семейство и степень подвижности механизма гидропривода.

Так, например,  $p_5$  — число кинематических пар V класса,  $p_4$  — число кинематических пар IV класса и т. д.

Прежде чем применять структурные формулы, следует установить, сколько общих условий связи наложено на движение звеньев исследуемого механизма. Число этих связей будет соответствовать номеру семейства.

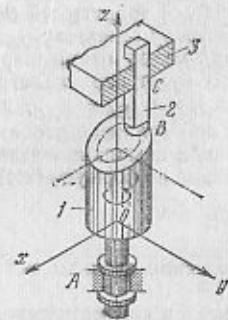
После установления номера семейства следует выяснить, нет ли в данном механизме звеньев, которые накладывают *пассивные* связи или вносят *лишние* степени свободы, не влияющие на кинематику основных звеньев механизма.

На рис. 6 и 7 показаны два механизма, которые надо отнести к плоским, так как на движения их звеньев наложены по три общих условия связи: звенья не мо-

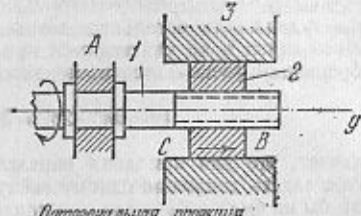


1°. Кинематическая схема механизма дает полное представление о структуре механизма и определяет его кинематические свойства. Она является графическим изображением механизма посредством условных обозначений звеньев и кинематических пар с указанием размеров, которые необходимы для кинематического анализа механизма.

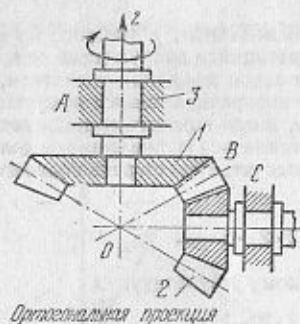
На кинематических схемах механизмов звенья, как правило, изображаются отрезками прямых и нумеруются арабскими цифрами. Кинематические пары в пространственных механизмах обозначаются большими буквами латинского



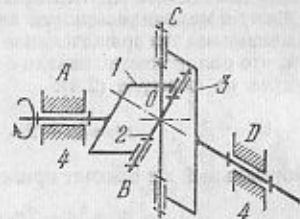
К задаче 15.



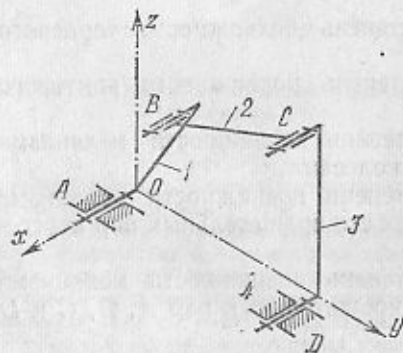
Ортogonalная проекция  
К задаче 16.



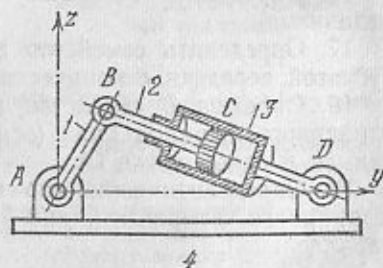
К задаче 17.



К задаче 18.



К задаче 19.



К задаче 20.

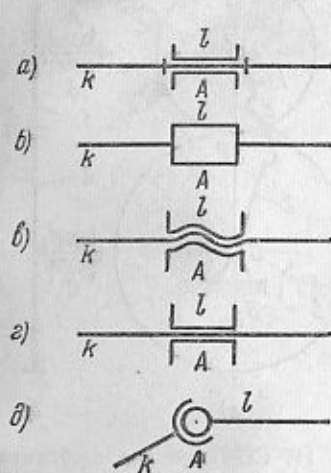


Рис. 8. Схематическое изображение кинематических пар в пространственных механизмах: а) вращательная V класса (низшая), б) поступательная V класса (низшая), в) винтовая V класса (низшая), г) цилиндрическая IV класса (низшая), д) сферическая III класса (высшая).

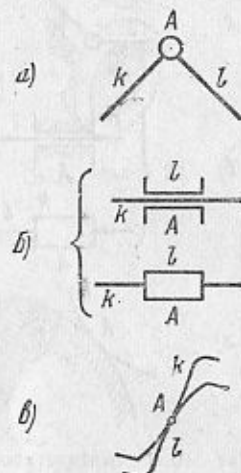


Рис. 9. Схематическое изображение кинематических пар в плоских механизмах: а) вращательная (шарнир) V класса (низшая), б) поступательная V класса (низшая), в) IV класса (высшая).

алфавита и схематически изображаются так, как это сделано на рис. 8. Схематическое изображение кинематических пар плоских механизмов показано на рис. 9. Элементы высшей пары очерчиваются кривыми, которыми они характеризуются в натуре. Стойку (неподвижное звено) принято выделять штриховкой (рис. 10). 2°. Для построения кинематической схемы механизма рекомендуется следующая последовательность действий.

1. Установить основное кинематическое назначение механизма. Например, механизм на рис. 7 предназначен для преобразования вращательного движения кулачка 1 в поступательное движение толкателя 3.
2. Подсчитать общее число звеньев  $k$ , включая стойку. Число  $n$  подвижных звеньев будет равно  $n = k - 1$ .
3. Выяснить, сколько наложено на подвижные звенья механизма общих условий связи, и по их числу установить номер семейства механизма.
4. Подсчитать и установить класс кинематических пар, а также найти степень подвижности механизма.
5. Вычертить схему механизма. Начинать ее надо с нанесения на чертёж неподвижных элементов кинематических пар, т. е. элементов, принадлежащих

стойке. Далее следует вычертить ведущие звенья, входящие в кинематические пары со стойкой. (Число этих звеньев соответствует найденной ранее степени подвижности.) Затем надо нанести на чертеж кинематическую цепь, образующую ведомую часть механизма.

При составлении схемы плоских механизмов чертеж должен совпадать с плоскостью, параллельно которой движутся точки звеньев механизма. Исключение составляют передачи

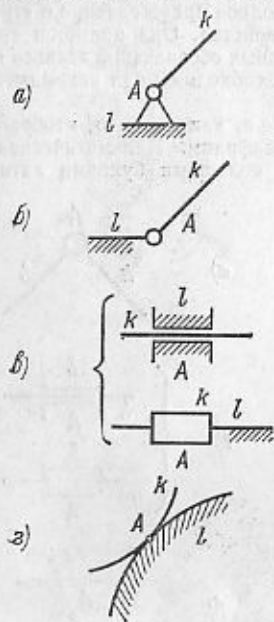


Рис. 10. Схематическое изображение неподвижных элементов кинематических пар: а) и б) — вращательная кинематическая пара, в) поступательная пара, г) высшая пара.

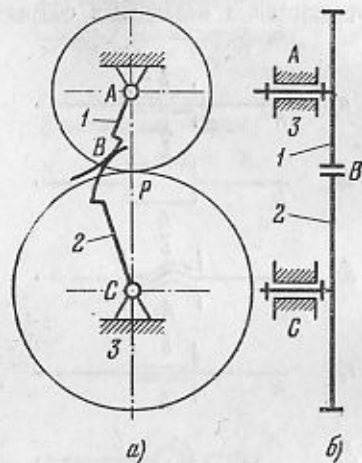


Рис. 11. Схематическое изображение зубчатой передачи: а) схема вычерчена на плоскости, параллельной движению точек звеньев механизма, б) схема вычерчена на плоскости, перпендикулярной плоскости вращения звеньев механизма.

с цилиндрическими зубчатыми колесами, когда для наглядности схема вычерчивается в плоскости, перпендикулярной плоскости вращения колес.

На рис. 11, а показана схема зубчатой передачи, вычерченная по общим правилам для схем плоских механизмов, а на рис. 11, б — та же передача, вычерченная по правилам для схем передач с цилиндрическими зубчатыми колесами.

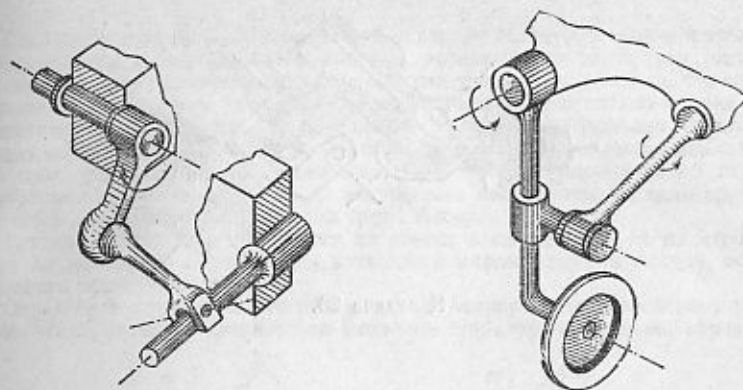
#### ЗАДАЧИ 21—30

Составить кинематическую схему механизма. Подсчитать число звеньев и кинематических пар, его образующих. Определить семейство механизма и класс кинематических пар.

#### § 4. Классификация плоских механизмов

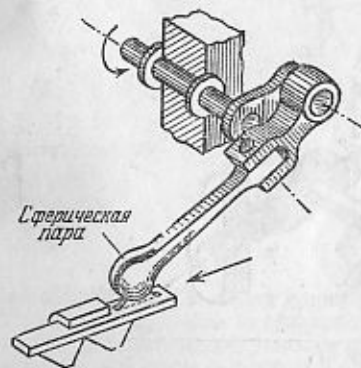
1\*. В сборнике принята классификация плоских механизмов Ассур — Артоболевского.

К механизмам, отнесенным по этой классификации к одному и тому же классу, применяется методика кинематического и силового анализа, специально разработанная для этого класса.

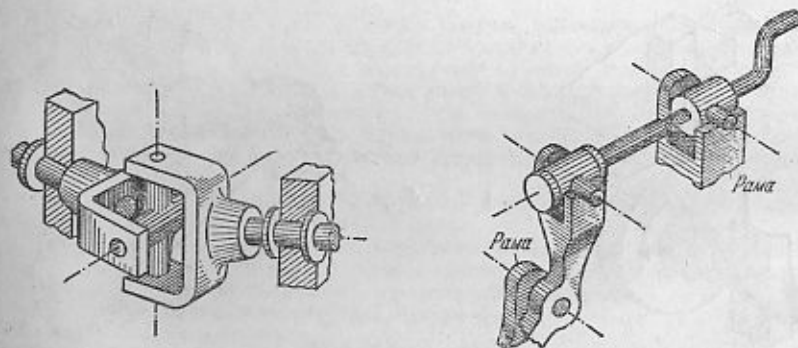


К задаче 21.

К задаче 22.

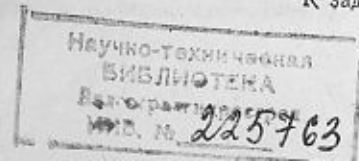


К задаче 23.

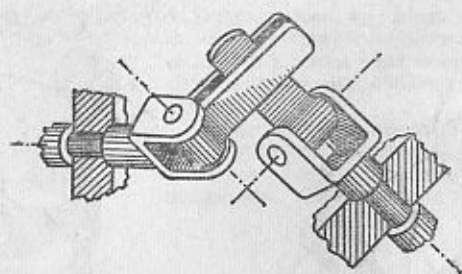


К задаче 24.

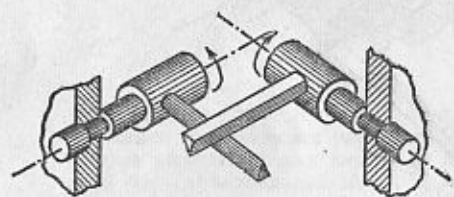
К задаче 25.



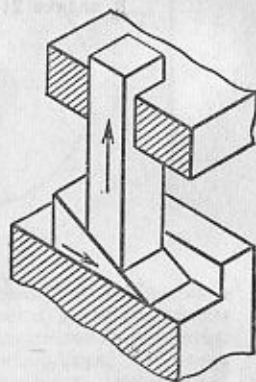




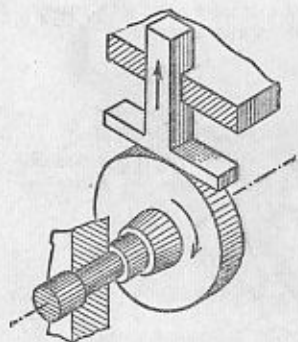
К задаче 26.



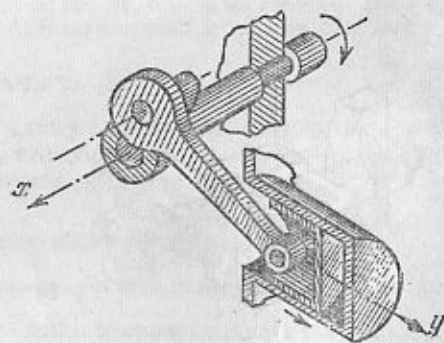
К задаче 27.



К задаче 28.



К задаче 29.



К задаче 30.

Согласно идеям Л. В. Ассура, любой механизм образуется последовательным присоединением к механической системе с определенным движением (ведущим звеном и стойке) кинематических цепей, удовлетворяющих условию, что степень их подвижности  $\omega$  равна нулю. Такие цепи, если они имеют только низшие кинематические пары, называются *группами Ассура (структурными группами)*. Следует иметь в виду, что от группы Ассура не может быть отделена кинематическая цепь, удовлетворяющая условию  $\omega = 0$ , без разрушения самой группы. Если такое отделение возможно, то исследуемая кинематическая цепь представляет собой совокупность нескольких групп Ассура.

Группы Ассура подразделяются на *классы* в зависимости от их строения. Класс же механизма определяется наивысшим классом группы Ассура, образовавшей его ведомую часть.

Определить класс плоского механизма по Ассуру — Артоболовскому можно только тогда, когда предварительно выявлена структура механизма, определена

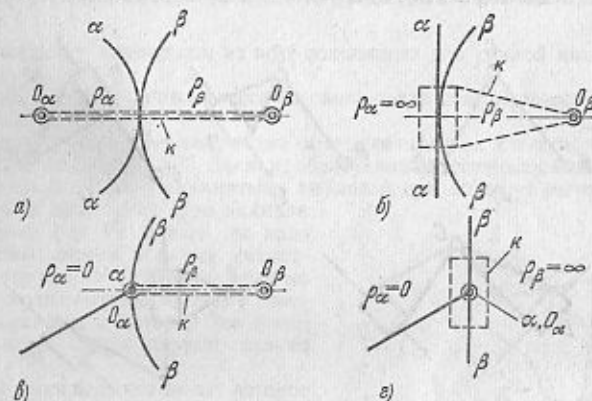


Рис. 12. Замена кинематической пары IV класса одним звеном, входящим в две кинематические пары V класса: а) элементы кинематической пары — две кривые линии  $\alpha\alpha$  и  $\beta\beta$ , б) элементы кинематической пары — прямая  $\alpha\alpha$  и кривая  $\beta\beta$  линии, в) элементы кинематической пары — точка  $\alpha$  и прямая линия  $\beta\beta$ , г) элементы кинематической пары — точка  $\alpha$  и прямая линия  $\beta\beta$ .  $O_\alpha, O_\beta$  — центры кривизны элементов кинематической пары IV класса,  $\rho_\alpha, \rho_\beta$  — радиусы кривизны этих элементов,  $k$  — номер заменяющего звена.

его степень подвижности, число ведущих звеньев, входящих в кинематические пары V класса со стойкой, и когда все кинематические пары в механизме являются только парами V класса. Если же исследуемый механизм имеет кинематические пары IV класса, то они предварительно должны быть заменены *одним* звеном, входящим в *две* кинематические пары V класса. Получившийся после такой замены механизм называется *заменяющим*. Такая замена для двух смежных бесконечно малых перемещений не меняет значений перемещений, скоростей и ускорений основного механизма.

На рис. 12 показан способ замены кинематической пары IV класса (высшей) одним звеном, входящим в две пары V класса.

2°. Ведущее звено, входящее в кинематическую пару V класса со стойкой, образует механизм *первого* класса. Иногда в литературе это же звено называется начальным, а совместно со стойкой — начальным механизмом.

3°. Степень подвижности группы Ассура будет

$$\omega = 3n_r - 2p_{5r} = 0, \quad (4.1)$$

где  $n_r$  — число звеньев в группе,  $p_{5r}$  — число кинематических пар V класса.

Из условия (4.1) получим, что  $p_{\text{вг}}$  равно

$$p_{\text{вг}} = \frac{3n_r}{2}. \quad (4.2)$$

Так как число кинематических пар V класса  $p_{\text{вг}}$  и число звеньев  $n_r$  должны быть целыми числами, то, следовательно, число звеньев в группе Ассурра ( $n_r$ ) — всегда четное число, а число кинематических пар V класса ( $p_{\text{вг}}$ ) кратно трем.

Согласно соотношению (4.2) в группах Ассурра могут быть следующие числа звеньев и кинематических пар V класса:

$n_r$	2	4	6	
$p_{\text{вг}}$	3	6	9	и т. д.

Первый столбец таблицы (4.3) относится к группам Ассурра второго класса следующих пяти видов (рис. 13): а) первого, б) второго, в) третьего, г) четвертого, д) пятого.

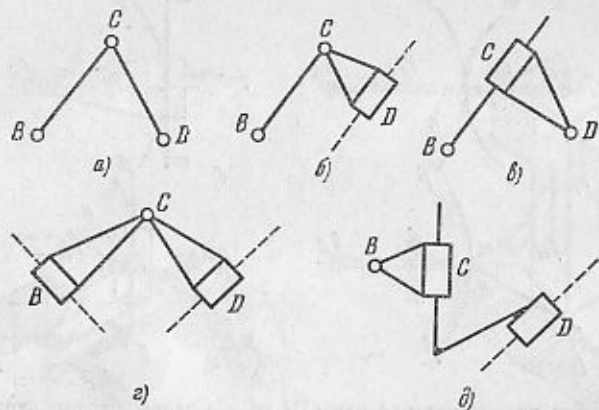


Рис. 13. Группы Ассурра второго класса различных видов: а) первого, б) второго, в) третьего, г) четвертого, д) пятого.

В группах Ассурра различают кинематические пары *внутренние* (кинематическая пара C) и *внешние* (кинематические пары B и D на рис. 13). Число внешних кинематических пар или, точнее, их элементов, которыми группа присоединяется к не относящимся к ней звеньям механизма (например, к ведущему звену и стойке), называют *порядком* группы. Все группы второго класса являются группами второго порядка.

Второй столбец таблицы (4.3) позволяет образовать три варианта кинематических цепей, формально удовлетворяющих условию (4.2) (рис. 14). Кинематическая цепь, показанная на рис. 14, а, не является группой: она распадается на две группы Ассурра второго класса BCD и EFG.

Кинематическая цепь, показанная на рис. 14, б, образует группу Ассурра третьего класса третьего порядка. В этой группе кинематические пары B, C, D будут внешними, а пары E, F, G — внутренними.

Кинематическая цепь, изображенная на рис. 14, в, называется группой Ассурра четвертого класса второго порядка. В этой группе кинематические пары B и C будут внешними, а пары D, E, F, G — внутренними.

Класс группы Ассурра выше второго определяется *числом внутренних кинематических пар*, образующих так называемый *исходный контур*.

Группы Ассурра третьего и более высоких классов по видам не различаются.

*Класс механизма* определяется наивысшим классом группы Ассурра, которая входит в его состав. Следует иметь в виду, что изменением ведущего звена можно

либо повысить, либо понизить класс механизма. Поэтому при всех прочих равных условиях класс механизма зависит и от выбора ведущего звена. Кинематический и силовой анализ механизма усложняются с повышением класса механизма, следовательно, всегда надо стремиться выбирать ведущее звено так, чтобы класс

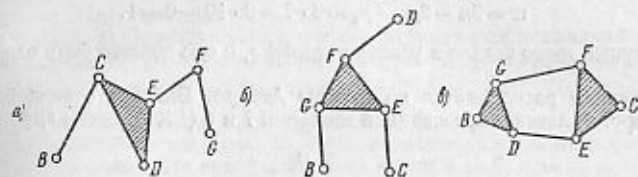


Рис. 14. Три варианта кинематических цепей: а) две группы Ассурра второго класса, б) группа третьего класса, в) группа четвертого класса.

механизма оказался наинизшим из всех возможных для данной кинематической схемы механизма.

4°. Задача об определении класса плоского механизма решается в следующей последовательности:

1) Вычерчивается схема механизма и подсчитывается степень подвижности его по формуле Чебышева (2.4). Звенья, образующие пассивные связи и вносящие лишние степени свободы, принимать во внимание при подсчете степени подвижности механизма не следует. При наличии кинематических пар IV класса их надо заменить одним звеном и двумя кинематическими парами V класса согласно рис. 12 и вычертить отдельно схему заменяющего механизма, в которой все кинематические пары будут парами только V класса.

2) Выбирается ведущее звено, которое обязательно должно входить в кинематическую пару V класса со стойкой.

3) Производится отделение группы Ассурра возможно более низкого класса. Так, отделяется группа второго класса, и причем такая, чтобы после ее отделения остался механизм с той же степенью подвижности, что и заданный. Если отделить группу Ассурра второго класса не представляется возможным (так как ее отделение приводит к тому, что оставшаяся часть механизма имеет степень подвижности  $w$ , превышающую единицу), то следует попытаться отделить группу Ассурра более высокого класса. Для отделения второй, третьей и т. д. групп следует поступать таким же образом, как и при отделении первой группы Ассурра. Разложение механизма на группы Ассурра ведется до тех пор, пока не останутся ведущее (ведущие) звено и стойка.

4) Записывается формула строения механизма и указывается его класс.  
5°. Примеры на структурный анализ и классификацию плоских механизмов по Ассурру — Артоблеву.

**Пример 1.** На рис. 15 показана схема механизма автомата-перекоса вертолета. Ведущее звено AB отмечено круговой стрелкой.

**Решение.** 1) Подсчитывается степень подвижности механизма по формуле Чебышева (2.4). Для этого определяются общее число звеньев  $k=8$ , число пол-

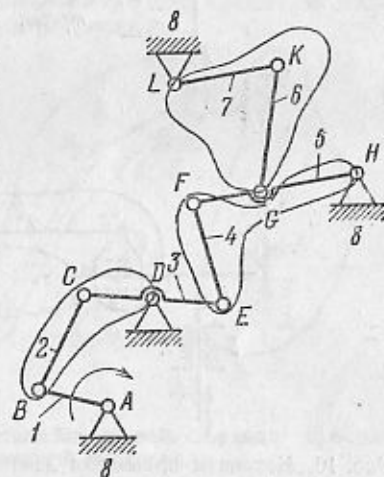


Рис. 15. Механизм автомата-перекоса вертолета. Пример разделения на группы Ассурра.



вижных звеньев  $n = k - 1 = 7$ , число кинематических пар V класса  $p_5 = 10$  (кинематических пар IV класса нет, поэтому нет необходимости в построении заменяющего механизма). В механизме отсутствуют пассивные связи и звенья, вносящие лишние степени свободы. Степень подвижности  $\omega$  равна

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

2) Ведущее звено задано в условии примера, и оно должно быть одно, так как  $\omega = 1$ .

3) Механизм расчленяется на группы Ассура. Вначале отделяется группа Ассура второго класса, образованная звеньями 7 и 6 (LKG), затем группа второго

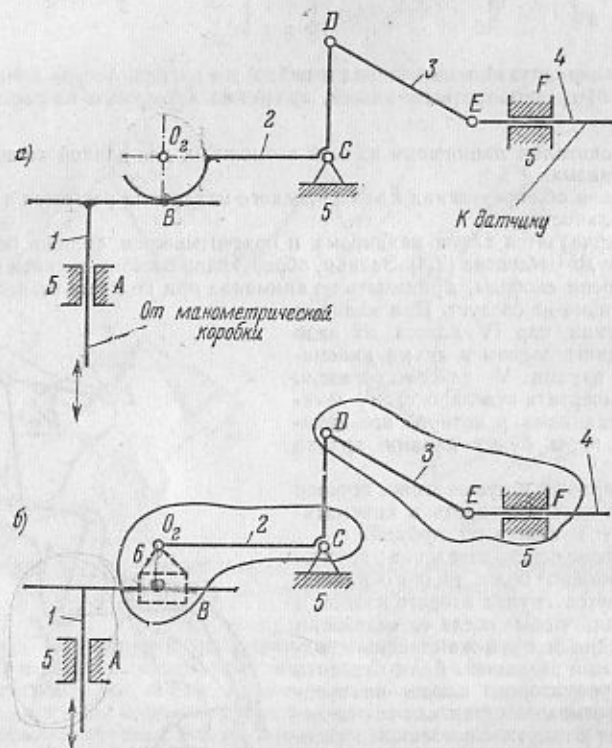


Рис. 16. Механизм приемника давления электрического дистанционного манометра: а) основной механизм, б) заменяющий механизм.

класса, состоящая из звеньев 5 и 4 (HEF), и, наконец, группа второго класса составленная звеньями 3 и 2 (DCB).

На этом расчленение механизма заканчивается, так как остались ведущее звено 1 и стойка 5 (на рисунке отделяемые группы обведены замкнутыми контурами).

4) Записывается формула строения механизма:

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,3)} \rightarrow 2_{(4,5)} \rightarrow 2_{(6,7)}.$$

В этой формуле римская цифра I обозначает ведущее звено, арабские — классы присоединяемых групп (2), а индексы при арабских цифрах указывают, какие звенья образовали ведущее звено и присоединяемые группы.

Из формулы строения механизма видно, что наивысший класс присоединенных групп — второй, поэтому механизм автомата-перекоса вертолета при ведущем звене 1 следует отнести ко второму классу.

Пример 2. На рис. 16, а показана схема механизма приемника давления электрического дистанционного манометра.

Решение. 1) Подсчитывается степень подвижности механизма по формуле Чебышева (рис. 16, а). Имеем  $k = 5$ ,  $n = k - 1 = 4$ ,  $p_5 = 5$ ,  $p_4 = 1$ . Далее получаем

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1.$$

Строится заменяющий механизм (рис. 16, б) (кинематическая пара IV класса В заменяется в соответствии с рис. 12, б одним звеном, входящим в две кинематические пары V класса). Для этого механизма имеем  $k = 6$ ,  $n = 5$ ,  $p_5 = 7$  и получаем

$$\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

2) Ведущее звено задано в условии примера и должно быть одно, так как  $\omega = 1$ .

3) Механизм расчленяется на группы Ассура (рис. 16, б). Вначале отделяется группа Ассура второго класса, образованная звеньями 3 и 4 (DEF), затем группа второго класса, состоящая из звеньев 2 и 5 (CO<sub>2</sub>B). На этом разложение заканчивается, так как остались ведущее звено 1 и стойка 5.

4) Записывается формула строения механизма:

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,5)} \rightarrow 2_{(3,4)}.$$

Наивысший класс присоединенных групп — второй, поэтому механизм надо отнести ко второму классу (при ведущем звене 1).

Пример 3. На рис. 17, а показана схема механизма газораспределения двигателя внутреннего сгорания с ведущим звеном (кулачок).

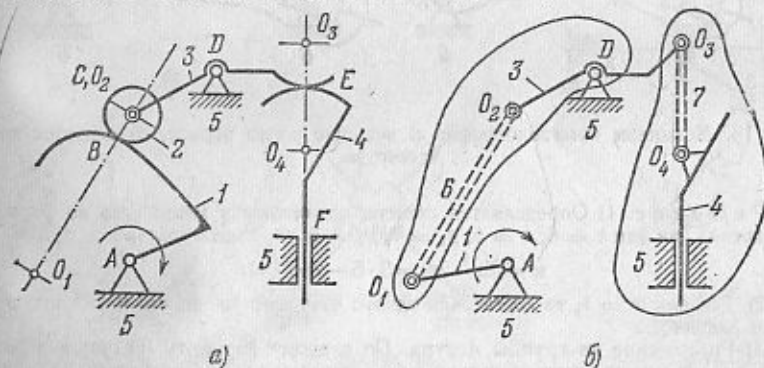


Рис. 17. Механизм газораспределения двигателя внутреннего сгорания: а) основной механизм, б) заменяющий механизм.

Решение. 1) Подсчитывается степень подвижности  $\omega$  механизма по формуле Чебышева. Так как  $k = 4$ ,  $n = k - 1 = 3$ ,  $p_5 = 3$ ,  $p_4 = 2$ , то

$$\omega = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Круглый ролик 2, свободно вращающийся вокруг своей оси, вносит лишнюю степень свободы, поэтому при подсчете числа звеньев он не учитывается. Также в числе  $p_5$  кинематических пар V класса не должна учитываться пара С, в которую входит ролик.

Строим заменяющий механизм (рис. 17, б). Каждую кинематическую пару IV класса В и Е заменяем, согласно рис. 12, а, одним звеном, входящим в две кинематические пары V класса. У заменяющего механизма степень подвижности  $\omega$  будет

$$\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

ибо у него  $k = 6$ ,  $n = 5$ ,  $p_5 = 7$ .

2) Так как  $\omega = 1$ , то для сообщения звеньям механизма определенного движения достаточно иметь одно ведущее звено, что и указано в условии задачи.

3) Расчленение на группы Ассур (рис. 17, б). Вначале отделяется группа второго класса, образованная звеньями 4 и 7, затем группа второго класса, состоящая из звеньев 3 и 6; на этом разложение заканчивается, так как остались ведущее звено 1 и стойка 5.

4) Записывается формула строения механизма:

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(6,3)} \rightarrow 2_{(7,4)}$$

Наивысший класс присоединенных групп — второй, поэтому механизм следует отнести ко второму классу (при ведущем звене 1).

Пример 4. На рис. 18 показана схема механизма конхойдографа с ведущим звеном в двух вариантах: на рис. 18, а — это звено 1, на рис. 18, б — звено 4.

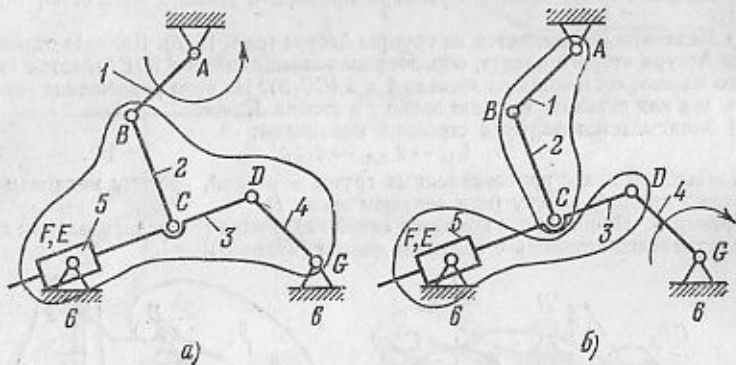


Рис. 18. Механизм конхойдографа: а) ведущее звено первое, б) ведущее звено четвертое.

Решение. 1) Определяется степень подвижности механизма по формуле Чебышева. Так как  $k = 6$ ,  $l = 5$ ,  $p_3 = 7$ ,  $p_4 = 0$ , то, следовательно,

$$\omega = 3l - 2p_3 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

2) Так как  $\omega = 1$ , то достаточно одного ведущего звена, что и указано в условии задачи.

3) Разложение на группы Ассур. По первому варианту (ведущее звено 1) от механизма можно отделить только кинематическую цепь, состоящую из звеньев 2, 3, 4 и 5. Эта цепь представляет собой группу Ассур третьего класса третьего порядка, так как в ней три внутренних кинематических пары (вращательные пары D, C и поступательная E) и три внешних (вращательные пары B, G и F). По второму варианту (рис. 18, б) от механизма последовательно отделяются группы Ассур второго класса, состоящие из звеньев 1 и 2, 3 и 5.

4) Формула строения механизма запишется так.

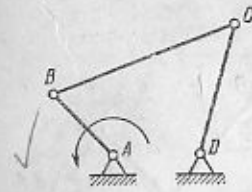
При ведущем звене 1  $I_{(1)} \rightarrow 3_{(2,3,4,5)}$ . Механизм третьего класса.

При ведущем звене 4  $I_{(4)} \rightarrow 2_{(3,5)} \rightarrow 2_{(2,1)}$ . Механизм второго класса.

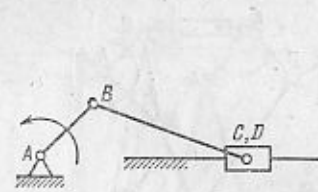
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 21, 22.)

### ЗАДАЧИ 31—70

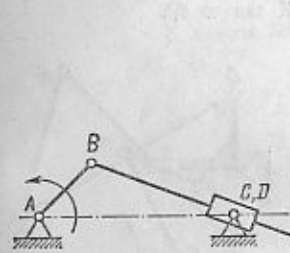
Определить степень подвижности механизма и найти его класс. При наличии звеньев, создающих пассивные связи или лишние степени свободы, их указать и не учитывать при подсчете степени



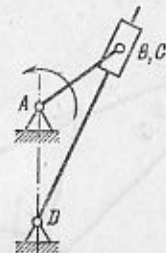
К задаче 31.



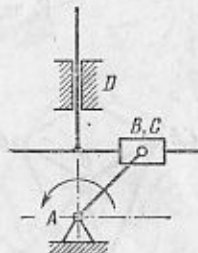
К задаче 32.



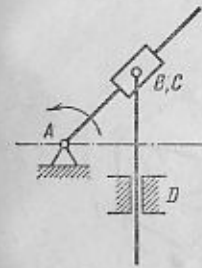
К задаче 33.



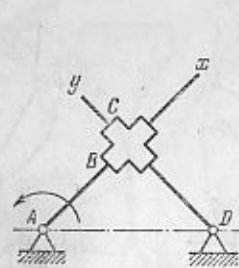
К задаче 34.



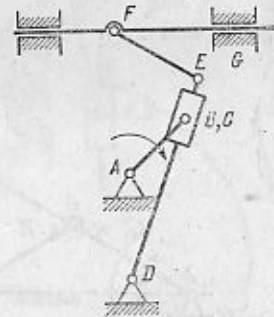
К задаче 35.



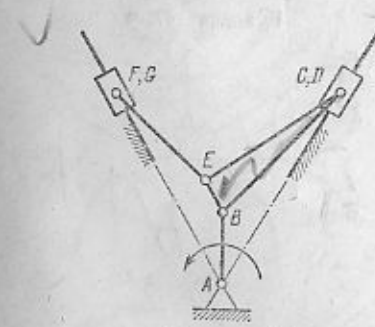
К задаче 36.



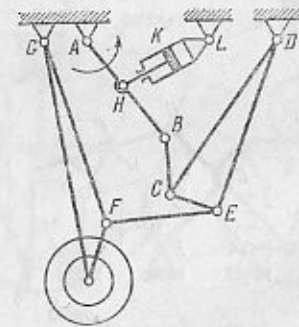
К задаче 37.



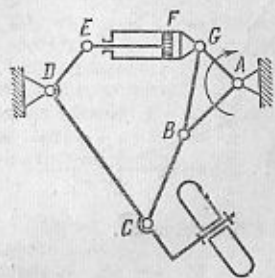
К задаче 38.



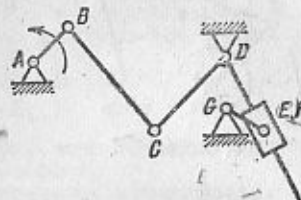
К задаче 39.



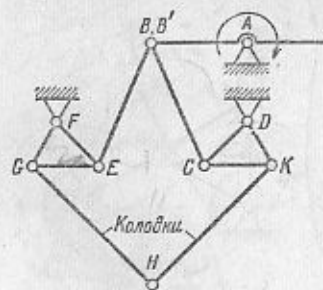
К задаче 40.



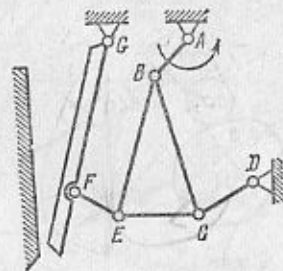
К задаче 41.



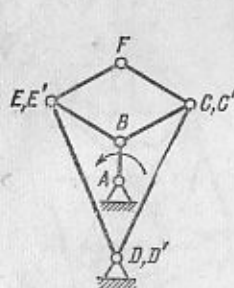
К задаче 42.



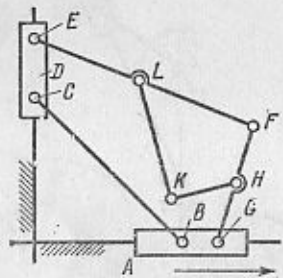
К задаче 50.



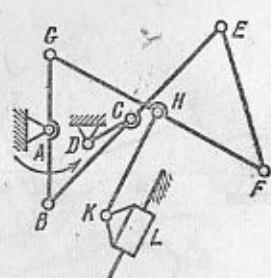
К задаче 51.



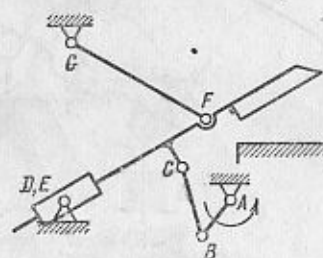
К задаче 43.



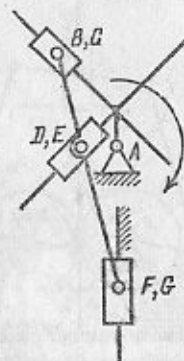
К задаче 44.



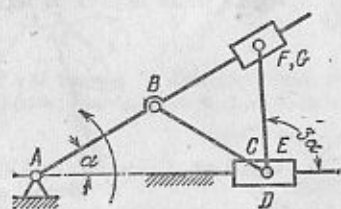
К задаче 45.



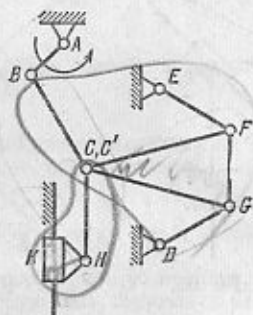
К задаче 52.



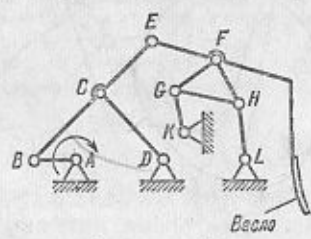
К задаче 53.



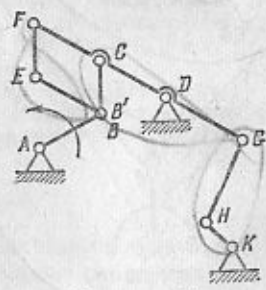
К задаче 46.



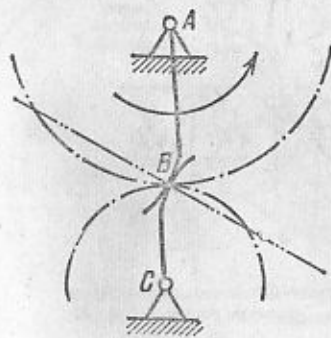
К задаче 47.



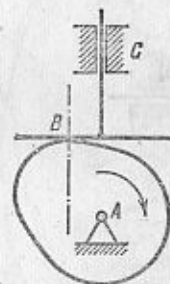
К задаче 48.



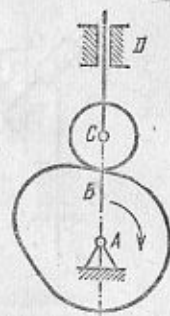
К задаче 49.



К задаче 54.

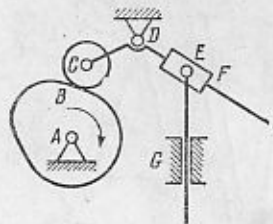


К задаче 55.

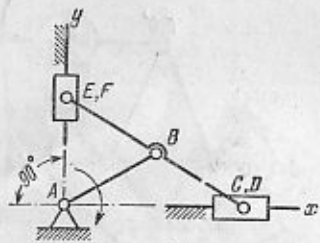


К задаче 56.



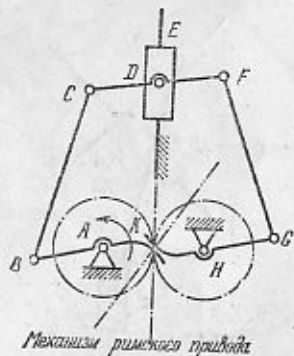


К задаче 57.



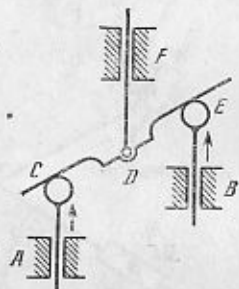
$$L_{AB} = L_{CD}/2$$

К задаче 58.



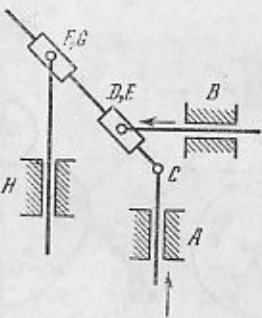
Механизм римского прибора

К задаче 59.

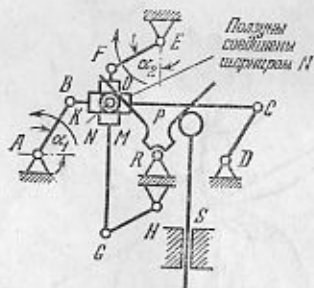


Суммирующий механизм

К задаче 60.

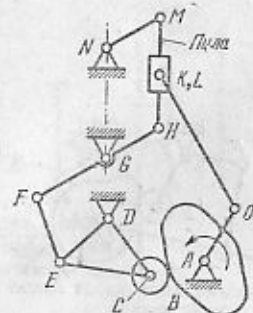


К задаче 61.



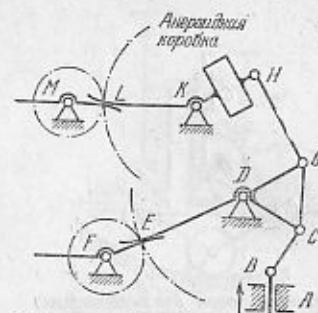
Механизм для вычисления отношения синусов углов

К задаче 62.



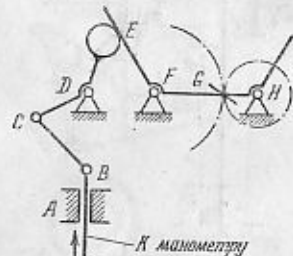
Механизм пилорамы

К задаче 63.



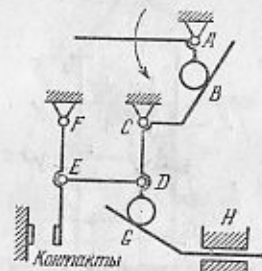
Механизм комбинированного указателя скорости самолета

К задаче 64.



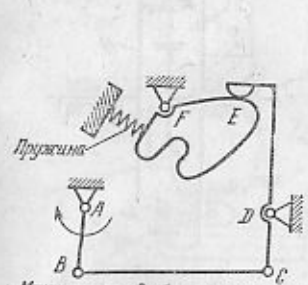
Механизм указателя вертикальной скорости самолета

К задаче 65.



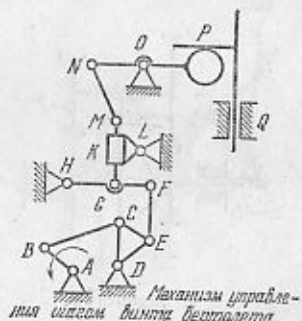
Механизм аварийного рубильника для выключения аккумуляторов

К задаче 66.



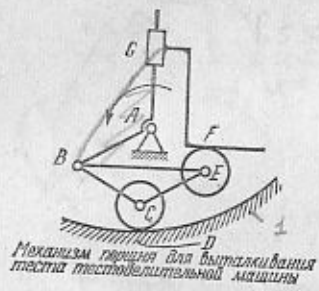
Механизм передней носы самолета

К задаче 67.

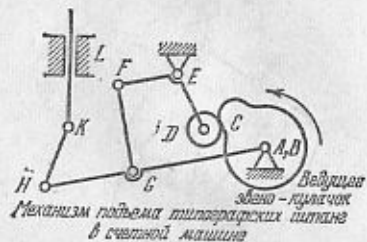


Механизм управления штурвалом винта вертолета

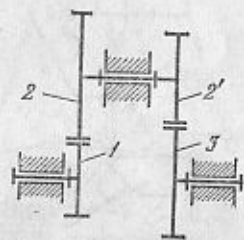
К задаче 68.



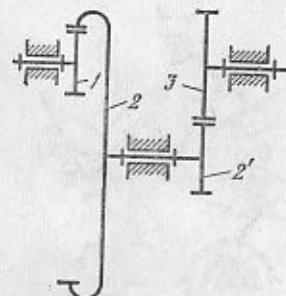
К задаче 69.



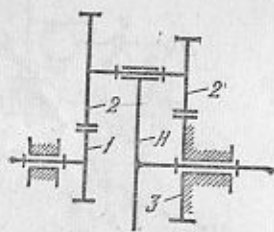
К задаче 70.



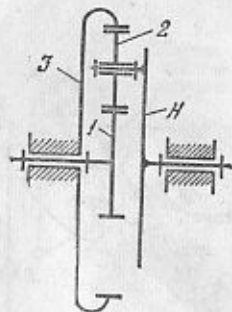
К задаче 71.



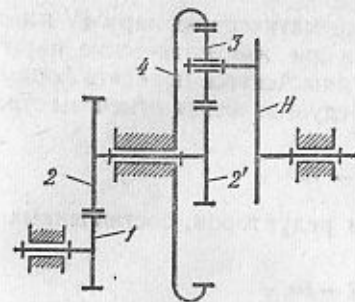
К задаче 72.



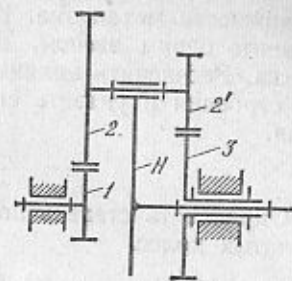
К задаче 73.



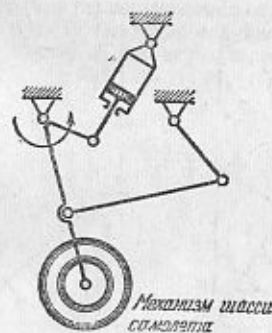
К задаче 74.



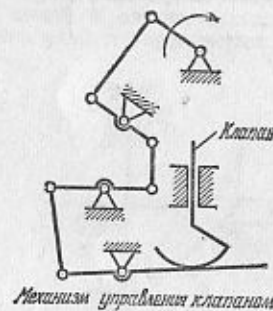
К задаче 75.



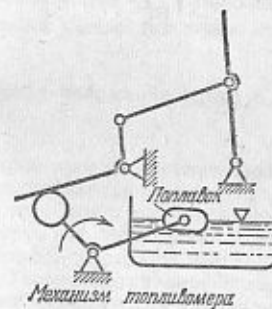
К задаче 76.



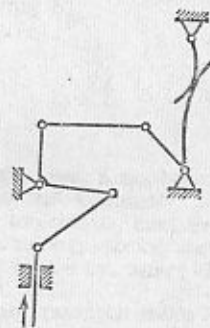
К задаче 77.



К задаче 78.



К задаче 79.



К задаче 80.

подвижности механизма. Каждую кинематическую пару IV класса заменить одним звеном, входящим в две кинематические пары V класса. Расчленив механизм на группы Ассур, написать формулу его строения и указать его класс. Ведущие звенья отмечены стрелками.

#### ЗАДАЧИ 71 — 76

Определить степень подвижности редукторов, составленных из зубчатых колес.

#### ЗАДАЧИ 77 — 80

Определить степень подвижности механизма и найти его класс. Каждую кинематическую пару IV класса заменить одним звеном, входящим в две пары V класса. Разложить механизм на группы Ассур. Написать формулу строения механизма. В предлагаемых задачах кинематические пары буквами не обозначены, это надо сделать решающему задачу.

## ГЛАВА ВТОРАЯ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### § 5. Аналитическое определение положений, скоростей и ускорений звеньев механизмов

1°. *Функцией положения* ведомого звена (или точки на нем) называется зависимость его (или ее) перемещения от перемещения ведущего звена (или точки на нем). На рис. 19 показано ведущее звено  $n$  с точкой  $N$  на нем и ведомое звено  $k$  с точкой  $K$  на нем. Положение ведущего звена  $n$  определяется угловой

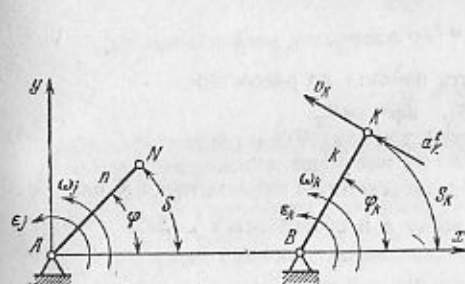


Рис. 19. К понятию функции положения.

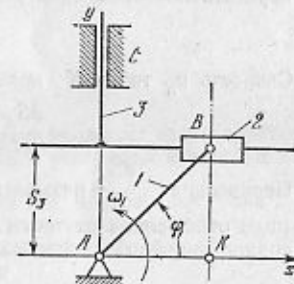


Рис. 20. Синусный механизм. К выводу формулы для функции положения и ее производных.

координатой  $\varphi$ , а положение точки  $N$  — дугой  $S$ . Положение ведомого звена  $k$  определяется углом  $\varphi_k$ , а положение точки  $K$  — дугой  $S_k$ .

Функция положения звена  $k$ :

$$\varphi_k = \varphi_k(\varphi). \quad (5.1a)$$

Функция положения точки  $K$ :

$$S_k = S_k(\varphi). \quad (5.1b)$$

*Вид функции* положения зависит от схемы механизма, а значения постоянных, которые входят в нее, — от размерных параметров механизма.

Для того чтобы составить функцию положения механизма, следует рассмотреть фигуру, которую образуют оси его звеньев. Из геометрических свойств этой фигуры находят искомую зависимость (подробнее об этом см. книгу В. А. Зинovieва «Теория механизмов и машин», Физматгиз, 1972).

**Пример.** В синусном механизме (рис. 20) ведущим является звено 1, а ведомым — звено 3. Положение ведущего звена определяется углом  $\varphi_1$ , а положение ведомого звена — расстоянием  $S_3$ , отсчитываемым от оси  $Ax$  в направлении оси  $Ay$ . Для этого механизма требуется составить функцию положения звена 3.



Решение. Опустим из точки  $B$  на линию  $Ax$  перпендикуляр  $BK$ , где точка  $B$  — проекция оси вращательной кинематической пары  $B$  на плоскость движения точек звеньев плоского механизма.

В последующем изложении аналогично будут обозначаться проекции осей вращательных кинематических пар на плоскость движения точек звеньев плоских механизмов, например, для некоторой вращательной пары  $C$  — точка  $C$ .

Из треугольника  $ABK$  имеем  $BK = AB \sin \varphi_1$ , но  $BK = S_3$ , а  $AB = l_{AB}$ , и тогда искомая функция положения для звена  $3$  примет вид

$$S_3 = l_{AB} \sin \varphi_1.$$

Единственным размерным параметром в этом механизме будет размер  $l_{AB}$ .

2°. Угловая скорость  $\omega_k$  ведомого звена  $k$  находится из равенства

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \omega, \quad (5.2)$$

где  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  — угловая скорость ведущего звена  $n$ . Производная  $\frac{d\varphi_k}{d\varphi}$  называется аналогом угловой скорости ведомого звена  $k$  или передаточным отношением от звена  $k$  к звену  $n$  и обозначается так:

аналог угловой скорости

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi} = \omega_{\varphi k}, \quad (5.3a)$$

передаточное отношение

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi} = i_{kn}. \quad (5.3b)$$

Скорость  $v_K$  точки  $K$  может быть найдена из равенства

$$v_K = \frac{dS_K}{dt} = \frac{dS_K}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dS_K}{d\varphi} \omega. \quad (5.4)$$

Производная  $\frac{dS_K}{d\varphi}$  называется аналогом скорости ведомой точки  $K$  или передаточным отношением от точки  $K$  к звену  $n$  и обозначается так:

аналог линейной скорости

$$\frac{dS_K}{d\varphi} = v_{\varphi K}, \quad (5.5a)$$

передаточное отношение

$$\frac{dS_K}{d\varphi} = i_{Kn}. \quad (5.5b)$$

Из формул (5.2) — (5.5) следует, что

$$i_{kn} = \frac{\omega_k}{\omega} = \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \quad \text{и} \quad i_{Kn} = \frac{v_K}{\omega} = \frac{dS_K}{d\varphi},$$

т. е. передаточное отношение от звена  $k$  (точки  $K$ ) к звену  $n$  является отношением скорости звена  $k$  (точки  $K$ ) к скорости звена  $n$ .

Таким образом, соотношения скоростей в механизме зависят только от кинематической схемы механизма и его размерных параметров, причем значения скоростей определяются значением скорости ведущего звена.

Пример. Найти скорость звена  $3$  синусного механизма (рис. 20), если скорость звена  $1$  равна  $\omega_1$ .

Решение. Находим аналог скорости звена  $3$  по формуле (5.5a):

$$v_{\varphi 3} = \frac{dS_3}{d\varphi_1} = \frac{d(l_{AB} \sin \varphi_1)}{d\varphi_1} = l_{AB} \cos \varphi_1.$$

Скорость звена  $3$  находим по формуле (5.4):

$$v_3 = \omega_1 l_{AB} \cos \varphi_1.$$

3°. Угловое ускорение  $\varepsilon_k$  звена  $k$  или касательное ускорение  $a_K^t$  точки  $K$  можно найти следующим образом.

Угловое ускорение  $\varepsilon_k$  равно

$$\varepsilon_k = \frac{d\omega_k}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\varphi_k}{d\varphi} \omega\right)}{dt} = \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi^2} \omega \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\varphi_k}{d\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi^2} \omega^2 + \varepsilon \frac{d\varphi_k}{d\varphi}. \quad (5.6a)$$

Здесь  $\frac{d\omega_k}{dt} = \varepsilon$  — угловое ускорение ведущего звена  $n$ .

Касательное ускорение  $a_K^t$  равно

$$a_K^t = \frac{dv_K}{dt} = \frac{d\left(\frac{dS_K}{d\varphi} \omega\right)}{dt} = \frac{d^2S_K}{d\varphi^2} \omega \frac{d\varphi}{dt} + \frac{dS_K}{d\varphi} \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2S_K}{d\varphi^2} \omega^2 + \varepsilon \frac{dS_K}{d\varphi}. \quad (5.6b)$$

Производные  $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi^2}$  и  $\frac{d^2S_K}{d\varphi^2}$  называются аналогами углового и касательного ускорений ведомого звена  $k$  (или точки  $K$  на нем), соответствующих постоянному значению угловой скорости ведущего звена ( $\omega = \text{const}$ ).

Эти аналоги обозначаются соответственно так:

аналог углового ускорения

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi^2} = \varepsilon_{\varphi k}^* \quad (5.7a)$$

аналог касательного ускорения

$$\frac{d^2S_K}{d\varphi^2} = a_{\varphi K}^t. \quad (5.7b)$$

Из формул (5.6a) и (5.6b) следует, что ускорения ведомых звеньев механизма полностью определяются аналогами их скоростей и ускорений и законом движения ведущего звена.

Пример. Для синусного механизма (рис. 20) найти ускорение звена  $3$ , если угловая скорость звена  $1$  равна  $\omega_1$ , а его угловое ускорение равно  $\varepsilon_1$ .

Решение. Аналогом ускорения звена  $3$  является

$$a_{\varphi 1,3}^t = \frac{d(l_{AB} \cos \varphi_1)}{d\varphi_1} = -l_{AB} \sin \varphi_1,$$

а ранее найденный аналог скорости его есть  $v_{\varphi 1,3} = l_{AB} \cos \varphi_1$ ; поэтому искомым ускорением звена  $3$  по формуле (5.6b) будет

$$a_3^t = a_3 = -\omega_1^2 l_{AB} \sin \varphi_1 + \varepsilon_1 l_{AB} \cos \varphi_1.$$

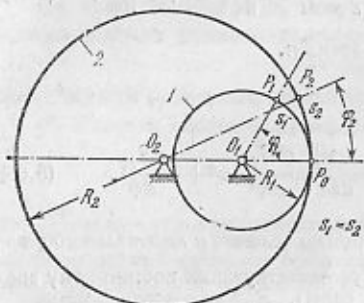
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, § 30.)

## ЗАДАЧИ 81—90

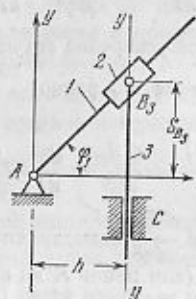
81. Найти выражения для функций положения и передаточного отношения от звена  $2$  к звену  $1$  фрикционной цилиндрической передачи с катками радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Ведущее звено  $1$ , проскальзывания между катками нет, положения звеньев определяются углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

82. Найти выражения для функции положения и аналога скорости точки  $B_3$  звена  $3$  тангенсного механизма, совмещенной с точкой  $B_1$  звена  $1$ . Ведущее звено  $1$ , положение звена  $1$  определяется углом  $\varphi_1$ , а положение точки  $B_3$  — расстоянием  $S_{B_3}$ , размер  $h$  известен, звено  $3$  движется вдоль оси  $yy$ .

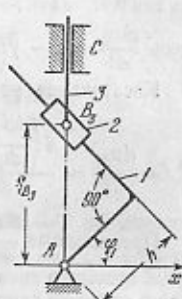
83. Найти выражения для функции положения и аналога скорости точки  $B_3$  — точки звена 3 косеканского механизма, совмещенной с точкой  $B_1$  звена 1. Ведущее звено 1, положение звена 1 определяется углом  $\varphi_1$ , а положение точки  $B_3$  — расстоянием  $S_{B_3}$ ; размер  $h$  известен.



К задаче 81.

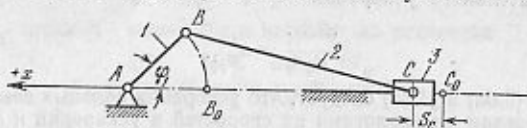


К задаче 82.



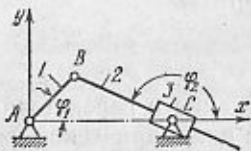
К задаче 83.

84. Найти выражение для функции положения точки  $C$  — шарнира, соединяющего шатун кривошипно-ползунного механизма с его ползуном. Ведущее звено 1, положение звена 1 определяется углом  $\varphi_1$ ; положение точки  $C$  — расстоянием ее от крайнего правого положения этой точки на линии  $Ax$ ; размеры  $l_{AB}$  и  $l_{BC}$  известны.

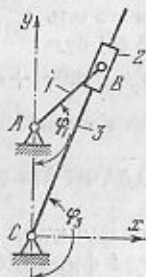


К задаче 84.

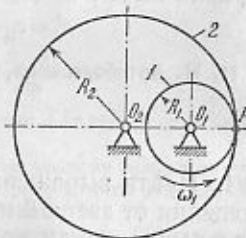
ползуном. Ведущее звено 1, положение звена 1 определяется углом  $\varphi_1$ ; положение точки  $C$  — расстоянием ее от крайнего правого положения этой точки на линии  $Ax$ ; размеры  $l_{AB}$  и  $l_{BC}$  известны.



К задаче 85.



К задаче 86.



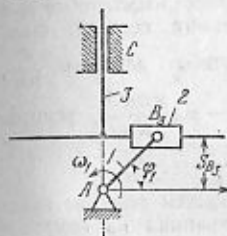
К задаче 87.

85. Найти выражение для функции положения штока 2 кривошипного механизма с качающимся ползуном. Ведущее звено 1, положения звеньев 1 и 2 определяются углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Размеры  $l_{AB}$  и  $l_{AC}$  известны.

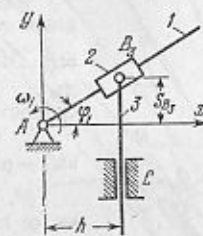
86. Найти выражение для функции положения кулисы 3 кулисного механизма Витворта. Ведущее звено 1, положения звеньев 1 и 3 определяются углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$ . Размеры  $l_{AB}$  и  $l_{AC}$  известны.

87. У фрикционной цилиндрической передачи с внутренним зацеплением катков найти угловую скорость  $\omega_2$  катка 2. Угловая скорость катка 1  $\omega_1 = 60 \text{ сек}^{-1}$ ,  $R_1 = 0,04 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0,12 \text{ м}$ .

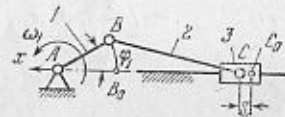
88. Вычислить значения скорости и ускорения точки  $B_3$  звена 3 синусного механизма, совмещенной с точкой  $B_1$  звена 1. Угловая скорость звена 1  $\omega_1 = 100 \text{ сек}^{-1}$ , положение звена 1 определяется углом  $\varphi_1 = 45^\circ$ ;  $l_{AB} = 0,1 \text{ м}$  (принять  $\sin 45^\circ = 0,71$ ).



К задаче 88.



К задаче 89.



К задаче 90.

89. Вычислить скорость точки  $B_3$  тангенсного механизма, являющейся точкой звена 3, совмещенной с точкой  $B_1$  звена 1. Положение звена 1 определяется углом  $\varphi_1 = 30^\circ$ , а его угловая скорость  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ;  $h = 0,1 \text{ м}$  (принять  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

90. У кривошипно-ползунного механизма вычислить скорость точки  $C$  — шарнира  $C$ . Положение звена 1 определено углом  $\varphi_1 = 30^\circ$ , а его угловая скорость  $\omega_1 = 100 \text{ сек}^{-1}$ ;  $l_{AB} = 0,100 \text{ м}$ ;  $l_{BC} = 0,300 \text{ м}$ .

Указание. При нахождении аналога скорости точки  $C$  радикал  $\sqrt{1 - \left(\frac{l_{AB}}{l_{BC}} \sin \varphi_1\right)^2}$ , стоящий в выражении функции положения, следует предварительно разложить в ряд по формуле бинома Ньютона и оставить в нем два первых члена.

## § 6. Планы положений, скоростей и ускорений механизмов

1\*. Задачи о положениях, скоростях и ускорениях решаются применительно к группам Ассур, которыми образован механизм.

Эти задачи решаются в такой последовательности.

1) Проводится структурный анализ и классификация механизма по Ассур (см. § 4).

2) Выбирается ведущее звено (при  $\omega = 1$ ). За ведущее звено обычно выбирают звено, которое совершает вращательное движение и может совершить полный оборот вокруг неподвижной оси. задается закон движения этого звена (как правило, задается равномерное вращение этого звена).

3) Выбирается масштаб чертежа и на чертеже наносятся неподвижные элементы кинематических пар механизма. По заданной обобщенной координате строится положение ведущего звена.

4) Строятся планы положений каждой группы Ассура в соответствии с последовательностью образования ими механизма.

5) Строятся планы скоростей.

6) Строятся планы ускорений.

Масштабы для планов положений, скоростей и ускорений подбирают так, чтобы планы получились достаточно точными и лучше использовалось поле чертежа.

В курсе теории механизмов и машин принято понимать под масштабом той или иной величины отношение этой величины к отрезку, который ее изображает на чертеже.

Размерности масштабов для кинематических величин таковы: масштаба длин —  $\mu_l \frac{м}{мм}$ , скоростей —  $\mu_v \frac{мсек^{-1}}{мм}$ , ускорений —  $\mu_a \frac{мсек^{-2}}{мм}$ .

2°. Покажем решение задачи о положениях на конкретном примере.

Пример. Требуется построить план положения механизма двигателя внутреннего сгорания (рис. 21, а), у которого ведущее звено  $AB$  (первое) составляет с осью  $Ax$  угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Размеры механизма:  $l_{AB} = 0,05 м$ ,  $l_{BC} = l_{DE} = 0,200 м$ ,  $l_{BD} = 0,040 м$ ,  $l_{CD} = 0,180 м$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\delta = 60^\circ$ .

Решение. 1) Число звеньев механизма  $k = 6$ , число подвижных звеньев  $n = k - 1 = 6 - 1 = 5$ , число кинематических пар  $V$  класса  $p_5 = 7$ , степень подвижности механизма  $\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ .

Механизм разделяется на две группы Ассура второго класса;

они образованы звеньями 4, 5 и 2, 3 (рис. 21, а). Формула строения механизма:

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,3)} \rightarrow 2_{(4,5)}$$

2) Ведущее звено задано в условии примера, это звено  $AB$ .

3) Отмечаем на чертеже положения неподвижных элементов кинематических пар: шарнира  $A$  и направляющих  $Ay$  и  $Az$  (рис. 21, б).

Длину отрезка  $AB$ , изображающего на чертеже размер ведущего звена, принимаем равной 25 мм. Тогда масштаб схемы механизма будет

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{м}{мм}$$

Строим положение ведущего звена под заданным углом  $\varphi_1 = 45^\circ$  к оси  $Ax$ .

4) Вычисляем длины отрезков  $BC$ ,  $BD$ ,  $CD$ ,  $DE$ :

$$BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ мм}, \quad BD = \frac{0,04}{0,002} = 20 \text{ мм},$$

$$CD = \frac{0,18}{0,002} = 90 \text{ мм}, \quad DE = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ мм}.$$

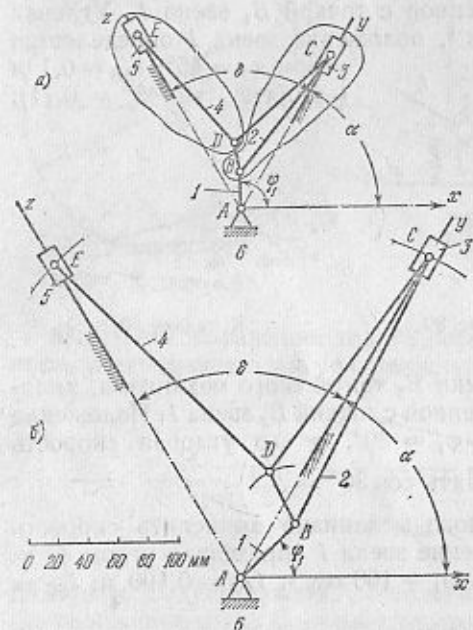


Рис. 21. Построение положения механизма двигателя внутреннего сгорания: а) схема механизма, б) план положения.

Строим положение группы, состоящей из звеньев 2, 3. Из точки  $B$  проводим окружность радиуса  $BC$  до пересечения с линией  $Ay$ , тем самым найдем положение точки  $C$ . Положение группы, состоящей из звеньев 2, 3, построено.

На стороне  $BC$  строим засечками треугольник  $BDC$ . Положение группы, состоящей из звеньев 4, 5, строится аналогично положению группы, состоящей из звеньев 2, 3.

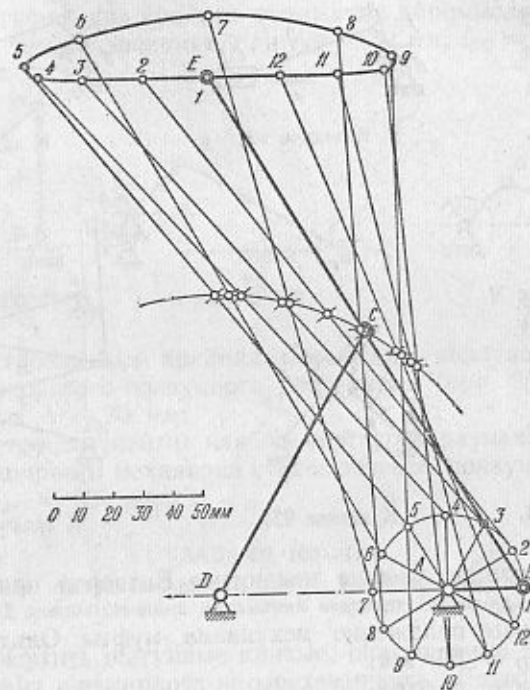


Рис. 22. Построение шатунной кривой механизма Чебышева.

Если построить ряд последовательных положений ведущего звена и на одном и том же чертеже изобразить планы положений остальных звеньев механизма, то можно построить траекторию любой точки механизма.

Траектории точек звена, не входящего в кинематические пары со стойкой, т. е. шатуна, называются *шатунными кривыми*. На рис. 22 построена шатунная кривая, описываемая точкой  $E$  лямбдаобразного механизма Чебышева (построение сделано для 12 равноотстоящих положений ведущего звена). Принятые размеры звеньев:  $l_{AB} = 0,025 м$ ,  $l_{AD} = 0,075 м$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = l_{CE} = 0,100 м$ ; масштаб  $\mu_l = 0,001 \frac{м}{мм}$ .

### ЗАДАЧИ 91 — 102

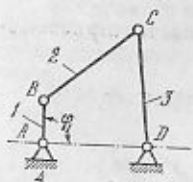
(построение положений механизмов)

91. Построить положение шарнирного четырехзвенника при  $\varphi_1 = 30^\circ$ , если  $l_{AB} = 30 мм$ ,  $l_{BC} = l_{AD} = 80 мм$ ,  $l_{CD} = 70 мм$ .

92. Построить положение кривошипно-ползунного механизма, если  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $l_{AB} = 50 мм$ ,  $l_{BC} = 150 мм$ .



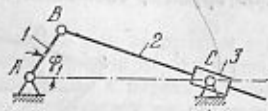
93. Построить положение кривошипного механизма с качающимся ползуном при  $\varphi_1 = 90^\circ$ , если  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{AC} = 120$  мм.



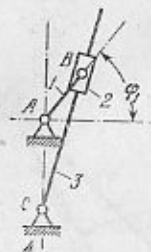
К задаче 91.



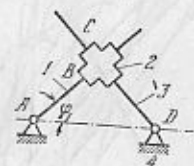
К задаче 92.



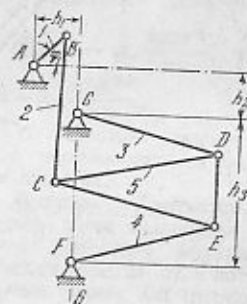
К задаче 93.



К задаче 94.



К задаче 95.

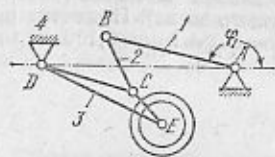


К задаче 96.

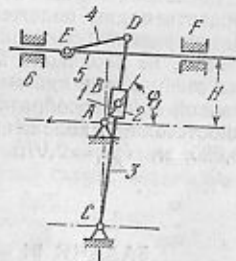
94. Построить положение механизма Витворта при  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{AC} = 60$  мм.

95. Построить положение механизма муфты Ольдгейма при  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $l_{AD} = 60$  мм.

96. Построить положение механизма Робертса при  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $h_1 = 15$  мм,  $h_2 = 15$  мм,  $h_3 = 50$  мм,  $l_{AB} = 20$  мм,  $l_{BC} = 50$  мм,  $l_{DG} = l_{EF} = 50$  мм,  $l_{DE} = 24$  мм,  $l_{DC} = l_{EC} = 55$  мм.



К задаче 97.



К задаче 98.



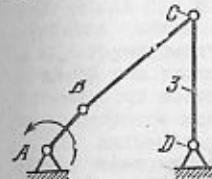
К задаче 99.

97. Построить положение механизма шасси самолета при  $\varphi_1 = 180^\circ$ ,  $l_{AB} = 0,9$  м,  $l_{AD} = 1,32$  м,  $l_{BC} = 0,4$  м,  $l_{CD} = 0,64$  м,  $l_{DE} = 0,92$  м,  $l_{CE} = 0,3$  м.

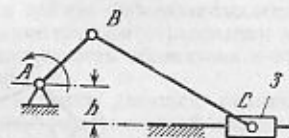
98. Построить положение механизма строгального станка при  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $l_{AB} = 0,080$  м,  $l_{AC} = 0,35$  м,  $l_{CD} = 0,64$  м,  $l_{ED} = 0,21$  м,  $H = 0,25$  м.

99. Построить два крайних положения кулисы 3 механизма Витворта при  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{AC} = 100$  мм.

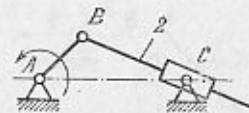
100. Построить два крайних положения коромысла 3 механизма шарнирного четырехзвенника при  $l_{AB} = 30$  мм,  $l_{BC} = l_{AD} = 80$  мм,  $l_{CD} = 70$  мм.



К задаче 100.



К задаче 101.



К задаче 102.

101. Построить два крайних положения ползуна 3 дезаксиального кривошипно-ползунного механизма при  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{BC} = 100$  мм,  $h = 20$  мм.

102. Построить (найти) наибольший угол размаха штока (звена 2) кривошипного механизма с качающимся ползуном при  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{AC} = 100$  мм.

#### ЗАДАЧИ 103—110

(построение шатунных кривых; для их вычерчивания следует брать 8—12 равноотстоящих положений ведущего звена механизма)

103. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M, K и L механизма шарнирного четырехзвенника. Дано:  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 200$  мм,  $l_{CD} = 140$  мм,  $h_1 = 80$  мм,  $h_2 = 220$  мм,  $l_{BM} = l_{MK} = l_{KL} = 0,25l_{BC}$ .

104. Вычертить шатунную кривую, описываемую точкой M кривошипно-ползунного механизма. Дано:  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{AC} = 150$  мм,  $l_{BM} = 75$  мм.

105. Вычертить шатунную кривую, описываемую точкой M механизма Витворта, если  $l_{AB} = 60$  мм,  $l_{AC} = 80$  мм,  $l_{BM} = 40$  мм.

106. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и K кривошипного механизма с качающимся ползуном. Дано:  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{AC} = 140$  мм,  $l_{BM} = 60$  мм,  $l_{BK} = 200$  мм.

107. Вычертить шатунные кривые, описываемые точками M и K механизма муфты Ольдгейма. Дано:  $l_{AD} = 100$  мм,  $l_{MK} = 30$  мм.

108. Вычертить шатунную кривую, описываемую точкой M кривошипно-ползунного механизма. Дано:  $l_{AB} = 10$  мм,  $l_{BC} = 30$  мм,  $l_{BM} = 96,7$  мм.

109. Вычертить шатунную кривую, описываемую точкой M кривошипного механизма с качающимся ползуном. Дано:  $l_{AB} = 20$  мм,  $l_{AC} = 30$  мм,  $l_{BM} = 119$  мм.

110. Вычеркнуть шатунную кривую, описываемую точкой  $M$  механизма противовращательной рукоятки Чебышева. Дано:  $l_{AB} = 6,8 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = l_{CM} = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{AD} = 70,45 \text{ мм}$ .

3°. Планы скоростей и ускорений механизма строятся после решения задачи о его положении, причем построение планов проводится для отдельных групп Ассура, которые образовали механизм. Вначале строится план скоростей (ускорений) группы, которая присоединена элементами своих внешних кинематических пар к ведущему звену и стойке, затем строятся планы скоростей (ускорений) второй и т. д. групп, взятых в той же последовательности, в какой они присоединяются при образовании механизма. Эта последовательность обозначена в формуле строения механизма.

В дальнейшем не будет делаться различия между планами скоростей или ускорений и планами аналогов скоростей и ускорений, так как эти планы отличаются только своими масштабами. На рис. 23,  $a$  показано ведущее звено  $AB$ , вычерченное в масштабе  $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ . Звено вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Величина скорости точки  $B$  есть  $v_B = \omega_1 (AB) \mu_l$ , а ее нормальное ускорение  $a_B^n = \omega_1^2 (AB) \mu_l$ . На плане скоростей скорость точки  $B$  изображается отрезком  $(pb)$  (рис. 23,  $b$ ), а нормальное ускорение этой точки — отрезком  $(\pi b)$  (рис. 23,  $в$ ). Масштабами планов скоростей и ускорений соответственно будут

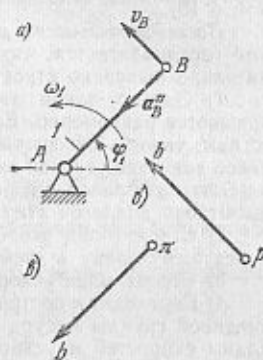


Рис. 23. Скорость и ускорение точки  $B$ , построенные в масштабе кривошипа.

а масштабами планов аналогов скоростей и ускорений будут

$$\mu_v = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{(pb)} \frac{\text{мсек}^{-1}}{\text{мм}}, \quad (6.1a)$$

$$\mu_a = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l}{(\pi b)} \frac{\text{мсек}^{-2}}{\text{мм}}, \quad (6.16)$$

$$\mu_{v\text{анал}} = \frac{\mu_v}{\omega_1} = \frac{(AB)}{(pb)} \mu_l \frac{\text{м}}{\text{мм}}, \quad (6.2a)$$

$$\mu_{a\text{анал}} = \frac{\mu_a}{\omega_1^2} = \frac{(AB)}{(\pi b)} \mu_l \frac{\text{м}}{\text{мм}}. \quad (6.26)$$

Планы скоростей и ускорений, у которых отрезки  $(pb)$  и  $(\pi b)$ , изображающие скорость и ускорение точки  $B$ , лежащей на ведущем звене, равны отрезку  $AB$ , изображающему на чертеже длину  $l_{AB}$ , называются планами, построенными в масштабе радиуса (или в масштабе кривошипа). У таких планов масштабами скоростей и ускорений будут

$$\mu_v = \omega_1 \mu_l \text{ мсек}^{-1}/\text{мм}, \quad (6.3a)$$

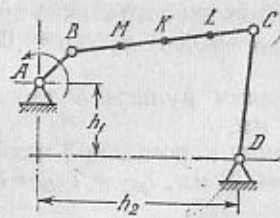
$$\mu_a = \omega_1^2 \mu_l \text{ мсек}^{-2}/\text{мм}. \quad (6.36)$$

Соответственно масштабами планов аналогов скоростей и ускорений будут

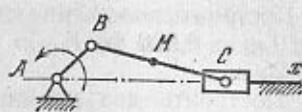
$$\mu_{v\text{анал}} = \mu_l \text{ м}/\text{мм}, \quad (6.4a)$$

$$\mu_{a\text{анал}} = \mu_l \text{ м}/\text{мм}. \quad (6.46)$$

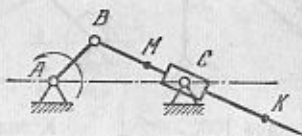
Когда длины звеньев механизма соизмеримы с длиной ведущего звена (не превосходят ее более чем в 6—8 раз), тогда планы скоростей и ускорений



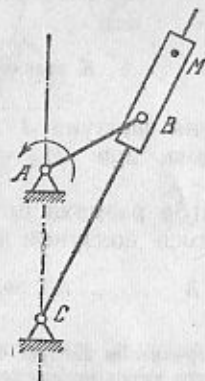
К задаче 103.



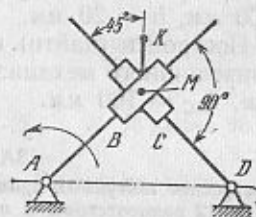
К задаче 104.



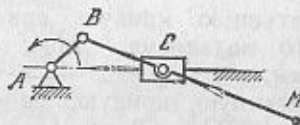
К задаче 106.



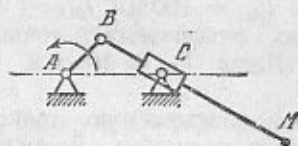
К задаче 105.



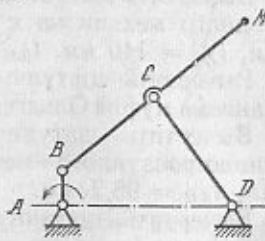
К задаче 107.



К задаче 108.



К задаче 109.



К задаче 110.

желательно строить в масштабе радиуса, так как это *значительно сокращает* вычисления.

В некоторых случаях полезно строить *повернутые* планы скоростей, т. е. такие, у которых все векторы скоростей повернуты в одну и ту же сторону на  $90^\circ$  относительно их действительных направлений. Эти планы отличаются от обычных (не повернутых) большей точностью построения и, кроме того, удобны в качестве рычага Жуковского для определения уравновешивающей или приведенной силы (см. § 13).

*Последовательность решения задачи на построение планов скоростей и ускорений* (предполагается, что задача о положении решена и, следовательно, предварительно выяснено строение механизма и назначено ведущее звено).

1) Задают закон движения ведущего звена. Обычно принимают, что оно вращается равномерно. Если же нельзя считать, что оно вращается равномерно, то надо указать отношение его углового ускорения к его угловой скорости. Числовое значение угловой скорости задавать не обязательно, оно отражается только в масштабах планов скоростей и ускорений и никак не сказывается на вычислении масштабов аналогов этих планов.

2) Строят план скоростей группы Ассура, непосредственно присоединенной к ведущему звену и стойке.

3) Строят план ускорений этой же группы.

4) Переходят к построению планов скоростей и ускорений следующей присоединенной группы Ассура и так продолжают до тех пор, пока не будут построены планы скоростей и ускорений всех групп механизма.

Задачу кинематического анализа следует считать решенной, если для каждого звена механизма будут известны положения, скорости и ускорения двух его точек или станут известными положение, скорость и ускорение одной точки и угловая координата, угловая скорость и угловое ускорение самого звена.

4\*. Решим несколько примеров на построение планов скоростей и ускорений.

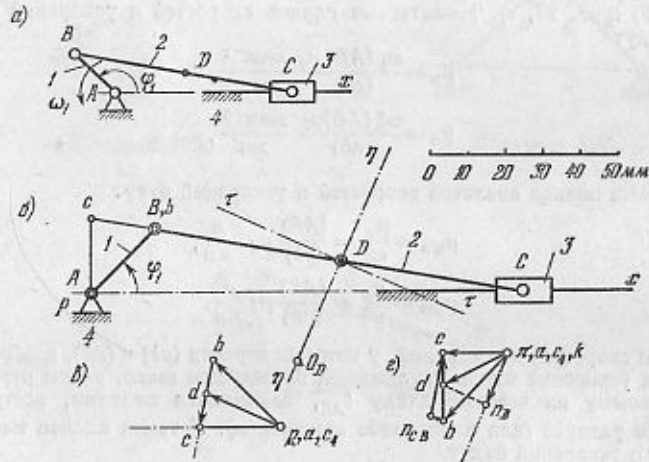


Рис. 24. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма компрессора: а) схема, б) план положения, в) план скоростей, г) план ускорений.

**Пример 1.** Построить планы скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма компрессора (рис. 24, а). Найти скорость и ускорение точки С, угловую скорость и угловое ускорение шатуна ВС, а также определить длину радиуса кривизны  $\rho_D$  траектории точки D. Дано:  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $l_{AB} = 0,05$  м,  $l_{BC} = 0,20$  м,  $l_{BD} = 0,10$  м, угловая скорость кривошипа АВ постоянна и равна  $\omega_1 = 80$  сек $^{-1}$ .

**Решение.** 1) Проводим структурный анализ и устанавливаем класс заданного механизма. Число звеньев  $k = 4$ , число подвижных звеньев  $n = 3$ , число кинематических пар V класса  $p_5 = 4$ , степень подвижности механизма равна  $\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ . Механизм образован присоединением к ведущему звену АВ и стойке 4 группы второго класса второго вида, состоящей из звеньев 2 и 3.

2) Строим план положения механизма (рис. 24, б). Задаемся длиной отрезка (АВ) = 25 мм, вычисляем масштаб схемы механизма:

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{мм}},$$

и по нему находим длины отрезков (BC) и (BD):

$$(BC) = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ мм}, \quad (BD) = \frac{l_{BD}}{\mu_l} = \frac{0,1}{0,002} = 50 \text{ мм}.$$

По полученным размерам и заданному углу  $\varphi_1$  на рис. 24, б строим план положения механизма.

3) Строим план скоростей для группы 2, 3. Построение ведем по следующим двум векторным уравнениям:

$$v_C = v_B + v_{CB}, \quad v_C = v_{C_4} + v_{CC_4},$$

где  $v_B$  — скорость точки В, по модулю равная  $v_B = \omega_1 l_{AB} = 80 \cdot 0,05 = 4$  мсек $^{-1}$  и направленная перпендикулярно линии АВ в сторону, соответствующую направлению угловой скорости звена АВ;  $v_{CB}$  — скорость точки С при вращении звена ВС вокруг оси шарнира В, по модулю равная  $v_{CB} = \omega_2 l_{BC}$  ( $\omega_2$  — угловая скорость звена ВС, которая пока нам неизвестна) и направленная перпендикулярно линии ВС;  $v_{C_4}$  — скорость точки  $C_4$  стойки 4, совпадающей с точкой С (она равна нулю, так как звено 4 неподвижно);  $v_{CC_4}$  — относительная скорость точки С в ее движении относительно точки  $C_4$  (ее модуль неизвестен, а направлена она вдоль линии Ах).

Построение плана скоростей ведем в такой последовательности (рис. 24, в). Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше: от полюса  $p$  откладываем отрезок ( $pb$ ), изображающий скорость точки В, перпендикулярно линии АВ и в соответствии с направлением вращения звена АВ, причем длину отрезка ( $pb$ ) выбираем равной (АВ) = 25 мм, т. е. строим план в масштабе кривошипа; из точки  $b$  проводим направление скорости  $v_{CB}$  — линию, перпендикулярную ВС. Переходим к построению решения второго векторного уравнения, указанного выше: из точки  $p$  надо было бы отложить скорость  $v_{C_4}$ , но она равна нулю, поэтому точку  $c_4$  совмещаем с точкой  $p$ ; из точки  $c_4$  или, что то же,  $p$  проводим направление скорости  $v_{CC_4}$  — линию, параллельную Ах, до пересечения с линией, проведенной перпендикулярно ВС, и получаем точку  $c$  — конец вектора скорости точки С. Помещаем в полюс плана точку  $a$  и на этом заканчиваем построение плана скоростей для всего механизма. Скорость точки D находим по правилу подобия: конец вектора этой скорости должен лежать на линии ( $bc$ ) и делить отрезок ( $bc$ ) в том же отношении, в каком точка D делит отрезок BC, т. е.

$$(bd) = \frac{(BD)}{(BC)} (bc) = 0,5 (bc).$$

Вычисляем масштаб плана скоростей:

$$\mu_v = \frac{v_B}{pb} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{(pb)} = \omega_1 \mu_l \frac{\text{мсек}^{-1}}{\text{мм}},$$

масштабом плана аналогов скоростей будет

$$\mu_{qv} = \frac{\mu_v}{\omega_1} = \mu_l \frac{\text{мсек}^{-1}}{\text{мм}}.$$



Скорость  $v_C$  точки  $C$  равна

$$v_C = (\rho_C) \mu_v = 21 \cdot 80 \cdot 0,002 = 21 \cdot 0,16 = 3,36 \text{ мсек}^{-1}.$$

Угловая скорость  $\omega_2$  звена  $BC$  равна

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{(bc) \mu_v}{(BC) \mu_l} = \frac{(bc) \omega_1 \mu_l}{(BC) \mu_l} = \frac{18 \cdot 80}{100} = 14,4 \text{ сек}^{-1}.$$

На рис. 24, б построен повернутый план скоростей непосредственно на схеме механизма. В этом плане полюс  $p$  совмещен с точкой  $A$ . Направление вектора скорости точки  $B$  совпадает с направлением  $AB$ , направление скорости  $v_{CB}$  является продолжением линии  $BC$ , а направление скорости точки  $C$  перпендикулярно линии  $Ax$ .

4) Строим план ускорений для группы 2, 3. Этот план строится по таким двум векторным уравнениям:

$$a_C = a_B + a_{CB} = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t, \quad a_C = a_{C_4} + a_{CC_4}^k + a_{CC_4}^t,$$

где  $a_B$  — нормальное ускорение (оно же полное) точки  $B$ , по модулю равно

$$a_B = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 80^2 \cdot 0,05 = 6400 \cdot 0,05 = 320 \text{ мсек}^{-2}$$

и направленное параллельно линии  $AB$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;  $a_{CB}^n$  — нормальное ускорение точки  $C$  во вращательном движении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , по модулю равно

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{BC}}$$

и направленное параллельно линии  $BC$  от точки  $C$  к точке  $B$ ;  $a_{CB}^t$  — касательное ускорение точки  $C$  в том же движении звена  $BC$ , по модулю равно  $a_{CB}^t = \epsilon_2 \cdot l_{BC}$  ( $\epsilon_2$  — угловое ускорение звена  $BC$ , пока нам не известно) и направленное перпендикулярно линии  $BC$ ;  $a_{C_4}$  — ускорение точки  $C_4$  (точка звена 4; оно равно нулю, так как звено 4 неподвижно);  $a_{CC_4}^k$  — корiolисово ускорение точки  $C$  в движении ее относительно точки  $C_4$ , равное нулю, потому что звено 4 неподвижно;  $a_{CC_4}^t$  — относительное (релятивное) ускорение точки  $C$  в ее движении относительно точки  $C_4$ , оно направлено вдоль линии  $Ax$ .

Построение плана ускорений ведем в такой последовательности (рис. 24, в). Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше, для чего от полюса плана  $\pi$  откладываем отрезок  $(\pi b)$ , изображающий ускорение  $a_B$ , параллельно линии  $AB$ . Длину  $(\pi b)$  выбираем равной  $(AB) = 25 \text{ мм}$ , т. е. строим план в масштабе кривошипа, при этом масштабы планов ускорений и их аналогов соответственно будут равны

$$\mu_a = \frac{a_B}{\pi b} = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l}{(\pi b)} = \omega_1^2 \mu_l = 80^2 \cdot 0,002 = 12,8 \frac{\text{мсек}^{-2}}{\text{мм}},$$

$$\mu_{\varphi a} = \frac{\mu_a}{\omega_1^2} = \mu_l = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

От точки  $b$  откладываем отрезок  $(bn_{CB})$ , изображающий ускорение  $a_{CB}^n$ . Длина отрезка  $(bn_{CB})$  вычисляется так:

$$bn_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{v_{CB}^2}{l_{BC} \cdot \mu_a} = \frac{(bc)^2 \mu_v^2}{(BC) \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{(bc)^2 \omega_1^2 \mu_l^2}{(BC) \mu_l \cdot \omega_1^2 \mu_l} = \frac{(bc)^2}{(BC)} = \frac{18^2}{100} = 3,24 \text{ мм}.$$

Через точку  $n_{CB}$  проводим направление ускорения  $a_{CB}^t$  — линию, перпендикулярную линии  $BC$ . Переходим к построению решения второго векторного урав-

нения, указанного выше. Для этого от полюса плана  $\pi$  откладываем вектор ускорения  $a_{C_4}$ , но оно равно нулю, поэтому точка  $c_4$  совпадает с точкой  $\pi$ . С этой же точкой совпадает конец вектора ускорения  $a_{CC_4}^k$  — точка  $k$  (ускорение  $a_{CC_4}^k$  равно нулю). Из точки  $k$  или, что то же, из точки  $\pi$  проводим направление ускорения  $a_{CC_4}^t$  — линию, параллельную  $Ax$ . Точка пересечения ее с линией, проведенной перпендикулярно  $BC$ , дает точку  $c$  — конец вектора ускорения точки  $C$ . Соединяем точки  $c$  и  $b$  и получаем вектор полного ускорения точки  $C$  при вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , т. е.  $a_{CB}$ . В точку  $\pi$  помещаем точку  $a$ . На этом заканчиваем построение плана ускорений механизма. Конец вектора ускорения точки  $D$  найдем по правилу подобия:

$$(bd) = \frac{(BD)}{(BC)} (bc) = 0,5 (bc).$$

Соединив точку  $d$  с полюсом плана  $\pi$ , получаем отрезок  $(\pi d)$ , изображающий ускорение точки  $D$ .

Величина ускорения точки  $C$  найдется так:

$$a_C = (\pi c) \cdot \mu_a = 17,5 \cdot 12,8 = 224 \text{ мсек}^{-2},$$

а величина углового ускорения звена  $BC$

$$\epsilon_2 = \frac{a_{CB}^t}{l_{BC}} = \frac{(n_{CB}c) \mu_a}{(BC) \mu_l} = \frac{(n_{CB}c) \omega_1^2 \mu_l}{(BC) \mu_l} = \frac{(n_{CB}c)^2 \omega_1^2}{(BC)} = \frac{18 \cdot 80^2}{100} = 1152 \text{ сек}^{-2}.$$

5) Находим радиус кривизны траектории точки  $D$ . Через точку  $D$  (рис. 24, б) проводим линию  $\tau\tau$ , параллельную отрезку  $(\pi d)$  на плане скоростей (рис. 24, в), — это будет направление касательной к траектории точки  $D$ . Линия  $(\eta\eta)$ , проведенная перпендикулярно линии  $(\tau\tau)$ , является нормалью к этой же траектории. На ней располагается центр кривизны  $O_D$  траектории точки  $D$ . Проектируем вектор ускорения точки  $D$ , отрезок  $(\pi d)$  (рис. 24, в), на направление нормали к траектории точки  $D$ . Получим отрезок  $(\pi n_D)$ , соответствующий нормальному ускорению  $a_D^n$  точки  $D$ . Из формулы

$$a_D^n = \frac{v_D^2}{\rho_D}$$

получим, что искомый радиус кривизны будет равен

$$\rho_D = \frac{v_D^2}{a_D^n} = \frac{(\pi d)^2 \mu_v^2}{(\pi n_D) \mu_a} = \frac{(\pi d)^2 \omega_1^2 \mu_l^2}{(\pi n_D) \omega_1^2 \mu_l} = \frac{(\pi d)^2}{(\pi n_D)} \mu_l = \frac{21^2}{15} \cdot 0,002 = 0,0588 \text{ м}.$$

Пример 2. Построить планы скоростей и ускорений механизма строгального станка (рис. 25, а). Найти скорость и ускорение звена 5. Дано:  $\varphi_1 = 300^\circ$ ,  $l_{AB} = 0,05 \text{ м}$ ,  $l_{AC} = 0,12 \text{ м}$ ,  $l_{CD} = 0,200 \text{ м}$ ,  $H = 0,10 \text{ м}$ ,  $l_{DE} = 0,08 \text{ м}$ . Угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$ .

Решение. 1) Проводим структурный анализ и устанавливаем класс механизма. Число звеньев  $k = 6$ , число подвижных звеньев  $n = 5$ , число кинематических пар  $V$  класса  $p_5 = 7$ , степень подвижности  $\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ . Механизм образован так: к ведущему звену  $AB$  и стойке 6 присоединена группа Ассур второго класса третьего вида, состоящая из звеньев 2 и 3, а к этой группе и стойке присоединена группа второго класса второго вида, состоящая из звеньев 4 и 5, следовательно, заданный механизм следует отнести ко второму классу.

2) Строим план положения механизма. Длину отрезка  $(AB)$  выбираем равной 25 мм, поэтому масштаб схемы будет

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{(AB)} = \frac{0,05}{25} = 0,002 \frac{м}{мм}.$$

Длины остальных отрезков на чертеже:

$$(AC) = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0,12}{0,002} = 60 \text{ мм},$$

$$(CD) = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,200}{0,002} = 100 \text{ мм},$$

$$h = \frac{H}{\mu_l} = \frac{0,10}{0,002} = 50 \text{ мм}, \quad (DE) = \frac{l_{DE}}{\mu_l} = \frac{0,08}{0,002} = 40 \text{ мм}.$$

По полученным размерам строим план положения механизма (рис. 25, б).

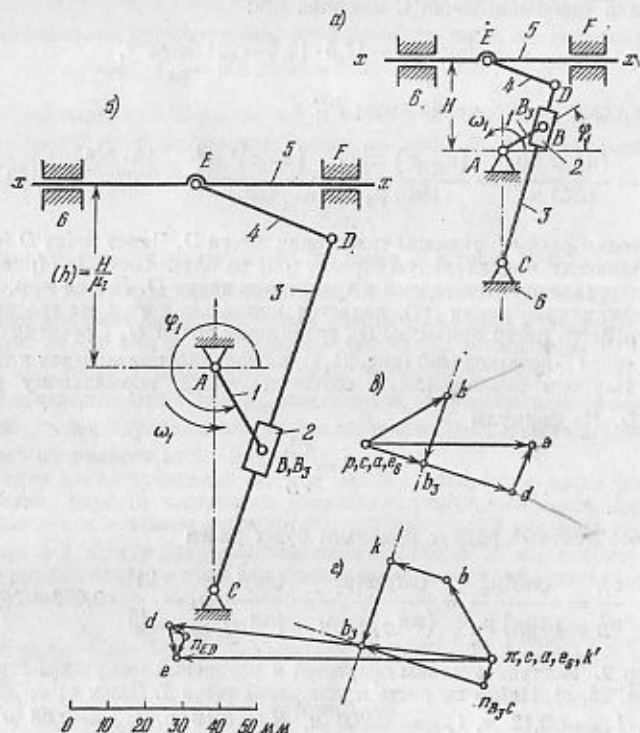


Рис. 25. Кинематический анализ механизма строгального станка: а) схема, б) план положения, в) план скоростей, г) план ускорений.

3) Строим план скоростей механизма. Начинаем с группы, состоящей из звеньев 2 и 3, так как она непосредственно присоединена к ведущему звену и стойке. Построение ведем по следующим векторным уравнениям:

$$v_{B_3} = v_B + v_{B_3B}, \quad v_{B_3} = v_C + v_{B_3C}$$

где  $v_{B_3}$  — скорость точки  $B_3$  звена 3, которая лежит под точкой  $B$ ;  $v_B$  — скорость точки  $B$ , по модулю равная  $v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 10 \cdot 0,05 = 0,5 \text{ мсек}^{-1}$  и направленная перпендикулярно  $AB$  в соответствии с направлением угловой скорости  $\omega_1$ ;  $v_{B_3B}$  — скорость точки  $B_3$  относительно точки  $B$ , направленная параллельно линии  $BC$ ;  $v_C$  — скорость точки  $C$ , равная нулю;  $v_{B_3C}$  — скорость точки  $B$  во вращении звена 3 относительно точки  $C$ , по модулю равная  $v_{B_3C} = \omega_3 \cdot l_{B_3C}$  и направленная перпендикулярно  $BC$  (пока нам не известна).

Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше. От полюса  $p$  плана (рис. 25, в) откладываем отрезок  $(pb)$ , изображающий скорость  $v_B$  точки  $B$ . Длину этого отрезка принимаем равной  $(pb) = (AB) = 25 \text{ мм}$ , т. е. план строим в масштабе кривошипа. Через точку  $b$  проводим направление скорости  $v_{B_3B}$  — линию, параллельную  $CB_3$ . Переходим к построению решения второго векторного уравнения, указанного выше. Надо отложить вектор скорости точки  $C$ , но так как модуль его равен нулю, то конец его с помещаем в полюс плана  $p$  и из точки  $p$  проводим направление скорости  $v_{B_3C}$  — линию, перпендикулярную  $CB$ . Пересечение ее с ранее проведенной линией, параллельной  $CB$ , дает конец вектора скорости  $v_{B_3}$  — точку  $b_3$ . Точку  $d$  — конец вектора скорости точки  $D$  — находим по правилу подобия из соотношения

$$\frac{(cd)}{(cb_3)} = \frac{(CD)}{(CB_3)},$$

откуда

$$(cd) = (cb_3) \frac{(CD)}{(CB_3)} = 17 \frac{100}{40} = 42,5 \text{ мм}.$$

Переходим к построению плана скоростей группы 4, 5. Этот план строим по уравнениям

$$v_E = v_D + v_{ED}, \quad v_E = v_{E_0} + v_{EE_0},$$

где  $v_E$  — скорость точки  $E$ ;  $v_D$  — скорость точки  $D$  (ее вектор отложен на плане скоростей в виде отрезка  $(pd)$ ;  $v_{ED}$  — скорость точки  $E$  во вращении звена 4 относительно точки  $D$ , по модулю равная  $v_{ED} = \omega_4 \cdot l_{DE}$  и направленная перпендикулярно линии  $DE$  (пока нам не известна);  $v_{E_0}$  — скорость точки  $E_0$  звена 6, которая совмещена с точкой  $E$  (модуль ее равен нулю, так как звено 6 неподвижно);  $v_{EE_0}$  — скорость точки  $E$  относительно точки  $E_0$ , направленная параллельно линии  $xx$ . Построение сводится к проведению через точку  $d$  (согласно первому уравнению) линии, перпендикулярной  $DE$ , т. е. направлению скорости  $v_{ED}$  и проведению через точку  $p$  (согласно второму уравнению) линии, параллельной  $xx$ . Точка  $e$  пересечения этих линий есть конец вектора скорости  $v_E$  точки  $E$ . Помещаем в полюс точки  $c, e_0, a$  и на этом заканчиваем построение плана скоростей механизма.

Масштаб плана скоростей равен

$$\mu_v = \frac{v_B}{(pb)} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{(pb)} = \omega_1 \mu_l = 10 \cdot 0,002 = 0,02 \frac{\text{мсек}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Масштаб плана аналогов скоростей равен

$$\mu_{\varphi_v} = \frac{\mu_v}{\omega_1} = \mu_l = 0,002 \frac{м}{мм}.$$

Искомая скорость суппорта (скорость точки  $E$ ) равна

$$v_E = (pe) \mu_v = 45 \cdot 0,020 = 0,90 \text{ мсек}^{-1}.$$



4) Строим план ускорений группы 2, 3. Построение ведем по следующим двум векторным уравнениям:

$$a_{B_3} = a_B + a_{B_3B}^k + a_{B_3B}^r, \quad a_{B_3} = a_C + a_{CB_3}^n + a_{CB_3}^t,$$

где  $a_{B_3}$  — ускорение точки  $B_3$ , которая принадлежит звену 3 и совмещилась с точкой  $B$  звена 1;  $a_B$  — нормальное (оно же полное) ускорение точки  $B$ , по модулю равное  $a_B = \omega_1^2 l_{AB} = 10^2 \cdot 0,05 = 5 \text{ мсек}^{-2}$  и направленное параллельно  $AB$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;  $a_{B_3B}^k$  — ускорение Кориолиса в движении точки  $B_3$  относительно звена 2, по модулю равное

$$a_{B_3B}^k = 2\omega_2 v_{B_3B} = 2 \frac{v_{B_3C}}{l_{BC}} v_{B_3B}$$

(так как  $\omega_2 = \omega_3$  и  $\omega_3 = \frac{v_{B_3C}}{l_{BC}}$ ) и имеющее направление вектора относительной скорости  $v_{B_3B}$ , повернутого на  $90^\circ$  в направлении угловой скорости  $\omega_2$  переносного движения (движения звена 2);  $a_{B_3B}^r$  — относительное (релятивное) ускорение точки  $B_3$  относительно точки  $B$ , направленное параллельно линии  $CB$ ;  $a_C$  — ускорение точки  $C$  (оно равно нулю);  $a_{B_3C}^n$  — нормальное ускорение точки  $B_3$  во вращении звена 3 относительно точки  $C$ , по модулю равное

$$a_{B_3C}^n = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C}}$$

и направленное параллельно линии  $CB_3$  от точки  $B_3$  к точке  $C$ ;  $a_{B_3C}^t$  — касательное ускорение точки  $B_3$  в том же движении звена 3, по модулю равное  $a_{B_3C}^t = \varepsilon_3 l_{B_3C}$  (нам пока не известно) и направленное перпендикулярно  $CB_3$ .

Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше (рис. 25, з). Задаемся отрезком  $(\pi b) = (AB) = 25 \text{ мм}$ , который изображает в плане ускорение  $a_B$  (так как  $(\pi b) = (AB)$ , то план строится в масштабе кривошипа).

Масштаб плана ускорений равен

$$\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l}{(\pi b)} = \omega_1^2 \mu_l = 10^2 \cdot 0,002 = 0,2 \frac{\text{мсек}^{-2}}{\text{мм}}$$

Масштаб плана аналогов ускорений равен

$$\mu_{\varphi_a} = \frac{\mu_a}{\omega_1^2} = \mu_l = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

Выбранный отрезок  $(\pi b)$  откладываем от полюса плана  $(\pi)$ , далее к нему прибавляем отрезок  $(bk)$  — вектор кориолисова ускорения — его длину находим по формуле

$$(bk) = \frac{a_{B_3B}^k}{\mu_a} = \frac{2v_{B_3C} \cdot v_{B_3B}}{l_{B_3C} \mu_a} = \frac{2(b_3c)(bb_3) \mu_v^2}{(B_3C) \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{2 \cdot 17 \cdot 19,5}{40} = 16,5 \text{ мм},$$

отрезки  $(b_3c) = 17 \text{ мм}$  и  $(bb_3) = 19,5 \text{ мм}$  взяты из плана скоростей, а отрезок  $(B_3C) = 40 \text{ мм}$  — из плана положения. Через точку  $k$  проводим, направленное ускорения  $a_{B_3B}^r$  — линию, параллельную  $CB$ .

Переходим к построению второго векторного уравнения. Точку  $c$  совмещаем с точкой  $\pi$ , так как  $a_C = 0$ , от точки  $\pi$  откладываем отрезок  $(\pi l_{B_3C})$ , изображающий нормальное ускорение  $a_{B_3C}^n$ , его длина равна

$$(\pi l_{B_3C}) = \frac{v_{B_3C}^2}{l_{B_3C} \mu_a} = \frac{(\rho b_3)^2 \mu_v^2}{(B_3C) \mu_l \mu_a} = \frac{17^2}{40} = 7,2 \text{ мм};$$

далее через точку  $n_{B_3C}$  проводим направление ускорения  $a_{B_3C}^t$  — линию, перпендикулярную  $CB$ , до пересечения с ранее проведенной через точку  $k$  линией, параллельной  $CB$ . Точка пересечения  $b_3$  представляет собой конец вектора ускорения  $a_{B_3}$ . Конец вектора ускорения центра шарнира  $D$  (точку  $d$ ) найдем по правилу подобия из соотношения

$$(\pi d) = (\pi b_3) \frac{(CD)}{(B_3C)} = 35 \frac{100}{40} = 87,5 \text{ мм}.$$

Переходим к построению плана ускорений группы 4, 5 по уравнениям

$$a_E = a_D + a_{ED}^n + a_{ED}^t, \quad a_E = a_{E_6} + a_{EE_6}^k + a_{EE_6}^r,$$

где  $a_E$  — ускорение точки  $E$ ;  $a_D$  — ускорение точки  $D$  (оно определяется по ранее построенному отрезку  $(\pi d)$ :  $a_D = (\pi d) \mu_a = 87,5 \cdot 0,2 = 17,5 \text{ мсек}^{-2}$ );  $a_{ED}^n = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED}}$  — нормальное ускорение точки  $E$  во вращении звена 4 относительно точки

$D$  (оно направлено параллельно линии  $ED$  от точки  $E$  к точке  $D$ );  $a_{ED}^t = \varepsilon_4 l_{ED}$  — касательное ускорение той же точки в том же движении звена 4 (оно направлено перпендикулярно линии  $ED$ );  $a_{E_6}$  — ускорение точки  $E_6$ , которая принадлежит звену 6 и совмещена с точкой  $E$  (оно равно нулю);  $a_{EE_6}^k$  — кориолисово ускорение точки  $E$  в движении ее относительно стойки (точки  $E_6$ ; оно равно нулю);  $a_{EE_6}^r$  — относительное (релятивное) ускорение точки  $E$  относительно стойки (точки  $E_6$ ; оно направлено параллельно линии  $xx$ ).

В соответствии с первым векторным уравнением от точки  $d$  откладываем отрезок  $(dn_{ED})$ , изображающий нормальное ускорение  $a_{ED}^n$ . Его длина равна

$$dn_{ED} = \frac{v_{ED}^2}{l_{ED} \mu_a} = \frac{(ed)^2 \mu_v^2}{(ED) \mu_l \mu_a} = \frac{14^2}{40} = 4,9 \text{ мм}.$$

Далее через точку  $n_{ED}$  проводим направление ускорения  $a_{ED}^t$  (линию, перпендикулярную  $ED$ ) и переходим к построениям, соответствующим второму векторному уравнению, указанному выше. В точке  $\pi$  помещаем точки  $e_6$  и  $k'$ , так как модули ускорений  $a_{E_6}$  и  $a_{EE_6}^k$  равны нулю. Из точки  $\pi$  проводим направление ускорения  $a_{EE_6}^r$  (линию, параллельную  $xx$ ) до пересечения с линией, ранее проведенной из точки  $n_{ED}$ . Точка пересечения  $e$  является концом вектора ускорения точки  $E$ , т. е. ускорения  $a_E$ . Располагаем в полюсе плана точку  $a$  и на этом заканчиваем построение плана ускорения механизма.

Искомое ускорение суппорта (точки  $E$ ) будет равно

$$a_E = (\pi e) \mu_a = 85 \cdot 0,2 = 17,0 \text{ мсек}^{-2}.$$

**Пример 3.** Методом планов найти угловые скорости и ускорение лепестка (звена 5) в механизме привода лепестков фотозатвора (рис. 26, а). Дано:  $\varphi_1 = 270^\circ$ ,  $l_{AB} = 0,01 \text{ м}$ ,  $l_{BC} = 0,080 \text{ м}$ ,  $l_{AD} = 0,12 \text{ м}$ ,  $l_{CD} = 0,084 \text{ м}$ ,  $\angle CDF = 30^\circ$ ,  $H_1 = 0,02 \text{ м}$ ,  $H_2 = 0,058 \text{ м}$ ,  $l_{FD} = 0,07 \text{ м}$ , угловая скорость кривошипа  $\omega_1 = 200 \text{ сек}^{-1}$  и его угловое ускорение  $\varepsilon_1 = 10\,000 \text{ сек}^{-2}$ .

**Решение.** 1) Проводим структурный анализ и устанавливаем класс механизма. Число звеньев равно  $k = 6$ , число подвижных звеньев равно  $n = 5$ , число кинематических пар V класса  $p_5 = 7$ . Степень подвижности  $\omega = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$ . Механизм образован так: к ведущему звену  $AB$  и стойке (звену 6) присоединена группа Ассур второго класса первого вида, состоящая из звеньев 2 и 3, а к этой группе и стойке присоединена группа второго класса третьего вида, состоящая из звеньев 4 и 5. Заданный механизм надо отнести ко второму классу.



2) Строим план положения механизма. Длину отрезка  $(AB)$  назначаем равной  $(AB) = 10 \text{ мм}$ , поэтому масштаб чертежа будет

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{(AB)} = \frac{0,01}{10} = 0,001 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$$

Вычисляем длины остальных отрезков на чертеже:

$$(BC) = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,08}{0,001} = 80 \text{ мм}; \quad (CD) = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0,084}{0,001} = 84 \text{ мм};$$

$$(AD) = \frac{l_{AD}}{\mu_l} = \frac{0,120}{0,001} = 120 \text{ мм}; \quad (h_1) = \frac{H_1}{\mu_l} = \frac{0,02}{0,001} = 20 \text{ мм};$$

$$(h_2) = \frac{H_2}{\mu_l} = \frac{0,058}{0,001} = 58 \text{ мм};$$

$$(DF) = \frac{l_{DF}}{\mu_l} = \frac{0,07}{0,001} = 70 \text{ мм}.$$

По полученным размерам строим план положения механизма (рис. 26, б).

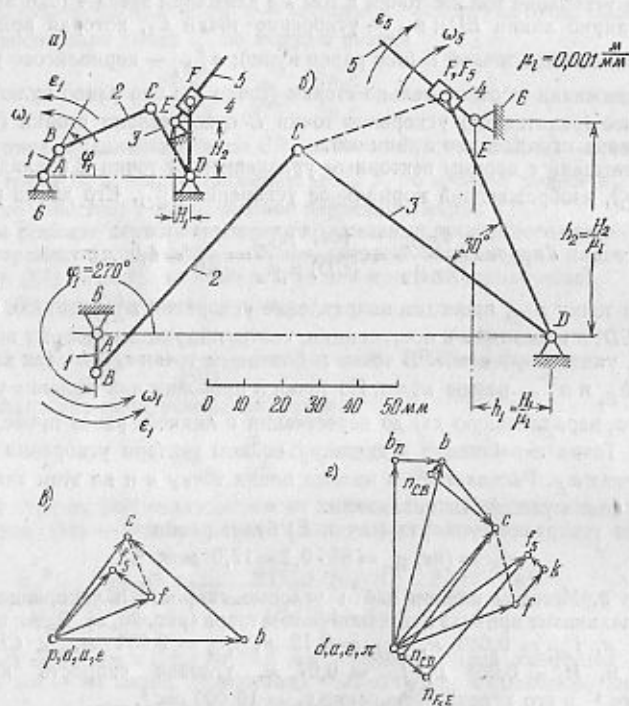


Рис. 26. Кинематический анализ механизма привода лепестков фотозатвора: а) схема, б) план положения, в) план скоростей, г) план ускорений.

3) Строим план скоростей механизма. Начинаем с группы Ассур, состоящей из звеньев 2, 3, так как она непосредственно присоединена к ведущему звену и стойке. План строим по векторным уравнениям

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB}, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{CD},$$

где  $\mathbf{v}_C$  — скорость точки  $C$ ;  $\mathbf{v}_B$  — скорость точки  $B$ , по модулю равная  $v_B = 200 \cdot 0,01 = 2,0 \text{ мсек}^{-1}$  и направленная перпендикулярно  $AB$  в соответствии с направлением угловой скорости  $\omega_1$  звена  $AB$ ;  $\mathbf{v}_{CB}$  — скорость точки  $C$  во вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , по модулю неизвестная и направленная перпендикулярно  $BC$ ;  $\mathbf{v}_D$  — скорость точки  $D$ , равная нулю;  $\mathbf{v}_{CD}$  — скорость точки  $C$  во вращении звена  $CD$  относительно точки  $D$ , по модулю неизвестная и направленная перпендикулярно  $CD$ . Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше. От полюса  $p$  плана (рис. 26, в) откладываем отрезок  $(pb)$ , изображающий скорость  $\mathbf{v}_B$ , и через конец его  $b$  проводим направление скорости  $\mathbf{v}_{CB}$  (отрезок  $(pb)$  взят равным  $(pb) = 50 \text{ мм}$ ). Переходим к построению решения второго векторного уравнения, указанного выше. Скорость  $\mathbf{v}_D = 0$ , поэтому конец ее (точку  $d$ ) совмещаем с полюсом  $p$  и через точку  $p$  проводим направление скорости  $\mathbf{v}_{CD}$  до пересечения с направлением скорости  $\mathbf{v}_{CB}$  в точке  $c$ . Отрезок  $(pc)$  изображает скорость точки  $C$ . Конец вектора скорости точки  $F$  (точку  $f$ ) найдем, вычислив отрезок  $(pf)$  по правилу подобия:

$$(pf) = (pc) \frac{(DF)}{(DC)} = 30 \frac{70}{84} = 27,4 \text{ мм}.$$

Этот отрезок составит с отрезком  $(pc)$  угол  $30^\circ$ . Переходим к построению плана скоростей группы Ассур, состоящей из звеньев 4, 5, который должен соответствовать таким векторным уравнениям:

$$\mathbf{v}_{F_5} = \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{F_5F}, \quad \mathbf{v}_{F_5} = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{F_5E},$$

где  $\mathbf{v}_{F_5}$  — скорость точки  $F_5$  звена 5, которая совмещается с точкой  $F$ ;  $\mathbf{v}_F$  — скорость точки  $F$ , она найдена предыдущим построением (отрезок  $(pf)$ );  $\mathbf{v}_{F_5F}$  — скорость точки  $F_5$  относительно точки  $F$ , по модулю неизвестная и направленная параллельно  $EF$ ;  $\mathbf{v}_E$  — скорость точки  $E$ , равная нулю;  $\mathbf{v}_{F_5E}$  — скорость точки  $F_5$  во вращении звена 5 относительно точки  $E$ , по модулю равная  $v_{F_5E} = \omega_5 l_{F_5E}$  и направленная перпендикулярно  $EF$ . Построение плана сведется к проведению через точку  $f$  линии, параллельной  $EF$  (направления скорости  $\mathbf{v}_{F_5F}$ ), и через точку  $p$  линии, перпендикулярной  $EF$  (направления скорости  $\mathbf{v}_{F_5E}$ ). Точка пересечения этих линий (точка  $f_5$ ) является концом вектора скорости точки  $F_5$  (отрезок  $(pf_5)$ ). В полюс плана помещаем точки  $d, e, a$  и на этом заканчиваем построение плана скоростей механизма.

Масштаб плана скоростей равен

$$\mu_v = \frac{v_B}{(pb)} = \frac{\omega_1 (AB) \mu_l}{(pb)} = \frac{200 \cdot 10 \cdot 0,001}{50} = 0,04 \frac{\text{мсек}^{-1}}{\text{мм}}.$$

Масштаб плана аналогов скоростей равен

$$\mu_{\omega_v} = \frac{\mu_v}{\omega_1} = \frac{0,04}{200} = 0,0002 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

Угловая скорость звена 5 равна

$$\omega_5 = \frac{v_{F_5E}}{l_{F_5E}} = \frac{(pf_5) \mu_v}{(EF) \mu_l} = \frac{24 \cdot 0,04}{10 \cdot 0,001} = 96 \text{ сек}^{-1}.$$

Ее направление определяется вектором скорости  $\mathbf{v}_{F_5E}$ , т. е. отрезком  $(pf_5)$ .

4) Строим план ускорений группы, состоящей из звеньев 2, 3. Он должен соответствовать таким векторным уравнениям:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t, \quad \mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D^n + \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t,$$

где  $\mathbf{a}_C$  — ускорение точки  $C$ ;  $\mathbf{a}_B^n$  — нормальное ускорение точки  $B$ , равное

$a_B^n = \omega_1^2 \cdot l_{AB} = 200^2 \cdot 0,01 = 400 \text{ мсек}^{-2}$ ;  $a_B^t$  — касательное ускорение той же точки  $B$ , равное  $a_B^t = \epsilon_1 l_{AB} = 10\,000 \cdot 0,01 = 100 \text{ сек}^{-2}$ ;  $a_{CB}^n$  — нормальное ускорение точки  $C$  во вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , равное  $a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{l_{CB}}$  и направленное параллельно  $CB$ ;  $a_{CB}^t$  — касательное ускорение той же точки  $C$  в том же движении звена  $BC$ , равное  $a_{CB}^t = \epsilon_2 l_{BC}$  и направленное перпендикулярно  $BC$ ;  $a_D$  — ускорение точки  $D$ , равное нулю;  $a_{CD}^n$  — нормальное ускорение точки  $C$  во вращении звена  $CD$  относительно точки  $D$ , равное  $a_{CD}^n = \frac{v_{CD}^2}{l_{CD}}$  и направленное параллельно  $CD$ ;  $a_{CD}^t$  — касательное ускорение той же точки  $C$  в том же движении звена  $CD$ , равное  $a_{CD}^t = \epsilon_3 l_{CD}$  и направленное перпендикулярно  $CD$ .

5) Приступаем к построению плана ускорений (рис. 26,  $\epsilon$ ). Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше. От полюса  $\pi$  плана ускорений откладываем отрезок  $(\pi b_n)$ , изображающий ускорение  $a_B^n$ . Длину его выбираем равной  $(\pi b_n) = 50 \text{ мм}$ , отчего масштаб плана ускорения будет

$$\mu_a = \frac{a_B^n}{(\pi b_n)} = \frac{\omega_1^2 (AB) \mu_l}{(\pi b_n)} = \frac{200^2 \cdot 10 \cdot 0,001}{50} = 8 \frac{\text{мсек}^{-2}}{\text{мм}}$$

От точки  $b_n$  откладываем отрезок  $(b_n b)$ , изображающий касательное ускорение  $a_B^t$ ; этот отрезок равен

$$(b_n b) = \frac{a_B^t}{\mu_a} = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ мм.}$$

Далее от точки  $b$  откладываем отрезок  $(bn_{CB})$ , изображающий нормальное ускорение  $a_{CB}^n$ ; длина его равна

$$(bn_{CB}) = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{v_{CB}^2}{l_{BC} \mu_a} = \frac{(bc)^2 \mu_v^2}{(BC) \mu_l \mu_a} = \frac{40^2}{80} \cdot \frac{1}{5} = 4 \text{ мм}$$

(в нашем случае дробь  $\frac{\mu_v^2}{\mu_l \mu_a} = \frac{1}{5}$  и отрезок  $(bc) = 40 \text{ мм}$  взят из плана скоростей);

через точку  $n_{CB}$  проводим направление касательного ускорения  $a_{CB}^t$  — линию, перпендикулярную  $BC$ . Затем переходим к построению решения второго векторного уравнения, указанного выше. Ускорение  $a_D = 0$ , поэтому конец вектора, его изображающего (точка  $d$ ), совпадает с точкой  $\pi$  — полюсом плана ускорений. От полюса  $\pi$  откладываем отрезок  $(\pi n_{CD})$ , изображающий нормальное ускорение  $a_{CD}^n$ . Длина этого отрезка равна

$$(\pi n_{CD}) = \frac{v_{CD}^2}{l_{CD} \cdot \mu_a} = \frac{(cd)^2 \mu_v^2}{(CD) \mu_l \mu_a} = \frac{(33)^2}{84} \cdot \frac{1}{5} = 2,6 \text{ мм.}$$

Далее через точку  $n_{CD}$  проводим направление ускорения  $a_{CD}^t$  (т. е. линию, перпендикулярную  $DC$ ) до пересечения с линией действия вектора ускорения  $a_{CB}^t$ . Точка пересечения  $c$  есть конец вектора  $a_C$  искомого ускорения точки  $C$ . Соединив точки  $b$  и  $c$  на плане, получим отрезок  $(bc)$ , соответствующий полному ускорению  $a_{CB}$ . Вектор ускорения  $a_F$  точки  $F$  (отрезок  $(\pi f)$ ) находится по правилу

подобия; он составляет с отрезком  $(\pi c)$  угол  $30^\circ$ , а его длина находится из соотношения

$$(\pi f) = (\pi c) \frac{(FD)}{(DC)} = 42 \cdot \frac{70}{84} = 35 \text{ мм}$$

(отрезок  $(\pi c) = 42 \text{ мм}$  взят из плана ускорений). Переходим к построению плана ускорений группы Ассур, состоящей из звеньев 4, 5. Для этого пользуемся уравнениями

$$a_{F_5} = a_F + a_{F_5 F}^k + a_{F_5 F}^r, \quad a_{F_5} = a_E + a_{F_5 E}^n + a_{F_5 E}^t,$$

где  $a_{F_5}$  — ускорение точки  $F_5$  звена 5, которая совмещена с точкой  $F$ ;  $a_F$  — ускорение точки  $F$  (отрезок  $(\pi f)$ , его изображающий, найден при построении плана ускорений для группы, состоящей из звеньев 2 и 3);  $a_{F_5 F}^k$  — ускорение Кориолиса в движении точки  $F_5$  относительно звена 4, по модулю равное  $a_{F_5 F}^k = 2\omega_4 \cdot v_{F_5 F}$  и имеющее направление вектора  $\varphi_{F_5 F}$ , повернутого на угол, равный  $90^\circ$ , в сторону вращения звена 4 или, что то же, звена 5 (звенья 4 и 5 входят в поступательную кинематическую пару, поэтому их угловые скорости одинаковы, т. е.  $\omega_4 = \omega_5$ );  $a_{F_5 F}^r$  — относительное ускорение точки  $F_5$  относительно точки  $F$ , неизвестное по модулю и направленное параллельно линии  $EF$ ;  $a_E$  — ускорение точки  $E$ , равное нулю;  $a_{F_5 E}^n$  — нормальное ускорение точки  $F_5$  во вращении звена 5 относительно точки  $E$ , по модулю равное

$$a_{F_5 E}^n = \frac{v_{F_5 E}^2}{l_{F_5 E}}$$

и направленное параллельно линии  $EF$ ;  $a_{F_5 E}^t$  — касательное ускорение точки  $F_5$  в том же движении звена 5, равное по модулю  $a_{F_5 E}^t = \epsilon_5 l_{F_5 E}$  и направленное перпендикулярно  $EF$ .

Строим решение первого векторного уравнения, указанного выше (рис. 26,  $\epsilon$ ). От точки  $f$  откладываем отрезок  $(fk)$  — ускорение  $a_{F_5 F}^k$ , длина которого

$$(fk) = \frac{a_{F_5 F}^k}{\mu_a} = \frac{2v_{F_5 E} v_{F_5 F}}{l_{F_5 E} \cdot \mu_a} = \frac{2(f f_5)(f f_5) \mu_v^2}{(F_5 E) \mu_l \mu_a} = \frac{2 \cdot 24 \cdot 13}{10} \cdot \frac{1}{5} = 12,5 \text{ мм}$$

(дробь  $\frac{\mu_v^2}{\mu_l \mu_a} = \frac{1}{5}$ ; отрезки  $(f f_5) = 24 \text{ мм}$ ,  $(f_5) = 13 \text{ мм}$  взяты из плана скоростей отрезок  $F_5 E = 10 \text{ мм}$  — из плана положения). Далее через точку  $k$  проводим направление ускорения  $a_{F_5 F}^r$  — линию, параллельную  $F_5 E$ .

Переходим к построению решения второго векторного уравнения, указанного выше. Конец ускорения  $a_E$  точки  $E$  (точку  $e$ ) совмещаем с полюсом плана  $\pi$  и от нее откладываем отрезок  $(\pi n_{F_5 E})$  — ускорение  $a_{F_5 E}^n$ . Этот отрезок равен

$$(\pi n_{F_5 E}) = \frac{a_{F_5 E}^n}{\mu_a} = \frac{v_{F_5 E}^2}{l_{F_5 E} \mu_a} = \frac{(f f_5)^2 \mu_v^2}{(F_5 E) \mu_l \cdot \mu_a} = \frac{24^2}{10} \cdot \frac{1}{5} = 11,5 \text{ мм}$$

(отрезок  $(f f_5) = 24 \text{ мм}$  взят из плана скоростей, а отрезок  $(F_5 E) = 10 \text{ мм}$  — из плана положения). Далее через точку  $n_{F_5 E}$  проводим направление  $a_{F_5 E}^t$ , т. е. линию, перпендикулярную  $F_5 E$ , до пересечения с ранее проведенной линией, параллельной  $F_5 E$  (т. е. направлением ускорения  $a_{F_5 F}^r$ ). Точка  $f_5$  пересечения есть конец отрезка  $(\pi f_5)$ , изображающего ускорение  $a_{F_5}$ . В полюс плана помещаем точку  $a$  и на этом построении плана ускорений механизма заканчиваем.

Угловое ускорение звена 5 находится по формуле

$$\epsilon_5 = \frac{a'_{F_5 E}}{l_{F_5 E}} = \frac{(n_{F_5 E} f_5) \mu_a}{(F_5 E) \mu_l} = \frac{42 \cdot 8}{10 \cdot 0,001} = 33\,600 \text{ сек}^{-2}$$

(отрезок  $(n_{F_5 E} f_5) = 42 \text{ мм}$  взят из плана ускорений, а отрезок  $(F_5 E) = 10 \text{ мм}$  — из плана положения), направление углового ускорения  $\epsilon_5$  находим по направлению отрезка  $(n_{F_5 E} f_5)$ .

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 31—33.)

### ЗАДАЧИ 111—126

(задачи решаются построением планов положений, скоростей и ускорений)

111. Найти абсолютные скорость и ускорение точки  $E$  и угловые скорость и ускорение звена  $CD$  (звена 3) четырехзвенного четырехшарнирного механизма. Дано:  $l_{AB} = 30 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = l_{AD} = 60 \text{ мм}$ ,  $l_{BE} = l_{CE} = 35 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ .

112. Найти угловую скорость и ускорение звена  $BC$  (звена 2) кривошипно-ползунного механизма. Дано:  $l_{AB} = 60 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 180 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 120^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 100 \text{ сек}^{-1}$ .

113. Найти угловую скорость и ускорение звена 3 механизма Витворта. Дано:  $l_{AB} = 30 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 60 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 240^\circ$ , угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$ .

114. Найти абсолютные скорость и ускорение точки  $D$  кривошипного механизма с качающимся ползунком. Дано:  $l_{AB} = 30 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 60 \text{ мм}$ ,  $l_{BD} = 120 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 150^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 40 \text{ сек}^{-1}$ .

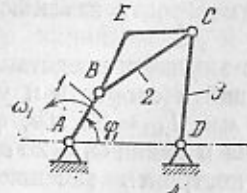
115. Найти абсолютные скорость и ускорение точки  $D_2$  ползуна 2 механизма ротационного насоса. Дано:  $l_{AC} = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 70 \text{ мм}$ ,  $l_{BD_2} = 16 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$ , угловая скорость кулисы (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 100 \text{ сек}^{-1}$ .

116. Найти абсолютные скорость и ускорение точки  $B_3$  звена 3 синусного механизма, совпадающей с точкой  $B$ . Дано:  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

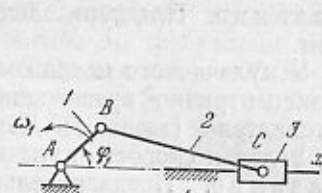
117. У механизма муфты Ольдгейма найти скорость и ускорение точки  $B_2$  звена 2, совмещенной с точками  $B_1$  и  $B_3$ , находящимися на пересечении осей направляющих  $Ax$  и  $Cy$ . Дано:  $l_{AC} = 40 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $Ax$  (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$ .

118. У тангенсного механизма найти абсолютные скорость и ускорение точки  $B_3$  (звена 3). Дано:  $H = 250 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 30^\circ$ , угловая скорость кулисы (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 5 \text{ сек}^{-1}$ .

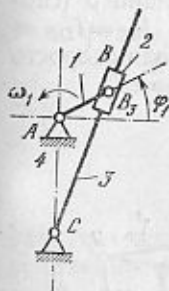
119. В кулачковом механизме, в котором кулачок представляет собой эксцентрично вращающийся диск, найти скорость и ускорение толкателя 2 (точки  $B_2$  его). Дано:  $R = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{AO} = 30 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 135^\circ$ , угловая скорость кулачка постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ .



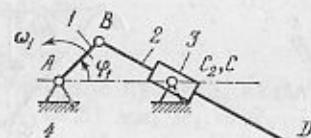
К задаче 111.



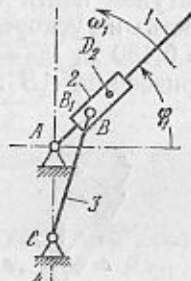
К задаче 112.



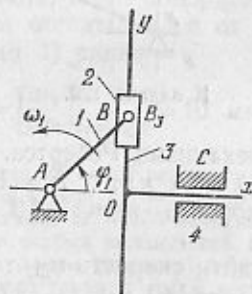
К задаче 113.



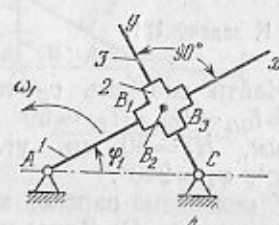
К задаче 114.



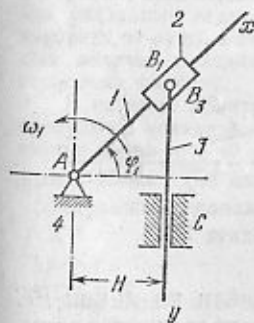
К задаче 115.



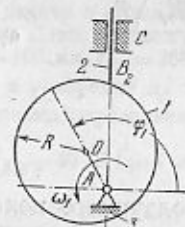
К задаче 116.



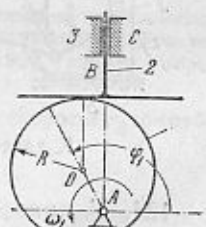
К задаче 117.



К задаче 118.



К задаче 119.



К задаче 120.

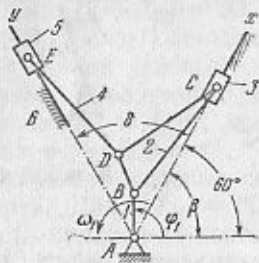


Указание. Предварительно следует построить заменяющий механизм.

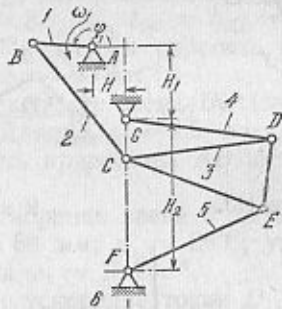
120. У кулачкового механизма, в котором кулачок представляет собою эксцентрично вращающийся диск, найти скорость и ускорение толкателя (звена 2). Дано:  $R=50$  мм,  $l_{AO}=30$  мм,  $\varphi_1=135^\circ$ , угловая скорость кулачка постоянна и равна  $\omega_1=20$  сек<sup>-1</sup>.

Указание. Предварительно надо построить заменяющий механизм.

121. У механизма двигателя внутреннего сгорания с прицепным шатуном найти абсолютные скорость и ускорение поршня 5 (скорость и ускорение точки E). Дано:  $l_{AB}=0,06$  м,  $l_{BC}=l_{DE}=0,180$  м,  $l_{BD}=0,06$ ,  $\angle DBC=\beta=60^\circ$ ,  $\delta=60^\circ$ , угловая скорость кривошипа AB постоянна и равна  $\omega_1=200$  сек<sup>-1</sup>,  $\varphi_1=45^\circ$ .



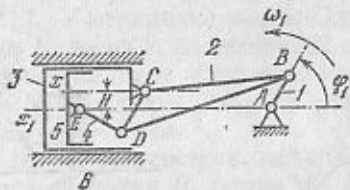
К задаче 121.



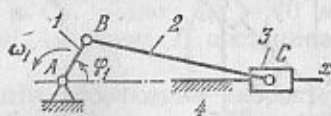
К задаче 122.

122. Найти скорость  $v_C$  точки C механизма Роберта. Дано:  $l_{BC}=l_{CE}=l_{CD}=l_{DG}=l_{EF}=50$  мм,  $l_{DE}=24$  мм,  $H=10$  мм,  $H_1=25$  мм,  $H_2=50$  мм, угловая скорость звена AB равна  $\omega_1=5$  сек<sup>-1</sup>,  $\varphi_1=240^\circ$ .

123. У механизма паровой машины найти скорость  $v_{EC}$  точки E относительно точки C. Дано:  $\varphi_1=60^\circ$ ,  $l_{AB}=180$  мм,  $l_{BC}=760$  мм,  $l_{BD}=950$  мм,  $l_{CD}=250$  мм,  $l_{ED}=240$  мм,  $H=80$  мм, угловая скорость кривошипа AB равна  $\omega_1=20$  сек<sup>-1</sup>.



К задаче 123.

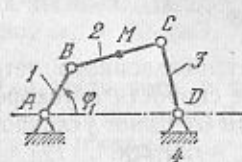


К задаче 124.

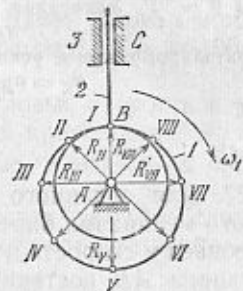
124. У кривошипно-ползунного механизма найти на линии BC шатуна точку M, скорость которой совпадает по направлению с линией BC. Дано  $l_{AB}=25$  мм,  $l_{BC}=100$  мм,  $\varphi_1=30^\circ$ .

125. У четырехзвенного четырехшарнирного механизма найти центр кривизны  $O_M$  и радиус кривизны  $\rho_M$  траектории точки M, лежащей на середине расстояния BC, если  $l_{AB}=30$  мм,  $l_{BC}=50$  мм,  $l_{CD}=40$  мм,  $l_{AD}=70$  мм,  $\varphi_1=45^\circ$ .

126. Провести точно нормаль к профилю кулачка в точке III кулачкового механизма, если значения



К задаче 125.



К задаче 126.

радиусов-векторов профиля кулачка, взятых через углы в  $45^\circ$ , соответственно равны  $R_I=20$  мм,  $R_{II}=R_{VIII}=22$  мм,  $R_{III}=R_{VII}=28$  мм,  $R_{IV}=R_{VI}=34$  мм,  $R_V=36$  мм. Значение первой производной (аналога скорости) от функции положения звена 2 (толкателя) при повороте кулачка на угол  $90^\circ$  (угол поворота кулачка отсчитывается от положения 1) равно

$$v_{\varphi, III} = \left[ \frac{ds_2}{d\varphi_1} \right]_{\varphi_1=90^\circ} = 10 \text{ мм.}$$

Задачи 127 — 138 решаются так же, как и задачи 111 — 126, но так как в задачах 127 — 138 механизмы заданы в особых положениях, при которых планы скоростей и ускорений представляют собой весьма простые геометрические фигуры, то построение планов скоростей и ускорений, необходимых для решения указанных задач, можно производить от руки, а значения искоемых величин находить по действительным соотношениям длин отрезков в построенных фигурах.

В качестве примера решим задачу о кинематическом анализе кривошипно-ползунного механизма (рис. 27, а). Дано: угловая скорость кривошипа AB постоянна и равна  $\omega_1=40$  сек<sup>-1</sup>,  $l_{AB}=100$  мм,  $l_{BC}=200$  мм,  $\varphi_1=90^\circ$ . Требуется определить абсолютные скорость  $v_C$  и ускорение  $a_C$  точки C.

Строим план положения механизма, определяем величину скорости  $v_B$  точки B:

$$v_B = \omega_1 \cdot l_{AB} = 40 \cdot 0,1 = 4 \text{ мсек}^{-1},$$

и строим план скоростей (рис. 27, б). Последний показывает, что скорость точки C равна скорости точки B:  $v_C = v_B = 4$  мсек<sup>-1</sup>, а скорость точки C относительно точки B равна нулю:  $v_{CB} = 0$ ,

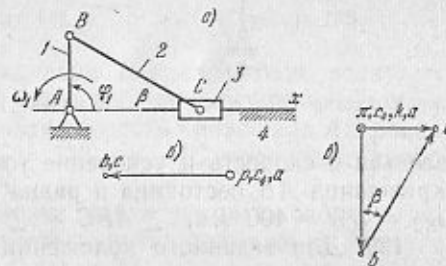


Рис. 27. Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма: а) план положения, б) план скоростей, в) план ускорений.

Для определения величины ускорения точки  $C$  строим план ускорений (рис. 27, в). Конфигурация схемы механизма и плана ускорений подобны. Имеем

$$\sin \beta = \frac{(AB)}{(BC)} = \frac{100}{200} = 0,5,$$

откуда  $\beta = 30^\circ$ . Ускорение точки  $B$  равно

$$a_B = \omega_1^2 l_{AB} = 160 \text{ мсек}^{-2};$$

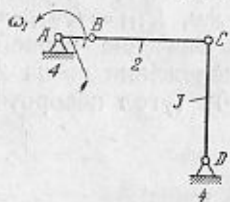
следовательно, искомое ускорение точки  $C$  равно

$$a_C = a_B \operatorname{tg} \beta = 160 \cdot 0,58 = 92,8 \text{ мсек}^{-2}.$$

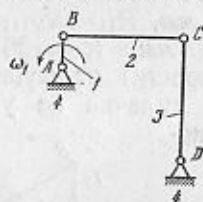
### ЗАДАЧИ 127—138

127. Для заданного положения четырехзвенного четырехшарнирного механизма определить угловые скорости и ускорения всех его звеньев и скорость и ускорение точки  $C$ . Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ мм}$ , отрезки  $AB$  и  $BC$  располагаются на одной прямой, а угол  $BCD = 90^\circ$ .

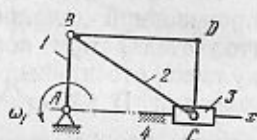
128. Для заданного положения четырехзвенного четырехшарнирного механизма найти угловые скорости и ускорения всех



К задаче 127.



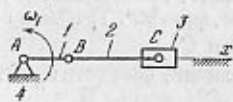
К задаче 128.



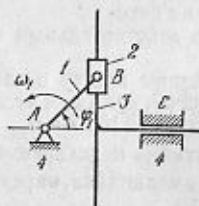
К задаче 129.

звеньев и скорость и ускорение точки  $C$ . Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ , а  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ мм}$ ,  $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$ .

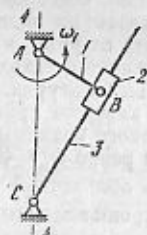
129. Для заданного положения кривошипно-ползунного механизма найти скорость и ускорение точки  $D$  звена 2 и угловые скорости и ускорения всех звеньев. Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 200 \text{ мм}$ ,  $l_{CD} = 100 \text{ мм}$ ,  $\angle CAB = \angle CDB = 90^\circ$ .



К задаче 130.



К задаче 131.



К задаче 132.

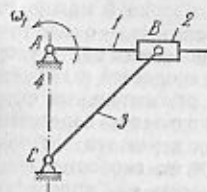
130. Для заданного положения кривошипно-ползунного механизма найти скорость и ускорение точки  $C$ . Дано: угловая скорость

кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 200 \text{ мм}$ , отрезки  $AB$  и  $BC$  располагаются на одной прямой.

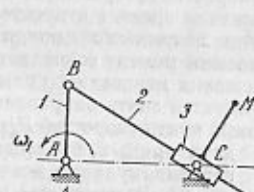
131. Для заданного положения синусного механизма определить скорость и ускорение звена 3 и указать, как в этом положении движется звено 3 (ускоренно или замедленно). Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

132. Для механизма Витворта найти угловые скорости и ускорения всех звеньев. Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 200 \text{ мм}$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ .

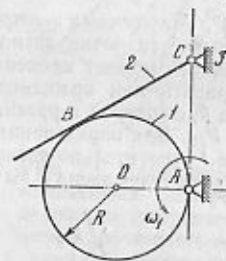
133. Для кулисного механизма определить угловые скорости и ускорения всех звеньев. Дано: угловая скорость кривошипа (звена 1) постоянна и равна  $\omega_1 = 10 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = l_{AC} = 200 \text{ мм}$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ .



К задаче 133.



К задаче 134.

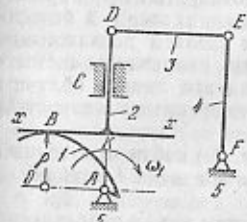


К задаче 135.

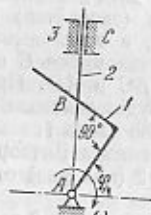
134. Для кривошипного механизма с качающимся ползуном определить скорость точки  $M$ , лежащей на плоскости, которая связана с ползуном 3. Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 173 \text{ мм}$ ,  $MC$  перпендикулярно  $BC$ ,  $l_{CM} = 100 \text{ мм}$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ .

135. Для кулачкового механизма найти угловую скорость  $\omega_2$  толкателя 2. Дано: угловая скорость кулачка равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $R = 50 \text{ мм}$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ ,  $\angle CAO = 90^\circ$ .

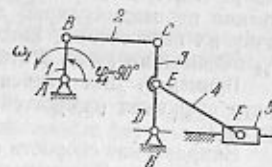
136. Для пятизвенного механизма определить угловую скорость  $\omega_3$  звена  $DE$  (звена 3) в заданном положении механизма. Дано:



К задаче 136.



К задаче 137.



К задаче 138.

угловая скорость кулачка (звена 1) равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AO} = 100 \text{ мм}$  (линия  $AO$  располагается горизонтально),  $l_{DE} = l_{EF} =$



$= 200$  мм,  $DE$  параллельно  $AO$  и  $xx$ ,  $DK$  параллельно  $EF$ ,  $EF$  перпендикулярно к  $AO$ ,  $\rho$  — радиус кривизны профиля кулачка.

137. Для секансного механизма найти скорость толкателя 2. Дано: угловая скорость звена 1 равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 50$  мм,  $\varphi_1 = 60^\circ$ .

138. Для шестизвенного механизма найти скорость и ускорение точки  $F$ . Дано: угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 300$  мм,  $l_{CD} = 200$  мм,  $l_{CE} = 100$  мм,  $l_{EF} = 200$  мм, отрезки  $AB$  и  $CD$  располагаются вертикально,  $\angle ABC = 90^\circ$ .

## § 7. Нахождение мгновенных центров скоростей и ускорений. Построение центроид

1°. Мгновенным центром скоростей  $P_{ik}$  в движении звена  $i$  относительно звена  $k$  называется точка звена  $i$ , скорость которой в этом движении равна нулю. В каждый момент времени движение звена  $i$  относительно звена  $k$  можно рассматривать как вращение около мгновенного центра вращения — около точки звена  $k$ , с которой в рассматриваемый момент совпадает мгновенный центр скоростей  $P_{ik}$ . Для определения положения мгновенного центра скоростей в движении звена  $i$  относительно звена  $k$  требуется знать направления относительных скоростей двух точек звена  $i$ . Мгновенный центр скоростей  $P_{ik}$  находится на пересечении двух прямых, проведенных через эти две точки перпендикулярно векторам их скоростей.

2°. Рассмотрим примеры на определение мгновенных центров вращения (центров скоростей) в относительном движении звеньев механизма.

**Пример 1.** Для четырехзвенного четырехшарнирного механизма (рис. 28) требуется найти мгновенные центры вращения (скоростей)  $P_{21}$  в движении шатуна (звена 2) относительно стойки (звена 4); и  $P_{31}$  в движении коромысла (звена 3) относительно кривошипа (звена 1).

При неподвижном звене 4 направления скоростей точек  $B$  и  $C$  перпендикулярны соответственно линиям  $AB$  и  $CD$ , поэтому точка пересечения этих линий является искомым мгновенным центром вращения (скоростей)  $P_{21}$  звена 2 относительно звена 4.

Для нахождения мгновенного центра вращения (скоростей) в движении звена 3 относительно звена 1 остановим звено 1, а остальные звенья сделаем подвижными. Теперь векторы скоростей центров шарниров  $C$  и  $D$  будут направлены соответственно перпендикулярно линиям  $BC$  и  $AD$ . Продолжая эти линии, получим точку их пересечения, которая и будет искомым центром вращения (скоростей)  $P_{31}$  в движении звена 3 относительно звена 1.

**Пример 2.** Для кулисного механизма Витворта (рис. 29) найти мгновенный центр вращения (скоростей) звена 2 (ползуна) относительно звена 4 (стойки) — точку  $P_{21}$ .

Направление скорости одной точки звена 2 нам известно: это — направление скорости точки  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ . Направление скорости другой точки звена 2 найдем так. Свяжем со звеном 2 плоскость  $Q$ . На этой плоскости отметим точку  $C_2$ , совпадающую с точкой  $C$ , и запишем векторное равенство, связывающее скорость точки  $C_2$  со скоростью точки  $C$ :

$$v_{C_2} = v_C + v_{C_2C}$$

Так как точка  $C$  неподвижна, то  $v_C = 0$ , и поэтому скорость точки  $C_2$  направлена вдоль линии  $BC$ . Искомый центр мгновенного вращения (скоростей) лежит на пересечении направления линии  $AB$  и перпендикуляра, восстановленного из точки  $C$  к линии  $BC$ .

3°. Рассмотрим вопрос о построении центроид в относительном движении звеньев. Центроидой в движении звена  $i$  относительно звена  $k$  называется геометрическое место мгновенных центров вращения звена  $i$ , отмеченных на плоскости, связанной со звеном  $k$ .

В качестве примера покажем построение центроид в случае, когда отрезок  $BC$  движется своими концами  $B$  и  $C$  по сторонам прямого угла  $xOy$  (рис. 30). Построим центроиду в движении отрезка  $BC$  относительно сторон угла  $xOy$ . Точки  $B$  и  $C$  имеют скорости, направленные соответственно вдоль линий  $Oy$  и  $Ox$ . Поэтому полюс  $P_{21}$  лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек  $B$  и  $C$  к сторонам  $Oy$  и  $Ox$  прямого угла.

Когда отрезок  $BC$  займет положение  $B'C'$ , мгновенный центр вращения займет положение  $P'_{21}$ . Фигуры  $OBP_{21}C$  и  $OB'P'_{21}C'$  — прямоугольники, у которых диагонали равны длине отрезка  $BC$ ; поэтому центроидой при движении отрезка  $BC$  относительно сторон угла  $xOy$  будет окружность  $\Pi_{21}$  с центром в точке  $O$  и радиусом, равным  $BC$ .

Теперь построим центроиду в движении прямого угла  $xOy$  относительно отрезка  $BC$ . Для этого будем считать, что отрезок  $BC$  неподвижен, и учтем, что стороны угла  $xOy$  всегда проходят через точки  $B$  и  $C$ .

При положении прямого угла  $xOy$  центр мгновенного вращения  $P_{12}$  совпадает с точкой  $P_{21}$ . Когда прямой угол займет положение  $x'O'y'$ , искомый центр найдется как точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек  $B$  и  $C$  к сторонам его  $y'O'$  и  $x'O'$ . Это вытекает из того, что скорости точек жесткого угла  $xOy$ , совпадающих с точками  $B$  и  $C$ , направлены вдоль его сторон. Фигуры  $BP_{12}C$  и  $B'P'_{12}C'$  — треугольники с прямым углом при вершинах  $P_{12}$  и  $P'_{12}$ , опирающиеся на один и тот же отрезок  $BC$ . Следовательно, центроидой в движении жесткого угла  $xOy$  относительно отрезка  $BC$  будет окружность  $\Pi_{12}$  с центром в точке  $A$  (в середине отрезка  $BC$ ) и радиусом, равным  $0,5 BC$ .

4°. Мгновенным центром ускорений  $\Pi$  звена называется точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Нахождение мгновенных центров ускорений проще всего производить при помощи планов ускорений, для чего следует воспользоваться свойством подобия, которое заключается в том, что 1) концы абсолютных ускорений точек звена на плане ускорений образуют фигуру, подобную той, которую эти точки образуют на звене, 2) указанные фигуры расположены сходственно.

**Пример.** Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 31, а) найти положение мгновенного центра ускорений звена  $BC$  (звена 2).

Строим последовательно план скоростей (рис. 31, б) и план ускорений (рис. 31, в) рассматриваемого механизма. Очевидно, что точка  $\pi$  в плане ускорений соответствует той точке звена  $BC$ , ускорение которой равно нулю, а следовательно, эта точка на звене  $BC$  и будет его мгновенным центром ускорений. На звене  $BC$

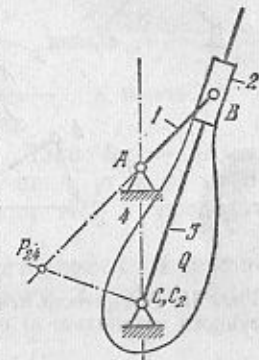


Рис. 29. Нахождение мгновенных центров вращения (скоростей) звеньев кулисного механизма Витворта.

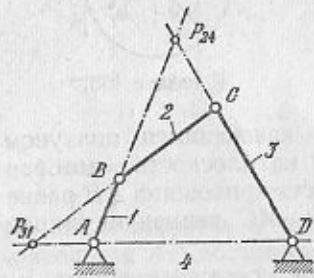


Рис. 28. Нахождение мгновенных центров вращения (скоростей) звеньев четырехзвенного четырехшарнирного механизма.

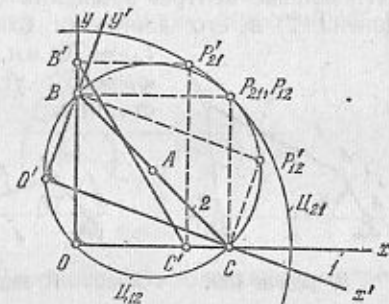


Рис. 30. Построение центроид в относительном движении звеньев.



от точки  $B$  откладываем отрезок ( $bc$ ) из плана ускорений (рис. 31, а), далее, на этом отрезке строим треугольник  $bcl'$ , равный треугольнику  $bcl$  плана ускорений. Продолжая сторону  $bl'$  до пересечения с линией, проведенной из точки  $C$

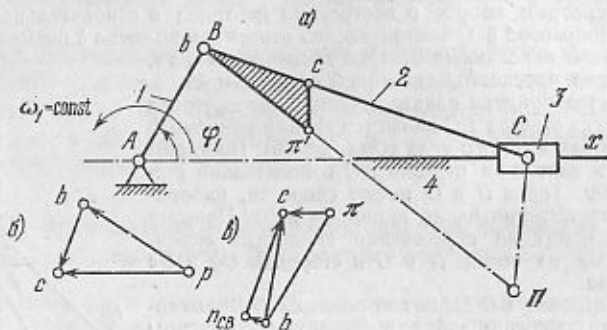


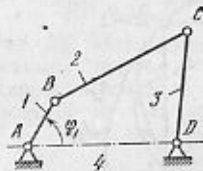
Рис. 31. Построение мгновенного центра ускорений звена  $BC$  кривошипно-ползунного механизма: а) план положения, б) план скоростей, в) план ускорений.

параллельно  $sl'$ , получаем точку  $\Pi$  — искомый мгновенный центр ускорений звена  $BC$ . (Из построения ясно, что треугольник  $BC\Pi$  подобен треугольнику  $bcl$  плана ускорений и сходственен с ним расположен.)

(См. И. И. Артоболевский. Теория механизмов, § 24 и § 27.)

#### ЗАДАЧИ 139—146

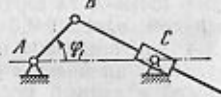
139. Для четырехшарнирного четырехзвенного механизма найти мгновенные центры вращения (скоростей) и ускорений шатуна  $BC$  (звена 2) в его движении относительно стойки (звена 4). Дано:  $l_{AB} = 70$  мм,  $l_{CD} = 150$  мм,  $l_{AB} = l_{BC} = 200$  мм,  $\varphi_1 = 15^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна.



К задаче 139.



К задаче 140.



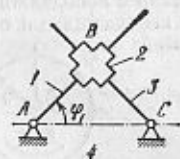
К задаче 141.

140. Для кривошипно-ползунного механизма найти мгновенные центры вращения (скоростей) и ускорений звена  $BC$  (звена 2) в его движении относительно стойки (звена 4). Дано:  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 150$  мм,  $\varphi_1 = 90^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна.

141. Для кривошипного механизма с качающимся ползуном найти мгновенные центры вращения (скоростей) и ускорений звена 2 в его движении относительно стойки (звена 4). Дано:  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{AC} = 80$  мм,  $\varphi_1 = 30^\circ$ , угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна.

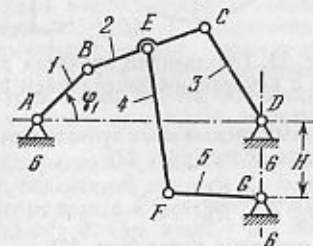
142. Для механизма муфты Ольдгейма найти мгновенный центр вращения (скоростей) звена 2 в его движении относительно стойки (звена 4), если  $l_{AC} = 80$  мм,  $\varphi_1 = 30^\circ$ .

143. Для шестизвенного механизма найти мгновенный центр вращения (скоростей) звена 4 в его движении относительно стойки (звена 6). Дано:  $l_{AB} = 40$  мм,  $l_{BC} = 66$  мм,  $l_{BE} = 33$  мм,  $l_{CD} = 60$  мм,  $l_{AD} = 120$  мм,  $H = 40$  мм,  $l_{EF} = 80$  мм,  $l_{FG} = 50$  мм,  $\varphi_1 = 60^\circ$ .



К задаче 142.

144. Для кривошипного механизма с качающимся ползуном построить центроиду в движении звена 2 относительно стойки (звена 4). Дано:  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{AC} = 150$  мм. Построение провести для значения угла  $\varphi_1$  поворота кривошипа  $AB$  в пределах от  $0^\circ$  до  $30^\circ$ .



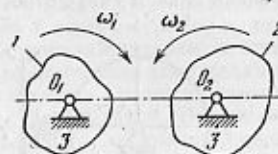
К задаче 143.



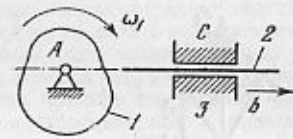
К задаче 144.

= -2. Построить центроиду в движении звена 2 относительно 1 и центроиду в движении звена 1 относительно звена 2, если  $l_{O_1O_2} = 60$  мм.

146. Звено 1 вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , звено 2 движется поступательно в направлении, указанном стрелкой  $b$ , и



К задаче 145.



К задаче 146.

аналог скорости последнего для рассматриваемого положения звеньев равен  $v_{\varphi_2} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} = 20$  мм. Найти мгновенный центр вращения (скоростей) звена 2 в его движении относительно звена 1.

### § 8. Кинематический анализ передач

1°. Передаточным отношением от звена  $k$  к звену  $l$  называется отношение угловой скорости  $\omega_k$  (или числа оборотов в минуту  $n_k$ ) звена  $k$  к угловой скорости  $\omega_l$  (или числу оборотов в минуту  $n_l$ ) звена  $l$ , т. е.

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l}. \quad (8.1)$$

Задачей кинематического анализа передач является нахождение передаточного отношения передачи через отношения размерных параметров ее звеньев. Различают *одноступенчатые* передачи, такие, в которых имеются только два звена с неподвижными осями вращения, и *многоступенчатые*, в которых звеньев с неподвижными осями вращения больше двух.

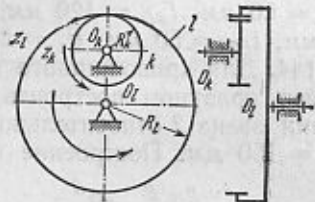
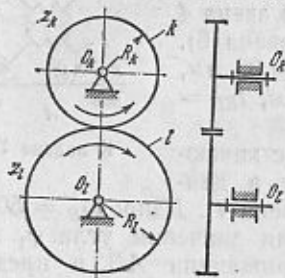


Рис. 32. Трехзвенная зубчатая передача с внешним зацеплением колес.

Рис. 33. Трехзвенная зубчатая передача с внутренним зацеплением колес.

## 2°. Передаточные отношения одноступенчатых трехзвенных зубчатых передач.

Для передачи с внешним зацеплением зубчатых колес (рис. 32)

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l} = -\frac{z_l}{z_k} = -\frac{R_l}{R_k} \quad (8.2)$$

Для передачи с внутренним зацеплением зубчатых колес (рис. 33)

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l} = \frac{z_l}{z_k} = \frac{R_l}{R_k} \quad (8.3)$$

Для передачи с коническими зубчатыми колесами (рис. 34)

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l} = \frac{z_l}{z_k} = \frac{R_l}{R_k} \quad (8.4)$$

В формулах (8.2)—(8.3)  $R_k$  и  $R_l$  — радиусы начальных окружностей колес  $k$  и  $l$ ;  $z_k$  и  $z_l$  — числа зубьев на колесах  $k$  и  $l$ ; знаки плюс и минус относятся соот-

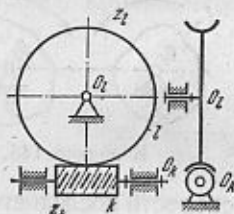
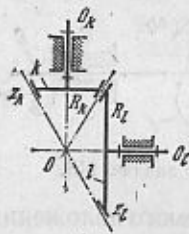


Рис. 34. Трехзвенная зубчатая передача с коническими колесами.

Рис. 35. Трехзвенная червячная передача.

ветственно к случаям вращения колес в одну и разные стороны. Последнее замечание не относится к коническим колесам, так как угловые скорости не представляются параллельными векторами.

Для червячной передачи (рис. 35)

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l} = \frac{z_l}{z_k} \quad (8.5)$$

где  $z_k$  — число заходов на червяке,  $z_l$  — число зубьев на колесе  $l$ .

3°. Многоступенчатые передачи. Эти передачи конструируются таким образом, что передача угловой скорости (числа оборотов) от звена  $k$  к звену  $l$ , имеющих неподвижные оси вращения, осуществляется через несколько промежуточных звеньев, которые тоже вращаются относительно неподвижных осей.

Допустим, что передача движения идет от звена  $k$  к звену  $l$  через звенья  $m$  и  $r$ , причем оси всех звеньев неподвижны. Тогда искомым передаточным отношением будет

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l} = i_{km} \cdot i_{mr} \cdot i_{rl} \quad (8.6)$$

т. е. передаточное отношение *многоступенчатой* передачи равно *произведению* передаточных отношений отдельных одноступенчатых передач, образующих эту передачу.

Для определения числа ступеней в многоступенчатой передаче можно руководствоваться следующим правилом: *число ступеней равно числу неподвижных осей в передаче без единицы.*

Если многоступенчатая передача образована цилиндрическими зубчатыми колесами, то знак ее передаточного отношения будет зависеть от знаков одноступенчатых передач, вошедших в ее состав.

Если же эта передача составлена из конических зубчатых колес, причем оси колес  $k$  и  $l$  параллельны, то знак ее следует определить по *правилу стрелок.*

Ознакомимся с этим правилом на примере передачи, показанной на рис. 36. В этой передаче движение от колеса 1 передается к колесу 2, а от колеса 2 к колесу 3. Оси колес 1 и 3 лежат на одной прямой. В этом случае угловые скорости колес 1 и 3 можно считать алгебраическими величинами и знак передаточного отношения  $i_{13} = i_{12} \cdot i_{23}$  определится следующим образом. Около места зацепления колес 1 и 2 на колесе 1 ставим стрелку  $a$ , направленную к месту зацепления колес, а на колесе 2 — стрелку  $b$ , также направленную к месту зацепления колес. Затем переносим стрелку  $b$  параллельно самой себе к месту зацепления колес 2 и 3. Перенесенная стрелка будет направлена от места зацепления колес 2 и 3, поэтому на колесе 3 ставим стрелку  $c$ , также направленную от места зацепления колес 2 и 3. Сравнивая направление стрелок  $a$  и  $c$  на колесах 1 и 3, устанавливаем следующее правило: если эти стрелки направлены в одну сторону, то знак у передаточного отношения  $i_{13}$  положительный, а если стрелки направлены в разные стороны, то знак отрицательный. В рассматриваемом примере эти стрелки имеют разные направления, т. е. колеса 1 и 3 вращаются в разные стороны. Следовательно, знак у  $i_{13}$  отрицательный.

4°. В некоторых задачах требуется найти расстояния между осями колес. При решении этого вопроса надо помнить, что радиусы начальных окружностей цилиндрических колес определяются соотношением

$$R = \frac{mz}{2}, \quad (8.7)$$

где  $z$  — число зубьев колеса,  $m$  — модуль по начальной окружности, равный

$$m = \frac{t}{\pi} \quad (8.8)$$

( $t$  — шаг по начальной окружности).

5°. Сателлитные (планетарные) передачи. При кинематическом анализе этих передач следует пользоваться такими формулами:

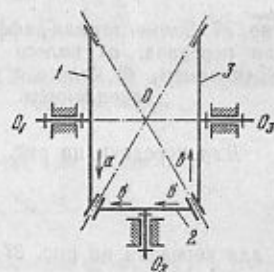


Рис. 36. К определению передаточного отношения по правилу стрелок.

для элементарной дифференциальной передачи (рис. 37) имеем

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_2 - n_H} = i_{12}^H, \quad (8.9)$$

где  $i_{12}^H$  — передаточное отношение от колеса 1 к колесу 2 при остановленном водиле  $H$ .

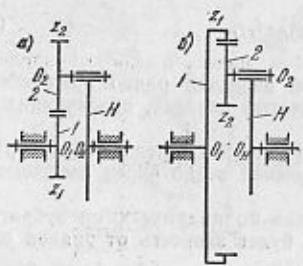


Рис. 37. Элементарная дифференциальная передача: а) колеса с внешним зацеплением, б) колеса с внутренним зацеплением.

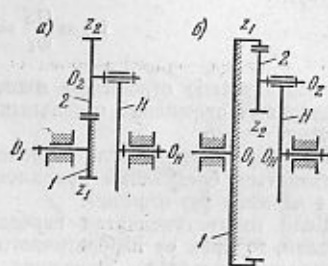


Рис. 38. Элементарная планетарная передача: а) колеса с внешним зацеплением, б) колеса с внутренним зацеплением.

Для передачи на рис. 37, а с внешним зацеплением колес

$$i_{12}^H = -\frac{z_2}{z_1},$$

а для передачи на рис. 37, б с внутренним зацеплением колес

$$i_{12}^H = \frac{z_2}{z_1}.$$

В случае элементарной планетарной передачи (рис. 38) следует положить в формуле (8.9)  $n_1 = 0$ ; тогда

$$\frac{-n_H}{n_2 - n_H} = i_{12}^H, \quad \text{или} \quad \frac{n_2 - n_H}{-n_H} = i_{21}^H,$$

откуда

$$\frac{n_2}{n_H} = i_{21}^H = 1 - i_{12}^H, \quad (8.10)$$

где  $i_{21}^H$  — передаточное отношение от колеса 2 к колесу 1 при остановленном водиле  $H$ . Это отношение для передачи на рис. 38, а равно  $i_{21}^H = -\frac{z_1}{z_2}$ , а для передачи

на рис. 38, б равно  $i_{21}^H = \frac{z_1}{z_2}$ .

Для дифференциального механизма (рис. 39)

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = i_{13}^H, \quad (8.11)$$

где  $i_{13}^H$  — передаточное отношение от центрального колеса 1 к другому центральному колесу 3 при остановленном водиле  $H$ ; в нашем случае оно равно

$$i_{13}^H = i_{12}^H \cdot i_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}.$$

Для планетарного одноступенчатого редуктора (рис. 40), в котором одно из центральных колес неподвижно (на рис. 40 это колесо 3), имеем,

$$\frac{n_1 - n_H}{-n_H} = i_{13}^H \quad (\text{так как } n_3 = 0),$$

откуда

$$i_{1H}^H = \frac{n_1}{n_H} = 1 - i_{13}^H, \quad (8.12)$$

где  $i_{13}^H$  — передаточное отношение от колеса 1 к колесу 3 при остановленном

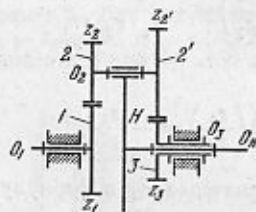


Рис. 39. Дифференциальный механизм.

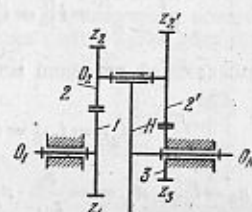


Рис. 40. Планетарный одноступенчатый редуктор.

водиле  $H$  и освобожденном колесе 3; в нашем случае оно равно

$$i_{13}^H = i_{12}^H \cdot i_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}.$$

Очевидно, что при ведущем водиле  $H$  передаточное отношение от водила  $H$  к колесу 1 будет равно

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}^H} = \frac{1}{1 - i_{13}^H}. \quad (8.13)$$

Следует помнить, что в состав одноступенчатого планетарного редуктора (рис. 40) обязательно входят: одно центральное подвижное колесо 1, одно центральное неподвижное колесо 3, водило  $H$  и сателлиты 2 и 2'.

Задачи об определении передаточного отношения многоступенчатой передачи надо решать в такой последовательности:

- 1) определить число ступеней в передаче,
- 2) найти передаточное отношение каждой ступени,
- 3) перемножить эти передаточные отношения; полученное число и будет искомым передаточным отношением.

**6°. Замкнутые дифференциальные редукторы.** Замкнутые дифференциальные редукторы образуются дифференциальными механизмами, в которых два звена с неподвижными осями вращения, т. е. центральные колеса или водило и центральное колесо, соединяются дополнительной передачей. Так (рис. 39), или колесо 1 и колесо 3, или колесо 1 и водило  $H$ , или колесо 3 и водило  $H$  входят в дополнительную передачу. Тогда между их угловыми скоростями (числами оборотов) устанавливается определенное соотношение. Такой механизм оказывается механизмом с одной степенью подвижности, и можно найти его передаточное отношение. Например, если колесо 1 и водило

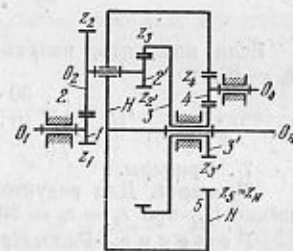


Рис. 41. Замкнутый дифференциальный редуктор.



ло  $H$  связаны дополнительной передачей, то можно найти передаточное отношение от колеса 1 к колесу 3 или от водила  $H$  к колесу 3. Можно найти передаточное отношение, наоборот, от колеса 3 к колесу 1 или от колеса 3 к водилу  $H$ .

На рис. 41 показан замкнутый дифференциальный редуктор. В этом редукторе дифференциальная часть его, состоящая из центральных колес 1 и 3, водила  $H$  и блока сателлитов 2 и 2', имеет дополнительную замыкающую передачу от колеса 3 к водилу  $H$ , которая состоит из колес 3', 4 и 5. Найдем передаточное отношение  $i_{1H}$  от колеса 1 к водилу  $H$ .

Для дифференциальной части рассматриваемого редуктора имеем по формуле (8.9)

$$\frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H} = i_{13}^H = i_{12}^H \cdot i_{23}^H = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(\frac{z_3}{z_2'}\right) = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

а для замыкающей передачи можем записать

$$\frac{n_3}{n_H} = i_{3H} = i_{3'5} = i_{3'4} \cdot i_{45} = \left(-\frac{z_4}{z_3'}\right) \left(\frac{z_5}{z_4}\right) = -\frac{z_5}{z_3'}$$

откуда  $n_3 = i_{3'5} \cdot n_H = -\frac{z_5}{z_3'} \cdot n_H$ . Подставляя значение  $n_3$  в формулу (8.9), получим

$$\frac{n_1 - n_H}{-\frac{z_5}{z_3'} \cdot n_H - n_H} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

Деля почленно левую часть дроби на  $n_H$  и обозначая отношение  $\frac{n_1}{n_H}$  через  $i_{1H}$ , получаем

$$\frac{\frac{n_1}{n_H} - 1}{-\frac{z_5}{z_3'} - 1} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} \quad \text{или} \quad \frac{i_{1H} - 1}{-\frac{z_5}{z_3'} - 1} = -\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'}$$

и окончательно:

$$i_{1H} = 1 + \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_5}{z_1 \cdot z_2' \cdot z_3'} + \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_2'} = \frac{n_1}{n_H}$$

Если положить, например,  $z_1 = z_2 = z_4 = 10$ ,  $z_2 = 30$ ,  $z_3 = 50$ ,  $z_3' = 20$ ,  $z_5 = 40$ , то

$$i_{1H} = 1 + \frac{30 \cdot 50 \cdot 40}{10 \cdot 10 \cdot 20} + \frac{30 \cdot 50}{10 \cdot 10} = 1 + 30 + 15 = 46.$$

### 7°. Примеры.

**Пример 1.** Для редуктора Джемса (рис. 42) подсчитать передаточное отношение  $i_{1H}$  при  $z_1 = z_2 = 20$  и  $z_3 = 60$ .

**Решение.** Рассматриваемый редуктор представляет собой одноступенчатую планетарную передачу, поэтому по формуле (8.12) получаем

$$i_{1H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - i_{13}^H = 1 - i_{12}^H \cdot i_{23}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{60}{20} = 1 + 3 = 4.$$

**Пример 2.** Для редуктора Давида (рис. 43) подсчитать передаточное отношение  $i_{1H}$  при  $z_1 = z_2' = 100$ ,  $z_2 = 99$  и  $z_3 = 101$ .

**Решение.** Рассматриваемый редуктор следует отнести к одноступенчатой планетарной передаче, поэтому по формуле (8.13) получаем

$$i_{1H} = \frac{1}{i_{1H}^H} = \frac{1}{1 - i_{13}^H} = \frac{1}{1 - i_{12}^H \cdot i_{23}^H} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2'}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{99 \cdot 101}{100 \cdot 100}} = 10000.$$

**Пример 3.** Для редуктора рис. 44 подсчитать передаточное отношение  $i_{15}$ , если  $z_1 = z_4 = 30$ ,  $z_2 = z_5 = 20$  и  $z_3 = 80$ , а также найти числа оборотов колеса 5 и сателлита 4 при  $n_1 = 50$  об/мин.

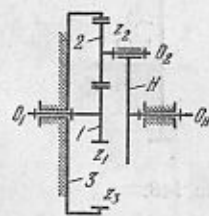


Рис. 42. Редуктор Джемса.

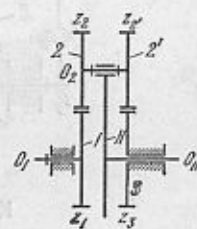


Рис. 43. Редуктор Давида.

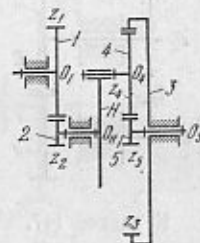


Рис. 44. Двухступенчатый редуктор с простой и планетарной ступенями.

**Решение.** 1) Устанавливаем, что редуктор двухступенчатый: первая ступень (не планетарная) — от колеса 1 к колесу 2; вторая (планетарная) — от водила  $H$  к колесу 5.

2) Подсчитываем передаточные отношения отдельных ступеней. Для первой ступени имеем  $i_{12} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{20}{30} = -\frac{2}{3}$ , откуда  $n_2 = -\frac{3}{2} n_1 = -\frac{3}{2} \cdot 50 = -75$  об/мин, так как  $n_2 = n_H$ , то  $n_H = -75$  об/мин; для второй ступени имеем

$$i_{H5} = \frac{n_H}{n_5} = \frac{1}{i_{5H}^H} = \frac{1}{1 - i_{54}^H \cdot i_{43}^H} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_4}{z_5}\right) \left(\frac{z_3}{z_4}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_5}} = \frac{1}{5}.$$

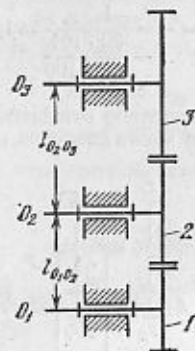
3) Передаточное отношение редуктора

$$\frac{n_1}{n_5} = i_{15} = i_{12} \cdot i_{H5} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{7,5},$$

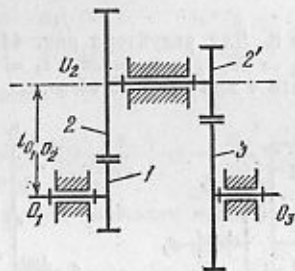
откуда  $n_5 = -7,5 n_1 = -7,5 \cdot 50 = -375$  об/мин.

4) Подсчитываем число оборотов сателлита. Для этого запишем формулу для элементарной планетарной передачи, состоящей из колеса 3, сателлита 4 и водила  $H$ :  $\frac{n_4 - n_H}{n_3 - n_H} = i_{43}^H = \frac{z_3}{z_4}$ . Так как  $n_3 = 0$ , а  $n_H = -75$  об/мин, то  $\frac{n_4 + 75}{-75} = \frac{80}{30}$ , откуда  $n_4 = 125$  об/мин, т. е. сателлит 4 вращается в ту же сторону, что и колесо 1. (См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 41, 43—45.)

147. Определить передаточное отношение  $i_{13}$  и расстояния  $l_{O_1, O_2}$  и  $l_{O_2, O_3}$  между осями колес зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль  $m=10$  мм, а числа зубьев колес соответственно равны  $z_1=20$ ,  $z_2=30$ ,  $z_3=40$ .



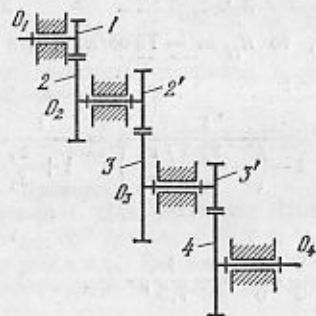
К задаче 147.



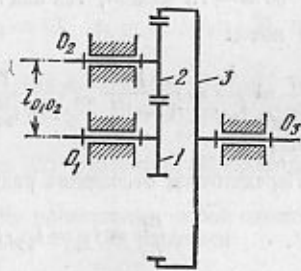
К задаче 148.

148. Определить передаточное отношение  $i_{13}$  зубчатой передачи и расстояние  $l_{O_1, O_2}$  между осями колес зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль  $m=10$  мм, а числа зубьев равны  $z_1=20$ ,  $z_2=40$ ,  $z_2'=15$ ,  $z_4=45$ .

149. Определить передаточное отношение  $i_{14}$  зубчатой передачи, если числа зубьев равны  $z_1=16$ ,  $z_2=48$ ,  $z_2'=20$ ,  $z_3=40$ ,  $z_3' = 13$ ,  $z_4=26$ .



К задаче 149.

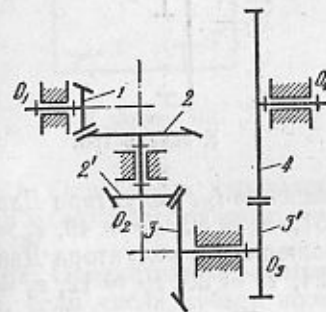


К задаче 150.

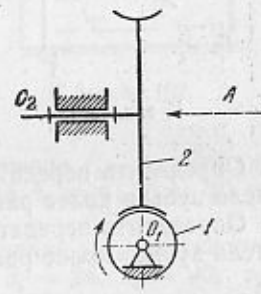
150. Определить передаточное отношение  $i_{13}$  и расстояние между осями колес  $l_{O_1, O_2}$  зубчатой передачи, если зубья всех колес имеют модуль  $m=12$  мм, а числа зубьев равны  $z_1=z_2=20$ ,  $z_3=60$ .

151. Определить передаточное отношение  $i_{14}$  зубчатой передачи, если числа зубьев колес равны  $z_1=20$ ,  $z_2=40$ ,  $z_2'=20$ ,  $z_3=30$ ,  $z_3'=20$ ,  $z_4=40$ . Ничего не меняя в последовательности зацепления колес и не меняя размеров, указать, как надо установить колесо 2' на оси  $O_2$ , чтобы вал  $O_4$  вращался в том же направлении, что и вал  $O_1$ .

152. Определить передаточное отношение  $i_{12}$  червячной передачи и направление вращения червячного колеса 2, смотря по стрелке А, если известно, что червяк 1 имеет правую нарезку и вращается так,



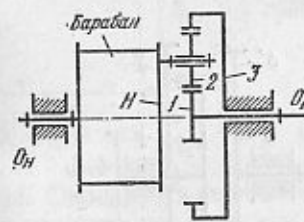
К задаче 151.



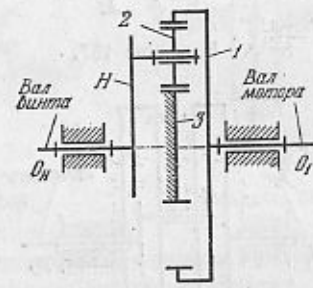
К задаче 152.

как это указано на чертеже. Число заходов резьбы червяка равно  $k=1$ , а число зубьев червячного колеса равно  $z_2=36$ .

153. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  зубчатой передачи лебедки для подъема шасси самолета, если числа зубьев колес равны  $z_1=z_2=12$ ,  $z_3=36$ .



К задаче 153.

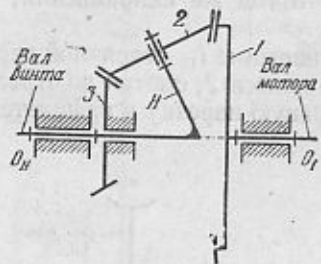


К задаче 154.

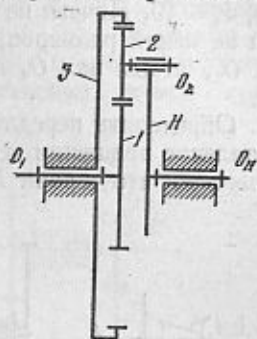
154. Определить передаточное отношение редуктора авиамотора  $i_{1H}$ , если числа зубьев колес равны  $z_1=64$ ,  $z_2=16$ ,  $z_3=32$ .

155. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  редуктора авиамотора, если числа зубьев колес равны  $z_1=60$ ,  $z_2=32$ ,  $z_3=30$ .

156. Определить числа оборотов в минуту водила  $H$  и сателлита 2, если вал  $O_1$  вращается со скоростью, равной  $n_1 = 120$  об/мин, а числа зубьев колес равны  $z_1 = 40$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_3 = 80$ .

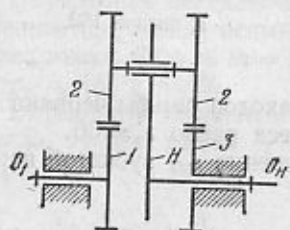


К задаче 155.

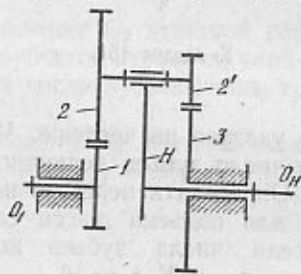


К задаче 156.

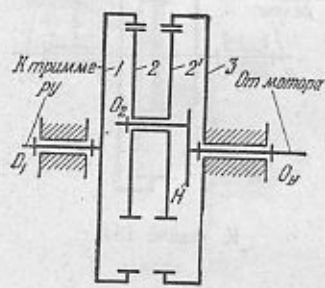
157. Определить передаточное отношение  $i_{H1}$  редуктора Давида, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 51$ ,  $z_2 = 50$ ,  $z_2' = 49$ ,  $z_3 = 50$ .  
 158. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  редуктора Давида, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 24$ ,  $z_2 = 36$ ,  $z_2' = 12$ ,  $z_3 = 48$ .



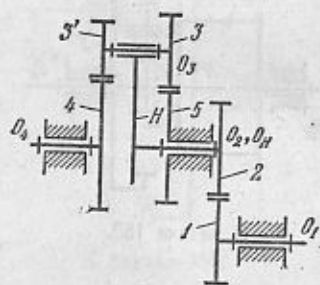
К задаче 157.



К задаче 158.

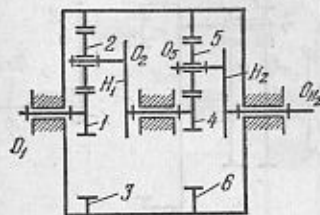


К задаче 159.

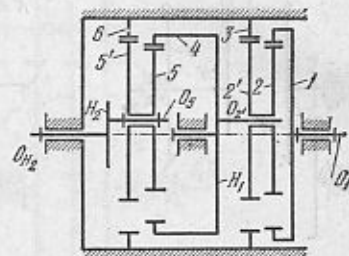


К задаче 160.

160. Определить передаточное отношение  $i_{14}$  редуктора Давида с непланетарной ступенью, если числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 70$ ,  $z_3 = 45$ ,  $z_3' = 48$ ,  $z_4 = 72$ ,  $z_5 = 75$ .



К задаче 161.

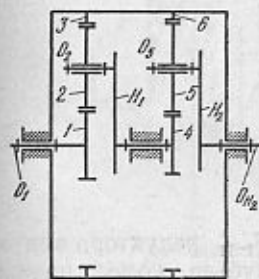


К задаче 162.

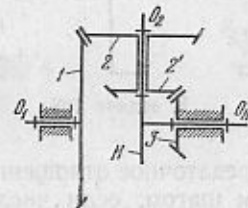
161. Определить передаточное отношение  $i_{1H_2}$  редуктора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 15$ ,  $z_3 = 41$ ,  $z_4 = 10$ ,  $z_5 = 14$ ,  $z_6 = 38$ .

162. Определить передаточное отношение  $i_{H_2,1}$  редуктора Лопухова, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 24$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_2' = 22$ ,  $z_3 = 26$ ,  $z_4 = 24$ ,  $z_5 = 20$ ,  $z_5' = 22$ ,  $z_6 = 26$ .

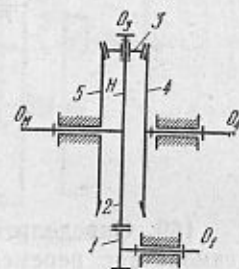
163. Определить передаточное отношение  $i_{1H_2}$  редуктора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 22$ ,  $z_2 = 31$ ,  $z_3 = z_6 = 84$ ,  $z_4 = 18$ ,  $z_5 = 33$ .



К задаче 163.



К задаче 164.



К задаче 165.

164. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  планетарного редуктора с коническими колесами, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 60$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_2' = z_3 = 20$ .

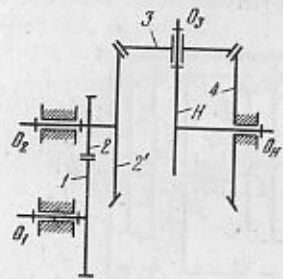
165. Определить передаточное отношение  $i_{14}$  редуктора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 26$ ,  $z_2 = 130$ ,  $z_3 = 12$ ,  $z_4 = 54$ ,  $z_5 = 54$ .

166. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  редуктора от вариатора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 100$ ,  $z_2 = 50$ ,  $z_2' = 54$ ,  $z_3 = 38$ ,  $z_4 = 54$ .

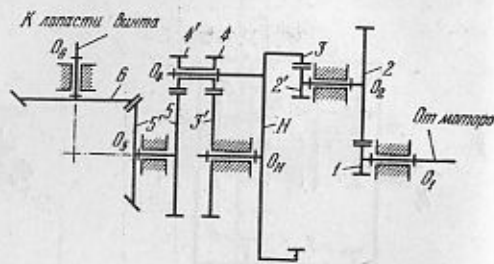
159. Определить передаточное отношение  $i_{H1}$  редуктора Давида, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 65$ ,  $z_2 = 62$ ,  $z_2' = 63$ ,  $z_3 = 66$ .



167. Определить передаточное отношение  $i_{16}$  редуктора винта самолета с переменным шагом, если числа зубьев равны  $z_1 = 13$ ,



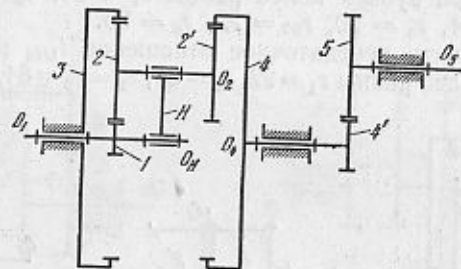
К задаче 166.



К задаче 167.

$z_2 = z_3 = 52$ ,  $z_{2'} = 9$ ,  $z_{3'} = 45$ ,  $z_4 = z_{4'} = 11$ ,  $z_5 = 48$ ,  $z_{5'} = 36$ ,  $z_6 = 40$ .

168. Определить передаточное отношение  $i_{15}$  редуктора с плавающим водилом  $H$ , если числа зубьев колес равны  $z_1 = 12$ ,  $z_2 = 54$ ,  $z_{2'} = 48$ ,  $z_3 = 120$ ,  $z_4 = 114$ ,  $z_{4'} = 9$ ,  $z_5 = 18$ .



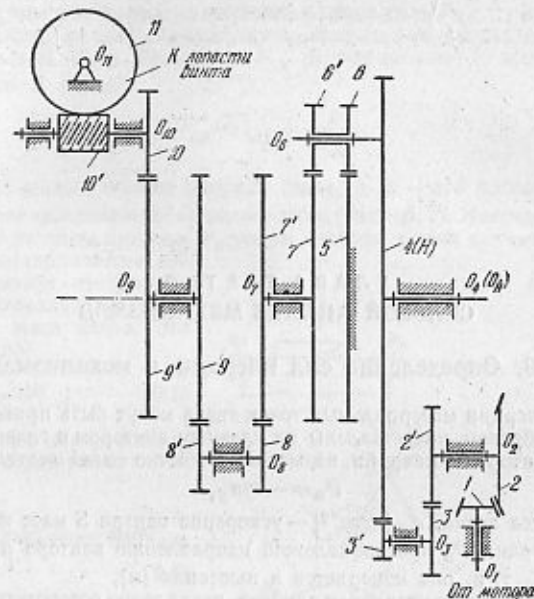
К задаче 168.

169. Определить передаточное отношение  $i_{1-11}$  редуктора винта самолета с переменным шагом, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 14$ ,  $z_2 = 34$ ,  $z_{2'} = 33$ ,  $z_3 = 23$ ,  $z_{3'} = 11$ ,  $z_4 = 150$ ,  $z_5 = 84$ ,  $z_6 = z_{6'} = 22$ ,  $z_7 = z_{7'} = 87$ ,  $z_8 = z_{8'} = 22$ ,  $z_9 = z_{9'} = 84$ ,  $z_{10} = 29$ ,  $z_{11} = 50$ . Число  $k$  заходов червяка  $10'$  равно единице.

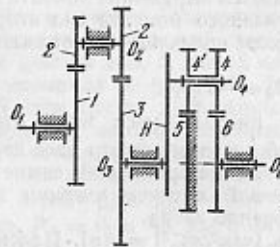
170. Определить передаточное отношение  $i_{16}$  редуктора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 80$ ,  $z_2 = 32$ ,  $z_{2'} = 44$ ,  $z_3 = 110$ ,  $z_4 = 44$ ,  $z_{4'} = 48$ ,  $z_5 = 63$ ,  $z_6 = 63$ .

171. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  редуктора, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 10$ ,  $z_2 = 46$ ,  $z_{2'} = 9$ ,  $z_3 = 52$ ,  $z_{3'} = 16$ ,  $z_4 = 22$ ,  $z_5 = 60$ .

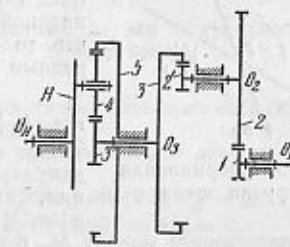
172. Определить передаточное отношение  $i_{1H}$  редуктора (замкнутого дифференциала) электрополиспаста, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 24$ ,  $z_2 = 52$ ,  $z_{2'} = 21$ ,  $z_3 = 78$ ,  $z_{3'} = 18$ ,  $z_4 = 30$ ,  $z_{4'} = 78$ .



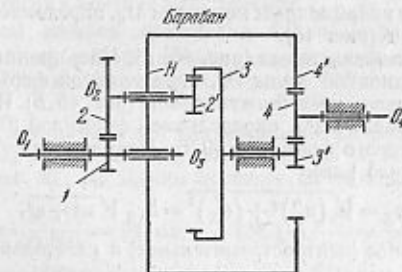
К задаче 169.



К задаче 170.



К задаче 171.



К задаче 172.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ  
СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

§ 9. Определение сил инерции в механизмах

1°. Силы инерции материальных точек звена могут быть приведены к одной точке и, таким образом, представлены их главным вектором и главным моментом. Главный вектор сил инерции, называемый обычно *силой инерции звена*, равен

$$P_n = -ma_S, \quad (9.1)$$

где  $m$  [кг] — масса звена,  $a_S$  [мсек<sup>-2</sup>] — ускорение центра  $S$  масс звена. Направление силы инерции  $P_n$  противоположно направлению вектора  $a_S$ . Ее размерность [кгмсек<sup>-2</sup>], т. е. она измеряется в пьютонах [п].

Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда звено совершает плоскопараллельное движение и имеет плоскость материальной симметрии, параллельную плоскости его движения. При этом точкой приведения сил инерции звена целесообразно брать его центр масс (рис. 45), так как упрощается выражение момента инерционной пары сил — главного момента сил инерции, что то же, *инерционного момента*. Он оказывается равным

$$M_n = -I_S \varepsilon, \quad (9.2)$$

где  $I_S$  [кгм<sup>2</sup>] — момент инерции масс звена относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости его материальной симметрии, или, иначе, *центральный момент инерции звена*,  $\varepsilon$  [сек<sup>-2</sup>] — угловое ускорение звена.

Инерционный момент  $M_n$  имеет размерность [кгм<sup>2</sup>сек<sup>-2</sup>] = [нм]. Плоскость, в которой он действует, параллельна плоскости движения звена; он направлен в сторону, противоположную направлению углового ускорения звена (рис. 45).

Таким образом, в указанных выше случаях *инерционная нагрузка* звена представляется одной инерционной силой  $P_n$ , приложенной в точке  $S$  и определяемой формулой (9.1), и одним инерционным моментом  $M_n$ , определяемым формулой (9.2).

2°. Частные случаи (рис. 46).

*Поступательное движение звена* (рис. 46, а). Инерционная нагрузка состоит только из одной инерционной силы  $P_n$ , определяемой формулой (9.1).

*Неравномерное вращательное движение звена* (рис. 46, б). Инерционная нагрузка состоит из силы инерции  $P_n$ , определяемой формулой (9.1), и инерционного момента  $M_n$ , определяемого формулой (9.2). Модуль полного ускорения центра масс звена в этом случае равен

$$a_S = \sqrt{(a_S^n)^2 + (a_S^t)^2} = I_{AS} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (9.3)$$

где  $a_S^n$  и  $a_S^t$  — нормальное (центростремительное) и касательное (тангенциальное) ускорения центра масс звена,  $\omega$  и  $\varepsilon$  — угловая скорость и угловое ускорение звена,  $I_{AS}$  — расстояние от центра масс  $S$  до оси  $A$  вращения звена.

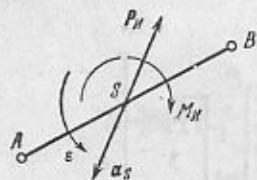


Рис. 45. Инерционная нагрузка звена.

Силу  $P_n$  и момент  $M_n$  можно привести к одной силе  $P_n$ . Для этого следует силу  $P_n$  приложить, сохраняя ее направление, в центре качения звена (рис. 46, в). Расстояние  $l_{AK}$  центра качения  $K$  звена от оси вращения последнего  $A$  равно

$$l_{AK} = l_{AS} + \frac{I_S}{ml_{AS}}, \quad (9.4)$$

где  $I_S$  — центральный момент инерции звена, а  $m$  — его масса.

*Равномерное вращательное движение звена* (рис. 46, г). Инерционная нагрузка состоит только из силы инерции  $P_n$  звена, которая в этом случае направлена по направлению вектора центростремительного (нормального) ускорения центра масс звена. Это ускорение равно

$$a_S^n = \omega^2 l_{AS}, \quad (9.5)$$

и, следовательно, центробежная сила инерции будет равна

$$P_n = -ma_S^n = -m\omega^2 l_{AS}. \quad (9.6)$$

Произведение  $ml_{AS}$  называется *неуравновешенностью* или *дисбалансом* и имеет размерность [гсм].

*Неравномерное вращательное движение звена при совпадении центра масс  $S$  звена с его осью вращения  $A$*  (рис. 46, д). В этом случае инерционная нагрузка звена состоит только из инерционного момента  $M_n$ , который находится по формуле (9.2).

*Равномерное вращательное движение звена при совпадении центра масс  $S$  звена с его центром вращения  $A$*  (рис. 46, е).

В этом случае  $l_{AS} = 0$  и в соответствии с формулой (9.3)  $a_S = 0$ , следовательно,  $P_n = 0$ , и так как  $\varepsilon = 0$  (равномерное вращение), то  $M_n = 0$ .

В этом случае инерционная нагрузка звена равна нулю и оно называется *уравновешенным* (следует помнить, что рассматривается *плоская* система сил).

3°. *Пример*. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 47) найти инерционную нагрузку всех звеньев, если длины звеньев равны  $l_{AB} = 0,074$  м,  $l_{BC} = 0,200$  м; положения центров масс звеньев:  $l_{AS_1} = 0,020$  м,  $l_{BS_2} = 0,060$  м,  $l_{CS_3} = 0,00$  м; массы звеньев: кривошип  $m_1 = 10$  кг, шатуна  $BC$   $m_2 = 0,5$  кг, ползуна  $3$   $m_3 = 0,40$  кг; центральный момент инерции шатуна  $BC$   $I_{S_2} = 0,0018$  кгм<sup>2</sup>. Угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 200$  сек<sup>-1</sup>.

Задачу решить для положения механизма, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

Решение. 1) Задаемся масштабом чертежа  $\mu_l = 0,001$  м/мм и строим схему механизма (рис. 47, а). Длины отрезков на чертеже будут

$$(AB) = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0,074}{0,001} = 74 \text{ мм}, \quad (BC) = \frac{l_{BC}}{\mu_l} = \frac{0,2}{0,001} = 200 \text{ мм},$$

$$(AS_1) = \frac{l_{AS_1}}{\mu_l} = \frac{0,02}{0,001} = 20 \text{ мм}, \quad (BS_2) = \frac{l_{BS_2}}{\mu_l} = \frac{0,06}{0,001} = 60 \text{ мм}.$$

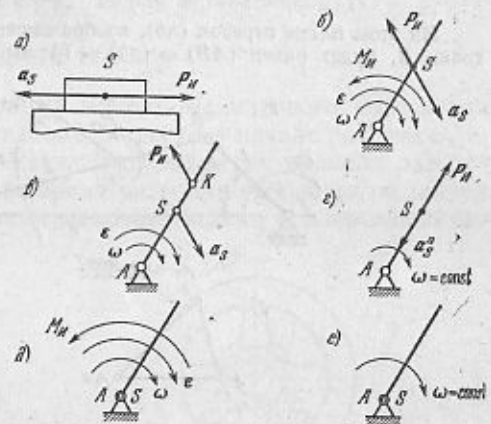


Рис. 46. Частные случаи инерционной нагрузки звена.

2) Строим план скоростей механизма в масштабе кривошипа, тогда его масштаб  $\mu_v = \omega_1 \mu_l = 200 \cdot 0,001 = 0,20 \text{ мсек}^{-1}/\text{мм}$ . Построение проводим согласно формуле

$$v_C = v_B + v_{CB}$$

На этом плане отрезок  $(pb)$ , изображающий скорость  $v_B$  точки  $B$ , будет равен  $(AB) = (pb) = 74 \text{ мм}$  (рис. 47, б).

3) Строим план ускорений (рис. 47, в) в масштабе кривошипа, т. е. в масштабе  $\mu_a = \omega_1^2 \mu_l = 200^2 \cdot 0,001 = 40 \text{ мсек}^{-2}/\text{мм}$ . Построение проводим в соответствии с равенством

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t$$

На этом плане отрезок  $(nb)$ , изображающий вектор нормального ускорения точки  $B$ , будет равен  $(AB) = (nb) = 74 \text{ мм}$ .

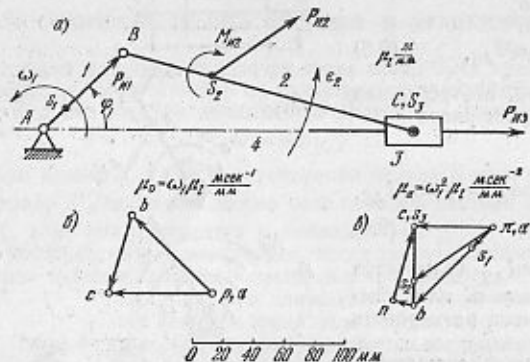


Рис. 47. Определение инерционной нагрузки звеньев кривошипно-ползунного механизма.

Отрезок  $(nb)$ , изображающий на плане нормальное ускорение  $a_{CB}^n$  точки  $C$  во вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , найдется из равенства

$$(nb) = \frac{(bc)^2}{(BC)} = \frac{(52)^2}{200} = 13,5 \text{ мм},$$

где  $(bc) = 52 \text{ мм}$  — отрезок (взятый из плана скоростей), изображающий скорость точки  $C$  в движении (вращении) звена  $BC$  относительно точки  $B$ .

По правилу подобия находим концы векторов ускорений центров масс звеньев кривошипа  $AB$ , шатуна  $BC$  и ползуна  $3$ .

4) Подсчитываем инерционную нагрузку для каждого звена механизма.

а) **Инерционные силы.** Сила инерции кривошипа равна  $P_{n1} = m_1 a_{S1} = m_1 (\pi s_1) \mu_a = 10 \cdot 20 \cdot 40 = 8000 \text{ н}$ , приложена в центре масс кривошипа  $S_1$  и по направлению противоположна вектору ускорения  $a_{S1}$  этого звена (рис. 47, а). Сила инерции шатуна равна  $P_{n2} = m_2 a_{S2} = m_2 (\pi s_2) \mu_a = 0,5 \cdot 64 \cdot 40 = 1280 \text{ н}$ , приложена в центре его масс  $S_2$  и по направлению противоположно вектору ускорения  $a_{S2}$  этого звена (рис. 47, а). Сила инерции ползуна  $3$  равна  $P_{n3} = m_3 a_{S3} = m_3 a_C = m_3 (\pi c) \mu_a = 0,4 \cdot 56 \cdot 40 = 896 \text{ н}$ , приложена в центре его масс (точке  $C$ , рис. 47, а) и по направлению противоположна вектору  $a_C$  ускорения этого центра.

б) **Инерционные моменты.** Для кривошипа  $AB$  инерционный момент  $M_{n1}$  равен  $M_{n1} = 0$ , так как звено вращается равномерно.

Для шатуна  $BC$  инерционный момент  $M_{n2}$  найдем по формуле (9.2):

$$M_{n2} = I_{S2} \varepsilon_2 = I_{S2} \frac{a_{CB}^t}{l_{BC}} = I_{S2} \frac{(\pi c) \mu_a}{l_{BC}} = 0,0018 \frac{50 \cdot 40}{0,200} = 18 \text{ нм}.$$

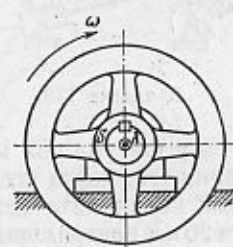
Этот момент по направлению противоположен угловому ускорению звена  $BC$  (рис. 47, а). Угловое ускорение звена  $BC$  в нашем случае направлено против хода стрелки часов, в соответствии с направлением вектора  $a_{CB}^t$  тангенциального ускорения точки  $C$  во вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ .

Для ползуна  $3$  инерционный момент  $M_{n3}$  равен  $M_{n3} = 0$ , так как звено движется поступательно.

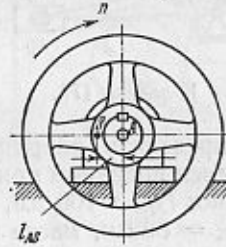
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, § 68.)

### ЗАДАЧИ 173—191

173. Определить инерционный момент  $M_{n1}$  махового колеса при его разгоне, если величина угловой скорости в начале разгона  $\omega_0 = 0$ , а в конце разгона  $\omega = 21 \text{ сек}^{-1}$ , промежуток времени разгона  $t = 3 \text{ сек}$ . Угловая скорость во время разгона изменяется по закону прямой линии. Момент инерции махового колеса относительно его



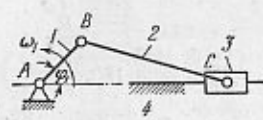
К задаче 173.



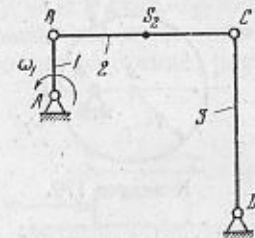
К задаче 174.

оси вращения  $A$  равен  $I = 20 \text{ кгм}^2$ . Центр масс колеса лежит на его оси вращения.

174. Определить силу инерции  $P_{n1}$  махового колеса, вращающегося равномерно со скоростью  $600 \text{ об/мин}$ ; масса махового колеса равна  $m = 50 \text{ кг}$ , его центр масс  $S$  находится на расстоянии  $l_{AS} = 2 \text{ мм}$  от его оси вращения  $A$ . Принять  $\pi \approx 3,0$ .



К задаче 175.



К задаче 176.

175. Найти силу инерции  $P_{n3}$  ползуна кривошипно-ползунного механизма при положениях его, когда угол  $\varphi_1$  принимает значения  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  и  $180^\circ$ , если длина кривошипа равна  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ , длина



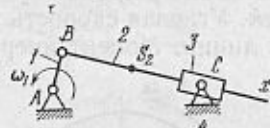
шатуна  $l_{BC} = 200$  мм, масса ползуна  $m_3 = 2$  кг, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 300$  сек<sup>-1</sup>.

176. Определить инерционную нагрузку шатуна  $BC$  шарнирного четырехзвенника в положении, при котором оси кривошипа  $AB$  и коромысла  $CD$  вертикальны, а ось шатуна  $BC$  горизонтальна. Длины звеньев равны  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = l_{CD} = 400$  мм. Масса шатуна  $BC$  равна  $m_2 = 4,0$  кг, и его центральный момент инерции  $I_{S_2} = 0,08$  кгм<sup>2</sup>; центр масс звена  $BC$  лежит на середине отрезка  $BC$ . Угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>.

177. Определить силы инерции  $P_{иВ}$  и  $P_{иС}$  шатуна  $BC$  кривошипно-ползунного механизма при статическом распределении массы шатуна в центры шарниров  $B$  и  $C$ . Задачу решить для положения, когда угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ . Дано:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм,  $l_{BS_2} = 100$  мм, точка  $S_2$  — центр масс шатуна, масса шатуна  $m_2 = 4,0$  кг, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 100$  сек<sup>-1</sup>.



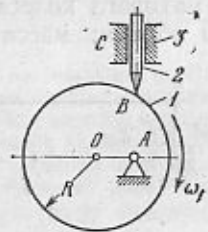
К задаче 177.



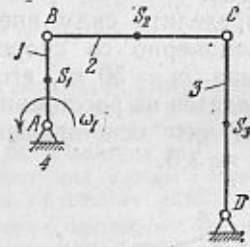
К задаче 178.

178. Определить инерционную нагрузку шатуна  $Bx$  механизма с качающимся ползуном при том положении его, когда угол  $ABC = 90^\circ$ . Дано:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{AC} = 200$  мм, координата центра масс шатуна  $l_{BS_2} = 86$  мм, масса шатуна  $m_2 = 20$  кг; центральный момент инерции шатуна  $I_{S_2} = 0,074$  кгм<sup>2</sup>, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 40$  сек<sup>-1</sup>.

179. Определить силу инерции толкателя 2 кулачкового механизма при том положении его, при котором линия  $OA$  горизонтальна



К задаче 179.



К задаче 180.

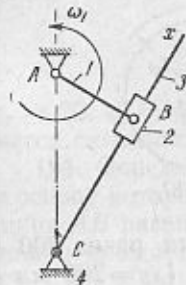
(кулачок представляет собою диск радиуса  $R = 200$  мм). Размер  $l_{AO} = 100$  мм, масса толкателя  $2m_2 = 2$  кг, угловая скорость кулачка постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>.

180. Определить инерционную нагрузку всех звеньев механизма шарнирного четырехзвенника при том положении его, когда оси кривошипа  $AB$  и коромысла  $CD$  вертикальны, а ось шатуна  $BC$

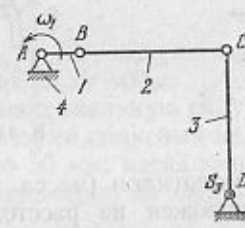
горизонтальна. Дано:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = l_{CD} = 200$  мм; центры масс  $S_1, S_2, S_3$  звеньев делят межшарнирные расстояния пополам; массы звеньев  $m_1 = m_2 = m_3 = 1,0$  кг, момент инерции шатуна относительно его центральной оси  $S_2$   $I_{S_2} = 0,005$  кгм<sup>2</sup>, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>.

181. Определить инерционную нагрузку кулисы  $Cx$  механизма Витворта при том положении его, когда угол  $ABC = 90^\circ$ . Дано:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{AC} = 200$  мм, центр масс кулисы  $Cx$  совпадает с центром шарнира  $C$ , центральный момент инерции кулисы  $I_{S_2} = 0,2$  кгм<sup>2</sup>, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>.

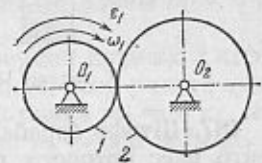
182. Определить инерционную нагрузку коромысла  $CD$  механизма шарнирного четырехзвенника при том положении его, когда оси кривошипа  $AB$  и шатуна  $BC$  горизонтальны, а ось коромысла вертикальна. Дано:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = l_{CD} = 400$  мм, центр



К задаче 181.



К задаче 182.

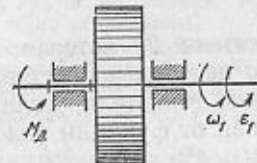


К задаче 183.

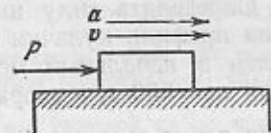
масс  $S_3$  коромысла  $CD$  совпадает с его осью вращения  $D$ , его центральный момент инерции равен  $I_{S_2} = 0,1$  кгм<sup>2</sup>, угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup>.

183. Определить инерционные моменты  $M_{и1}$  и  $M_{и2}$  зубчатых колес рядового зацепления, если известно, что в рассматриваемый момент времени первое колесо вращается с угловой скоростью  $\omega_1 = 20$  сек<sup>-1</sup> и угловым ускорением  $\epsilon_1 = 100$  сек<sup>-2</sup>. Числа зубьев на колесах  $z_1 = 20, z_2 = 40$ , центры масс колес лежат на осях их вращения; центральные моменты инерции колес  $I_{S_1} = 0,1$  кгм<sup>2</sup>,  $I_{S_2} = 0,4$  кгм<sup>2</sup>.

184. Ротору, вращающемуся с угловой скоростью, равной  $\omega_1 = 100$  сек<sup>-1</sup>, необходимо сообщить угловое ускорение, равное  $\epsilon_1 =$



К задаче 184.



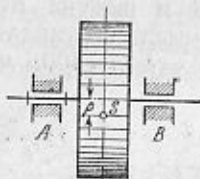
К задаче 185.

$= 7,5$  сек<sup>-2</sup>. Центральный момент инерции ротора равен  $I_{S_1} = 8$  кгм<sup>2</sup>. Пренебрегая трением в подшипниках ротора, определить

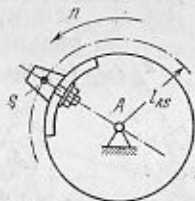
мощность двигателя, способного сообщить ротору заданное угловое ускорение.

185. Ползуну, движущемуся со скоростью, равной  $v = 5 \text{ мсек}^{-1}$ , необходимо сообщить ускорение, совпадающее по направлению со скоростью и равное  $a = 10 \text{ мсек}^{-2}$ . Пренебрегая трением ползуна о направляющие, определить мощность  $N$  внешней силы  $P$ , способной сообщить ползуну заданное ускорение, если масса ползуна  $m = 20 \text{ кг}$ .

186. Ротор гироскопа, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega = 2000 \text{ сек}^{-1}$ , имеет неуравновешенность, оцениваемую величиной  $mr = 2,0 \text{ гсм}$ . Определить реакции в опорах вала ротора гироскопа от его инерционной нагрузки (силы инерции). Опоры расположены симметрично относительно ротора гироскопа.



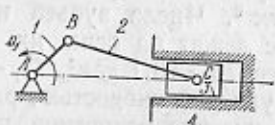
К задаче 186.



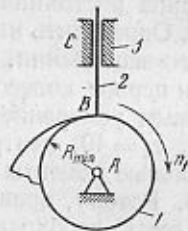
К задаче 187.

187. Штифт барабана молотилки (масса штифта равна  $200 \text{ г}$ ), центр масс которого расположен на расстоянии  $l_{AS} = 200 \text{ мм}$  от оси вращения барабана, вращается вместе с барабаном, делающим  $n = 1000 \text{ об/мин}$ . Определить силу инерции штифта.

188. Определить наибольшую действующую на поршневой палец  $C$  механизма двигателя внутреннего сгорания (кривошипно-ползунного) силу инерции поршня  $3$ , если масса поршня  $m = 400 \text{ г}$ , кривошип вращается равномерно со скоростью  $n_1 = 3600 \text{ об/мин}$  и  $l_{AB} = 40 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 160 \text{ мм}$ .



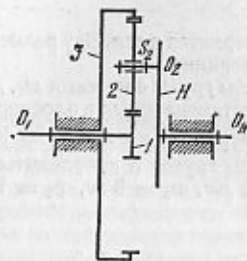
К задаче 188.



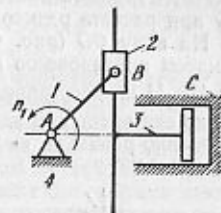
К задаче 189.

189. Определить силу инерции толкателя  $2$ , которая действует на профиль кулачка механизма с центрально поставленным толкателем в начальный момент подъема толкателя, если масса толкателя  $m = 500 \text{ г}$ , а вторая производная от функции положения толкателя равна в момент начала подъема  $\frac{d^2s_2}{dq_1^2} = 50 \text{ мм}$  (первая производная той же функции в тот же момент равна нулю:  $\frac{ds_2}{dq_1} = 0$ ), число оборотов кулачка постоянно и равно  $n = 1000 \text{ об/мин}$ .

190. Определить реакцию в подшипнике сателлита  $2$  от сил инерции его массы, если вал  $O_1$  вращается равномерно со скоростью  $n_1 = 1440 \text{ об/мин}$ , числа зубьев на колесах соответственно равны



К задаче 190.



К задаче 191.

$z_1 = 20$ ,  $z_2 = 40$  и  $z_3 = 100$ , модули всех колес равны  $m = 5 \text{ мм}$ , масса сателлита равна  $m_2 = 400 \text{ г}$ .

191. Определить максимальную силу инерции поршня  $3$  насоса, в основу которого положен синусный механизм, если радиус кривошипа  $AB$  равен  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ , масса звена  $3$  равна  $m_3 = 8 \text{ кг}$ , кривошип вращается равномерно со скоростью  $n_2 = 300 \text{ об/мин}$ .

## § 10. Уравновешивание сил инерции звеньев механизмов

1°. Тема уравновешивания сил инерции представлена двумя группами задач. Одна группа задач — первая — посвящена уравновешиванию сил инерции звеньев, вращающихся вокруг неподвижной оси; вторая группа задач посвящена вообще уравновешиванию сил инерции звеньев механизма, т. е. уравновешиванию механизма на фундаменте.

Все эти задачи решаются путем такого подбора масспротивовесов и их положений на звеньях механизма, при котором силы инерции этих противовесов оказывают на опоры звеньев воздействия, равные и противоположные воздействиям, создаваемым силами инерции звеньев механизма. В случаях, когда силы инерции располагаются в параллельных плоскостях, перед нами предстают задачи на равновесие пространственной системы сил.

2°. При решении задач (192—196) первой группы центробежные силы инерции элементарных масс вращающегося звена заменяются, условно, двумя силами инерции, расположенными в двух произвольно выбранных параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вращения звена. Эти плоскости называются *плоскостями исправления*.

Закрепляя в этих плоскостях противовесы таким образом, чтобы их центробежные силы инерции оказались равными, но противоположными по направлению упомянутым выше силам, мы получаем уравновешенную систему сил, которая, очевидно, не будет вызывать реакций в опорах (подшипниках) вращающегося звена.

Центробежная сила инерции  $P_n$  отдельной точечной массы вращающегося звена равна по величине

$$P_n = \omega^2 m \rho, \quad (10.1)$$

где  $m$  — масса точки,  $\rho$  — расстояние ее от оси вращения звена,  $\omega$  — угловая скорость звена.



Квадрат угловой скорости  $\omega^2$  один и тот же для всех масс вращающегося звена, поэтому при решении приводимых ниже задач следует считать величину силы инерции точечной массы пропорциональной величине

$$K = m\rho, \quad (10.2)$$

которая называется *неуравновешенностью* и измеряется в *гсм*. Эту размерность надо иметь в виду при расчете размерности сил инерции.

**Пример.** На валу  $OO$  (рис. 48) закреплены грузы с массами  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$ . Надо найти массы противовесов  $m_{\text{нI}}$  и  $m_{\text{нII}}$ , установленных в плоскостях исправления I—I и II—II на расстояниях, равных  $\rho_{\text{нI}} = 50$  мм и  $\rho_{\text{нII}} = 40$  мм, от их центров масс до оси вращения вала, если массы грузов и координаты их центров масс соответственно равны  $m_1 = 2$  кг,  $\rho_1 = 10$  мм,  $m_2 = 3$  кг,  $\rho_2 = 15$  мм,  $m_3 =$

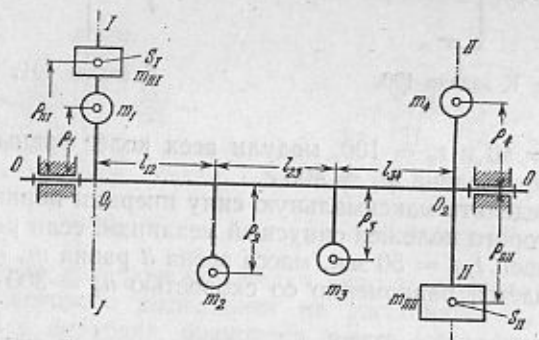


Рис. 48. Уравновешивание вращающихся масс двумя противовесами.

$= 2$  кг,  $\rho_3 = 12$  мм,  $m_4 = 4$  кг,  $\rho_4 = 20$  мм; расстояния между грузами равны  $l_{12} = l_{23} = l_{34} = 100$  мм.

**Решение.** Центры масс грузов лежат в одной плоскости, содержащей ось вращения вала  $OO$ ; поэтому векторы  $K_1, K_2, K_3$  и  $K_4$ , представляющие собой дисбалансы  $m_1\rho_1, m_2\rho_2, m_3\rho_3$  и  $m_4\rho_4$ , лежат в той же плоскости.

Расположим противовесы с массами  $m_{\text{нI}}$  и  $m_{\text{нII}}$  так, как это указано на чертеже (рис. 48). Так как силы инерции грузов вместе с силами инерции противовесов должны находиться в равновесии, то величины масс противовесов  $m_{\text{нI}}$  и  $m_{\text{нII}}$  найдем из уравнений моментов дисбалансов относительно точек  $O_1$  и  $O_2$  (точек пересечения плоскостей исправления с осью вала  $OO$ ).

Уравнение моментов дисбалансов относительно точки  $O_1$  будет

$$m_4\rho_4(l_{12} + l_{23} + l_{34}) - m_3\rho_3(l_{12} + l_{23}) - m_2\rho_2l_{12} - m_{\text{нI}}\rho_{\text{нI}}(l_{12} + l_{23} + l_{34}) = 0,$$

откуда масса противовеса  $m_{\text{нI}}$  будет равна

$$m_{\text{нI}} = \frac{m_4\rho_4(l_{12} + l_{23} + l_{34}) - m_3\rho_3(l_{12} + l_{23}) - m_2\rho_2l_{12}}{\rho_{\text{нI}}(l_{12} + l_{23} + l_{34})} =$$

$$= \frac{4 \cdot 20 \cdot 300 - 2 \cdot 12 \cdot 200 - 3 \cdot 15 \cdot 100}{40 \cdot 300} = 1,225 \text{ кг.}$$

Уравнение моментов дисбалансов относительно точки  $O_2$  будет

$$m_3\rho_3l_{34} + m_2\rho_2(l_{34} + l_{23}) - m_1\rho_1(l_{12} + l_{23} + l_{34}) - m_{\text{нII}}\rho_{\text{нII}}(l_{12} + l_{23} + l_{34}) = 0,$$

откуда масса противовеса  $m_{\text{нII}}$  будет равна

$$m_{\text{нII}} = \frac{m_3\rho_3l_{34} + m_2\rho_2(l_{34} + l_{23}) - m_1\rho_1(l_{12} + l_{23} + l_{34})}{\rho_{\text{нII}}(l_{12} + l_{23} + l_{34})} =$$

$$= \frac{2 \cdot 12 \cdot 100 + 3 \cdot 15 \cdot 200 - 2 \cdot 10 \cdot 300}{50 \cdot 300} = 0,36 \text{ кг}$$

(если ответ получим со знаком минус, то искомый противовес следует расположить на том же перпендикуляре к оси  $OO$  с противоположной стороны от нее).

**3°.** Во второй группе задач (197—205) требуется произвести расчеты, связанные с полным или частичным уравновешиванием сил инерции звеньев кривошипно-ползунного и шарнирного четырехзвенного механизмов. Кроме того, приведены задачи на определение главного вектора всех сил инерции масс подвижных звеньев кривошипно-ползунного механизма. Для решения этих задач надо предварительно построить схему механизма, одна из точек которого описывает траекторию движения общего центра масс подвижных звеньев механизма. Затем построить планы скоростей и ускорений этого механизма, после чего искомый главный вектор сил инерции будет найден по формуле

$$P_{\text{н}} = -m_S a_S, \quad (10.3)$$

где  $m_S = \sum_k m_k$  — масса всех подвижных звеньев механизма,  $a_S$  — ускорение

общего центра масс подвижных звеньев механизма.

Главный вектор  $P_{\text{н}}$  сил инерции подвижных звеньев механизма будет равен нулю только тогда, когда вектор полного ускорения  $a_S$  центра масс этих звеньев будет равен нулю. Это условие выполняется, если общий центр масс  $S$  подвижных звеньев механизма находится в одной и той же точке, неподвижной относительно стойки. При частичном уравновешивании вектора  $P_{\text{н}}$  он может иметь заданное направление или модуль.

**4°.** Положение центра масс подвижных звеньев механизма может быть найдено методом главных векторов из условия, что

$$r_S = \sum_k h_k, \quad (10.4)$$

где  $r_S$  — радиус-вектор общего центра масс подвижных звеньев механизма относительно выбранной начальной точки (начала координат), а  $h_k$  — главный вектор звена под номером  $k$ .

Применительно к шарнирному четырехзвенному механизму (рис. 49) и кривошипно-ползунному механизму (рис. 50) соотношение (10.4) примет вид (если за начало координат выбрана точка  $A$ )

$$r_S = h_1 + h_2 + h_3, \quad (10.5)$$

где  $r_S$  — радиус-вектор общего центра масс подвижных звеньев механизма;  $h_1$  — главный вектор кривошипа  $AB$ , направленный параллельно линии  $AB$ ;  $h_2$  — главный вектор шатуна  $BC$ , направленный параллельно линии  $BC$ ;  $h_3$  — главный вектор коромысла  $CD$ , направленный параллельно линии  $CD$  в случае шарнирного четырехзвенника, или главный вектор ползуна, направленный

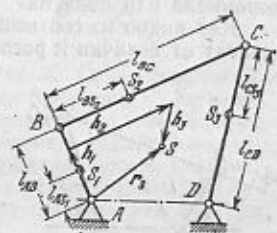


Рис. 49. Определение положения общего центра масс подвижных звеньев шарнирного четырехзвенника.



параллельно линии  $CS_3$  в случае кривошипно-ползунного механизма. Модули главных векторов равны

$$h_1 = \frac{m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (10.6)$$

$$h_2 = \frac{m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (10.7)$$

$$h_3 = \frac{m_3 l_{CS_3}}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (10.8)$$

где  $m_1$  — масса кривошипа  $AB$ ;  $m_2$  — масса шатуна  $BC$ ;  $m_3$  — масса коромысла  $CD$  в случае шарнирного четырехзвенника или масса ползуна в случае кривошипно-ползунного механизма;  $l_{AS_1}$  — координата центра масс  $S_1$  кривошипа  $AB$ ;  $l_{BS_2}$  —

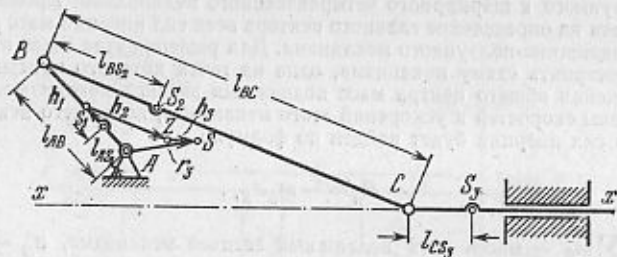


Рис. 50. Определение положения общего центра масс подвижных звеньев кривошипно-ползунного механизма.

координата центра масс  $S_2$  шатуна  $BC$ ;  $l_{CS_3}$  координата центра масс  $S_3$  коромысла или ползуна.

Как видно из соотношений (10.6), (10.7), (10.8), модули векторов  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  зависят от величин и расположения масс подвижных звеньев; поэтому, изменяя величину масс или их расположение, можно придавать модулям главных векторов различные числовые значения, при которых общий центр масс  $S$  подвижных звеньев может оказаться в наперед заданной точке плоскости.

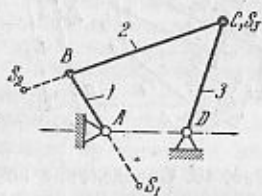


Рис. 51. Определение координат центров масс подвижных звеньев шарнирного четырехзвенного механизма из условия равенства нулю главного вектора сил инерции.

5°. Применительно к кривошипно-ползунному механизму исследование движения общего центра масс подвижных звеньев можно заменить исследованием движения точки  $Z$ , лежащей в конце вектора  $h_2$  (рис. 50) и копирующей движение общего центра масс. Приводим решение некоторых задач из рассматриваемой группы.

**Пример 1.** Определить, где должны находиться центры масс подвижных звеньев шарнирного механизма (рис. 51) для того, чтобы главный вектор сил инерции был равен нулю.

Длины звеньев равны  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм;  $l_{CD} = 200$  мм; массы звеньев равны: кривошипа  $AB$   $m_1 = 2$  кг, шатуна  $BC$   $m_2 = 8$  кг, коромысла  $CD$   $m_3 = 4$  кг.

Задачу решить, исходя из требования, чтобы общий центр масс  $S$  подвижных звеньев совпадал с точкой  $A$ .

**Решение.** Примем за начало координат точку  $A$ , тогда вектор  $r_S$ , определяющий положение общего центра масс подвижных звеньев, будет равен нулю и, следовательно,  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ , что возможно, только если главный вектор

каждого звена по отдельности будет равен нулю. Согласно этому условию из соотношений (10.8), (10.7) и (10.6) получаем

$$m_3 l_{CS_3} = 0, \quad m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_3 = 0, \quad m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_2 + m_3) = 0.$$

Из первого равенства видно, что центр масс  $S_3$  коромысла  $CD$  должен совпадать с точкой  $C$ , так как  $m_3 \neq 0$ . Из второго равенства получаем

$$l_{BS_2} = -l_{BC} \frac{m_3}{m_2} = -400 \frac{4}{8} = -200 \text{ мм},$$

т. е. центр масс шатуна  $BC$  отстоит от точки  $B$  на расстоянии 200 мм. Знак минус показывает, что полученный размер следует отложить от указанной точки на продолжении линии  $BC$  в направлении от точки  $C$  к точке  $B$ .

Из третьего равенства находим

$$l_{AS_1} = -l_{AB} \frac{(m_2 + m_3)}{m_1} = -100 \frac{(8 + 4)}{2} = -600 \text{ мм},$$

т. е. центр масс  $S_1$  кривошипа  $AB$  отстоит от точки  $A$  на расстоянии 600 мм и расположен на продолжении линии  $AB$  в направлении от точки  $B$  к точке  $A$ .

**Пример 2.** Определить массы противовесов  $m_{n_1}$ ,  $m_{n_2}$ ,  $m_{n_3}$ , необходимые для уравновешивания главного вектора сил инерции четырехшарнирного четырехзвенного механизма (рис. 52), если  $l_{AB} = 120$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм,  $l_{CD} = 280$  мм, координаты центров масс  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  звеньев равны  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 200$  мм,  $l_{CS_3} = 130$  мм; массы звеньев: кривошипа  $AB$   $m_1 = 0,1$  кг, шатуна  $BC$   $m_2 = 0,8$  кг, коромысла  $CD$   $m_3 = 0,4$  кг; координаты центров масс противовесов  $S'_1$ ,  $S'_2$ ,  $S'_3$  равны  $l_{AS'_1} = 100$  мм,  $l_{BS'_2} = 200$  мм,  $l_{CS'_3} = 130$  мм.

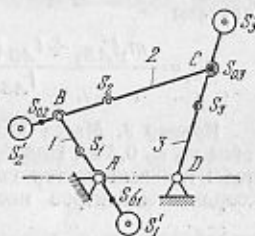


Рис. 52. Определение масс противовесов, установленных на подвижных звеньях шарнирного четырехзвенного механизма, из условия равенства нулю главного вектора сил инерции.

Решить задачу, предполагая, что общий центр масс  $S$  подвижных звеньев при уравновешенном главном векторе сил инерции совпадает с точкой  $A$ .

**Решение.** Полагая, что начало координат находится в точке  $A$ , пишем, что  $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ . Это равенство возможно только при условии, что  $h_1 = 0$ ,  $h_2 = 0$ ,  $h_3 = 0$ . После уравновешивания масса каждого звена будет отличаться от заданной на величину искомой массы противовеса.

Таким образом, масса кривошипа  $AB$  станет равной  $m_{O_1} = m_1 + m_{n_1}$ , масса шатуна — равной  $m_{O_2} = m_2 + m_{n_2}$ , масса коромысла — равной  $m_{O_3} = m_3 + m_{n_3}$ . Координаты центров масс  $S_{O_1}$ ,  $S_{O_2}$ ,  $S_{O_3}$  этих звеньев с массами  $m_{O_1}$ ,  $m_{O_2}$  и  $m_{O_3}$  будут:  $l_{AS_{O_1}}$  для звена  $AB$ ;  $l_{BS_{O_2}}$  для звена  $BC$ ;  $l_{CS_{O_3}}$  для звена  $CD$ .

Так как  $h_3 = 0$ , то согласно соотношению (10.8)  $m_{O_3} l_{CS_{O_3}} = 0$ , но  $m_{O_3} \neq 0$ , поэтому  $l_{CS_{O_3}} = 0$ , что возможно только при условии

$$-l_{CS'_3} m_{n_3} + l_{CS_3} m_3 = 0,$$

откуда

$$m_{n_3} = m_3 \frac{l_{CS_3}}{l_{CS'_3}} = 0,4 \frac{130}{130} = 0,4 \text{ кг}.$$

Масса звена  $CD$  после уравновешивания будет равна

$$m_{O_3} = m_3 + m_{n_3} = 0,4 + 0,4 = 0,8 \text{ кг}.$$

Так как  $h_2 = 0$ , то согласно (10.7)

$$m_{O_2} l_{BS_2} + l_{BC} m_{O_2} = 0;$$

учитывая, что

$$m_{O_2} l_{BS_2} = m_2 l_{BS_2} - m_{n_2} l_{BS_2},$$

получаем

$$-m_{n_2} l_{BS_2} + m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_{O_2} = 0,$$

откуда

$$m_{n_2} = \frac{m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_{O_2}}{l_{BS_2}} = \frac{0,8 \cdot 200 + 0,8 \cdot 400}{200} = 2,4 \text{ кг.}$$

Масса звена  $BC$  после уравнивания будет равна

$$m_{O_2} = m_2 + m_{n_2} = 0,8 + 2,4 = 3,2 \text{ кг.}$$

Наконец, так как  $h_1 = 0$ , то согласно (10.6)

$$m_{O_1} l_{AS_1} + l_{AB} (m_{O_2} + m_{O_1}) = 0.$$

Поэтому, учитывая, что

$$m_{O_1} l_{AS_1} = m_1 l_{AS_1} - m_{n_1} l_{AS_1},$$

получаем

$$m_{n_1} = \frac{m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_{O_2} + m_{O_1})}{l_{AS_1}} = \frac{0,1 \cdot 75 + 120 (3,2 + 0,8)}{100} = 4,875 \text{ кг.}$$

**Пример 3.** Масса ползуна  $Z$  кривошипно-ползунного механизма (рис. 53) равна  $m_3 = 0,4$  кг. Подобрать массы  $m_2$  и  $m_1$  шатуна и кривошипа таким образом, чтобы главный вектор сил инерции всех звеньев механизма был уравновешен. Координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  звеньев равны: кривошип  $AB$   $l_{AS_1} =$

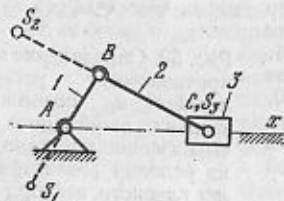


Рис. 53. Определение масс шатуна и кривошипа кривошипно-ползунного механизма из условия полного уравновешивания главного вектора сил инерции.

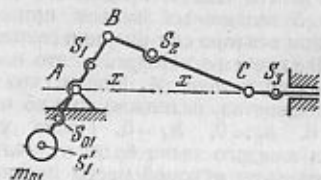


Рис. 54. Определение массы противовеса на кривошипе при уравнивании вертикальной составляющей главного вектора сил инерции звеньев горизонтально-кривошипно-ползунного механизма.

$= -100$  мм, шатуна  $BC$   $l_{BS_2} = -100$  мм, а размеры звеньев  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм.

**Решение.** Примем за начало координат точку  $A$ . Имея в виду, что точка  $Z$  (рис. 50), копирующая движение центра масс подвижных звеньев механизма, должна быть неподвижна, имеем  $h_1 + h_2 = 0$ .

В рассматриваемом случае это равенство удовлетворяется, только если  $h_1 = 0$  и  $h_2 = 0$ .

При условии, что  $h_2 = 0$ , из соотношения (10.7) имеем

$$-m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_3 = 0,$$

откуда

$$m_2 = m_3 \frac{l_{BC}}{l_{BS_2}} = 0,4 \frac{400}{100} = 1,6 \text{ кг.}$$

Из соотношения (10.6) при условии  $h_1 = 0$  имеем

$$-m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_2 + m_3) = 0,$$

откуда

$$m_1 = (m_2 + m_3) \frac{l_{AB}}{l_{AS_1}} = (1,6 + 0,4) \frac{100}{100} = 2,0 \text{ кг.}$$

**Пример 4.** Определить массу противовеса  $m_{n_1}$ , который надо установить на кривошипе  $AB$  горизонтально-кривошипно-ползунного механизма (рис. 54) для уравнивания вертикальной составляющей главного вектора сил инерции звеньев механизма, если координата центра  $S_1$  масс этого противовеса равна  $l_{AS_1} = 60$  мм. Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 500$  мм. Координаты центров масс  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  звеньев:  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 150$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм; массы звеньев:  $m_1 = 0,3$  кг,  $m_2 = 1,5$  кг,  $m_3 = 2,0$  кг.

**Решение.** Из условий задачи вытекает, что общий центр  $S$  масс подвижных звеньев должен двигаться только горизонтально, а следовательно, так же должна двигаться точка  $Z$ , копирующая его движение. Это будет возможно, если будет выполнено условие

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{h_1}{h_2},$$

откуда, учитывая соотношения (10.6) и (10.7), получаем

$$m_{O_1} l_{AS_1} = -\frac{m_2 l_{AB} (l_{BC} - l_{BS_2})}{l_{BC}} = -\frac{1,5 \cdot 100 (500 - 150)}{500} = -105 \text{ кг мм,}$$

где  $m_{O_1} = m_1 + m_{n_1}$  — масса кривошипа  $AB$  после установки на нем противовеса, а  $l_{AS_1}$  — координата центра масс кривошипа после установки на нем противовеса. Так как

$$-m_{O_1} l_{AS_1} = -l_{AS_1} m_{n_1} + l_{AS_1} m_1,$$

то

$$m_{n_1} = \frac{m_{O_1} l_{AS_1} + l_{AS_1} m_1}{l_{AS_1}} = \frac{105 + 75 \cdot 0,3}{60} = 2,125 \text{ кг.}$$

(См. И. И. Артоблевский, Теория механизмов, §§ 75—79.)

## ЗАДАЧИ 192—205

**192.** Определить массу противовеса  $m_n$ , который надо установить на вращающийся вал для уравнивания сил инерции грузов с массами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$ , лежащих в одной перпендикулярной к оси вала плоскости, если координата центра масс  $S_n$  противовеса равна  $\rho_n = 15$  мм; массы грузов  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 7$  кг,  $m_3 = 8$  кг,  $m_4 = 10$  кг; расстояния от оси вала до центров масс  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  грузов равны  $\rho_1 = 10$  мм,  $\rho_2 = 20$  мм,  $\rho_3 = 15$  мм,  $\rho_4 = 10$  мм; углы закрепления грузов  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = 90^\circ$ .

**193.** Определить массы противовесов  $m_{nI}$  и  $m_{nII}$ , которые надо установить в плоскостях исправления  $I$  и  $II$  для уравнивания сил

Так как  $h_2 = 0$ , то согласно (10.7)

$$m_{O_2} l_{BS_{O_2}} + l_{BC} m_{O_2} = 0;$$

учитывая, что

$$m_{O_1} l_{BS_{O_1}} = m_2 l_{BS_2} - m_{п_1} l_{BS_1},$$

получаем

$$-m_{п_1} l_{BS_1} + m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_{O_2} = 0,$$

откуда

$$m_{п_1} = \frac{m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_{O_2}}{l_{BS_1}} = \frac{0,8 \cdot 200 + 0,8 \cdot 400}{200} = 2,4 \text{ кг.}$$

Масса звена  $BC$  после уравнивания будет равна

$$m_{O_2} = m_2 + m_{п_1} = 0,8 + 2,4 = 3,2 \text{ кг.}$$

Наконец, так как  $h_1 = 0$ , то согласно (10.6)

$$m_{O_1} l_{AS_{O_1}} + l_{AB} (m_{O_2} + m_{O_1}) = 0.$$

Поэтому, учитывая, что

$$m_{O_1} l_{AS_{O_1}} = m_1 l_{AS_1} - m_{п_1} l_{AS_1},$$

получаем

$$m_{п_1} = \frac{m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_{O_2} + m_{O_1})}{l_{AS_1}} = \frac{0,1 \cdot 75 + 120 (3,2 + 0,8)}{100} = 4,875 \text{ кг.}$$

**Пример 3.** Масса ползуна 3 кривошипно-ползунного механизма (рис. 53) равна  $m_3 = 0,4$  кг. Подобрать массы  $m_2$  и  $m_1$  шатуна и кривошипа таким образом, чтобы главный вектор сил инерции всех звеньев механизма был уравновешен. Координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  звеньев равны: кривошип  $AB$   $l_{AS_1} =$

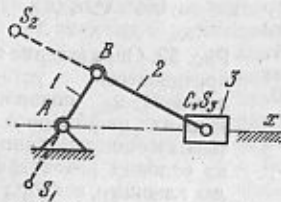


Рис. 53. Определение масс шатуна и кривошипа кривошипно-ползунного механизма из условия полного уравновешивания главного вектора сил инерции.

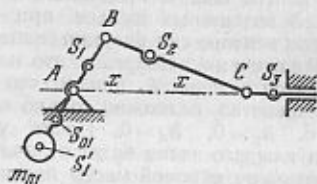


Рис. 54. Определение массы противовеса на кривошипе при уравнивании вертикальной составляющей главного вектора сил инерции звеньев горизонтального кривошипно-ползунного механизма.

$= -100$  мм, шатуна  $BC$   $l_{BS_2} = -100$  мм, а размеры звеньев  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм.

**Решение.** Примем за начало координат точку  $A$ . Имея в виду, что точка  $Z$  (рис. 50), копирующая движение центра масс подвижных звеньев механизма, должна быть неподвижна, имеем  $h_1 + h_2 = 0$ .

В рассматриваемом случае это равенство удовлетворяется, только если  $h_1 = 0$  и  $h_2 = 0$ .

При условии, что  $h_2 = 0$ , из соотношения (10.7) имеем

$$-m_2 l_{BS_2} + l_{BC} m_3 = 0,$$

откуда

$$m_2 = m_3 \frac{l_{BC}}{l_{BS_2}} = 0,4 \frac{400}{100} = 1,6 \text{ кг.}$$

Из соотношения (10.6) при условии  $h_1 = 0$  имеем

$$-m_1 l_{AS_1} + l_{AB} (m_2 + m_3) = 0,$$

откуда

$$m_1 = (m_2 + m_3) \frac{l_{AB}}{l_{AS_1}} = (1,6 + 0,4) \frac{100}{100} = 2,0 \text{ кг.}$$

**Пример 4.** Определить массу противовеса  $m_{п_1}$ , который надо установить на кривошипе  $AB$  горизонтального кривошипно-ползунного механизма (рис. 54) для уравнивания вертикальной составляющей главного вектора сил инерции звеньев механизма, если координата центра  $S_1$  масс этого противовеса равна  $l_{AS_1} = 60$  мм. Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 500$  мм. Координаты центров масс  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  звеньев:  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 150$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм; массы звеньев:  $m_1 = 0,3$  кг,  $m_2 = 1,5$  кг,  $m_3 = 2,0$  кг.

**Решение.** Из условий задачи вытекает, что общий центр  $S$  масс подвижных звеньев должен двигаться только горизонтально, а следовательно, так же должна двигаться точка  $Z$ , копирующая его движение. Это будет возможно, если будет выполнено условие

$$\frac{l_{AB}}{l_{BC}} = \frac{h_1}{h_2},$$

откуда, учитывая соотношения (10.6) и (10.7), получаем

$$m_{O_1} l_{AS_{O_1}} = -\frac{m_2 l_{AB} (l_{BC} - l_{BS_2})}{l_{BC}} = -\frac{1,5 \cdot 100 (500 - 150)}{500} = -105 \text{ кг мм,}$$

где  $m_{O_1} = m_1 + m_{п_1}$  — масса кривошипа  $AB$  после установки на нем противовеса, а  $l_{AS_{O_1}}$  — координата центра масс кривошипа после установки на нем противовеса. Так как

$$-m_{O_1} l_{AS_{O_1}} = -l_{AS_1} m_{п_1} + l_{AS_1} m_1,$$

то

$$m_{п_1} = \frac{m_{O_1} l_{AS_{O_1}} + l_{AS_1} m_1}{l_{AS_1}} = \frac{105 + 75 \cdot 0,3}{60} = 2,125 \text{ кг.}$$

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 75—79.)

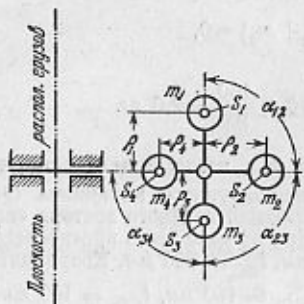
#### ЗАДАЧИ 192—205

**192.** Определить массу противовеса  $m_{п_1}$ , который надо установить на вращающийся вал для уравнивания сил инерции грузов с массами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_4$ , лежащих в одной перпендикулярной к оси вала плоскости, если координата центра масс  $S_{п_1}$  противовеса равна  $\rho_{п_1} = 15$  мм; массы грузов  $m_1 = 5$  кг,  $m_2 = 7$  кг,  $m_3 = 8$  кг,  $m_4 = 10$  кг; расстояния от оси вала до центров масс  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  грузов равны  $\rho_1 = 10$  мм,  $\rho_2 = 20$  мм,  $\rho_3 = 15$  мм,  $\rho_4 = 10$  мм; углы закрепления грузов  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{34} = 90^\circ$ .

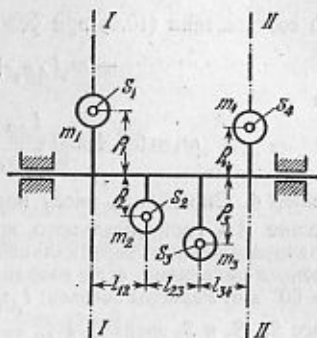
**193.** Определить массы противовесов  $m_{п_1}$  и  $m_{п_2}$ , которые надо установить в плоскостях исправления  $I$  и  $II$  для уравнивания сил



инерции грузов с массами  $m_1, m_2, m_3$  и  $m_4$ , лежащих в плоскости, содержащей ось вала, если координаты центров масс  $S_{\text{нI}}$  и  $S_{\text{нII}}$  противовесов равны  $\rho_{\text{нI}} = 50$  мм,  $\rho_{\text{нII}} = 40$  мм. Массы грузов:  $m_1 =$



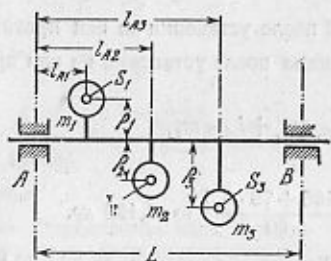
К задаче 192.



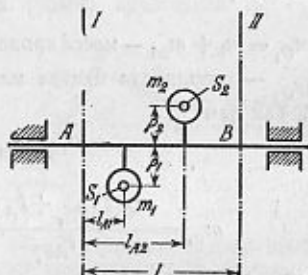
К задаче 193.

$= 2$  кг,  $m_2 = 3$  кг,  $m_3 = 2$  кг,  $m_4 = 4$  кг; координаты центров масс  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  грузов:  $\rho_1 = 10$  мм,  $\rho_2 = 15$  мм,  $\rho_3 = 12$  мм,  $\rho_4 = 20$  мм; расстояния между грузами  $l_{12} = l_{23} = l_{34} = 100$  мм.

194. Определить реакции  $P_A$  и  $P_B$  в подшипниках вала от сил инерции грузов, массы которых равны  $m_1 = 1,0$  кг,  $m_2 = 0,5$  кг,  $m_3 = 0,25$  кг; центры масс всех грузов расположены в плоскости, содержащей ось вращения вала  $AB$ . Координаты центров масс



К задаче 194.



К задаче 195.

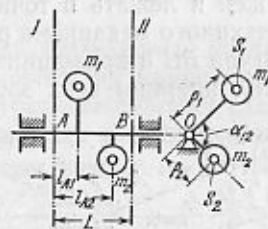
$S_1, S_2$  и  $S_3$  грузов:  $\rho_1 = 100$  мм,  $\rho_2 = 100$  мм,  $\rho_3 = 200$  мм; расстояния грузов от подшипника  $A$ :  $l_{A1} = 100$  мм,  $l_{A2} = 300$  мм,  $l_{A3} = 400$  мм; расстояние между опорами  $A$  и  $B$  равно  $L = 500$  мм, угловая скорость вала  $\omega = 20$  сек $^{-1}$ .

195. Определить массы противовесов  $m_{\text{нI}}$  и  $m_{\text{нII}}$ , которые надо установить в плоскостях исправления  $I$  и  $II$  для уравнивания сил инерции грузов  $m_1$  и  $m_2$ , лежащих в плоскости, содержащей ось вращения вала, если координаты центров масс  $S_{\text{нI}}$  и  $S_{\text{нII}}$  противовесов равны  $\rho_{\text{нI}} = \rho_{\text{нII}} = 100$  мм. Массы грузов:  $m_1 = 20$  г,  $m_2 = 10$  г, координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  грузов от плоскости

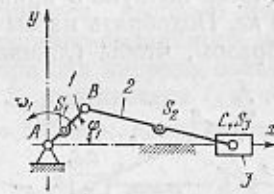
исправления  $I$ :  $l_{A1} = 200$  мм,  $l_{A2} = 400$  мм, расстояние между плоскостями исправления  $L = 600$  мм;  $\rho_1 = \rho_2 = 100$  мм.

196. Определить массы противовесов  $m_{\text{нI}}$  и  $m_{\text{нII}}$  и углы их закрепления  $\beta_1$  и  $\beta_{\text{нI}}$  (отсчитываемые от линии  $OS_2$  в направлении против движения стрелки часов) для уравнивания сил инерции грузов  $m_1, m_2$ , если координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  противовесов равны  $\rho_{\text{нI}} = \rho_{\text{нII}} = 10$  мм. Массы грузов:  $m_1 = 1,0$  кг,  $m_2 = 2,0$  кг. Расстояния от оси вала центров масс  $S_1$  и  $S_2$  грузов равны  $\rho_1 = 10$  мм,  $\rho_2 = 5$  мм,  $l_{A1} = 100$  мм,  $l_{A2} = 300$  мм,  $L = 400$  мм, угол закрепления  $\alpha_{12} = 90^\circ$ .

197. Предполагая, что все силы инерции звеньев приведены к общему центру масс  $S$ , определить точку приложения, модуль и направление главного вектора сил инерции подвижных звеньев криво-



К задаче 196.

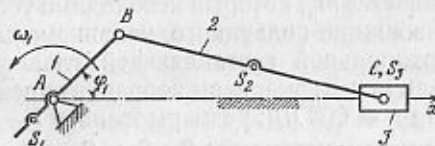


К задаче 197.

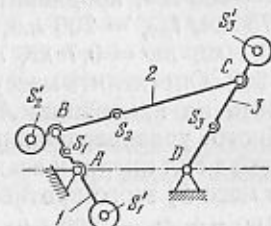
шипно-ползунного механизма при  $\varphi_1 = 45^\circ$ , если  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 150$  мм; координаты центров масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев равны  $l_{AS_1} = 20$  мм,  $l_{BS_2} = 75$  мм,  $l_{CS_3} = 0$ ; массы звеньев  $m_1 = 2,5$  кг,  $m_2 = 1$  кг,  $m_3 = 1,5$  кг. Угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 100$  сек $^{-1}$ .

Указание. Предусматривается графическое решение, поэтому предварительно надо построить схему механизма, одна точка которого копирует движение общего центра масс подвижных звеньев.

198. Определить модуль и направление главного вектора сил инерции подвижных звеньев кривошипно-ползунного механизма при  $\varphi_1 = 45^\circ$ , если  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 150$  мм, координаты центров масс



К задаче 198.



К задаче 199.

$S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев равны  $l_{AS_1} = 10$  мм,  $l_{BS_2} = 75$  мм,  $l_{CS_3} = 0$ ; массы звеньев  $m_1 = 2,5$  кг,  $m_2 = 1$  кг,  $m_3 = 1,5$  кг. Угловая скорость кривошипа постоянна и равна  $\omega_1 = 100$  сек $^{-1}$ .

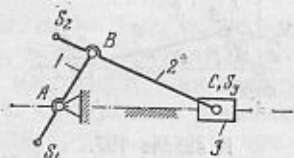
У к а з а н и е. При решении использовать формулу

$$a_C = a_B \left( \cos \varphi_1 + \frac{l_{AB}}{l_{BC}} \cos 2\varphi_1 \right),$$

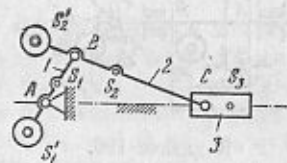
где  $a_C$  — ускорение точки  $C$ ,  $a_B$  — ускорение точки  $B$ .

199. Определить массы противовесов  $m_{п1}$ ,  $m_{п2}$ ,  $m_{п3}$ , необходимых для полного уравновешивания главного вектора сил инерции механизма шарнирного четырехзвенника, если  $l_{AB} = 120$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм,  $l_{CD} = 280$  мм, координаты центров масс  $S_1, S_2, S_3$  звеньев равны  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 200$  мм,  $l_{CS_3} = 130$  мм, массы звеньев  $m_1 = 0,1$  кг,  $m_2 = 0,8$  кг,  $m_3 = 0,4$  кг, координаты центров масс  $S'_1, S'_2, S'_3$  противовесов  $l_{AS'_1} = 100$  мм,  $l_{BS'_2} = 200$  мм,  $l_{CS'_3} = 130$  мм. Задачу решить, полагая, что общий центр масс подвижных звеньев механизма должен быть неподвижен и лежать в точке  $A$ .

200. Масса ползуна  $3$  кривошипно-ползунного механизма равна  $m_3 = 0,4$  кг. Подобрать массы  $m_2$  и  $m_1$  шатуна  $BC$  и кривошипа  $AB$  таким образом, чтобы главный вектор сил инерции всех звеньев



К задаче 200.



К задаче 201.

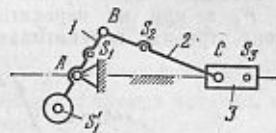
механизма был уравновешен. Координаты центров масс  $S_1$  и  $S_2$  звеньев  $AB$  и  $BC$  равны  $l_{AS_1} = 100$  мм,  $l_{BS_2} = 100$  мм, если  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм.

201. Определить массы противовесов  $m_{п1}$  и  $m_{п2}$ , которые необходимо установить на кривошипе  $AB$  и шатуне  $BC$  для полного уравновешивания главного вектора сил инерции всех звеньев кривошипно-ползунного механизма, если координаты центров масс  $S'_1$  и  $S'_2$  этих противовесов  $l_{AS'_1} = 500$  мм,  $l_{BS'_2} = 200$  мм,  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 300$  мм; координаты центров масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 200$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм; массы звеньев равны  $m_1 = 0,1$  кг,  $m_2 = 0,7$  кг,  $m_3 = 0,8$  кг.

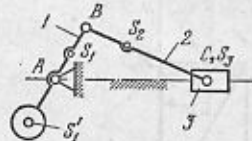
202. Определить массу противовеса  $m_{п1}$ , который необходимо установить на кривошипе  $AB$  кривошипно-ползунного механизма для полного уравновешивания вертикальной составляющей главного вектора сил инерции всех звеньев механизма, если координата центров масс  $S'_1$  этого противовеса  $l_{AS'_1} = 600$  мм; размеры звеньев  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 500$  мм; координаты центров масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 150$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм; массы звеньев  $m_1 = 0,3$  кг,  $m_2 = 1,5$  кг,  $m_3 = 2,0$  кг.

203. Определить массу  $m_{п1}$  противовеса, который необходимо установить на кривошипе  $AB$  кривошипно-ползунного механизма для уравновешивания сил инерции массы кривошипа и той части

массы шатуна  $BC$ , которая может быть отнесена к точке  $B$  после разнеса (статического) его массы на две, сосредоточенные в точках  $B$  и  $C$ , если координата центра масс  $S'_1$  противовеса  $l_{AS'_1} = 600$  мм. Размеры звеньев равны  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 500$  мм; координаты центров масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 150$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм, массы звеньев  $m_1 = 0,3$  кг,  $m_2 = m_3 = 1,5$  кг.

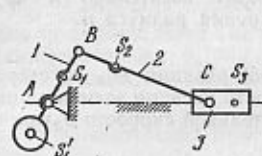


К задаче 202.

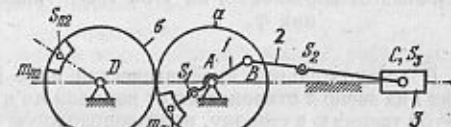


К задаче 203.

204. Определить массу  $m_{п1}$  противовеса, который необходимо установить на кривошипе  $AB$  кривошипно-ползунного механизма для уравновешивания главного вектора сил инерции звеньев механизма, если координата центра масс  $S'_1$  противовеса  $l_{AS'_1} = 600$  мм; размеры звеньев  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 500$  мм; координаты центров



К задаче 204.



К задаче 205.

масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев  $l_{AS_1} = 75$  мм,  $l_{BS_2} = 200$  мм,  $l_{CS_3} = 100$  мм; массы звеньев  $m_1 = 0,3$  кг,  $m_2 = 1,5$  кг,  $m_3 = 3,0$  кг.

У к а з а н и е. Предварительно развести статически массу шатуна на две точки, совпадающие с точками  $B$  и  $C$ . У ползуна уравновешивать только силу инерции первого порядка.

205. Определить массы  $m_{п1}$  и  $m_{п2}$  противовесов, которые надо установить на колесах  $a$  и  $b$  для полного уравновешивания сил инерции первого порядка звеньев кривошипно-ползунного механизма, если координаты центров масс  $S_{п1}$  и  $S_{п2}$  противовесов  $l_{AS_{п1}} = l_{BS_{п2}} = 50$  мм, а радиусы колес одинаковы. Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм; координаты центров масс  $S_1, S_2$  и  $S_3$  звеньев:  $l_{AS_1} = 30$  мм,  $l_{BS_2} = 100$  мм,  $l_{CS_3} = 0$ ; массы звеньев:  $m_1 = 2,5$  кг,  $m_2 = 1,0$  кг,  $m_3 = 3,0$  кг.

У к а з а н и е. Решить задачу в следующей последовательности:

а) уравновесить силы инерции звеньев механизма в вертикальном направлении;

б) уравновесить силы инерции звеньев в горизонтальном направлении. Принимать во внимание только силы инерции первого порядка.

## § 11. Трение в кинематических парах

1°. В относительном движении соприкасающихся элементов кинематических пар, при наличии прижимающей их силы, между этими элементами возникает трение, на преодоление которого затрачивается работа двигателя, приводящего в движение механизм.

Кроме того, трение между элементами кинематических пар изменяет величину и положение реакции в этих парах. При скольжении элементов кинематических пар возникает сила трения скольжения  $F$ , а при их перекатывании — момент трения перекатывания  $M_K$ .

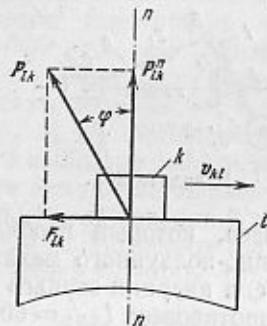


Рис. 55. Реакция в поступательной паре отклонена от нормали  $nn$  на угол трения  $\varphi$ .

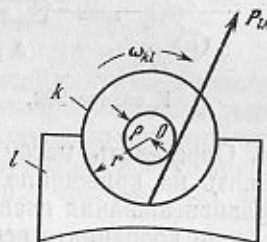


Рис. 56. Реакция во вращательной паре проходит касательно к кругу трения радиуса  $\rho$ .

В поступательной кинематической паре (рис. 55) реакция  $P_{lk}$  со стороны звена  $l$  на звено  $k$  отклоняется от нормали  $nn$  к плоскости касания элементов пары на угол трения  $\varphi$  в сторону, противоположную относительной скорости  $v_{kl}$  звена  $k$  по отношению к звену  $l$ .

Угол трения равен

$$\varphi = \arctg f, \quad (11.1)$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения.

Сила трения  $F_{lk}$ , приложенная к звену  $k$  со стороны звена  $l$ , равна

$$F_{lk} = P_{lk}^n \cdot f, \quad (11.2)$$

где  $P_{lk}^n = P_{lk} \cos \varphi$  — нормальная составляющая реакции  $P_{lk}$ .

Очевидно, что при отсутствии трения реакция  $P_{lk}^n = P_{lk}$ . Во вращательной кинематической паре (рис. 56) линия действия реакции  $P_{lk}$  со стороны звена  $l$  на звено  $k$  не пройдет через центр  $O$  шипа звена  $k$ , а расположится касательно к кругу трения так, чтобы момент ее относительно центра  $O$  шипа был противоположен по направлению угловой скорости  $\omega_{kl}$  звена  $k$  по отношению к звену  $l$ .

Радиус круга трения равен

$$\rho = r \sin \varphi \approx r \operatorname{tg} \varphi = rf, \quad (11.3)$$

где  $r$  — радиус шипа звена  $k$ ,  $f$  — коэффициент трения скольжения. Момент  $M_F$ , который надо преодолеть для проворачивания шипа звена  $k$  в подшипнике звена  $l$ , будет равен

$$M_F = P_{lk} \rho = P_{lk} \cdot r \cdot f. \quad (11.4)$$

При отсутствии трения очевидно, что момент  $M_F$  будет равен нулю, а линия действия реакции  $P_{lk}$  пройдет через центр  $O$  шипа.

В высшей кинематической паре (рис. 57) реакция  $P_{lk}$  отклоняется от нормали  $nn$  к поверхностям элементов пары в точке их касания  $A$  на угол трения  $\varphi$  в сторону, противоположную направлению относительной скорости  $v_{kl}$  точки  $A_k$  элемента пары звена  $k$  по отношению к звену  $l$ . Кроме того, к элементу пары звена  $k$  приложен момент трения качения  $M_k$ , направленный в сторону, противоположную направлению относительной угловой скорости  $\omega_{kl}$  звена  $k$  по отношению к звену  $l$ . Момент трения качения равен

$$M_k = P_{lk}^n \cdot k, \quad (11.5)$$

где  $P_{lk}^n$  — нормальная составляющая реакции  $P_{lk}$ ,  $k$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность длины.

2°. На преодоление сил трения в кинематических парах механизма затрачивается некоторая часть мощности двигателя, приводящего в движение механизм. Эта мощность  $N$ , затрачиваемая на преодоление трения в различных кинематических парах, подсчитывается так.

В поступательной паре

$$N = P_{lk}^n \cdot f \cdot v_{kl} \quad [\text{нмсек}^{-1} = \text{вт}], \quad (11.6)$$

где  $P_{lk}^n$  — величина нормальной составляющей реакции со стороны звена  $l$  на звено  $k$ ,  $f$  — коэффициент трения скольжения,  $v_{kl}$  — скорость звена  $k$  по отношению к звену  $l$ , равная алгебраической разности абсолютных скоростей звеньев  $k$  и  $l$ :

$$v_{kl} = v_k - v_l. \quad (11.7)$$

Во вращательной паре

$$N = P_{lk}^n \cdot f \cdot r \cdot \omega_{kl} \quad [\text{нмсек}^{-1} = \text{вт}], \quad (11.8)$$

где  $P_{lk}^n$  — величина нормальной составляющей реакции со стороны звена  $l$  на звено  $k$ ,  $f$  — коэффициент трения скольжения во вращательной паре,  $r$  — радиус шипа звена  $k$ ,  $\omega_{kl}$  — угловая скорость звена  $k$  по отношению к звену  $l$ , равная алгебраической разности абсолютных угловых скоростей звеньев  $k$  и  $l$ :

$$\omega_{kl} = \omega_k - \omega_l. \quad (11.9)$$

В высшей паре мощность, затрачиваемая на преодоление трения скольжения,  $N_{ск}$  равна

$$N_{ск} = P_{lk}^n \cdot f \cdot v_{Akl} \quad [\text{нмсек}^{-1} = \text{вт}], \quad (11.10)$$

где  $P_{lk}^n$  — величина нормальной составляющей реакции со стороны звена  $l$  на звено  $k$ ,  $f$  — коэффициент трения скольжения,  $v_{Akl}$  — скорость точки  $A_k$  звена  $k$  по отношению к точке  $A_l$  звена  $l$ .

Мощность, затрачиваемая на преодоление трения качения в этой же кинематической паре, равна

$$N_{кач} = P_{lk}^n \cdot k \cdot \omega_{kl} \quad [\text{нмсек}^{-1} = \text{вт}], \quad (11.11)$$

где  $P_{lk}^n$  — величина нормальной составляющей реакции со стороны звена  $l$  на звено  $k$ ,  $k$  — коэффициент трения качения,  $\omega_{kl}$  — угловая скорость звена  $k$  по отношению к звену  $l$ .

3°. Рассмотрим два примера.

Пример 1. По наклонной плоскости  $l$  движется равномерно вверх ползун  $k$  (рис. 58, а), находящийся под воздействием сил  $P$  и  $Q$ . Сила  $Q$  направлена перпен-

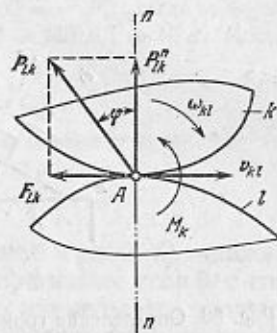


Рис. 57. В высшей кинематической паре реакция отклонена от нормали  $nn$  на угол трения  $\varphi$  и к звену  $k$  приложен момент трения качения  $M_k$ .



дикулярно оси  $xx$  и равна  $Q = 100$  н, угол наклона плоскости  $l$  равен  $\alpha = 20^\circ$ , коэффициент трения ползуна  $k$  о плоскость  $l$  равен  $f = 0,2$ . Требуется найти величину силы  $P$ , направленной параллельно линии  $xx$ , которая поддерживает заданное равномерное движение ползуна  $k$ .

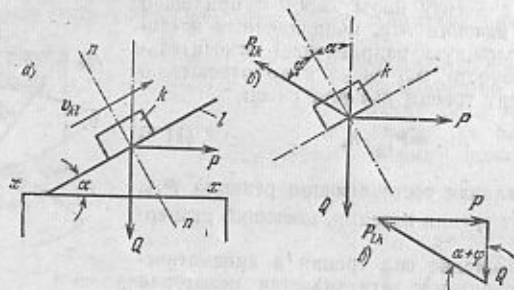


Рис. 58. Определение горизонтальной силы  $P$  при движении ползуна на наклонной плоскости. Ползун нагружен силой  $Q$ .

**Решение.** Определим по формуле (11.1) угол трения  $\varphi$ :

$$\varphi = \text{arctg} f = \text{arctg} 0,2 = 11^\circ 20'.$$

Рассмотрим равновесие ползуна (рис. 58, б). К нему приложены силы  $Q$ ,  $P$  и отклоненная от нормали  $ln$  на угол трения  $\varphi = 11^\circ 20'$  реакция  $P_{lk}$  со стороны плоскости  $l$  на ползун  $k$ .

Условие равновесия ползуна, записанное в векторной форме, будет

$$Q + P + P_{lk} = 0.$$

На рис. 58, в построен треугольник сил, удовлетворяющий этому равенству. Угол между силами  $Q$  и  $P_{lk}$  равен  $\alpha + \varphi$ , а угол между силами  $P$  и  $Q$  равен  $90^\circ$ . Из силового треугольника получаем

$$P = Q \text{tg}(\alpha + \varphi) = 100 \text{tg}(20^\circ + 11^\circ 20') = 100 \text{tg} 31^\circ 20' = 100 \cdot 0,606 = 60,6 \text{ н}.$$

Задаваясь прямоугольной системой координат и проектируя все силы, приложенные к ползуну  $k$ , на направление осей координат, можно также получить решение в аналитической форме

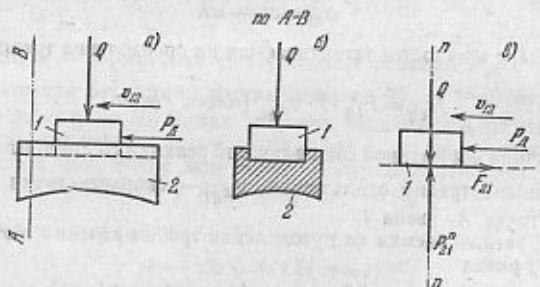


Рис. 59. Определение мощности, затрачиваемой на преодоление трения в поступательной кинематической паре.

**Пример 2.** Плоский ползун  $l$  (рис. 59, а) движется равномерно по горизонтальным направляющим  $2$  со скоростью  $v_{12} = 0,5$  мсек<sup>-1</sup> под воздействием горизонтальной движущей силы  $P_x$ . Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в опоре ползуна, если вертикальная сила, прижимающая ползун

к направляющим, равна  $Q = 100$  н, коэффициент трения ползуна о направляющие равен  $f = 0,1$ .

**Решение.** Рассмотрим равновесие ползуна (рис. 59, б). К ползуну приложены силы  $P_x$ ,  $Q$ ,  $P_{21}^n$  и  $F$ . Из чертежа видно, что  $Q = -P_{21}^n$ ; тогда по формуле (11.2) сила трения будет равна  $F = P_{21}^n \cdot f = Q \cdot f = 100 \cdot 0,1 = 10$  н. Искомая мощность находится по формуле (11.6):

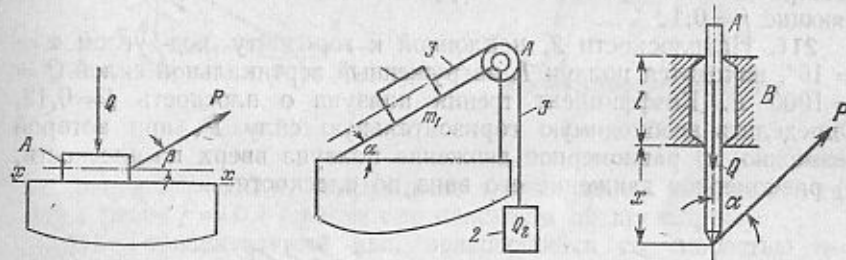
$$N = P_{21}^n \cdot f \cdot v_{21} = F v_{21} = 10 \cdot 0,5 = 1,0 \text{ вт}.$$

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 59—66.)

#### ЗАДАЧИ 206—220

206. Тело  $A$ , нагруженное вертикальной силой  $Q$ , движется равномерно по плоскости  $xx$ . Определить, при каком угле  $\beta$  с горизонтом движущая сила  $P$  достигает своего наименьшего значения, если коэффициент трения между телом  $A$  и плоскостью  $xx$   $f = 0,3$ .

207. Тело  $l$  с массой  $m_1 = 100$  кг лежит на наклонной плоскости и удерживается в состоянии равновесия грузом  $Q_2$ , связанным с телом гибкой нитью, перекинутой через блок  $A$ . Пренебрегая трением



К задаче 206.

К задаче 207.

К задаче 208.

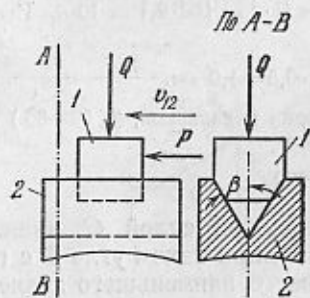
в подшипниках блока и жесткостью нити, определить в каких пределах должна лежать величина массы  $m_2$  груза  $Q_2$  для поддержания равновесия всей системы, если угол наклона плоскости  $\alpha = 30^\circ$ , а коэффициент трения между телом  $l$  и плоскостью  $f = 0,5$ .

208. Толкатель  $A$ , нагруженный силой  $Q = 5$  н, поднимается равномерно вверх силой  $P = 10$  н. Угол между направлением силы  $P$  и направлением движения штанги равен  $\alpha$ . Определить наибольшую величину угла  $\alpha$ , при котором движение толкателя возможно, если коэффициент трения между толкателем  $A$  и направляющими  $B$  равен  $f = 0,1$ , а расстояние  $x = l$ .

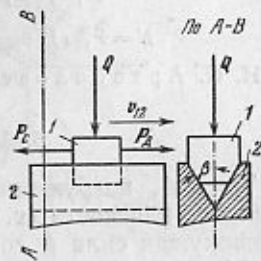
209. Клиновидный ползун  $l$  движется по горизонтальным направляющим  $2$  с постоянной скоростью. Определить величину движущей силы  $P_x$ , если сила полезного сопротивления  $P_c = 100$  н и вертикальная сила, прижимающая ползун к направляющей, равна  $Q = 50$  н, коэффициент трения между ползунуном и направляющими равен  $f = 0,1$ , половина угла заострения клиновидного желоба  $\beta = 30^\circ$ .

210. Клиновидный ползун  $l$  движется по горизонтальным направляющим  $2$  с постоянной скоростью  $v_{12} = 0,5$  мсек<sup>-1</sup> под воздействием

движущей силы  $P_d$ . Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в опорах ползуна, если вертикальная сила, прижимающая ползун к направляющим,  $Q=100$  н, половина угла



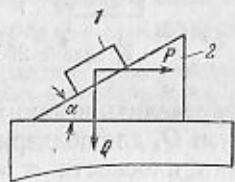
К задаче 209.



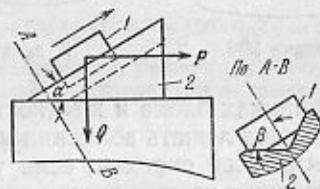
К задаче 210.

заострения клина  $\beta=30^\circ$  и коэффициент трения ползуна о направляющие  $f=0,1$ .

211. На плоскости 2, наклонной к горизонту под углом  $\alpha=16^\circ$ , находится ползун 1, нагруженный вертикальной силой  $Q=1000$  н. Коэффициент трения ползуна о плоскость  $f=0,12$ . Определить необходимую горизонтальную силу  $P$ , при которой возможно: а) равномерное движение ползуна вверх по плоскости; б) равномерное движение его вниз по плоскости.



К задаче 211.



К задаче 212.

212. Клиновидный ползун 1 под воздействием горизонтальной силы  $P=1000$  н движется равномерно вверх по наклонному клиновому желобу 2. Определить вертикальную силу  $Q$ , прижимающую ползун к желобу, если коэффициент трения ползуна о желоб  $f=0,13$ , половина угла  $\beta$  желоба равна  $60^\circ$  и угол наклона желоба 2 к горизонту  $\alpha=8^\circ$ .

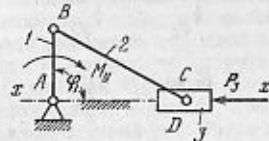
213. К ползуну 3 кривошипно-ползунного механизма приложена сила  $P_3=100$  н, а к кривошипу  $AB$  — уравновешивающий момент  $M_y$ , коэффициент трения между ползунком 3 и направляющими  $xx$  равен  $f=0,1$ ; размеры звеньев  $l_{AB}=100$  мм,  $l_{BC}=200$  мм. При положении звена  $AB$ , определяемом углом  $\varphi_1=90^\circ$ , найти

реакцию  $P_{23}$  в шарнире  $C$  (трением в шарнирах  $A$  и  $B$  механизма пренебречь).

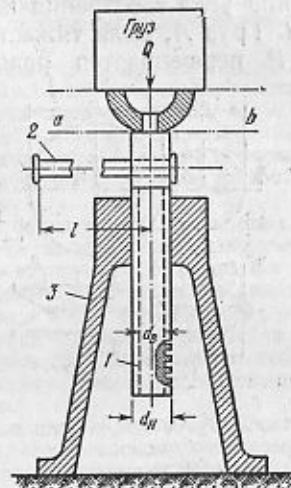
При решении рассмотреть случаи:

- трение между ползунком 3 и направляющими  $xx$  отсутствует,
- трение между ползунком и направляющими учитывается, ползун движется вправо,
- трение учитывается, ползун движется влево.

214. Определить грузоподъемность  $Q$  винтового домкрата. Нарезка винта квадратная, наружный диаметр ее равен  $d_n=24$  мм, внутренний диаметр  $d_n=21$  мм, длина рукоятки 2 равна  $l=300$  мм; сила, приложенная к концу рукоят-



К задаче 213.

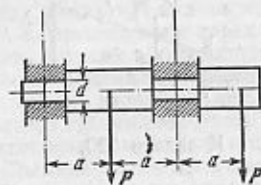


К задаче 214.

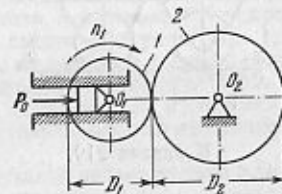
ки, равна  $P=100$  н, коэффициент трения между винтом 1 и гайкой 3 равен  $f=0,1$  (трением по плоскости  $ab$  пренебречь).

215. Горизонтальный вал, вращающийся со скоростью  $n=6000$  об/мин, нагружен двумя равными параллельными радиальными силами  $P$ , которые равны  $P=300$  н. Коэффициент трения между цапфами вала и подшипниками  $f=0,08$ , диаметр цапф равен  $d=60$  мм. Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в опорах вала.

216. С ведомого вала  $O_2$  фрикционной цилиндрической передачи с гладкими катками снимается мощность  $N=2$  квт. Определить



К задаче 215.



К задаче 216.

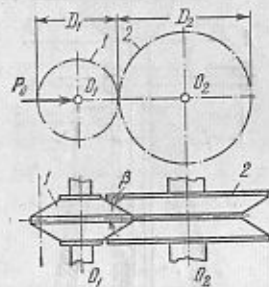
необходимую силу нажатия  $P_0$  ведущего колеса 1 и на колесо 2, если диаметр колеса 1 равен  $D_1=200$  мм, а диаметр колеса 2 равен  $D_2=400$  мм, коэффициент полезного действия передачи  $\eta=$



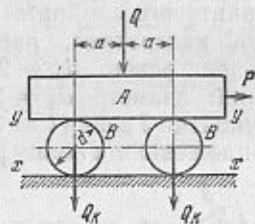
$= 0,9$ , колесо (каток) 1 вращается со скоростью  $n_1 = 400$  об/мин, коэффициент трения между катками  $f = 0,2$ .

217. Сохраняя условие задачи 216, решить аналогичную задачу, полагая, что колеса фрикционной передачи имеют клиновые ободы. Половина угла заострения клинового обода  $\beta = 30^\circ$ .

218. Груз  $A$ , сила тяжести которого  $Q = 4000$  н, под действием силы  $P$  перемещается равномерно параллельно плоскости  $x-x$ . Между плоскостями  $x-x$  и  $y-y$  вставлены катки  $B$  диаметром  $d = 200$  мм.



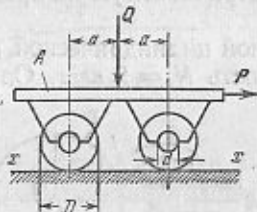
К задаче 217.



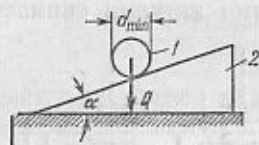
К задаче 218.

Коэффициент трения качения между плоскостью  $y-y$  и катками равен  $k_1 = 0,08$  мм, а между плоскостью  $x-x$  и катками  $k_2 = 0,06$  мм. Сила тяжести одного катка  $Q_k = 40$  н. Определить силу  $P$ , если скольжение плоскостей по каткам отсутствует.

219. Определить величину горизонтальной силы  $P$ , под действием которой тележка  $A$ , сила тяжести которой  $Q = 3000$  н, движется равномерно по горизонтальному рельсовому пути  $x-x$ . Диаметры шипов осей колес  $d = 40$  мм, коэффициент трения скольжения в подшипниках осей колес  $f = 0,1$ , диаметр колес  $D = 250$  мм, коэффициент трения качения колес по рельсам равен  $k = 0,1$  мм.



К задаче 219.



К задаче 220.

220. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол  $\alpha = 10^\circ$ , положен цилиндр, сила тяжести которого  $Q$ , коэффициент трения скольжения  $f = 0,08$ , коэффициент трения качения  $k = 0,08$ . Определить минимальный диаметр  $d_{min}$  цилиндра, при котором качение его по плоскости будет происходить без скольжения.

## § 12. Силовой расчет механизмов в кинематических парах

1°. В задачу силового расчета входит определение всех сил и моментов пар сил, которые приложены к каждому отдельному звену механизма. Эти силы или моменты надо знать, например, для расчета на прочность отдельных звеньев механизма или их частей (деталей).

Для того чтобы механизм находился в равновесии под воздействием внешних сил, к одному из звеньев его должна быть приложена уравновешивающая сила  $P_y$  или уравновешивающая пара сил, характеризуемая ее моментом  $M_y$  — уравновешивающим моментом. Эту силу  $P_y$  или момент  $M_y$  обычно считают приложенными к ведущему звену, которое либо получает энергию, потребную для движения механизма, извне, как это имеет место у механизмов рабочих машин, либо отдает ее, как это имеет место у механизмов двигателей.

Если при силовом расчете механизма в число известных внешних сил не включена инерционная нагрузка на звенья, то силовой расчет механизма называется *статическим*. Такой расчет состоит из а) определения реакций в кинематических парах механизма, б) нахождения уравновешивающих сил  $P_y$  или момента  $M_y$ . Если же при силовом расчете механизма в число известных внешних сил, приложенных к его звеньям, входит инерционная нагрузка на звенья, то силовой расчет механизма называется *кинетостатическим*. Для проведения его необходимо знать закон движения ведущего звена, чтобы иметь возможность предварительно определить инерционную нагрузку на звенья.

2°. В методах силового расчета, которые излагаются в вузовских курсах теории механизмов и машин, предполагается, что к плоскому механизму приложена плоская система сил. Такое предположение практически справедливо только тогда, когда подвижные звенья механизма имеют общую плоскость симметрии, параллельную плоскостям движения их точек, и все силы лежат в этой плоскости.

Следует иметь в виду, что определяемые излагаемыми методами реакции в кинематических парах являются *резльтирующими распределенными нагрузками*, которые реально возникают между элементами кинематических пар механизма. Характер распределения этих нагрузок на элементах кинематических пар зависит от конструктивного оформления этих элементов, их размеров, упругих свойств и т. п. Это обстоятельство всегда надо иметь в виду при расчете на прочность элементов кинематических пар, а также при учете работы или мощности, затрачиваемой на преодоление трения в этих парах.

В постановке задач настоящего параграфа в большинстве случаев не учитывается трение в кинематических парах механизма. Получающиеся от этого ошибки незначительны, так как обычно в механизмах элементы кинематических пар работают со смазкой и поэтому реакции, рассчитанные без учета трения, мало отличаются по величине и направлению от реакций, найденных с учетом трения. Трением нельзя пренебрегать при значительных величинах коэффициентов трения и при положениях механизма, в которых возможно заклинивание или самоторможение.

В тех задачах, где надо определить мощность, затрачиваемую на преодоление трения в кинематических парах механизма, следует поступать так: 1) Вначале определить реакции в кинематических парах, не учитывая трение между элементами кинематических пар. 2) Далее по найденным реакциям подсчитать силы или моменты трения, возникающие в этих парах, и, наконец, по определенным силам или моментам трения подсчитать мощность, затрачиваемую на преодоление трения в кинематических парах механизма.

3°. Силовой расчет производится в следующей последовательности.

- 1) Определяются все внешние силы, приложенные к звеньям механизма, от действия которых требуется найти реакции в кинематических парах механизма.
- 2) Выбирается ведущее звено. Устанавливается, *что* приводит в движение вонне этим звеном (для механизмов рабочих машин) или *что* приводится в движение вонне этим звеном (для механизмов двигателей), для решения вопроса о том, должна ли быть приложена к ведущему звену уравновешивающая сила  $P_y$  или уравновешивающий момент  $M_y$ , чтобы был обеспечен заданный закон движения ведущего звена.



3) Проводится расчленение ведомой кинематической цепи механизма на группы Ассура.

4) Проводится силовой расчет каждой группы Ассура в отдельности, так как группа Ассура является *статически определяемой* системой. Расчет следует начинать с группы Ассура, присоединенной к механизму при его образовании в последнюю очередь; затем перейти к следующей группе и так до тех пор, пока не будет произведен силовой расчет всех групп, образовавших ведомую часть механизма.

5) В заключение производится силовой расчет ведущего звена. Задачи обычно решают графоаналитическим методом, используя уравнение равновесия всей группы или отдельных ее звеньев в форме

$$\sum P=0, \quad \sum M=0. \quad (12.1)$$

В число сил и моментов, входящих в уравнения (12.1), включаются реакции и моменты реакций в кинематических парах группы.

На основании уравнений (12.1) строится многоугольник сил, который носит название *плана сил группы*, причем в первую очередь находятся реакции во внешних кинематических парах группы, а затем во внутренних парах по условиям равновесия звеньев группы, взятых порознь.

В случаях, когда в механизме имеются кинематические пары IV класса (высшие), можно поступить двояко: либо построить заменяющий механизм и далее вести расчет *погруппно*, либо, если звено входит в одну кинематическую пару I и одну IV класса, вести расчет *позвенно*.

Для реакций, возникающих между элементами кинематических пар, приняты следующие обозначения: реакция со стороны звена  $k$  на звено  $l$  обозначается  $P_{kl}$ , реакция же со стороны звена  $l$  на звено  $k$  соответственно обозначается  $P_{lk}$ . Очевидно, что

$$P_{kl} = -P_{lk}. \quad (12.2)$$

Реакция характеризуется *величиной (модулем), направлением и точкой приложения*.

Пренебрегая трением в кинематических парах, можно отметить следующее.

Во вращательной паре подлежат определению *величина и направление* реакции, так как ее линия действия проходит через ось вращения пары. В поступательной паре подлежат определению *величина и точка приложения* реакции, так как известно только то, что направление реакции всегда перпендикулярно оси направляющих пары. В высшей кинематической паре (паре IV класса) подлежит определению только *величина* реакции, так как реакция направлена по общей нормали к кривым, образующим пару, и приложена в точке их касания.

4°. Примеры на силовой расчет механизмов.

**Пример 1.** Провести силовой расчет кривошипно-ползунного механизма компрессора (рис. 60, а), данного в положении, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм. Нагрузка на звенья механизма: к звену АВ в точке  $S_1$  приложена сила  $P_1 = 400$  н, она направлена вдоль линии АВ, расстояние  $l_{AS_1} = 20$  мм; к звену 2 приложена сила  $P_2 = 600$  н, она направлена под углом  $\varphi_2 = 60^\circ$  к линии BC и приложена в точке  $S_2$ . Расстояние  $l_{BS_2} = 100$  мм. К этому же звену приложен момент  $M_2 = 8,0$  нм; к звену 3 приложена сила  $P_3 = 1000$  н, она направлена параллельно линии Ax и так, что ее линия действия проходит через точку C. Уравновешивающий момент  $M_3$  приложен к звену 1.

Подлежит определению: реакция  $P_{43}$  в поступательной кинематической паре C, которая направлена перпендикулярно линии Ax; реакция  $P_{23}$  во вращательной паре C; реакция  $P_{12}$  во вращательной паре B; реакция  $P_{41}$  во вращательной паре A и уравновешивающий момент  $M_3$ , приложенный к звену 1.

**Решение.** 1) Все внешние силы, действующие на звенья механизма, заданы, поэтому этот этап расчета выполнен.

2) Уравновешивающий момент  $M_3$  по условию приложен к звену 1, поэтому ведущим звеном следует считать звено 1.

3) От механизма может быть отделена только одна группа Ассура, состоящая из звеньев 2 и 3. Эта группа относится ко второму классу второго вида.

4) Составляем уравнения равновесия группы, состоящей из звеньев 2 и 3. Первое из уравнений (12.1) применительно к рассматриваемой группе запишется так:

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0.$$

В этом уравнении содержится три неизвестных: величина и направление реакции  $P_{12}$  и величина реакции  $P_{43}$ . Для того чтобы его решить, т. е. чтобы построить представленную им векторную сумму, разложим реакцию  $P_{12}$  на две составляющих:  $P_{12}^t$ , направленную перпендикулярно линии BC, и  $P_{12}^n$ , направленную

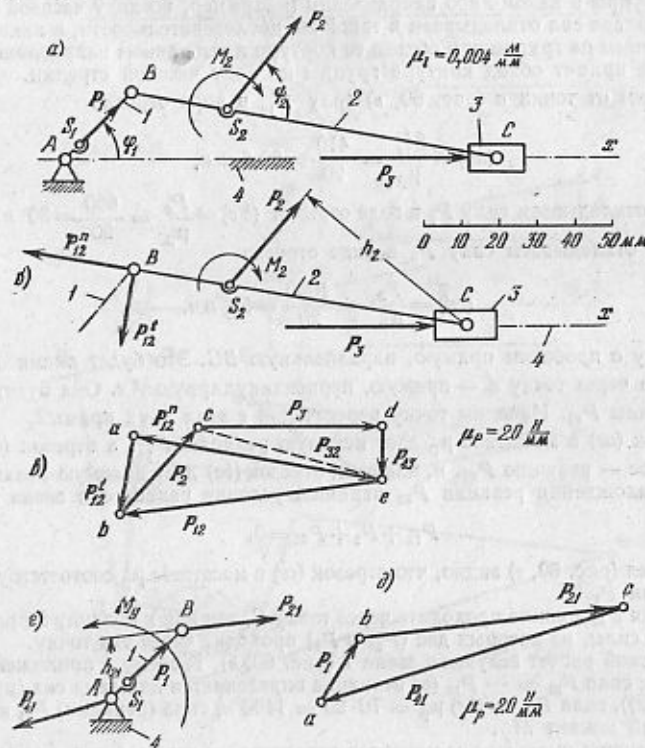


Рис. 60. Силовой расчет кривошипно-ползунного механизма компрессора.

параллельно линии BC. Теперь геометрическая сумма сил, приложенных к группе (рис. 60, б), равна

$$P_{12}^t + P_{12}^n + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \quad (12.3)$$

Величину силы  $P_{12}^t$  найдем, рассматривая равновесие звена 2. Напишем равенство нулю суммы моментов относительно точки C всех сил, приложенных к звену 2 (тем самым исключим из него момент неизвестной реакции  $P_{12}^t$ ), т. е. в качестве второго уравнения (12.1) взято уравнение

$$\sum M_C = 0, \quad (12.4)$$

которое, будучи развернутым, примет вид

$$P_{12}^t l_{BC} - M_2 - P_2 h_2 = 0,$$

откуда

$$P_{12}^I = \frac{P_2 \cdot h_2 + M_2}{l_{BC}} = \frac{600 \cdot 0,26 + 8}{0,4} = 410 \text{ н},$$

где  $h_2 = 0,260 \text{ м}$  найдено по чертежу.

Строим план сил группы (рис. 60, в) по равенству (12.3) в масштабе  $\mu_p = 20 \text{ н/мм}$ .

Порядок построения векторной суммы, вообще говоря, безразличен, но применительно к группам Ассур можно рекомендовать следующий: назначаем обход контура группы в каком-либо направлении (например, по ходу часовой стрелки) и силы на плане откладываем в такой же последовательности, в какой мы эти силы встречаем на группе при обходе ее контура в выбранном направлении. В нашем случае принят обход контура группы по ходу часовой стрелки.

Отложим от точки  $a$  (рис. 60, в) силу  $P_{12}^I$  в виде отрезка

$$(ab) = \frac{P_{12}^I}{\mu_p} = \frac{410}{20} = 20,5 \text{ мм},$$

от точки  $b$  откладываем силу  $P_2$  в виде отрезка  $(bc) = \frac{P_2}{\mu_p} = \frac{600}{20} = 30 \text{ мм}$ , далее от точки  $c$  откладываем силу  $P_3$  в виде отрезка

$$(cd) = \frac{P_3}{\mu_p} = \frac{1000}{20} = 50 \text{ мм}.$$

Через точку  $a$  проводим прямую, параллельную  $BC$ . Это будет линия действия силы  $P_{12}^A$ , а через точку  $d$  — прямую, перпендикулярную  $Ax$ . Она будет линией действия силы  $P_{12}^B$ . Находим точку пересечения  $e$  этих двух прямых.

Отрезок  $(ae)$  в масштабе  $\mu_p$  дает искомую реакцию  $P_{12}^A$ , а отрезок  $(de)$  в том же масштабе — реакцию  $P_{12}^B$ , и, наконец, отрезок  $(be)$  дает искомую реакцию  $P_{12}$ . Для нахождения реакции  $P_{32}$  напишем условие равновесия звена 2:

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0. \quad (12.5)$$

Из плана сил (рис. 60, в) видно, что отрезок  $(ce)$  в масштабе  $\mu_p$  соответствует искомой реакции  $P_{32}$ .

Реакция  $P_{32}$  должна проходить через точку  $C$ , так как к ползуну 3 приложены только три силы, из которых две ( $P_{23}$  и  $P_3$ ) проходят через эту точку.

5) Силовой расчет ведущего звена 1 (рис. 60, в). К звену 1 приложены: сила  $P_1 = 400 \text{ н}$ , сила  $P_{21} = -P_{12}$  (ее величина определяется из плана сил (рис. 60, в) отрезком  $(be)$ ), сила  $P_{31} = (be) \mu_p = 70 \cdot 20 = 1400 \text{ н}$ , сила (реакция)  $P_{41}$  и уравновешивающий момент  $M_y$ .

Из равенства нулю суммы моментов относительно точки  $A$  сил, приложенных к звену 1, находим величину момента уравновешивающей пары сил:

$$M_y = P_{21} \cdot h_{21} = (be) \mu_p \cdot h_{21} = 70 \cdot 20 \cdot 0,06 = 84 \text{ нм},$$

где  $h_{21}$  (плечо силы  $P_{21}$ ) находится по чертежу (рис. 60, в). Условием равенства нулю векторной суммы сил, приложенных к звену 1, будет

$$P_{21} + P_1 + P_{41} = 0. \quad (12.6)$$

Отсюда находим модуль реакции  $P_{41}$  путем построения векторного треугольника сил (рис. 60, д):  $P_{41} = (ca) \mu_p \text{ (н)}$ .

**Пример 2.** Провести силовой расчет шестизвенного механизма поперечно-строгального станка (рис. 61, а), данного в положении, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 65 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 350 \text{ мм}$ ,  $l_{CD} = 680 \text{ мм}$ ,  $l_{ED} = 210 \text{ мм}$ ,  $H = 285 \text{ мм}$ ,  $l_1 = 390 \text{ мм}$ ,  $l_2 = 290 \text{ мм}$ ,  $l_{ES_5} = 105 \text{ мм}$ ,  $h = 100 \text{ мм}$ .

К звену 5 приложена сила резания  $P_5 = 200 \text{ н}$ . Сила тяжести звена 5  $Q_5 = 60 \text{ н}$ , она приложена в центре масс  $S_5$  звена 5. К зубу колеса  $I'$ , находящегося

на звене 1, приложена в полюсе зацепления  $P$  уравновешивающая сила  $P_y$ ; радиус начальной окружности колеса  $I'$  равен  $R = 120 \text{ мм}$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

Определить реакции во всех кинематических парах и уравновешивающую силу  $P_y$ , пренебрегая трением во всех кинематических парах.

**Решение.** 1) Все внешние силы, приложенные к звеньям механизма, заданы, поэтому этот пункт расчета выполнен.

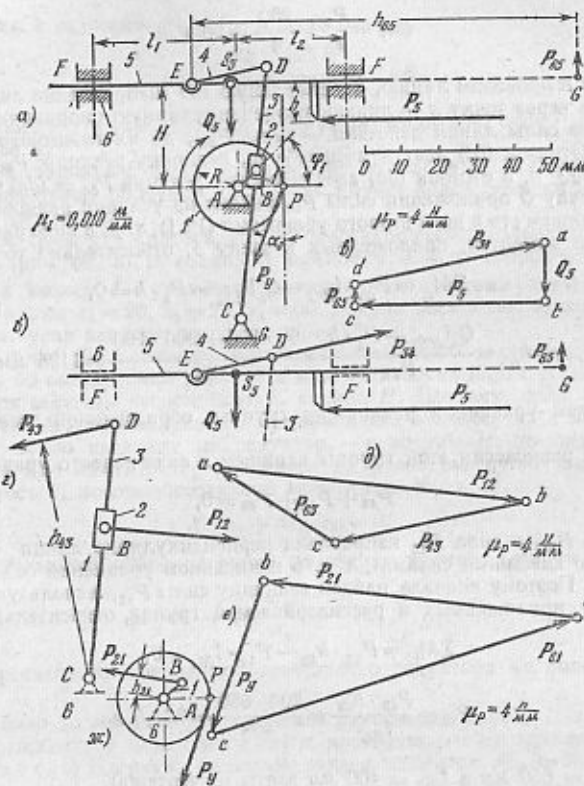


Рис. 61. Силовой расчет шестизвенного механизма поперечно-строгального станка,

2) Уравновешивающая сила  $P_y$  приложена к звену 1, поэтому ведущим звеном следует считать звено 1 ( $AB$ ).

3) От механизма последовательно могут быть отделены две группы второго класса: группа второго вида, состоящая из звеньев 5 и 4, и группа третьего вида, состоящая из звеньев 3 и 2.

4) Составим уравнение равновесия группы, состоящей из звеньев 5 и 4 (рис. 61, б). В качестве первого уравнения (12.1) возьмем условие равновесия группы

$$Q_5 + P_5 + P_{34} + P_{65} = 0.$$

В этом уравнении направления сил  $P_{34}$  и  $P_{65}$  известны: сила  $P_{34}$  направлена вдоль звена  $ED$  (по линии  $ED$ , так как звено 4 не нагружено внешними силами); сила  $P_{65}$  направлена перпендикулярно направляющим звена 5.

Строим план сил группы (рис. 61, в).



Выбираем масштаб сил  $\mu_p = 4 \text{ н/мм}$ . От точки  $a$  откладываем силу  $Q_5$  в виде отрезка

$$(ab) = \frac{Q_5}{\mu_p} = \frac{60}{4} = 15 \text{ мм};$$

далее от точки  $b$  откладываем силу  $P_5$  в виде отрезка

$$(bc) = \frac{P_5}{\mu_p} = \frac{200}{4} = 50 \text{ мм}.$$

Через точку  $a$  проводим линию, параллельную  $ED$  (направление линии действия силы  $P_{43}$ ), а через точку  $c$  — линию, перпендикулярную направлению пересечения в точке  $d$ . Отрезок  $(cd)$  дает в масштабе  $\mu_p$  величину реакции  $P_{65} = (cd) \mu_p = 5,5 \cdot 4 = 22 \text{ н}$ , а отрезок  $(da)$  дает величину реакции  $P_{34} = (da) \mu_p = 51 \cdot 4 = 204 \text{ н}$ . Точку  $G$  приложения силы  $P_{65}$  найдем из условия равновесия звена 5, для чего напишем его в виде второго уравнения (12.1), т. е. в виде равенства нулю суммы сил и моментов, приложенных к звену 5, относительно точки  $E$ :

$$\Sigma M_E = P_{65} \cdot l_{EG} - Q_5 l_{ES_5} - P_5 \cdot h = 0,$$

откуда

$$l_{EG} = h_{65} = \frac{Q_5 l_{ES_5} + P_5 \cdot h}{P_{65}} = \frac{60 \cdot 105 + 200 \cdot 100}{22} = 1195 \text{ мм}.$$

Составляем уравнения равновесия группы, образованной звеньями 2 и 3 (рис. 61, з).

Условие равновесия этой группы напишем в виде первого уравнения (12.1):

$$P_{43} + P_{12} + P_{63} = 0,$$

где  $P_{43} = -P_{34}$ , а сила  $P_{12}$  направлена перпендикулярно линии  $CD$  (звено 2 не нагружено внешними силами), т. е. в написанном уравнении содержится три неизвестных. Поэтому вначале найдем величину силы  $P_{12}$ , используя уравнение моментов сил, приложенных к рассматриваемой группе, относительно точки  $C$ :

$$\Sigma M_C = P_{43} \cdot h_{43} - P_{12} \cdot l_{BC} = 0,$$

откуда

$$P_{12} = \frac{P_{43} \cdot h_{43}}{l_{BC}} = \frac{204 \cdot 650}{400} = 331,5 \text{ н}$$

(размеры  $h_{43} = 650 \text{ мм}$  и  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$  взяты из чертежа).

Строим план сил (рис. 61, д) в масштабе  $\mu_p = 4 \text{ н/мм}$ . От точки  $a$  откладываем силу  $P_{12}$  в виде отрезка  $(ab) = \frac{P_{12}}{\mu_p} = \frac{331,5}{4} = 83 \text{ мм}$  перпендикулярно линии

$CD$ , далее от точки  $b$  откладываем силу  $P_{43}$  в виде отрезка  $(bc) = \frac{P_{43}}{\mu_p} = \frac{204}{4} = 51 \text{ мм}$ .

Соединяя точки  $c$  и  $a$  прямой, получаем величину силы  $P_{63} = (ca) \mu_p = 38 \cdot 4 = 152 \text{ н}$ .

5) Силовой расчет ведущего звена (рис. 61, ж). К звену 1 приложены силы:  $P_{21} = -P_{12}$ , реакция в шарнире  $A$  (равная  $P_{61}$ ) и уравновешивающая сила  $P_y$ , приложенная в точке  $P$  колеса  $I'$  под углом  $\alpha_0$  к касательной, проведенной к начальной окружности.

Условие равновесия звена 1 ( $AB$ ) будет

$$P_{21} \cdot h_{21} - P_y \cdot R \cos \alpha_0 = 0,$$

откуда

$$P_y = \frac{P_{21} \cdot h_{21}}{R \cos \alpha_0} = \frac{331,5 \cdot 60}{120 \cdot 0,94} = 175 \text{ н}.$$

Строим план сил для ведущего звена (рис. 61, е):

$$P_{21} + P_y + P_{61} = 0.$$

Для этого от точки  $a$  отложим силу  $P_{21}$  в виде отрезка

$$(ab) = \frac{P_{21}}{\mu_p} = \frac{331,5}{4} \approx 83 \text{ мм},$$

далее от точки  $b$  отложим силу  $P_y$  в виде отрезка

$$(bc) = \frac{P_y}{\mu_p} = \frac{175}{4} \approx 44 \text{ мм}.$$

Соединим точки  $c$  и  $a$  прямой. Отрезок  $(ca)$  в масштабе  $\mu_p$  дает силу  $P_{61} = (ac) \mu_p = 102 \cdot 4 = 408 \text{ н}$ .

Реакция в шарнире  $E$  будет равна реакции в шарнире  $D$  (звено 4 не нагружено); реакция между ползуном 2 и звеном 3 будет равна реакции в шарнире  $B$  (звено 2 не нагружено).

**Пример 3.** Провести силовой расчет одноступенчатого планетарного редуктора Джемса (рис. 62, а). К водилу  $H$  приложен момент сопротивления  $M_H = 16 \text{ нм}$ , а к колесу 1 — уравновешивающий момент (движущий)  $M_y$ . Числа зубьев колес равны  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_3 = 60$ ; модули всех колес одинаковы и равны  $m = 2 \text{ мм}$ ; угол зацепления колес  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

**Указание.** При силовом расчете планетарных редукторов для того, чтобы задачу об определении реакций в кинематических парах решать *последовательно*, рекомендуется ведущим звеном считать водило  $H$ . Поэтому, если уравновешивающий момент  $M_y$  предполагается приложенным к колесу 1, а момент, представляющий собою нагрузку на редуктор, — к водилу  $H$ , то надо предварительно найти этот момент.  $M_y$  находится из равенства нулю алгебраической суммы мощностей, которые создаются моментами  $M_y$  и  $M_H$ :

$$M_y \omega_1 + M_H \omega_H = 0, \quad (12.7)$$

где  $M_H$  представляет собою нагрузку на редуктор, откуда получаем

$$M_y = -M_H \frac{\omega_H}{\omega_1} = -M_H \cdot i_{H1}, \quad (12.8)$$

где  $i_{H1}$  — передаточное отношение планетарного редуктора от водила  $H$  к колесу 1.

Расчет надо начинать с рассмотрения равновесия колеса 1, затем следует перейти к сателлиту 2 (или блоку их) и закончить расчет водилом  $H$ .

**Решение.** 1) Нагрузка на водиле задана моментом  $M_H = 16 \text{ нм}$ . В соответствии с указанием к примеру находим по формуле (12.8) уравновешивающий момент  $M_y = -M_H \cdot i_{H1}$ ; так как

$$i_{H1} = \frac{1}{1 - i_{13}} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} = \frac{1}{1 + 3} = 0,25,$$

то  $M_y = -M_H \cdot i_{H1} = -16 \cdot 0,25 = -4 \text{ нм}$ .

2) Ведущим считаем водило  $H$ .

3) От механизма последовательно отделяются сначала колесо 1, а затем сателлит 2. После их отделения остается ведущее звено  $H$ .

4) Составляем и решаем уравнения равновесия отдельных звеньев.

Уравнения равновесия колеса 1 (рис. 62, б). К колесу приложены: уравновешивающий момент  $M_y = 4 \text{ нм}$ , направленный в сторону, противоположную моменту  $M_H$ , реакция  $P_{21}$  со стороны колеса 2 на колесо 1, направленная под углом  $\alpha_0 = 20^\circ$  к касательной к начальной окружности колеса 1, и реакция  $P_{31}$  в шарнире  $A$ , приложенная к его оси. Уравнением равновесия колеса 1 будет

$$P_{21} + P_{31} = 0,$$



откуда  $P_{31} = -P_{21}$ . Другим уравнением равновесия будет равенство нулю суммы моментов сил относительно оси  $A$ :

$$\Sigma M_A = P_{21} \cdot R_1 \cos \alpha_0 - M_y = 0,$$

откуда

$$P_{21} = \frac{M_y}{R_1 \cos \alpha_0} = \frac{4}{0,02 \cdot 0,94} = 212 \text{ н},$$

так как

$$R_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{2 \cdot 20}{2} = 20 \text{ мм}.$$

Переходим к сателлиту 2 (рис. 62, в). К нему приложены: сила  $P_{12} = -P_{21}$ , реакция  $P_{32}$  со стороны неподвижного колеса 3, направленная под углом  $\alpha_0 = 20^\circ$

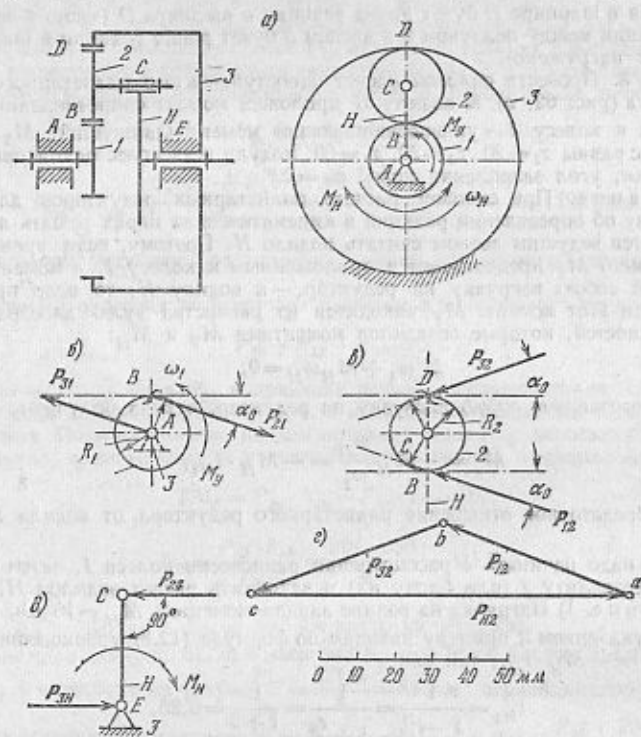


Рис. 62. Силовой расчет одноступенчатого планетарного редуктора Джемса.

к касательной к начальной окружности колеса 3, реакция  $P_{H2}$  со стороны водила, приложенная к оси шарнира  $C$ .

Запишем уравнение моментов сил, приложенных к сателлиту 2, относительно оси шарнира  $C$ :

$$\Sigma M_C = P_{12} \cdot R_2 \cos \alpha_0 - P_{32} \cos \alpha_0 = 0,$$

откуда

$$P_{32} = P_{12} = 212 \text{ н};$$

другим уравнением равновесия сателлита 2 будет

$$P_{12} + P_{32} + P_{H2} = 0.$$

По этому уравнению строим план сил (рис. 62, в) в масштабе  $\mu_p = 4 \text{ н/мм}$ . От точки  $a$  откладываем силу  $P_{12}$  в виде отрезка

$$(ab) = \frac{P_{12}}{\mu_p} = \frac{212}{4} \approx 53 \text{ мм},$$

далее от точки  $b$  — силу  $P_{32}$  в виде отрезка

$$(bc) = \frac{P_{32}}{\mu_p} = \frac{212}{4} \approx 53 \text{ мм}.$$

Сила  $P_{H2}$  изобразится отрезком  $(ca)$ , а ее модуль будет

$$P_{H2} = (ca) \mu_p = 100 \cdot 4 = 400 \text{ н}.$$

Эта сила направлена перпендикулярно линии  $CE$  (рис. 62, в), так как треугольник  $abc$  равнобедренный.

5) Переходим к силовому расчету ведущего звена (водила  $H$ ) (рис. 62, в). К водилу  $H$  приложены: сила  $P_{2H} = -P_{H2}$ , реакция  $P_{3H}$  (воздействие стойки 3 на водило  $H$ ), приложенная к оси шарнира  $E$ , и момент  $M_H$ .

Запишем уравнение равновесия сил, приложенных к звену  $H$ :

$$P_{2H} + P_{3H} = 0,$$

откуда

$$P_{3H} = -P_{2H}, \text{ т. е. } P_{3H} = 400 \text{ н}.$$

Проверка. Сумма моментов сил, приложенных к водилу, относительно оси шарнира  $E$  должна быть равна нулю, что и получается:

$$\Sigma M_E = M_H - P_{2H}(R_1 + R_2) = 16 - 400(0,02 + 0,02) = 0.$$

Пример 4. Для механизма шасси самолета (рис. 63, а) найти мощность  $N$ , затрачиваемую на трение во всех кинематических парах, при том положении его звена 1, когда  $\varphi_1 = 195^\circ$ . Угловая скорость звена 1 постоянна и равна  $\omega_1 = 0,3 \text{ сек}^{-1}$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 1,0 \text{ м}$ ,  $l_{AD} = 1,32 \text{ м}$ ,  $l_{BC} = 0,4 \text{ м}$ ,  $l_{CD} = 0,64 \text{ м}$ ,  $l_{ED} = 0,95 \text{ м}$ ,  $l_{EC} = 0,3 \text{ м}$ . К механизму приложены нагрузки: к звену 3 — сила тяжести  $Q_3 = 100 \text{ н}$  (приложена в центре масс  $S_3$ , координата центра масс  $l_{DS_3} = 0,46 \text{ м}$ ), горизонтальная сила от набегающего воздушного потока  $P = 400 \text{ н}$  (приложена в центре масс  $S_2$ ) и сила тяжести колеса  $Q_k = 60 \text{ н}$  (приложена в точке  $E$ ); звено 2 не нагружено. Диаметры цапф вращательных кинематических пар  $A, B, C, D$  соответственно равны  $d_A = 50 \text{ мм}$ ,  $d_B = 30 \text{ мм}$ ,  $d_C = 30 \text{ мм}$  и  $d_D = 50 \text{ мм}$ . Коэффициенты трения во всех кинематических парах  $f = 0,1$ .

Решение. 1) Строим схему механизма в масштабе  $\mu_l = 0,01 \text{ м/мм}$  (рис. 63, а).

2) Строим план скоростей (рис. 63, б) по уравнению

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

На плане скорость  $v_B$  изображена отрезком  $(pb) = 50 \text{ мм}$ , скорость  $v_{CB}$  — отрезком  $(bc) = 71 \text{ мм}$  и скорость  $v_C$  — отрезком  $(pc) = 52 \text{ мм}$ . Масштаб плана

$$\mu_v = \frac{v_B}{(pb)} = \frac{\omega_1 l_{AB}}{(pb)} = \frac{0,3 \cdot 1,0}{50} = 0,006 \text{ мсек}^{-1}/\text{мм}.$$

3) Находим абсолютные угловые скорости звеньев (знак «плюс» приписываем скорости, направленной против движения часовой стрелки).

Угловая скорость  $\omega_1$  звена 1 известна (задана), угловая скорость звена 2 равна

$$\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}} = \frac{(bc) \mu_v}{l_{BC}} = \frac{71 \cdot 0,006}{0,4} = -1,06 \text{ сек}^{-1},$$

а угловая скорость звена 3 равна

$$\omega_3 = \frac{v_C}{l_{CD}} = \frac{(pc) \mu_p}{l_{CD}} = \frac{52 \cdot 0,006}{0,64} = -0,488 \text{ сек}^{-1},$$

4) Подсчитываем относительные угловые скорости  $\omega_{14}$ ,  $\omega_{12}$  и  $\omega_{23}$ :

$$\omega_{14} = \omega_1 = 0,3 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{12} = \omega_1 - (-\omega_2) = 0,3 + 1,06 = 1,36 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_{23} = -\omega_3 - (-\omega_2) = -0,448 + 1,06 = 0,572 \text{ сек}^{-1}.$$

5) Определяем реакции в кинематических парах механизма.

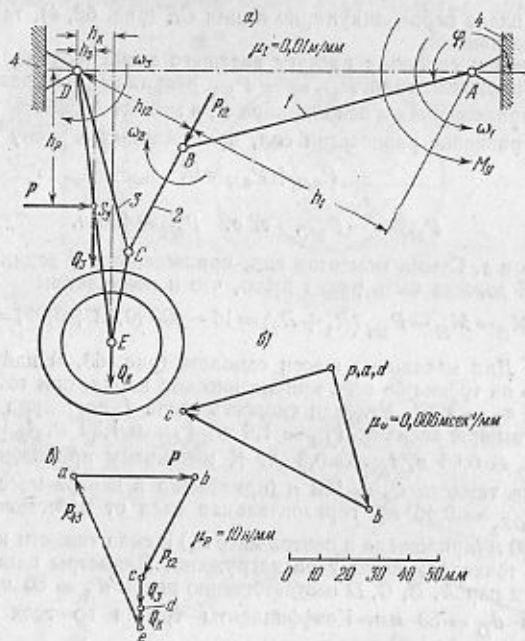


Рис. 63. К подсчету мощности, затрачиваемой на трение в кинематических парах механизма шасси самолета.

а) Рассматриваем равновесие группы второго класса первого вида (в нее входят звенья 2 и 3).

Звено 2 не нагружено, поэтому реакция  $P_{12}$  в шарнире B направлена вдоль линии BC. Эту реакцию находим из условия равновесия всей группы, каким является равенство нулю суммы моментов сил, приложенных к звеньям группы, относительно оси шарнира D:

$$\Sigma M_D = Ph_p - Q_3 h_3 - Q_k h_k - P_{12} h_{12} = 0.$$

Отсюда

$$P_{12} = \frac{Ph_p - Q_3 h_3 - Q_k h_k}{h_{12}} = \frac{400 \cdot 0,455 - 100 \cdot 0,065 - 60 \cdot 0,12}{0,44} = 382 \text{ н},$$

где  $h_p = 0,455 \text{ м}$ ,  $h_3 = 0,065 \text{ м}$ ,  $h_k = 0,12 \text{ м}$  и  $h_{12} = 0,44 \text{ м}$  — плечи соответствующих сил, найденные по чертежу (рис. 63, а).

Величина реакции  $P_{32}$  в шарнире C равна  $P_{32} = -P_{12}$ , так как звено 2 не нагружено. Реакция  $P_{43}$  в шарнире D найдется построением плана сил группы (рис. 63, а):

$$P + P_{12} + Q_3 + Q_k + P_{43} = 0.$$

На плане сил сила  $P_{43}$  изображается отрезком  $(ea) = 56 \text{ мм}$ , поэтому она равна

$$P_{43} = (ea) \mu_l = 56 \cdot 10 = 560 \text{ н}.$$

Масштаб плана сил  $\mu_p = 10 \text{ н/мм}$ .

б) Переходим к ведущему звену. Для ведущего звена 1 уравнением равновесия будет

$$P_{41} + P_{21} = 0;$$

так как

$$P_{21} = -P_{12}, \text{ то } P_{41} = P_{12} = 382 \text{ н}.$$

б) Подсчет мощности, теряемой на трение в отдельных кинематических парах, производится по формуле (11.8). Затрата мощности в каждой из пар A, B, C и D будет соответственно равна

$$N_A = P_{41} \cdot f \cdot \omega_1 \cdot \frac{d_A}{2} = 382 \cdot 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,025 = 0,286 \text{ ат},$$

$$N_B = P_{12} \cdot f \cdot \omega_{12} \cdot \frac{d_B}{2} = 382 \cdot 0,1 \cdot 1,36 \cdot 0,015 = 0,730 \text{ ат},$$

$$N_C = P_{32} \cdot f \cdot \omega_{23} \cdot \frac{d_C}{2} = 382 \cdot 0,1 \cdot 0,572 \cdot 0,015 = 0,328 \text{ ат},$$

$$N_D = P_{43} \cdot f \cdot \omega_{34} \cdot \frac{d_D}{2} = 560 \cdot 0,1 \cdot 0,488 \cdot 0,025 = 0,683 \text{ ат}.$$

Общая мощность  $N$ , теряемая на трение во всех парах, равна

$$N = N_A + N_B + N_C + N_D = 2,077 \text{ ат}.$$

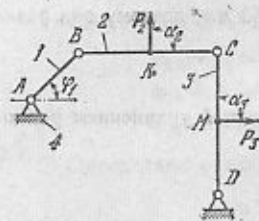
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 70—74).

## ЗАДАЧИ 221—244

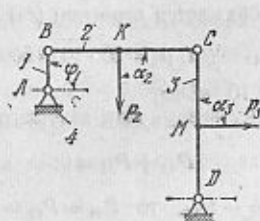
221. Определить реакции в кинематических парах A, B, C и D шарнирного четырехзвенника и величину необходимого уравновешивающего момента  $M_y$ , приложенного к звену AB, от нагрузки, приложенной к звеньям BC и CD, если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ , ось звена BC горизонтальна, а ось звена CD вертикальна. Силы  $P_2$  и  $P_3$  приложены в точках K и M, делящих межшарнирные расстояния пополам; величины сил равны  $P_2 = P_3 = 200 \text{ н}$ , углы  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  равны  $90^\circ$ .

222. Определить реакции в кинематических парах A, B, C и D шарнирного четырехзвенника и величину необходимого уравновешивающего момента  $M_y$ , приложенного к звену AB, от нагрузки, приложенной к звеньям BC и CD, если  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ , ось звена BC горизонтальна, а ось звена CD вертикальна. Силы приложены в точках K и M, делящих межшарнирные расстояния пополам, и равны  $P_2 = P_3 = 100 \text{ н}$ , углы  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  равны  $90^\circ$ .

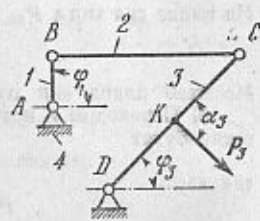
223. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  шарнирного четырехзвенника и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ мм}$ ,



К задаче 221.



К задаче 222.

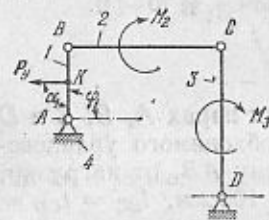


К задаче 223.

ось звена  $BC$  горизонтальна, углы  $\varphi_1 = 90^\circ$ ,  $\varphi_3 = 45^\circ$ , сила  $P_3$  приложена в точке  $K$ , делящей длину звена  $CD$  пополам, угол  $\alpha_3 = 90^\circ$ ,  $P_3 = 100 \text{ н}$ .

224. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  шарнирного четырехзвенника и величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной в точке  $K$  звена  $AB$  перпендикулярно к его оси ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ) и делящей отрезок  $AB$  пополам, от нагрузки, приложенной к звеньям  $BC$  и  $CD$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ , ось звена  $BC$  горизонтальна, ось звена  $CD$  вертикальна. Моменты пар, приложенных к звеньям  $BC$  и  $CD$ , равны  $M_2 = M_3 = 2 \text{ нм}$ .

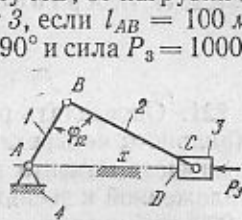
225. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  кривошипно-ползунного механизма и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , от нагрузки  $P_3$ , приложенной к ползуну  $3$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$  и сила  $P_3 = 1000 \text{ н}$ .



К задаче 224.



К задаче 225.



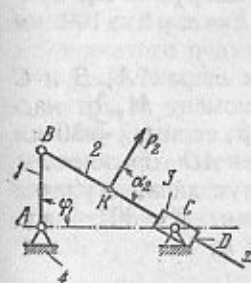
К задаче 226.

226. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  кривошипно-ползунного механизма и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , от нагрузки  $P_3$ , приложенной к ползуну  $3$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_{12} = 90^\circ$  и сила  $P_3 = 1000 \text{ н}$ .

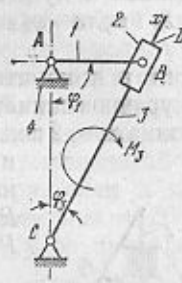
227. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  кривошипного механизма с качающимся ползунотом и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $1$ , от нагрузки  $P_2$ , приложенной к звену  $2$  (кулисе) в точке  $K$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} =$

$= 200 \text{ мм}$ ,  $l_{BK} = 100 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ , сила  $P_3 = 100 \text{ н}$ , угол  $\alpha_2$  равен  $90^\circ$ .

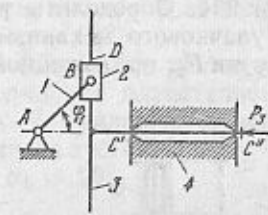
228. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  кулисного механизма Витворта и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , от нагрузки, приложенной к звену  $3$



К задаче 227.



К задаче 228.

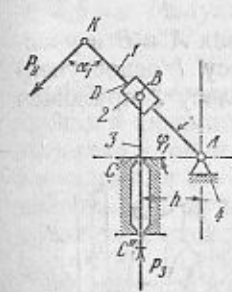


К задаче 229.

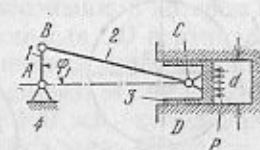
(кулисе), если  $l_{AB} = 300 \text{ мм}$ , углы  $\varphi_1 = 90^\circ$ ,  $\varphi_3 = 30^\circ$ , момент, приложенный к звену  $3$ , равен  $M_3 = 60 \text{ нм}$ .

229. Определить реакции в кинематических парах  $A, B$  и  $D$  и точках  $C'$  и  $C''$  синусного механизма и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , от нагрузки  $P_3$ , приложенной к звену  $3$  (кулисе), если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{C'C''} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$  и сила  $P_3 = 100 \text{ н}$ .

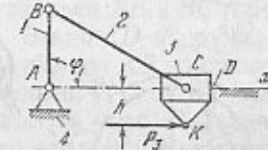
230. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, D$  и точках  $C'$  и  $C''$  тангенсного механизма и величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной в точке  $K$  звена  $AB$ , перпендикулярного его оси, если  $h = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{C'C''} = 200 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $l_{AK} = 2l_{AB}$ , сила  $P_3 = 100 \text{ н}$ , угол  $\alpha_1 = 90^\circ$ .



К задаче 230.



К задаче 231.



К задаче 232.

ного механизма от нагрузки, приложенной к днищу поршня  $3$ , и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ , диаметр цилиндра  $d = 100 \text{ мм}$ , давление газа в цилиндре  $p = 20 \text{ нсм}^{-2}$ .

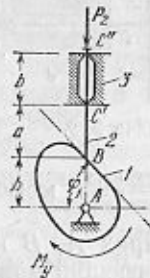
232. Определить реакции в кинематических парах  $A, B, C$  и  $D$  кривошипно-ползунного механизма и уравновешивающий момент



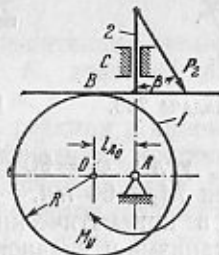
$M_y$ , приложенной к звену  $AB$ , от силы  $P_3$ , приложенной горизонтально к точке  $K$  звена  $3$ , если  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 200$  мм,  $h = 58$  мм,  $\varphi_1 = 90^\circ$  и сила  $P_3 = 100$  н.

233. Определить реакции в кинематических парах  $A$ ,  $B$  и точках  $C'$  и  $C''$  кулачкового механизма и необходимый уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к кулачку, от нагрузки  $P_2$ , приложенной к толкателю 2, если  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $h = a = b = 100$  мм и сила  $P_2 = 100$  н.

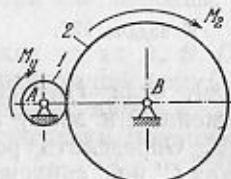
234. Определить реакции в кинематических парах  $A$ ,  $B$  и  $C$  кулачкового механизма и уравнивающий момент  $M_y$  от нагрузки  $P_2$ , приложенной к толкателю 2 под углом  $\beta$ , если  $l_{AO} = 30$  мм и прямая  $AO$  горизонтальна, радиус диска кулачка  $R = 60$  мм,  $\beta = 30^\circ$ , сила  $P_2 = 100$  н.



К задаче 233.



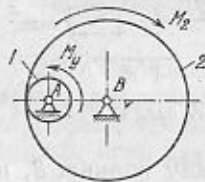
К задаче 234.



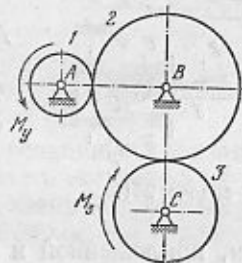
К задаче 235.

235. Определить реакции в кинематических парах  $A$  и  $B$  одноступенчатой зубчатой передачи, если к колесу 2 приложен момент  $M_2 = 5$  нм, а к колесу 1 — уравнивающий момент  $M_y$ . Модуль зацепления  $m = 10$  мм, числа зубьев колес  $z_1 = 20$  и  $z_2 = 80$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

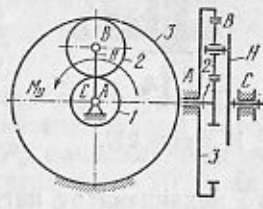
236. Определить реакции в кинематических парах  $A$  и  $B$  и уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к колесу 1 одноступенчатой трехзвенной зубчатой передачи, если к колесу 2 приложен



К задаче 236.



К задаче 237.



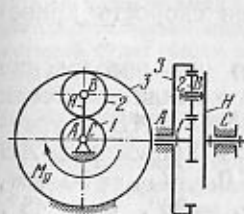
К задаче 238.

момент  $M_2 = 4$  нм. Модуль зацепления  $m = 10$  мм, числа зубьев колес равны  $z_1 = 30$  и  $z_2 = 120$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 22^\circ 30'$ .

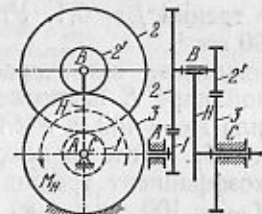
237. Определить реакции в кинематических парах  $A$ ,  $B$  и  $C$  и уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к колесу 1 двухступенчатой передачи с зубчатыми колесами, если к колесу 3 приложен момент  $M_3 = 3$  нм. Модуль зацепления  $m = 20$  мм, числа зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 50$  и  $z_3 = 40$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 15^\circ$ .

238. Определить реакцию в кинематической паре  $B$  и уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к колесу 1 планетарного одноступенчатого редуктора, если к водилу  $H$  приложен момент  $M_H = 18$  нм. Модуль зацепления равен  $m = 20$  мм, числа зубьев колес  $z_1 = 16$ ,  $z_2 = 20$  и  $z_3 = 56$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

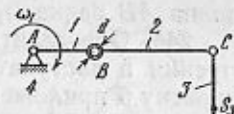
239. Определить реакцию в кинематической паре  $B$  и уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к водилу  $H$  планетарного одноступенчатого редуктора, если к колесу 1 приложен момент  $M_1 = 2$  нм. Модуль зацепления  $m = 20$  мм, числа зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 20$  и  $z_3 = 60$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .



К задаче 239.



К задаче 240.



К задаче 241.

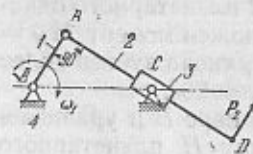
240. Определить реакцию в кинематической паре  $B$  и уравнивающий момент  $M_y$ , приложенный к колесу 1 планетарного одноступенчатого редуктора, если к водилу  $H$  приложен момент  $M_H = 5,6$  нм. Модуль зацепления колес 1 и 2  $m = 5$  мм, модуль зацепления колес 2' и 3  $m = 8$  мм, числа зубьев колес  $z_1 = 28$ ,  $z_2 = 84$ ,  $z_2' = 20$ ,  $z_3 = 50$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

241. Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в кинематической паре  $B$  (шарнире  $B$ ) шарнирного четырехзвенника в том его положении, в котором оси звеньев  $AB$  и  $BC$  горизонтальны, а ось коромысла  $CD$  вертикальна. Звено  $CD$  нагружено инерционной силой и инерционным моментом, а к звену  $AB$  приложен уравнивающий момент  $M_y$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 200$  мм,  $l_{CD} = 200$  мм, координата центра масс  $S_3$  звена  $CD$   $l_{CS_3} = 100$  мм, масса звена  $CD$   $m_3 = 40$  кг, его центральный момент инерции  $I_3 = 0,2$  кгм<sup>2</sup>. Диаметр цапфы шарнира  $B$   $d = 40$  мм, коэффициент трения  $f = 0,1$ . Угловая скорость кривошипа  $AB$  постоянна и равна  $\omega_1 = 50$  сек<sup>-1</sup>.

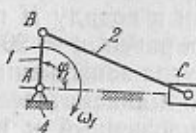
242. Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в поступательной паре  $C$  кривошипного механизма с качающимся ползуном, если к шатуну 2 приложена перпендикулярная сила  $P_2 = 500$  н, а к кривошипу  $AB$  — уравнивающий момент  $M_y$ . Угловая скорость  $\omega_1$  кривошипа  $AB$  равна  $\omega_1 = 40$  сек<sup>-1</sup>, угол

$ABC = 90^\circ$ ,  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{AC} = 200$  мм,  $l_{BC} = l_{CD}$ , коэффициент трения в поступательной паре  $f = 0,1$ .

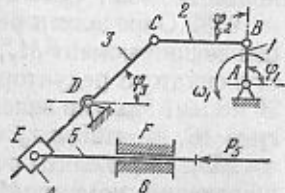
243. Определить мощность  $N$ , затрачиваемую на преодоление трения в поступательной паре  $C$  кривошипно-ползунного механизма, если к звену  $3$  приложена сила  $P_3 = 1000$  н, а к кривошипу  $AB$  — уравновешивающий



К задаче 242.



К задаче 243.



К задаче 244.

момент  $M_y$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 100$  мм,  $l_{BC} = 400$  мм, угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ , коэффициент трения  $f = 0,1$ . Угловая скорость кривошипа  $AB$  равна  $\omega_1 = 90$  сек<sup>-1</sup>.

244. Определить мощность, затрачиваемую на преодоление трения в поступательной паре  $E$  шестизвенного механизма, если к звену  $5$  приложена сила  $P_5 = 400$  н, а к кривошипу  $AB$  — уравновешивающий момент  $M_y$ . Угловая скорость кривошипа  $AB$  равна  $\omega_1 = 50$  сек<sup>-1</sup>, коэффициент трения  $f = 0,1$ ,  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 200$  мм,  $l_{CD} = l_{ED} = 100$  мм,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^\circ$ ,  $\varphi_3 = 45^\circ$ .

### § 13. Применение рычага Жуковского для определения уравновешивающей силы

1°. В тех случаях, когда требуется найти только уравновешивающий момент  $M_y$  или уравновешивающую силу  $P_y$ , для их нахождения проще воспользоваться *рычагом Жуковского*, не прибегая к последовательному силовому расчету всего механизма.

При равновесном состоянии механизма алгебраическая сумма мощностей внешних сил, приложенных к звеньям его, равна нулю.

Эту сумму можно представить в следующем виде:

$$N_y + \sum_k N_k = 0, \quad (13.1)$$

где  $N_y$  — мощность уравновешивающей силы,  $\sum_k N_k$  — алгебраическая сумма мощностей остальных внешних сил, приложенных к  $k$  звеньям механизма, причем  $k$  — число нагруженных звеньев механизма.

По Н. Е. Жуковскому, мощность любой силы можно найти следующим образом (рис. 64, а). Пусть к звену  $BC$  в точке  $K$  приложена сила  $P_K$ ; требуется найти мощность этой силы.

Строим повернутый план скоростей звена (рис. 64, б). Методом подобия находим на плане точку  $k$  — конец повернутого на  $90^\circ$  вектора скорости точки  $K$  (точки приложения силы  $P_K$ ).

Переносим на план скоростей параллельно самой себе в одноименную точку  $k$  плана силу  $P_K$ . Находим кратчайшее расстояние  $h_K$  от силы  $P_K$  до полюса плана  $p$ .

Находим момент силы  $P_K$  относительно полюса плана  $p$ :

$$M_K = P_K h_K. \quad (13.2)$$

Этот момент пропорционален мощности силы  $P_K$ , что можно доказать следующим образом. Проводим через точку  $K$  (рис. 64, а) прямую  $\tau\tau$ , перпендикулярную направлению вектора скорости точки  $K$  на повернутом плане скоростей. Очевидно, что прямая  $\tau\tau$  имеет направление касательной к траектории точки  $K$ .

Пишем выражение для мощности силы  $P_K$ :

$$N_K = P_K v_K \cos \alpha_K = P_K (\rho k) \cos \alpha_K \mu_v, \quad (13.3)$$

где  $(\rho k)$  — отрезок из плана скоростей,  $\alpha_K$  — угол между направлением скорости  $v_K$  точки  $K$  и направлением силы  $P_K$ ,  $\mu_v$  — масштаб плана скоростей.

Теперь замечаем, что угол  $\alpha_K$  равен углу между вектором  $(\rho k)$  на плане скоростей и плечом  $h_K$  (рис. 64, б); поэтому  $(\rho k) \cos \alpha_K = h_K$  и выражение (13.3) переписывается так:

$$N_K = P_K h_K \mu_v. \quad (13.4)$$

Правые части формул (13.2) и (13.4) отличаются только множителем  $\mu_v$ , который будет общим при выражении мощности любой силы, приложенной к механизму, по формуле (13.4) (поскольку используется один и тот же план скоростей).

Это позволяет формулу (13.1) записать в другой форме:

$$P_y h_y + \sum_k P_k h_k = 0, \quad (13.5)$$

откуда

$$P_y = \frac{\sum_k P_k h_k}{h_y}. \quad (13.6)$$

Следовательно, если задан механизм и все внешние силы, приложенные к нему, то для нахождения *уравновешивающей* силы можно поступать следующим образом:

- 1) построить повернутый план скоростей механизма;
- 2) найти на этом плане по правилу подобия точки приложения заданных внешних сил;
- 3) в одноименные точки плана перенести параллельно самим себе силы с механизма, включая и уравновешивающую силу;
- 4) принять повернутый план скоростей за рычаг с точкой опоры в полюсе  $p$ , написать уравнение равновесия этого рычага (формула (13.5)) и из него найти величину уравновешивающей силы  $P_y$  (формула (13.6)).

Необходимо указать, что если к звеньям механизма приложен внешний момент, то его следует представить в виде *пары* сил, которые и надо переносить в соответствующие точки повернутого плана скоростей. Рычагом Жуковского непосредственно находится *уравновешивающая сила*. *Уравновешивающий момент* можно найти умножением уравновешивающей силы на ее плечо относительно оси звена, к которому она приложена.

2°. Покажем на примерах, как пользоваться рычагом Жуковского для нахождения уравновешивающих сил или момента.

**Пример 1.** Для механизма шасси самолета (рис. 65, а) найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно к направлению  $AB$ , а также уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $1$ . Нагрузка звеньев механизма состоит из силы тяжести звена  $3$ , равной  $Q_3 = 100$  н и приложенной в его центре масс  $S_3$ , силы тяжести колеса, равной  $Q_k = 60$  н, и силы  $P = 300$  н (силы набегающего воздушного

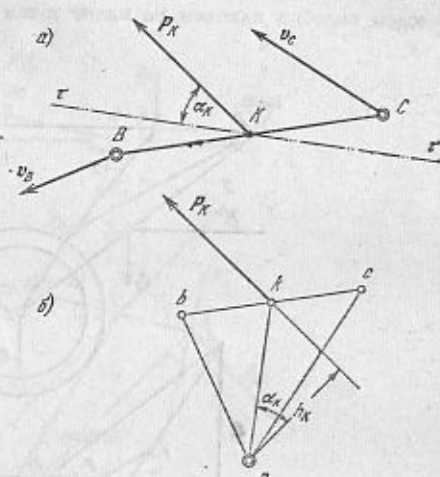


Рис. 64. Мощность силы пропорциональна моменту ее на повернутом плане скоростей относительно полюса плана.

потока, приложенной в точке  $S_3$ ). Рассмотрим случай, когда угол  $\varphi_1 = 180^\circ$ . Размеры звеньев:  $l_{AB} = 1,11$  м,  $l_{AD} = 1,45$  м,  $l_{BC} = 0,44$  м,  $l_{CD} = 0,70$  м,  $l_{ED} = 1,01$  м,  $l_{EC} = 0,33$  м,  $l_{DS_2} = 0,505$  м.

Решение. 1) Строим схему механизма (рис. 65, а) в масштабе  $\mu_l = 0,01$  м/мм.

2) Строим повернутый план скоростей (рис. 65, б) по уравнению

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

Методом подобия находим на плане точки  $e$  и  $s_3$ .

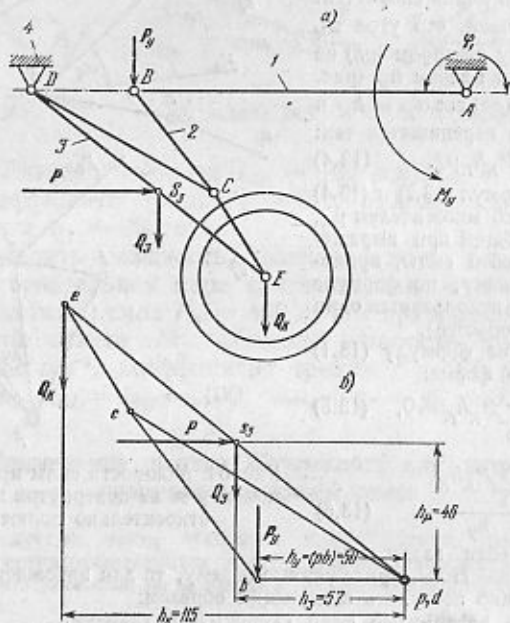


Рис. 65. Определение уравновешивающей силы посредством рычага Жуковского для механизма шасси самолета.

3) Со схемы механизма переносим на план параллельно самим себе силы в одноименные точки плана. Силу  $P_y$  полагаем направленной так, как это показано на схеме механизма. Если направление ее предположено неверно, то ее значение получится со знаком минус.

4) На плане скоростей (рис. 65, б) находим плечи сил, перенесенных на план относительно полюса  $p$ .

5) Составляем уравнение моментов этих сил относительно полюса  $p$ :

$$Q_K h_K + Q_3 h_3 - P h_p + P_y (pb) = 0 \quad (\text{так как } h_y = (pb),$$

из него находим величину уравновешивающей силы:

$$P_y = \frac{-Q_K h_K - Q_3 h_3 + P h_p}{(pb)} = \frac{-60 \cdot 115 - 100 \cdot 57 + 300 \cdot 46}{50} = 24 \text{ н.}$$

Искомый уравновешивающий момент  $M_y$  будет равен

$$M_y = P_y \cdot l_{AB} = 24 \cdot 1,11 = 26,6 \text{ н.м.}$$

Пример 2. Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 66, а) найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно к направлению  $AB$ , а также уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену 1. Рассмотрим случай, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Нагрузка звеньев: к звену 3 приложена сила  $P_3 = 100$  н, к звену 2 приложены сила  $P_2 = 50$  н, направленная под углом  $\alpha_2 = 60^\circ$  к линии  $BC$ , и момент  $M_2 = 3,0$  н.м. Размеры звеньев  $l_{AB} = 50$  мм,  $l_{BC} = 150$  мм,  $l_{BS_2} = 50$  мм.

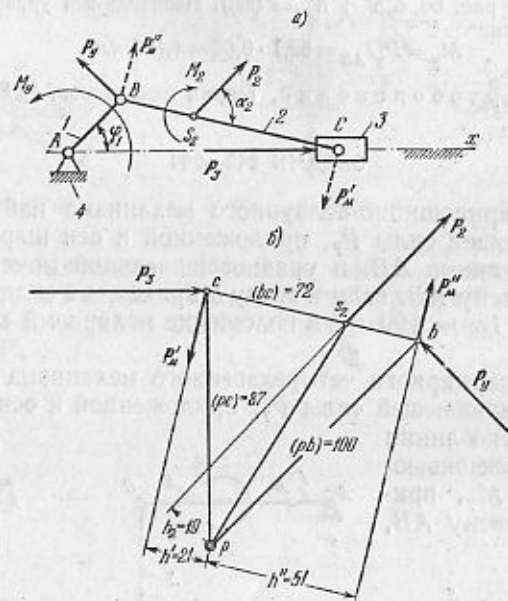


Рис. 66. Определение уравновешивающей силы посредством рычага Жуковского для кривошипно-ползунного механизма.

Решение. 1) Строим схему механизма (рис. 66, а) в масштабе  $\mu_l = 0,002$  м/мм.

2) Строим повернутый план скоростей (рис. 66, б) по уравнению

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

По правилу подобия находим на плане точку  $s_2$  приложения силы  $P_2$ .

3) Со схемы механизма переносим на план скоростей параллельно самим себе силы в одноименные точки плана. Предварительно момент  $M_2$  представляем в виде пары сил  $P'_2$  и  $P''_2$ , приложенных в точках  $B$  и  $C$ , с плечом пары, равным  $l_{BC}$ ; модуль этих сил будет равен

$$P_2 = \frac{M_2}{l_{BC}} = \frac{3}{0,150} = 20 \text{ н.}$$

4) На плане скоростей (рис. 66, б) находим плечи сил, перенесенных на него, относительно полюса  $p$ .



5) Составляем уравнение моментов сил, перенесенных на план скоростей, относительно его полюса  $p$ :

$$P_y(pb) + P_M'h' + P_M'h'' - P_2h_2 - P_3(pc) = 0 \quad (\text{так как } h_y = (pb) \text{ и } h_3 = (pc)),$$

отсюда находим величину уравновешивающей силы:

$$P_y = \frac{P_2h_2 + P_3(pc) - P_M(bc)}{(pb)} = \frac{50 \cdot 19 + 100 \cdot 87 - 20 \cdot 72}{100} = 82,1 \text{ н}$$

(так как согласно рис. 66, б  $h' + h'' = (bc)$ ). Необходимый уравновешивающий момент будет равен

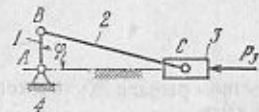
$$M_y = P_y l_{AB} = 82,1 \cdot 0,05 = 4,105 \text{ нм.}$$

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 84 и 85.)

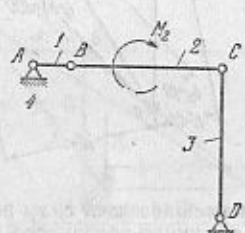
### ЗАДАЧИ 245—250

245. Для кривошипно-ползунного механизма найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ , и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , если к звену 3 приложена сила  $P_3 = 100 \text{ н}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$  и положение механизма задано углом  $\varphi_1 = 90^\circ$ .

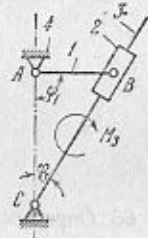
246. Для шарнирного четырехзвенного механизма найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ , и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ ,



К задаче 245.



К задаче 246.



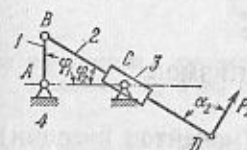
К задаче 247.

если к звену 2 приложен момент  $M_2 = 2,0 \text{ нм}$ , линии  $AB$  и  $BC$  лежат на одной горизонтали, а линия  $CD$  расположена вертикально,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ мм}$ .

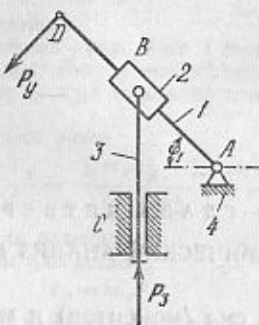
247. Для кулисного механизма Витворта найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ , и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , если к звену 3 (кулисе) приложен момент  $M_3 = 4 \text{ нм}$ , углы равны  $\varphi_1 = 90^\circ$ ,  $\varphi_3 = 30^\circ$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ .

248. Для кривошипного механизма с качающимся ползуном найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ , и уравновешивающий момент  $M_y$ , приложенный к звену  $AB$ , если в точке  $D$  звена 2 приложена сила  $P_2 = 20 \text{ н}$ , перпендикулярная линии  $BD$ , угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{DC} = 200 \text{ мм}$ .

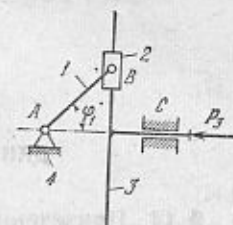
249. Для тангенсного механизма найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной в точке  $D$  звена 1 перпендикулярно линии  $AD$ , если к звену 3 приложена сила  $P_3 = 10 \text{ н}$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $l_{AB} = l_{BD}$ .



К задаче 248.



К задаче 249.



К задаче 250.

250. Для синусного механизма найти величину уравновешивающей силы  $P_y$ , приложенной к оси шарнира  $B$  перпендикулярно линии  $AB$ , если к звену 3 приложена сила  $P_3 = 100 \text{ н}$ , а угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

§ 14. Приведение сил (моментов) и масс (моментов инерции) в механизмах

1°. В динамике механизмов и машин широкое применение находит метод приведения сил и масс для решения задач об определении закона движения механизма, находящегося под действием приложенных к нему сил, с учетом масс звеньев.

Этот метод сводит динамическую задачу о движении всей системы подвижных звеньев механизма к динамической задаче о движении одного его звена, которое называется *звеном приведения* сил и масс, или одной точки этого звена, называемой *точкой приведения* сил и масс.

За звено приведения удобно выбирать то звено, которое совершает вращательное движение относительно стойки. Обычно за такое звено выбирают ведущее звено, т. е. звено по обобщенной координате которого проводится исследование движения механизма.

2°. *Приведенной силой* или *приведенным моментом* называют условные силу или момент (пары сил), которые, будучи приложены к звену приведения, развивают мощность  $N_{\Pi}$ , равную сумме мощностей  $\Sigma N_k$ , развиваемых приводимыми силами и моментами.

Величина приведенной силы, направленной по скорости точки приведения, равна

$$P_{\Pi} = \frac{\Sigma N_k}{v_{\Pi}} = \frac{\Sigma P_K v_K \cos \alpha_K + \Sigma M_k \omega_k}{v_{\Pi}}, \quad (14.1)$$

где  $P_K$  — величина приводимой силы, приложенной к точке  $K$  механизма,  $v_K$  — величина скорости точки  $K$ ,  $\alpha_K$  — угол между векторами  $P_K$  и  $v_K$ ,  $M_k$  — момент, приложенный к  $k$ -му звену,  $\omega_k$  — угловая скорость  $k$ -го звена,  $v_{\Pi}$  — скорость точки приведения.

Приведенный момент равен

$$M_{\Pi} = \frac{\Sigma N_k}{\omega_{\Pi}} = \frac{\Sigma P_K \cdot v_K \cos \alpha_K + \Sigma M_k \omega_k}{\omega_{\Pi}}, \quad (14.2)$$

где  $\omega_{\Pi}$  — угловая скорость звена приведения.

Приведенная сила и приведенный момент связаны очевидным равенством:

$$M_{\Pi} = P_{\Pi} \cdot l, \quad (14.3)$$

где  $l$  — расстояние от точки приведения силы до оси вращения звена приведения.

3°. *Приведенной массой* называется такая условная масса, сосредоточенная в точке приведения, кинетическая энергия  $T_{\Pi}$  которой равняется сумме  $\Sigma T_k$  кинетических энергий тех звеньев, массы которых приводятся к этой точке.

Согласно этому приведенная масса равна

$$m_{\Pi} = \frac{\Sigma m_k v_k^2 + \Sigma I_k \omega_k^2}{v_{\Pi}^2}, \quad (14.4)$$

где  $v_{\Pi}$  — скорость точки приведения.

В случае, когда массы звеньев приводятся к звену, совершающему вращательное движение относительно стойки, целесообразно пользоваться понятием приведенного момента инерции  $I_{\Pi}$  этих масс относительно оси вращения звена приведения.

Приведенный момент инерции равен

$$I_{\Pi} = \frac{2 \Sigma T_k}{\omega_{\Pi}^2} = \frac{\Sigma m_k v_k^2 + \Sigma I_k \omega_k^2}{\omega_{\Pi}^2}, \quad (14.5)$$

где  $\omega_{\Pi}$  — угловая скорость звена приведения.

Величины  $I_{\Pi}$  и  $m_{\Pi}$  связаны равенством

$$I_{\Pi} = m_{\Pi} l^2, \quad (14.6)$$

где  $l$  — расстояние между точкой приведения и осью вращения звена приведения.

4°. Из формул (14.1), (14.2), (14.4) и (14.5) следует, что приведенная сила или приведенный момент сил зависят от отношения скоростей ведомых звеньев к скорости звена приведения, приведенная масса или приведенный момент инерции зависят от отношения квадратов этих же скоростей.

Но, как известно, отношения скоростей или передаточные отношения конкретного механизма зависят только от его положения, т. е. от обобщенной координаты звена приведения. Поэтому приведенная сила или приведенный момент и приведенная масса или приведенный момент инерции зависят от положения звена приведения, т. е. они являются функциями обобщенной координаты.

5°. **Примеры на приведение сил и масс.**

**Пример 1.** Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 67, а) найти приведенную к оси шарнира  $B$  силу  $P_{\Pi}$ , перпендикулярную линии  $AB$ , от силы  $P_3 = 1000$  н, приложенной к звену 3 (поршню), а также приведенную к той же точке массу  $m_{\Pi}$  от масс всех звеньев механизма. Расчет провести для положения звена приведения, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Размеры звеньев и положения центров масс их:  $l_{AB} = 65$  мм,  $l_{BC} = 320$  мм, координата  $l_{BS_2}$  центра масс звена 2 равна  $l_{BS_2} = 60$  мм, центр масс звена 1 лежит на оси шарнира  $A$ . Масса звена 2  $m_2 = 0,4$  кг, момент инерции звена 2 относительно оси, проходящей через его центр масс, равен  $I_2 = 6 \cdot 10^{-3}$  кгм<sup>2</sup>, масса звена 3 равна  $m_3 = 0,5$  кг, момент инерции звена 1 относительно оси, проходящей через центр масс,  $I_1 = 12 \cdot 10^{-3}$  кгм<sup>2</sup>.

**Решение.** 1) Строим план положения механизма (рис. 67, а) в масштабе  $\mu_l = 0,004$  м/мм.

2) Строим план скоростей механизма (рис. 67, б) по уравнению

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

3) Приведенную силу  $P_{\Pi}$  определяем по формуле (14.1):

$$P_{\Pi} = \frac{N_3}{v_B} = \frac{P_3 \cdot v_C}{v_B} = P_3 \frac{(pc)}{(pb)} = 1000 \frac{40}{50} = 800 \text{ н,}$$

где  $(pc) = 40$  мм и  $(pb) = 50$  мм — отрезки из плана скоростей.

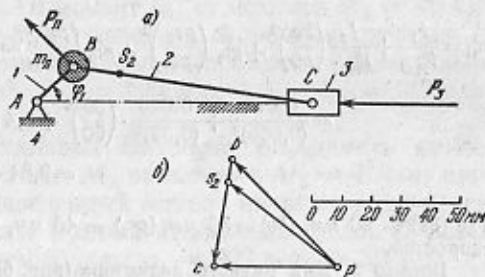


Рис. 67. Приведение сил и масс для кривошипно-ползунного механизма.

4) Приведенную массу  $m_{II}$  определяем по формуле (14.4):

$$m_{II} = \frac{2(T_1 + T_2 + T_3)}{v_B^2},$$

где  $T_1, T_2, T_3$  — кинетические энергии звеньев 1, 2 и 3. Пишем выражения этих энергий:

$$T_1 = \frac{I_1 \omega_1^2}{2} = \frac{I_1 v_B^2}{2l_{AB}^2},$$

$$T_2 = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} + \frac{m_2 v_C^2}{2} = \frac{I_2 v_{CB}^2}{2l_{BC}^2} + \frac{m_2 v_C^2}{2},$$

$$T_3 = \frac{m_3 v_C^2}{2}.$$

В значениях  $T_1$  и  $T_2$  угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  выражены через соответствующие линейные скорости  $v_B$  и  $v_{CB}$ , т. е.  $\omega_1 = \frac{v_B}{l_{AB}}$ ,  $\omega_2 = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$ . Подставляя в формулу (14.4) значения кинетических энергий  $T_1, T_2$  и  $T_3$ , вычисленные для каждого звена, и заменяя величины скоростей соответствующими отрезками из плана скоростей, окончательно получим

$$m_{II} = \frac{I_1}{l_{AB}^2} + \frac{I_2}{l_{BC}^2} \left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + m_3 \left(\frac{pc}{pb}\right)^2 =$$

$$= \frac{0,012}{(0,065)^2} + \frac{0,006}{(0,32)^2} \cdot \left(\frac{36}{50}\right)^2 + 0,4 \left(\frac{46}{50}\right)^2 + 0,5 \left(\frac{40}{50}\right)^2 =$$

$$= 2,84 + 0,03 + 0,339 + 0,32 = 3,529 \text{ кгм}^2,$$

где  $(pb) = 50 \text{ мм}$ ,  $(bc) = 36 \text{ мм}$ ,  $(ps_2) = 46 \text{ мм}$ ,  $(pc) = 40 \text{ мм}$  — отрезки из плана скоростей.

**Пример 2.** Для рядного редуктора (рис. 68) найти приведенный к валу  $O_1$  колеса 1 момент  $M_{II}$  и приведенный к тому же валу момент инерции  $I_{II}$  от массы колеса 3, если к колесу 3 приложен момент  $M_3 = 4 \text{ нм}$ , а момент инерции колеса 3 относительно его оси вращения  $I_3 = 0,04 \text{ кгм}^2$ ; числа зубьев колес  $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 20$  и  $z_3 = 60$ .

**Решение.** 1) Из формулы (14.3) определим приведенный момент  $M_{II}$ :

$$M_{II} = M_3 \frac{\omega_3}{\omega_1} = M_1 i_{31} = M_3 \frac{z_1}{z_3} = 4 \frac{30}{60} = 2 \text{ нм}.$$

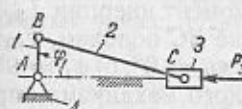
Мощность приведенного момента равна численно и по знаку мощности приводимого момента. Здесь момент  $M_{II}$  имеет тот же знак, что и момент  $M_3$ , так как знак  $i_{31}$  положителен.

2) Найдем приведенный момент инерции  $I_{II}$ . Он согласно равенству (14.5) имеет вид

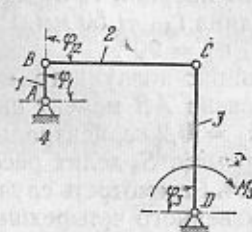
$$I_{II} = I_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 = I_3 i_{31}^2 = 0,04 \left(\frac{30}{60}\right)^2 = 0,01 \text{ кгм}^2.$$

(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 83, 87.)

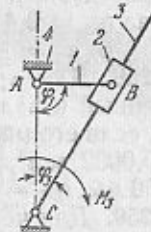
251. Для кривошипно-ползунного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_{II}$  от силы  $P_3 = 1000 \text{ н}$ , приложенной к ползуну 3, и приведенный к тому же валу момент инерции  $I_{II}$  от массы ползуна 3, если масса ползуна  $m_3 = 4 \text{ кг}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 90^\circ$ .



К задачам 251 и 252.



К задаче 253.



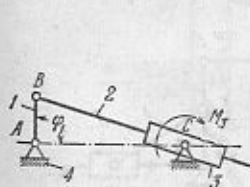
К задаче 254.

252. Сохраняя условия задачи 251, определить приведенный момент  $M_{II}$  и приведенный момент инерции  $I_{II}$  в том положении механизма, когда  $\varphi_1 = 0$ .

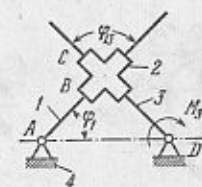
253. Для четырехзвенного шарнирного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_{II}$  от момента  $M_3 = 40 \text{ нм}$ , приложенного к коромыслу 3, и приведенный момент инерции  $I_{II}$  от массы коромысла, если момент инерции коромысла относительно оси  $D$  равен  $I_D = 0,016 \text{ кгм}^2$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 400 \text{ мм}$ . Углы  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 90^\circ$ .

254. Для кулисного механизма Витворта определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_{II}$  от момента  $M_3 = 10 \text{ нм}$ , приложенного к кулисе 3, и приведенный момент инерции  $I_{II}$  от массы кулисы, если момент инерции кулисы относительно оси  $C$  равен  $I_C = 0,016 \text{ кгм}^2$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$  и углы  $\varphi_1 = 90^\circ$  и  $\varphi_3 = 30^\circ$ .

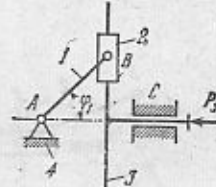
255. Для кривошипного механизма с качающимся ползунком определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_{II}$  от момента  $M_3 = 4 \text{ нм}$ , приложенного к ползуну 3, и приведенный момент инерции  $I_{II}$  от масс ползуна 3, если его момент инерции относительно оси  $C$  равен  $I_C = 0,004 \text{ кгм}^2$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{AC} = 300 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 180^\circ$ .



К задаче 255.



К задаче 256.



К задаче 257.

256. Для механизма муфты Ольдгейма определить приведенный к валу  $A$  звена 1 момент  $M_{II}$  от момента  $M_3 = 5 \text{ нм}$ , приложенного к кулисе 3, и приведенный момент инерции  $I_{II}$  от массы кулисы 3,

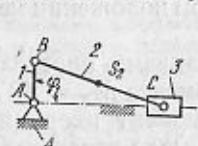


если ее момент инерции относительно оси  $D$  равен  $I_D = 0,001 \text{ кгм}^2$ ,  $l_{AD} = 100 \text{ мм}$ ,  $\varphi_{13} = 90^\circ$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

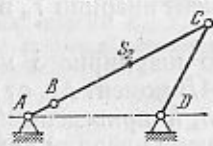
257. Для синусного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_n$  от силы  $P_3 = 20 \text{ н}$ , приложенной к звену  $3$ , и приведенный момент инерции  $I_n$  от массы звена  $3$ , если эта масса равна  $m_3 = 0,4 \text{ кг}$ , длина  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ . Рассмотреть случаи: а)  $\varphi_1 = 0^\circ$ , б)  $\varphi_1 = 45^\circ$ , в)  $\varphi_1 = 90^\circ$ .

258. Для кривошипно-ползунного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент инерции  $I_n$  от массы шатуна  $BC$ , если его масса  $m_2 = 0,2 \text{ кг}$ , центральный момент инерции  $I_{S_2} = 0,0032 \text{ кгм}^2$ , центр масс  $S_2$  делит расстояние  $BC$  пополам,  $l_{AB} = 50 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$ . Рассмотреть случаи: а)  $\varphi_1 = 0^\circ$ , б)  $\varphi_1 = 90^\circ$ .

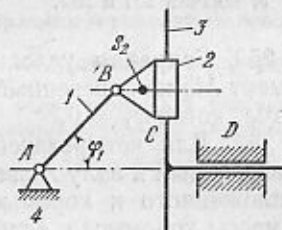
259. Для четырехзвенного четырехшарнирного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент инерции  $I_n$  массы шатуна  $BC$ , если его масса  $m_2 = 1,0 \text{ кг}$ , центральный момент инерции  $I_{S_2} = 0,4 \text{ кгм}^2$ , центр масс  $S_2$  делит рас-



К задаче 258.



К задаче 259.

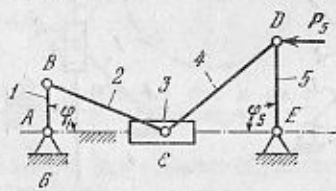


К задаче 260.

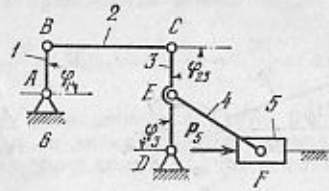
стояние  $BC$  пополам,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 2000 \text{ мм}$ ,  $l_{CD} = 200 \text{ мм}$ ,  $l_{AD} = 2000 \text{ мм}$ . Рассмотреть случай, когда оси звеньев  $AB$  и  $BC$  составляют одну прямую  $ABC$ .

260. Для синусного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент инерции  $I_n$  массы ползуна  $2$ , если его масса  $m_2 = 0,1 \text{ кг}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BS_2} = 25 \text{ мм}$ , где точка  $S_2$  — центр масс ползуна  $2$ , угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ .

261. Для шестизвенного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_n$  от силы  $P_5 = 100 \text{ н}$ , направленной горизонтально и приложенной к точке  $D$ , и приведенную к точке  $B$  массу  $m_n$  от масс звена  $5$  и ползуна  $3$ , если момент инерции звена



К задаче 261.

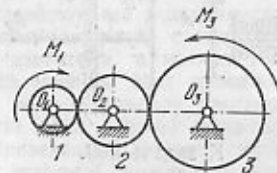


К задаче 262.

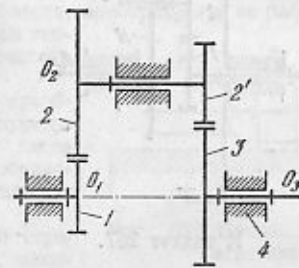
3 относительно оси  $E$  равен  $I_E = 0,1 \text{ кгм}^2$ , масса ползуна  $3$   $m_3 = 5 \text{ кг}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = 400 \text{ мм}$ ,  $l_{CD} = 400 \text{ мм}$ ,  $l_{DE} = 200 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_5 = 90^\circ$ .

262. Для шестизвенного механизма определить приведенный к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_n$  от силы  $P_5 = 100 \text{ н}$ , приложенной к ползуну  $5$ , и приведенный момент инерции  $I_n$  от массы ползуна  $m_5 = 2 \text{ кг}$ , если  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = l_{EF} = 200 \text{ мм}$ ,  $l_{ED} = 100 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = \varphi_{23} = \varphi_3 = 90^\circ$ .

263. Для рядного редуктора определить приведенный к валу  $O_1$  колеса  $1$  момент  $M_n$  от моментов  $M_1 = 8 \text{ нм}$  и  $M_3 = 10 \text{ нм}$ , приложенных к колесам  $1$  и  $3$ , и приведенный момент инерции  $I_n$  от масс зубчатых колес, если их моменты



К задаче 263.



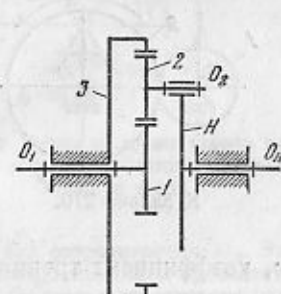
К задаче 264.

инерции равны  $I_1 = 0,01 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2 = 0,0225 \text{ кгм}^2$ ,  $I_3 = 0,04 \text{ кгм}^2$  и числа зубьев колес равны  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $z_3 = 40$ .

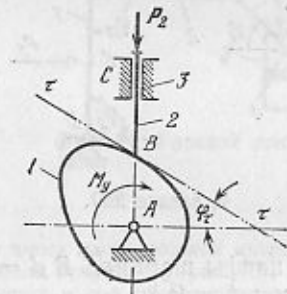
264. Для соосного редуктора определить приведенный к валу  $O_1$  колеса  $1$  момент  $M_n$  от момента  $M = 4 \text{ нм}$ , приложенного к валу  $O_3$  колеса  $3$ , если числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2' = 20$ ,  $z_2 = z_3 = 40$ .

265. Для одноступенчатого планетарного редуктора определить приведенный к валу  $O_1$  колеса  $1$  момент  $M_n$  от момента  $M_H = 4 \text{ нм}$ , приложенного к водилу  $H$ , если числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 20$ ,  $z_3 = 60$ .

266. Для кулачкового механизма найти приведенный к валу  $A$  кулачка момент  $M_n$  от силы  $P_2 = 10 \text{ н}$ , приложенной к толкателю



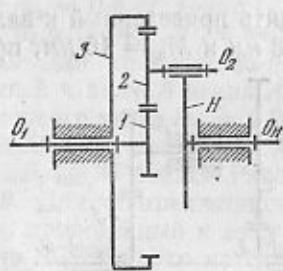
К задаче 265.



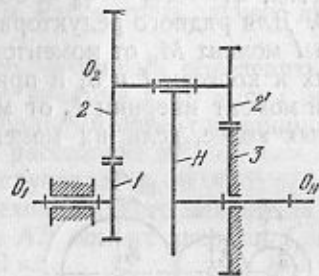
К задаче 266.

2, и приведенный к тому же валу момент инерции  $I_n$  массы толкателя  $m_2 = 0,3 \text{ кг}$ , если  $l_{AB} = 0,06 \text{ м}$  и угол наклона касательной  $\tau$  к профилю в точке касания его с острием толкателя  $\varphi_\tau = 30^\circ$ .

267. Для планетарного редуктора определить приведенный к валу  $O_1$  колеса 1 момент инерции  $I_H$  от масс всех звеньев, если центры масс звеньев лежат на осях их относительного вращения, моменты инерции звеньев равны  $I_1 = 0,001 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2 = 0,001 \text{ кгм}^2$ ,  $I_3 =$



К задаче 267.

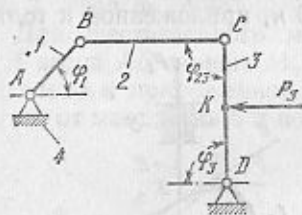


К задаче 268.

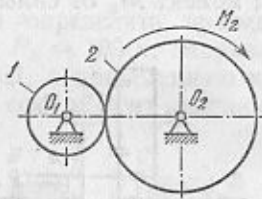
$= 0,016 \text{ кгм}^2$ , масса сателлита  $m_2 = 0,2 \text{ кг}$ , модуль зацепления  $m = 10 \text{ мм}$ , числа зубьев колес  $z_1 = z_2 = 20$ ,  $z_3 = 60$ .

268. Для планетарного редуктора определить приведенный к валу  $O_1$  колеса 1 момент инерции  $I_H$  масс всех звеньев, если центры масс звеньев лежат на осях их относительного вращения и  $I_1 = 0,001 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2 = 0,004 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2' = 0,001 \text{ кгм}^2$ ,  $I_H = 0,018 \text{ кгм}^2$ , массы сателлитов  $m_2 = 0,4 \text{ кг}$ ,  $m_2' = 0,05 \text{ кг}$ , модуль зацепления  $m = 10 \text{ мм}$  и числа зубьев колес  $z_1 = z_2' = 20$ ,  $z_2 = z_3 = 40$ .

269. Для четырехзвенного четырехшарнирного механизма найти приведенные к валу  $A$  звена  $AB$  момент  $M_F$  от трения в шарнире  $B$ , если в середине звена 3 приложена горизонтальная сила  $P_3 = 400 \text{ н}$ ,  $l_{AB} = 100 \text{ мм}$ ,  $l_{BC} = l_{CD} = 200 \text{ мм}$ ,  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\varphi_{23} = \varphi_3 = 90^\circ$ ,



К задаче 269.



К задаче 270.

диаметр цапфы шарнира  $B$   $d = 40 \text{ мм}$ , коэффициент трения в шарнире равен  $f = 0,1$ .

270. К валу  $O_2$  зубчатого механизма приложен момент сопротивления  $M_2 = 9 \text{ нм}$ , коэффициент полезного действия механизма  $\eta = 0,9$ . Определить приведенный к валу  $O_1$  колеса 1 момент  $M_F$  от сил трения во всех кинематических парах механизма, если числа зубьев колес равны  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 40$ .

## § 15. Определение закона движения звена привода машинного агрегата

1°. *Машинным агрегатом* (рис. 69) называется устройство, состоящее из машины-двигателя 1, рабочей машины 2 и передаточного механизма 3 (редуктора, коробки скоростей, вариатора).

*Машины-двигателем* называется такая машина, в которой тот или иной вид энергии преобразуется в механическую работу на ее выходном звене (валу).

*Рабочей машиной* называется такая машина, в которой механическая работа, передающаяся на ее входное звено от двигателя, преобразуется ее рабочим органом в работу, необходимую для совершения технологического процесса, на который рассчитана машина.

*Передаточный механизм* служит для преобразования момента, снимаемого с выходного звена двигателя, в момент на входном звене рабочей машины (как правило, это преобразование идет в сторону увеличения момента на входном звене рабочей машины).

Приведенный момент (сила), который стремится ускорить движение ведущего звена, называется *движущим моментом*, а приведенный момент (сила), который стремится замедлить движение ведущего звена, называется *моментом сопротивления*.

2°. Первым шагом при решении задач о движении ведущего звена агрегата является *приведение сил и масс к этому звену*. К ведущему звену приводятся все силы, приложенные ко всем звеньям, и все массы звеньев механизмов, вошедших в состав машинного агрегата.

После приведения сил и масс к ведущему звену исследованию подлежит это звено, к которому оказываются приложенными момент движущих сил  $M_H$  и

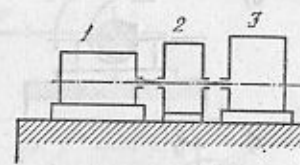


Рис. 69. Схема машинного агрегата.

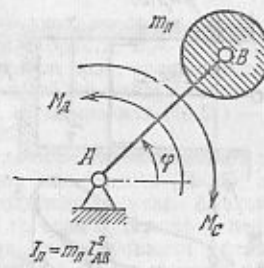


Рис. 70. Ведущее звено (звено привода) механизма после приведения сил и масс.

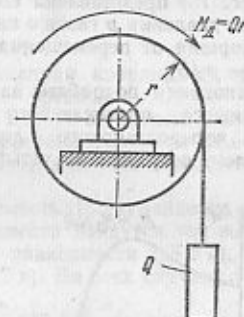


Рис. 71. Гиревой двигатель.

момент сил сопротивления  $M_C$ . Это звено имеет массу, момент инерции которой определяется значением приведенного момента инерции  $I_H$  (рис. 70).

3°. Приведенные моменты сил движущих и сил сопротивления зависят от механических характеристик машин, вошедших в агрегат. *Механической характеристикой* машины называется зависимость сил или моментов, приложенных к ее звеньям, от кинематических величин, характеризующих движение этих звеньев (перемещений, скоростей или ускорений).

Ниже рассматриваются механические характеристики некоторых двигателей и рабочих машин.

Наиболее простым двигателем будет *гировой* (рис. 71), механическая характеристика которого имеет вид

$$M_d = \text{const} = Qr,$$

где  $Q$  — сила тяжести гири.

У пружинного двигателя (рис. 72, а) механическая характеристика будет  $M_d = M_{d0} - q\varphi$  (рис. 72, б), где  $q$  — жесткость пружины, а  $\varphi$  — угол, на который она закручена.

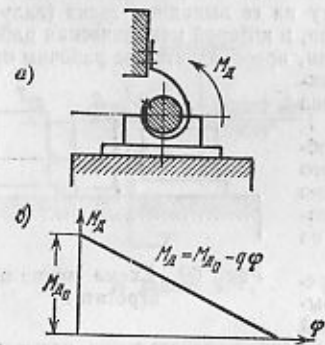


Рис. 72. Пружинный двигатель.

У электродвигателя постоянного тока характеристика имеет вид, показанный на рис. 73, т. е.  $M_d = M_d(\omega)$ , где  $M_d$  — момент на валу ротора, а  $\omega$  — угловая скорость ротора.

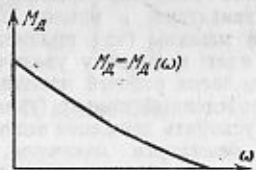


Рис. 73. Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока.

У электродвигателя переменного тока (асинхронного) механическая характеристика имеет вид, показанный на рис. 74, т. е.  $M_d = M_d(\omega)$ .

Механическая характеристика одноцилиндрового четырехтактного двигателя (рис. 75) представлена его индикаторной диаграммой, т. е. зависимостью удельного давления  $p$  газов в цилиндре на дно поршня от перемещения  $S$  поршня:  $p = p(S)$ .

Остановимся подробнее на описании процесса, протекающего в цилиндре четырехтактного двигателя внутреннего сгорания за четыре хода

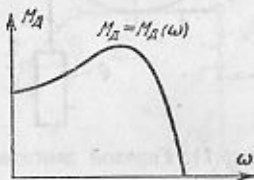


Рис. 74. Механическая характеристика электродвигателя переменного тока (асинхронного).

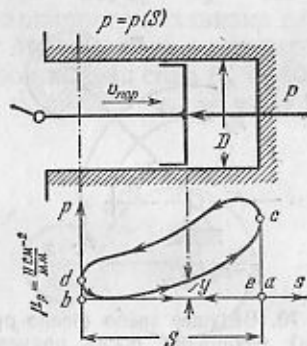


Рис. 75. Индикаторная диаграмма четырехтактного двигателя внутреннего сгорания.

поршня, основываясь на упрощенной индикаторной диаграмме (рис. 75). Первый такт (всасывание) протекает по прямой  $ab$ ; второй такт (сжатие) — по кривой  $bc$ ; третий такт (рабочий ход) — по кривой  $cd$ ; четвертый такт (выхлоп) — по кривой  $de$ . Сила  $P$ , приложенная к поршню, определяется через ординату  $y$  индикаторной диаграммы, взятую для рассматриваемого такта и положения поршня (на рис. 75 рассматривается такт сжатия).

Эта сила  $P$  равна

$$P = \rho \frac{\pi D^2}{4} = \mu \rho \frac{\pi D^2}{4}, \quad (15.1)$$

где  $\mu_p$  — масштаб диаграммы по оси ординат,  $D$  — диаметр цилиндра.

У центробежного вентилятора механическая характеристика (рис. 76) есть зависимость вида  $M_c = M_c(\omega)$ .

У строгального станка механическая характеристика (рис. 77) представляется равенством  $P_{рез} = P_{рез}(S)$ , где  $P_{рез}$  — сила резания, приложенная к резу,

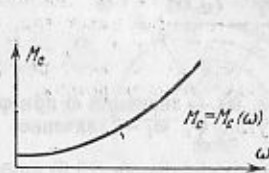


Рис. 76. Механическая характеристика центробежного вентилятора.

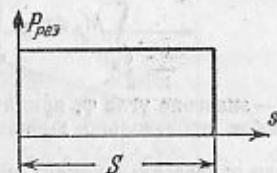


Рис. 77. Механическая характеристика строгального станка.

$S$  — перемещение реза, закрепленного на суппорте (предполагается, что скорость резания постоянна).

4°. Задачу о движении звена приведения можно считать решенной, если с помощью уравнений динамики будет найдена одна из следующих четырех зависимостей:

$$\varphi = \varphi(t), \quad (15.2a)$$

$$\omega = \omega(t), \quad (15.2b)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(t), \quad (15.2a)$$

$$\omega = \omega(\varphi), \quad (15.2r)$$

где  $\varphi$  — угол поворота звена приведения (обобщенная координата),  $\omega$  — его угловая скорость,  $\varepsilon$  — его угловое ускорение,  $t$  — время.

В самом деле, если известна зависимость (15.2a), то остальные зависимости (15.2b) и (15.2в) найдутся одно- и двукратным дифференцированием зависимости (15.2a), а зависимость (15.2r) — исключением параметра  $t$  из зависимостей (15.2a) и (15.2б).

Если определена зависимость (15.2б), то зависимость (15.2a) найдется интегрированием зависимости (15.2б), а остальные зависимости найдутся так же, как и в предыдущем случае. Аналогично определяется зависимости (15.2a), (15.2б) и (15.2r), если будет определена зависимость (15.2в). Во всех случаях постоянные при интегрировании должны быть известны.

Если же будет сначала найдена зависимость (15.2r), то для нахождения остальных зависимостей следует предварительно найти зависимость  $t = t(\varphi)$  путем интегрирования

$$t_k - t_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{1}{\omega} d\varphi; \quad (15.3)$$

интеграл (15.3) основан на том, что  $\omega = d\varphi/dt$ .

5°. При решении задач настоящего параграфа будем пользоваться двумя видами уравнений динамики машин:

1) Уравнением движения в форме моментов (в форме уравнения Лагранжа 2-го рода)

$$M_d - M_c = I_d \varepsilon + \frac{\omega^2 dI_d}{2 d\varphi}, \quad (15.4)$$



где  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$  — соответственно угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение звена приведения,  $M_d$  — приведенный момент движущих сил,  $M_c$  — приведенный момент сил сопротивления,  $I_{\Pi}$  — приведенный момент инерции механизма.

Если приведенный момент инерции  $I_{\Pi}$  постоянен, то уравнение (15.4) примет вид

$$M_d - M_c = I_{\Pi} \varepsilon. \quad (15.4a)$$

2) Уравнением движения в форме закона кинетической энергии. Имеем

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_d d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_c d\varphi = \frac{I_{\Pi i} \omega_i^2}{2} - \frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2}{2}, \quad (15.5)$$

где  $\varphi_0$  — значение угла  $\varphi$ , принятое за начальное,  $\omega_0$  — значение  $\omega$  при  $\varphi = \varphi_0$ ;  $\varphi_i$  — любое произвольно выбранное значение угла  $\varphi$ ,  $\omega_i$  — значение  $\omega$  при  $\varphi = \varphi_i$ .

Если приведенный момент инерции постоянен, то уравнение (15.5) примет вид

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_d d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_c d\varphi = \frac{I_{\Pi}}{2} (\omega_i^2 - \omega_0^2). \quad (15.5a)$$

Ниже будут использованы следующие обозначения:

$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_d d\varphi = A_d$  — работа движущих сил на заданном перемещении звена приведения, равно  $\Delta\varphi_{0i} = \varphi_i - \varphi_0$ ;

$\int_{\varphi_0}^{\varphi_i} M_c d\varphi = A_c$  — работа сил сопротивления на том же перемещении звена приведения;

$\frac{I_{\Pi i} \omega_i^2}{2} = T_i$  — кинетическая энергия, которой обладает механизм в  $i$ -м положении;

$\frac{I_{\Pi 0} \omega_0^2}{2} = T_0$  — кинетическая энергия, которой обладает механизм в начальном положении ( $\varphi = \varphi_0$ ).

В этих обозначениях уравнение (15.5) примет вид

$$A_d - A_c = T_i - T_0 = \Delta T_{0i}. \quad (15.6)$$

Разность работ движущих сил и сил сопротивления называют *избыточной работой* на данном перемещении звена приведения (или механизма). Она равна

$$A = A_d - A_c = \Delta T_{0i}. \quad (15.6)$$

Используя принятые обозначения, получаем из равенства (15.5) значение угловой скорости  $\omega_i$  звена приведения в  $i$ -м положении его в виде

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2A}{I_{\Pi i}} + \frac{I_{\Pi 0} \cdot \omega_0^2}{I_{\Pi i}}} = \sqrt{\frac{2T_i}{I_{\Pi i}}}. \quad (15.7)$$

Если приведенный момент инерции  $I_{\Pi}$  будет постоянен, то формула (15.7) примет вид

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2A}{I_{\Pi}} + \omega_0^2} = \sqrt{\frac{2T_i}{I_{\Pi}}}. \quad (15.7a)$$

Во всех задачах настоящего параграфа предполагаются известными или предположительно найденными следующие величины: приведенный момент движущих сил  $M_d$ , приведенный момент сил сопротивления  $M_c$ , приведенный момент инерции  $I_{\Pi}$ , также начальные значения угла  $\varphi_0$  и угловой скорости  $\omega_0$  звена приведения.

6°. Покажем решение задачи о движении звена приведения при заданных приведенном моменте движущих сил  $M_d$ , приведенном моменте сил сопротивления  $M_c$  и приведенном моменте инерции  $I_{\Pi}$  в виде функций угла  $\varphi$ .

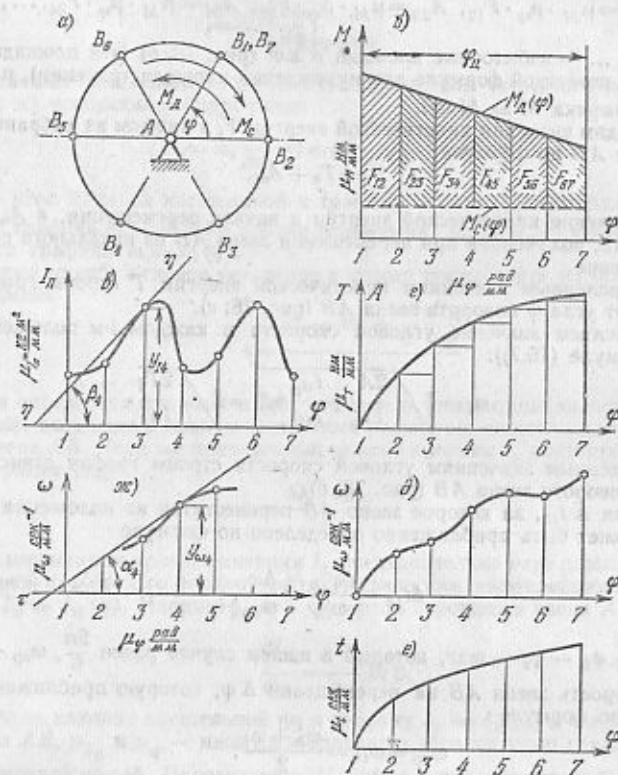


Рис. 78. К определению закона движения звена приведения при моментах движущих сил и сил сопротивления, а также приведенном моменте инерции, зависящих от угла поворота звена приведения.

Такая задача, например, возникает при исследовании механизма прибора, который приводится в движение пружиной, при условии, что сопротивлением является трение в кинематических парах механизма.

На рис. 78, а показано звено приведения АВ механизма. Это звено начинает движение из положения, когда точка В занимает положение В<sub>1</sub>. Кинематический цикл работы механизма равен одному обороту звена АВ. Требуется найти закон движения звена АВ в течение одного его оборота. Заданы графики моментов движущих сил  $M_d$  и сил сопротивления  $M_c$  в функции угла  $\varphi$  поворота звена АВ (рис. 78, б) и график приведенного момента инерции  $I_{\Pi}$  в функции того же угла (рис. 78, в).

Решение задачи ведем в такой последовательности:

1) Делим окружность, описываемую точкой  $B$ , на ряд равных частей (в нашем случае на шесть). На столько же частей делим абсциссу графика моментов (рис. 78, б), размечаем избыточные площади  $F_{12}, F_{23}, F_{34}, \dots$  и подсчитываем их площади в  $\text{мм}^2$ . Эти площади пропорциональны избыточным работам  $A$  на соответствующих им перемещениях звена  $AB$ .

Вычисляем значения избыточных работ на каждом из таких перемещений звена  $AB$ :

$$A_{12} = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot F_{12}, \quad A_{23} = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot F_{23}, \quad A_{34} = \mu_M \cdot \mu_\varphi \cdot F_{34}, \dots$$

где  $F_{12}, F_{23}, \dots$  — избыточные площади в  $\text{мм}^2$  (рис. 78, б) (эти площади подсчитываются по известной формуле для нахождения площади трапеции),  $\mu_M$  и  $\mu_\varphi$  — масштабы графика  $M = M(\varphi)$ .

2) Находим значения кинетической энергии  $T_i$  в каждом из выбранных положений звена  $AB$  по формуле

$$T_i = T_0 + A_{0i}, \quad (15.8)$$

где  $T_0$  — значение кинетической энергии в начале перемещения, а  $A_{0i}$  — избыточная работа, полученная при перемещении звена  $AB$  из начального положения в  $i$ -е положение.

По вычисленным значениям кинетической энергии  $T$  строим график зависимости ее от угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$  (рис. 78, в).

3) Вычисляем значение угловой скорости в каждом  $i$ -м положении звена  $AB$  (по формуле (15.7)):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2A}{I_{\Pi i}} + \frac{I_{\Pi 0}}{I_{\Pi i}} \omega_0^2} = \sqrt{\frac{2T_i}{I_{\Pi i}}}$$

По найденным значениям угловой скорости строим график зависимости ее от угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$  (рис. 78, д).

4) Время  $\Delta t_{ik}$ , за которое звено  $AB$  переместится из положения  $i$  в положение  $k$ , может быть приближенно определено по формуле

$$\Delta t_{ik} = \frac{\Delta \varphi_{ik}}{\omega_{ik}} = \frac{\Delta \varphi}{\omega_{cp}}, \quad (15.9)$$

где  $\Delta \varphi_{ik} = \varphi_k - \varphi_i$  — шаг, который в нашем случае равен  $\frac{2\pi}{6}$ ,  $\omega_{cp}$  — средняя угловая скорость звена  $AB$  на перемещении  $\Delta \varphi$ , которую приближенно можно вычислить по формуле

$$\omega_{cp} = \omega_{ik} = \frac{\omega_k + \omega_i}{2}$$

Для определения времени, которое требуется для перемещения звена  $AB$  из начального положения в положение  $k$ , следует последовательно применять формулу

$$t_k = t_i + \Delta t_{ik}, \quad (15.10)$$

где  $\Delta t_{ik}$  — время, за которое звено  $AB$  перемещается из  $i$ -го положения в  $k$ -е положение.

По найденным значениям времени  $t$  строим график его зависимости от угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$  (рис. 78, е).

5) Угловое ускорение  $\epsilon$  звена  $AB$  может быть найдено разными способами. Приведем некоторые из них.

**Первый способ.** Из графиков  $\omega = \omega(\varphi)$  и  $t = t(\varphi)$  исключаем параметр  $\varphi$ . С этой целью чертим систему прямоугольных координат, вдоль оси ординат которой откладываем значения  $\omega_i$ , а вдоль оси абсцисс — значения  $t_i$ , которые соответствуют углам  $\varphi_i$ . Таким образом получаем график зависимости  $\omega = \omega(t)$ .

Графическим дифференцированием теперь можно найти значение углового ускорения  $\epsilon$  для любого  $i$ -го положения ведущего звена  $AB$  по формуле

$$\epsilon_i = \frac{d\omega}{dt}(t) = \frac{\mu_\omega}{\mu_t} \operatorname{tg} \gamma_i,$$

где  $\gamma_i$  — угол наклона касательной к графику  $\omega = \omega(t)$  при  $\varphi = \varphi_i$ , а  $\mu_\omega$  и  $\mu_t$  — масштабы по осям ординат и абсцисс графика  $\omega = \omega(t)$ .

**Второй способ.** Ускорение  $\epsilon$  определяется путем последовательного применения формулы

$$\epsilon_i = \omega_i \left[ \frac{d\omega}{d\varphi} \right]_{\varphi = \varphi_i} \quad (15.11)$$

для различных положений звена  $AB$ . Например, для четвертого положения его (рис. 78, ж) ускорение  $\epsilon$  будет равно

$$\epsilon_4 = \omega_4 \frac{d\omega}{d\varphi}(4) = \mu_\omega \cdot y_{\omega_4} \cdot \frac{\mu_\omega}{\mu_\varphi} \operatorname{tg} \alpha_4, \quad (15.12)$$

где  $\alpha_4$  — угол наклона касательной к графику  $\omega = \omega(\varphi)$  в положении 4,  $y_{\omega_4}$  — ордината графика  $\omega = \omega(\varphi)$  в том же положении,  $\mu_\omega$  и  $\mu_\varphi$  — масштабы ординат и абсцисс графика  $\omega = \omega(\varphi)$ .

**Третий способ.** Угловое ускорение  $\epsilon$  можно также найти на основе формулы (15.4). Имеем

$$\epsilon = \frac{M_x - M_c - \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi}}{I_{\Pi}}$$

Если определена функция  $\omega(\varphi)$ , то все величины, кроме значения производной  $dI_{\Pi}/d\varphi$ , входящие в правую часть этого равенства, известны для любого положения звена  $AB$ . Если же приведенный момент инерции  $I_{\Pi}$  постоянен, то формула (15.12) примет вид

$$\epsilon = \frac{M_x - M_c}{I_{\Pi}}. \quad (15.12a)$$

При переменном моменте инерции  $I_{\Pi}$  предварительно надо разыскать значение производной  $dI_{\Pi}/d\varphi$ . Его можно найти графическим дифференцированием зависимости  $I_{\Pi} = I_{\Pi}(\varphi)$ . Например, при четвертом положении звена  $AB$  (рис. 78, з) находим

$$\frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} = \frac{\mu_{I_{\Pi}}}{\mu_\varphi} \operatorname{tg} \beta,$$

где  $\beta$  — угол наклона касательной  $\eta$  к графику  $I_{\Pi} = I_{\Pi}(\varphi)$  в четвертом положении звена  $AB$ ,  $\mu_{I_{\Pi}}$  и  $\mu_\varphi$  — масштабы ординат и абсцисс этого графика.

**Четвертый способ.** Производную  $dI_{\Pi}/d\varphi$  можно также определить, воспользовавшись рычагом Жуковского. Обратимся к уравнению (15.4). Первый член его правой части, взятый с обратным знаком:

$$-I_{\Pi} \epsilon = M_{\Pi \text{ нач}}, \quad (15.13)$$

представляет собой приведенный момент сил инерции масс звеньев механизма в его так называемом *начальном движении* (при котором звено приведения имеет угловое ускорение, но еще не приобрело угловую скорость). Второй же член правой части уравнения (15.4), взятый тоже с обратным знаком:

$$-\frac{\omega^2}{2} \frac{dI_{\Pi}}{d\varphi} = M_{\Pi \text{ ин}}, \quad (15.14)$$

представляет собой приведенный момент сил инерции масс звеньев механизма в его так называемом *перманентном движении* (при котором звено приведения движется равномерно).

Рассматриваемый способ основан на том, что приведенный инерционный момент  $M_{\text{ип}}$  можно определить и, следовательно, по нему найти искомую производную

$$\frac{dI_{\text{п}}}{d\varphi} = -\frac{2}{\omega^2} M_{\text{ип}}. \quad (15.15)$$

Величина ее не будет зависеть от квадрата угловой скорости звена приведения, так как в значение инерционного момента  $M_{\text{ип}}$  будут входить инерционные нагрузки от масс звеньев механизма, которые, в свою очередь, будут пропорциональны квадрату этой же скорости.

Последовательность нахождения производной  $dI_{\text{п}}/d\varphi$  с помощью рычага Жуковского следующая:

- 1) Вычерчивается схема механизма в требуемом положении.
- 2) Строятся повернутый план скоростей механизма и план ускорений в предположении, что звено приведения движется равномерно со скоростью, которая берется произвольно.
- 3) Определяется инерционная нагрузка каждого звена механизма.
- 4) Инерционная нагрузка, по известным правилам, переносится в повернутый план скоростей (рычаг Жуковского), и находится приведенная к выбранной точке на ведущем звене сила инерции  $P_{\text{ип}}$ , которая обычно направляется по скорости этой точки.
- 5) Приведенная сила инерции прикладывается к выбранной точке на звене приведения, и определяется ее момент относительно оси вращения этого звена:

$$M_{\text{ип}} = P_{\text{ип}} \cdot l_{AB}. \quad (15.16)$$

6) Находятся значение производной  $dI_{\text{п}}/d\varphi$  по формуле (15.15) подстановкой в нее полученного значения  $M_{\text{ип}}$  при выбранном ранее значении  $\omega$ .

7. Покажем решение задачи о движении звена приведения в случае, когда приведенные моменты движущих сил и сил сопротивления зависят от скорости этого звена, а приведенный момент инерции постояен.

Для этого случая применим уравнение (15.4), которое примет вид

$$M_x(\omega) - M_c(\omega) = I_{\text{п}} \frac{d\omega}{dt}, \quad (15.17)$$

откуда, после разделения переменных, имеем

$$dt = I_{\text{п}} \frac{d\omega}{M_x(\omega) - M_c(\omega)}; \quad (15.18)$$

интегрирование дает

$$t_k - t_i = \Delta t_{ik} = I_{\text{п}} \int_{\omega_i}^{\omega_k} \frac{d\omega}{M_x(\omega) - M_c(\omega)}, \quad (15.19)$$

где  $t_k$  — промежуток времени между некоторым начальным моментом и  $k$ -м моментом,  $t_i$  — промежуток времени между тем же начальным моментом и  $i$ -м моментом,  $\Delta t_{ik}$  — промежуток времени между  $k$ -м и  $i$ -м моментами,  $\omega_k$  — значение  $\omega$  при  $t = t_k$  и  $\omega_i$  — значение  $\omega$  при  $t = t_i$ .

Если функции  $M_x$  и  $M_c$  не заданы аналитически и, следовательно, интеграл (15.19) не может быть вычислен непосредственно, то решение будет идти в такой последовательности:

1) Делим интервал изменения угловой скорости, данный на графике моментов (рис. 79, а), на ряд равных промежутков (в нашем случае на шесть) и вычисляем значения углового ускорения ведущего звена по формуле (15.12 а):

$$\varepsilon_k = \frac{M_{xk} - M_{ck}}{I_{\text{п}k}},$$

по найденным значениям углового ускорения строим его график  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  (рис. 79, б),

2) Находим величину промежутка времени  $\Delta t_{ik}$ , за который угловая скорость изменяется от величины  $\omega_i$  до величины  $\omega_k$ :

$$\Delta t_{ik} = \frac{\Delta \omega_{ik}}{\varepsilon_{ik}}, \quad (15.20)$$

где  $\Delta \omega_{ik} = \omega_k - \omega_i$ ,  $\varepsilon_{ik}$  — среднее ускорение на интервал  $\Delta \omega_{ik}$ .

По вычисленным значениям  $\Delta t_{ik}$  строим график зависимости  $t = t(\omega)$  времени от угловой скорости ведущего звена (рис. 79, в), имея в виду, что

$$t_k = t_i + \Delta t_{ik}.$$

3) Исключая  $\omega$  из функций  $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$  и  $t = t(\omega)$ , можно построить график  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , а интегрируя функцию  $\omega = \omega(t)$  — найти функцию  $\varphi = \varphi(t)$ .

Рассмотренный случай соответствует, например, исследованию движения звена приведения машинного агрегата, состоящего из электродвигателя постоянного тока, редуктора и центробежного вентилятора. Исследовался период разгона ведущего звена.

8. Приводим решение задачи (по В. А. Зиповьеву и М. А. Скуридину) о движении звена приведения в случае, когда приведенный момент движущих сил  $M_x$  зависит от скорости звена приведения:  $M_x = M_x(\omega)$ , приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  зависит от угла поворота  $\varphi$  звена приведения:  $M_c = M_c(\varphi)$ , и приведенный момент инерции механизма  $I_{\text{п}}$  тоже зависит от этого угла:  $I_{\text{п}} = I_{\text{п}}(\varphi)$ . Такой случай имеет место, например, при динамическом исследовании машинного агрегата, состоящего из электродвигателя, коробки скоростей и поперечно-строгального станка, в основу которого входит кулисный механизм Витворта с переменным передаточным отношением. Имеем заданными: момент движущих сил  $M_x = M_x(\omega)$  (рис. 80, а), момент сил сопротивления  $M_c = M_c(\varphi)$  (рис. 80, б) и приведенный момент инерции механизма  $I_{\text{п}} = I_{\text{п}}(\varphi)$  (рис. 80, в) при начальных условиях:  $\omega = \omega_i$  при  $\varphi = \varphi_i$ .

Напишем уравнение (15.5) применительно к перемещению звена приведения из положения  $i$ -го в положение  $k$ -е:

$$\int_{\omega_i}^{\omega_k} M_x(\omega) d\varphi - \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_c(\varphi) d\varphi = \frac{I_{\text{п}k} \cdot \omega_k^2}{2} - \frac{I_{\text{п}i} \cdot \omega_i^2}{2}. \quad (15.21)$$

Предполагая, что в пределах малого шага интегрирования  $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_i$  момент

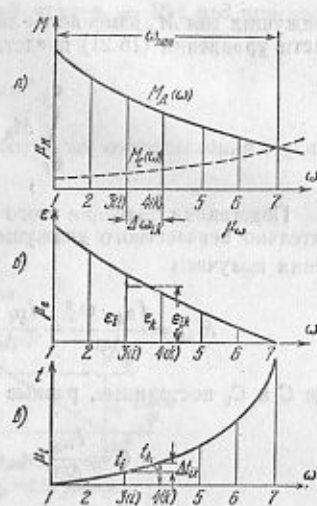


Рис. 79. К определению закона движения звена приведения при моментах движущих сил и сил сопротивления, зависящих от угловой скорости ведущего звена, и постоянном приведенном моменте инерции.

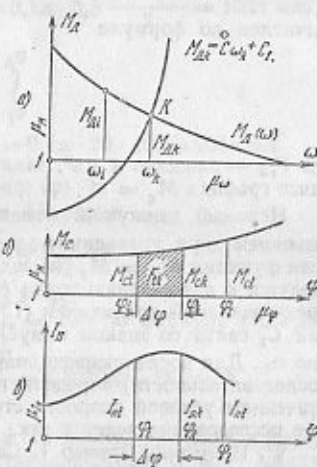


Рис. 80. К определению закона движения звена приведения при моменте движущих сил, зависящем от угловой скорости звена приведения, моменте сил сопротивления и приведенном моменте инерции, зависящих от угла поворота этого же звена.



движущих сил  $M_d$  изменяется линейно, можно значение первого интеграла в левой части уравнения (15.21) представить в виде

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_d(\omega) d\varphi = \frac{M_{dk} + M_{di}}{2} \Delta\varphi. \quad (15.22)$$

Подставляя значение этого интеграла в уравнение (15.5) и решая его относительно неизвестного движущего момента  $M_{dk}$ , в  $k$ -м положении звена приведения получаем

$$M_{dk} = \frac{I_{pk} \cdot \omega_k^2}{\Delta\varphi} - \frac{I_{pi} \cdot \omega_i^2}{\Delta\varphi} + \frac{2}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_c d\varphi - M_{di} = C \cdot \omega_k^2 + C_1, \quad (15.23)$$

где  $C$  и  $C_1$  постоянные, равные

$$C = \frac{I_{pk}}{\Delta\varphi} \text{ и } C_1 = -\frac{I_{pi} \cdot \omega_i^2}{\Delta\varphi} + \frac{2}{\Delta\varphi} \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_c d\varphi - M_{di}. \quad (15.24)$$

Эти постоянные легко вычисляются, так как значения приведенного момента инерции  $I_{pk}$  в  $k$ -м положении и  $I_{pi}$  в  $i$ -м положении известны по графику  $I_n = I_n(\varphi)$  (рис. 80, а);  $\Delta\varphi$  — выбранный шаг интегрирования;  $\omega_i$  — угловая скорость в  $i$ -м положении — известна из начальных условий; движущий момент

$M_d$  в  $i$ -м положении также известен (рис. 80, а), а интеграл  $\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_c d\varphi$  может быть вычислен по формуле

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M_c d\varphi = \mu_M \mu_\varphi \cdot F_{ik}, \quad (15.25)$$

где  $F_{ik}$  — площадь в  $mm^2$ , заключенная между  $i$ -й и  $k$ -й ординатами и осью абсцисс графика  $M_c = M_c(\varphi)$  (рис. 80, б),  $\mu_M$  и  $\mu_\varphi$  — масштабы этого графика.

Искомый движущий момент  $M_{dk}$  в  $k$ -м положении находится совместным решением двух уравнений: заданного  $M_d = M_d(\omega)$  и полученного (15.23); так, если функция  $M_d = M_d(\omega)$  задана графиком (рис. 80, а), то решение (рис. 80, а) сводится к нахождению точки  $K$  пересечения кривой  $M_d = M_d(\omega)$  с параболой, представляемой уравнением (15.23) (в показанном на рисунке решении постоянная  $C_1$  взята со знаком минус). По найденному значению  $M_{dk}$  находится значение  $\omega_k$ . Для последующего значения угла  $\varphi_i$  (все решение повторяется в той же последовательности) определяется значение угловой скорости  $\omega_i$ . По найденным значениям угловой скорости строится график зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$ . Дальнейшее исследование ведется так, как указано в пункте 6<sup>о</sup> настоящего параграфа.

9<sup>о</sup>. **Примеры.** **Пример 1.** Силы, приложенные к механизму, и его массы приведены к звену  $AB$  (рис. 81, а). Приведенные момент движущих сил  $M_d$  и момент сил сопротивления  $M_c$  изменяются в течение первых пяти оборотов звена  $AB$  в соответствии с графиком на рис. 81, б. Приведенный момент инерции  $I_n$  постоянен и равен  $I_n = 0,1 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . При угле  $\varphi$ , равном нулю, угловая скорость  $\omega$  звена  $AB$  также равна нулю. Требуется определить величину угловой скорости  $\omega$  звена  $AB$  через пять оборотов от начала его движения.

**Решение.** 1) Находим угол поворота звена  $AB$  за пять его оборотов, он равен

$$\varphi_5 = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \text{ рад.}$$

Отрезок  $x_5$  на графике моментов, соответствующий углу  $\varphi_5 = 10\pi \text{ рад}$  при масштабе по оси абсцисс  $\mu_\varphi = 0,1 \text{ л рад/мм}$ , равен

$$x_5 = \frac{\varphi_5}{\mu_\varphi} = \frac{10\pi}{0,1\pi} = 100 \text{ мм.}$$

2) Находим работу движущих сил  $A_d$  и работу сил сопротивления  $A_c$  на угле поворота звена  $AB$ , равном  $\varphi_5$ .

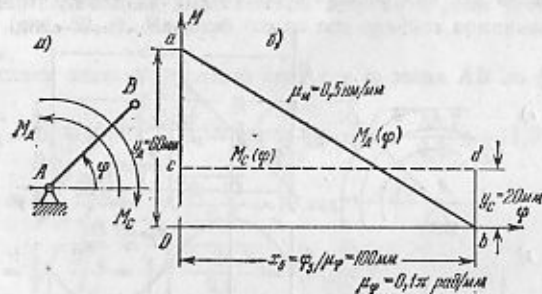


Рис. 81. К примеру 1. Определение угловой скорости звена приведения через пять оборотов с момента начала его движения.

Работа движущих сил  $A_d$  равна

$$A_d = \int_0^{\varphi_5} M_d d\varphi = \mu_\varphi \mu_M \cdot \text{пл}(Oab) = \mu_\varphi \mu_M \frac{\mu_M x_5}{2} = 0,1\pi \cdot 0,5 \frac{60 \cdot 100}{2} = 150\pi \text{ нм.}$$

Работа сил сопротивления  $A_c$  равна

$$A_c = \int_0^{\varphi_5} M_c d\varphi = \mu_\varphi \mu_M \cdot \text{пл}(Ocdb) = \mu_\varphi \mu_M \mu_M x_5 = 0,1\pi \cdot 20 \cdot 100 = 100\pi \text{ нм.}$$

Избыточная работа на том же угле поворота звена  $AB$  равна

$$A = A_d - A_c = T_5 = 150\pi - 100\pi = 50\pi \text{ нм,}$$

где  $T_5$  — кинетическая энергия механизма при  $\varphi = \varphi_5$ .

3) Находим угловую скорость  $\omega = \omega_5$  при  $\varphi_5 = 10\pi$  по формуле (15.7 а):

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{2A}{I_n} + \omega_0^2} = \sqrt{\frac{2A}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50\pi}{0,1}} = \sqrt{1000\pi} = 56 \text{ сек}^{-1}.$$

**Пример 2.** Силы, приложенные к механизму, и его массы приведены к звену  $AB$  (рис. 82, а). Движение звена  $AB$  принято установившимся. Одному циклу этого движения соответствует один оборот звена  $AB$  на угол  $\varphi_n$ , равный  $2\pi$ . Угловая скорость  $\omega$  при  $\varphi = 0$  равна  $\omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}$ . Момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется в соответствии с графиком на рис. 82, б, причем его максимальное значение  $M_{c \max}$  равно  $40 \text{ нм}$ . Момент движущих сил  $M_d$  постоянен на всем цикле движения звена  $AB$ . Приведенный момент инерции  $I_n$  также постоянен и равен  $I_n = 0,8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Требуется построить графики изменения кинетической энергии  $T = T(\varphi)$ , угловой скорости  $\omega = \omega(\varphi)$  и углового ускорения  $\epsilon = \epsilon(\varphi)$  звена  $AB$ , а также найти коэффициент  $\delta$  неравномерности вращения звена  $AB$ .

Решение. 1) Находим значение постоянного движущего момента  $M_d$ , исходя из того, что за цикл установившегося движения работа движущих сил  $A_d$  равна работе сил сопротивления  $A_c$ :

$$M_d \cdot 2\pi = \frac{M_{c \max} \cdot 2\pi}{2}, \text{ откуда } M_d = \frac{M_{c \max}}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ нм.}$$

Графики моментов движущих сил  $M_d$  и моментов сил сопротивления  $M_c$  построены в общей для них системе координат (рис. 82, в). Масштабы графиков

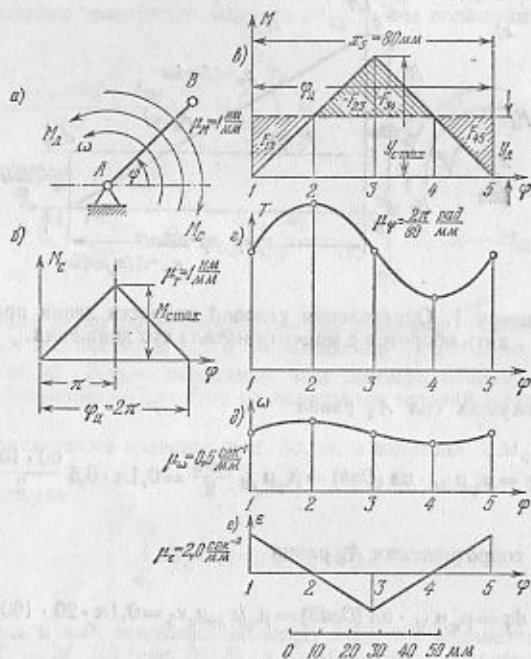


Рис. 82. К примеру 2. Определение законов изменения угловой скорости и углового ускорения звена приведения в течение одного оборота его, который соответствует одному циклу установившегося движения.

приняты равными по оси абсцисс  $\mu_\varphi = \frac{2\pi}{x_5} = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi \text{ рад}}{40 \text{ мм}}$  (так как отрезок  $x_5$  принят равным 80 мм), по оси ординат  $\mu_M = 1 \text{ нм/мм}$ .

2) Вычисляем значения кинетической энергии  $T$  звена  $AB$ . Для этого угол  $\varphi_d$  поворота звена  $AB$  делим на ряд равных частей, в нашем случае на четыре, и на графике (рис. 82, в) размечаем площадки  $F_{12}$ ,  $F_{23}$ ,  $F_{34}$  и  $F_{45}$ , которые пропорциональны избыточным работам соответственно на участках 1—2, 2—3, 3—4 и 4—5 угла  $\varphi_d$ . Эти площадки в нашем примере по абсолютной величине одинаковы и равны  $\frac{20 \cdot 20}{2} = 200 \text{ мм}^2$ . Значения избыточных работ  $A_{12}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{34}$  и  $A_{45}$  пропорциональны этим площадкам:

$$A_{12} = \mu_M \mu_\varphi F_{12} = 1,0 \frac{\pi}{40} \cdot 200 = 5\pi \text{ нм},$$

$$A_{23} = -5\pi \text{ нм}, \quad A_{34} = -5\pi \text{ нм} \quad \text{и} \quad A_{45} = 5\pi \text{ нм}.$$

Значения кинетической энергии  $T$  для каждого положения звена будут равны:

$$T_1 = \frac{I_n \omega_0^2}{2} = \frac{0,8 \cdot 10^2}{2} = 40 \text{ нм}, \quad T_2 = T_1 + A_{12} = 40 + 5\pi = 55,7 \text{ нм},$$

$$T_3 = T_2 - A_{23} = 55,7 - 5\pi = 40 \text{ нм}, \quad T_4 = T_3 - A_{34} = 40 - 5\pi = 24,3 \text{ нм},$$

$$T_5 = T_4 + A_{45} = 24,3 + 5\pi = 40 \text{ нм}.$$

По полученным значениям кинетической энергии строим график зависимости ее от угла  $\varphi$  (рис. 82, в). Масштаб его по оси ординат принимаем равным  $\mu_T = 1,0 \text{ нм/мм}$ .

3) Вычисляем значения угловой скорости  $\omega$  звена  $AB$  по формуле (15.7 а):

$$\omega_1 = \omega_0 = 10 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2T_2}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 55,7}{0,8}} = 11,3 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2T_3}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{0,8}} = 10 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{2T_4}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 24,3}{0,8}} = 7,8 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_5 = \sqrt{\frac{2T_5}{I_n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40}{0,8}} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

По найденным значениям угловой скорости  $\omega$  строим график  $\omega = \omega(\varphi)$  (рис. 82, в), масштаб его по оси ординат принимаем равным  $\mu_\omega = 0,5 \text{ сек}^{-1}/\text{мм}$ .

4) Находим значения углового ускорения  $\epsilon$  звена  $AB$  по формуле (15.12 а):

$$\epsilon_1 = \frac{M_{d1} - M_{c1}}{I_n} = \frac{M_{d1} - 0}{I_n} = \frac{20}{0,8} = 25 \text{ сек}^{-2},$$

$$\epsilon_2 = \frac{M_{d2} - M_{c2}}{I_n} = \frac{20 - 20}{0,8} = 0, \quad \epsilon_3 = \frac{M_{d3} - M_{c3}}{I_n} = \frac{20 - 40}{0,8} = -25 \text{ сек}^{-2},$$

$$\epsilon_4 = \frac{M_{d4} - M_{c4}}{I_n} = \frac{20 - 20}{0,8} = 0, \quad \epsilon_5 = \frac{M_{d5} - M_{c5}}{I_n} = \frac{M_{d5}}{I_n} = \frac{20}{0,8} = 25 \text{ сек}^{-2}.$$

По найденным значениям  $\epsilon$  строим график зависимости его от угла поворота звена  $AB$  (рис. 82, в), масштаб по оси ординат графика принят равным  $\mu_\epsilon = 2,0 \text{ сек}^{-2}/\text{мм}$ .

5) Находим коэффициент  $\delta$  неравномерности движения звена  $AB$  по формуле

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (15.26)$$

где  $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} = \frac{11,3 + 7,8}{2} = 9,55 \text{ сек}^{-1}$ ; подставляя значения максимальной  $\omega_{\max}$ , минимальной  $\omega_{\min}$  и средней  $\omega_{\text{ср}}$  угловых скоростей в формулу (15.26), найдем значение коэффициента  $\delta$  неравномерности движения звена  $AB$ :

$$\delta = \frac{11,3 - 7,8}{9,55} = 0,366.$$

Пример 3. Сохраняя условия примера 2, требуется для одного цикла установившегося движения звена  $AB$  построить диаграмму Виттенбауэра, т. е. график  $T = T(I_n)$  зависимости кинетической энергии  $T$  от приведенного момента инер-

ции  $I_n$ . Как известно, луч  $OK$  (рис. 83), соединяющий начало координат  $O$  с произвольно выбранной точкой  $K$  на кривой  $T = T(I_n)$ , образует с осью  $OI_n$  угол, тангенс которого пропорционален квадрату угловой скорости  $\omega_k$  звена приведения в положении, соответствующем положению  $k$  звена  $AB$ . Отсюда

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu I_n} \operatorname{tg} \psi_k} = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu I_n}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \psi_k}. \quad (15.27)$$

**Решение.** 1) Строим графики моментов движущих сил и сил сопротивления  $M_d = M_d(\varphi)$  и  $M_c = M_c(\varphi)$  (рис. 84, а) такие же, как и в примере 2.

2) Строим график кинетической энергии  $T = T(\varphi)$  такой же, как в примере 2 (рис. 84, б).

3) Строим график зависимости приведенного момента инерции  $I_n$  от угла поворота  $\varphi$  звена приведения  $AB$  (рис. 84, в); этот график построен в осях координат, повернутых на  $90^\circ$  относительно своего обычного положения. В нашем примере график  $I_n = I_n(\varphi)$  представляет собою прямую, параллельную оси  $\varphi$ .

4) Строим диаграмму Виттенбауэра  $T = T(I_n)$ . Для этого продолжаем оси абсцисс графиков  $I_n = I_n(\varphi)$  и  $T = T(\varphi)$  до их пересечения в точке  $O$  (рис. 84, г).

Эта точка является началом координат диаграммы  $T = T(I_n)$ . Точки самой линии диаграммы  $T = T(I_n)$  строятся подобным же образом. Через конец ординаты  $I_{n1}$  (рис. 84, в) проводим прямую, параллельную оси абсцисс графика  $I_n = I_n(\varphi)$ , до пересечения ее с прямой, проведенной через конец ординаты  $T_1$  (рис. 84, б) параллельно оси абсцисс графика  $T = T(I_n)$  (рис. 84, г). Аналогично строим и другие точки диаграммы  $T = T(I_n)$ . В нашем примере эта диаграмма является прямой линией, так как приведенный момент инерции  $I_n$  постоянен.

Если соединить, например, точку  $O$  с точкой 4, то луч  $O-4$  и ось  $OI_n$  образуют угол  $\psi_4$ , тангенс которого пропорционален угловой скорости  $\omega_4$  звена приведения  $AB$  в его четвертом положении. Угловая скорость  $\omega_4$  найдется из равенства

$$\omega_4 = \sqrt{\frac{2\mu_T}{\mu I_n} \operatorname{tg} \psi_4}.$$

**Пример 4.** Звено приведения  $AB$  (рис. 85, а) начинает двигаться из положения 1, когда угол  $\varphi = 0$  и его угловая скорость  $\omega$  тоже равна нулю.

Приведенный момент движущих сил  $M_d$  изменяется в пределах первого оборота звена  $AB$  по графику на рис. 85, б, удовлетворяя уравнению

$$M_d = M_{d\max} - q\varphi \text{ нм},$$

где  $M_{d\max}$  — максимальное значение  $M_d$ , равное  $M_{d\max} = 24 \cdot 10^{-2}$  нм,  $q = \frac{6 \cdot 10^{-2} \text{ нм}}{\pi \text{ рад}}$  — жесткость пружины, приводящей в движение звено  $AB$ . Приведенный момент сил сопротивления равен нулю, приведенный момент инерции  $I_n$  изменяется в соответствии с графиком на рис. 85, в. Его значения для отдельных положений звена  $AB$  равны:

$$\begin{aligned} I_{n1} = I_{n7} = I_{n13} &= 3 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2, \\ I_{n2} = I_{n6} = I_{n8} &= \\ &= 3,25 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2, \\ I_{n3} = I_{n5} = I_{n9} = I_{n11} &= \\ &= 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2, \\ I_{n4} = I_{n10} &= 6 \cdot 10^{-5} \text{ кгм}^2. \end{aligned}$$

Для первого полного оборота звена  $AB$  требуется построить график его угловой скорости  $\omega = \omega(\varphi)$  в функции угла  $\varphi$  поворота и график времени его движения  $t = t(\varphi)$  в функции того же угла  $\varphi$ , а также найти время  $t_{13}$ , за которое звено  $AB$  совершит полный оборот вокруг своей оси  $A$ .

**Указание.** Угол поворота звена  $AB$ , соответствующий одному обороту, следует разделить на 12 равных частей.

**Решение.** 1) Вычисляем значения движущего момента  $M_d$  для каждого положения звена  $AB$ . Для этого в равенство  $M_d = M_{d\max} - q\varphi$  последовательно подставляем значения текущего угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$ . Получаем

$$M_{d1} = 24 \cdot 10^{-2} - q \cdot 0 = 24 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d2} = 24 \cdot 10^{-2} - \frac{6 \cdot 10^{-2} \cdot 2\pi}{\pi \cdot 12} = 23 \cdot 10^{-2} \text{ нм},$$

$$M_{d3} = 24 \cdot 10^{-2} - \frac{6 \cdot 10^{-2}}{\pi} \cdot 2 \frac{2\pi}{12} = 22 \cdot 10^{-2} \text{ нм},$$

$$M_{d4} = 21 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d5} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d6} = 19 \cdot 10^{-2} \text{ нм},$$

$$M_{d7} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d8} = 17 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d9} = 16 \cdot 10^{-2} \text{ нм},$$

$$M_{d10} = 15 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d11} = 14 \cdot 10^{-2} \text{ нм}, \quad M_{d12} = 13 \cdot 10^{-2} \text{ нм},$$

$$M_{d13} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ нм}.$$

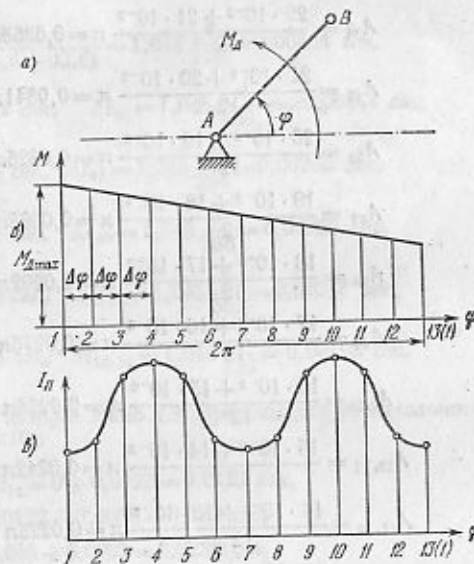


Рис. 85. К примеру 4. Определение закона движения звена приведения при моменте движущих сил, зависящем от угла поворота звена приведения, приведенном моменте инерции, также зависящем от этого угла, и моменте сил сопротивления, равном нулю.



2) Подсчитываем значения избыточных работ  $A$  на каждом интервале  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{12}$  перемещения звена  $AB$ :

$$A_{12} = \frac{M_{д1} + M_{д2}}{2} \Delta\varphi = \frac{M_{д1} + M_{д2}}{2} \frac{2\pi}{12} = \frac{24 \cdot 10^{-2} + 23 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0393\pi \text{ нм},$$

$$A_{23} = \frac{23 \cdot 10^{-2} + 22 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0375\pi \text{ нм},$$

$$A_{34} = \frac{22 \cdot 10^{-2} + 21 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0358\pi \text{ нм},$$

$$A_{45} = \frac{21 \cdot 10^{-2} + 20 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0341\pi \text{ нм},$$

$$A_{56} = \frac{20 \cdot 10^{-2} + 19 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0325\pi \text{ нм},$$

$$A_{67} = \frac{19 \cdot 10^{-2} + 18 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0308\pi \text{ нм},$$

$$A_{78} = \frac{18 \cdot 10^{-2} + 17 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0292\pi \text{ нм},$$

$$A_{89} = \frac{17 \cdot 10^{-2} + 16 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0275\pi \text{ нм},$$

$$A_{9,10} = \frac{16 \cdot 10^{-2} + 15 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0258\pi \text{ нм},$$

$$A_{10,11} = \frac{15 \cdot 10^{-2} + 14 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0242\pi \text{ нм},$$

$$A_{11,12} = \frac{14 \cdot 10^{-2} + 13 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0225\pi \text{ нм},$$

$$A_{12,13} = \frac{13 \cdot 10^{-2} + 12 \cdot 10^{-2}}{12} \pi = 0,0208\pi \text{ нм}.$$

Далее по формуле (15.8) определяем значения кинетической энергии  $T$  для каждого положения звена  $AB$ :

$$T_1 = 0 \text{ (так как при } \varphi = 0, \omega = 0),$$

$$T_2 = T_1 + A_{12} = 0 + 0,0393\pi = 0,0393\pi \text{ нм},$$

$$T_3 = T_2 + A_{23} = 0,0393\pi + 0,0375\pi = 0,0768\pi \text{ нм},$$

$$T_4 = 0,1126\pi \text{ нм}, T_5 = 0,1467\pi \text{ нм}, T_6 = 0,1792\pi \text{ нм}, T_7 = 0,2100\pi \text{ нм},$$

$$T_8 = 0,2392\pi \text{ нм}, T_9 = 0,2667\pi \text{ нм}, T_{10} = 0,2925\pi \text{ нм}, T_{11} = 0,3167\pi \text{ нм}, T_{12} = 0,3392\pi \text{ нм}, T_{13} = 0,3600\pi \text{ нм}.$$

3) Вычисляем значения угловой скорости  $\omega$  звена  $AB$  для каждого его положения по формуле (15.7):

$$\omega_1 = 0,$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2T_2}{I_{п2}}} = \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,039}{3 \cdot 25 \cdot 10^{-6}}} = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{0,039}{3,25 \cdot 10^{-5}}} = 2,52 \sqrt{1200} = 85,5 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_3 = 2,52 \sqrt{\frac{0,07688}{5,51 \cdot 10^{-6}}} = 2,52 \sqrt{1400} = 93,6 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_4 = 107,5 \text{ сек}^{-1}, \omega_5 = 129 \text{ сек}^{-1}, \omega_6 = 185 \text{ сек}^{-1}, \omega_7 = 209 \text{ сек}^{-1}, \omega_8 = 214 \text{ сек}^{-1},$$

$$\omega_9 = 174 \text{ сек}^{-1}, \omega_{10} = 175 \text{ сек}^{-1}, \omega_{11} = 190 \text{ сек}^{-1}, \omega_{12} = 255 \text{ сек}^{-1}, \omega_{13} = 274 \text{ сек}^{-1}.$$

4) Определяем время  $\Delta t$ , которое соответствует повороту звена  $AB$  на угол  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ , считая, что в пределах угла  $\Delta\varphi$  угловая скорость изменяется по линейному закону. Вычисление ведем по формуле (15.9):

$$\Delta t_{12} = \frac{\Delta\varphi}{\omega_{12}} = \frac{\pi}{6 \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right)} = \frac{\pi}{3(\omega_1 + \omega_2)} = \frac{\pi}{3(0 + 85,5)} = 1,045 \frac{1}{85,5} = 0,0122 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{23} = \frac{\pi}{3(\omega_2 + \omega_3)} = \frac{\pi}{3(85,5 + 93,6)} = 1,045 \frac{1}{179} = 0,00584 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{34} = 1,045 \frac{1}{201,1} = 0,0052 \text{ сек}, \quad \Delta t_{45} = 1,045 \frac{1}{236,1} = 0,0044 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{56} = 1,045 \frac{1}{314} = 0,00333 \text{ сек}, \quad \Delta t_{67} = 1,045 \frac{1}{394} = 0,00266 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{78} = 1,045 \frac{1}{423} = 0,00247 \text{ сек}, \quad \Delta t_{89} = 1,045 \frac{1}{388} = 0,00269 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{9,10} = 1,045 \frac{1}{349} = 0,00300 \text{ сек}, \quad \Delta t_{10,11} = 1,045 \frac{1}{365} = 0,00287 \text{ сек},$$

$$\Delta t_{11,12} = 1,045 \frac{1}{445} = 0,00233 \text{ сек}, \quad \Delta t_{12,13} = 1,045 \frac{1}{529} = 0,00198 \text{ сек}.$$

Далее определяем время  $t_k$ , за которое звено  $AB$  перемещается из начального положения в  $k$ -е, по формуле (15.10):

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0 + \Delta t_{12} = 0 + 0,0122 = 0,0122 \text{ сек},$$

$$t_3 = t_2 + \Delta t_{23} = 0,0122 + 0,0058 = 0,018 \text{ сек},$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t_{34} = 0,018 + 0,0052 = 0,0232 \text{ сек},$$

$$t_5 = 0,0232 + 0,0044 = 0,0276 \text{ сек},$$

$$t_6 = 0,0309 \text{ сек}, \quad t_7 = 0,0336 \text{ сек}, \quad t_8 = 0,0361 \text{ сек},$$

$$t_9 = 0,03879 \text{ сек}, \quad t_{10} = 0,04179 \text{ сек},$$

$$t_{11} = 0,04466 \text{ сек}, \quad t_{12} = 0,04696 \text{ сек}, \quad t_{13} = 0,04894 \text{ сек}.$$

На рис. 86 построены графики кинетической энергии  $T = T(\varphi)$  (рис. 86, а), приведенного момента инерции  $I_{п} = I_{п}(\varphi)$  (рис. 86, б), угловой скорости  $\omega = \omega(\varphi)$  (рис. 86, в) и времени  $t = t(\varphi)$  (рис. 86, г) в зависимости от угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$ .

Пример 5. Звено приведения  $AB$  (рис. 87, а) начинает двигаться из положения  $I$ , когда  $\varphi = 0$  и  $\omega = 0$ .

Приведенный момент движущих сил  $M_d$  изменяется в соответствии с графиком рис. 87, б по уравнению

$$M_d = M_{d\max} - q\varphi \text{ нм}, \quad (15.28a)$$

где  $M_{d\max} = 24 \cdot 10^{-2}$  нм и  $q = \frac{6 \cdot 10^{-2}}{\pi}$  нм.

Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется в соответствии с графиком рис. 87, в по уравнению

$$M_c = M_{c0} + \frac{10^{-5}}{6} \omega^2 \text{ нм}, \quad (15.28b)$$

где  $M_{c0} = 3 \cdot 10^{-2}$  нм.

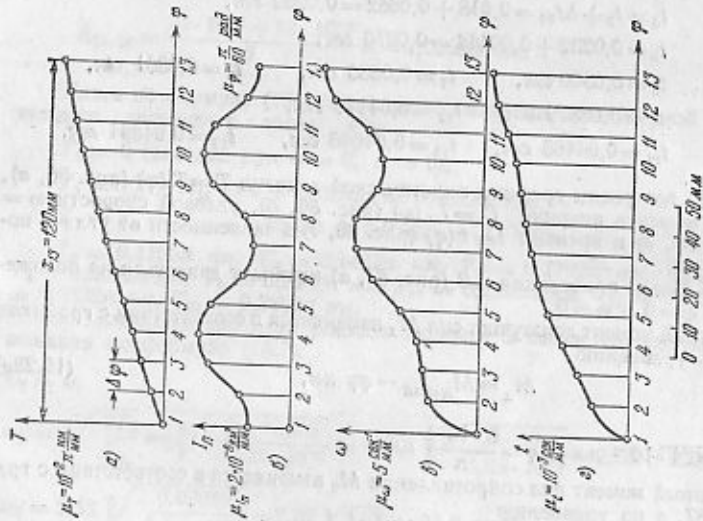


Рис. 86. К примеру 4. Графики зависимости от угла поворота звена приведения: а) кинетической энергии  $T$ , б) приведенного момента инерции  $I_0$ , в) угловой скорости  $\omega$ , г) времени  $t$ .

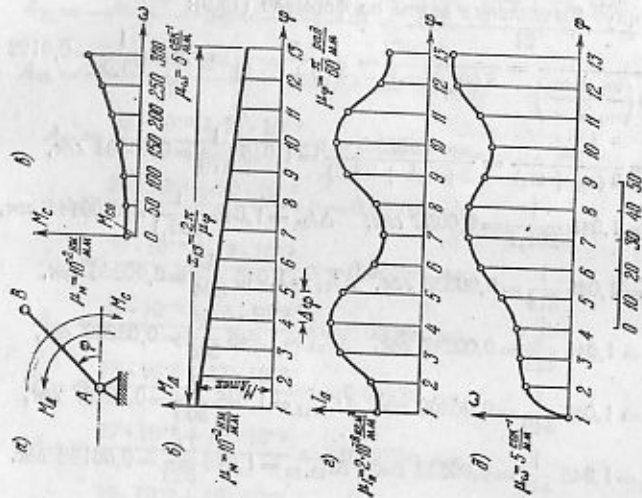


Рис. 87. К примеру 5. Определение угловой скорости звена приведения при моменте движущих сил и приведенном моменте инерции, зависящих от угла поворота звена приведения, и моменте сил сопротивления, зависящем от угловой скорости того же звена.

Приведенные моменты инерции  $I_{п}$  изменяются согласно графику рис. 87, г. Его отдельные значения для соответствующих положений звена  $AB$  будут равны

$$I_{п1} = I_{п7} = I_{п13} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad I_{п2} = I_{п6} = I_{п8} = I_{п12} = 3,25 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$I_{п3} = I_{п5} = I_{п9} = I_{п11} = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2,$$

$$I_{п4} = I_{п10} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Для первого полного оборота звена  $AB$  построить график его угловой скорости  $\omega = \omega(\varphi)$  в функции угла поворота  $\varphi$ .

У к а з а н и е. Для решения примера угол поворота звена  $AB$ , который соответствует одному обороту, следует разделить на двенадцать равных частей.

Отметим, что по характеру заданных величин данный пример представляет случай, который рассмотрен в п. 8°. Разница лишь в том, что здесь  $M_A = M_B(\varphi)$ ,  $M_C = M_C(\varphi)$ , а в п. 8°  $M_A = M_A(\omega)$ ,  $M_C = M_C(\varphi)$ .

Выведем формулу, которая позволит решить заданный пример.

Составим уравнение движения звена  $AB$  в форме закона кинетической энергии (см. уравнение (15.5)) применительно к повороту этого звена на угол  $\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ :

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} M_A d\varphi - \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} M_C(\omega) d\varphi = \frac{I_{пk+1} \omega_{k+1}^2}{2} - \frac{I_{пk} \omega_k^2}{2}, \quad (15.28a)$$

где

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} M_A d\varphi = \frac{M_{A_k} + M_{A_{k+1}}}{2} \Delta\varphi,$$

так как заданный закон изменения  $M_A(\varphi)$  — линейный.

Если принять, что на перемещении звена  $AB$ , равном  $\Delta\varphi$ , момент  $M_C$  изменяется по линейному закону, то

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} M_C(\omega) d\varphi = \frac{M_{C_k} + M_{C_{k+1}}}{2} \Delta\varphi.$$

Подставляя значения двух последних интегралов в формулу (15.28a), получаем

$$\frac{M_{A_k} + M_{A_{k+1}}}{2} \Delta\varphi - \frac{M_{C_k} + M_{C_{k+1}}}{2} \Delta\varphi = \frac{I_{пk+1} \omega_{k+1}^2}{2} - \frac{I_{пk} \omega_k^2}{2}. \quad (15.28b)$$

Из этого равенства находим неизвестный момент сил сопротивления  $M_{C_{k+1}}$  в  $(k+1)$ -м положении звена  $AB$ :

$$M_{C_{k+1}} = \frac{I_{пk} \omega_k^2}{\Delta\varphi} - \frac{I_{пk+1} \omega_{k+1}^2}{\Delta\varphi} + M_{A_k} + M_{A_{k+1}} - M_{C_k}. \quad (15.28c)$$

Принимая во внимание, что согласно уравнению (15.28b)

$$M_{C_k} = M_{C_0} + \frac{10^{-5}}{6} \omega_k^2,$$

получаем

$$M_{C_{k+1}} = \frac{I_{пk} \omega_k^2}{\Delta\varphi} - \frac{I_{пk+1} \omega_{k+1}^2}{\Delta\varphi} + M_{A_k} + M_{A_{k+1}} - M_{C_0} - \frac{10^{-5}}{6} \omega_k^2.$$

С другой стороны, по условию данного примера этот же момент  $M_{C_{k+1}}$  выразится равенством

$$M_{C_{k+1}} = M_{C_0} + \frac{10^{-5}}{6} \omega_{k+1}^2. \quad (15.28d)$$

Приравняв между собой правые части равенств (15.28д) и (15.28е), получаем

$$\frac{I_{пк}\omega_k^2}{\Delta\varphi} - \frac{I_{пк+1}\omega_{k+1}^2}{\Delta\varphi} + M_{дк} + M_{дк+1} - M_{с0} - \frac{10^{-5}}{6}\omega_k^2 =$$

$$= M_{с0} + \frac{10^{-5}}{6}\omega_{k+1}^2. \quad (15.28ж)$$

Разрешим равенство (15.28ж) относительно неизвестной угловой скорости  $\omega_{k+1}$  звена АВ в его  $(k+1)$ -м положении:

$$\left(\frac{I_{пк}}{\Delta\varphi} - \frac{10^{-5}}{6}\right)\omega_k^2 + M_{дк} + M_{дк+1} - 2M_{с0} = \left(\frac{I_{пк+1}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6}\right)\omega_{k+1}^2,$$

или

$$\left[\left(\frac{I_{пк}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6}\right) - \frac{10^{-5}}{3}\right]\omega_k^2 + M_{дк} + M_{дк+1} - 2M_{с0} = \left(\frac{I_{пк+1}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6}\right)\omega_{k+1}^2.$$

Введя обозначения

$$\frac{I_{пк}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = C_k, \quad M_{дк} + M_{дк+1} - 2M_{с0} = B_k, \quad \frac{I_{пк+1}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = C_{k+1},$$

окончательно получим

$$\omega_{k+1} = \sqrt{\frac{C_k\omega_k^2 - \frac{\omega_k^2 \cdot 10^{-5}}{3} + B_k}{C_{k+1}}}. \quad (15.28з)$$

Покажем теперь, как, воспользовавшись формулой (15.28з), вычислить значения скорости  $\omega$  в намеченных положениях звена АВ.

Начинаем с вычисления значения  $\omega_2$  во втором положении звена АВ. Имеем

$$C_1 = \frac{I_{п1}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{3 \cdot 10^{-5} \cdot 6}{\pi} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{18 \cdot 10^{-5}}{3,14} + \frac{10^{-5}}{6} =$$

$$= 5,74 \cdot 10^{-5} + 0,16 \cdot 10^{-5} = 5,9 \cdot 10^{-5},$$

$$B_1 = M_{д1} + M_{д2} - 2M_{с0} = 24 \cdot 10^{-2} + 23 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 41 \cdot 10^{-2} \text{ нм}_2$$

так как  $M_{д1} = M_{д\max} = 24 \cdot 10^{-2}$  нм и

$$M_{д2} = M_{д\max} - q\Delta\varphi = 24 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-2} = 23 \cdot 10^{-2} \text{ нм}_2$$

$$C_2 = \frac{I_{п2}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{3,25 \cdot 10^{-5} \cdot 6}{3,14} + \frac{10^{-5}}{6} =$$

$$= 6,2 \cdot 10^{-5} + 0,16 \cdot 10^{-5} = 6,36 \cdot 10^{-5},$$

но так как  $\omega_k = \omega_1 = 0$ , то получим

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{B_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{41 \cdot 10^{-2}}{6,36 \cdot 10^{-5}}} = \sqrt{6450} = 80,3 \text{ сек}^{-1}.$$

Вычисляем значение  $\omega_3$  в третьем положении звена АВ. Имеем

$$C_2 = \frac{I_{п2}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{3,25 \cdot 10^{-5} \cdot 6}{3,14} + \frac{10^{-5}}{6} = 6,36 \cdot 10^{-5},$$

$$B_2 = M_{д2} + M_{д3} - 2M_{с0} = 23 \cdot 10^{-2} + 22 \cdot 10^{-2} - 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 39 \cdot 10^{-2} \text{ нм}_2,$$

так как

$$M_{д3} = M_{д\max} - q \cdot 2\Delta\varphi = 24 \cdot 10^{-2} - \frac{6 \cdot 10^{-2}}{\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{6} = 22 \cdot 10^{-2} \text{ нм}_2,$$

$$C_3 = \frac{I_{п3}}{\Delta\varphi} + \frac{10^{-5}}{6} = \frac{5,5 \cdot 10^{-5} \cdot 6}{3,14} + \frac{10^{-5}}{6} = 10,5 \cdot 10^{-5} + 0,16 \cdot 10^{-5} =$$

$$= 10,66 \cdot 10^{-5}.$$

Поэтому скорость  $\omega_3$  равна

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{C_2\omega_2^2 - \frac{\omega_2^2 \cdot 10^{-5}}{3} + B_2}{C_3}} = \sqrt{\frac{(6,36 \cdot 6450 - 2150 + 39000) \cdot 10^{-5}}{10,66 \cdot 10^{-5}}} =$$

$$= \sqrt{7275} = 85,0 \text{ сек}^{-1}.$$

Аналогично вычисляем значения  $\omega$  для остальных девяти положений звена АВ. Пользуясь формулой (15.28з), целесообразно сводить величины, в нее входящие, в нижеследующую таблицу.

Таблица значений величин, входящих в формулу (15.28з)

Положение звена АВ	$\omega_k^2$	$\frac{\omega_k^2 \cdot 10^{-5}}{3}$	$C_k$	$C_k \cdot \omega_k^2$	$B_k$
1	00000	0,00000	00,00	0,00000	0,00
2	00000	0,00000	$5,90 \cdot 10^{-5}$	0,00000	0,41
3	6456	0,02152	$6,36 \cdot 10^{-5}$	0,41000	0,39
4	7275	0,02625	$10,66 \cdot 10^{-5}$	0,77843	0,37
5	9674	0,03224	$11,56 \cdot 10^{-5}$	1,12217	0,35
6	13550	0,04552	$10,67 \cdot 10^{-5}$	1,43993	0,33
7	26949	0,08983	$6,35 \cdot 10^{-5}$	1,72476	0,31
8	32965	0,10983	$5,90 \cdot 10^{-5}$	1,94497	0,29
9	33360	0,11120	$6,35 \cdot 10^{-5}$	2,12509	0,27
10	21342	0,07114	$10,67 \cdot 10^{-5}$	2,28389	0,25
11	21230	0,07076	$11,56 \cdot 10^{-5}$	2,46275	0,23
12	24500	0,08166	$10,67 \cdot 10^{-5}$	2,62200	0,21
13	42974	0,14324	$6,36 \cdot 10^{-5}$	2,75034	0,19

Положение звена АВ	$C_{k+1}$	$C_{k+1} \cdot \omega_k^2 + 1$	$\omega_{k+1}^2$	$\omega_{k+3}$
1	00,00	0,00000	0,0000	000,0
2	$6,36 \cdot 10^{-5}$	0,41000	6456	80,3
3	$10,66 \cdot 10^{-5}$	0,77843	7275	85,0
4	$11,56 \cdot 10^{-5}$	1,12217	9674	98,3
5	$10,67 \cdot 10^{-5}$	1,43993	13550	116,4
6	$6,35 \cdot 10^{-5}$	1,72476	26949	164,1
7	$5,90 \cdot 10^{-5}$	1,94497	32965	181,5
8	$6,35 \cdot 10^{-5}$	2,12509	33360	182,4
9	$10,67 \cdot 10^{-5}$	2,28389	21342	146,0
10	$11,56 \cdot 10^{-5}$	2,46275	21230	145,7
11	$10,67 \cdot 10^{-5}$	2,62200	24500	156,2
12	$6,35 \cdot 10^{-5}$	2,75034	42974	207,3
13	$5,90 \cdot 10^{-5}$	2,79710	47409	217,7



По полученным значениям  $\omega$  на рис. 87, д построен график искомой зависимости  $\omega = \omega(\varphi)$ . Если возникнет надобность в нахождении зависимости времени  $t$  от угла  $\varphi$ , то следует поступать так, как это было сделано в примере 4.

Данные примера 5 отличаются от данных примера 4 только тем, что к звену  $AB$  помимо движущего момента  $M_d = M_x(\varphi)$  приложен момент сопротивления  $M_c = M_c(\omega)$ . Рекомендуется сравнить между собою значения угловых скоростей, полученных в примерах 4 и 5.

**Пример 6.** Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 88, а) найти значение производной  $dI_{ин}/d\varphi$  от приведенного момента инерции  $I_{ин}$  по углу  $\varphi$  поворота звена приведения  $AB$  в положении  $\varphi_1 = 60^\circ$ . Дано: размеры звеньев  $l_{AB} = 0,06$  м,  $l_{BC} = 0,3$  м;  $l_{BS_2} = 0,075$  м — координата центра масс  $S_2$  звена 2;

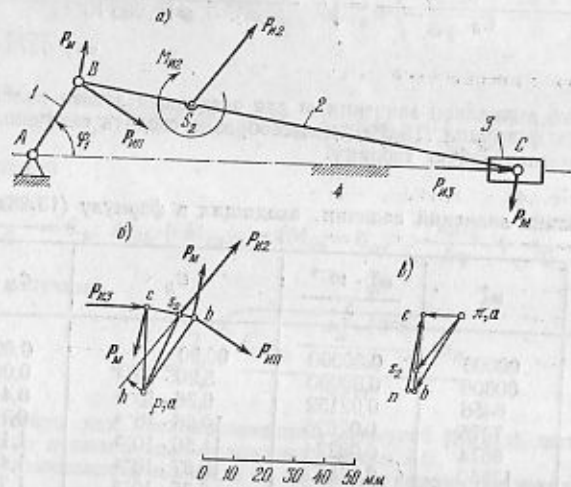


Рис. 88. К примеру 6. К определению производной от приведенного момента инерции по углу поворота звена приведения с помощью рычага Жуковского.

массы звеньев  $m_2 = 3,0$  кг,  $m_3 = 3,5$  кг; момент инерции звена 2 относительно оси, проходящей через его центр масс,  $I_2 = 45 \cdot 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>.

**Решение.** 1) Строим схему механизма (рис. 88, а) в масштабе  $\mu_l = 0,002$  м/мм.

2) Строим повернутый план скоростей (рис. 88, б) механизма по векторному равенству

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

Методом подобия находим на плане скоростей точку  $s_2$  — конец вектора скорости  $v_{S_2}$  центра масс звена 2.

3) Строим план ускорений (рис. 88, в) механизма по векторному равенству

$$a_C = a_B + a_{CB}^n + a_{CB}^t.$$

Методом подобия находим на плане ускорений точку  $s_2$  — конец вектора ускорения  $a_{S_2}$  центра масс звена 2.

4) Вычисляем инерционную нагрузку звеньев 2 и 3. Эта нагрузка для звена 2 будет состоять из силы инерции  $P_{ин2}$ , модуль которой равен

$$P_{ин2} = m_2 a_{S_2} = m_2 (\pi s_2) \mu_a = m_2 (\pi s_2) \frac{\omega_1^2 l_{AB}}{(\pi b)},$$

и инерционного момента  $M_{ин}$ , модуль которого равен

$$M_{ин2} = I_2 \varepsilon = I_2 \frac{a'_{CB}}{l_{BC}} = I_2 \frac{(nc) \mu_a}{l_{BC}} = I_2 \frac{(nc) \omega_1^2 l_{AB}}{l_{BC} (\pi b)},$$

где  $(\pi s_2)$ ,  $(nc)$  и  $(\pi b)$  — отрезки из плана ускорений.

Момент  $M_{ин2}$  представим в виде пары сил  $P_M$  и  $-P_M$ , приложенных в точках  $B$  и  $C$  перпендикулярно к линии  $BC$  (рис. 88, а). Модули этих сил будут равны

$$P_M = \frac{M_{ин2}}{l_{BC}} = I_2 \frac{(nc) \omega_1^2 l_{AB}}{l_{BC}^2 (\pi b)} \mu.$$

Для звена 3 инерционной нагрузкой будет только сила  $P_{ин3}$  с модулем

$$P_{ин3} = m_3 a_3 = m_3 (\pi c) \mu_a = m_3 \frac{(\pi c) \omega_1^2 l_{AB}}{(\pi b)},$$

где  $(\pi c)$  — отрезок из плана ускорений.

5) Определяем с помощью рычага Жуковского приведенную силу. Для этого переносим найденную инерционную нагрузку в соответствующие точки плана скоростей (рис. 88, б). Кроме того, к точке  $b$  плана прикладываем пока неизвестную приведенную силу инерции  $P_{ин}$  перпендикулярно к линии  $AB$  (к линии  $rb$ ). Записываем равенство между суммой моментов от инерционной нагрузки и моментом от приведенной силы инерции относительно начала  $p$  плана скоростей. Из этого равенства находим модуль приведенной силы инерции  $P_{ин}$ :

$$P_{ин} = \frac{P_{ин3} (pc) + P_{ин2} (hb) - P_M (bc)}{(pb)},$$

где  $(pc)$ ,  $(hb)$  и  $(bc)$  и  $(pb)$  — отрезки из плана скоростей.

Модуль приведенного момента сил инерции масс звеньев механизма при его перманентном движении будет

$$|M_{ин}| = P_{ин} l_{AB}.$$

Для определения производной  $dI_{ин}/d\varphi$  момент  $M_{ин}$  следует подставить в формулу (15.15).

Если момент  $M_{ин}$  имеет направление, совпадающее с направлением, выбранным за положительное для угла  $\varphi_1$ , то он должен быть подставлен в формулу (15.15) со знаком «плюс», а в противном случае — со знаком «минус».

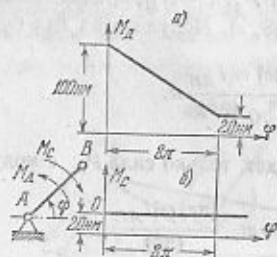
Таким образом, искомая производная  $dI_{ин}/d\varphi$  при  $\varphi_1 = 60^\circ$  будет равна

$$\begin{aligned} \frac{dI_{ин}}{d\varphi_1} &= -\frac{2}{\omega_1^2} M_{ин} = -\frac{2}{\omega_1^2} (-P_{ин} l_{AB}) = \frac{2}{\omega_1^2} \left[ \frac{P_{ин3} (pc) + P_{ин2} (hb) - P_M (bc)}{(pb)} \right] = \\ &= \frac{2}{\omega_1^2} \left[ \frac{m_3 (\pi c) \omega_1^2 l_{AB}}{(\pi b) (pb)} (pc) + \frac{m_2 (\pi s_2) \omega_1^2 l_{AB}}{(\pi b) (pb)} (hb) - \frac{I_2 (nc) \omega_1^2 l_{AB}}{l_{BC}^2 (\pi b) (pb)} (bc) \right] l_{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 0,0036}{30 \cdot 30} \left[ (3,5 \cdot 12 \cdot 28 + 3 \cdot 24 \cdot 6) - \frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 26 \cdot 15}{0,09} \right] = 0,011304 \text{ кгм}^2, \end{aligned}$$

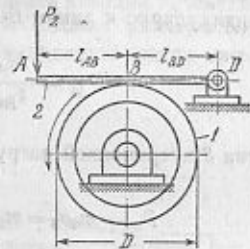
где  $l_{AB} = 0,06$  м,  $l_{BC} = 0,3$  м,  $(pb) = (\pi b) = 30$  мм,  $(\pi c) = 12$  мм,  $(pc) = 28$  мм,  $(\pi s_2) = 24$  мм,  $h = 6$  мм,  $(nc) = 26$  мм,  $(bc) = 15$  мм — размеры звеньев и отрезки из планов скоростей и ускорений.

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 58, 80, 89, 90).

271. Силы и массы машины приведены к звену  $AB$ . Момент движущих сил изменяется согласно графику  $a$ ), момент сил сопротивления — согласно графику  $b$ ), приведенный момент инерции постоянен и равен  $I_{\pi} = 0,314 \text{ кгм}^2$ . При  $\varphi = 0$  угловая скорость



К задаче 271.

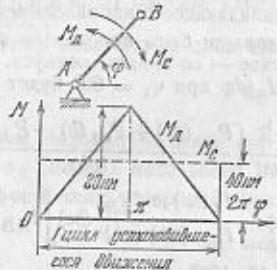


К задаче 272.

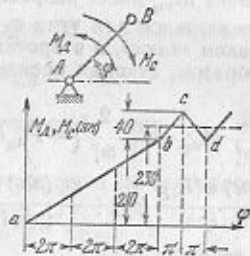
звена приведения  $\omega = 0$ . Определить угловую скорость  $\omega_y$  этого звена в его установившемся движении.

272. Маховик 1 тормозится стержнем 2, прижимаемым к ободу маховика силой  $P_2 = 20 \text{ н}$ . Сила  $P_2$  перпендикулярна к линии  $AD$ . Угловая скорость  $\omega$  маховика перед началом торможения равна  $\omega = 100 \text{ сек}^{-1}$ . Пренебрегая трением в подшипниках вала маховика, определить, сколько оборотов  $n$  сделает маховик до полной остановки, если его момент инерции  $I = 0,4 \text{ кгм}^2$ , диаметр маховика  $D = 0,2 \text{ м}$ ,  $l_{AB} = l_{BD}$  и коэффициент трения обода маховика о стержень равен  $f = 0,2$ .

273. Силы и массы машинного агрегата приведены к звену  $AB$ . Движение этого звена установилось. Угловая скорость в начале цикла установившегося движения  $\omega_0 = 20 \text{ сек}^{-1}$ . Моменты движущих



К задаче 273.



К задаче 274.

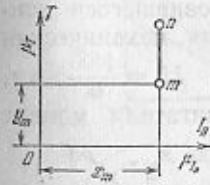
сил  $M_d$  и сил сопротивления  $M_c$  изменяются в соответствии с заданными графиками. Приведенный момент инерции постоянен и равен  $I_{\pi} = 0,3 \text{ кгм}^2$ . Определить максимальную  $\omega_{\max}$  и минимальную  $\omega_{\min}$

угловые скорости звена приведения при его установившемся движении и степень неравномерности движения  $\delta$ .

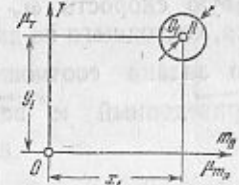
274. Силы и массы машинного агрегата приведены к звену  $AB$ . Движущий момент  $M_d$  в течение трех первых (от начала движения) оборотов звена  $AB$  меняется по закону прямой  $ab$ , а далее по периодическому закону, соответствующему ломаной линии  $bcd$ . Момент сопротивления  $M_c$  подключается в конце третьего оборота, считая от начала движения, и равен  $M_c = 230 \text{ нм}$ , оставаясь все время постоянным. Приведенный момент инерции постоянен и равен  $I_{\pi} = 0,2 \text{ кгм}^2$ . Выяснить, возможно ли установившееся движение звена  $AB$ , и если возможно, то определить коэффициент неравномерности  $\delta$  этого движения.

275. В установившемся движении машинного агрегата его диаграмма Виттенбауэра представляет собой отрезок прямой  $mp$ , параллельный оси  $T$  диаграммы. Длина отрезка  $mp$  равна  $50 \text{ мм}$ . Координаты точки  $m$  равны  $x_m = 50 \text{ мм}$ ,  $y_m = 100 \text{ мм}$ . Определить коэффициент неравномерности движения установившегося режима, если масштабы по осям координат диаграммы Виттенбауэра равны  $\mu_T = 10 \text{ нм/мм}$ ,  $\mu_{I_{\pi}} = 1,0 \text{ кгм}^2/\text{мм}$ .

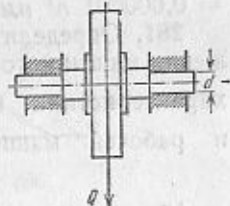
276. В установившемся движении машинного агрегата диаграмма Виттенбауэра его представляет собою окружность радиуса



К задаче 275.



К задаче 276.



К задаче 277.

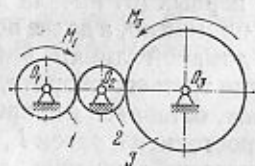
$R = 20 \text{ мм}$ . Координаты центра  $O_1$  этой окружности равны  $x_1 = 90 \text{ мм}$ ,  $y_1 = 80 \text{ мм}$ .

Определить коэффициент неравномерности установившегося движения, если масштабы по осям координат диаграммы Виттенбауэра равны  $\mu_T = 20 \text{ нм/мм}$ ,  $\mu_{I_{\pi}} = 0,5 \text{ кг/мм}$ .

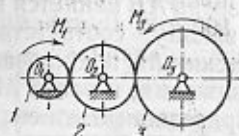
277. Маховик, сила тяжести которого равна  $Q = 2,75 \text{ н}$  и момент инерции  $I = 0,000785 \text{ кгм}^2$ , начинает выбег при числе оборотов  $n = 200 \text{ об/мин}$ , время выбега  $t = 2 \text{ мин}$ . Определить коэффициент трения в подшипниках вала маховика, если диаметр цапф вала  $d = 10 \text{ мм}$ , а угловая скорость маховика убывает по линейному закону.

278. К зубчатым колесам 1 и 3 редуктора приложены моменты  $M_1 = 8 \text{ нм}$  и  $M_3 = 10 \text{ нм}$ . Определить угловое ускорение  $\epsilon_1$  первого колеса, если моменты инерции колес равны  $I_1 = 0,01 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2 = 0,0064 \text{ кгм}^2$ ,  $I_3 = 0,04 \text{ кгм}^2$  и числа зубьев колес равны  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 16$ ,  $z_3 = 40$ .

279. К зубчатым колесам 1 и 3 редуктора приложены моменты  $M_1 = 8$  нм и  $M_3 = 10$  нм. Моменты инерции колес равны  $I_1 = 0,01$  кгм<sup>2</sup>,  $I_2 = 0,0225$  кгм<sup>2</sup>,  $I_3 = 0,04$  кгм<sup>2</sup>, числа зубьев колес



К задаче 278.

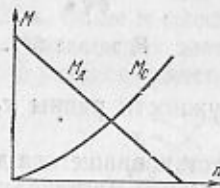


К задаче 279.

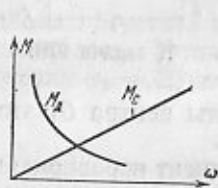
$z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ ,  $z_3 = 40$ . В начальный момент угловая скорость первого колеса равна нулю. Определить, с каким угловым ускорением  $\epsilon_1$  и с какой угловой скоростью  $\omega_1$  будет вращаться колесо 1 через 0,5 сек после начала движения.

280. Определить число  $n_y$  об/мин установившегося движения машинного агрегата, состоящего из двигателя, механическая характеристика которого задана равенством  $M_d = (100 - 0,1 n)$  нм, и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент сопротивления которой изменяется в соответствии с равенством  $M_c = 0,000001 n^2$  нм.

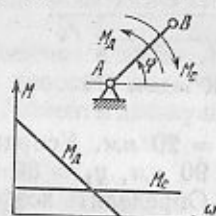
281. Определить угловую скорость  $\omega_y$  установившегося движения машинного агрегата, состоящего из двигателя, механическая характеристика которого задана соотношением  $M = \frac{1000}{\omega}$  нм, и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент



К задаче 280.



К задаче 281.



К задаче 282.

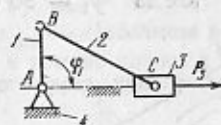
сопротивления которой изменяется в соответствии с равенством  $M_c = 0,1 \omega$  нм.

282. Силы и массы машинного агрегата приведены к звену AB. Движущий момент  $M_d$  изменяется в соответствии с уравнением  $M_d = (100 - c\omega)$  нм, где  $c = 1$  нмсек, а момент сопротивления постоянен и равен  $M_c = 50$  нм. Определить угловую скорость  $\omega_y$  установившегося движения звена AB.

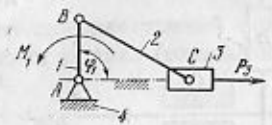
283. К ползуну кривошипно-ползунного механизма приложена движущая сила  $P_3 = 100$  н. Вращение кривошипа начинается из положения, в котором  $\varphi_1 = 90^\circ$ , длина кривошипа  $l_{AB} = 100$  мм.

Масса ползуна 3 равна  $m_3 = 1,0$  кг, момент инерции кривошипа 1 относительно оси A равен  $I_1 = 0,01$  кгм<sup>2</sup>. Пренебрегая массой шатуна 2, определить, с каким угловым ускорением  $\epsilon_1$  начнет вращаться кривошип AB.

284. К ползуну кривошипно-ползунного механизма приложена сила  $P_3 = 100$  н, а к кривошипу AB — момент  $M_1 = 9$  нм. Вращение кривошипа начинается из положения, когда угол  $\varphi_1 = 90^\circ$ .



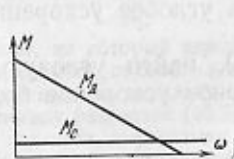
К задаче 283.



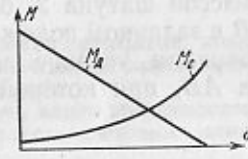
К задаче 284.

Длина кривошипа AB равна  $l_{AB} = 100$  мм, масса ползуна 3 равна  $m_3 = 1,0$  кг. Пренебрегая массами кривошипа и шатуна, определить, с каким угловым ускорением  $\epsilon_1$  начнет двигаться кривошип AB.

285. Механическая характеристика двигателя задана уравнением  $M_d = (100 - c\omega)$  нм, где  $c = 1$  нмсек, приведенный к валу двигателя момент сопротивления постоянен и равен  $M_c = 5,0$  нм,



К задаче 285.



К задаче 286.

приведенный момент инерции масс звеньев машинного агрегата постоянен и равен  $I_n = 0,1$  кгм<sup>2</sup>.

Определить зависимость угловой скорости звена приведения машинного агрегата от времени при разгоне агрегата и найти угловую скорость установившегося движения  $\omega_y$  указанного звена.

286. Центробежный насос, имеющий механическую характеристику, которая выражается равенством  $M_c = (0,1 + 0,0002 \omega^2)$  нм, приводится в движение двигателем, механическая характеристика которого выражается равенством  $M_d = (10,1 - 0,1 \omega)$  нм, где  $\omega$  — угловая скорость наглухо соединенных валов двигателя и насоса. Определить зависимость угловой скорости  $\omega$  от времени в период разгона агрегата, если приведенный момент инерции масс звеньев агрегата постоянен и равен  $I_n = 0,1$  кгм<sup>2</sup>.

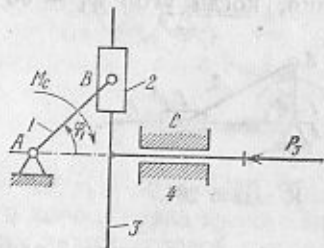
287. К валу A кривошипа AB синусного механизма приложен момент сопротивления  $M_c = 61,5$  нм, а к звену 3 — движущая сила  $P_3 = 1000$  н. В положении, когда угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ , угловая скорость звена AB равна  $\omega_1 = 10$  сек<sup>-1</sup>. Момент инерции кривошипа AB относительно оси A равен  $I_1 = 0,0025$  кгм<sup>2</sup>, масса звена 3 равна



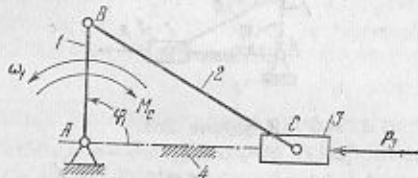
$m_3 = 0,5$  кг, длина кривошипа  $l_{AB} = 0,1$  м. Определить угловое ускорение  $\epsilon_1$  кривошипа  $AB$  в заданном положении его.

288. Сохраняя условия задачи 287, найти угловое ускорение кривошипа  $AB$ , если его угловая скорость равна  $\omega_1 = 40$  сек<sup>-1</sup>.

289. К валу  $A$  кривошипа  $AB$  кривошипно-ползунного механизма приложен момент сопротивления  $M_c = 60$  нм, а к ползуну  $3$  — движущая сила  $P_3 = 500$  н. В положении, когда  $\varphi_1 = 90^\circ$ , угловая



К задачам 287 и 288.



К задачам 289 и 290.

скорость кривошипа равна  $\omega_1 = 50$  сек<sup>-1</sup>. Длина звеньев:  $l_{AB} = 0,1$  м,  $l_{BC} = 0,2$  м. Момент инерции кривошипа относительно оси  $A$  равен  $I_1 = 0,002$  кгм<sup>2</sup>. Масса ползуна  $3$  равна  $m_3 = 0,4$  кг. Пренебрегая массой шатуна  $2$ , определить угловое ускорение  $\epsilon_1$  кривошипа  $AB$  в заданном положении.

290. Сохраняя условия задачи 289, найти угловую скорость кривошипа  $AB$ , при которой его угловое ускорение будет равно нулю.

## § 16. Определение маховых масс машинного агрегата

1°. В этом параграфе рассматриваются задачи, в которых требуется найти значение приведенного момента инерции звена привода машинного агрегата, при котором его угловая скорость не выходила бы за наперед заданные наибольшее и наименьшее значения в периоде установившегося движения этого звена.

Решение поставленных задач сводится к определению дополнительных масс, которые выполняются в виде колеса с тяжелым ободом, называемым маховиком. Расчетным параметром маховика будет его момент инерции  $I_m$  относительно оси вращения.

Установившимся движением машинного агрегата называется такое движение, когда угловая скорость его звена привода периодически (циклически) принимает одно и то же значение.

Такое движение возможно только при условии, когда за один динамический цикл движения звена привода машинного агрегата работа движущих сил  $A_d$  оказывается равной работе сил сопротивления  $A_c$ , т. е. за этот цикл движения работа, затраченная двигателем, полностью расходуется на преодоление всех сил сопротивления, приложенных к звеньям машинного агрегата, т. е.

$$A_d = A_c. \quad (16.1)$$

Угловая скорость ведущего звена в пределах цикла установившегося движения обычно не является постоянной величиной. Колебания угловой скорости обуславливаются двумя причинами:

1) несопадением закона изменения величины приведенного момента движущих сил  $M_d$  с законом изменения величины приведенного момента сил сопро-

тивления  $M_c$  в пределах цикла установившегося движения, как следствие, переменностью значения кинетической энергии машинного агрегата  $T$ ;

2) изменением приведенного момента инерции масс звеньев машинного агрегата  $I_n$ .

2°. Колебание угловой скорости звена привода при установившемся движении оценивается либо коэффициентом неравномерности движения, имеющим вид

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}, \quad (16.2)$$

где  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$  — наибольшее и наименьшее значения угловой скорости звена привода в течение цикла, а  $\omega_{\text{ср}}$  — средняя за цикл (номинальная) угловая скорость этого звена, приближенно равная

$$\omega_{\text{ср}} \approx \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}, \quad (16.3)$$

либо динамическим коэффициентом неравномерности движения Артоболевского, имеющим вид

$$\kappa = \frac{\epsilon_{\max}}{\omega_{\text{ср}}^2}, \quad (16.4)$$

где  $\epsilon_{\max}$  — максимальное угловое ускорение звена привода в течение цикла. Между коэффициентами  $\kappa$  и  $\delta$  существует приближенная связь:

$$\kappa = 2 \frac{\delta}{\Phi}, \quad (16.5)$$

где  $\Phi$  — угол, на который поворачивается звено привода, пока его угловая скорость изменится от своего наибольшего значения до наименьшего (или наоборот: от наименьшего до наибольшего значения).

Имея в виду равенство (16.5), безразлично, каким коэффициентом из указанных двух задается допустимая неравномерность движения звена привода машинного агрегата при расчете маховика.

3°. В задачах об определении момента инерции маховика предполагаются заданными:

- 1) схемы механизмов, вошедших в машинный агрегат, и размеры их звеньев,
- 2) силы, приложенные к звеньям машинного агрегата,
- 3) массы и моменты инерции его звеньев,
- 4) среднее число  $n$  оборотов в минуту звена привода или, что то же, средняя угловая скорость этого звена

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\pi n}{30} \text{ сек}^{-1},$$

5) степень неравномерности  $\delta$  движения звена привода.

На основании указанных данных всегда могут быть получены выражения:

а) приведенных момента движущих сил  $M_d$  и момента сил сопротивления  $M_c$ ,

б) приведенного момента инерции масс звеньев машинного агрегата  $I_n$ .

Мы будем считать, что этот момент инерции представляет собой сумму двух приведенных моментов инерции:  $I_0$  — состоящего из постоянного момента инерции звена привода и тоже постоянного приведенного момента инерции масс звеньев, которые приводятся в движение звеном привода и у которых передаточное отношение постоянно, и  $I_3$  — приведенного момента инерции масс звеньев исследуемого механизма, т. е.:

$$I_n = I_0 + I_3,$$

в) наибольшего значения  $\omega_{\max}$  угловой скорости  $\omega$  звена привода в течение цикла, которое равно

$$\omega_{\max} = \omega_{\text{ср}} \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right), \quad (16.6)$$

г) наименьшего значения  $\omega_{\min}$  угловой скорости  $\omega$  этого звена в течение цикла, которое равно

$$\omega_{\min} = \omega_{\text{ср}} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \quad (16.7)$$

Соотношения (16.6) и (16.7) получаются из равенств (16.2) и (16.3).

Итак, рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом:

Движение звена привода является *установившимся*, так как разность между моментами движущих сил и сил сопротивления  $\Delta M = M_d - M_c$  в каждом рассматриваемом положении ведущего звена, вообще говоря, не равна нулю и приведенный момент инерции  $I_n$  изменяется в функции угла  $\varphi$  поворота звена привода, поэтому угловая скорость  $\omega$  звена привода *колеблется* в некоторых пределах. Пределы колебания угловой скорости заданы коэффициентами  $\delta$  или  $\kappa$ .

Требуется подобрать величину дополнительной массы звена привода так, чтобы эта масса была способна сохранить колебания угловой скорости  $\omega$  в данных пределах: Дополнительная масса выполняется в виде маховика, инертность которого оценивается его моментом инерции  $I_m$ .

Определение величины момента инерции маховика  $I_m$  и составляет цель исследования при решении предлагаемых в настоящем параграфе задач.

Если считать всю массу маховика находящейся в точках средней окружности обода маховика и диаметр этой окружности обозначить через  $D$ , то очевидно, что

$$I_m = m_m \frac{D^2}{4},$$

где  $m_m$  — масса маховика, следовательно,

$$m_m D^2 = 4 I_m \text{ кгм}^2. \quad (16.8)$$

Произведение массы маховика на квадрат его диаметра называется его *маховым моментом*. В некоторых задачах вместо момента инерции маховика требуется найти его маховой момент. Для решения следует воспользоваться формулой (16.8).

4°. Уравнение движения звена привода, написанное в форме закона кинетической энергии (15.5), применительно к углу  $\varphi = \varphi_{\max} - \varphi_{\min}$  поворота этого звена, за который угловая скорость  $\omega$  изменяется от своего наибольшего  $\omega_{\max}$  до своего наименьшего  $\omega_{\min}$  значения, имеет вид

$$A^* = \frac{I_{n\max} \omega_{\max}^2}{2} - \frac{I_{n\min} \omega_{\min}^2}{2}, \quad (16.9)$$

где  $A^* = A_d - A_c$  — разность работ приведенного момента движущих сил и приведенного момента сил сопротивления, вычисленная для угла поворота ведущего звена, для которого его угловая скорость  $\omega$  менялась от своего наибольшего  $\omega_{\max}$  до своего наименьшего  $\omega_{\min}$  значений;  $I_{n\max}$  и  $I_{n\min}$  — приведенные моменты инерции  $I_n$  ведущего звена, вычисленные с учетом момента инерции маховика и соответствующие тем положениям, когда угловая скорость принимает значения  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$ .

Далее имеем:

$$I_n = I_m + I_0 + I_3, \quad (16.10)$$

где  $I_m$  — момент инерции маховика,  $I_0$  — момент инерции звена привода,  $I_3$  — приведенный момент инерции масс ведомых звеньев механизма.

Угловые скорости  $\omega_{\max}^2$  и  $\omega_{\min}^2$  соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta), \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{\text{ср}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

(при допущении, что  $\delta$  так мало, что величиной  $\frac{\delta^2}{4}$  можно пренебречь), где  $\delta$  — коэффициент неравномерности движения, равный  $\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}}$ ,  $\omega_{\text{ср}}$  — средняя угловая скорость ведущего звена, равная  $\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$ .

Равенство (16.9) можно переписать в виде

$$A^* = \frac{(I_m + I_0 + I_{3\max}) \omega_{\text{ср}}^2 (1 + \delta)}{2} - \frac{(I_m + I_0 + I_{3\min}) \omega_{\text{ср}}^2 (1 - \delta)}{2}. \quad (16.12)$$

Из равенства (16.12) получаем *основную формулу* для вычисления величины момента инерции маховика:

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{A^*}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - I_0 - \frac{I_{3\max} (1 + \delta) - I_{3\min} (1 - \delta)}{2\delta} = \\ &= \frac{A^*}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - I_0 - \frac{I_{3\max} + I_{3\min}}{2} - \frac{I_{3\max} - I_{3\min}}{2\delta}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Для определения из этого равенства момента инерции  $I_m$  маховика необходимо знать углы  $\varphi_{\max}$  и  $\varphi_{\min}$ , т. е. положения звена привода, при которых его угловая скорость  $\omega$  принимает наибольшее и наименьшее значения.

5°. Рассмотрим применение уравнения (16.13) в некоторых характерных случаях.

Случай первый. Приведенный момент инерции  $I_3$  постоянен на всем цикле установившегося движения.

В этом случае в формуле (16.13) величины  $I_{3\max}$  и  $I_{3\min}$  оказываются одинаковыми, и искомый момент инерции маховика будет равен

$$I_m = \frac{A^*}{\omega_{\text{ср}}^2 \delta} - (I_0 + I_3). \quad (16.14)$$

В этом случае приведенный момент инерции  $I_n$  звена привода, равный  $I_n = I_m + (I_0 + I_3)$ , оказывается постоянным.

Углы  $\varphi_{\max}$  и  $\varphi_{\min}$ , при которых угловая скорость  $\omega$  приобретает наибольшее  $\omega_{\max}$  и наименьшее  $\omega_{\min}$  значения, легко находятся по графику моментов движущих сил и сил сопротивления.

Пусть момент движущих сил  $M_d$  и момент сил сопротивления  $M_c$  изменяются так, как это показано на рис. 89. В положениях звена привода, где угол  $\varphi$  его поворота имеет значения  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$ ,  $\varphi_d$ , разность моментов  $\Delta M = M_d - M_c$  становится равной нулю и кинетическая энергия  $T$  агрегата имеет экстремальные значения. Очевидно, что именно в этих положениях, при постоянном приведенном моменте инерции, угловая скорость принимает свои экстремальные значения. В положениях звена привода, где  $\varphi = \varphi_b$  и  $\varphi = \varphi_d$ , скорость будет иметь максимальные значения, а в положениях, где  $\varphi = \varphi_a$  и  $\varphi = \varphi_c$ , она будет иметь минимальные значения.

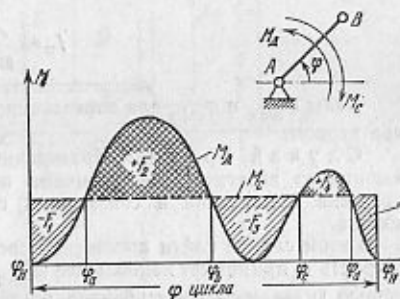


Рис. 89. Определение положений звена привода, где его скорость принимает наибольшее и наименьшее значения.



Установившись теперь, в каких положениях звена приведения скорость  $\omega$  примет свои наибольшее и наименьшее значения.

Это можно сделать путем вычисления избыточной работы на участке изменения угла  $\varphi$  между парами одноименных экстремумов угловой скорости по следующим правилам:

а) если *избыточная работа*  $A_{изб} = A_d - A_c$  между *двумя максимумами* угловой скорости *положительна (отрицательна)*, то наибольшее значение угловой скорости будет представлять собой тот из этих максимумов, который расположен *справа (слева)*;

б) если *избыточная работа*  $A_{изб}$  между *двумя минимумами* угловой скорости *отрицательна (положительна)*, то наименьшее значение угловой скорости будет представлять собой тот из этих минимумов, который расположен *справа (слева)*.

Так, руководствуясь правилом а), устанавливаем, что наибольшее значение  $\omega$  (значение  $\omega_{max}$ ) будет не при  $\varphi = \varphi_a$ , а при  $\varphi = \varphi_b$ , так как  $|F_3| > |F_4|$ . Аналогично по правилу б) устанавливаем, что наименьшее значение  $\omega$  (значение  $\omega_{min}$ ) будет при  $\varphi = \varphi_a$ , так как  $|F_2| > |F_3|$ .

Таким образом, в рассматриваемом случае, интервалом  $\varphi_{max} - \varphi_{min}$  является интервал  $\varphi_b - \varphi_a$  и в формуле (16.14) работу  $A_{изб}$  следует считать пропорциональной площадке  $F_2$  (см. рис. 89).

Случай второй. Приведенный момент инерции  $I_3$  масс ведомых звеньев механизма пренебрежимо мал по сравнению с предполагаемым моментом инерции маховика.

В этом случае в формуле (16.13) величины  $I_{3max}$  и  $I_{3min}$  следует положить равными нулю, и искомый момент инерции маховика  $I_M$  будет равен

$$I_M = \frac{A^*}{\omega_{ср}^2 \delta} - I_0. \quad (16.15)$$

Углы  $\varphi_{max}$  и  $\varphi_{min}$  для определения работы  $A^*$  найдутся так же, как и в случае первом.

Случай третий. Приведенный момент инерции масс ведомых звеньев машинного агрегата  $I_3$  — величина переменная, зависящая от угла  $\varphi$  поворота звена приведения и соизмерима с предполагаемым моментом инерции маховика.

В этом случае найти положения звена приведения, при которых его угловая скорость  $\omega$  принимает наибольшее  $\omega_{max}$  и наименьшее  $\omega_{min}$  значения, можно с помощью диаграммы Виттенбауэра, построенной для цикла установившегося движения ведущего звена машинного агрегата.

Покажем, как это делается.

На рис. 90, а построен график приведенного момента движущих сил  $M_d = M_d(\varphi)$  и график приведенного момента сил сопротивления  $M_c = M_c(\varphi)$ , а на рис. 90, б — график приведенного момента инерции  $I_n$ , складывающегося из момента инерции  $I_0$  масс звена приведения (без предполагаемого момента инерции маховика) и приведенного момента инерции  $I_3$  масс ведомых звеньев машинного агрегата (т. е.  $I_n = I_0 + I_3$ ).

На рис. 90, в построен график кинетической энергии  $T = T(\varphi)$  агрегата. Ось абсцисс  $n - \varphi$  этого графика — *условная*, так как значение кинетической энергии агрегата, которой он обладает в начале цикла установившегося движения, нам неизвестно. Начальное значение его кинетической энергии обозначаем  $T_n$ .

График  $T = T(\varphi)$  строится следующим образом. При перемещении звена приведения из начального положения, в положение, когда  $\varphi = \varphi_a$ , кинетическая энергия агрегата уменьшится на величину работы, равной  $A_{на} = \mu_M \mu_\varphi F_1$ , пропорциональной площади  $F_1$ , где  $\mu_M$  и  $\mu_\varphi$  — масштабы по осям ординат и абсцисс диаграммы моментов. Откладываем вниз от оси  $n - \varphi$  абсцисс диаграммы  $T = T(\varphi)$  (рис. 90, в) от точки  $a$  отрезок  $y_a = \frac{A_{на}}{\mu_T}$ , где  $\mu_T$  — масштаб по оси ор-

динат. Далее, к положению  $\varphi = \varphi_b$  кинетическая энергия машинного агрегата увеличится по отношению к той, которая была при  $\varphi = \varphi_a$ , на величину  $A_{об} = \mu_M \mu_\varphi F_2$ , поэтому от конца ординаты  $y_a$  следует в положении  $b$  отложить вверх отрезок  $y_b = \frac{A_{об}}{\mu_T}$  и т. д.

Построение диаграммы Виттенбауэра (рис. 90, г) производится подобно тому, как это показано в § 15. Следует помнить, что каждая точка кривой на этой

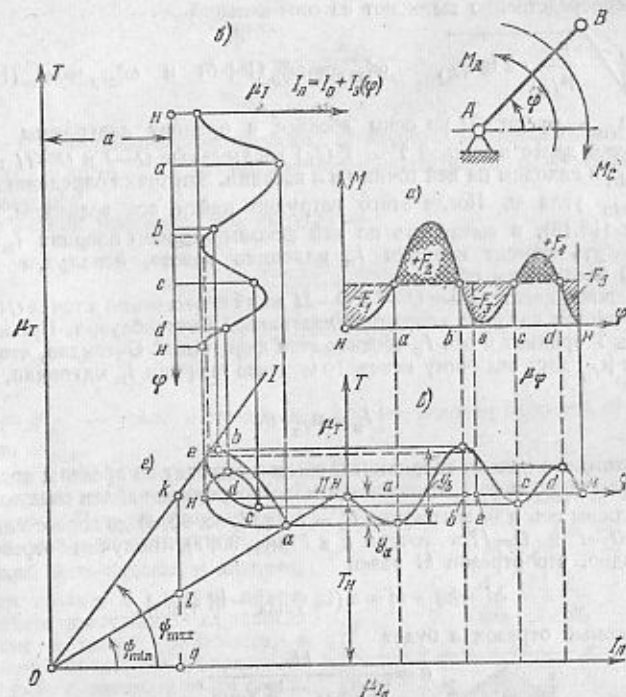


Рис. 90. К определению момента инерции маховика при переменном приведенном моменте инерции (метод Виттенбауэра).

диаграмме отвечает определенному положению звена приведения. Если бы начало  $O$  координат диаграммы Виттенбауэра нам было известно, то лучи  $O - I$  и  $O - II$ , проведенные касательно к кривой  $T = T(I_n)$  (так, как это показано на рис. 90, г) определили бы углы  $\varphi_{max}$  и  $\varphi_{min}$ . По этим углам можно было бы найти значения  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$ .

Вместе с тем точки  $e$  и  $a$  касания лучей  $O - I$  и  $O - II$  с кривой  $T = T(I_n)$  определили бы положения звена приведения (углы  $\varphi_{max}$  и  $\varphi_{min}$ ), при которых скорость  $\omega$  принимает значения  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$ .

В нашем случае приходится решать обратную задачу: по известным углам наклона касательных  $O - I$  и  $O - II$  к кривой  $T = T(I_n)$  найти начало координат  $O$  диаграммы  $T = T(I_n)$  и те положения звена приведения ( $\varphi = \varphi_{max}$  и  $\varphi = \varphi_{min}$ ), при которых скорость  $\omega$  принимает значения  $\omega_{max}$  и  $\omega_{min}$ , а также отрезок  $a$ , пропорциональный искомому моменту инерции  $I_M$  маховика.



Для этого находим тангенсы углов наклона касательных  $O-I$  и  $O-II$  по формулам:

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_{I_n} \omega_{\text{cp}}^2}{\mu_T} (1 + \delta), \quad (16.16)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_{I_n} \omega_{\text{cp}}^2}{\mu_T} (1 - \delta), \quad (16.17)$$

которые непосредственно вытекают из соотношений

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\mu_T}{\mu_{I_n}} \cdot 2 \operatorname{tg} \psi_k}, \quad \omega_{\max}^2 = \omega_{\text{cp}}^2 (1 + \delta) \quad \text{и} \quad \omega_{\min}^2 = \omega_{\text{cp}}^2 (1 - \delta),$$

где  $\mu_T$  и  $\mu_{I_n}$  — масштабы по осям абсцисс и ординат диаграммы  $T = T(\varphi)$ .

Проводим далее к кривой  $T = T(I_n)$  касательные  $O-I$  и  $O-II$  под углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  и находим на ней точки  $e$  и  $a$  касания. Эти точки определяют значения  $\varphi_{\max}$  и  $\varphi_{\min}$  угла  $\varphi$ . После этого нетрудно найти все величины, входящие в формулу (16.13), и вычислить по ней искомый момент инерции  $I_m$  маховика.

Определить момент инерции  $I_m$  маховика можно, используя диаграмму  $T = T(I_n)$  следующим образом.

Продолжаем касательные  $O-I$  и  $O-II$  до их пересечения в точке  $O$  (рис. 90,  $\varepsilon$ ). Точка  $O$  является началом координат диаграммы Виттенбауэра. Проводим через точку  $O$  ось  $T$  ординат и ось  $I_n$  абсцисс этой диаграммы. Очевидно, что отрезок  $a$  в масштабе  $\mu_{I_n}$  даст величину искомого момента инерции  $I_m$  маховика, т. е. будем иметь:

$$I_m = \mu_{I_n} \cdot a. \quad (16.18)$$

Ввиду того что начало координат  $O$  обычно выходит за пределы поля чертежа (так как углы  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  отличаются мало), отрезок  $a$  найдем следующим образом. Продолжим ось  $n - \varphi$  графика  $I_n = I_n(\varphi)$  (рис. 90,  $\delta$ ) до пересечения с касательными  $O-I$  и  $O-II$  в точках  $k$  и  $l$  (рис. 90,  $\varepsilon$ ), получим отрезок  $kl$ . Из чертежа видно, что отрезок  $kl$  равен

$$kl = kq - lq = a (\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}),$$

поэтому искомый отрезок  $a$  будет

$$a = \frac{kl}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}},$$

и, следовательно, момент инерции маховика

$$I_m = \frac{(kl) \mu_{I_n}}{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}.$$

Вставляя в полученное равенство значения тангенсов углов  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  из формул (16.16) и (16.17), окончательно получим:

$$I_m = \frac{(kl) \mu_T}{\omega_{\text{cp}}^2 \cdot \delta}, \quad (16.19)$$

где  $(kl)$  — отрезок в мм,  $\mu_T$  — масштаб по оси ординат графика  $T = T(\varphi)$  в нм/мм,  $\omega_{\text{cp}}$  — угловая скорость звена привода в  $\text{сек}^{-1}$ ,  $\delta$  — коэффициент неравномерности движения.

6°. В некоторых задачах приведенный момент движущих сил может быть заданным зависящим от угловой скорости звена привода,  $M_d = M_d(\omega)$ , а приведенный момент сил сопротивления либо остается постоянным в пределах исследуемого интервала, либо зависит от угла  $\varphi$  звена привода,  $M_c = M_c(\varphi)$ .

Во всех случаях принимается, что момент инерции  $I_3$  пренебрежимо мал по отношению к искомому моменту инерции  $I_m$  маховика.

В тех задачах, где приведенный момент сил сопротивления постоянен, но в отдельные моменты претерпевает резкое изменение на малом интервале времени или угла  $\varphi$  поворота звена привода, для решения следует пользоваться следующими соотношениями:

а) при резком изменении  $M_c$  по времени

$$I_m = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{\omega_{\max}} - I_0, \quad (16.20)$$

$$\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{M_d(\omega) - M_c}$$

где  $t_{\max} - t_{\min}$  — промежуток времени, за который значение скорости  $\omega$  изменяется от  $\omega_{\max}$  до  $\omega_{\min}$ ,  $I_m$  — момент инерции маховика,  $I_0$  — момент инерции звена привода;

б) при резком изменении  $M_c$  по углу  $\varphi$

$$I_m = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{\omega_{\max}} - I_0, \quad (16.21)$$

$$\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{\omega d\omega}{M_d(\omega) - M_c}$$

где  $\varphi_{\max} - \varphi_{\min}$  — угол, в пределах которого угловая скорость  $\omega$  изменяется от  $\omega_{\max}$  до  $\omega_{\min}$ .

Очевидно, что угловая скорость  $\omega$  звена привода претерпевает резкое изменение тогда, когда нагрузка (приведенный момент сил сопротивления) тоже резко меняется. При решении указанных задач угловые скорости  $\omega_{\max}$  и  $\omega_{\min}$  должны быть заданы, и наконец, приводится задача, в которой приведенный момент движущих сил зависит от скорости  $\omega$  звена привода, а приведенный момент сил сопротивления — от угла  $\varphi$  поворота этого звена. В этом случае ее следует решать так, как это указано в книге И. И. Артоболевского, Теория механизмов, 1967, § 98, 1°.

7°. Решим несколько примеров на определение момента инерции маховика.

**Пример 1.** Силы и массы машинного агрегата приведены к звену  $AB$  (рис. 91). Момент движущих сил  $M_d$  изменяется в соответствии с графиком  $M_d = M_d(\varphi)$ , момент сил сопротивления  $M_c$  постоянен на всем цикле установившегося движения. Моментом инерции  $I_3$  масс звеньев агрегата можно пренебречь ввиду их малости по сравнению с искомым моментом инерции  $I_m$  маховика. Средняя угловая скорость звена привода  $\omega_{\text{cp}} = 100 \text{ сек}^{-1}$ . Коэффициент неравномерности движения  $\delta = 0,02$ . Найти величину момента инерции  $I_m$  маховика, которая бы обеспечила заданную неравномерность движения, а также подсчитать значение динамического коэффициента  $\lambda$  неравномерности Артоболевского.

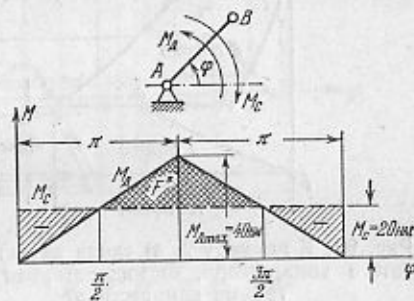


Рис. 91. К примеру 1. Определение момента инерции маховика в случае, когда приведенными моментами инерции звеньев агрегата можно пренебречь.

Решение. Очевидно, что условия примера аналогичны условиям, которые даны во втором случае из трех указанных выше.

1) Определяем величину постоянного момента сопротивления  $M_c$  из условия, что работа движущих сил и работа сил сопротивления за цикл установившегося движения равны между собой. Имеем:

$$M_c \cdot 2\pi = M_{д \max} \frac{2\pi}{2},$$

откуда

$$M_c = \frac{M_{д \max}}{2} = 20 \text{ нм},$$

так как согласно графику (рис. 91)  $M_{д \max} = 40 \text{ нм}$ .

2) Положения звена  $AB$ , при которых его угловая скорость  $\omega$  принимает наибольшее  $\omega_{\max}$  и наименьшее  $\omega_{\min}$  значения, находятся по графикам момента движущих сил  $M_{д} = M_{д}(\varphi)$  и момента сил сопротивления  $M_c = \text{const}$  (рис. 91). Очевидно, что при  $\varphi = \pi/2$  будет иметь место наименьшее  $\omega_{\min}$  значение угловой скорости, а при  $\varphi = 3\pi/2$  — наибольшее  $\omega_{\max}$  ее значение.

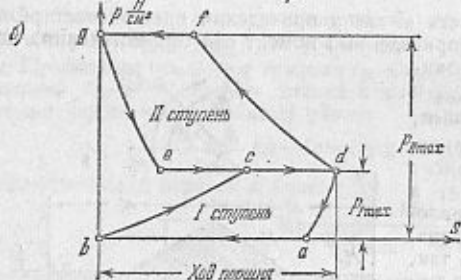
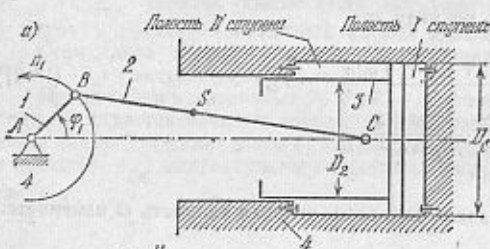


Рис. 92. К примеру 2. а) схема двухступенчатого компрессора, б) индикаторная диаграмма компрессора.

92, а) определить величину момента инерции  $I_m$  маховика, который следует установить на валу  $A$  кривошипа  $AB$ , для того чтобы коэффициент неравномерности движения кривошипа  $AB$  был равен  $\delta = 0,0125$ ; кроме того, найти индикаторную мощность  $N$  компрессора.

Дано:  $l_{AB} = 0,05 \text{ м}$ ,  $l_{BC} = 0,25 \text{ м}$ , координата центра масс  $S$  шатуна  $l_{BS} = 0,10 \text{ м}$ , диаметр цилиндра  $D_1 = 0,13 \text{ м}$ , диаметр штока  $D_2 = 0,11 \text{ м}$ , масса шатуна  $m_2 = 1,8 \text{ кг}$ , масса поршня  $m_3 = 2,2 \text{ кг}$ , момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через его центр масс  $S$ , равен  $I_2 = 0,025 \text{ кгм}^2$ , момент инерции кривошипа вместе с приведенными к нему массами звеньев редуктора и ротора электромотора  $I_0 = 0,07 \text{ кгм}^2$ . Давление газа на поршень задано индикаторной диаграммой (рис. 92, б); максимальное давление на поршень в первой ступени  $p_{I \max} = 22,5 \text{ н/см}^2$ , максимальное давление на поршень во второй ступени

$p_{II \max} = 67,5 \text{ н/см}^2$ . Приведенный к звену  $AB$  момент движущих сил  $M_{д}$  постоянен на всем цикле установившегося движения компрессора, у которого этот цикл соответствует одному обороту звена  $AB$ . Средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $n_1 = 800 \text{ об/мин}$ .

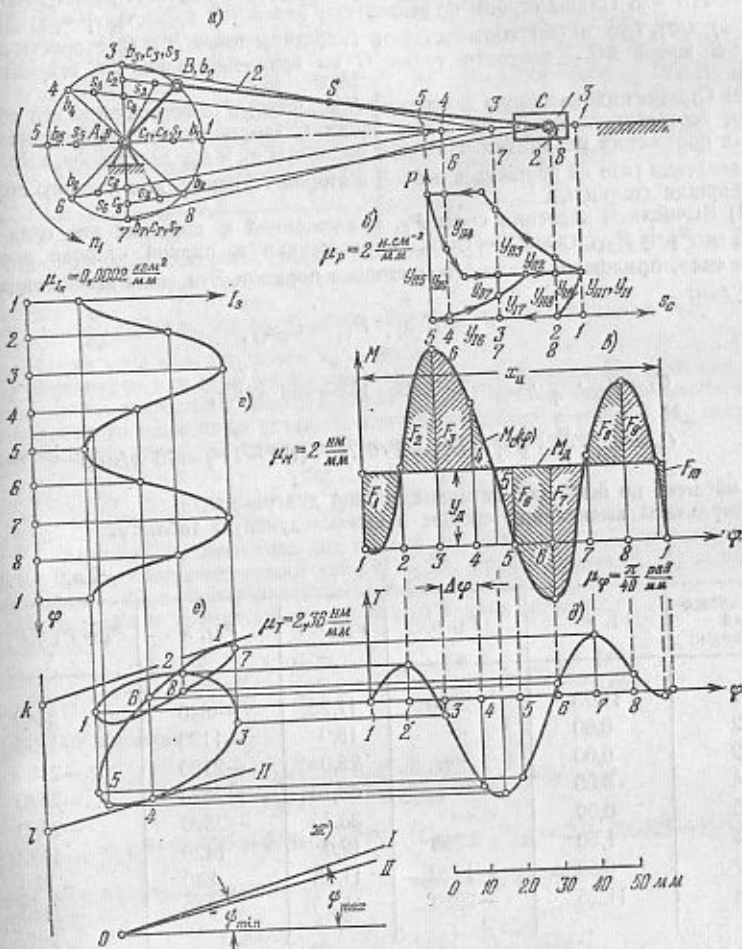


Рис. 93. Расчет маховика для двухступенчатого компрессора по Виттенбауэру: а) схема механизма и повернутые планы скоростей; б) индикаторная диаграмма; в) графики приведенных моментов сил сопротивления и движущих сил; г) график приведенного момента инерции от масс ведомых звеньев механизма; д) график приведенного кинетической энергии; е) диаграмма Виттенбауэра; ж) лучи  $O-I$  и  $O-II$ , проведенные под наибольшим и наименьшим углами.

Решение. Рассматриваемый пример аналогичен разобранным выше третьему случаю определения величины момента инерции маховика. За звено приведения принимаем кривошип  $AB$ .

1) Строим схемы механизма компрессора, соответствующие восьми положениям звена  $AB$  (рис. 93, а) в масштабе  $\mu_l = 0,0025 \text{ м/мм}$ .

2) Строим восемь планов скоростей, относящихся к этим положениям механизма.

Для большей точности эти планы построены непосредственно по схеме механизма и на них векторы скоростей отдельных точек механизма повернуты на  $90^\circ$  (рис. 93, а). Отрезок, изображающий скорость точки  $B$ , принят равным  $AB$ , т. е.  $(pb) = AB$  мм. Планы строим по векторному равенству  $v_C = v_B + v_{CB}$ , отрезки  $(pb)$ ,  $(pc)$ ,  $(ps)$  и  $(bc)$  соответствуют скоростям точек  $B$  и  $C$ , скорости центра масс  $S$  звена  $BC$  — скорости точки  $C$  во вращении звена  $BC$  относительно точки  $B$ .

3) Строим индикаторную диаграмму (рис. 93, б) и отмечаем на ее оси абсцисс точки, соответствующие положениям точки  $C$  (поршня) для рассматриваемых восьми положений механизма. Находим ординаты  $y_I$  и  $y_{II}$  диаграммы, выражающие давление газа на поршень в первой и второй ступенях, для каждого положения поршня (точки  $C$ ).

4) Вычисляем значения силы  $P_3$ , приложенной к поршню; эта сила равна  $P_3 = P_I + P_{II}$ , где  $P_I$  — сила, приложенная к правой стороне поршня,  $P_{II}$  — сила, приложенная к левой стороне поршня. Эти силы вычисляются по формулам:

$$P_I = C_1 y_I, \quad P_{II} = C_2 y_{II},$$

где

$$C_1 = \mu_p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D_1^2 = 2 \cdot 0,785 \cdot 13^2 = 265 \text{ н/мм},$$

$$C_2 = \mu_p \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - D_2^2) = 2 \cdot 0,785 \cdot (13^2 - 11^2) = 75 \text{ н/мм},$$

$\mu_p$  — масштаб по оси ординат индикаторной диаграммы.

Результаты вычислений сводим в нижеследующую таблицу.

Таблица 1

№№ положений механизма	$y_I$ , мм	$P_I$ , н	$y_{II}$ , мм	$P_{II}$ , н	$P_3 = P_I + P_{II}$ , н
1	11,25	2980	11,25	-840	2140
2	0,00	—	15,0	-1125	-1125
3	0,00	—	29,0	-2180	-2180
4	0,00	—	33,75	-2520	-2520
5	0,00	—	33,75	-2520	-2520
6	1,50	-398	19,0	1420	1022
7	6,50	-1720	11,25	840	-880
8	11,25	-2980	11,25	840	-2140

Примечание. Величине силы  $P_3$  приписываем знак минус, если ее направление противоположно направлению скорости  $v_C$  поршня.

5) Приводим силы к звену  $AB$ .

а) Момент сопротивления  $M_c$  находим по формуле

$$M_c = P_3 \cdot l_{AB} \frac{(pc)}{(pb)},$$

где  $M_c$  — приведенный момент сил сопротивления, знак которого совпадает со знаком силы  $P_3$ . Результаты вычислений сводим в табл. 2.

№№ положений механизма	$P_3$ , н	$l_{AB}$ , м	$\frac{(pc)}{(pb)}$	$M_c$	№№ положений механизма	$P_3$ , н	$l_{AB}$ , м	$\frac{(pc)}{(pb)}$	$M_c$
1	2140	0,05	0/20	000,0	5	-2520	0,05	0/20	000,0
2	-1125	0,05	16/20	-45,0	6	1022	0,05	12/20	306,0
3	-2180	0,05	20/20	-109,0	7	-880	0,05	20/20	-494,0
4	-2520	0,05	12/20	-75,5	8	-2140	0,05	16/20	-85,5

На рис. 93, в построен график момента сил сопротивления  $M_c = M_c(\varphi)$ ; масштабы построенного графика равны по оси ординат  $\mu_M = 2$  нм, по оси абсцисс

$\mu_\varphi = \frac{2\pi}{80} = \frac{\pi}{40}$  рад/мм, так как отрезок абсциссы, соответствующий углу поворота звена  $AB$  на угол  $\varphi = 2\pi$ , равен  $x_\pi = 80$  мм.

б) Вычисляем значение постоянного движущего момента  $M_d$ . Так как работа приведенного движущего момента равна работе приведенного момента сил сопротивления за один цикл установившегося движения и момент  $M_d$  постоянен, значение ординаты  $y_d$  на графике моментов находим из условия:

$$y_d = \frac{F}{x_\pi} = \frac{1760 - 120}{80} = \frac{1640}{80} = 20,5 \text{ мм},$$

где  $F$  — площадь, заключенная под кривой  $M_c = M_c(\varphi)$ ,  $x_\pi$  — отрезок оси абсцисс графика, соответствующий углу  $\varphi = 2\pi$ . График момента  $M_d = \text{const}$  показан на рис. 93, в горизонтальным отрезком прямой.

б) Вычисляем приведенный к звену  $AB$  момент инерции  $I_3$  масс звеньев механизма:

$$I_3 = \frac{I_2 \cdot l_{AB}^2 (bc)^2}{l_{BC}^2 (pb)^2} + m_2 l_{AB}^2 \frac{(ps)^2}{(pb)^2} + m_3 l_{AB}^2 \frac{(pc)^2}{(pb)^2};$$

вводим обозначения:

$$C_1 = I_2 \frac{(l_{AB})^2}{(l_{BC})^2} = \frac{0,25 \cdot 0,0025}{0,0625} = 0,001 \text{ кгм}^2,$$

$$C_2 = m_2 l_{AB}^2 = 1,8 \cdot 0,0025 = 0,0045 \text{ кгм}^2, \quad C_3 = m_3 l_{AB}^2 = 2,2 \cdot 0,0025 = 0,0055 \text{ кгм}^2,$$

после чего получаем окончательную расчетную формулу:

$$I_3 = C_1 \frac{(bc)^2}{(pb)^2} + C_2 \frac{(ps)^2}{(pb)^2} + C_3 \frac{(pc)^2}{(pb)^2}.$$

Результаты вычислений сведены в табл. 3. Суммируя цифры, полученные в графах 3, 5 и 7 таблицы, найдем значения приведенного момента инерции  $I_3$  ведомых звеньев для всех восьми положений звена  $AB$ :

$$I_{31} = I_{35} = 0,00262 \text{ кгм}^2, \quad I_{32} = I_{38} = 0,00725 \text{ кгм}^2,$$

$$I_{33} = I_{37} = 0,010 \text{ кгм}^2, \quad I_{34} = I_{36} = 0,00539 \text{ кгм}^2.$$

На рис. 93, г построен график приведенного момента инерции  $I_3$  в зависимости от угла  $\varphi$  поворота звена  $AB$ . Масштаб ординат этого графика равен  $\mu_{I_3} = 0,0002$  кгм<sup>2</sup>/мм.



Таблица 3

№№ положений механизма	$\left(\frac{bc}{pb}\right)^2$	$C_1 \left(\frac{bc}{pb}\right)^2$	$\left(\frac{ps}{pb}\right)^2$	$C_2 \left(\frac{ps}{pb}\right)^2$	$\left(\frac{pc}{pb}\right)^2$	$C_3 \left(\frac{pc}{pb}\right)^2$
1	(20/20)	0,00100	(12/20)	0,00162	(0/20)	0,00000
2	(14/20)	0,00049	(17/20)	0,00324	(16/20)	0,00352
3	(0/20)	0,00000	(20/20)	0,00450	(20/20)	0,00550
4	(14,5/20)	0,00052	(16/20)	0,00289	(12/20)	0,00198
5	(20/20)	0,00100	(12/20)	0,00162	(0/20)	0,00000
6	(14,5/20)	0,00052	(16/20)	0,00289	(12/20)	0,00198
7	(0/20)	0,00000	(20/20)	0,00450	(20/20)	0,00550
8	(14/20)	0,00049	(17/20)	0,00324	(16/20)	0,00352

7) Строим график кинетической энергии  $T = T(\varphi)$ . Размечаем площадки на графике моментов (рис. 93, в), которые пропорциональны алгебраической сумме работ момента движущих сил и момента сил сопротивления при перемещениях звена  $AB$  на углы  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{8}$ , и находим величины этих площадок в  $\text{мм}^2$ . Результаты расчета сводим в табл. 4.

Таблица 4

№№ положений механизма	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Величина площадок в $\text{мм}^2$ и их знак	145	-210	-295	-34	63	280	285	-150	-104	20

Целесообразна проверка, которая состоит в том, что алгебраическая сумма всех площадок должна быть равна нулю. В нашем случае результат проверки благоприятный: сумма положительных площадок равна  $793 \text{ мм}^2$  и сумма отрицательных тоже равна  $793 \text{ мм}^2$ . По данным табл. 4 строим график  $T = T(\varphi)$  (рис. 93, в) с масштабом по оси ординат  $\mu_T = \mu_F \cdot \mu_M \cdot \mu\varphi = 15 \cdot 2 \cdot 3,14/40 = 2,36 \text{ нм/мм}$ , где  $\mu_F = 15 \text{ мм}^2/\text{мм}$  — масштаб площадок, которым задаемся.

8) Строим диаграмму  $T = T(I_{II})$  (рис. 93, в), ее построение ясно из чертежа.

9) Определяем тангенсы углов наклона касательных  $O-I$  и  $O-II$  к диаграмме  $T = T(I_{II})$ :

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\mu_{I_{II}}}{\mu_T} \cdot \frac{\omega_{cp}^2 (1 + \delta)}{2} = \frac{0,0002}{2,36} \cdot \frac{83,5^2 (1 + 0,0125)}{2} = 0,302,$$

$$\operatorname{tg} \psi_{\min} = \frac{\mu_{I_{II}}}{\mu_T} \cdot \frac{\omega_{cp}^2 (1 - \delta)}{2} = \frac{0,0002}{2,36} \cdot \frac{83,5^2 (1 - 0,0125)}{2} = 0,294,$$

где  $\omega_{cp} = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 800}{30} = 83,5 \text{ сек}^{-1}$  и  $\delta = 0,0125$ . По найденным значениям тангенсов определяем соответствующие им углы:  $\psi_{\max} = 16^\circ 48'$ ,  $\psi_{\min} = 16^\circ 24'$ .

На рис. 93, ж эти углы образованы лучами  $O-I$  и  $O-II$  с горизонтальной прямой.

10) Проводим диаграмму  $T = T(I_{II})$  (рис. 93, в) под углами  $\psi_{\max}$  и  $\psi_{\min}$  касательные, параллельные лучам  $O-I$  и  $O-II$  на рис. 93, ж. Далее продолжаем ось  $\varphi$  графика  $I_3 = I_3(\varphi)$  до пересечения с проведенными касательными в точках  $k$  и  $l$ . Измеряем отрезок  $kl$ ; он оказался равным  $35 \text{ мм}$ .

11) Вычисляем величину момента инерции  $I_M$  маховика по формуле (16.19):

$$I_M = \frac{\mu_T (kl)}{\omega_{cp}^2 \delta} - I_0 = \frac{2,36 \cdot 35}{83,5^2 \cdot 0,0125} - 0,007 = 0,945 - 0,07 = 0,875 \text{ кгм}^2.$$

12) Подсчитываем индикаторную мощность компрессора.

Индикаторной мощностью одноцилиндровой поршневой машины называется отношение работы, которую совершает сила давления рабочего тела на поршень за один цикл установившегося движения машины, ко времени этого цикла.

В нашем случае работа сил давления газа на поршень — это то же самое, что и работа приведенного момента сил сопротивления. Поэтому упомянутая мощность будет равна

$$N = \frac{A_c}{t_{II}} = \frac{A_c}{\varphi_{II}} \omega_{cp} = M_{c \text{ ср}} \cdot \omega_{cp},$$

где  $A_c$  — работа приведенного момента сил сопротивления за один цикл;  $t_{II}$  — продолжительность цикла (его период);  $\varphi_{II}$  — угол, на который поворачивается звено приведения за время одного цикла;  $\omega_{cp}$  — средняя угловая скорость звена приведения;

$\frac{A_c}{\varphi_{II}} = M_{c \text{ ср}}$  — средний приведенный момент сил сопротивления, который в нашем случае равен приведенному моменту движущих сил  $M_d = \mu_M \mu_d = 2 \cdot 20,5 = 41 \text{ нм}$ , так как этот момент постоянен.

Подставляя в вышеприведенную формулу для вычисления мощности  $N$  значения  $M_{c \text{ ср}}$  и  $\omega_{cp}$ , получаем:

$$N = M_{c \text{ ср}} \omega_{cp} = M_d \cdot \omega_{cp} = 41 \cdot 83,5 = 3420 \text{ вт}.$$

(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 92—96.)

## ЗАДАЧИ 291—302

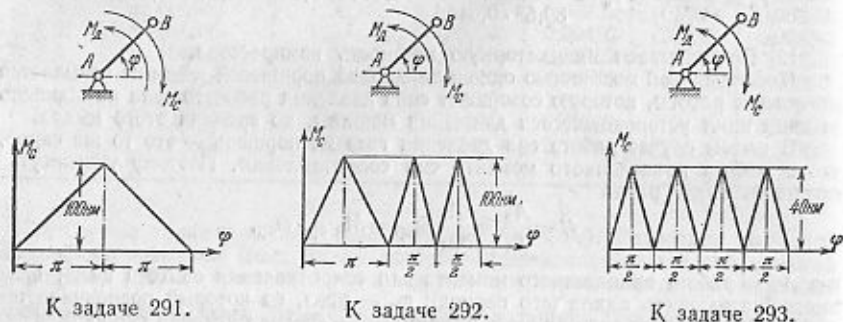
291. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_{II} = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику, а приведенный момент движущих сил  $M_d$  постоянен на всем цикле установившегося движения. Приведенный момент инерции масс звеньев машинного агрегата постоянен и равен  $I_{II} = 0,2 \text{ кгм}^2$ . Средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $\omega_{cp} = 30 \text{ сек}^{-1}$ .

Определить, какой должна быть величина момента инерции маховика, устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , чтобы коэффициент неравномерности движения  $\delta$  был равен  $0,08$ .

292. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_{II} = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику, а приведенный момент движущих сил  $M_d$  постоянен на всем цикле установившегося движения. Приведенный момент инерции масс звеньев машинного агрегата постоянен и равен  $I_{II} = 0,15 \text{ кгм}^2$ ; средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $\omega_{cp} = 25 \text{ сек}^{-1}$ .

Определить, как велика должна быть масса  $m_m$  махового колеса, устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , чтобы коэффициент неравномерности движения  $\delta$  был равен  $0,05$ ; диаметр махового колеса  $D = 0,5$  м.

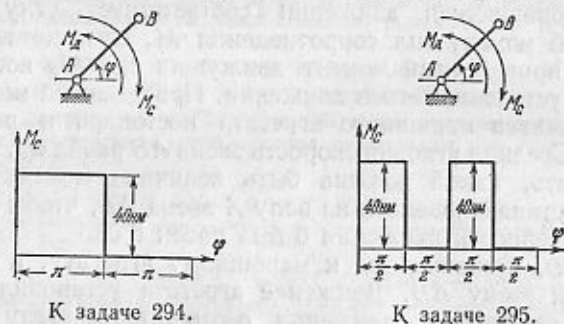
293. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один



цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_n = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику, а приведенный момент движущих сил постоянен на всем цикле установившегося движения. Приведенный момент инерции масс звеньев машинного агрегата постоянен и равен  $I_n = 0,014$  кгм<sup>2</sup>, средняя угловая скорость звена привода  $\omega_{cp} = 25$  сек<sup>-1</sup>.

Определить, как велика должна быть масса  $m_m$  махового колеса, устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , чтобы коэффициент неравномерности движения  $\delta$  был бы равен  $0,04$ ; диаметр маховика  $D_m = 0,5$  м.

294. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один



цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_n = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику. Приведенный момент движущих сил постоянен на всем цикле установившегося движения  $M_d = \text{const}$ . Приведенный момент

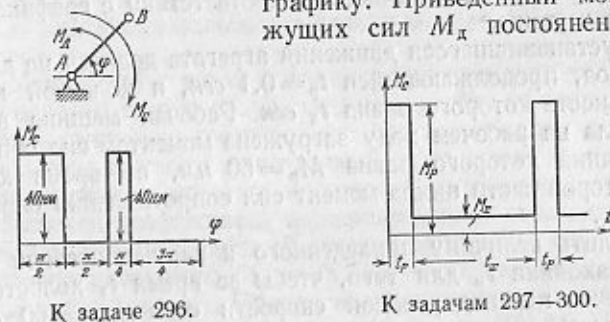
инерции масс звеньев машинного агрегата незначителен, вследствие чего его величиной можно пренебречь. Средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $\omega_{cp} = 40$  сек<sup>-1</sup>.

Определить, как велика должна быть масса  $m_m$  махового колеса, устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , чтобы коэффициент неравномерности движения  $\delta$  был равен  $0,025$ ; диаметр маховика  $D_m = 1000$  мм.

295. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_n = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику. Приведенный момент движущих сил  $M_d$  постоянен на всем цикле установившегося движения. Величиной приведенного момента инерции масс звеньев машинного агрегата можно пренебречь. Средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $\omega_{cp} = 40$  сек<sup>-1</sup>.

Определить, каким должен быть момент инерции маховика  $I_n$ , устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , чтобы коэффициент неравномерности движения  $\delta$  был равен  $0,025$ .

296. Силы, приложенные к машинному агрегату, и его массы приведены к звену  $AB$ . Движение агрегата установилось. Один цикл установившегося движения соответствует углу  $\varphi_n = 2\pi$ . Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  изменяется согласно графику. Приведенный момент движущих сил  $M_d$  постоянен на всем



цикле установившегося движения. Величиной приведенного момента инерции масс звеньев машинного агрегата можно пренебречь. Средняя угловая скорость звена  $AB$  равна  $\omega_{cp} = 25$  сек<sup>-1</sup>.

Определить величину махового момента  $m_m D_m^2$  маховика, устанавливаемого на валу  $A$  звена  $AB$ , при которой коэффициент неравномерности движения  $\delta$  будет равен  $0,02$ .

297. Машинный агрегат состоит из двигателя, механическая характеристика которого задана уравнением

$$M_d = (2375 - 22,7\omega) \text{ н.м.}$$

и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент сопротивления  $M_c$  которой изменяется согласно графику, показанному на чертеже. Цикл установившегося движения агрегата делится на



две части (см. график): рабочий ход, продолжающийся  $t_p = 0,1$  сек, и холостой ход, продолжительность которого  $t_x$  сек. Рабочая машина в первой части цикла загружена моментом сил сопротивления  $M_p = 200$  нм, во время холостого хода (во второй части цикла) момент сил сопротивления оказывается равным  $M_x$ .

Определить величину приведенного к валу двигателя момента инерции маховика для того, чтобы за время  $t_p$  рабочего хода был обеспечен перепад угловой скорости вала двигателя от  $\omega_{\max} = 104$  сек<sup>-1</sup> до  $\omega_{\min} = 101,5$  сек<sup>-1</sup>.

298. Воспользовавшись условием задачи 297, определить время  $t_x$  холостого хода (паузы между рабочими ходами) для того, чтобы вал двигателя к началу следующего рабочего хода смог достичь угловой скорости  $\omega_{\max} = 104$  сек<sup>-1</sup>. Приведенный к валу двигателя момент инерции маховика  $I_m = 6,23$  кгм<sup>2</sup>; нагрузка двигателя на холостом ходу определяется величиной приведенного момента сопротивления  $M_x = 10$  нм.

299. Машинный агрегат состоит из двигателя, механическая характеристика которого задана уравнением

$$M_d = \frac{1000}{\omega} \text{ нм,}$$

и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент сопротивления  $M_c$  которой изменяется в соответствии с графиком, показанным на чертеже.

Цикл установившегося движения агрегата делится на две части: рабочий ход, продолжающийся  $t_p = 0,1$  сек, и холостой ход, продолжительность которого равна  $t_x$  сек. Рабочая машина в первой части цикла на рабочем ходу загружена моментом сил сопротивления, величина которого равна  $M_p = 50$  нм, во время холостого хода во второй части цикла момент сил сопротивления оказывается равным  $M_x$ .

Определить величину приведенного к валу двигателя момента инерции маховика  $I_m$  для того, чтобы за время  $t_x$  холостого хода был обеспечен перепад угловой скорости от  $\omega_{\max} = 200$  сек<sup>-1</sup> до  $\omega_{\min} = 50$  сек<sup>-1</sup>.

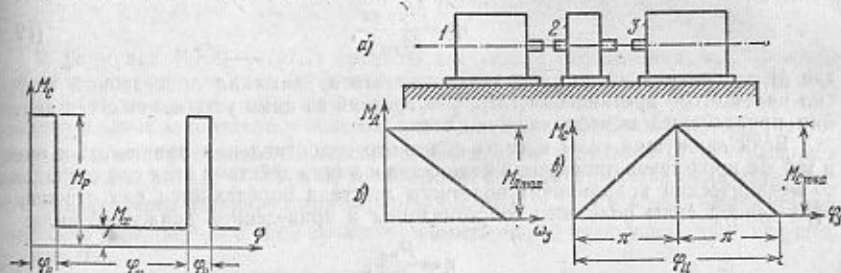
300. Воспользовавшись условием задачи 299, определить время холостого хода  $t_x$  для того, чтобы вал двигателя к началу следующего рабочего хода смог достичь угловой скорости  $\omega_{\max} = 200$  сек<sup>-1</sup>. Приведенный к валу двигателя момент инерции маховика  $I_m = 0,268$  кгм<sup>2</sup>; нагрузка двигателя на холостом ходу определяется величиной приведенного момента сопротивления, равного  $M_x = 2$  нм.

301. Машинный агрегат состоит из двигателя, механическая характеристика которого задана уравнением

$$M_d = (2375 - 22,7\omega) \text{ нм,}$$

и рабочей машины, приведенный к валу двигателя момент сопротивления  $M_c$  которой изменяется в соответствии с графиком, показанным на чертеже.

Цикл установившегося движения агрегата делится на две части: рабочий ход, происходящий при угле поворота вала двигателя  $\varphi_p = \pi$ , и холостой ход, которому соответствует угол поворота того же вала  $\varphi_x = 11\pi$ . Рабочая машина в первой части цикла (на рабочем ходу) загружена моментом сил сопротивления приведенного к валу



К задаче 301.

К задаче 302.

двигателя, равным  $M_p = 200$  нм, во время холостого хода во второй части цикла момент сил сопротивления принимает значение, равное  $M_x = 10$  нм.

Определить величину приведенного к валу двигателя момента инерции маховика  $I_m$ , необходимую для того, чтобы угловая скорость вала двигателя колебалась между  $\omega_{\min} = 101,5$  сек<sup>-1</sup> и  $\omega_{\max} = 104$  сек<sup>-1</sup>.

302. Машинный агрегат (рис. а) состоит из двигателя 1, редуктора 2 и рабочей машины 3. Движение агрегата установилось. Один цикл этого движения соответствует одному обороту вала рабочей машины. Силы и массы приведены к валу рабочей машины.

Найти величину момента инерции  $I_m$  маховика, при котором будет обеспечен коэффициент неравномерности движения  $\delta = 0,25$ .

Известно, что приведенный момент движущих сил  $M_d$  изменяется согласно равенству:  $M_d = M_{d \max} - c\omega$ , где  $M_{d \max} = 400$  нм, а  $c = 2,5$  нмсек (рис. б). Приведенный момент сил сопротивления  $M_c$  задан графиком (рис. в), причем  $M_{c \max} = 400$  нм. Приведенный момент инерции масс звеньев двигателя и редуктора постоянен и равен  $I_0 = 0,02$  кгм<sup>2</sup>. Приведенный момент инерции масс звеньев рабочей машины  $I_3$  пренебрежимо мал по сравнению с искомым моментом инерции маховика.

## § 17. Определение механического коэффициента полезного действия

1°. Механическим коэффициентом полезного действия машины или механизма называется отношение работы сил производственного сопротивления к работе движущих сил за один полный цикл установившегося движения. Коэффициент полезного действия находят по формуле:

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_d} = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{пс}} + A_{\text{вс}}}, \quad (17.1)$$



где  $A_{\text{пс}}$  — работа производственных (полезных) сил сопротивлений,  $A_{\text{д}}$  — работа движущих сил,  $A_{\text{вс}}$  — работа сил вредных сопротивлений.

Если движущие силы и силы полезного сопротивления приведены к одному и тому же вращающемуся звену, то механический коэффициент полезного действия механизма можно определить как отношение среднего приведенного момента сил полезного сопротивления к среднему приведенному моменту движущих сил:

$$\eta = \frac{M_{\text{ср пс}}}{M_{\text{ср д}}}, \quad (17.2)$$

где  $M_{\text{ср пс}}$  — средний за цикл установившегося движения приведенный момент сил полезного сопротивления,  $M_{\text{ср д}}$  — средний за цикл установившегося движения приведенный момент движущих сил.

Если движущие силы и силы полезного сопротивления приведены к одной и той же точке звена приведения механизма и линии действия этих сил совпадают, то механический коэффициент полезного действия определяется как отношение приведенной силы полезного сопротивления к приведенной движущей силе:

$$\eta = \frac{P_{\text{пс}}}{P_{\text{д}}}, \quad (17.3)$$

где  $P_{\text{пс}}$  — средняя за цикл приведенная сила полезного сопротивления,  $P_{\text{д}}$  — средняя за цикл приведенная движущая сила (линии действия обеих сил совпадают).

Таким образом, если представляется более удобным определить коэффициент полезного действия как отношение средних приведенных моментов или приведенных сил, то предварительно следует такое приведение выполнить и после этого составить требуемое отношение.

2°. Механическим коэффициентом полезного действия системы механизмов, составленной из нескольких последовательно соединенных механизмов (к. п. д. многоступенчатых передач), называется произведение механических коэффициентов полезного действия отдельных механизмов (одноступенчатых передач), составляющих данную систему.

3°. На основании указанных в пп. 1° и 2° настоящего параграфа общих формул получаются формулы для определения механических коэффициентов полезного действия одноступенчатых планетарных редукторов.

Вид формулы, которой нужно пользоваться для нахождения механического коэффициента полезного действия планетарного редуктора, зависит от того, какое звено является ведущим и каково у него передаточное отношение.

При этом могут представиться следующие случаи:

1) Колесо  $I$  — ведущее, водило  $H$  — ведомое. Если вычисленное передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора  $i_{IH}$  представляет собой положительную дробь, то коэффициент полезного действия редуктора вычисляется по формуле

$$\eta_{IH} = \frac{1}{i_{IH}} \cdot \left[ 1 - \frac{1}{\eta_{1n}} (1 - i_{IH}) \right]. \quad (17.4)$$

Если вычисленное передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора получается больше единицы или меньше нуля, то коэффициент полезного действия редуктора вычисляется по формуле

$$\eta_{IH} = \frac{1}{i_{IH}} [1 - \eta_{1n} (1 - i_{IH})]. \quad (17.5)$$

2) Водило  $H$  — ведущее, колесо  $I$  — ведомое. Если вычисленное передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора  $i_{IH}$  оказывается положительной дробью, то коэффициент полезного действия редуктора вычисляется по формуле

$$\eta_{HI} = \frac{i_{IH}}{1 - \eta_{1n} (1 - i_{IH})}. \quad (17.6)$$

Если же вычисленное передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора  $i_{IH}$  будет больше единицы или меньше нуля, то коэффициент полезного действия найдется по формуле

$$\eta_{HI} = \frac{i_{IH}}{1 - \frac{1}{\eta_{1n}} (1 - i_{IH})}. \quad (17.7)$$

В формулах (17.4) — (17.7) приняты следующие обозначения:  $\eta_{1n}$  — коэффициент полезного действия обращенного механизма, т. е. такого, у которого те же зубчатые колеса, что и планетарного механизма, но только водило  $H$  остановлено, а ранее закрепленное колесо  $n$  стало свободным (подвижным),  $i_{IH}$  — передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора от центрального колеса  $k$  к водилу,  $\eta_{IH}$  — искомый коэффициент полезного действия одноступенчатого планетарного механизма при ведущем колесе  $I$ ,  $\eta_{HI}$  — искомый коэффициент полезного действия одноступенчатого планетарного механизма при ведущем водиле  $H$ .

Ответы к предлагаемым в настоящем параграфе задачам получены по приведенным выше формулам.

4°. Решим два примера.

**Пример 1** (рис. 94, а). Определить коэффициент полезного действия наклонной плоскости, по которой движется равномерно вверх ползун, нагруженный вертикальной силой  $Q$ ; движущая сила  $P$  параллельна основанию  $xx$  наклонной плоскости.

Коэффициент трения ползуна о плоскость равен  $f = 0,3$ ; угол наклона плоскости  $\alpha = 30^\circ$ .

**Решение.** В данном примере сила  $Q$  является силой полезного сопротивления. Найдем соотношение между движущей силой  $P$  и силой полезного сопротивления  $Q$ , для чего рассмотрим равновесие ползуна. К ползуну приложены (рис. 94, а) сила  $P$ , сила  $Q$  и реакция плоскости  $R$ , отклоненная от нормали  $nn$  на угол трения  $\varphi = \arctg f = \arctg 0,3 = 18^\circ 20'$ . Условием равновесия ползуна будет

$$P + Q + R = 0.$$

На рис. 94, б построен соответствующий треугольник сил. Из него получаем:

$$P = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Пусть ползун переместится вверх на величину  $s$ , тогда работа силы полезного сопротивления будет равна

$$A_{\text{пс}} = Q \cdot s \sin \alpha,$$

а работа движущей силы будет равна

$$A_{\text{д}} = P \cdot s \cos \alpha.$$

Коэффициент полезного действия найдется по формуле (17.1):

$$\eta = \frac{A_{\text{пс}}}{A_{\text{д}}} = \frac{Q \cdot s \cdot \sin \alpha}{P \cdot s \cdot \cos \alpha} = \frac{Q \cdot s \cdot \sin \alpha}{Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot s \cdot \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{0,58}{1,124} = 0,467.$$

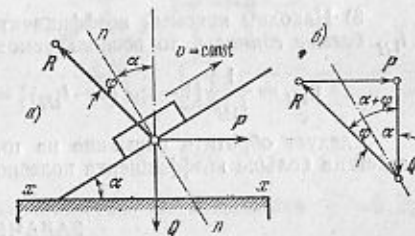


Рис. 94. К примеру 1. Определение коэффициента полезного действия наклонной плоскости.

**Пример 2.** Определить коэффициент полезного действия одноступенчатого планетарного редуктора типа Джемса (рис. 95), у которого ведущим является вал  $O_1$  колеса  $I$ , а ведомым — вал  $O_H$  водила  $H$ . Число зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 20$  и  $z_3 = 60$ . Коэффициент полезного действия каждой пары колес  $\eta = 0,95$ .

**Решение.** 1) Определяем передаточное отношение одноступенчатого планетарного редуктора:

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^H = 1 - i_{12}^H \cdot i_{23}^H = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_1} = 1 + \frac{60}{20} = 4.$$

2) Определяем коэффициент полезного действия обращенного механизма:

$$\eta_{13} = \eta_{12} \cdot \eta_{23} = 0,95 \cdot 0,95 = 0,9.$$

Рис. 95. К примеру 2. Определение коэффициента полезного действия одноступенчатого планетарного редуктора.

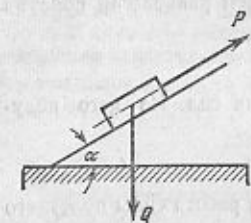
3) Находим искомый коэффициент полезного действия редуктора. Так как  $i_{1H}$  больше единицы, то воспользуемся формулой (17.5):

$$\eta_{1H} = \frac{1}{i_{1H}} [1 - \eta_{13} (1 - i_{1H})] = \frac{1}{4} [1 - 0,9 (1 - 4)] = \frac{3,7}{4} = 0,925.$$

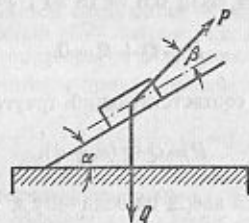
Следует обратить внимание на то, что найденный коэффициент полезного действия больше коэффициента полезного действия обращенного механизма.

#### ЗАДАЧИ 303—312

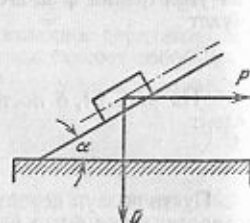
**303.** Определить коэффициент полезного действия наклонной плоскости, по которой движется равномерно ползун, нагруженный вертикальной силой  $Q$ , под воздействием силы  $P$ , параллельной наклонной плоскости. Угол подъема плоскости  $\alpha = 20^\circ$ ; коэффициент трения ползуна о плоскость  $f = 0,2$ . Задача предлагается в двух вариантах: а) ползун движется вверх, б) ползун движется вниз.



К задаче 303.



К задаче 304.



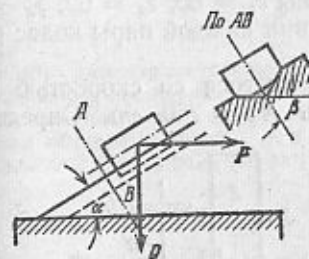
К задаче 305.

**304.** Определить коэффициент полезного действия наклонной плоскости, по которой движется равномерно вверх ползун, нагруженный вертикальной силой  $Q$ , под воздействием силы  $P$ , наклоненной к плоскости под углом  $\beta = 15^\circ$ ; угол подъема плоскости  $\alpha = 15^\circ$ ; коэффициент трения ползуна о плоскость  $f = 0,1$ .

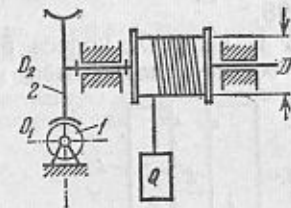
**305.** Определить коэффициент полезного действия наклонной плоскости, по которой движется равномерно ползун, нагруженный

вертикальной силой  $Q$ , под воздействием силы  $P$ , параллельной основанию наклонной плоскости. Угол подъема плоскости  $\alpha = 20^\circ$ ; коэффициент трения ползуна о плоскость  $f = 0,2$ . Задача предлагается в двух вариантах: а) ползун движется вверх, б) ползун движется вниз.

**306.** Определить коэффициент полезного действия наклонной плоскости, по которой движется равномерно вверх клиновидный ползун, нагруженный вертикальной силой  $Q$ , под воздействием силы  $P$ , параллельной основанию плоскости; половина угла заострения



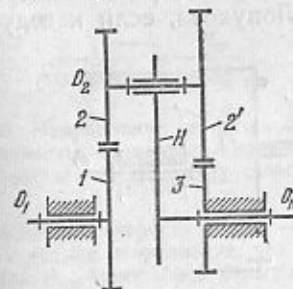
К задаче 306.



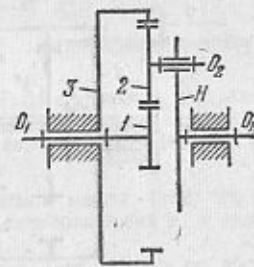
К задаче 307.

клина  $\beta = 30^\circ$ ; коэффициент трения ползуна о плоскость  $f = 0,2$ ; угол подъема плоскости  $\alpha = 20^\circ$ .

**307.** Определить мощность  $N_1$  двигателя червячной лебедки грузоподъемностью  $Q = 500$  н, если вал двигателя непосредственно соединен с валом червяка  $I$  и вращается со скоростью  $n = 1440$  об/мин. Диаметр барабана лебедки  $D = 100$  мм. Число заходов резьбы червяка  $k = 1$ , число зубьев колеса  $z_2 = 40$ , угол подъема винтовой линии червяка  $\alpha = 4^\circ$ ; коэффициент трения в нарезке червяка  $f = 0,1$  (потери на трение в подшипниках передачи и жесткостью троса пренебречь).



К задаче 308.



К задаче 309.

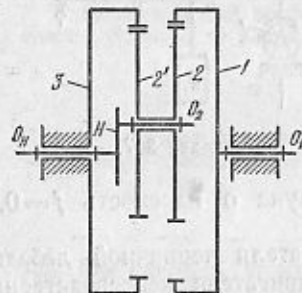
**308.** Определить момент  $M_H$ , снимаемый с вала водила  $H$  планетарного одноступенчатого редуктора, если к валу его колеса  $I$  подводится мощность  $N_1 = 750$  вт. Колесо  $I$  вращается со скоростью  $n_1 = 700$  об/мин. Числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 40$ ,

$z_2 = z_3 = 30$ ; коэффициент полезного действия каждой пары колес  $\eta = 0,9$ .

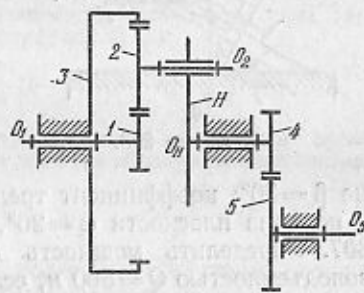
309. Определить момент  $M_H$ , снимаемый с вала водила  $H$  одноступенчатого планетарного редуктора, если к валу его колеса  $1$  подводится мощность  $N_1 = 750 \text{ вт}$  и колесо вращается со скоростью  $n_1 = 400 \text{ об/мин}$ . Числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 20$ ,  $z_3 = 60$ ; коэффициент полезного действия каждой пары колес равен  $\eta = 0,9$ .

310. Определить коэффициент полезного действия планетарного механизма лебедки, если ведущим является вал водила  $H$ , ведомым — вал колеса  $1$ . Числа зубьев колес равны  $z_1 = 65$ ,  $z_2 = 62$ ,  $z_2' = 63$ ,  $z_3 = 66$ ; коэффициент полезного действия каждой пары колес равен  $\eta = 0,98$ .

311. К валу  $O_5$  колеса  $5$ , вращающегося со скоростью  $n_5 = 50 \text{ об/мин}$ , подводится мощность  $N_5 = 750 \text{ вт}$ . Определить



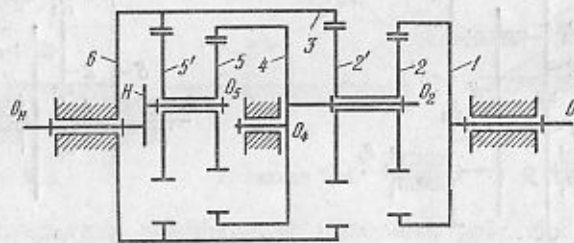
К задаче 310.



К задаче 311.

момент  $M_1$ , который можно снять с вала  $O_1$  колеса  $1$ , если числа зубьев колес равны  $z_1 = z_2 = 20$ ,  $z_3 = 60$ ,  $z_4 = 16$ ,  $z_5 = 32$ ; коэффициент полезного действия каждой пары колес равен  $\eta = 0,9$ .

312. Определить величину момента  $M_1$ , который можно снять с вала  $O_1$  колеса  $1$  редуктора Н. П. Лопухова, если к ведущему



К задаче 312.

валу  $O_H$  водила  $H$  подводится момент  $M_H$ ; числа зубьев колес равны  $z_1 = 24$ ,  $z_2 = 20$ ,  $z_2' = 22$ ,  $z_3 = 26$ ,  $z_4 = 24$ ,  $z_5 = 20$ ,  $z_5' = 22$ ,  $z_6 = 26$ ; коэффициент полезного действия каждой пары колес равен  $\eta = 0,98$ .

## § 18. Динамика механизмов с переменной массой звеньев \*)

1°. В этом параграфе приводятся задачи на составление и применение уравнения движения звена приведения механизма, записываемого в форме уравнения моментов (15.4). Рассматриваются только частные случаи, когда звено с переменной массой движется поступательно относительно стойки механизма.

2°. Решение задач следует начинать, как обычно, с приведения сил и масс, но при этом в связи с переменностью массы звена следует учесть следующие особенности.

1) Ко всем внешним силам (движущим и сопротивления) надо добавлять импульсивную силу  $P_{им}$ . Эта сила находится по формуле

$$P_{им} = \frac{dm}{dt} (u - v), \quad (18.1)$$

где  $dm/dt$  — интенсивность присоединения или отделения массы,  $u$  — абсолютная скорость присоединяемой или отделяемой массы,  $v$  — абсолютная скорость звена, к которому присоединяется или от которого отделяется масса.

Если обозначить через  $c = u - v$  относительную скорость присоединения или отделения массы, то формула (18.1) переписывается так:

$$P_{им} = \frac{dm}{dt} c. \quad (18.2)$$

В случае присоединения массы импульсивная сила  $P_{им}$  направлена по относительной скорости  $c$ , а в случае отделения массы она направлена в противоположную сторону. Импульсивная сила  $P_{им}$  может играть роль как силы движущей, так и силы сопротивления.

Возможны следующие четыре случая.

Случай первый: масса присоединяется (рис. 96, а) и направление абсолютной скорости присоединения  $u$  совпадает с направлением абсолютной скорости звена  $v$ . Очевидно, что присоединение возможно только, если  $|u| > |v|$ .

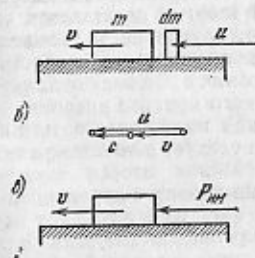


Рис. 96. Направление импульсной силы в случае присоединения массы при  $u$  и  $v$ , направленных в одну сторону.

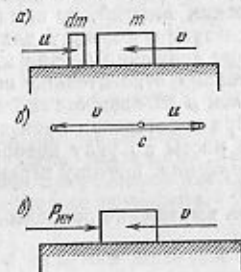


Рис. 97. Направление импульсной силы в случае присоединения массы при  $u$  и  $v$ , направленных в разные стороны.

Относительная скорость  $c = u - v$  присоединяемой массы (рис. 96, б) будет иметь такое же направление, что и абсолютная скорость звена  $v$ , и импульсивная сила  $P_{им}$  будет силой движущей (рис. 96, в).

Случай второй: масса присоединяется (рис. 97, а), но абсолютная скорость присоединения  $u$  имеет направление, противоположное направлению абсолютной скорости звена  $v$ . Тогда относительная скорость присоединяемой массы  $c = u - v$  (рис. 97, б) всегда будет иметь направление, противоположное

\*) Подробно вопрос изложен в книге А. П. Бессонова, Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев, «Наука», 1967.



направлению абсолютной скорости звена  $\varphi$ , и импульсивная сила будет силой *сопротивления* (рис. 97, в).

Случай третий: масса *отделяется* (рис. 98, а) и абсолютная скорость отделения  $u$  имеет направление, противоположное направлению абсолютной скорости звена  $\varphi$ . Тогда направление относительной скорости отделяемой массы  $c = u - \varphi$  (рис. 98, б) будет тоже противоположно направлению скорости  $\varphi$ . В этом случае импульсивная сила будет силой *движущей* (рис. 98, в).

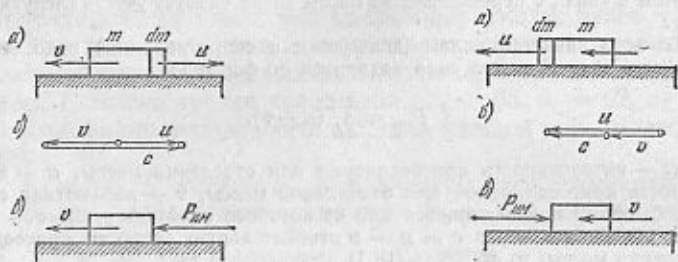


Рис. 98. Направление импульсивной силы в случае отделения массы при  $u$  и  $\varphi$ , направленных в разные стороны.

Случай четвертый: масса *отделяется* (рис. 99, а) и абсолютная скорость  $u$  имеет направление абсолютной скорости звена  $\varphi$ , что возможно только при условии  $|u| > |\varphi|$ ; тогда относительная скорость отделяемой массы  $c = u - \varphi$  (рис. 99, б) будет направлена в ту же сторону, что и абсолютная скорость звена  $\varphi$  и, следовательно, импульсивная сила будет силой *сопротивления* (рис. 99, в).

2) Приведенная масса находится по общему правилу на основании равенства кинетических энергий, но при подсчете кинетической энергии звена с переменной массой следует в формулу для определения этой энергии подставлять скорость *переносного* движения центра масс звена. В частном случае, когда звено движется поступательно относительно неподвижных направляющих, эта скорость — *такая же, как и абсолютная скорость любой точки звена*.

3) При нахождении производной от приведенного момента инерции *приведенной* массы по углу поворота звена приведения надо пользоваться принципом *затвердения*, поэтому переменную массу звена следует *выносить* за знак производной.

Пусть выражение приведенного момента инерции звена с переменной массой имеет вид

$$I_n = m \left( \frac{v_{S_{\text{пер}}}}{\omega} \right)^2. \quad (18.3)$$

Производная будет равна

$$\frac{d^2 I_n}{d\varphi} = m \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{v_{S_{\text{пер}}}}{\omega} \right)^2, \quad (18.4)$$

где  $m$  — переменная масса звена,  $v_{S_{\text{пер}}}$  — скорость переносного движения центра масс звена,  $\omega$  — угловая скорость звена приведения, \* — символ, указывающий, что применен принцип *затвердения*, и, следовательно, переменная масса вынесена за знак производной,  $\frac{v_{S_{\text{пер}}}}{\omega}$  — передаточное отношение от звена с переменной массой к звену приведения.

3°. Производную от квадрата передаточного отношения  $(v_{S_{\text{пер}}}/\omega)^2$  можно найти следующим образом,

Скорость центра масс звена с переменной массой в переносном движении выразим через *аналог* этой скорости

$$v_{S_{\text{пер}}} = \frac{ds_{S_{\text{пер}}}}{d\varphi} \omega, \quad (18.5)$$

где  $ds_{S_{\text{пер}}}/d\varphi$  — *аналог* скорости центра масс в переносном движении,  $\omega$  — угловая скорость звена приведения.

Подставляя значение скорости  $v_{S_{\text{пер}}}$  центра масс в формулу (18.4), получим:

$$\frac{d^2 I_n}{d\varphi} = m \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{ds_{S_{\text{пер}}}}{d\varphi} \right)^2. \quad (18.6)$$

Выполняя дифференцирование, найдем

$$\frac{d^2 I_n}{d\varphi} = m 2 \frac{ds_{S_{\text{пер}}}}{d\varphi} \frac{d^2 s_{S_{\text{пер}}}}{d\varphi^2}, \quad (18.7)$$

где  $d^2 s_{S_{\text{пер}}}/d\varphi^2$  — *аналог* тангенциального ускорения центра масс звена в переносном движении, при перманентном вращении ведущего звена.

#### 4°. Пример \*).

Составить в форме уравнения моментов уравнение движения звена приведения  $AB$  скребкового конвейера применительно к его рабочему ходу (рис. 100).

В основу машины положен кривошипно-ползунный механизм. Размеры звеньев механизма известны, также известны масса  $m_{\text{шп}}$  ползуна  $3$  и масса загрузки, которая изменяется по линейному закону, согласно графику (рис. 100, б). Массами кривошипа и шатуна пренебрегаем, угловая скорость кривошипа  $\omega$ , движущий момент  $M_d$  приложен к звену  $AB$ . Трением в кинематических парах механизма, а также трением транспортируемых деталей о стол  $4$  пренебречь. Решение дать в общем виде.

Описание работы конвейера. При ходе ползуна влево (холостой ход) стол  $4$  не загружен, при ходе его вправо (рабочий ход) стол  $4$  загружен деталями  $a$ , достаточно близко расположенными одна от другой и имеющими массы малыми по сравнению с общей массой загрузки. Таким образом, цикл работы конвейера состоит из холостого хода (ползун  $3$  движется влево) и рабочего хода (ползун  $3$  движется вправо).

Решение. 1) Находим импульсивную силу  $P_{\text{им}}$ . Она действует во время рабочего хода и равна (18.1)

$$P_{\text{им}} = \frac{dm}{dt} (u - v_C) = - \frac{dm}{dt} v_C;$$

здесь мы имеем дело с *присоединением* массы, что отвечает случаю второму (п. 2 настоящего параграфа) и так как абсолютная скорость присоединения массы равна нулю, т. е.  $u = 0$ , то относительная скорость  $c$  этой же массы равна  $c = -v_C$ , т. е. эта скорость направлена против скорости движения ползуна  $v_C$ , поэтому импульсивная сила  $P_{\text{им}}$  будет силой сопротивления.

\* По просьбе авторов пример составлен профессором А. П. Бессоновым.

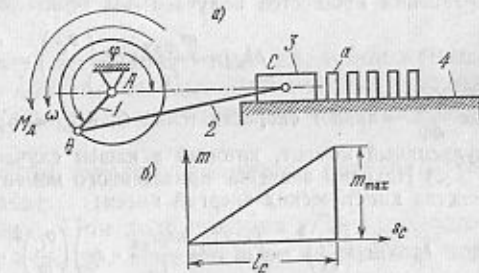


Рис. 100. К примеру на составление уравнения движения звена приведения механизма при ведомом звене с переменной массой. Схема скребкового конвейера.

Выясним модуль импульсивной силы  $P_{им}$ .  
В соответствии с заданным законом изменения массы загрузки (рис. 100, б), имеем, что

$$m = \frac{m_{max}}{l_C} \cdot s_C,$$

где  $l_C$  — ход ползуна  $\mathcal{B}$ ,  $s_C$  — текущее перемещение ползуна  $\mathcal{B}$ , совпадающее с перемещением точки  $C$ .

Величина всей движущейся массы  $m_{\mathcal{B}}$  равна

$$m_{\mathcal{B}} = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} \cdot s_C \right).$$

Интенсивность изменения массы равна

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_{\mathcal{B}}}{ds_C} \frac{ds_C}{dt} = \frac{m_{max}}{l_C} v_C,$$

так как  $\frac{ds_C}{dt} = v_C$ . Окончательно импульсивная сила  $P_{им}$  равна

$$P_{им} = \frac{m_{max}}{l_C} v_C \cdot v_C = \frac{m_{max}}{l_C} v_C^2.$$

2) Приведем импульсивную силу к звену привода  $AB$ . На основании сравнения мощностей получаем:

$$M_{им} = \frac{m_{max}}{l_C} \cdot v_C^2 \left( \frac{v_C}{\omega} \right) = \frac{m_{max}}{l_C} v_C^2 \frac{ds_C}{d\varphi},$$

где  $\frac{ds_C}{d\varphi}$  — аналог скорости точки  $C$ ,  $M_{им}$  — приведенный к ведущему звену импульсивный момент, который в нашем случае будет моментом сопротивления.

3) Находим значение приведенного момента инерции  $I_{п}$ . На основании равенства кинетических энергий имеем:

$$I_{п} = m_{\mathcal{B}} \left( \frac{v_C}{\omega} \right)^2 = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} \cdot s_C \right) \left( \frac{v_C}{\omega} \right)^2 = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} \cdot s_C \right) \left( \frac{ds_C}{d\varphi} \right)^2.$$

4) Находим производную от приведенного момента инерции по углу поворота  $\varphi$  звена привода:

$$\frac{d^* I_{п}}{d\varphi} = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} \cdot s_C \right) \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{ds_C}{d\varphi} \right)^2 = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} s_C \right) 2 \frac{ds_C}{d\varphi} \frac{d^2 s_C}{d\varphi^2}.$$

5) Уравнение движения звена привода на рабочем ходу конвейера будет иметь вид

$$M_d - M_{им} = I_{п} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^* I_{п}}{d\varphi},$$

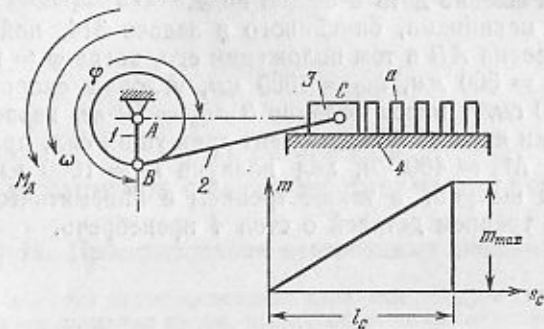
или, после подстановки в него значений приведенного момента от импульсивной силы, приведенного момента инерции и производной от приведенного момента инерции по углу поворота ведущего звена, окончательно примет вид:

$$M_d - \frac{m_{max}}{l_C} \cdot v_C^2 \left( \frac{ds_C}{d\varphi} \right) = \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} s_C \right) \left( \frac{ds_C}{d\varphi} \right)^2 \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \left( m_{0\mathcal{B}} + \frac{m_{max}}{l_C} s_C \right) \cdot 2 \cdot \frac{ds_C}{d\varphi} \frac{d^2 s_C}{d\varphi^2}.$$

Примечание: для холостого хода уравнение движения будет иметь вид (15.4), как и для механизмов с постоянной массой.

313. Найти угловое ускорение  $\epsilon$  звена  $AB$  кривошипно-ползунного механизма скребкового конвейера в том положении его, когда  $\varphi = 270^\circ$ :

Дано:  $l_{AB} = 500$  мм,  $l_{BC} = 1500$  мм, угловая скорость кривошипа  $AB$   $\omega = 10$  сек<sup>-1</sup>, масса ползуна  $\mathcal{B}$   $m_{0\mathcal{B}} = 10$  кг, максимальная



К задаче 313.

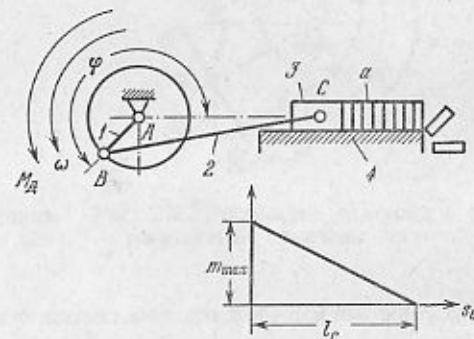
масса загрузки  $m_{max} = 50$  кг, момент движущих сил, приложенный к ведущему звену  $AB$ ,  $M_x = 400$  нм. Массами кривошипа и шатуна, а также трением в кинематических парах механизма и трением детали о стол 4 пренебречь.

Загрузка конвейера массами деталей изменяется согласно графику, показанному на чертеже.

Описание работы конвейера. При ходе ползуна влево (холостой ход машины) стол 4 не загружен, при ходе его вправо (рабочий ход) ползун  $\mathcal{B}$  сдвигает детали  $a$ , находящиеся на малом расстоянии одна от другой и имеющие массы, малые по сравнению с общей массой загрузки.

314. Составить уравнение движения звена  $AB$  кривошипно-ползунного механизма, относящееся к его рабочему ходу.

Описание работы механизма. При ходе ползуна  $\mathcal{B}$  влево (холостой ход) на стол 4 подается другим механизмом (на чертеже не показанным) пакет деталей  $a$ ; при ходе ползуна  $\mathcal{B}$  вправо (рабочий ход) ползун  $\mathcal{B}$  сдвигает пакет деталей вдоль стола 4. При подходе к краю стола детали одна за другой отделяются от пакета и сыпаются



К задачам 314 и 315.

в бункер. Массы деталей малы по сравнению с общей массой загрузки и размеры их также малы по сравнению с ходом ползуна  $l_C$ .

Считать заданными: размеры звеньев, угловую скорость кривошипа  $\omega$ , массу ползуна  $m_{03}$ , первоначальную массу загрузки  $m_{\max}$ , момент движущих сил  $M_d$ . Массами кривошипа и шатуна, а также трением в кинематических парах механизма и трением деталей о стол пренебречь. Решение дать в общем виде.

315. Для механизма, описанного в задаче 314, найти угловое ускорение  $\epsilon$  звена  $AB$  в том положении его, когда  $\varphi = 270^\circ$ .

Дано:  $l_{AB} = 500$  мм,  $l_{BC} = 1500$  мм, угловая скорость кривошипа  $\omega = 10$  сек<sup>-1</sup>, масса ползуна  $m_{03} = 10$  кг, первоначальная масса загрузки  $m_{\max} = 50$  кг, момент движущих сил, приложенный к звену  $AB$ ,  $M_d = 400$  нм, ход ползуна  $l_C = 1000$  мм. Массами кривошипа и шатуна, а также трением в кинематических парах механизма и трением деталей о стол пренебречь.

## ЧАСТЬ ВТОРАЯ

### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ (КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ)

#### ГЛАВА ПЯТАЯ

#### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

#### § 19. Проектирование центроидных механизмов

1°. При решении задач настоящего параграфа следует строить *центроиды* в относительном движении звеньев, представляющие собою геометрические места мгновенных центров вращения в относительном движении рассматриваемых звеньев.

2°. Для того чтобы найти мгновенный центр вращения в движении одного звена относительно другого, удобно воспользоваться *методом обращения движения*. Этот метод состоит в том, что всем звеньям механизма сообщается скорость,

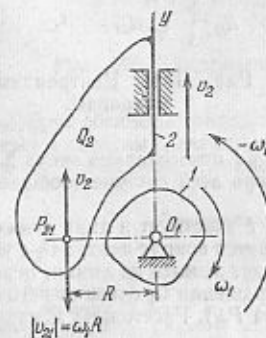


Рис. 101. Построение центра мгновенного вращения в относительном движении звеньев.

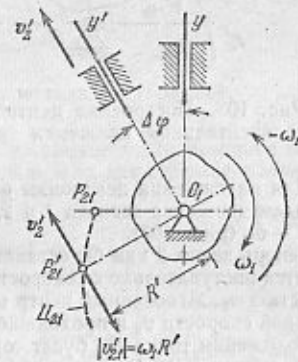


Рис. 102. Построение центроид в относительном движении звеньев.

обратная скорости того звена, относительно которого требуется построить центроид другого.

На рис. 101 показан механизм, у которого звено 1 вращается с угловой скоростью  $\omega_1$ , а звено 2 движется поступательно со скоростью  $v_2$ . Надо построить центроиду в движении звена 2 относительно звена 1.

Обращаем движение, т. е. сообщаем всей системе угловую скорость  $-\omega_1$ . Тогда звено 1 как бы останавливается, а звено 2 теперь участвует в двух движениях: вращается вокруг центра  $O_1$  с угловой скоростью  $-\omega_1$  и движется поступательно вдоль своих направляющих со скоростью  $v_2$ .



Найдем на плоскости  $Q_2$  звена 2 точку  $P_{21}$ , скорость которой в рассматриваемом движении звена 2 будет равна нулю, т. е. найдем мгновенный центр вращения звена 2 в его движении относительно звена 1. Точка  $P_{21}$ , очевидно, лежит на линии, проходящей через центр вращения звена 1, т. е. через точку  $O_1$ , и перпендикулярной скорости  $v_2$  звена 2, слева от точки  $O_1$  (рис. 101). Расстояние  $R$  от точки  $P_{21}$  до точки  $O_1$  найдем из условия

$$v_2 = \omega_1 \cdot R, \quad (19.1)$$

откуда

$$R = \frac{v_2}{\omega_1}.$$

В последующий интервал времени (рис. 102) звено 2 повернется вокруг центра  $O_1$  на угол  $\Delta\varphi$  по направлению угловой скорости  $-\omega_1$  и займет положение  $y'O_1$ . Мгновенный центр вращения  $P'_{21}$  в этом положении находится аналогичным построением.

Соединив точки  $P_{21}$ ,  $P'_{21}$  и т. д. плавной кривой, получим искомую centroиду в движении звена 2 относительно звена 1, т. е. centroиду  $U_{21}$ .

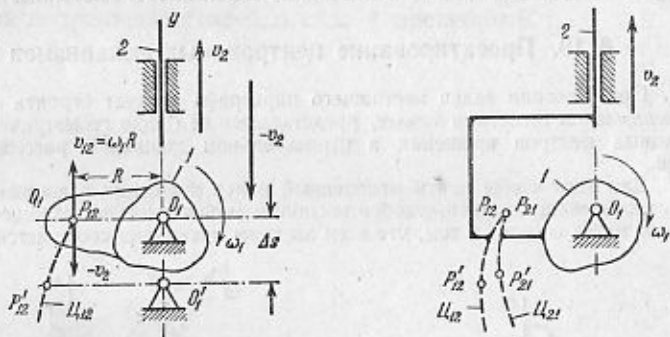


Рис. 103. Построение centroид в относительном движении звеньев.

Рис. 104. Centroидный механизм.

Для нахождения centroиды в движении звена 1 относительно звена 2 также обращаем движение звеньев 1 и 2, но только теперь всей системе сообщаем скорость  $-v_2$  (рис. 103).

Теперь звено 2 как бы остановилось, а звено 1 участвует в двух движениях: движется поступательно со скоростью  $-v_2$  и вращается вокруг центра  $O_1$  с угловой скоростью  $\omega_1$ . Мгновенный центр вращения  $P_{12}$  будет лежать на линии, перпендикулярной скорости  $v_2$  и проходящей через центр вращения  $O_1$  слева от него (в данном положении точка  $P_{12}$  будет совпадать с точкой  $P_{21}$ ). Расстояние  $R$  находится из соотношения (19.1).

В последующий момент времени звено 1 переместится вдоль линии  $yO_1$  на величину  $\Delta s$  в направлении скорости  $-v_2$  и центр вращения его займет положение  $O_1'$ . Мгновенный центр вращения  $P'_{12}$  находится аналогично тому, как ранее был найден мгновенный центр вращения  $P_{12}$ . Соединив точки  $P_{12}$ ,  $P'_{12}$  и т. д. плавной кривой, получим centroиду  $U_{12}$  в движении звена 1 относительно звена 2.

Выполнив centroиды  $U_{21}$  и  $U_{12}$  материально, связав их жестко со звеньями 1 и 2 и обеспечив их взаимное перекачивание без скольжения, получим centroидный механизм (рис. 104).

3°. Пример. Спроектировать передачу (рис. 105, а), осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством centroид в относительном движении. Звено 1 вращается равномерно, а звено 2 вращается с угловой скоростью  $\omega_2(t)$  в соответствии с графиком (рис. 105, б). За время  $T$  одного оборота звена 1 звено 2 тоже совершает один оборот. Расстояние между центрами вращения звеньев  $l_{O_1O_2} = 200$  мм.

Решение. 1) Определяем значение постоянной угловой скорости  $I$ -го звена и строим ее график  $\omega_1(t)$ . За время  $T$  оба звена поворачиваются на один и тот же угол, равный  $2\pi$ , поэтому площади под графиком  $\omega_2(t)$  и  $\omega_1(t)$  должны быть равны:  $\frac{20}{2} \cdot T + 20 \cdot T = \omega_1 \cdot T$ , откуда  $\omega_1 = 30$  сек<sup>-1</sup>.

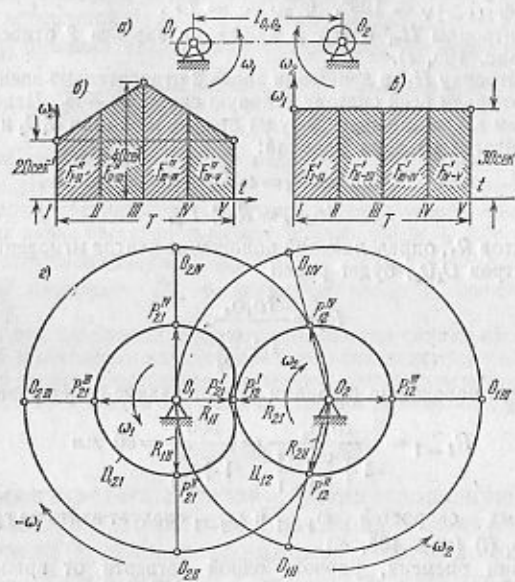


Рис. 105. Построение centroидного механизма (пример).

2) Делим абсциссы графиков  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(t)$  на равные части (в нашем случае на четыре) и находим значения угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  для отдельных моментов времени  $T$ . Их значения приведены в таблице.

Таблица

Значения угловых скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_2$

№№ позиций	Значение времени в долях, $T$	Угловая скорость $\omega_1$ первого звена в сек <sup>-1</sup>	Угловая скорость $\omega_2$ второго звена в сек <sup>-1</sup>	№№ позиций	Значение времени в долях, $T$	Угловая скорость $\omega_1$ первого звена в сек <sup>-1</sup>	Угловая скорость $\omega_2$ второго звена в сек <sup>-1</sup>
I	0	30	20	IV	$3T/4$	30	30
II	$T/4$	30	30	V	$T$	30	20
III	$T/2$	30	40				

3) Находим углы поворота звена 2 в движении его относительно звена 1 за каждую четверть времени его полного оборота.

Эти углы будут пропорциональны площадкам  $F'_{I-II}$ ,  $F'_{II-III}$ ,  $F'_{III-IV}$ ,  $F'_{IV-V}$  на графике  $\omega_1(t)$  (рис. 105, а). В нашем случае эти площадки, а следовательно, и углы равны между собой, т. е.  $\varphi'_{I-II} = \varphi'_{II-III} = \varphi'_{III-IV} = \varphi'_{IV-V} =$

$= 90^\circ$  (надо иметь в виду, что весь угол поворота звена 2 в относительном движении по отношению к звену 1 за время  $T$  равен  $360^\circ$ ).

Находим такие же углы поворота звена 1 в движении его относительно звена 2. Эти углы будут пропорциональны площадкам  $F_{I-II}^*$ ,  $F_{II-III}^*$ ,  $F_{III-IV}^*$ ,  $F_{IV-V}^*$  на графике  $\omega_2(t)$  (рис. 105, б). Их значения нетрудно вычислить:  $\varphi_{I-II}^* = 75^\circ$ ,  $\varphi_{II-III}^* = 105^\circ$ ,  $\varphi_{III-IV}^* = 105^\circ$ ,  $\varphi_{IV-V}^* = 75^\circ$ .

4) Строим центроиды  $U_{21}$  и  $U_{12}$  в движении звеньев 2 относительно 1 и 1 относительно 2 (рис. 105, з).

а) Строим центроиду  $U_{21}$  в движении звена 2 относительно звена 1. Обращаем движение, т. е. сообщаем всей системе угловую скорость  $-\omega_1$ . Мгновенный центр вращения  $P_{21}$  в этом движении звена 2 будет лежать на линии  $O_1O_2$  и расстояние до его центра  $O_1$  найдется из двух условий:

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad (19.2)$$

$$l_{O_1O_2} = R_1 + R_2 \quad (19.3)$$

откуда радиус-вектор  $R_1$ , определяющий положение центра мгновенного вращения  $P_{21}$  на линии центров  $O_1O_2$ , будет равен

$$R_1 = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2}} \quad (19.4)$$

Для начального положения (позиция I) этот радиус будет равен

$$R_{1-I} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_1-I}{\omega_2-I}} = \frac{200}{1 + \frac{30}{20}} = 80 \text{ мм}$$

(значения угловых скоростей  $\omega_1-I$  и  $\omega_2-I$  следует взять из графиков  $\omega_2(t)$  (рис. 105, б) и  $\omega_1(t)$  (рис. 105, в)).

По прошествии времени, равного одной четверти от времени цикла  $T$ , линия центров  $O_1O_2$  повернется на угол  $\varphi_{I-II}^* = \angle O_2O_1O_{2-II} = 90^\circ$  и займет положение  $O_1O_{2-II}$  (позиция II), радиус-вектор  $R_{1-II}$  определится по формуле (19.4)

$$R_{1-II} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_1-II}{\omega_2-II}} = \frac{200}{1 + \frac{30}{30}} = 100 \text{ мм}$$

для остальных позиций радиусы-векторы найдутся аналогично:

$$R_{1-III} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_1-III}{\omega_2-III}} = \frac{200}{1 + \frac{30}{40}} = 114,3 \text{ мм}$$

$$R_{1-IV} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_1-IV}{\omega_2-IV}} = \frac{200}{1 + \frac{30}{30}} = 100 \text{ мм}, \quad R_{1-V} = R_{1-I} = 80 \text{ мм}.$$

Соединив центры мгновенного вращения  $P_{21}^I, P_{21}^{II}, P_{21}^{III}, P_{21}^{IV}, P_{21}^V$  плавной кривой, получим центроиду  $U_{21}$  в движении звена 2 относительно звена 1.

б) Строим центроиду  $U_{12}$  в движении звена 1 относительно звена 2. Обращаем движение, т. е. сообщаем всей системе угловую скорость  $-\omega_2$ . Центр мгновенного вращения  $P_{12}$  в этом движении звена 1 будет также лежать на линии центров  $O_1O_2$  и расстояние его от центра  $O_2$  найдется из равенств (19.2) и (19.3).

Следовательно, радиус-вектор  $R_2$ , определяющий положение центра мгновенного вращения  $P_{12}$  на линии  $O_1O_2$ , будет равен

$$R_2 = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}} \quad (19.5)$$

для начального положения (позиция I) этот радиус будет равен

$$R_{2-I} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_2-I}{\omega_1-I}} = \frac{200}{1 + \frac{20}{30}} = 120 \text{ мм}.$$

По прошествии времени, равного одной четверти времени цикла  $T$ , линия центров  $O_1O_2$  повернется на угол  $\varphi_{I-II}^* = \angle O_1O_2O_{1-II} = 75^\circ$  и займет положение  $O_2O_{1-II}$  (позиция II), а радиус-вектор  $R_{2-II}$  будет равен

$$R_{2-II} = \frac{l_{O_1O_2}}{1 + \frac{\omega_2-II}{\omega_1-II}} = \frac{200}{1 + \frac{30}{30}} = 100 \text{ мм}.$$

Для остальных положений значения радиусов-векторов получим аналогичными расчетами:  $R_{2-III} = 85,7 \text{ мм}$ ,  $R_{2-IV} = 100 \text{ мм}$ ,  $R_{2-V} = R_{2-I} = 120 \text{ мм}$ .

Для проверки правильности решения следует помнить, что сумма радиусов-векторов всегда равна расстоянию между центрами  $O_1$  и  $O_2$ , т. е.  $R_1 + R_2 = l_{O_1O_2}$ .

Соединив центры мгновенного вращения  $P_{12}^I, P_{12}^{II}, P_{12}^{III}, P_{12}^{IV}, P_{12}^V$  плавной кривой, получим центроиду  $U_{12}$  в движении звена 1 относительно звена 2 (см. рис. 105, з).

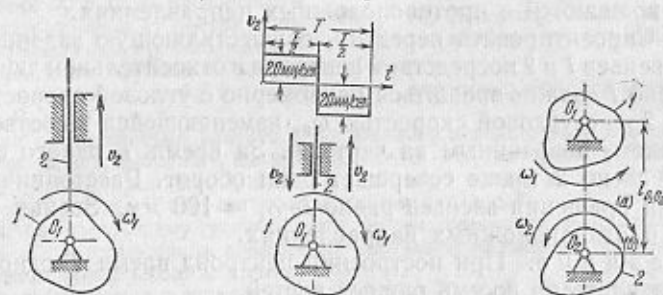
Выполнив эти центроиды материально, жестко связав их соответственно со звеньями 1 и 2 и обеспечив их взаимное перекатывание, получим передачу заданного движения звеньев посредством центроид в относительном движении.

(См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 24 и 106.)

#### ЗАДАЧИ 316—320

316. Спроектировать передачу, осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством центроид в относительном движении, если звено 1 должно вращаться с постоянной угловой скоростью  $\omega_1 = 1,0 \text{ сек}^{-1}$ , а звено 2 — двигаться поступательно с постоянной скоростью  $v_2 = 20 \text{ ммсек}^{-1}$ .

317. Спроектировать передачу, осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством центроид в относительном движении,



К задаче 316.

К задаче 317.

К задаче 318.

если звено 1 должно вращаться равномерно с угловой скоростью  $\omega_1$ , а звено 2 — двигаться возвратно-поступательно со скоростью  $v_2 = 20 \text{ мм/сек}$ , в соответствии с графиком изменения этой скорости за время  $T = 12,56 \text{ сек}$  одного оборота звена 1.

318. Спроектировать передачу, осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством центроид в относительном дви-



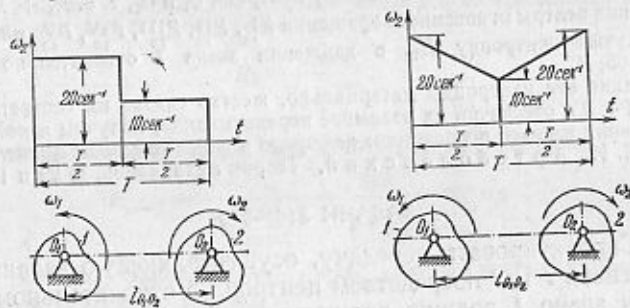
жении, если звенья должны вращаться с постоянным отношением угловых скоростей

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 2.$$

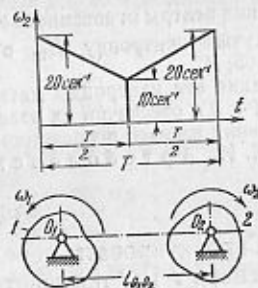
Постоянное расстояние между центрами вращения звеньев равно  $l_{O_1O_2} = 100$  мм.

Рассмотреть случаи, когда звенья вращаются: а) в противоположных направлениях и б) в одном и том же направлении.

319. Спроектировать передачу, осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством центроид в относительном движении, если звено 1 должно вращаться равномерно с угловой скоростью  $\omega_1$ , а звено 2 — с угловой скоростью  $\omega_2$ , изменяющейся в соответствии с графиком, показанным на чертеже. За время  $T$  одного



К задаче 319.



К задаче 320.

оборота звена 1 звено 2 должно также совершать один оборот. Расстояние между центрами вращения звеньев равно  $l_{O_1O_2} = 100$  мм. Звенья вращаются в противоположных направлениях.

320. Спроектировать передачу, осуществляющую заданное движение звеньев 1 и 2 посредством центроид в относительном движении, если звено 1 должно вращаться равномерно с угловой скоростью  $\omega_1$ , а звено 2 — с угловой скоростью  $\omega_2$ , изменяющейся в соответствии с графиком, показанным на чертеже. За время  $T$  одного оборота звена 1 звено 2 также совершает один оборот. Расстояние между центрами вращения звеньев равно  $l_{O_1O_2} = 100$  мм. Звенья вращаются в противоположных направлениях.

У к а з а н и е. При построении центроид время  $T$  одного оборота разделить на восемь равных частей.

## § 20. Проектирование механизмов со взаимогибаемыми профилями

1°. Воспроизвести заданное движение звеньев с помощью центроид в относительном движении, выполненных материально, не всегда представляется возможным или целесообразным. Тогда заданное движение звеньев можно воспроизвести посредством взаимогибаемых профилей, которые, находясь в зацеплении, обеспечивают взаимное перекачивание указанных центроид.

Такие профили образуются взаимогибаемыми кривыми и называются сопряженными профилями. Эти профили должны удовлетворять условию, чтобы нормаль в точке их касания проходила через центр мгновенного вращения (полос зацепления) в относительном движении звеньев.

Одним сопряженным профилем можно задаться, тогда другой может быть найден либо методом Понселе, либо методом Рёло.

При построении сопряженного профиля по методу Понселе следует обратить движение и построить заданный профиль в ряде последовательных положений, которые он занимает в относительном движении по отношению к искомого профилю; тогда искомым профилем будет огибающей кривой всех положений заданного. Сопряженный профиль по методу Рёло строится по отдельным точкам его.

В задачах настоящего параграфа предлагается строить сопряженные профили для следующих случаев задания движения ведущего и ведомого звеньев: 1) оба звена вращаются в разных направлениях с постоянным передаточным отношением; 2) оба звена вращаются в одном направлении с постоянным передаточным отношением; 3) одно звено вращается с постоянной угловой скоростью, а другое движется поступательно с постоянной линейной скоростью.

2°. Рассмотрим построение сопряженного профиля по методу Рёло на примере, когда оба звена вращаются в разных направлениях с постоянным передаточным отношением (рис. 106).

Центры вращения звеньев 1 и 2 — точки  $O_1$  и  $O_2$  — расположены по разные стороны от центра мгновенного вращения  $P_{12}$  в относительном движении звеньев. Радиусы начальных окружностей, т. е. центроид в относительном движении звеньев, равны  $R_1$  и  $R_2$ .

Для осуществления заданного постоянного передаточного отношения заданного звена 1, выбранном нами, профилем  $K_1 - K_1$ , который в рассматриваемый момент времени проходит через мгновенный центр вращения (полос зацепления)  $P_{12}$ . Найдем на звене 2 сопряженный заданному профилю  $K_2 - K_2$ , который удовлетворял бы следующему условию: где бы ни соприкасались профили  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$ , нормаль к ним, проведенная через точку их касания, должна проходить через постоянный полюс зацепления  $P_{12}$ .

Очевидно, что одна точка искомого профиля  $K_2 - K_2$  уже известна — она совпадает с точкой  $P_{12}$ , так как нормаль к профилю всегда проходит через полюс зацепления  $P_{12}$ . Построим еще одну точку профиля  $K_2 - K_2$ . Отметим на профиле  $K_1 - K_1$  точку  $A_1$ , проведем через нее нормаль  $n_1 n_1$  к профилю  $K_1 - K_1$ . Найдем на плоскости чертежа точку  $A_0$ , в которой будет соприкосновение точки  $A_1$  профиля  $K_1 - K_1$  с соответствующей точкой  $A_2$  искомого профиля  $K_2 - K_2$ . Нормаль  $n_1 n_1$  в рассматриваемом положении звеньев пересекает начальную окружность звена 1 в точке  $a_1$ . По прошествии некоторого промежутка времени, вследствие вращения звеньев 1 и 2, эта точка совпадает с точкой  $P_{12}$ . Одновременно с точкой  $a_1$  в полюс зацепления  $P_{12}$  придет и точка  $a_2$  звена 2, лежащая на дуговом расстоянии от полюса  $P_{12}$ , равном  $\sim P_{12}a_1 = \sim P_{12}a_2$ . Поэтому точку зацепления  $A_0$  профилей

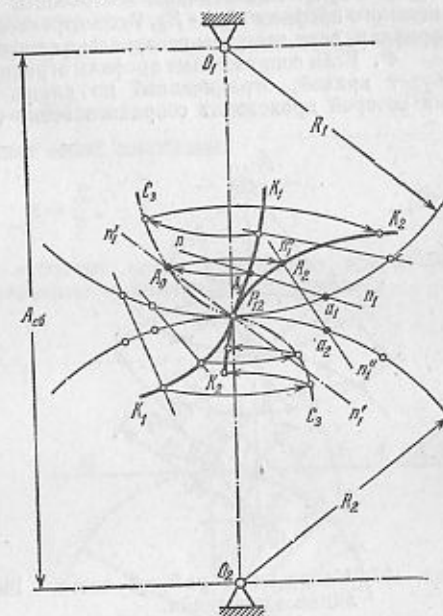


Рис. 106. Построение сопряженных профилей по методу Рёло.



$K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  можно найти следующим образом. Из точки  $O_1$  проводим окружность радиуса  $O_1A_1$  и пересекаем ее дугой окружности, проведенной из полюса зацепления  $P_{12}$ , с радиусом, равным  $P_{12}A_0 = a_1A_1$ .

3°. Геометрическое место точек соприкосновения взаимногибаемых профилей  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  образует линию зацепления  $C_3$ .

Теперь найдем на профиле  $K_2 - K_2$  точку  $A_2$ , которая встретится с точкой  $A_1$  профиля  $K_1 - K_1$  в точке зацепления  $A_0$ . Эта точка расположена в пересечении окружностей, проведенных из точки  $O_2$  радиусом  $O_2A_0$  и из точки  $a_2 -$  радиусом  $P_{12}A_0 = a_2A_2$ . Аналогичным построением можно найти как угодно много точек искомого профиля  $K_2 - K_2$ . Рассмотренным методом можно строить сопряженные профили, если известны центры в относительном движении звеньев.

4°. Если сопряженные профили ограничены по длине, то и линия зацепления будет кривой, ограниченной по длине. Участок кривой линии зацепления, на которой происходит соприкосновение сопряженных профилей ограниченной

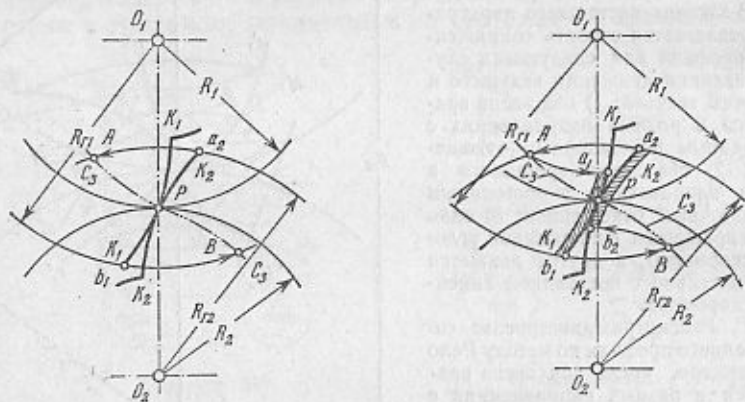


Рис. 107. Нахождение рабочей части линии зацепления.

Рис. 108. Нахождение рабочих участков сопряженных профилей.

длины, называется *рабочей частью* линии зацепления. На рис. 107 показано, как находится рабочая часть линии зацепления. Пусть сопряженные профили  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  построены и известна их линия зацепления  $C_3$ .

Очевидно, что вершина профиля  $K_2 - K_2$ , т. е. точка  $a_2$ , придет в зацепление с профилем  $K_1 - K_1$  в точке  $A$  на линии  $C_3$  зацепления. Аналогично точка  $b_1 -$  вершина профиля  $K_1 - K_1$  — придет в зацепление с профилем  $K_2 - K_2$  в точке  $B$  на линии  $C_3$  зацепления. Вне участка  $AB$  зацепление профилей  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$  происходить не будет.

5°. Вследствие ограниченности профилей по длине (рис. 108) не все их точки будут использованы для целей зацепления. В самом деле, вместе с вершиной (головкой) профиля  $K_2 - K_2$ , т. е. точкой  $a_2$ , на линию зацепления  $C_3$  придет точка  $a_1$  профиля  $K_1 - K_1$ . За этой точкой, считая по направлению к центру  $O_1$  вращения колеса 1, профиль  $K_1 - K_1$  не будет зацепляться с профилем  $K_2 - K_2$ . Вершина (головка) профиля  $K_1 - K_1$ , т. е. точка  $b_1$ , придет в зацепление с профилем  $K_2 - K_2$  в точке  $B$  линии  $C_3$  зацепления. В ту же точку придет и точка  $b_2$  на профиле  $K_2 - K_2$ . За точкой  $b_2$ , считая по направлению к центру  $O_2$  колеса 2, профиль  $K_2 - K_2$  не будет зацепляться с профилем  $K_1 - K_1$ .

Дуги  $a_1b_1$  и  $a_2b_2$  называются *рабочими частями* профилей  $K_1 - K_1$  и  $K_2 - K_2$ .

6°. Непрерывность передачи движения сопряженных профилей, принадлежащих зубчатым колесам 1 и 2 (рис. 109), будет обеспечена только тогда, когда дуга зацепления  $S$  будет больше шага  $t$  зацепления; при этом шаг и дуга должны

измеряться по одной и той же окружности. На рис. 109 показаны начальные окружности зубчатых колес, радиусы которых  $R_1$  и  $R_2$ ; проведены окружности головок сопряженных профилей, радиусы которых  $R_{r1}$  и  $R_{r2}$ ; указана рабочая часть  $AB$  линии зацепления. Профиль  $K_{21}$  зуба на колесе 2 входит в зацепление в точке  $B$  и выходит из зацепления в точке  $A$ . Точки пересечения профиля  $K_2$  с начальной окружностью в момент входа в зацепление и выхода его из зацепления, т. е. точки  $d$  и  $d'$ , ограничивают дугу зацепления  $S$ . На том же рисунке показан профиль  $K_{211}$  следующего зуба того же колеса, находящийся на дуге в расстоянии  $t$  от профиля  $K_{21}$ . Непрерывность зацепления будет обеспечена, если выполняется неравенство

$$S > t. \quad (20.1)$$

Коэффициент перекрытия представляет собой отношение

$$v = \frac{S}{t}. \quad (20.2)$$

7°. В практике проектирования зубчатых колес наибольшее применение нашли сопряженные профили, образованные эвольвентой окружности.

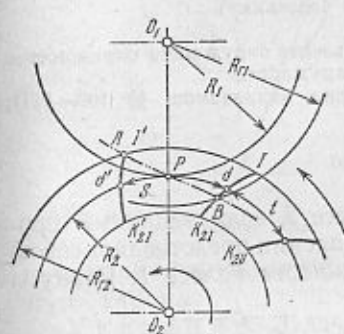


Рис. 109. Графическое нахождение дуги зацепления.

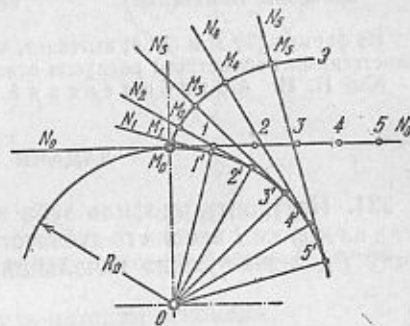


Рис. 110. Построение эвольвенты окружности.

Эвольвентой окружности называется траектория точки  $M_0$  прямой  $N_0N_0$  (рис. 110), катящейся без скольжения по окружности радиуса  $R_0$ . Окружность радиуса  $R_0$  называется *основной*, а прямая  $N_0N_0 -$  *производящей* прямой.

Рассмотрим построение эвольвенты, которая описывается точкой  $M_0$ , лежащей на прямой  $N_0N_0$ , в предположении, что прямая  $N_0N_0$  катится по основной окружности по направлению движения часовой стрелки.

На прямой  $N_0N_0$  отложим отрезки  $M_0-1$ ,  $1-2$ ,  $2-3$  и т. д., а на основной окружности — равные им дуги  $\cup M_0-1'$ ,  $\cup 1'-2'$ ,  $\cup 2'-3'$  и т. д.

При перекатывании прямой  $N_0N_0$  по основной окружности точки  $1$  и  $1'$ ,  $2$  и  $2'$ ,  $3$  и  $3'$  и т. д. последовательно совпадут друг с другом, а производящая прямая займет положения  $1'-N_1$ ,  $2'-N_2$ ,  $3'-N_3$  и т. д. От точек  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  и т. д. отложим вдоль линий  $1'-N_1$ ,  $2'-N_2$ ,  $3'-N_3$  и т. д. отрезки, равные:

$$1'-M_1=1-M_0; \quad 2'-M_2=2-M_0; \quad 3'-M_3=3-M_0$$

и т. д. Соединив точки  $M_0, M_1, M_2, \dots$ , получим эвольвенту  $\mathcal{E}$ .

8°. Основные свойства эвольвенты окружности (рис. 111).

а) Эвольвента — *односторонне ограниченная спираль*. Она начинается на основной окружности.

б) Нормалью к эвольвенте в точке  $M_i$  будет касательная  $M_iK_i$ , проведенная к основной окружности. Отрезок  $M_iK_i$  является радиусом кривизны  $\rho_i$  эвольвенты в точке  $M_i$ .

в) Угол  $\alpha_i$ , заключенный между радиусом-вектором  $R_i$  и перпендикуляром к нормали  $OK_i$ , называется углом давления.

г) Уравнение эвольвенты в полярных координатах (рис. 111). Начало координат совпадает с центром основной окружности  $O$ , а ось отсчета проходит через центр  $O$  и начало эвольвенты  $M_0$ . Текущий радиус-вектор определяется формулой

$$R_i = \frac{R_0}{\cos \alpha_i}. \quad (20.3)$$

Полярный угол (эвольвентная функция или инволюта угла  $\alpha$  давления  $\text{inv } \alpha_i$ ) равен  $\vartheta_i = \text{inv } \alpha_i = \text{tg } \alpha_i - \alpha_i; \quad (20.4)$

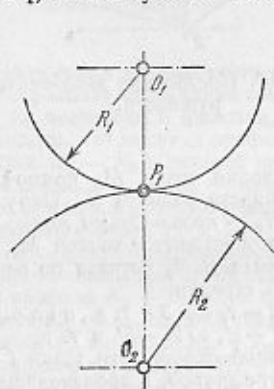
этот угол  $\vartheta_i$  обычно находится по специальным таблицам (см. приложения к настоящему задачнику).

Рис. 111. Полярные координаты эвольвенты окружности и радиус кривизны эвольвенты.

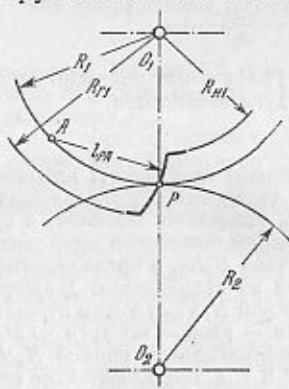
Из формул (20.3) и (20.4) вытекает, что эвольвента окружности определяется единственным параметром: радиусом основной окружности. (См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 109—111).

### ЗАДАЧИ 321—330

321. Построить профиль зуба на колесе 2, если заданный профиль на колесе 1 внешнего зубчатого зацепления представляет собою точку  $P_1$ , лежащую на начальной окружности колеса 1. Радиусы



К задаче 321.



К задаче 322.

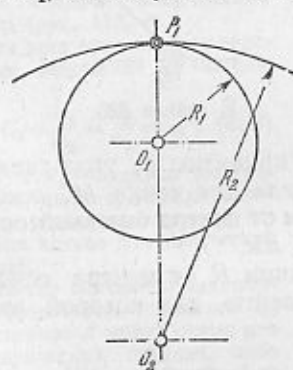
начальных окружностей зубчатых колес соответственно равны  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 140$  мм.

Указание: задачу решить методом огибания (методом Понселе).

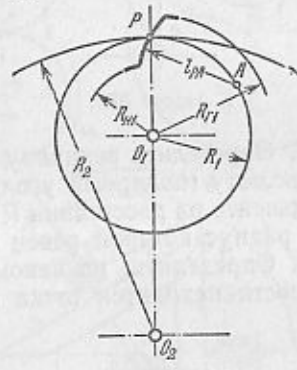
322. Построить профиль зуба на колесе 2, если заданный профиль на колесе 1 внешнего зубчатого зацепления выполнен в виде дуги окружности радиуса  $l_{PA} = 80$  мм, описанной из центра  $A$ , находящегося на начальной окружности первого колеса. Профиль зуба на колесе 1 ограничен окружностями радиусов  $R_{r1} = 120$  мм и  $R_{n1} = 80$  мм. Радиусы начальных окружностей колес равны  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 120$  мм.

Указание: задачу решить методом огибания (методом Понселе).

323. Построить профиль зуба на колесе 2, если заданный профиль на колесе 1 внутреннего зубчатого зацепления представляет собой точку  $P_1$ , лежащую на начальной окружности колеса 1. Радиусы



К задаче 323.



К задаче 324.

начальных окружностей колес соответственно равны  $R_1 = 80$  мм,  $R_2 = 240$  мм.

Указание. Задачу решить методом огибания.

324. Построить профиль зуба на колесе 2, если заданный профиль на колесе 1 внутреннего зубчатого зацепления выполнен в виде дуги окружности радиуса  $l_{PA} = 80$  мм, описанной из центра  $A$ , находящегося на начальной окружности колеса 1. Профиль зуба на колесе 1 ограничен окружностями радиусов  $R_{r1} = 100$  мм и  $R_{n1} = 60$  мм. Радиусы начальных окружностей зубчатых колес соответственно равны  $R_1 = 80$  мм,  $R_2 = 240$  мм.

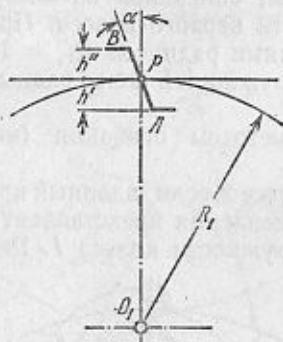
Указание. Задачу решить методом огибания (методом Понселе).

325. Построить профиль зуба на колесе, если заданный профиль на прямолинейной рейке реечного зацепления выполнен в виде отрезка  $AB$ , наклоненного к линии  $O_1P$  под углом  $\alpha_0 = 20^\circ$ . Заданный профиль ограничен по высоте размерами  $h' = 12$  мм. Радиус начальной окружности колеса  $R_1 = 100$  мм.

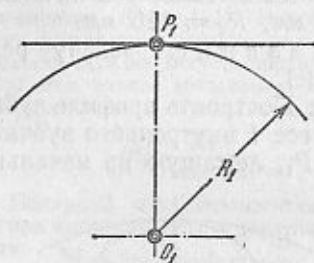
Указание. Задачу решить методом Рёло.

326. Построить профиль зуба на колесе реечного зацепления, если заданный профиль на колесе реечного зацепления представляет собой точку  $P_1$ . Радиус начальной окружности колеса равен  $R_1 = 100$  мм.

Указание. Задачу решить методом огибания (методом Понселе).



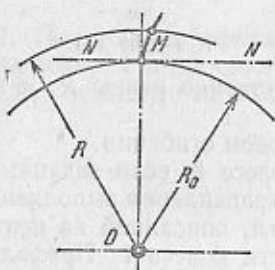
К задаче 325.



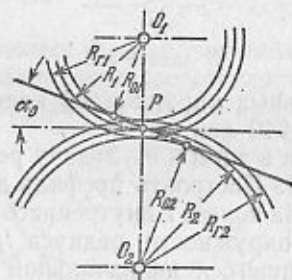
К задаче 326.

327. Определить величину радиуса кривизны  $\rho$ , угол давления  $\alpha$  и инволюту (полярный угол) этого угла для точки  $M$ , лежащей на эвольвенте на расстоянии  $R = 120$  мм от центра основной окружности, радиус которой равен  $R_0 = 100$  мм.

328. Определить, на каком расстоянии  $R$  от центра основной окружности находится точка  $M$  эвольвенты, для которой радиус



К задачам 327—329.



К задаче 330.

кривизны  $\rho = 40$  мм, если радиус основной окружности равен  $R_0 = 100$  мм.

329. В какой точке эвольвенты ее радиус кривизны  $\rho$  равен нулю?

330. Для внешнего зубчатого зацепления сопряженные профили зубьев суть эвольвенты основных окружностей радиусов  $R_{o1} = 113$  мм и  $R_{o2} = 170$  мм. Радиусы начальных окружностей колес 1 и 2 соответственно равны  $R_1 = 120$  мм и  $R_2 = 180$  мм, а радиусы окружностей головок этих колес равны  $R_{r1} = 130$  мм и  $R_{r2} = 190$  мм, модуль зацепления  $m = 10$  мм, угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

Вычислить размер дуги зацепления  $S_0$ , измеренной по основной окружности одного из колес, а также найти степень плавности (степень перекрытия)  $\epsilon$ .

## § 21. Проектирование трехзвенных фрикционных механизмов

1°. Передача движения от ведущего звена к ведомому в этих механизмах осуществляется за счет сил трения, которые возникают в месте контакта этих звеньев. Трение между ведущим и ведомым звеньями возникает вследствие их взаимного прижатия. В настоящем параграфе рассматриваются задачи на проектирование следующих трехзвенных фрикционных механизмов (передач):

а) передачи цилиндрическими катками с внешним зацеплением (рис. 112, а),

б) передачи цилиндрическими катками с внутренним зацеплением (рис. 112, б),

в) передачи коническими катками (рис. 112, в).

Для всех этих передач передаточное отношение по модулю равно

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (21.1)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы цилиндров для цилиндрических передач или радиусы оснований конических катков для конической передачи.

Обычно считаются заданными передаточное отношение  $i_{12}$  и расстояние  $A$  между осями для цилиндрических передач, либо угол развала  $\delta$  для конической передачи. Для цилиндрических передач надо находить радиусы цилиндров, а для конической — углы наклона образующих конусов с осями их вращения.

2°. Ниже приводятся необходимые расчетные формулы:

а) для передач цилиндрических с внешним зацеплением:

$$R_1 = \frac{A}{1 + |i_{12}|} \quad (21.2)$$

(передаточное отношение  $i_{12}$  следует брать по его абсолютному значению),

$$R_2 = i_{12} \cdot R_1, \quad (21.3)$$

б) для передач цилиндрических с внутренним зацеплением:

$$R_1 = \frac{A}{|i_{12}| - 1} \quad (21.4)$$

(передаточное отношение  $i_{12}$  берется по его абсолютному значению),

$$R_2 = i_{12} \cdot R_1, \quad (21.5)$$

в) для передач с коническими катками: тангенс угла наклона образующей конуса первого катка с его осью

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{\sin \delta}{i_{12} + \cos \delta}, \quad (21.6)$$

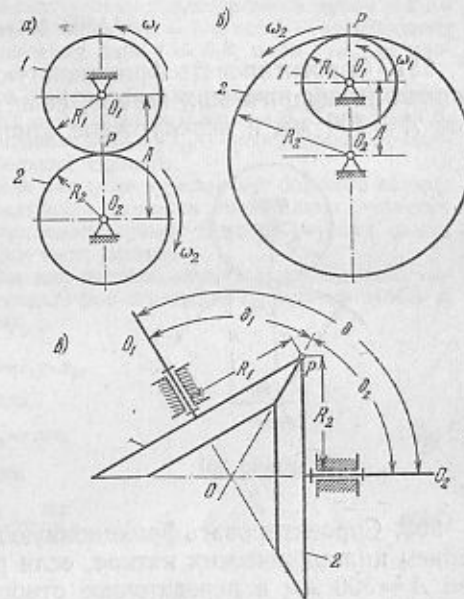


Рис. 112. Типы трехзвенных фрикционных механизмов: а) цилиндрическая передача с внешним зацеплением, б) цилиндрическая передача с внутренним зацеплением, в) коническая передача.



где  $\delta$  — угол развала осей,

$$\delta_2 = \delta - \delta_1; \quad (21.7)$$

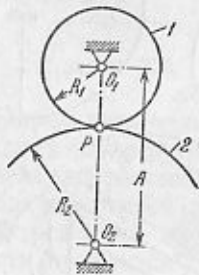
если угол развала осей  $\delta = 90^\circ$ , то

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{1}{i_{12}}. \quad (21.8)$$

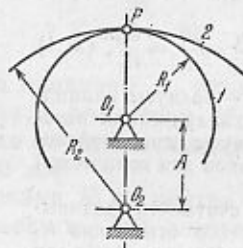
(См. И. И. Артоблевский, Теория механизмов, § 42.)

### ЗАДАЧИ 331—334

331. Спроектировать фрикционную передачу с внешним зацеплением цилиндрических катков, если расстояние между осями катков  $A = 300$  мм и передаточное отношение  $i_{12} = 2$ .



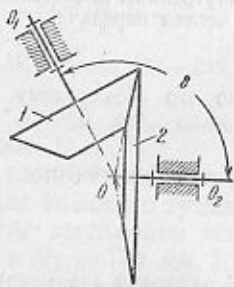
К задаче 331.



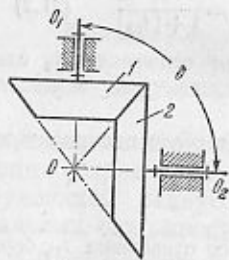
К задаче 332.

332. Спроектировать фрикционную передачу с внутренним зацеплением цилиндрических катков, если расстояние между осями катков  $A = 300$  мм и передаточное отношение  $i_{12} = 2$ .

333. Спроектировать фрикционную передачу с коническими катками, если угол  $\delta$  между осями катков равен  $\delta = 120^\circ$  и передаточное отношение равно  $i_{12} = 1,5$ .



К задаче 333.



К задаче 334.

334. Спроектировать фрикционную передачу с коническими катками, если угол  $\delta$  между осями катков равен  $\delta = 90^\circ$  и передаточное отношение равно  $i_{12} = 2$ .

## § 22. Проектирование трехзвенных зубчатых передач

1°. В этом параграфе приводятся примеры на определение размеров трехзвенных зубчатых механизмов с цилиндрическими колесами, имеющими зубья эвольвентного профиля, и даются задачи на определение некоторых размерных параметров этих механизмов.

Во всех случаях считается, что нарезание колес осуществляется методом обкатки.

Режущий инструмент определяется следующими параметрами: модулем  $m$  в мм (выбирается по ГОСТ 9563-61); высотой головки  $h_{г.р} = fm$ , где  $f$  — коэффициент высоты, который может принимать значения либо  $f = 0,8$ , либо  $f = 1,0$ ; профильным углом  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

Радиальный зазор между головкой одного зуба и основанием ножек другого для передачи в сборе равен  $\delta = cm$ , где  $c = 0,3$  при  $f = 0,8$  и  $c = 0,25$  при  $f = 1,0$ . Колесо с номером 1 считаем наименьшим, поэтому  $i_{12}$  — передаточное отношение, по модулю всегда равно или больше единицы.

Полагаем, что в собранной передаче между ее зубьями нет бокового зазора. 2°. Расчетные формулы для определения размеров трехзвенных зубчатых передач с внешним и внутренним зацеплением зубьев. Во всех случаях ножки зубьев не должны подрезаться режущим инструментом.

С л у ч а й п е р в ы й. Формулы для расчета исправленного внешнего зацепления, когда заданы модуль  $m$ , передаточное отношение  $i_{12}$  и число зубьев  $z_1$  колеса 1 (это число меньше семнадцати):

1) число зубьев колеса 2

$$z_2 = i_{12} \cdot z_1,$$

2) шаг по делительной окружности

$$t_d = \pi m, \quad (22.1)$$

3) радиус делительной окружности

$$R_d = \frac{mz}{2}, \quad (22.2)$$

4) радиус основной окружности

$$R_0 = R_d \cos \alpha_0, \quad (22.3)$$

5) относительный сдвиг (смещение) инструмента

$$\xi = \frac{17 - z}{17}; \quad (22.4)$$

если число зубьев на колесе 2 будет больше семнадцати, то для него относительный сдвиг инструмента принимается равным нулю ( $\xi = 0$ ),

6) абсолютный сдвиг инструмента

$$\chi = m\xi, \quad (22.5)$$

7) толщина зуба по делительной окружности

$$a_d = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0 \right), \quad (22.6)$$

8) радиус окружностей оснований (ножек) зубьев

$$R_n = R_d - h_{г.р} - \delta + \chi, \quad (22.7)$$

9) инволюта угла зацепления при сборке

$$\varphi_{сб} = \frac{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_2} + \varphi_0, \quad (22.8)$$

где  $\varphi_0$  — инволюта профильного угла инструмента,  $\alpha_0 = 20^\circ$ ,

10) угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6}$  находится по таблице инволют, по ранее найденному значению угла  $\vartheta_{c6}$ .

11) радиус начальной окружности

$$R = \frac{R_0}{\cos \alpha_{c6}} = R_d \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_{c6}} = \frac{mz \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_{c6}}, \quad (22.9)$$

12) расстояние между центрами вращения колес

$$A_{c6} = R_1 + R_2 = \frac{m(z_1 + z_2) \cos \alpha_0}{2 \cos \alpha_{c6}}, \quad (22.10)$$

13) радиусы окружностей головок

$$а) \text{ у колеса } 1: R_{r1} = A_{c6} - R_{n1} - \delta, \quad (22.11a)$$

$$б) \text{ у колеса } 2: R_{r2} = A_{c6} - R_{n2} - \delta, \quad (22.11б)$$

14) косинус угла давления на окружности произвольного радиуса  $R_i$ :

$$\cos \alpha_i = \frac{R_0}{R_i}, \quad (22.12)$$

15) толщина зуба, измеренная по окружности радиуса  $R_i$ :

$$a_i = 2R_i \left( \frac{a_x}{mz} - \vartheta_i + \vartheta_0 \right), \quad (22.13)$$

где  $\vartheta_i$  — инволюта угла  $\alpha_i$ , а  $\vartheta_0$  — инволюта угла  $\alpha_0$ ,

16) шаг по основной окружности

$$t_0 = t_x \cos \alpha_0, \quad (22.14)$$

17) дуга зацепления, измеренная по основной окружности

$$S_0 = \sqrt{R_{r1}^2 - R_{01}^2} + \sqrt{R_{r2}^2 - R_{02}^2} - A_{c6} \sin \alpha_{c6}, \quad (22.15)$$

18) коэффициент перекрытия

$$\varepsilon = \frac{S_0}{t_0}. \quad (22.16)$$

**Случай второй.** Формулы для расчета *исправленного* внешнего зацепления, когда заданы модуль  $m$ , передаточное отношение  $i_{12}$  и число зубьев  $z_1$  первого колеса (при нарезании колес гребенкой с высотой головки, равной модулю, это число должно быть *больше или равно семнадцати*):

1) число зубьев колеса 2

$$z_2 = i_{12} z_1,$$

2) шаг по делительной окружности, определяется по формуле (22.1),

3) радиус делительной окружности, определяется по формуле (22.2),

4) радиус основной окружности, определяется по формуле (22.3),

5) толщина зуба по делительной окружности находится по формуле (22.6), взятой при  $\xi = 0$ :

$$a_x = \frac{\pi m}{2},$$

6) радиус окружности оснований (ножек) зубьев находится по формуле (22.7), взятой при  $\chi = 0$ :

$$R_n = R_x - h_{rp} - \delta,$$

7) инволюта угла зацепления в сборке находится по формуле (22.8), взятой при  $\xi_1 = 0$  и  $\xi_2 = 0$ :

$$\vartheta_{c6} = \vartheta_0,$$

8) угол зацепления при сборке

$$\alpha_{c6} = \alpha_0,$$

9) радиус начальной окружности находится по формуле (22.9), взятой при  $\cos \alpha_0 = \cos \alpha_{c6}$ :

$$R = R_d,$$

10) расстояние между центрами вращения колес, находится по формуле (22.10), взятой при  $\cos \alpha_{c6} = \cos \alpha_0$ :

$$A_{c6} = A_0 = R_{x1} + R_{x2} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2},$$

11) радиусы окружности головок, см. формулы (22.11a, б),

12) косинус угла давления на окружности произвольного радиуса  $R_i$ , см. формулу (22.12),

13) толщина зуба, измеренная по окружности радиуса  $R_i$ , см. формулу (22.13),

14) шаг по основной окружности, см. формулу (22.14),

15) дуга зацепления, измеренная по основной окружности, см. формулу (22.15),

16) коэффициент перекрытия  $\varepsilon$ , см. формулу (22.16).

**Случай третий.** Формулы для расчета *исправленного* внешнего зацепления, когда заданы модуль  $m$ , передаточное отношение  $i_{12}$  и расстояние между центрами вращения колес  $A_{c6}$ .

*Первый этап расчета* — подбор чисел зубьев колес:

1) сумма чисел зубьев колес  $z_c = z_1 + z_2$  должна удовлетворять неравенству

$$z_c < \frac{2A_{c6}}{m}, \quad (22.17)$$

2) число зубьев меньшего колеса выбирается из условия, что

$$z_1 < \frac{2A_{c6}}{(1 + |i_{12}|) m}, \quad (22.18)$$

причем за значение  $z_1$  следует принимать ближайшее меньшее целое число, удовлетворяющее неравенству (22.18),

3) число зубьев большего (второго) колеса находится из неравенства

$$z_2 \geq z_1 \cdot i_{12}; \quad (22.19)$$

для  $z_2$  следует принимать ближайшее целое число, но при этом надо убедиться в том, что принятые значения для  $z_1$  и  $z_2$  удовлетворяют неравенству (22.17),

4) фактическое передаточное отношение будет

$$i_{12\phi} = \frac{z_2}{z_1},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — числа зубьев колес, принятые к исполнению.

Фактическое передаточное отношение обычно отличается от заданного. Следует установить, насколько оно отличается от заданного, и если отличие окажется больше допустимого, то расчет надо повторить, взяв значение  $z_1$  несколько иным, чем первоначальное.

*Второй этап расчета* — определение основных размеров передачи. В приводимых ниже формулах под  $i_{12}$  надо разуметь фактически получившееся передаточное отношение:

1) шаг по делительной окружности определяется по формуле (22.1),

2) радиус делительной окружности определяется по формуле (22.2),

3) радиус основной окружности определяется по формуле (22.3),

4) косинус угла зацепления при сборке находится по формуле (22.10)

$$\cos \alpha_{c6} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2A_{c6}} \cos \alpha_0,$$

5) суммарный относительный сдвиг инструмента находится по формуле (22.8)

$$\xi_c = \xi_1 + \xi_2 = \frac{(\vartheta_{c6} - \vartheta_0)(z_1 + z_2)}{2 \lg \alpha_0}, \quad (22.20)$$

6) относительный сдвиг инструмента применительно к каждому колесу:

а) для колеса 1 по формуле (22.4):  $\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17}$ ; если  $\xi_1 < \frac{\xi_c}{2}$ , то следует при-

нять  $\xi_1 = \frac{\xi_c}{2}$ ;

б) для колеса 2:

$$\xi_2 = \xi_c - \xi_1, \quad (22.21)$$

7) абсолютный сдвиг инструмента находится по формуле (22.5),

8) толщина зуба по делительной окружности находится по формуле (22.6),

9) радиус окружности оснований (ножек) зубьев находится по формуле (22.7),

10) радиус начальной окружности находится по формуле (22.9) или же так:

а) для колеса 1:  $R_1 = \frac{A_{c6}}{1 + |i_{12}|}, \quad (22.22)$

б) для колеса 2:  $R_2 = \frac{A_{c6} \cdot i_{12}}{1 + |i_{12}|}, \quad (22.23)$

11) радиус окружностей головки находится по формулам (22.11а, б),

12) шаг по основной окружности находится по формуле (22.14),

13) дуга зацепления, измеряемая по основной окружности, находится по формуле (22.15),

14) коэффициент перекрытия находится по формуле (22.16).

С л у ч а й ч е т в е р т ы й. Формулы для расчета *неисправленного* внутреннего зацепления, когда заданы модуль  $m$ , передаточное отношение  $i_{12}$ , число зубьев меньшего колеса  $z_1$ , высота головки зуба долбяка  $h_{г.д} = m$ :

1) число зубьев колеса 2:  $z_2 = i_{12} \cdot z_1$ ,

2) шаг по делительной окружности находится по формуле (22.1),

3) радиус делительной окружности находится по формуле (22.2),

4) радиус основной окружности находится по формуле (22.3),

5) толщина зуба по делительной окружности находится по формуле (22.6), взятой при  $\xi = 0$ :

$$a_n = \frac{\pi m}{2},$$

6) радиус окружностей оснований (ножек) зубьев:

а) для колеса 1 находится по формуле (22.7), взятой при  $\chi_1 = 0$ :

$$R_{н1} = R_{д1} - h_{г.д} - \delta,$$

б) для колеса 2:

$$R_{н2} = R_{д2} + h_{г.д} + \delta, \quad (22.24)$$

7) инволюта угла зацепления при сборке

$$\vartheta_{c6} = \vartheta_0,$$

8) угол зацепления при сборке

$$\alpha_{c6} = \alpha_0,$$

9) радиус начальной окружности находится по формуле (22.9), взятой при  $\cos \alpha_{c6} = \cos \alpha_0$ :

$$R = R_{д1}$$

10) расстояние между центрами вращения колес

$$A_{c6} = R_2 - R_1 = R_{д2} - R_{д1} = \frac{m(z_2 - z_1)}{2}, \quad (22.25)$$

11) радиус окружностей головок

а) для колеса 1:  $R_{г1} = R_{д1} + h_{г.д}, \quad (22.26а)$

б) для колеса 2:  $R_{г2} = R_{д2} - h_{г.д}, \quad (22.26б)$

12) шаг по основной окружности находится по формуле (22.14),

13) дуга зацепления, измеряемая по основной окружности,

$$S_0 = \sqrt{R_{г1}^2 - R_{д1}^2} - \sqrt{R_{г2}^2 - R_{д2}^2} + A_{c6} \sin \alpha_{c6}, \quad (22.27)$$

14) коэффициент перекрытия находится по формуле (22.16).

3". Примеры на проектирование трехзвенных зубчатых передач.

**Пример 1.** Спроектировать трехзвенную зубчатую передачу с внешним зацеплением зубьев (колеса — прямозубые), у которой модуль  $m = 1,0$  мм, передаточное отношение  $i_{12} = 1,5$ , число зубьев на колесе 1 равно  $z_1 = 14$ . Условия примера соответствуют *первому случаю* расчета, рассмотренному ранее.

**Решение.** Расчет размеров проектируемой передачи (порядок расчета указан выше):

1)  $z_2 = i_{12} \cdot z_1 = 1,5 \cdot 14 = 21$ ,

2)  $t_n = \pi m = 1,0 \cdot 3,14 = 3,14$  мм,

3)  $R_{д1} = \frac{m z_1}{2} = \frac{1 \cdot 14}{2} = 7,0$  мм;  $R_{д2} = \frac{m z_2}{2} = \frac{1 \cdot 21}{2} = 10,5$  мм,

4)  $R_{о1} = R_{д1} \cos \alpha_0 = 7 \cdot 0,94 = 6,58$  мм;  $R_{о2} = R_{д2} \cos \alpha_0 = 10,5 \cdot 0,94 = 9,87$  мм,

5)  $\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 14}{17} = 0,176$ ; так как  $z_2 > 17$ , то  $\xi_2 = 0$ ,

6)  $\chi_1 = m \xi_1 = 1,0 \cdot 0,176 = 0,176$  мм и  $\chi_2 = 0$ ,

7)  $a_{д1} = m \cdot \left( \frac{\pi}{2} + 2 \xi_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) = 1,0 (1,57 + 2 \cdot 0,176 \cdot 0,364) = 1,7$  мм,  $a_{д2} = \frac{\pi m}{2} = \frac{1 \cdot 3,14}{2} = 1,57$  мм,

8)  $R_{н1} = R_{д1} - h_{г.п} - \delta + \chi_1 = 7 - 1,25 + 0,176 = 5,93$  мм,

$R_{н2} = R_{д2} - h_{г.п} - \delta = 10,5 - 1,25 = 9,25$  мм,

9)  $\vartheta_{c6} = \frac{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \alpha_0}{z_1 + z_2} + \vartheta_0 = \frac{2 \cdot 0,176 \cdot 0,364}{35} + 0,0149 = 0,01827$ ,

10)  $\alpha_{c6} = 21^\circ 21'$ ,

11)  $R_1 = \frac{R_{о1}}{\cos \alpha_{c6}} = \frac{6,58}{0,9315} = 7,6$  мм;  $R_2 = \frac{R_{о2}}{\cos \alpha_{c6}} = \frac{9,87}{0,9315} = 10,59$  мм,

12)  $A_{c6} = R_1 + R_2 = 7,6 + 10,59 = 17,65$  мм,

13) а)  $R_{г1} = A_{c6} - R_{н2} - \delta = 17,65 - 9,25 - 0,25 \cdot 1 = 8,15$  мм,

б)  $R_{г2} = A_{c6} - R_{н1} - \delta = 17,65 - 5,93 - 0,25 \cdot 1 = 11,47$  мм,

14) и 15) — параметры, указанные в этих пунктах, по условию примера не подлежали определению.

16)  $t_0 = t_n \cos \alpha_0 = 3,14 \cdot 0,94 = 2,95$  мм,

17)  $S_0 = \sqrt{R_{г1}^2 - R_{д1}^2} + \sqrt{R_{г2}^2 - R_{д2}^2} - A_{c6} \sin \alpha_{c6} = \sqrt{8,15^2 - 6,58^2} + \sqrt{11,47^2 - 9,87^2} - 17,65 \cdot 0,364 = 4,2$  мм,

18)  $\epsilon = \frac{S_0}{t_0} = \frac{4,2}{2,95} = 1,42$ .



По полученным размерам построена картина зацепления зубчатых колес (рис. 113). Чертеж выполнен в масштабе  $\mu_l = 1/15$  мм/мм.

На чертеже эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  построены перекачиванием линии  $NN$  по окружностям радиусов  $R_{01}$  и  $R_{02}$  (по основным окружностям); отрезок  $K_1K_2$  — теоретическая линия зацепления; отрезок  $AB$  — рабочая часть линии зацепления (длина этого отрезка равна длине дуги зацепления, измеряемой по основной окружности); заштрихованные участки на профилях зубьев — рабочие части профилей.

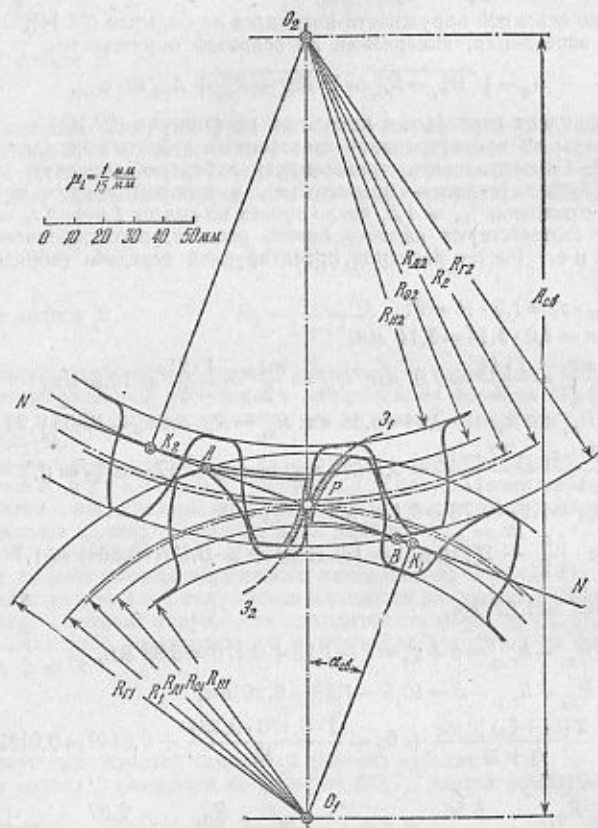


Рис. 113. К примеру 1. Трехзвенная зубчатая передача с исправленным внешним зацеплением зубьев.

**Пример 2.** Спроектировать трехзвенную зубчатую передачу с внешним зацеплением зубьев (колеса — прямозубые), у которой модуль  $m = 1,0$  мм, расстояние между центрами вращения колес  $A_{c6} = 18$  мм, передаточное отношение  $i_{12} = 1,52$  (после подбора чисел зубьев фактическое передаточное отношение  $i_{12ф}$  не должно отличаться от заданного на  $\pm 2,5\%$ ).

Условия примера соответствуют *третьему случаю* расчета, рассмотренному ранее.

**Решение:** Расчет размеров проектируемой передачи (порядок расчета указан ранее).

*Первый этап:*

- 1)  $\frac{2A_{c6}}{m} = \frac{2 \cdot 18}{1} = 36$ , поэтому  $z_c < 36$ ,
- 2)  $\frac{2A_{c6}}{m(1 + |i_{12}|)} = \frac{36}{2,52} = 14,3$ , поэтому  $z_1 < 14,3$ ; *принимаем  $z_1 = 14$ ,*
- 3)  $z_2 = i_{12} \cdot z_1 = 1,52 \cdot 14 = 21,3$ ; *принимаем  $z_2 = 21$ ,*
- 4)  $i_{12ф} = \frac{21}{14} = 1,5$ , отклонение от заданного:

$$\frac{1,52 - 1,5}{1,52} \cdot 100 = 1,32\%$$

В дальнейшем расчете передаточное отношение принято равным  $i_{12} = 1,5$ .

*Второй этап:*

- 1)  $t_d = m \cdot \pi = 1,0 \cdot 3,14$  мм,
- 2)  $R_{a1} = \frac{mz_1}{2} = \frac{1 \cdot 14}{2} = 7,0$  мм;  $R_{da} = \frac{mz_2}{2} = \frac{1 \cdot 21}{2} = 10,5$  мм,
- 3)  $R_{01} = R_{a1} \cos \alpha_0 = 7 \cdot 0,94 = 6,58$ ;  $R_{02} = R_{a2} \cos \alpha_0 = 10,5 \cdot 0,94 = 9,87$  мм,
- 4)  $\cos \alpha_{c6} = \frac{m(z_1 + z_2)}{2A_{c6}} \cos \alpha_0 = \frac{1(14 + 21)}{2 \cdot 18} \cdot 0,94 = 0,914$ ;

угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6} = 24^\circ$ ,

- 5)  $\xi_c = \xi_1 + \xi_2 = \frac{(\vartheta_{c6} - \vartheta_0)(z_1 + z_2)}{2 \operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{(0,0263 - 0,0149) \cdot 35}{2 \cdot 0,364} = 0,55$ ,
- 6) а)  $\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 14}{17} = 0,176$ ; так как  $\xi_1 < \frac{\xi_c}{2}$ ,

то принимаем  $\xi_1 = \frac{\xi_c}{2} = \frac{0,55}{2} = 0,275$ ,

- 6)  $\xi_2 = \xi_c - \xi_1 = 0,55 - 0,275 = 0,275$ ,
- 7)  $\chi_1 = m\xi_1 = 1,0 \cdot 0,275 = 0,275$  мм,  $\chi_2 = m\xi_2 = 1,0 \cdot 0,275 = 0,275$  мм,
- 8)  $a_{d1} = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) = 1,0 (1,57 + 2 \cdot 0,275 \cdot 0,364) = 1,77$  мм,  
 $a_{d2} = m \left( \frac{\pi}{2} + 2\xi_2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) = 1,0 (1,57 + 2 \cdot 0,275 \cdot 0,364) = 1,77$  мм,
- 9)  $R_{n1} = R_{a1} - h_{r,p} - \delta + \chi_1 = 7 - 1,25 + 0,275 = 6,02$  мм,  
 $R_{n2} = R_{a2} - h_{r,p} - \delta + \chi_2 = 10,5 - 1,25 + 0,275 = 9,52$  мм,

$$10) \text{ а) } R_1 = \frac{A_{c6}}{1 + i_{12}} = \frac{18}{1 + 1,5} = 7,2 \text{ мм,}$$

$$\text{ б) } R_2 = \frac{A_{c6} \cdot i_{12}}{1 + i_{12}} = \frac{18 \cdot 1,5}{1 + 1,5} = 10,8 \text{ мм,}$$

$$11) \text{ а) } R_{r1} = A_{c6} - R_{n2} - \delta = 18 - 9,52 - 0,25 \cdot 1 = 8,23 \text{ мм,}$$

$$\text{ б) } R_{r2} = A_{c6} - R_{n1} - \delta = 18 - 6,02 - 0,25 \cdot 1 = 11,73 \text{ мм,}$$

$$12) t_0 = t_x \cos \alpha_0 = 3,14 \cdot 0,94 = 2,95 \text{ мм,}$$

$$13) S_0 = \sqrt{R_{r1}^2 - R_{01}^2} + \sqrt{R_{r2}^2 - R_{02}^2} - A_{c6} \sin \alpha_{c6} = \sqrt{8,23^2 - 6,58^2} + \sqrt{11,73^2 - 9,87^2} - 18 \cdot 0,407 = 3,63 \text{ мм,}$$

$$14) \varepsilon = \frac{S_0}{t_0} = \frac{3,63}{2,95} = 1,24,$$

По полученным размерам построена картина зацепления (рис. 114). Чертеж выполнен в масштабе  $\mu_1 = 1/15$  мм/мм. На чертеже показаны эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , которые построены перекачиванием линии  $NN$  по основным окружностям радиусов  $R_{01}$  и  $R_{02}$ ; отрезок  $K_1K_2$  — теоретическая линия зацепления; отрезок  $AB$  — практическая линия зацепления; заштрихованные участки на профилях зубьев — рабочие части профилей.

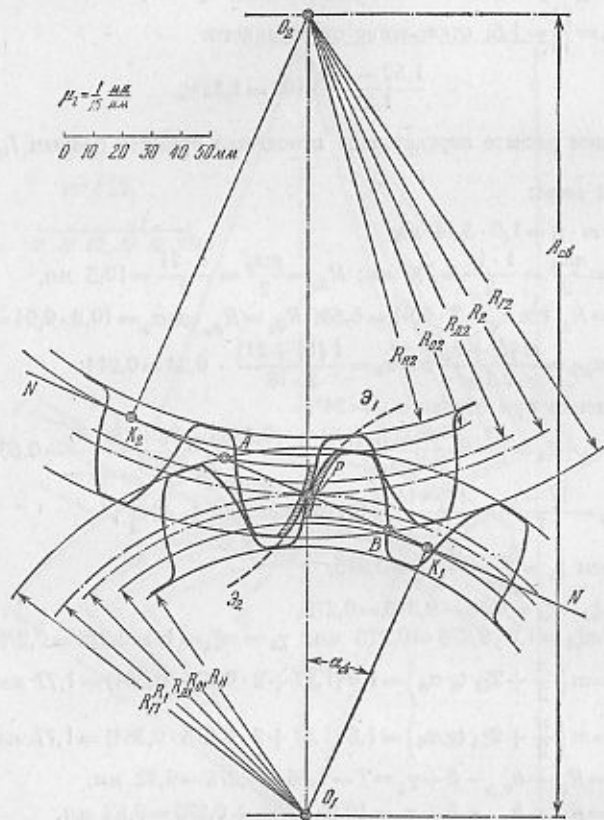


Рис. 114. К примеру 2. Трехзвенная зубчатая передача с исправленным внешним зацеплением зубьев, спроектированная так, что выдержано заданное расстояние между осями вращения колес.

**Пример 3.** Спроектировать трехзвенную зубчатую передачу с внутренним неисправленным зацеплением зубьев, у которой модуль  $m = 1,0$  мм, передаточное число  $i_{12} = 1,5$  и число зубьев колеса  $z_1 = 30$ , высота головки зуба долбяка  $h_{г.д} = m$ .

Условия примера соответствуют четвертому случаю расчета, рассмотренному выше.

**Решение:** Расчет размеров проектируемой передачи:

- 1)  $z_2 = i_{12} \cdot z_1 = 1,5 \cdot 30 = 45$ ,
- 2)  $t_d = m\pi = 1,0 \cdot 3,14 = 3,14$  мм,

$$3) R_{д1} = \frac{mz_1}{2} = \frac{1 \cdot 30}{2} = 15 \text{ мм}, \quad R_{д2} = \frac{mz_2}{2} = \frac{1 \cdot 45}{2} = 22,5 \text{ мм},$$

$$4) R_{01} = R_{д1} \cdot \cos \alpha_0 = 15 \cdot 0,94 = 14,1 \text{ мм}; \quad R_{02} = R_{д2} \cos \alpha_0 = 22,5 \cdot 0,94 = 21,15 \text{ мм},$$

$$5) a_{д1} = a_{д2} = \frac{m\pi}{2} = \frac{1 \cdot 3,14}{2} = 1,57 \text{ мм},$$

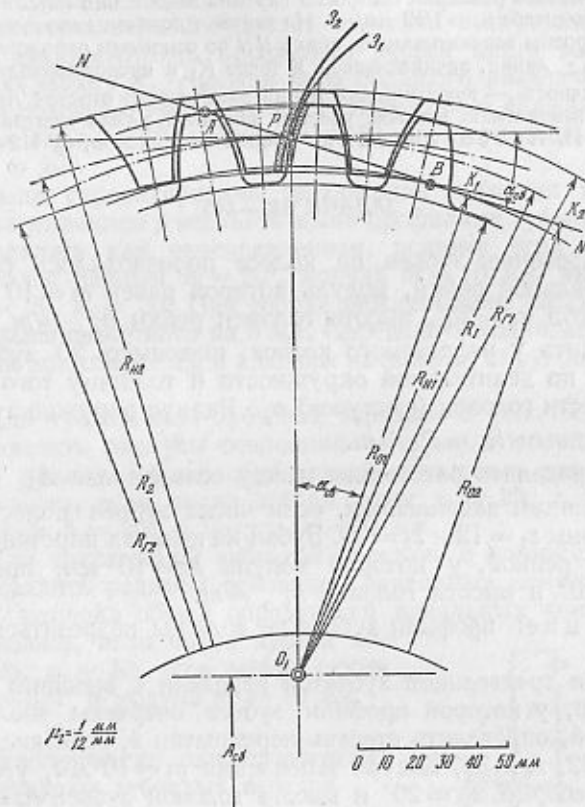


Рис. 115. К примеру 3. Трехзвенная зубчатая передача с неисправленным внутренним зацеплением зубьев.

- 6) а)  $R_{н1} = R_{д1} - h_{г.д} - \delta = 15 - 1,25 = 13,75$  мм,
- б)  $R_{н2} = R_{д2} + h_{г.д} + \delta = 22,5 + 1,25 = 23,75$  мм,
- 7)  $\vartheta_{сб} = \vartheta_0$ ,
- 8)  $\alpha_{сб} = \alpha_0$ ,
- 9)  $R_1 = R_{д1} = 15$  мм,  $R_2 = R_{д2} = 22,5$  мм,
- 10)  $A_{сб} = R_2 - R_1 = 22,5 - 15 = 7,5$  мм,
- 11) а)  $R_{г1} = R_{д1} + h_{г.д} = 15 + 1 = 16$  мм,
- б)  $R_{г2} = R_{д2} - h_{г.д} = 22,5 - 1 = 21,5$  мм,

$$12) t_0 = t_x \cos \alpha_0 = 3,14 \cdot 0,94 = 2,95 \text{ мм},$$

$$13) S_0 = \sqrt{R_{r1}^2 - R_{01}^2} - \sqrt{R_{r2}^2 - R_{02}^2} + A_{c6} \sin \alpha_{c6} = \sqrt{16^2 - 14,1^2} - \sqrt{21,5^2 - 21,15^2} + 7,5 \cdot 0,342 = 6,37 \text{ мм},$$

$$14) \varepsilon = \frac{S_0}{t_0} = \frac{6,37}{2,95} = 2,16.$$

По полученным размерам построена картина зацепления (рис. 115). Чертеж выполнен в масштабе  $\mu_l = 1/12 \text{ мм/мм}$ . На чертеже показаны эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ , которые построены перекачиванием линии  $NN$  по основным окружностям радиусов  $R_{01}$  и  $R_{02}$ ; линия, начинающаяся в точке  $K_1$  и продолжающаяся слева от нее в бесконечность, — теоретическая линия зацепления; отрезок  $AB$  — рабочая часть линии зацепления. Рабочие участки профилей зубьев заштрихованы. (См. И. И. Артоболовский, Теория механизмов, §§ 112—117.)

#### ЗАДАЧИ 335—345

335. Нарезание зубьев на колесе производилось без сдвига инструментальной рейки, модуль которой равен  $m = 10 \text{ мм}$ , профильный угол  $\alpha_0 = 20^\circ$ , высота головки рейки  $h_{r,p} = m$ .

Определить у нарезаемого колеса, имеющего 20 зубьев, толщину зуба по делительной окружности и толщину того же зуба по окружности головок (выступов)  $a_r$ . Радиус окружности головок принять равным  $R_r = R_x + m$ .

336. Определить расстояние между осями колес  $A_{c6}$  с исправленным внешним зацеплением, если числа зубьев колес соответственно равны  $z_1 = 12$  и  $z_2 = 20$ . Зубья на колесах нарезаны инструментальной рейкой, у которой модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , профильный угол  $\alpha_0 = 20^\circ$  и высота головки  $h_{r,p} = m$ .

Указание: профили зубьев не должны подрезаться инструментом.

337. Для трехзвенной зубчатой передачи с внешним зацеплением зубьев, у которой профили зубьев очерчены эвольвентами окружностей, определить степень перекрытия  $\varepsilon$ , если числа зубьев колес  $z_1 = 22$ ,  $z_2 = 30$ , модуль зацепления  $m = 10 \text{ мм}$ , угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6} = 20^\circ$  и высота головок зубьев  $h_r = m$ .

338. Для трехзвенной зубчатой передачи с внутренним зацеплением зубьев, у которой профили зубьев очерчены эвольвентами окружностей, определить степень перекрытия  $\varepsilon$ , если числа зубьев колес  $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 90$ , модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6} = 20^\circ$  и высота головок зубьев  $h_r = m$ .

339. Для эвольвентного реечного зацепления определить степень перекрытия  $\varepsilon$ , если модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , угол зацепления  $\alpha_0 = 20^\circ$ , число зубьев колеса  $z_1 = 20$  и высота головок колеса и рейки  $h_r = m$ .

340. Для трехзвенной зубчатой передачи с внешним зацеплением и эвольвентными профилями зубьев найти максимально допустимую высоту головки зуба на большом колесе ( $h_{r2}$ ) из условия отсутствия подреза профиля зуба на меньшем колесе, если числа

зубьев колес  $z_1 = 10$ ,  $z_2 = 30$ , модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6} = 20^\circ$ .

341. Определить максимально возможную высоту  $h_{r,p}$  головки рейки из условия отсутствия подрезания профиля зуба на колесе с числом зубьев  $z = 10$ , если указанное колесо нарезается без сдвига инструментальной рейки, профильный угол которой равен  $\alpha_0 = 20^\circ$ , а модуль  $m = 10 \text{ мм}$ .

342. Для трехзвенной зубчатой передачи с внутренним зацеплением и эвольвентными профилями зубьев найти максимально допустимую высоту  $h_r$  головки зуба большого колеса из условия отсутствия подреза профиля зуба на малом колесе, если число зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 40$ , модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , угол зацепления при сборке  $\alpha_0 = 20^\circ$ .

343. Была спроектирована трехзвенная зубчатая передача с внешним зацеплением и эвольвентными профилями зубьев. Передача проектировалась как неисправленная, поэтому угол зацепления предполагался равным  $\alpha_0 = 20^\circ$ , модуль  $m = 10 \text{ мм}$ , числа зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ . При сборке межцентровое расстояние оказалось больше расчетного на 5 мм. Определить получившийся угол зацепления при сборке  $\alpha_{c6}$  и радиусы начальных окружностей колес  $R_1$  и  $R_2$ .

344. Для трехзвенной зубчатой передачи с коническими колесами определить радиусы оснований начальных конусов  $R_1$  и  $R_2$  и угол  $\delta_1$  наклона общей образующей начальных конусов к оси первого колеса, если числа зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ , угол между осями  $\delta = 90^\circ$  и модуль  $m = 10 \text{ мм}$ .

345. Для трехзвенной зубчатой передачи с коническими колесами определить радиусы оснований начальных конусов  $R_1$  и  $R_2$  и угол  $\delta_1$  наклона общей образующей начальных конусов к оси первого колеса, если числа зубьев колес  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 30$ , угол между осями колес  $\delta = 120^\circ$  и модуль  $m = 10 \text{ мм}$ .

#### § 23. Проектирование одноступенчатых планетарных зубчатых передач

1°. В этом параграфе в виде примера показывается последовательность определения основных параметров, т. е. чисел зубьев, числа сателлитов и радиусов начальных окружностей для одноступенчатого планетарного однорядного редуктора типа Джемса (рис. 116).

В этом же параграфе приводится ряд задач для самостоятельного решения.

Для получения однозначного решения вводятся следующие ограничения:

- 1) зубчатые колеса 1 и 2, а также колеса 2 и 3 (рис. 116) должны образовать неисправленное (нормальное) зацепление,
- 2) угол зацепления в сборке  $\alpha_{c6} = 20^\circ$  и высота головок зубьев  $h_r = m$ ,
- 3) при зацеплении зубчатых колес не должно быть их заклинивания, причем условие отсутствия заклинивания заключается в том, что

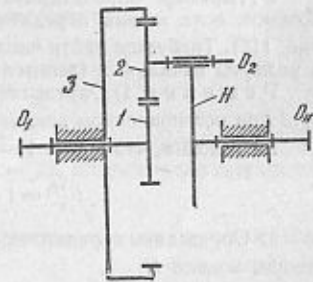


Рис. 116. Схема одноступенчатого планетарного однорядного редуктора типа Джемса.



а) для внешнего зацепления число зубьев на меньшем колесе не должно быть меньше, чем

$$z_{1\min} = 2 \frac{\sqrt{i_{12}^2 + (2i_{12} + 1) \sin^2 \alpha_{c6} + i_{12}}}{(2i_{12} + 1) \sin^2 \alpha_{c6}}, \quad (23.1)$$

б) для внутреннего зацепления число зубьев на меньшем колесе не должно быть меньше, чем

$$z_{2\min} = 2 \frac{\sqrt{i_{23}^2 - (2i_{23} - 1) \sin^2 \alpha_{c6} + i_{23}}}{(2i_{23} - 1) \sin^2 \alpha_{c6}} \quad (23.2)$$

(в этих формулах передаточное отношение  $i_{12}$  и  $i_{23}$  берется по своему абсолютному значению и предполагается равным или большим единицы),

4) габариты механизма должны быть наименьшими.

2°. При проектировании редукторов указанного типа, необходимо соблюдать следующие условия:

1) условие соосности

$$z_3 = z_1 + 2z_2, \quad (23.3)$$

2) условие соседства

$$\sin \frac{180}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_1 + z_2}, \quad (23.4)$$

где  $k$  — число сателлитов,

3) условие сборки:

$$k_{\max} = z_1 + z_3, \quad (23.5)$$

где  $k_{\max}$  — максимально возможное число сателлитов, располагающихся в параллельных плоскостях;

фактическое число сателлитов будет равно

$$k = \frac{k_{\max}}{E}, \quad (23.6)$$

где  $E$  — один из множителей числа  $k_{\max}$ ;

число сателлитов  $k$ , получаемое из настоящего условия, не должно превышать число их, найденное из условия соседства.

3°. Пример. Спроектировать одноступенчатый однорядный редуктор типа Джемса, если заданы передаточное отношение  $i_{1H}^3 = 4$  и модуль  $m = 2$  мм (см. рис. 116). Требуется найти числа зубьев всех колес, наибольшее число сателлитов и радиусы начальных (делительных) окружностей для всех зубчатых колес.

Р е ш е н и е. 1) Определяем передаточное отношение  $i_{13}^{(H)}$  от колеса 1 к колесу 3 при остановленном водиле  $H$ .

Из условия, что  $i_{1H}^{(3)} = 1 - i_{13}^{(H)}$ , получаем

$$i_{13}^{(H)} = 1 - i_{1H}^{(3)} = 1 - 4 = -3 = |3|.$$

2) Определяем передаточное отношение  $i_{12}^{(H)}$  от колеса 1 к колесу 2 при остановленном водиле  $H$ .

Из условия соосности (23.3) имеем, что  $z_1 + 2z_2 = z_3$  и, так как  $i_{13}^{(H)} = \frac{z_3}{z_1}$ , то  $z_3 = z_1 \cdot i_{13}^{(H)}$ .

Подставляя значение  $z_3$  в формулу (23.3), получаем  $z_1 + 2z_2 = z_1 \cdot i_{13}^{(H)}$ , откуда

$$i_{12}^{(H)} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{i_{13}^{(H)} - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

3) Определяем передаточное отношение  $i_{23}^{(H)}$  от колеса 2 к колесу 3 при остановленном водиле  $H$ .

В формулу (23.3) подставляем значение  $z_1$ , выраженное через  $i_{12}^{(H)}$ . Получаем

$$\frac{z_3}{i_{12}^{(H)}} + 2z_2 = z_3,$$

откуда

$$i_{23}^{(H)} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{1 + 2 \cdot i_{12}^{(H)}}{i_{12}^{(H)}} = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1} = 3.$$

4) Находим наименьшие допустимые числа зубьев на колесах 1 и 2:

а) на колесе 1 по формуле (23.1):

$$z_{1\min} = 2 \frac{\sqrt{i_{12}^2 + (2i_{12} + 1) \sin^2 \alpha_{c6} + i_{12}}}{(2i_{12} + 1) \sin^2 \alpha_{c6}} = 2 \frac{\sqrt{1^2 + (2 \cdot 1 + 1) 0,117 + 1}}{(2 \cdot 1 + 1) 0,117} = 12,5,$$

т. е. должно быть  $z_1 \geq 13$ ;

б) на колесе 2 по формуле (23.2):

$$z_{2\min} = 2 \frac{\sqrt{i_{23}^2 - (2i_{23} - 1) \sin^2 \alpha_{c6} + i_{23}}}{(2i_{23} - 1) \sin^2 \alpha_{c6}} = 2 \frac{\sqrt{3^2 - (2 \cdot 3 - 1) 0,117 + 3}}{(2 \cdot 3 - 1) 0,117} = 20,2,$$

т. е. должно быть  $z_2 \geq 21$ .

5) Производим подбор чисел зубьев на колесах 1, 2 и 3 при условии, что  $i_{12} = 1$ ,  $z_1 \geq 13$  и  $i_{23} = 3$ ,  $z_2 \geq 21$ . Если принять, что  $z_1 = 14$ , то получится  $z_2 = 14$ , но  $14 < 21$ . Поэтому принимаем, что  $z_1 = 22$ . Тогда  $z_2 = 22$ , и так как  $22 > 21$ , то число  $z_1 = 22$  оказалось приемлемым и, следовательно, будем иметь  $z_3 = 66$ .

Проверяем полученное согласно условию соосности. Имеем  $z_3 = z_1 + 2z_2 = 22 + 2 \cdot 22 = 66$ , т. е. указанное условие выполнено. Окончательно принимаем следующие числа зубьев:  $z_1 = 22$ ,  $z_2 = 22$  и  $z_3 = 66$ .

Переходим далее к подбору максимального числа сателлитов.

6) Из условия соседства (23.4) имеем, что,

$$\sin \frac{180^\circ}{k} > \frac{z_3 + 2}{z_1 + z_2} = \frac{22 + 2}{22 + 22} = \frac{24}{44} = 0,545,$$

откуда  $\frac{180^\circ}{k} = 33^\circ$  или число сателлитов  $k < \frac{180}{33} = 5,45$ .

Таким образом, можно поставить не более 5 сателлитов.

7) Из условия сборки (23.6) имеем:

$$k = \frac{z_1 + z_3}{E} = \frac{22 + 66}{E} = \frac{88}{E},$$

где  $E$  — целое число и один из сомножителей числа  $k_{\max} = z_1 + z_3$  (формула (23.5)). Очевидно, чтобы получить  $k \leq 5$ , надо положить  $E = 22$ , и тогда число сателлитов будет равно 4.

Окончательно принимаем  $k = 4$ .

Далее определяем радиусы начальных (делительных) окружностей всех колес:

$$\text{для колеса 1: } R_1 = \frac{mz_1}{2} = \frac{2 \cdot 22}{2} = 22 \text{ мм,}$$

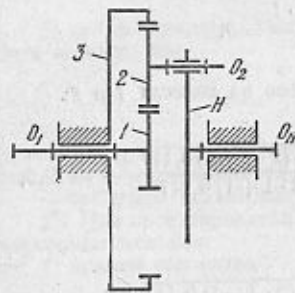
$$\text{для колеса 2: } R_2 = \frac{mz_2}{2} = \frac{2 \cdot 22}{2} = 22 \text{ мм,}$$

$$\text{для колеса 3: } R_3 = \frac{mz_3}{2} = \frac{2 \cdot 66}{2} = 66 \text{ мм.}$$

Все остальные размеры колес можно определить, руководствуясь указаниями § 22.

(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, § 123.)

346. Спроектировать одноступенчатый однорядный планетарный редуктор типа Джемса при условии, что зацепление колес неисправленное (нормальное), угол зацепления при сборке  $\alpha_{сб} = 20^\circ$ , высота головок зубьев  $h_r = m$ ; должно отсутствовать заклинивание колес, передаточное отношение от колеса 1 к водилу  $H$   $i_{1H}^{21} = 4,5$  и модуль  $m = 2$  мм.



К задачам 346—350.

Найти числа зубьев всех колес  $z_1, z_2$  и  $z_3$ , максимально допустимое число сателлитов  $k$  и радиусы начальных окружностей всех колес  $R_1, R_2$  и  $R_3$ .

347. Руководствуясь условием задачи 346, спроектировать редуктор по данным  $i_{1H}^{21} = 5, m = 2$  мм.

348. Руководствуясь условием задачи 346, спроектировать редуктор по данным  $i_{1H}^{21} = 6, m = 2$  мм.

349. Руководствуясь условием задачи 346, спроектировать редуктор по данным  $i_{1H}^{21} = 7, m = 2$  мм.

350. Руководствуясь условием задачи 346, спроектировать редуктор по данным  $i_{1H}^{21} = 8, m = 2$  мм.

### § 24. Проектирование кулачковых механизмов

1°. Основной задачей проектирования кулачковых механизмов является нахождение профиля кулачка. Эта задача может быть решена либо графически, либо аналитически.

В этом параграфе рассматриваются задачи на проектирование следующих видов кулачковых механизмов.

В и д I (рис. 117, а) — кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, имеющим ролик или острие на своем конце; ось толкателя проходит через центр вращения вала кулачка.

В и д II (рис. 117, б) — кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, имеющим ролик или острие на своем конце; ось толкателя не проходит через центр вращения кулачка.

В и д III (рис. 117, в) — кулачковый механизм с поступательно движущимся толкателем, имеющим плоскую тарелку на своем конце.

В и д IV (рис. 117, г) — кулачковый механизм с вращающимся толкателем, имеющим ролик или острие на своем конце.

Во всех задачах, где на конце толкателя имеется ролик, следует вначале рассматривать кулачковый механизм с толкателем, имеющим острие, которое совпадает с центром вращения ролика, т. е. вначале следует спроектировать *центральной* (теоретический) профиль кулачка.

2°. Исходными данными для проектирования профиля кулачка должны быть следующие.

1) Закон движения кулачка, который обычно задается его равномерным вращением, т. е. угловая скорость кулачка принимается постоянной.

2) Фазовые углы:  $\varphi_n$  — фазовый угол подъема (удаления),  $\varphi_{вв}$  — фазовый угол верхнего востоя,  $\varphi_0$  — фазовый угол опускания (приближения),  $\varphi_{вн}$  — фазовый угол нижнего востоя, определяемый из соотношения

$$\varphi_{вн} = 2\pi - (\varphi_n + \varphi_{вв} + \varphi_0) \quad (24.1)$$

которое следует из того, что кинематический цикл механизма соответствует одному обороту кулачка.

3) Закон движения толкателя в форме функции его положения  $s_2 = s_2(\varphi_1)$  (для механизмов I, II и III видов) или  $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$  (для кулачковых механизмов IV вида), где  $s_2$  — линейное перемещение толкателя, а  $\varphi_2$  — его угловое перемещение.

Закон движения толкателя может быть задан и в другой форме: в виде закона изменения аналога его ускорения для каждой фазы движения толкателя и, кроме того, должен быть задан его линейный  $h$  или угловой  $\Phi$  ход. В этом случае надо двукратным интегрированием найти функцию положения толкателя.

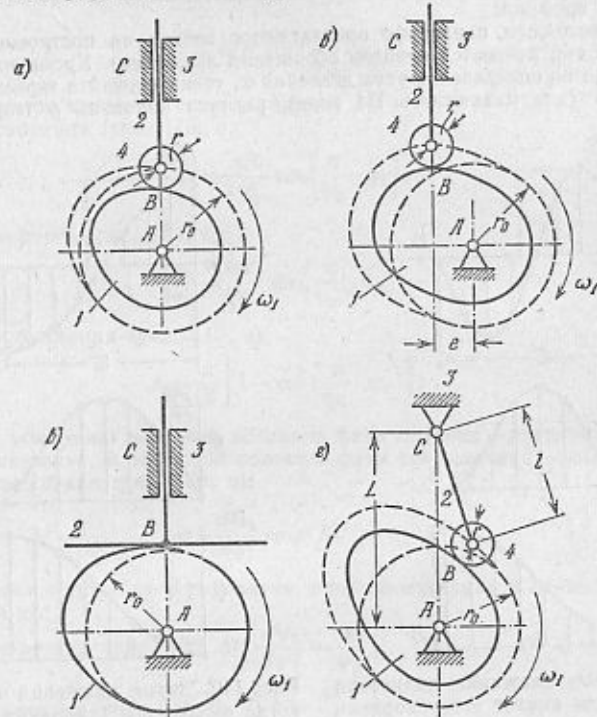


Рис. 117. Схема кулачковых механизмов.

4) Минимальный радиус  $r_0$  теоретического профиля кулачка, который либо должен быть задан, либо найден из условия, при котором угол давления  $\alpha$  не должен превосходить наперед заданной величины  $\alpha_{max}$  (для механизмов I, II и IV вида), или чтобы профиль кулачка описывался выпуклой кривой (для кулачков III вида).

Следует иметь в виду, что величина радиуса  $r_0$  обусловлена еще и размером вала, с которым вращается кулачок, вследствие чего должно быть выполнено соотношение

$$r_0 = r_B + r + \Delta, \quad (24.2)$$

где  $r_B$  — радиус вала, с которым заодно изготовлен кулачок, либо радиус шейки вала, на которую насажен кулачок;  $\Delta$  — наименьший размер, на который тело кулачка выступает над поверхностью вала, изготовленного заодно с кулачком, либо над поверхностью шейки вала, на которую насажен кулачок;  $r$  — радиус

ролика (если в механизме отсутствует ролик, то очевидно, что в формуле (24.2) надо положить  $r$  равным нулю).

Для кулачковых механизмов IV типа надо знать еще длину толкателя  $l$  и межосевое расстояние  $L$ .

5) Радиус ролика  $r$ , который либо задается, либо определяется из условия отсутствия самопересечения кривых, представляющих собой практический профиль кулачка, т. е. из условия

$$r \leq \rho_{\min}, \quad (24.3)$$

где  $r$  — радиус ролика,  $\rho_{\min}$  — минимальный радиус кривизны теоретического (центрального) профиля.

3°. В настоящем параграфе предлагаются задачи на построение профиля кулачка (все они решаются методом обращения движения). Кроме того, предлагаются задачи на определение угла давления  $\alpha$ , точки контакта тарелки с профилем кулачка (для механизмов III вида), радиуса кривизны  $\rho$  теоретического

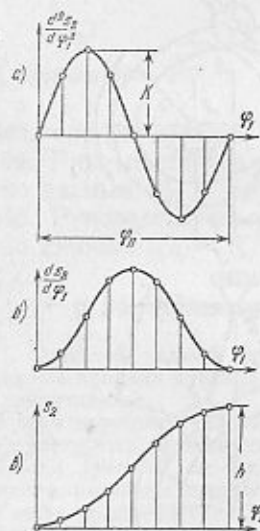


Рис. 118. Закон движения толкателя в случае, когда аналог его ускорения изменяется по закону синуса угла поворота кулачка.

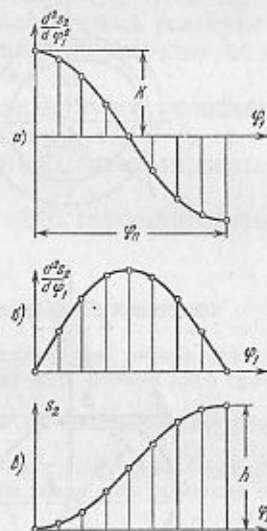


Рис. 119. Закон движения толкателя, когда аналог его ускорения изменяется по закону косинуса угла поворота кулачка.

профиля кулачка и жесткости  $q$  пружины, замыкающей кинематическую пару IV класса (толкатель — кулачок).

4°. Приведем формулы для аналога ускорения, аналога скорости и функции положения для некоторых законов движения толкателя, относящиеся к интервалу движения механизма, соответствующего фазовому углу  $\varphi_n$  подъема (удаления):

а) аналог ускорения изменяется по закону синуса угла поворота кулачка (рис. 118, а):

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = K \sin\left(\frac{2\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right). \quad (24.4)$$

Отсюда получим путем интегрирования: аналог ускорения (рис. 118, а):

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{2\pi h}{\varphi_n^2} \sin\left(\frac{2\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right), \quad (24.5)$$

аналог скорости (рис. 118, б):

$$\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{h}{\varphi_n} \left(1 - \cos\frac{2\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right), \quad (24.6)$$

функцию положения (рис. 118, в):

$$s_2 = h \left[ \frac{\varphi_1}{\varphi_n} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right) \right]; \quad (24.7)$$

б) аналог ускорения изменяется по закону косинуса угла поворота кулачка (рис. 119, а):

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = K \cos\left(\frac{\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right). \quad (24.8)$$

Отсюда получается путем интегрирования: аналог ускорения (рис. 119, а):

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{\pi^2 h}{2\varphi_n^2} \cos\left(\frac{\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right), \quad (24.9)$$

аналог скорости (рис. 119, б):

$$\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{h\pi}{2\varphi_n} \sin\left(\frac{\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right), \quad (24.10)$$

функция положения (рис. 119, в):

$$s_2 = \frac{h}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\varphi_n} \cdot \varphi_1\right) \right]; \quad (24.11)$$

в) аналог ускорения в первой половине фазы подъема — величина постоянная и положительная, а во второй половине фазы эта величина — тоже постоянная, но отрицательная (рис. 120, а):

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \pm K. \quad (24.12)$$

Отсюда получается путем интегрирования, в интервале, равном первой половине фазового угла  $\varphi_n$ :

$$\text{аналог ускорения (рис. 120, а): } \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{4h}{\varphi_n^2}, \quad (24.13)$$

$$\text{аналог скорости (рис. 120, б): } \frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{4h}{\varphi_n^2} \cdot \varphi_1, \quad (24.14)$$

$$\text{функция положения (рис. 120, в): } s_2 = \frac{2h}{\varphi_n^2} \cdot \varphi_1^2. \quad (24.15)$$

Для второй половины фазового угла подъема аналогичные функции не приводятся, но на рисунке 120 они изображены.

В вышеприведенных формулах  $h$  — линейный ход толкателя (кулачковые механизмы I, II и III видов). Для применения этих формул к механизмам IV вида в них следует подставлять вместо линейного хода толкателя его угловой ход  $\Phi$  и вместо линейного перемещения  $s_2$  — угловое перемещение  $\varphi_2$  толкателя.

Рассмотрим еще графический метод интегрирования аналога ускорения и аналога скорости толкателя на примере, когда аналог ускорения имеет вид (рис. 121, а)

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \pm K. \quad (24.16)$$

Интегрирование осуществим на всем интервале фазового угла подъема  $\varphi_n$  (удаление).



Очевидно, что аналог скорости  $ds_2/d\varphi_2$  будет изменяться по закону равнобедренного треугольника (рис. 121, б), у которого высота  $M$  равна

$$M = \frac{K \cdot \varphi_{II}}{2}, \quad (24.17)$$

площадь же этого треугольника пропорциональна ходу толкателя  $h$ , поэтому, имея

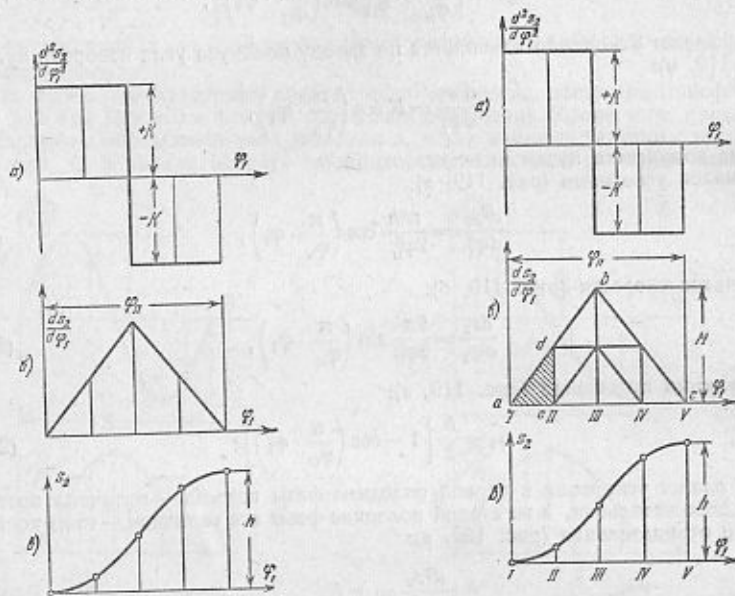


Рис. 120. Закон движения толкателя при задании аналога ускорения его величиною  $\pm K$  в первой половине фазы и  $-K$  во второй ее половине.

Рис. 121. Графическое интегрирование функции  $d^2s_2/d\varphi_1^2 = \pm K$ .

в виду рис. 121, б и формулу (24.17), можем записать, что  $h = \frac{M \cdot \varphi_{II}}{2} = \frac{K \cdot \varphi_{II}^2}{4}$ , откуда имеем

$$K = \frac{4h}{\varphi_{II}^2}. \quad (24.18)$$

Подставляя значения  $K$  в формулу (24.17), получаем

$$M = \frac{2h}{\varphi_{II}}. \quad (24.19)$$

По найденным значениям  $K$  и  $M$  нетрудно построить графики аналога скорости и аналога ускорения в функции угла  $\varphi_1$  поворота кулачка.

Для определения отдельных ординат графика функции положения толкателя  $s_2 = s_2(\varphi_1)$  поступим следующим образом.

Разделим абсциссу графика  $\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}(\varphi_1)$  (рис. 121, б) на  $m$  равных частей, например на четыре, как это показано на рисунке. Через концы ординат, соответствующих точкам деления, проведем прямые, параллельные оси абсцисс графика, а из точек деления — прямые, параллельные сторонам треугольника  $abc$ . Тем самым

его площадь разделим на ряд равных треугольников  $ade$ . Таких треугольников в нашем примере получается восемь. Площадь треугольника  $abc$  пропорциональна ходу  $h$  толкателя, следовательно, площадь треугольника  $ade$  пропорциональна одной восьмой хода  $h$ . Теперь вычислить значения ординат графика функции положения не представляет труда. Имеем

$$s_{2I} = 0, \quad s_{2II} = \frac{1}{8} \cdot h, \quad s_{2III} = \frac{4}{8} \cdot h, \\ s_{2IV} = \frac{7}{8} \cdot h \quad \text{и} \quad s_{2V} = \frac{8}{8} h = h.$$

По этим значениям строим график функции положения толкателя  $s_2 = s_2(\varphi_1)$  (рис. 121, в).  
4°. Нахождение угла давления  $\alpha$ . Дан кулачковый механизм (рис. 122, а) в произвольно выбранном положении. Требуется для этого положения механизма найти угол давления  $\alpha$ . Предполагаются известными минимальный радиус  $r_0$  кулачка, значения функции положения и ее первой производной (аналога скорости) для взятого положения механизма.

В точке контакта центрального (теоретического) профиля кулачка с осью ролика имеют место две совпадающие точки  $B_1$  и  $B_2$ , принадлежащие соответственно профилю кулачка и оси ролика (т. е. толкателю). Для скоростей этих точек справедливо векторное равенство

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{B_2 B_1}, \quad (24.20)$$

где  $v_{B_2}$  — скорость точки толкателя, совпадающая с осью ролика и направленная параллельно направляющему толкателя,  $v_{B_1}$  — скорость точки профиля кулачка, совпадающая с осью ролика и направленная перпендикулярно линии  $AB$ ,  $v_{B_2 B_1}$  — скорость точки  $B_2$  относительно точки  $B_1$ , направленная параллельно касательной  $tt$  к профилю кулачка.

По равенству (24.20) построен план скоростей (рис. 122, б). В треугольнике  $pb_1 b_2$  угол  $\angle pb_1 b_2$  равен углу давления  $\alpha$ , тангенс этого угла будет равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{B_2}}{v_{B_1}} = \frac{\frac{ds_2}{d\varphi_1} \cdot \omega_1}{\omega_1 (r_0 + s_2)} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{1}{r_0 + s_2}, \quad (24.21)$$

так как

$$v_{B_2} = \frac{ds_2}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \quad \text{и} \quad v_{B_1} = \omega_1 \cdot l_{AB} = \omega_1 \cdot (r_0 + s_2).$$

По значению тангенса нетрудно найти и значение угла давления  $\alpha$ .

5°. Определение точки контакта тарелки с профилем кулачка. Дан механизм III вида (рис. 123) в произвольно выбранном положении. Требуется найти расстояние  $l = (Bd) \mu_1$  от точки  $B$  контакта тарелки с профилем кулачка до осевой линии  $Ay$  толкателя.

Для решения задачи надо знать значение аналога скорости (первой производной от функции положения) для выбранного положения механизма.

В точке контакта тарелки с профилем кулачка находятся две точки.  $B_2$  — точка, принадлежащая тарелке, и  $B_1$  — точка, принадлежащая кулачку. Скорости этих точек связаны равенством

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{B_2 B_1}, \quad (24.22)$$

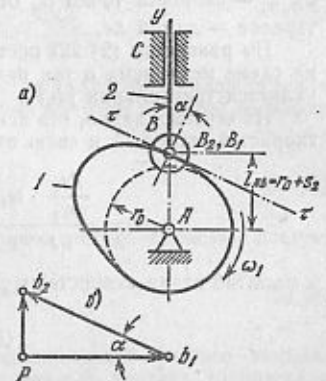


Рис. 122. К определению угла давления в точке контакта теоретического профиля кулачка с осью ролика.

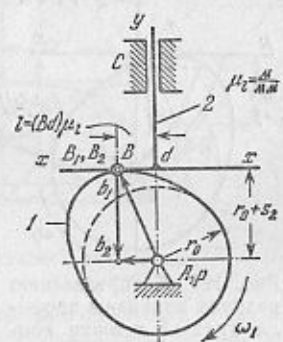


Рис. 123. К определению точки контакта тарелки с профилем кулачка с тарелкой.

где  $v_{B_2}$  — скорость точки  $B_2$ , направленная параллельно линии  $Ay$  толкателя,  $v_{B_1}$  — скорость точки  $B_1$ , направленная перпендикулярно линии  $AB$ ,  $v_{B_2B_1}$  — скорость точки  $B_2$  относительно точки  $B_1$ , направленная параллельно тарелке — линии  $xx$ .

По равенству (24.22) построен повернутый план скоростей непосредственно на схеме механизма в так называемом масштабе кривошипа (рис. 123). Планом является треугольник  $pb_1b_2$ .

Из чертежа видно, что искомое расстояние ( $Bd$ ) равно отрезку ( $pb_2$ ) на плане скоростей, который в свою очередь равен

$$pb_2 = \frac{ds_2}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 = \frac{ds_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{ds_2}{dt} = v_{B_2}, \text{ так как } v_{B_2} = \frac{ds_2}{dt} \cdot \omega_1,$$

а масштаб плана скоростей  $\mu_v = \omega_1 \cdot \mu_l$ . Поэтому отрезок ( $Bd$ ) будет равен

$$(Bd) = (pb_2) = \frac{ds_2/d\varphi_1}{\mu_l}. \quad (24.23)$$

Искомое расстояние  $l$ , вычисленное в натуральную величину, будет равно

$$l = \mu_l \cdot (Bd) = ds_2/d\varphi_1. \quad (24.24)$$

6°. Определение радиуса кривизны  $\rho$  профиля кулачка в точке контакта его с тарелкой. Дан механизм III вида (рис. 124) в произвольно выбранном положении. Требуется найти радиус кривизны профиля кулачка в точке  $B$  контакта его с тарелкой.

Для выбранного положения механизма по уже известным правилам строим заменяющий механизм  $AO_2BC$ , где точка  $O_2$  — центр кривизны профиля кулачка, а  $[\rho]$  — радиус его кривизны, изображенный в масштабе чертежа. Натуральная величина  $\rho$  будет равна  $\rho = \mu_l [\rho]$ .

Непосредственно на схеме механизма (рис. 124) строим план ускорений заменяющего механизма в так называемом масштабе кривошипа; этот план строим по уравнению

$$a_{O_2} = a_{O_1} + a_{O_2O_1}, \quad (24.25)$$

где  $a_{O_1}$  — ускорение точки  $O_1$  кулачка, направленное параллельно линии  $AO_1$ ,  $a_{O_2}$  — ускорение точки  $O_2$  толкателя, направленное параллельно оси направляющих  $Ay$  толкателя,  $a_{O_2O_1}$  — ускорение точки  $O_2$  относительно точки  $O_1$ , направленное параллельно оси  $xx$  тарелки.

Рис. 124. К определению радиуса кривизны профиля кулачка в точке контакта профиля кулачка с тарелкой.

На плане отрезок ( $pb_2$ ) пропорционален отрицательному ускорению точки  $O_2$  толкателя, так как начало плана  $\pi$  совмещено с точками  $O_1$  и  $O_2$ . Из чертежа получаем, что отрезок, изображающий на схеме радиус кривизны  $\rho$ , в точке касания профиля кулачка с тарелкой равен

$$[\rho] = [r_0] + [s_2] - (pb_2). \quad (24.26)$$

В скобках указаны отрезки, измеренные на схеме механизма. Натуральные значения радиуса кривизны  $\rho$ , минимального радиуса  $r_0$  и перемещения толкателя  $s_2$  соответственно будут равны

$$\rho = \mu_l [\rho]; \quad r_0 = \mu_l [r_0]; \quad s_2 = \mu_l [s_2],$$

где  $\mu_l$  — масштаб схемы механизма. Величина отрезка ( $pb_2$ ) найдется из равенства

$$(pb_2) = \frac{a_{B_2}}{\mu_a} = \frac{\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2}{\omega_1^2 \cdot \mu_l} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} \cdot \frac{1}{\mu_l}.$$

Подставляя полученное значение этого отрезка в формулу (24.26) и умножая все ее члены на масштаб  $\mu_l$  схемы механизма, окончательно получим искомую величину радиуса  $\rho$  кривизны профиля кулачка:

$$\rho = r_0 + s_2 - \left| -\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} \right|. \quad (24.27)$$

При положительном значении аналога ускорения радиус кривизны следует находить по формуле

$$\rho = r_0 + s_2 + \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}. \quad (24.28)$$

7°. Определение жесткости  $q$  пружины, обеспечивающей силовое замыкание кинематической пары IV класса, т. е. — постоянный контакт толкателя с кулачком.

Рассматривается случай, когда отрыв толкателя от профиля кулачка может произойти либо вследствие действия инерционной силы толкателя, либо вследствие действия его инерционного момента. Пружину следует подбирать так, чтобы

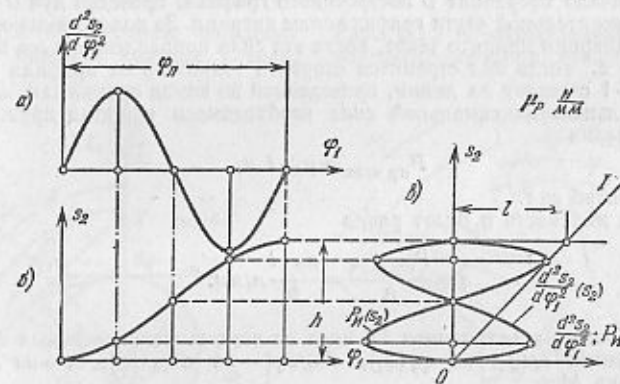


Рис. 125. К определению жесткости замыкающей пружины.

во всех положениях механизма сила нажатия пружины была бы больше отрывающего силового фактора; при этом предполагается, что пружина смонтирована без предварительной деформации.

Для решения задачи надо знать массу поступательно движущихся частей толкателя (для механизмов I, II и III видов) или момент инерции вращающихся частей толкателя (для механизмов IV вида), закон изменения функции положения и ее второй производной (аналога ускорений) на всей фазе подъема или опускания. Для решения задачи берется та фаза, в которой отрицательное значение аналога ускорений будет большим по своему абсолютному значению. Надо также знать угловую скорость  $\omega_1$  кулачка.

Приведем решение задачи, относящейся к кулачковым механизмам I, II и III видов. На рис. 125 показаны график аналога ускорений

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1)$$

(рис. 125, а) и график функции положения  $s_2 = s_2(\varphi_1)$  (рис. 125, б). На рис. 125, в построен график зависимости аналога ускорений от перемещения толкателя

$$\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}(s_2).$$

Этот график построен путем исключения параметра  $\varphi_1$  из зависимостей

$$\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1) \text{ и } s_2 = s_2(\varphi_1).$$

Сила инерции  $P_{II}$  толкателя будет равна

$$P_{II} = -m a_2 = -m \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2, \quad (24.29)$$

где  $m$  — масса толкателя,  $a_2$  — ускорение толкателя,  $\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}$  — аналог ускорения толкателя,  $\omega_1$  — угловая скорость кулачка.

График изменения силы инерции толкателя будет отличаться от графика аналога ускорений только масштабом и знаком. Поэтому можно считать, что на рис. 125, в построен график  $P_{II} = P_{II}(s_2)$  изменения силы инерции толкателя в функции перемещения последнего.

Через начало координат  $O$  построенного графика, проведен луч  $O-1$  касательно к положительной части графика силы инерции. За положительное направление силы инерции принято такое, когда эта сила направлена от оси вращения кулачка, т. е. когда она стремится оторвать толкатель от профиля кулачка.

Луч  $O-1$  отсекает на линии, проведенной из конца ординаты  $h$ , отрезок  $I$ , пропорциональный максимальной силе необходимого нажатия пружины. Эта сила будет равна

$$P_{пр \max} = \mu_p \cdot I \cdot h, \quad (24.30)$$

где  $\mu_p$  — масштаб сил.

Искомая жесткость  $q$  будет равна

$$q = \frac{P_{пр \max}}{h} = \frac{\mu_p \cdot I}{h} \text{ н/мм.} \quad (24.31)$$

Для кулачковых механизмов IV вида во всех вышеприведенных формулах следует заменить  $s_2(\varphi_1)$  на  $\varphi_2(\varphi_1)$ ,  $d^2 s_2/d\varphi_1^2$  на  $d^2 \varphi_2/d\varphi_1^2$ ,  $m$  на  $I^2$ ,  $h$  —  $\Phi$  и  $P_{пр \max}$  на  $M_{пр \max}$ .

8°. Определение полярных координат  $R$  и  $\vartheta$  точек центрального профиля кулачка, находящегося в соприкосновении с элементом кинематической пары IV класса на толкателе. Начало координат принято совпадающим с точкой  $A$ . Ось, от которой отсчитываются углы, обозначим линией  $Ay_0$ , а поворот толкателя относительно кулачка — углом  $\varphi$ .

а) Кулачковый механизм I вида (рис. 126). Положение точки  $B$  на профиле кулачка определяется радиусом-вектором  $R$  и полярным углом  $\vartheta$ . Из чертежа следует, что радиус-вектор равен

$$R = r_0 + s_2, \quad (24.32)$$

а полярный угол равен

$$\vartheta = \varphi, \quad (24.33)$$

где  $s_2$  — значение текущего перемещения толкателя,  $\varphi$  — текущее значение угла поворота кулачка.

б) Кулачковый механизм II вида (рис. 127). Из чертежа следует, что радиус-вектор  $R$  точки  $B$  равен

$$R = \sqrt{(s_0 + s_2)^2 + e^2}, \quad (24.34)$$

где  $s_0 = \sqrt{r_0^2 - e^2}$ , а полярный угол  $\vartheta$  равен

$$\vartheta = \varphi + \beta, \quad (24.35)$$

где

$$\beta = \arccos \left[ \frac{r_0^2 + R^2 - s_2^2}{2Rr_0} \right]. \quad (24.36)$$

При расположении оси толкателя слева от точки  $A$  знак угла  $\beta$  надо изменить на обратный.

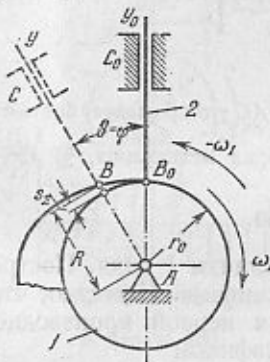


Рис. 126. К определению полярных координат профиля кулачка I вида.

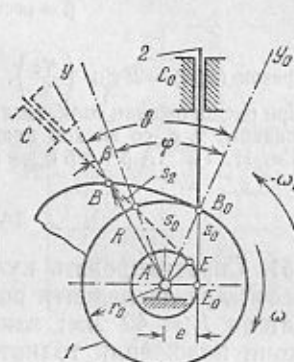


Рис. 127. К определению полярных координат профиля кулачка II вида.

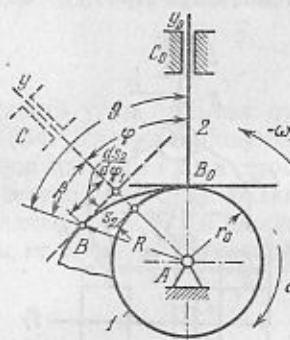


Рис. 128. К определению полярных координат профиля кулачка III вида.

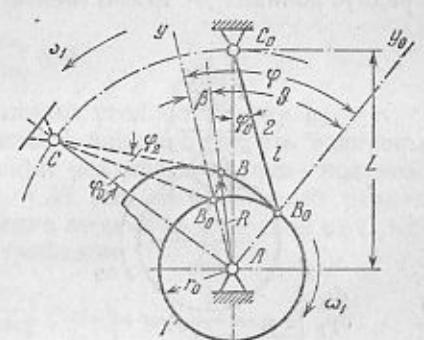


Рис. 129. К определению полярных координат профиля кулачка IV вида.

в) Кулачковый механизм III вида (рис. 128). Из чертежа следует, что радиус-вектор  $R$  точки  $B$  равен

$$R = \sqrt{(r_0 + s_2)^2 + \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1}\right)^2}, \quad (24.37)$$

а полярный угол  $\vartheta$  равен

$$\vartheta = \varphi + \beta, \quad (24.38)$$

где  $ds_2/d\varphi_1$  — текущее значение первой производной от функции положения, а

$$\beta = \arctg \left[ \frac{ds_2/d\varphi_1}{r_0 + s_2} \right].$$



г) Кулачковый механизм IV вида (рис. 129). Из чертежа следует, что радиус-вектор  $R$  точки  $B$  равен

$$R = \sqrt{L^2 + l^2 - 2L \cdot l \cos(\varphi_0 + \varphi_2)}, \quad (24.39)$$

полярный угол  $\Phi$  равен

$$\Phi = \varphi - \beta, \quad (24.40)$$

где

$$\beta = \arccos \left[ \frac{R^2 + r_0^2 - (B_0B)}{2R \cdot r_0} \right],$$

а отрезок  $(B_0B) = 2l \sin \left( \frac{\varphi_2}{2} \right)$ .

При расположении толкателя слева от линии  $AC$  угол  $\beta$  следует брать с обратным знаком, т. е. со знаком плюс.

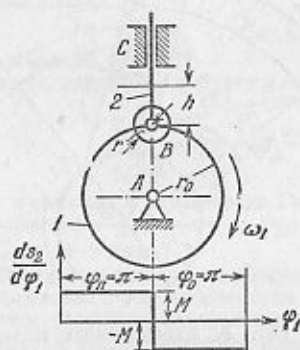
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, §§ 126—130.)

### ЗАДАЧИ 351—369

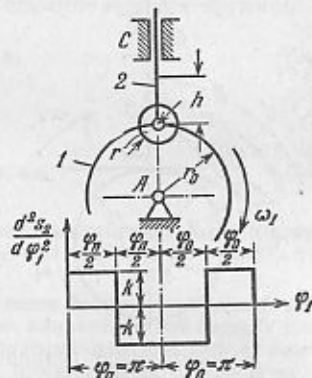
351. Спроектировать кулачковый механизм I вида. Построение провести для двенадцати положений механизма. Известно, что ход толкателя  $h = 42$  мм; закон изменения первой производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}(\varphi_1),$$

радиус ролика  $r = 10$  мм, минимальный радиус кулачка  $r_0 = 25$  мм,



К задаче 351.



К задаче 352.

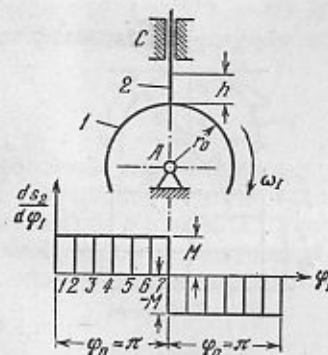
фазовый угол подъема (удаления)  $\varphi_n = \pi$ , фазовый угол опускания  $\varphi_0 = \pi$ .

352. Спроектировать кулачковый механизм I вида. Построение произвести для двенадцати положений механизма. Известно, что ход толкателя  $h = 36$  мм; закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

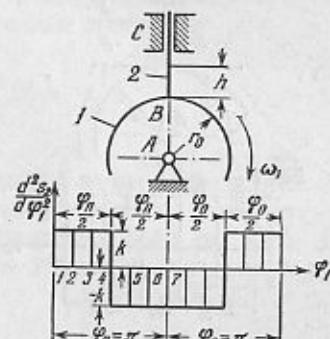
$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

радиус ролика  $r = 10$  мм, минимальный радиус кулачка  $r_0 = 25$  мм, фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ , фазовый угол опускания  $\varphi_0 = \pi$ .

353. Для кулачкового механизма I вида определить величины углов давления для семи положений механизма на фазе подъема.



К задаче 353.



К задаче 354.

Известно, что ход толкателя  $h = 42$  мм; минимальный радиус кулачка  $r_0 = 24$  мм; закон изменения первой производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ , фазовый угол опускания  $\varphi_0 = \pi$ .

354. Для кулачкового механизма I вида определить величины углов давления для семи положений механизма на фазе подъема. Известно, что ход толкателя  $h = 36$  мм; минимальный радиус кулачка  $r_0 = 20$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ , фазовый угол опускания  $\varphi_0 = \pi$ .

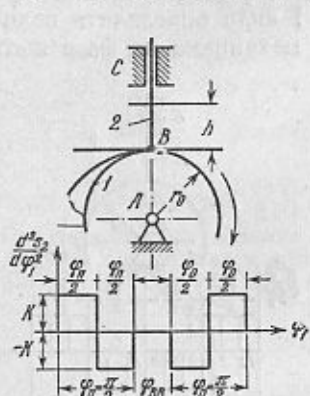
355. Для кулачкового механизма III вида определить минимальный радиус  $r_0$  кулачка, исходя из требования, чтобы профиль кулачка был очерчен выпуклой кривой, если ход толкателя  $h = 36$  мм, а закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

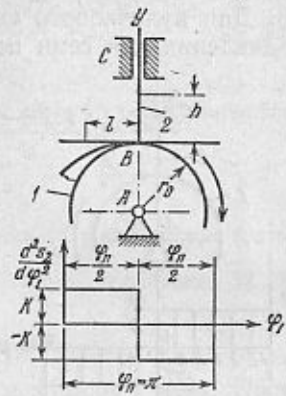
фазовый угол подъема  $\varphi_n = 0,5\pi$ , фазовый угол опускания  $\varphi_0 = 0,5\pi$ .

356. Для кулачкового механизма III вида определить, на каком расстоянии  $l$  от оси  $Ay$  толкателя произойдет соприкосновение

профиля кулачка с тарелкой толкателя, если кулачок повернут на угол  $\varphi_1 = 45^\circ$  из положения, указанного на чертеже. Дано: ход толкателя  $h = 45$  мм из положения, указанного на чертеже. Дано: ход толкателя  $h = 40$  мм, минимальный радиус кулачка  $r_0 = 40$  мм, закон изменения первой производной от функции положения толкателя задан графиком



К задаче 355.



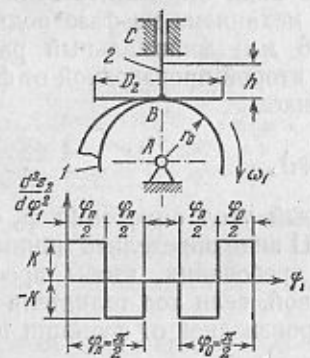
К задаче 356.

толкателя  $h = 40$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

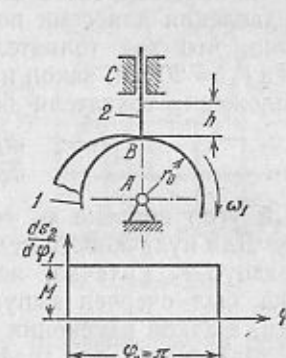
$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ .

357. Для кулачкового механизма III вида определить минимальный поперечный размер тарелки  $D_2$  толкателя, если ход толка-



К задаче 357.



К задаче 358.

теля  $h = 36$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

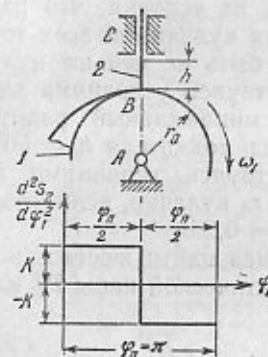
фазовый угол подъема  $\varphi_n = 0,5\pi$  и фазовый угол опускания  $\varphi_0 = 0,5\pi$ .

358. Для кулачкового механизма I вида определить угол давления при повороте кулачка на угол  $\varphi_1 = 45^\circ$  из положения, указанного на чертеже. Дано: ход толкателя  $h = 40$  мм, минимальный радиус кулачка  $r_0 = 40$  мм, закон изменения первой производной от функции положения толкателя задан графиком

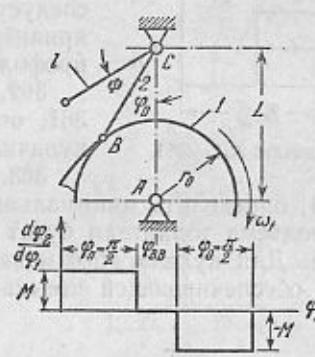
$$\frac{ds_2}{d\varphi_1} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ .

359. Для кулачкового механизма I вида определить радиус кривизны  $\rho$  профиля кулачка в месте его касания с концом толкателя, которое получается при повороте кулачка на угол  $45^\circ$  из положения, показанного на чертеже. Известно, что ход толкателя



К задаче 359.



К задаче 360.

$h = 40$  мм; минимальный радиус кулачка  $r_0 = 40$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = \pi$ .

Указание. Задачу решить путем построения планов скоростей и ускорений механизмов.

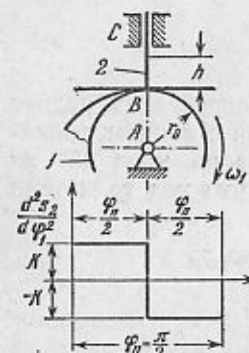
360. Для кулачкового механизма IV вида определить угол давления  $\alpha$  в том положении механизма, которое получится в результате поворота кулачка на угол  $\varphi_1 = 45^\circ$ . Известно, что расстояние между осями вращения кулачка и толкателя  $L = 120$  мм; длина толкателя  $l = 90$  мм, начальный угол отклонения толкателя от линии центров  $AC$   $\varphi_0 = 30^\circ$ , ход толкателя  $\Phi = 30^\circ$ , закон изменения

первой производной от функции положения толкателя графика

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}(\varphi_1),$$

фазовый угол  $\varphi_n = 0,5\pi$ .

361. Для кулачкового механизма III вида определить минимальный радиус  $r_0$  кулачка так, чтобы во всех положениях механизма в пределах фазы подъема профиль кулачка очерчивался бы выпуклой кривой. Известно, что ход толкателя  $h = 30$  мм; закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком



К задачам 361—363.

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

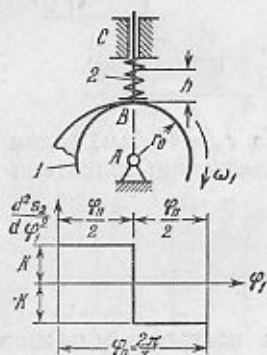
фазовый угол подъема  $\varphi_n = 0,5\pi$ .

Указание. При решении задачи следует исходить из условия, что радиус кривизны профиля кулачка во всех точках профиля должен быть не меньше нуля.

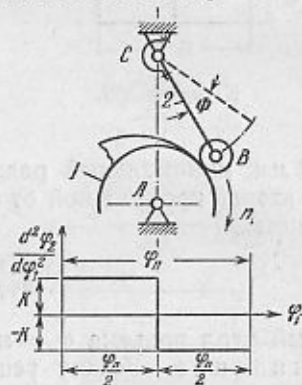
362. Руководствуясь условиями задачи 361, определить минимальный радиус  $r_0$  кулачка, если ход толкателя  $h = 60$  мм.

363. Руководствуясь условиями задачи 361, определить минимальный радиус  $r_0$  кулачка, если фазовый угол подъема толкателя будет равен  $\varphi_n = 0,25\pi$ .

364. Для кулачкового механизма I вида найти жесткость пружины, обеспечивающей замыкание кинематической пары IV класса



К задаче 364.



К задаче 365.

(кулачок—толкатель), если ход толкателя  $h = 20$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

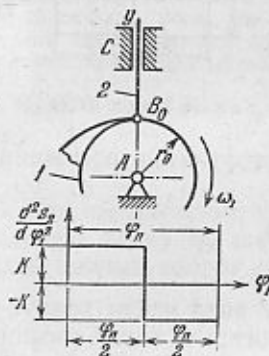
фазовый угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ , масса толкателя  $m_2 = 0,18$  кг, угловая скорость кулачка  $n_1 = 1000$  об/мин.

365. Для кулачкового механизма IV вида найти жесткость пружины, замыкающей кинематическую пару IV класса, если ход толкателя  $\Phi = 30^\circ$ , закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

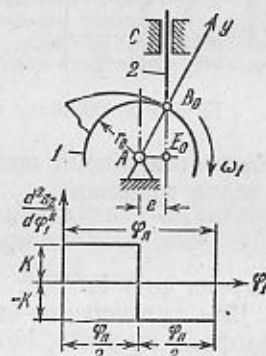
$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ , момент инерции толкателя относительно оси C равен  $I = 10^{-5}$  кгм<sup>2</sup>, угловая скорость кулачка  $n_1 = 1000$  об/мин.

366. Для кулачкового механизма I вида найти полярные координаты точки профиля кулачка, которая находится в месте касания кулачка с концом толкателя при повороте кулачка на угол  $\varphi_1 = 30^\circ$



К задаче 366.



К задаче 367.

из положения, указанного на чертеже, если ход толкателя  $h = 40$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ .

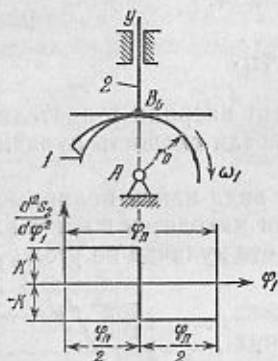
367. Для кулачкового механизма II вида найти полярные координаты точки профиля кулачка, которая находится в месте касания кулачка с концом толкателя при повороте кулачка на угол  $\varphi_1 = 60^\circ$  из положения, указанного на чертеже, если ход толкателя  $h = 20$  мм, минимальный радиус кулачка  $r_0 = 20$  мм, эксцентриситет  $e = 10$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

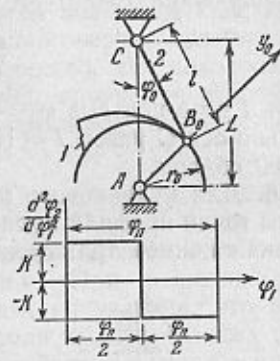
фазовый угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ .



368. Для кулачкового механизма III вида найти полярные координаты точки профиля кулачка, которая находится в месте касания профиля кулачка с тарелкой при повороте кулачка на угол  $\varphi_1 = 30^\circ$  из положения, указанного на чертеже, если ход толкателя  $h = 20$  мм, минимальный радиус кулачка  $r = 40$  мм,



К задаче 368.



К задаче 369.

закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ .

369. Для кулачкового механизма IV вида найти радиус-вектор точки профиля кулачка, которая находится в месте касания профиля кулачка с концом толкателя при повороте кулачка на угол  $\varphi_1 = 60^\circ$  из положения, указанного на чертеже, если начальный угол отклонения толкателя от линии центров  $AC$  равен  $\varphi_0 = 30^\circ$ , ход толкателя  $h = 30^\circ$ , расстояние между центрами вращения кулачка и толкателя  $L = 80$  мм, длина толкателя  $l = 60$  мм, закон изменения второй производной от функции положения толкателя задан графиком

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}(\varphi_1),$$

фазовый угол подъема  $\varphi_n = 120^\circ$ .

## ГЛАВА ШЕСТАЯ

### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С НИЖШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

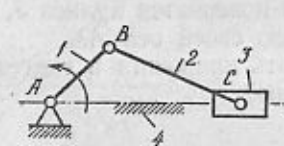
#### § 25. Задача о существовании кривошипа

1°. При решении задач этого параграфа следует так подбирать размеры звеньев механизма, чтобы одно звено его, входящее в кинематическую пару V класса со стойкой, могло бы проворачиваться на полный оборот около оси вращательной кинематической пары. Во всех задачах настоящего параграфа рассматриваются только четырехзвенные механизмы с нижними кинематическими парами.

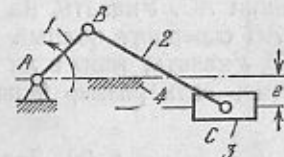
(См. И. И. Артоболевский, Теория механизмов, § 136.)

#### ЗАДАЧИ 370—377

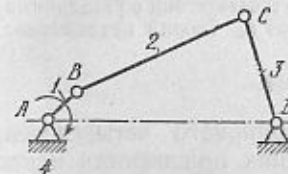
370. Для центрального кривошипно-ползунного механизма найти минимальную длину  $l_{BC}$  шатуна  $BC$ , при которой звено  $AB$  может совершать полный оборот около своей оси  $A$ .



К задаче 370.



К задаче 371.



К задаче 372.



К задаче 373.

371. Для дезаксиального кривошипно-ползунного механизма найти минимальную длину  $BC$ , при которой звено  $AB$  может совершать полный оборот около своей оси  $A$ .

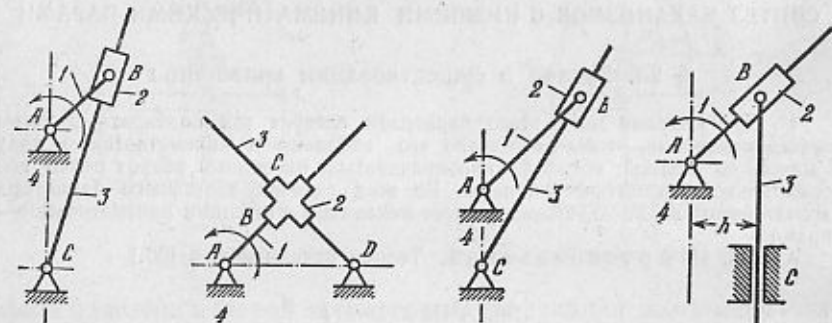
372. В механизме шарнирного четырехзвенника известны длины всех его звеньев  $l_{AB} = 20$  мм,  $l_{BC} = 100$  мм,  $l_{CD} = 60$  мм,  $l_{AD} =$

= 120 мм. Указать, сможет ли звено  $AB$  совершить полный оборот около своей оси  $A$ ?

373. В механизме шарнирного четырехзвенника известны длины всех его звеньев  $l_{AB}=20$  мм,  $l_{BC}=90$  мм,  $l_{CD}=40$  мм,  $l_{AD}=120$  мм. Указать, существует ли в этом механизме кривошип?

374. Для кулисного механизма Витворта указать, какой размер должно иметь звено  $AB$ , чтобы кулиса  $3$  не проворачивалась бы на полный оборот при повороте звена  $AB$  на угол  $360^\circ$ ?

375. Для кулисного механизма муфты Ольдгейма указать, на какой угол повернется кулиса  $3$  при повороте звена  $1$  на угол  $360^\circ$ ?



К задаче 374. К задаче 375. К задаче 376. К задаче 377.

376. В кулисном механизме Витворта размер звена  $AB$  больше расстояния  $AC$ . Указать, на какой угол повернется кулиса  $3$ , если звено  $AB$  совершит полный оборот около своей оси  $A$ ?

377. Указать, может ли существовать кривошип в тангенсном механизме, если размер  $h$  не равен нулю?

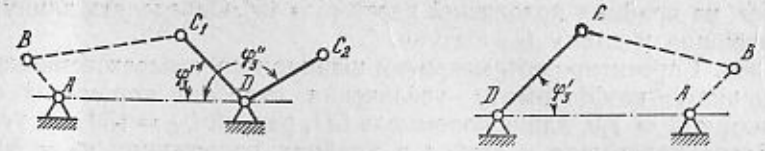
§ 26. Задача о положениях

1°. В настоящий параграф вошли задачи, которые могут быть решены графическими или графоаналитическими методами в соответствии с указаниями, изложенными в книге И. И. Артоболевского, Теория механизмов, § 133.

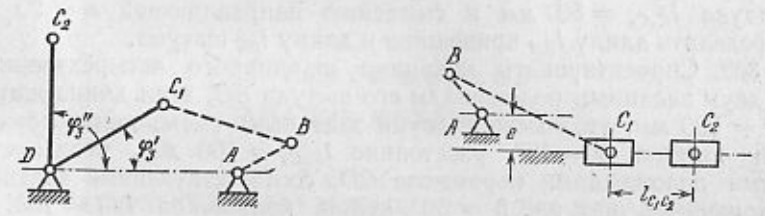
ЗАДАЧИ 378—386

378. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника, у которого коромысло  $CD$  в своих крайних положениях наклонено к стойке  $AD$  под углами  $\varphi_3^* = 45^\circ$  и  $\varphi_3^* = 120^\circ$ . Длина стойки  $AD$  равна  $l_{AD} = 100$  мм, длина коромысла  $CD$  равна  $l_{CD} = 75$  мм. Определить длины кривошипа  $l_{AB}$  и шатуна  $l_{BC}$ .

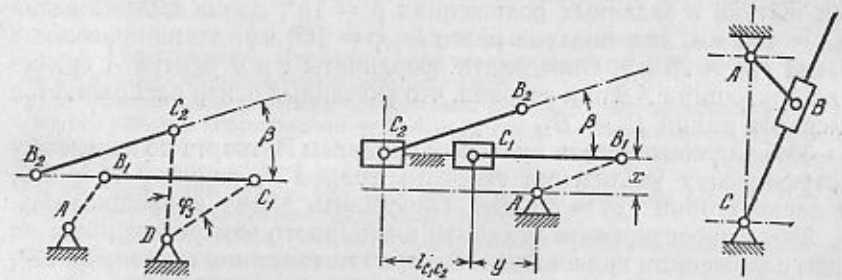
379. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту увеличения скорости коромысла  $CD$ , равному  $K=1,5$ . Длина стойки  $AD$  равна  $l_{AD} = 100$  мм, длина коромысла  $CD$   $l_{CD} = 75$  мм, угол наклона коромысла к стойке в



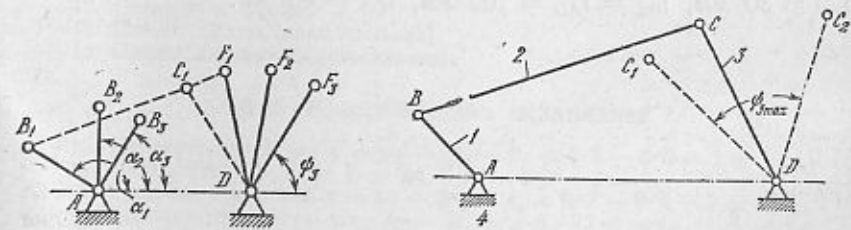
К задаче 378. К задаче 379.



К задаче 380. К задаче 381.



К задаче 382. К задаче 383. К задаче 384.



К задаче 385. К задаче 386.

одном из крайних положений равен  $\varphi_3 = 45^\circ$ . Определить длину  $l_{AB}$  кривошипа и длину  $l_{BC}$  шатуна.

380. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника по заданному коэффициенту увеличения скорости коромысла  $CD$ , равному  $K = 1,0$ , длине коромысла  $CD$ , равной  $l_{CD} = 150$  мм, углом наклона коромысла к стойке в крайних положениях  $\varphi_3' = 30^\circ$  и  $\varphi_3'' = 90^\circ$ . Определить длины  $l_{AB}$  кривошипа,  $l_{BC}$  шатуна и  $l_{AD}$  стойки.

381. Спроектировать кривошипно-ползунный механизм по заданному коэффициенту увеличения скорости ползуна  $K = 1,5$ , ходу ползуна  $l_{C_1C_2} = 50$  мм и смещению направляющей  $e = 20$  мм. Определить длину  $l_{AB}$  кривошипа и длину  $l_{BC}$  шатуна.

382. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника по двум заданным положениям его шатуна  $BC$ , если длина шатуна  $l_{BC} = 500$  мм, угол между двумя заданными смежными положениями шатуна  $\beta = 15^\circ$ , расстояние  $l_{B_1B_2} = 100$  мм, угол между двумя положениями коромысла  $CD$ , соответствующими заданным положениям шатуна,  $\beta = 60^\circ$ , длина кривошипа  $l_{AB} = 100$  мм. Определить длины коромысла  $CD$  и стойки  $AD$  и, кроме того, указать, сможет ли кривошип  $AB$  при выбранных размерах поворачиваться на полный оборот?

383. Спроектировать кривошипно-ползунный механизм по двум заданным положениям его шатуна, если угол между направлениями оси шатуна в заданных положениях  $\beta = 15^\circ$ , длина шатуна равна  $l_{BC} = 200$  мм, ход ползуна равен  $l_{C_1C_2} = 100$  мм, длина кривошипа равна  $l_{AB} = 75$  мм. Определить координаты  $x$  и  $y$  центра  $A$  вращения кривошипа  $AB$  при условии, что указанный центр располагается слева от линии  $B_1 - B_2$ .

384. Спроектировать кулисный механизм Витворта по заданному коэффициенту увеличения скорости кулисы  $3$ , равному  $K = 2,0$ , и длине стойки  $l_{AC} = 50$  мм. Определить длину кривошипа  $l_{AB}$ .

385. Спроектировать механизм шарнирного четырехзвенника по трем положениям кривошипа  $AB$  и трем положениям коромысла  $CD$ , т. е. определить длины звеньев  $BC$  и  $CD$ , если дано:  $l_{AB} = 40$  мм,  $\alpha_1 = 120^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$ ,  $\alpha_3 = 60^\circ$ ,  $l_{AD} = 100$  мм,  $l_{FD} = 70$  мм,  $\psi_3 = 60^\circ$ , хорда  $F_3F_2 = F_2F_1 = 23,5$  мм.

386. Для механизма шарнирного четырехзвенника найти максимальный угол размаха  $\psi_{\max}$  коромысла  $CD$ , если длины звеньев  $l_{AB} = 30$  мм,  $l_{BC} = l_{AD} = 100$  мм,  $l_{CD} = 60$  мм.

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

### Часть первая АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

#### Глава первая СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ

##### § 1. Структура механизмов. Основные определения

1. Пятого класса. Нет трех поступательных движений и двух вращательных (вокруг осей  $Oz$  и  $Oy$ ).
2. Пятого класса. Нет трех вращательных движений и двух поступательных (вдоль осей  $Oz$  и  $Oy$ ).
3. Третьего класса. Нет трех поступательных движений.
4. Пятого класса. Нет двух вращательных движений (вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ ) и двух поступательных (вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ ).  
Вращательное движение относительно оси  $Oz$  и поступательное вдоль этой же оси связаны соотношением  $r \operatorname{tg} \alpha = h$ , где  $\varphi$  — угол поворота звена 2,  $r$  — радиус средней винтовой линии резьбы,  $h$  — перемещение звена 2 вдоль оси  $Oz$ ,  $\alpha$  — угол подъема средней винтовой линии резьбы.
5. Четвертого класса. Нет двух вращательных движений (вокруг осей  $Oz$  и  $Oy$ ) и двух поступательных (вдоль осей  $Oz$  и  $Oy$ ).
6. Третьего класса. Нет двух вращательных движений (относительно осей  $Oy$  и  $Ox$ ) и одного поступательного (вдоль оси  $Oz$ ).
7. Второго класса. Нет двух поступательных движений (вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ ).
8. Первого класса. Нет одного поступательного движения (вдоль оси  $Oz$ ).
9. Четвертого класса. Нет двух вращательных движений (относительно осей  $Ox$  и  $Oz$ ) и двух поступательных (вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ ).
10. Третьего класса. Нет трех поступательных движений (вдоль осей  $Oz$ ,  $Oy$  и  $Ox$ ).
11. Четвертого класса.
12. Четвертого класса.
13. Пятого класса (вращательная).
14. Пятого класса (поступательная).

##### § 2. Классификация механизмов

15. Нулевого семейства  $w = 6l - 5p_5 - p_1 = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 = 1$ .
16. Четвертого семейства  $w = 2l - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ .
17. Третьего семейства  $w = 3l - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$ .
18. Третьего семейства  $w = 3l - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ .
19. Третьего семейства  $w = 3l - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ .
20. Третьего семейства  $w = 3l - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ .



### § 3. Составление кинематических схем механизмов

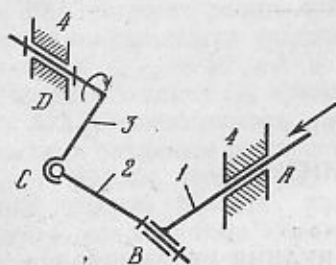
21—30. См. отдельные чертежи (стр. 236—237).

На этих чертежах приняты следующие обозначения:

число всех звеньев механизма —  $k$ ,

число его подвижных звеньев —  $n$ ,

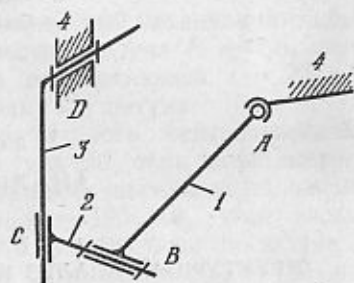
числа кинематических пар V, IV, III, II и I классов —  $p_5, p_4, p_3, p_2$  и  $p_1$ .



$$k=4, n=3, p_3=2, p_4=1, p_5=1$$

Механизм нулевого семейства

К ответу задачи 21.



$$k=4, n=3, p_3=2, p_4=1, p_5=1$$

Механизм нулевого семейства

К ответу задачи 22.

### § 4. Классификация плоских механизмов

31.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса первого вида. Механизм второго класса.

32.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса второго вида. Механизм второго класса.

33.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса третьего вида. Механизм второго класса.

34.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса третьего вида. Механизм второго класса.

35.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса пятого вида. Механизм второго класса.

36.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса четвертого вида. Механизм второго класса.

37.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса пятого вида. Механизм второго класса.

38.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, третьего и второго видов. Механизм второго класса.

39.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, обе второго вида. Механизм второго класса.

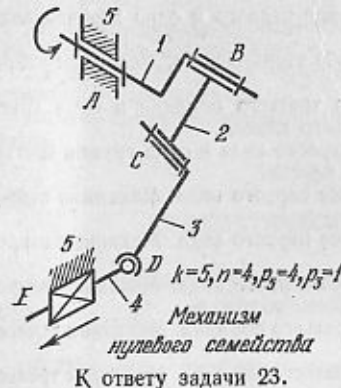
40.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, две первого и одна третьего видов. Механизм второго класса.

41.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, первого и третьего видов. Механизм второго класса.

42.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, первого и второго видов. Механизм второго класса.

43.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, все первого вида. Механизм второго класса.

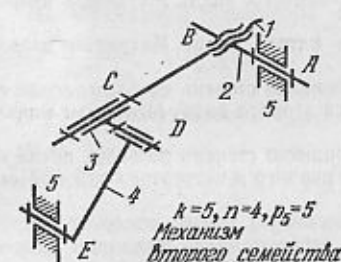
44.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, одна второго и две первого видов. Механизм второго класса.



$$k=5, n=4, p_3=4, p_5=1$$

Механизм нулевого семейства

К ответу задачи 23.



$$k=5, n=4, p_5=5$$

Механизм второго семейства

К ответу задачи 25.

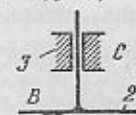


$$k=3, n=2, p_3=2, p_4=1$$

Механизм нулевого семейства

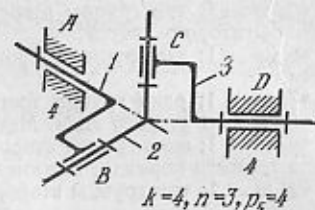
К ответу задачи 27.

$$k=3, n=2, p_3=2, p_4=1$$



Механизм третьего семейства (плоский)

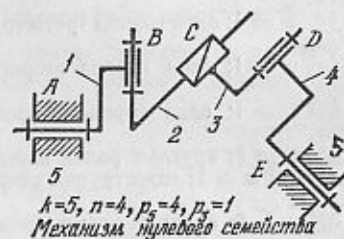
К ответу задачи 29.



$$k=4, n=3, p_3=4$$

Механизм третьего семейства

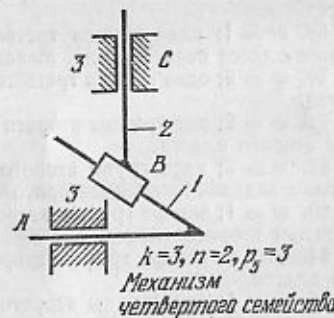
К ответу задачи 24.



$$k=5, n=4, p_3=4, p_4=1$$

Механизм нулевого семейства

К ответу задачи 26.

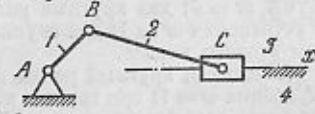


$$k=3, n=2, p_3=3$$

Механизм четвертого семейства

К ответу задачи 28.

$$k=4, n=3, p_3=4, p_4=0$$



Механизм третьего семейства (плоский)

К ответу задачи 30.

45.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, две первого и одна второго видов. Механизм второго класса.

46.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, обе второго вида. Механизм второго класса.

47.  $\omega = 1$ ; одна группа третьего класса третьего порядка и одна группа второго класса второго вида. Механизм третьего класса.

48.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса первого вида и одна группа третьего класса третьего порядка. Механизм третьего класса.

49.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, все первого вида. Механизм второго класса.

50.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, все первого вида. Механизм второго класса.

51.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, обе первого вида. Механизм второго класса.

52.  $\omega = 1$ ; одна группа третьего класса третьего порядка. Механизм третьего класса.

53.  $\omega = 1$ ; одна группа третьего класса третьего порядка. Механизм третьего класса.

54.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса первого вида. Механизм второго класса.

55.  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса пятого вида. Механизм второго класса.

56.  $\omega = 2$ ; круглый ролик вносит одну лишнюю степень свободы, после его устранения  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса второго вида. Механизм второго класса.

57.  $\omega = 2$ ; круглый ролик вносит одну лишнюю степень свободы, после его устранения  $\omega = 1$ ; две группы второго класса первого и четвертого видов. Механизм второго класса.

58.  $\omega = 0$ ; один из ползунов вносит пассивную связь, после его устранения  $\omega = 1$ ; одна группа второго класса второго вида. Механизм второго класса.

59.  $\omega = 1$ ; одна группа третьего класса третьего порядка и одна группа второго класса первого вида. Механизм третьего класса.

60.  $\omega = 2$ ; одна группа третьего класса третьего порядка. Механизм третьего класса.

61.  $\omega = 2$ ; две группы второго класса, четвертого и третьего видов. Механизм второго класса.

62.  $\omega = 2$ ; пять групп второго класса, две первого, две четвертого и одна третьего видов. Механизм второго класса.

63.  $\omega = 1$ ; четыре группы второго класса, три первого и одна второго видов. Механизм второго класса.

64.  $\omega = 1$ ; четыре группы второго класса, все первого вида. Механизм второго класса.

65.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, две первого и одна третьего видов. Механизм второго класса.

66.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, одна третьего, одна первого и одна пятого видов. Механизм второго класса.

67.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, обе первого вида. Механизм второго класса.

68.  $\omega = 1$ ; пять групп второго класса, три первого, одна третьего и одна пятого видов. Механизм второго класса.

69.  $\omega = 3$ ; два круглых ролика вносят две лишние степени свободы, после их устранения  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, пятого и первого вида. Механизм второго класса.

70.  $\omega = 2$ ; круглый ролик вносит одну лишнюю степень свободы, после его устранения  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, две первого и одна второго видов. Механизм второго класса.

71.  $\omega = 1$ . 72.  $\omega = 1$ . 73.  $\omega = 1$ . 74.  $\omega = 1$ . 75.  $\omega = 1$ . 76.  $\omega = 1$ .

77.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, первого и третьего видов. Механизм второго класса.

78.  $\omega = 1$ ; четыре группы второго класса, три первого и одна четвертого вида. Механизм второго класса.

79.  $\omega = 1$ ; две группы второго класса, одна первого и одна третьего видов. Механизм второго класса.

80.  $\omega = 1$ ; три группы второго класса, все первого вида. Механизм второго класса.

## Глава вторая КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

### § 5. Аналитическое определение положений, скоростей и ускорений звеньев механизмов

81. Функция положения  $\varphi_2 = \varphi_1 \frac{R_1}{R_2}$ , передаточное отношение  $i_{21} = \frac{R_1}{R_2}$ .

82. Функция положения  $s_{B_2} = h \operatorname{tg} \varphi_1$ , аналог скорости  $v_{\varphi_1, B_2} = h \sec^2 \varphi_1$ .

83. Функция положения  $s_{B_3} = h \operatorname{cosec} \varphi_1$ , аналог скорости  $v_{\varphi_1, B_3} = -h \frac{\cos \varphi_1}{\sin^2 \varphi_1}$ .

84. Функция положения  $s_C = l_{AB}(1 - \cos \varphi_1) + l_{BC} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{l_{AB}}{l_{BC}} \sin \varphi_1 \right)^2} \right]$ .

85. Функция положения  $\varphi_2 = \arcsin \left[ \frac{l_{AB} \sin \varphi_1}{\sqrt{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - 2l_{AB} \cdot l_{AC} \cos \varphi_1}} \right]$ .

86. Функция положения  $\varphi_3 = \arcsin \left[ \frac{l_{AB} \sin \varphi_1}{\sqrt{l_{AB}^2 + l_{AC}^2 - 2l_{AB} \cdot l_{AC} \cos \varphi_1}} \right]$ .

87.  $\omega_2 = 60 \text{ сек}^{-1}$ .

88.  $v_{B_2} = 7,1 \text{ мсек}^{-1}$ ;  $a_{B_2} = -710 \text{ мсек}^{-2}$ .

89.  $v_{B_3} = 8/3 \text{ мсек}^{-1}$ .

90.  $v_C = 6,44 \text{ мсек}^{-1}$ .

### § 6. Планы положений, скоростей и ускорений механизмов

91—126. См. отдельные чертежи (стр. 240—246).

127.  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 5 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 125 \text{ сек}^{-2}$ ,  $v_C = 0$ ,  $a_C = 50 \text{ мсек}^{-2}$ .

128.  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\omega_3 = 5 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 75 \text{ сек}^{-2}$ ,  $\varepsilon_3 = 0$ ,  $v_C = 2 \text{ мсек}^{-1}$ ,  $a_C = 10 \text{ мсек}^{-2}$ .

129.  $v_D = 2 \text{ мсек}^{-1}$ ,  $a_D = 0$ ,  $\omega_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 231 \text{ сек}^{-1}$ .

130.  $v_C = 0$ ,  $a_C = 60 \text{ мсек}^{-2}$ .

131.  $v = \sqrt{2} \text{ мсек}^{-2}$ ,  $a_C = 20 \cdot \sqrt{2} \text{ мсек}^{-2}$ , движение ускоренное.

132.  $\omega_1 = 20 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\omega_2 = \omega_3 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 231 \text{ сек}^{-2}$ .

133.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 10 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_3 = 100 \text{ сек}^{-2}$ .

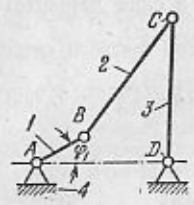
134.  $v_M = 0,5 \text{ мсек}^{-1}$ , вектор  $v_M$  направлен перпендикулярно к  $CM$  влево.

135.  $\omega_2 = 10 \text{ сек}^{-1}$ . 137.  $v = 0,58 \text{ мсек}^{-1}$ .

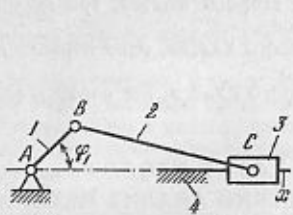
136.  $\omega_3 = 10 \text{ сек}^{-1}$ . 138.  $v_P = 1,0 \text{ мсек}^{-1}$ ,  $a_P = 5,8 \text{ мсек}^{-2}$ .

### § 7. Нахождение мгновенных центров скоростей и ускорений. Построение центроид

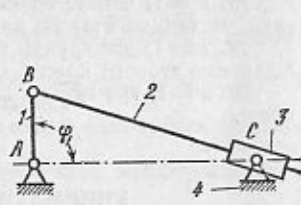
139—146. См. отдельные чертежи (стр. 246—247).



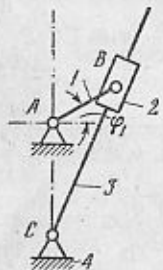
К ответу задачи 91.



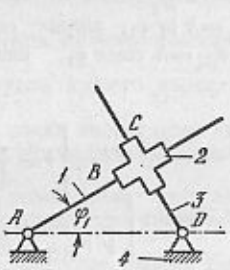
К ответу задачи 92.



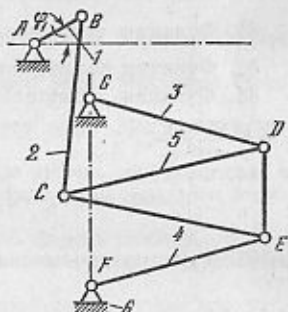
К ответу задачи 93.



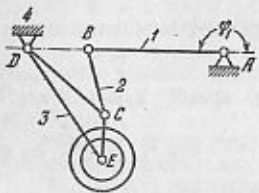
К ответу задачи 94.



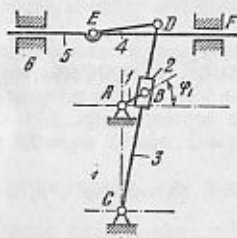
К ответу задачи 95.



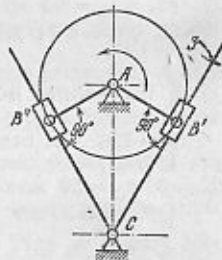
К ответу задачи 96.



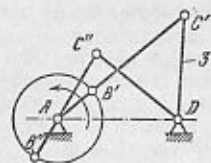
К ответу задачи 97.



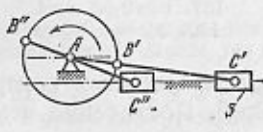
К ответу задачи 98.



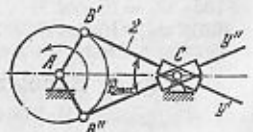
К ответу задачи 99.



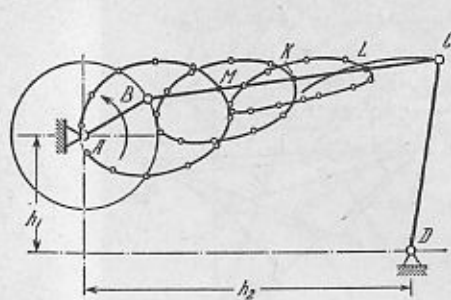
К ответу задачи 100.



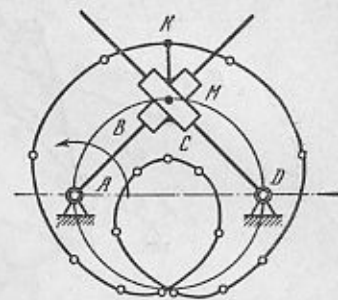
К ответу задачи 101.



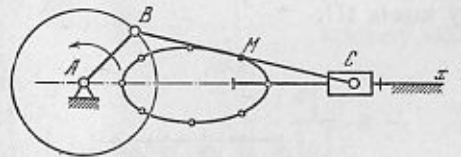
К ответу задачи 102.



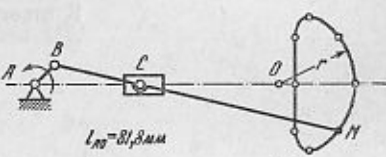
К ответу задачи 103.



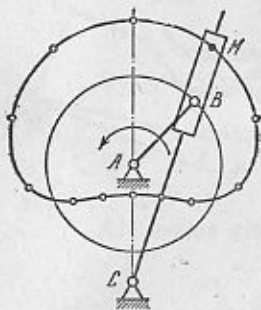
К ответу задачи 107.



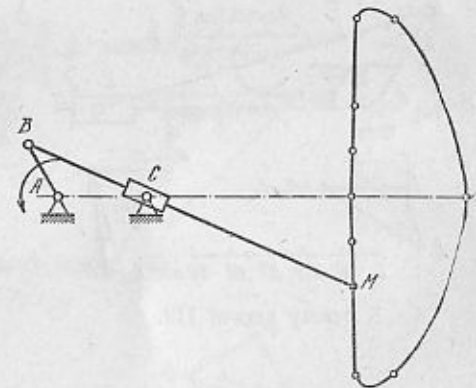
К ответу задачи 104.



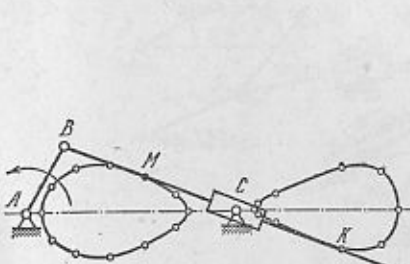
К ответу задачи 108.



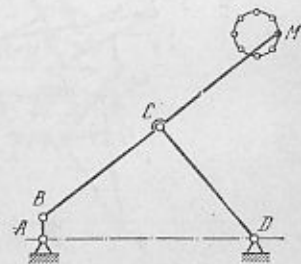
К ответу задачи 105.



К ответу задачи 109.

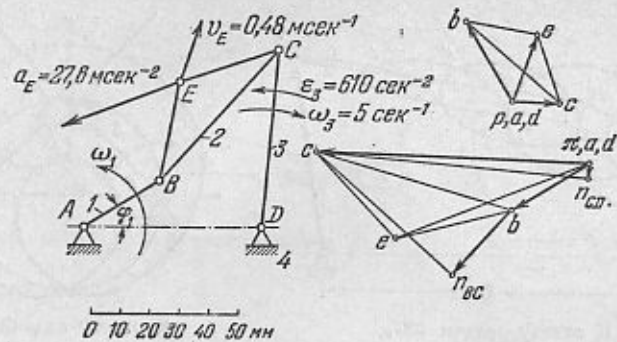


К ответу задачи 106.

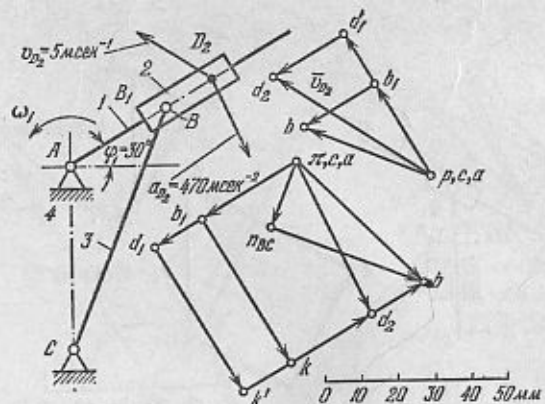


К ответу задачи 110.

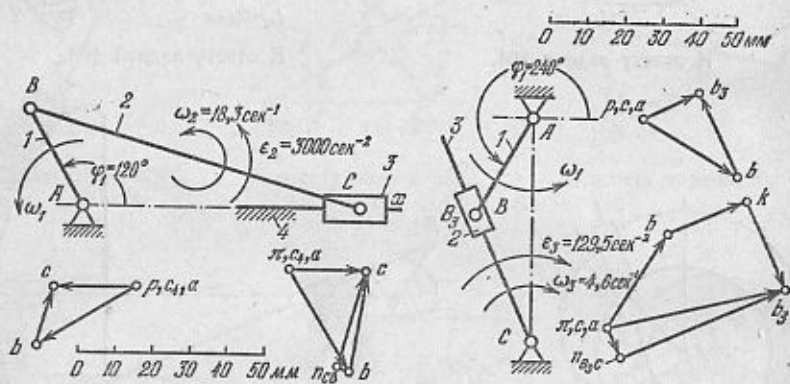




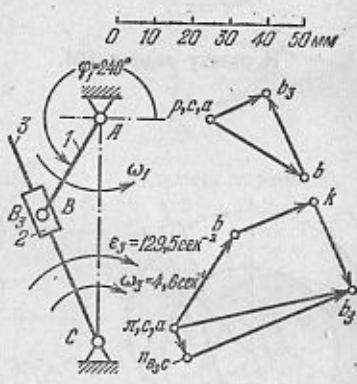
К ответу задачи 111.



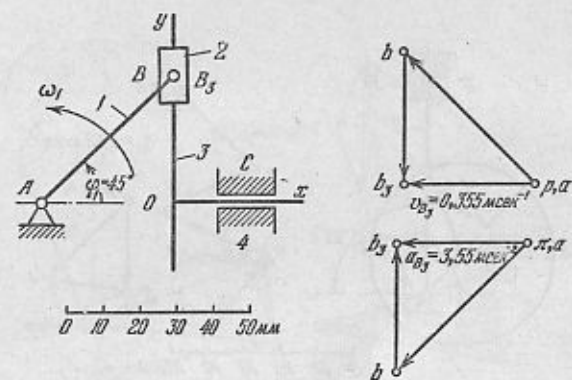
К ответу задачи 115.



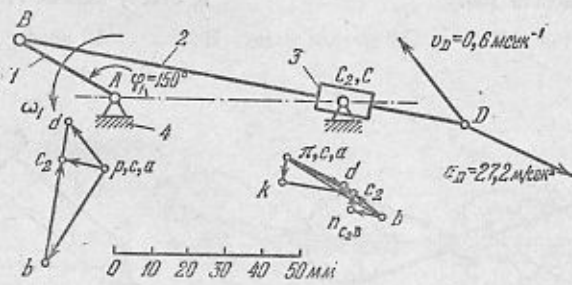
К ответу задачи 112.



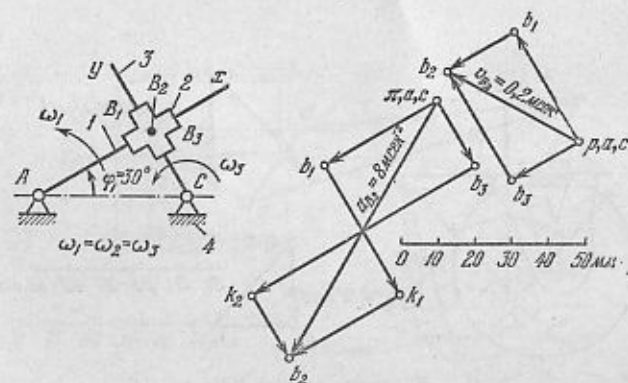
К ответу задачи 113.



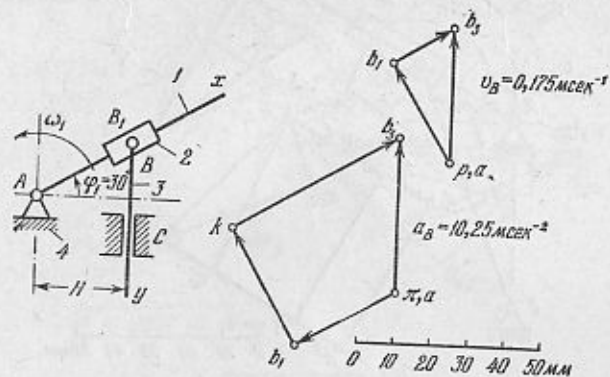
К ответу задачи 116.



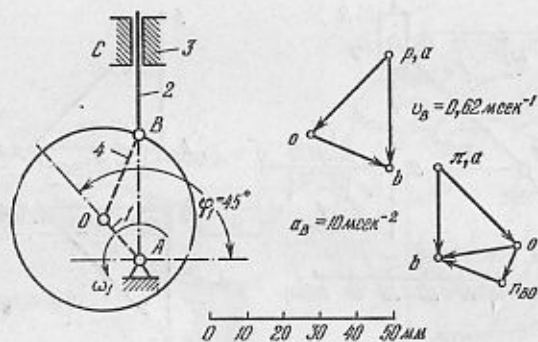
К ответу задачи 114.



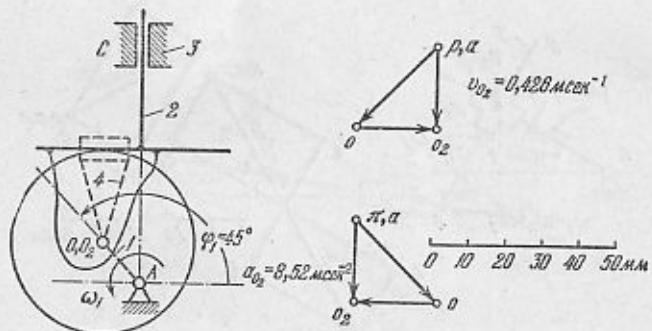
К ответу задачи 117.



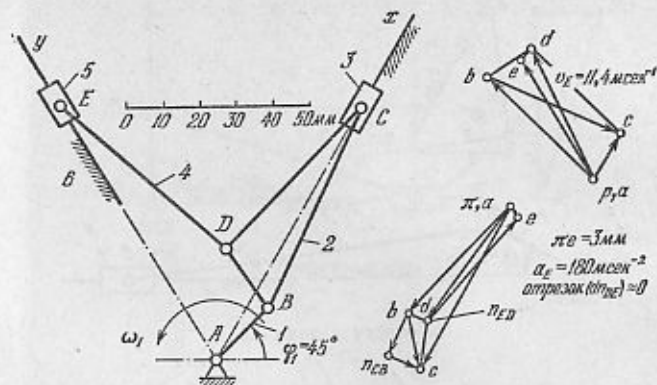
К ответу задачи 118.



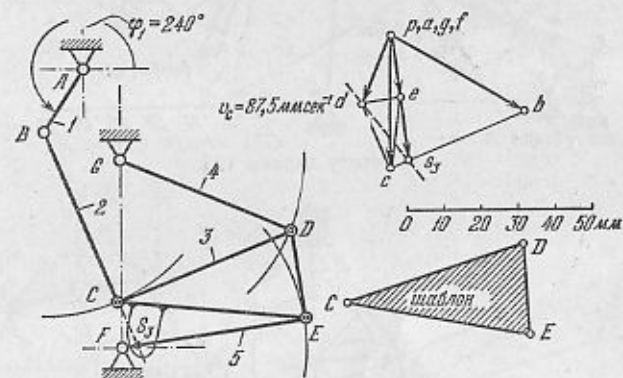
К ответу задачи 119.



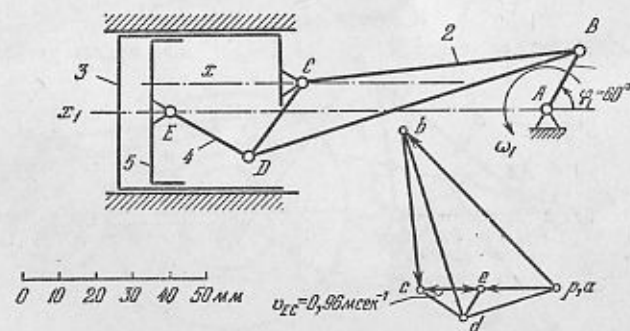
К ответу задачи 120.



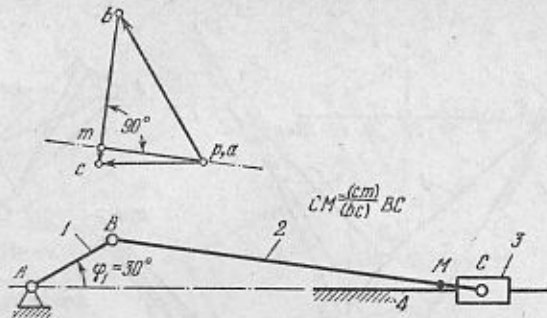
К ответу задачи 121.



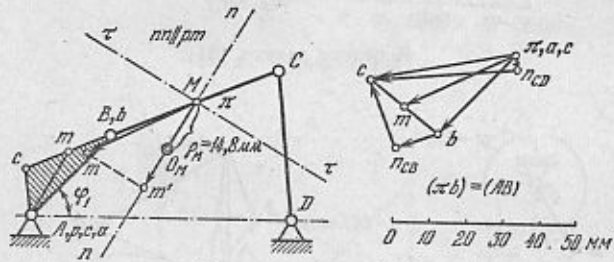
К ответу задачи 122.



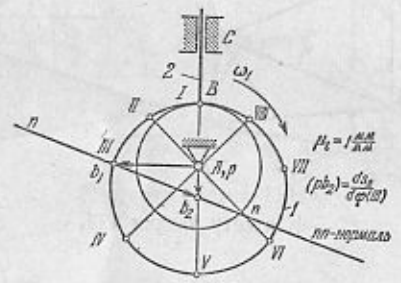
К ответу задачи 123.



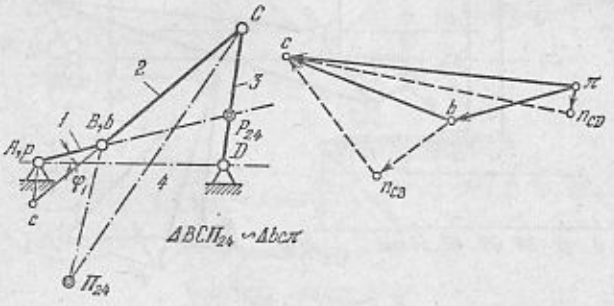
К ответу задачи 124.



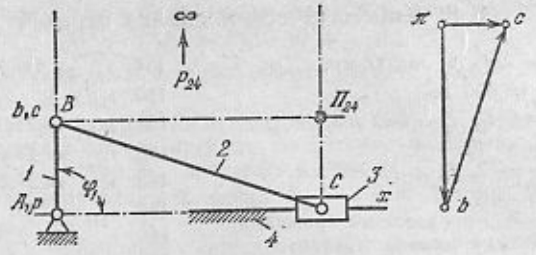
К ответу задачи 125.



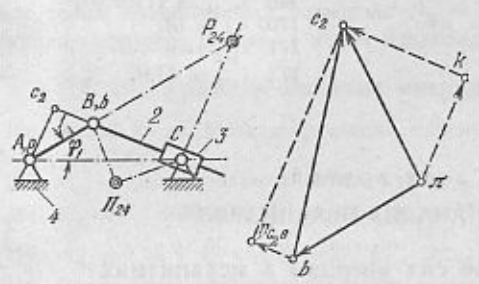
К ответу задачи 126.



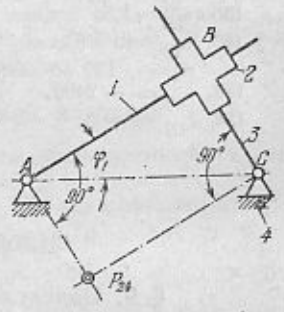
К ответу задачи 139.



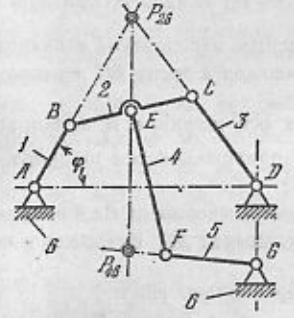
К ответу задачи 140.



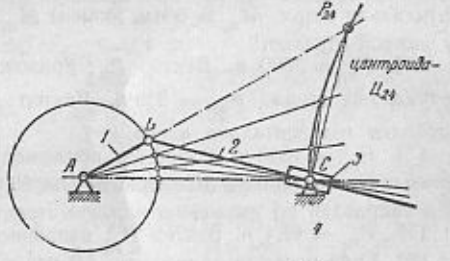
К ответу задачи 141.



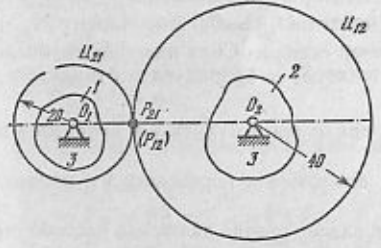
К ответу задачи 142.



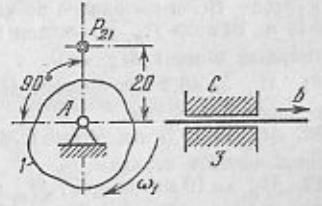
К ответу задачи 143.



К ответу задачи 144.



К ответу задачи 145.



К ответу задачи 146.



## § 8. Кинематический анализ передач

147.  $i_{13} = 2$ ,  $l_{O_1O_2} = 250$  мм,  
 $l_{O_2O_3} = 350$  мм.
148.  $i_{13} = 6$ ,  $l_{O_1O_2} = 300$  мм.
149.  $i_{14} = -12$ .
150.  $i_{13} = -3$ ,  $l_{O_1O_2} = 240$  мм.
151.  $i_{14} = -6$ .
152.  $i_{12} = 36$ ; направление вращения — по ходу часовой стрелки.
153.  $i_{1H} = 4$ .
154.  $i_{1H} = 1,5$ .
155.  $i_{1H} = 1,5$ .
156.  $n_H = 40$  об/мин,  
 $n_2 = -120$  об/мин.
157.  $i_{1H} = -2499$ .
158.  $i_{1H} = -5$ .
159.  $i_{H1} = 1365$ .
160.  $i_{14} = 9$ .
161.  $i_{1H_2} = 21,2$ .
162.  $i_{H_1} = 4356$ .
163.  $i_{1H_2} = 27,33$ .
164.  $i_{1H} = 5/3$ .
165.  $i_{14} = -2,5$ .
166.  $i_{1H} = -1$ .
167.  $i_{18} = 410,86$ .
168.  $i_{18} = -342$ .
169.  $i_{1-11} = 11156,04$ .
170.  $i_{18} = 12$ .
171.  $i_{1H} = 126,22$ .
172.  $i_{1H} = 43,9$ .

### Глава третья

### СИЛОВОЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

#### § 9. Определение сил инерции в механизмах

173.  $M_H = 140$  нм. 174.  $P_H = 360$  н.
175. При  $\varphi_1 = 0$   $P_H = 11250$  н, при  $\varphi_1 = 90^\circ$   $P_H = 2230$  н, при  $\varphi_1 = 180^\circ$   $P_H = 6750$  н.
176.  $P_{H_1} = 100$  н. Вектор  $P_{H_1}$  приложен в центре масс шатуна и направлен вертикально вверх.  $M_{H_2} = 6$  нм. Момент  $M_{H_2}$  приложен к звену  $BC$  и направлен по часовой стрелке.
177.  $P_{HB} = 3000$  н. Вектор  $P_{HB}$  приложен к оси шарнира  $B$  и направлен вертикально вверх.  $P_{HC} = 260$  н. Вектор  $P_{HC}$  приложен к оси шарнира  $C$  и направлен горизонтально влево.
178.  $P_{H_2} = 1600$  н. Вектор  $P_{H_2}$  приложен в центре масс звена  $Bx$  и направлен перпендикулярно линии  $BC$  вверх.  $M_{H_2} = 68,5$  нм. Момент  $M_{H_2}$  приложен к звену  $Bx$  и направлен по движению часовой стрелки.
179.  $P_{H_2} = 46,4$  н. Вектор  $P_{H_2}$  направлен вертикально вниз.
180. Сила инерции кривошипа  $AB$  равна  $P_{H_1} = 20$  н. Вектор  $P_{H_1}$  приложен в точке  $S_1$  и направлен вертикально вверх; инерционный момент  $M_{H_1} = 0$ . Сила инерции шатуна  $BC$  равна  $P_{H_2} = 30$  н. Вектор  $P_{H_2}$  приложен в точке  $S_2$  и направлен вертикально вверх. Инерционный момент  $M_{H_2} = 0,5$  нм. Момент  $M_{H_2}$  приложен к звену  $BC$  и направлен по часовой стрелке. Сила инерции коромысла  $CD$   $P_{H_3} = 10$  н. Вектор  $P_{H_3}$  приложен в точке  $S_3$  и направлен вертикально вверх. Инерционный момент  $M_{H_3} = 0$ .
181.  $M_{H_2} = 46,2$  нм. Момент  $M_{H_2}$  приложен к кулисе  $3$  и направлен по движению часовой стрелки.
182.  $M_{H_1} = 12,5$  нм. Момент  $M_{H_1}$  приложен к коромыслу  $3$  и направлен по движению часовой стрелки.
183.  $M_{H_1} = 10$  нм. Момент  $M_{H_1}$  направлен против движения часовой стрелки,  $M_{H_2} = 20$  нм. Момент  $M_{H_2}$  направлен по движению часовой стрелки.
184.  $N = 6$  кт. 185.  $N = 1,0$  кт.

186. Реакции в подшипниках ротора гироскопа равны между собою:

$$P_A = P_B = 40 \text{ н.}$$

187. Центробежная сила инерции штифта равна  $P_H \approx 440$  н и приложена в его центре масс.

188. Давление на палец  $C$  (сила инерции поршня) достигает своего максимального значения в правом крайнем («мертвом») положении поршня; оно равно  $P_{H_1} = 2840$  н. Вектор  $P_{H_1}$  направлен вправо.

189. Сила инерции толкателя равна  $P_{H_2} = 274$  н. Вектор  $P_{H_2}$  направлен вертикально вниз.

190. Реакция в подшипниках сателлита равна центробежной инерционной силе сателлита:  $P_{H_2} = 36,8$  н. Вектор  $P_{H_2}$  приложен в центре масс сателлита и направлен вертикально вверх для положения механизма, указанного на чертеже.

191. В обоих крайних («мертвых») положениях звена  $3$  сила инерции достигает своих максимальных значений:  $P_{H_2} = 394,4$  н. Вектор  $P_{H_2}$  в правом положении направлен вправо, в левом положении — влево.

#### § 10. Уравновешивание инерционной нагрузки

192.  $m_H = 5,38$  кг. Угол закрепления противовеса, отсчитываемый от оси  $O_1$ , равен  $\beta = 29^\circ 47'$ .

193.  $m_{H_1} = 0,36$  кг (расположен сверху);  $m_{H_{11}} = 1,225$  кг (расположен внизу).

194.  $P_A = P_B = 20$  н. 195.  $m_{H_1} = 10$  кг;  $m_{H_{11}} = 0$ .

196.  $m_{H_1} = 0,25 \sqrt{10}$  кг,  $\beta_1 = 251^\circ 40'$ ;  $m_{H_{11}} = 0,25 \cdot \sqrt{10}$  кг,  $\beta_{11} = 198^\circ 20'$ .

197. Координаты общего центра масс подвижных звеньев механизма:  $x_S = 84$  мм,  $y_S = 11$  мм; модуль главного вектора сил инерции  $P_H = 1325$  н, угол наклона главного вектора  $P_H$  сил инерции, отсчитываемый от оси  $Ax$  против направления движения часовой стрелки,  $\beta = 11^\circ 50'$ .

198. Главный вектор сил инерции направлен по оси  $Ax$  вправо, и модуль его равен  $P_H = 716$  н.

199.  $m_{H_1} = 4,875$  кг,  $m_{H_{11}} = 2,4$  кг,  $m_{H_{111}} = 0,4$  кг.

200.  $m_2 = 1,6$  кг,  $m_1 = 2,0$  кг. 203.  $m_{H_1} = 0,2125$  кг.

201.  $m_{H_1} = 0,695$  кг,  $m_{H_2} = 1,9$  кг. 204.  $m_{H_1} = 0,7875$  кг.

202.  $m_{H_1} = 0,2125$  кг. 205.  $m_{H_1} = m_{H_2} = 3,25$  кг.

#### § 11. Трение в кинематических парах

206.  $\beta = \arctg 0,3$ .

207.  $93,3 > m_2 > 6,7$  кг.

208.  $\alpha = 44^\circ 41'$ .

209.  $P_A = 110$  н.

210.  $N = 10$  ат.

211. а)  $P = 421$  н, б)  $P = 161$  н.

212.  $Q = 3380$  н.

213. а)  $P_{23} = 116$  н, б)  $P_{23} = 123$  н,

в)  $P_{23} = 109$  н.

214.  $Q = 18 600$  н.

215.  $N = 905$  ат.

216.  $P_0 = 2640$  н.

217.  $P_0 = 1320$  н.

218.  $P = 2,82$  н.

219.  $P = 50,4$  н.

220.  $d_{\min} > 2$  мм.

#### § 12. Определение реакций в кинематических парах

221.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 141$  н,  $M_y = 0$ .

222.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 70,7$  н,  $M_y = 2,5$  нм.

223.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 70,7$  н,  $M_y = 7,07$  нм.

224.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 14,1$  н,  $P_y = 20$  н.

225.  $P_A = P_B = P_C = 1155$  н,  $P_D = 580$  н,  $M_y = 100$  нм.  
 226.  $P_A = P_B = P_C = 1118$  н,  $P_D = 500$  н,  $M_y = 111,8$  нм.  
 227.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 50$  н,  $M_y = 2,5$  нм.  
 228.  $P_A = P_B = P_C = P_D = 100$  н,  $M_y = 15$  нм.  
 229.  $P_A = P_B = P_D = 100$  н,  $P_C = P_{C'} = 35$  н,  $M_y = 7,0$  нм.  
 230.  $P_A = P_D = 141$  н,  $P_A = 70,7$  н,  $P_{C'} = 125$  н,  $P_{C''} = 25$  н,  $P_y = 70,7$  н.  
 231.  $P_D = 408$  н,  $P_A = P_B = P_C = 1620$  н,  $M_y = 157$  нм.  
 232.  $P_A = P_B = P_C = 116$  н,  $P_D = 58$  н. Линия действия вектора  $P_D$  проходит правее оси шарнира  $C$  на расстоянии  $100$  мм,  $M_y = 10$  нм.

233.  $P_B = P_A = 141$  н,  $P_{C'} = 200$  н,  $P_{C''} = 100$  н,  $M_y = 10$  нм.  
 234.  $P_A = P_B = 86,5$  н,  $P_C = 50$  н,  $M_y = 2,59$  нм.  
 235.  $P_A = P_B = 13,3$  н,  $M_y = 1,25$  нм. 238.  $P_B = 50$  н,  $M_y = 4$  нм.  
 236.  $P_A = P_B = 7,2$  н,  $M_y = 1,0$  нм. 239.  $P_B = 20$  н,  $M_y = 8$  нм.  
 237.  $P_A = P_C = 7,75$  н,  $P_B = 13,4$  н,  $M_y = 1,5$  нм.  
 240.  $P_B = 25,6$  н. Угол наклона вектора  $P_B$  к перпендикуляру, проведенному к  $AB$ ,  $\alpha = 39^\circ 20'$ .  $M_y = 0,861$  нм.  
 241.  $N = 844$  вт. 243.  $N = 233$  вт.  
 242.  $N = 400$  вт. 244.  $N = 200$  вт.

### § 13. Применение рычага Жуковского для определения уравновешивающей силы

245.  $P_y = 100$  н,  $M_y = 10,0$  нм. 248.  $P_y = 10,0$  н,  $M_y = 1,0$  нм.  
 246.  $P_y = 5,0$  н,  $M_y = 0,5$  нм. 249.  $P_y = 5 \cdot \sqrt{2}$  н.  
 247.  $P_y = 10,0$  н,  $M_y = 1,0$  нм. 250.  $P_y = 50 \cdot \sqrt{2}$  н.

## Глава четвертая

### ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ

#### § 14. Приведение сил (моментов) и масс (моментов инерции) в механизмах

251.  $M_n = 100$  нм,  $I_n = 0,04$  кгм<sup>2</sup>. 252.  $M_n = 0$ ,  $I_n = 0$ .  
 253.  $M_n = 10$  нм,  $I_n = 0,001$  кгм<sup>2</sup>.  
 254.  $M_n = 2,5$  нм,  $I_n = 0,001$  кгм<sup>2</sup>.  
 255.  $M_n = 1,0$  нм,  $I_n = 0,00025$  кгм<sup>2</sup>.  
 256.  $M_n = 5,0$  нм,  $I_n = 0,001$  кгм<sup>2</sup>.  
 257. а)  $M_n = 0$ ,  $I_n = 0$ , б)  $M_n = 0,705$  нм,  $I_n = 0,0005$  кгм<sup>2</sup>, в)  $M_n = 1,0$  нм,  $I_n = 0,001$  кгм<sup>2</sup>.  
 258. а)  $I_n = 0,000175$  кгм<sup>2</sup>, 265.  $M_n = 1,0$  нм.  
 б)  $I_n = 0,0005$  кгм<sup>2</sup>. 266.  $M_n = 0,2\sqrt{3}$  нм,  $I_n = 0,00036$  кгм<sup>2</sup>.  
 259.  $I_n = 0,0035$  кгм<sup>2</sup>. 267.  $I_n = 0,00275$  кгм<sup>2</sup>.  
 260.  $I_n = 0,001$  кгм<sup>2</sup>. 268.  $I_n = 0,0125$  кгм<sup>2</sup>.  
 261.  $M_n = 10,0$  нм,  $m_n = 7,5$  кг. 269.  $M_F = 0,541$  нм.  
 262.  $M_n = 5,0$  нм,  $I_n = 0,005$  кгм<sup>2</sup>. 270.  $M_F = 0,5$  нм.  
 263.  $M_n = 3,0$  нм,  $I_n = 0,03$  кгм<sup>2</sup>.  
 264.  $M_n = 1,0$  нм.

#### § 15. Определение закона движения звена приведения машинного агрегата

271.  $\omega_y = 80$  сек<sup>-1</sup>. 272.  $n = 398$  оборотов.  
 273.  $\omega_{\max} = 24,6$  сек<sup>-1</sup>,  $\omega_{\min} = 13,8$  сек<sup>-1</sup>,  $\delta = 0,565$ .  
 274. Установившееся движение возможно;  $\delta = 1/128$ .

275.  $\delta = 0,344$ . 285.  $\omega = 95 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{10t}}\right)$  сек<sup>-1</sup>,  
 276.  $\delta = 0,326$ .  $\omega = 95$  сек<sup>-1</sup>.  
 277.  $f = 0,01$ .  
 278.  $v = 100$  сек<sup>-2</sup>.  
 279.  $v = 100$  сек<sup>-2</sup>,  $\omega = 50$  сек<sup>-1</sup>.  
 280.  $n_y = 999$  об/мин.  
 281.  $\omega_y = 100$  сек<sup>-1</sup>.  
 282.  $\omega_y = 50$  сек<sup>-1</sup>.  
 283.  $v = 500$  сек<sup>-2</sup>.  
 284.  $v = 100$  сек<sup>-2</sup>.  
 286.  $\omega = 85,5 \cdot \frac{e^{1,34t} - 1}{0,0117e^{1,34t} + 0,0017}$ .  
 287.  $e_1 = 1750$  сек<sup>-2</sup>.  
 288.  $e_1 = 1000$  сек<sup>-2</sup>.  
 289.  $e_1 = -700$  сек<sup>-2</sup>.  
 290.  $\omega_1 = 65,5$  сек<sup>-1</sup>.

### § 16. Определение маховых масс машинного агрегата

291.  $I_m = 0,89$  кгм<sup>2</sup>. 297.  $I_m = 6,23$  кгм<sup>2</sup>.  
 292.  $m_m = 17,6$  кг. 298.  $t_x = 1,02$  сек.  
 293.  $m_m = 4,8$  кг. 299.  $I_m = 0,0268$  кгм<sup>2</sup>.  
 294.  $m_m = 6,28$  кг. 300.  $t_x = 0,7$  сек.  
 295.  $I_m = 0,785$  кгм<sup>2</sup>. 301.  $I_m = 1,92$  кгм<sup>2</sup>.  
 296.  $m_n D_n^2 = 12,56$  кгм<sup>2</sup>. 302.  $I_m = 0,175$  кгм<sup>2</sup>.

### § 17. Определение механического коэффициента полезного действия

303. а)  $\eta = 0,645$ ; б)  $\eta = 0,45$ . 308.  $M_H = 3,14$  нм.  
 304.  $\eta = 0,75$ . 309.  $M_H = 61,7$  нм.  
 305. а)  $\eta = 0,596$ ; б)  $\eta = 0,418$ . 310.  $\eta = 1/55$ .  
 306.  $\eta = 0,407$ . 311.  $M_1 = -13,7$  нм.  
 307.  $N_1 = 226$  вт. 312.  $M_1 = 336$  МН.

### § 18. Динамика механизмов с переменной массой звеньев

313.  $v \approx -65$  сек<sup>-2</sup>.  
 314.  $M_A = \left(m_{03} + m_{\max} - \frac{m_{\max}}{l_C} s_C\right) \left(\frac{ds_C}{d\varphi}\right)^2 + \omega^2 \left(m_{03} + m_{\max} - \frac{m_{\max}}{l_C} s_C\right) \frac{ds_C}{d\varphi} \frac{d^2 s_C}{d\varphi^2}$ .  
 315.  $v \approx 4$  сек<sup>-2</sup>.

## Часть вторая

### СИНТЕЗ (КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ) МЕХАНИЗМОВ

## Глава пятая

### СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С ВЫСШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

#### § 19. Проектирование центрондных механизмов

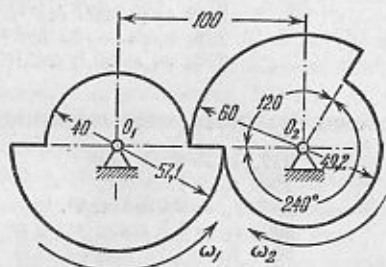
316. Центроида в движении звена 2 относительно звена 1 есть окружность с центром  $O_1$  и радиусом, равным  $R_1 = 20$  мм. Центроида в движении звена 1 относительно звена 2 есть прямая, параллельная оси  $O_1y$ , касающаяся слева окружности радиуса  $R_1$ .

317. Центроида в движении звена 2 относительно звена 1 есть полуокружность с центром  $O_1$  и радиусом, равным  $R_1 = 40$  мм. Центроида в движении звена 1 относительно звена 2 — две прямые, параллельные оси  $O_1y$  и отстоящие от нее

слева и справа на расстоянии 40 мм, причем левая прямая соответствует удалению звена 2 от точки  $O_1$ , а правая — его приближению.

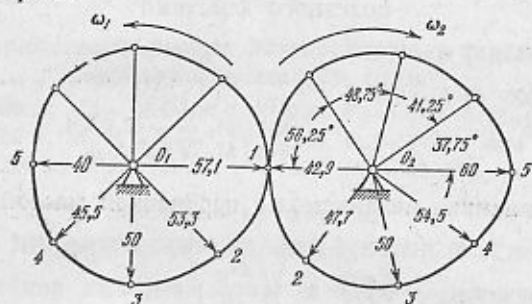
318. а) Две окружности, имеющие внешнее касание, с радиусами  $R_1 = 33,3$  мм и  $R_2 = 66,7$  мм; б) две окружности, имеющие внутреннее касание, с радиусами  $R_1 = 100$  мм и  $R_2 = 200$  мм.

319. См. чертеж:



К ответу задачи 319.

320. См. чертеж:



К ответу задачи 320.

## § 20. Проектирование механизмов со взаимоогibaемыми профилями

321. Профиль зуба на колесе 2 есть эциклоида, которую описывает точка  $P_1$  при перекатывании начальной окружности колеса 1 по начальной окружности колеса 2.

322. Профиль зуба на колесо 2 есть огибающая всех положений профиля зуба колеса 1 в движении колеса 1 относительно колеса 2.

323. Профиль зуба на колесе 2 есть гипоциклоида, которую описывает точка  $P_1$  при перекатывании начальной окружности колеса 1 по начальной окружности колеса 2.

324. Профиль зуба на колесе 2 есть огибающая всех положений профиля зуба колеса 1 в движении колеса 1 относительно колеса 2.

325. Профиль зуба на колесе 1 есть дуга эвольвенты, радиус основной окружности которой равен  $R_0 = 94$  мм. Эта дуга ограничена двумя концентрическими окружностями, описанными из центра  $O_1$  радиусами  $R'' = 117$  мм и  $R' = 94$  мм.

326. Профиль зуба на рейке есть циклоида, описанная точкой  $P_1$  при перекатывании начальной окружности колеса по начальной прямой рейки.

327.  $\rho = 66,2$  мм;  $\alpha = 33^\circ 30'$ ;  $\phi = \text{inv } \alpha = 0,0772$ .

328.  $R = 107,7$  мм.

329.  $\rho = 0$  в точке, расположенной на основной окружности.

330.  $S_0 = 46,5$  мм,  $e = 1,57$ .

## § 21. Проектирование трехзвенных фрикционных механизмов

331.  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 220$  мм.

333.  $\delta_1 = 40^\circ 54'$ ;  $\delta_2 = 79^\circ 16'$ .

332.  $R_1 = 300$  мм,  $R_2 = 600$  мм.

334.  $\delta_1 = 26^\circ 40'$ ;  $\delta_2 = 63^\circ 20'$ .

## § 22. Проектирование трехзвенных зубчатых механизмов

335.  $a_T = 15,7$  мм,  $a_T = 6,92$  мм.

339.  $e = 1,75$ .

336.  $A_{сб} = 163$  мм.

340.  $h_{г.р.} = 6,8$  мм.

337.  $e = 1,66$ .

341.  $h_{г.р.} = 5,85$  мм.

338.  $e = 1,95$ .

342.  $h_{г.р.} = 9,0$  мм.

343.  $\alpha_{сб} = 22^\circ 50'$ ;  $R_1 = 102$  мм,  $R_2 = 153$  мм.

344.  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 150$  мм;  $\delta_1 = 33^\circ 40'$ .

345.  $R_1 = 100$  мм,  $R_2 = 150$  мм;  $\delta = 41^\circ$ .

## § 23. Проектирование одноступенчатых планетарных зубчатых передач

346.  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 25$ ,  $z_3 = 70$ ,  $k = 3$ ,  $R_1 = 20$  мм,  $R_2 = 25$  мм,  $R_3 = 70$  мм.

347.  $z_1 = 18$ ,  $z_2 = 27$ ,  $z_3 = 72$ ,  $k = 3$ ,  $R_1 = 18$  мм,  $R_2 = 27$  мм,  $R_3 = 72$  мм.

348.  $z_1 = 16$ ,  $z_2 = 32$ ,  $z_3 = 80$ ,  $k = 4$ ,  $R_1 = 16$  мм,  $R_2 = 32$  мм,  $R_3 = 80$  мм.

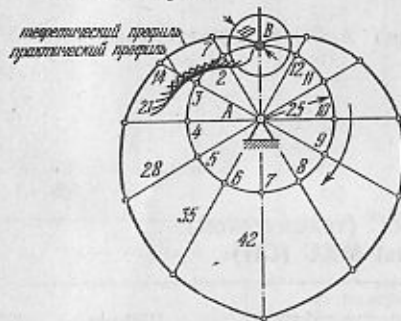
349.  $z_1 = 16$ ,  $z_2 = 40$ ,  $z_3 = 96$ ,  $k = 2$ ,  $R_1 = 16$  мм,  $R_2 = 40$  мм,  $R_3 = 96$  мм.

350.  $z_1 = 15$ ,  $z_2 = 45$ ,  $z_3 = 105$ ,  $k = 3$ ,  $R_1 = 15$  мм,  $R_2 = 45$  мм,  $R_3 = 105$  мм.

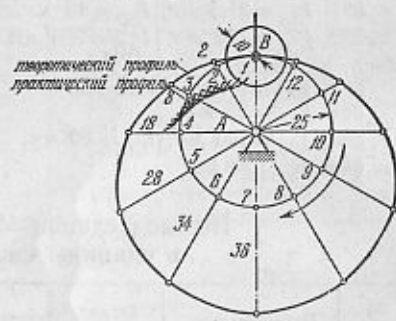
## § 24. Проектирование кулачковых механизмов

351. См. чертеж:

352. См. чертеж:



К ответу задачи 351.



К ответу задачи 352.

353.

№ положения	1	2	3	4	5	6	7
Угол давления	29°10'	23°15'	19°30'	16°35'	14°25'	12°45'	11°30'

354.

№ положения	1	2	3	4	5	6	7
Угол давления	0°00'	19°05'	28°35'	31°00'	17°35'	8°00'	0°00'



355.  $r_0 = 40,5$  мм. 363.  $r_0 \geq 179,4$  мм.  
 356.  $l = 12,7$  мм. 364.  $q = 3,6$  н/мм.  
 357.  $D_2 = 92$  мм. 365.  $q = 0,2$  нм/рад.  
 358.  $\alpha = 14^\circ 20'$ . 366.  $R = 44$  мм,  $\phi = 30^\circ$ .  
 359.  $\rho = 62$  мм. 367.  $R = 29,4$  мм,  $\phi = 69^\circ$ .  
 360.  $\alpha = 20^\circ$ . 368.  $R = 45,3$  мм,  $\phi = 42^\circ 10'$ .  
 361.  $r_0 \geq 33,6$  мм. 369.  $R = 56$  мм.  
 362.  $r_0 \geq 67,2$  мм.

Глава шестая

СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ С НИЖШИМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМИ

§ 25. Задача о существовании кривошипа

370.  $l_{BC} > l_{AB}$ . 374.  $l_{AB} < l_{AC}$ .  
 371.  $l_{BC} > l_{AB} + e$ . 375. Звено 3 повернется на угол  $360^\circ$ .  
 372. Существует. 376. Повернется на угол  $360^\circ$ .  
 373. Не существует. 377. Не может существовать.

§ 26. Задача о положениях

378.  $l_{AB} = 40,5$  мм,  $l_{BC} = 111,5$  мм.  
 379.  $l_{AB} = 49$  мм,  $l_{BC} = 120$  мм.  
 380.  $l_{AB} = 75$  мм,  $l_{BC} = 225$  мм,  $l_{AD} = 259,5$  мм.  
 381.  $l_{AB} = 21,5$  мм,  $l_{BC} = 46$  мм.  
 382.  $l_{CD} = 174$  мм,  $l_{AD} = 385$  мм, звено AB поворачиваться на полный оборот не может.  
 383.  $x = 127$  мм,  $y = 16$  мм.  
 384.  $l_{AB} = 25$  мм.  
 385.  $l_{BC} = 100$  мм,  $l_{CD} = 60$  мм.  
 386.  $\psi_{3\max} = 62^\circ$ .

Перевод единиц МКГСС (технической)  
в единицы системы МКС (СИ)

№ п/п	Наименование	Обозначение	Размерность		Перевод
			МКГСС	СИ	
1	Длина	$l$	м	м	—
2	Время	$t$	сек	сек	—
3	Сила	$P$	кг	кг/сек <sup>2</sup>	1 кг = 9,81 н
4	Масса	$m$	кг/м <sup>-1</sup> сек <sup>2</sup>	кг	1 кг/сек <sup>2</sup> /м = 9,81 кг
5	Момент инерции	$I$	кг/мсек <sup>2</sup>	кгм <sup>2</sup>	1 кг/мсек <sup>2</sup> = 9,81 кгм <sup>2</sup>
6	Работа	$A$	кг/м	дж = нм	1 кг/м = 9,81 дж
7	Мощность	$N$ или $W$	кг/м/сек	вт = дж/сек	1 кг/м/сек = 9,81 вт

Приложение 1

Таблица значений эвольвентной функции  $\text{inv } \alpha = \phi - \text{tg } \alpha - \alpha$

Угол $\alpha$	Порядок	0,0°	10°	20°	30°	40°	50°
20°	0,0	149	153	157	161	165	169
21°	0,0	173	178	182	187	191	196
22°	0,0	200	205	210	215	220	225
23°	0,0	230	236	241	247	252	258
24°	0,0	263	269	275	281	287	293
25°	0,0	300	306	313	319	326	333
26°	0,0	339	346	353	361	368	375
27°	0,0	383	390	398	406	414	422
28°	0,0	430	438	447	455	464	473
29°	0,0	482	491	500	509	518	529
30°	0,0	537	547	557	567	577	588
31°	0,0	598	608	619	630	641	652
32°	0,0	664	675	686	698	710	722
33°	0,0	734	747	759	772	785	798
34°	0,0	811	824	838	851	865	879
35°	0,0	893	908	922	937	951	967
36°	0	098	100	101	103	1045	106
37°	0	108	109	111	113	1145	116
38°	0	118	120	122	123	125	127
39°	0	129	131	133	135	137	139
40°	0	141	143	145	147	149	151

Приложение 2

Таблица значений  $\cos \alpha$

Угол $\alpha$	Порядок	0,0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
20°	0	940	939	938	937	936	935	934
21°	0	934	932	931	930	929	928	927
22°	0	927	926	925	924	923	922	920
23°	0	920	919	918	917	916	915	913
24°	0	913	912	911	910	909	907	906
25°	0	906	905	904	903	901	900	899
26°	0	899	897	896	895	894	892	891
27°	0	891	890	888	887	886	884	883
28°	0	883	882	880	879	877	876	875
29°	0	875	873	872	870	869	867	866
30°	0	866	865	863	862	860	859	857

## Условные обозначения, принятые в тексте

(обозначения, относящиеся к зубчатым передачам, см. на стр. 236)

- $a_K$  — ускорение точки.  
 $AB$  — отрезок  $AB$ .  
 $BCD$  — звено, соединенное с тремя звеньями в кинематические пары.  
 $D_k$  — диаметр окружности, относящийся к звену с номером  $k$ .  
 $d_k$  — диаметр цапфы вала с номером  $k$ .  
 $e$  — эксцентриситет.  
 $f$  — коэффициент трения скольжения.  
 $H$  — водило (поводок) планетарного и дифференциального механизмов.  
 $i_{kl}$  — передаточное отношение от звена с номером  $k$  к звену с номером  $l$ .  
 $I_k$  — момент инерции звена относительно оси, проходящей через точку  $K$ .  
 $I_n$  — приведенный момент инерции.  
 $k$  — число заходов резьбы червяка.  
 $K$  — коэффициент увеличения скорости ведомого звена механизма.  
 $k$  — коэффициент трения качения.  
 $l_k$  — длина звена с номером  $k$ .  
 $l_{BC}$  — длина звена  $BC$ .  
 $m_n$  — приведенная масса.  
 $M_n$  — момент сил инерции.  
 $M_d$  — приведенный момент движущих сил.  
 $M_c$  — приведенный момент сил сопротивления.  
 $M_y$  — момент уравновешивающей пары сил.  
 $n_k$  — число оборотов в минуту звена с номером  $k$ .  
 $N$  — мощность в ваттах.  
 $F_d$  — приведенная движущая сила.  
 $F_n$  — сила инерции.  
 $P_{nk}$  — сила инерции звена с номером  $k$ .  
 $P_k$  — сила, действующая на звено с номером  $k$ .  
 $P_n$  — приведенная сила.  
 $P_c$  — приведенная сила сопротивления.  
 $P_y$  — уравновешивающая сила.  
 $r$  — радиус ролика на толкателе в кулачковых механизмах.  
 $s_B$  — путь, проходимый точкой  $B$ .  
 $t$  — время в секундах.  
 $T$  — кинетическая энергия.  
 $Q_k$  — сила тяжести в ньютонах звена с номером  $k$ .  
 $xx, yy$  — прямые  $xx, yy, \dots$ , направляющие  $xx, yy$ .  
 $x, y$  — координаты точки.  
 $z_k$  — число зубьев зубчатого колеса с номером  $k$ .  
 $v_K$  — линейная скорость точки  $K$ .  
 $\alpha$  — угол давления.  
 $\alpha$  — угол подъема винтовой линии.  
 $\delta$  — угол между осями валов конической передачи.  
 $\delta$  — коэффициент неравномерности движения.  
 $\epsilon_k$  — угловое ускорение звена с номером  $k$ .  
 $\epsilon$  — коэффициент перекрытия.  
 $\mu_k$  — масштаб величины  $k$ .  
 $\omega_k$  — угловая скорость звена с номером  $k$ .  
 $\rho_K$  — радиус кривизны кривой в точке  $K$ .  
 $\varphi_k$  — угол наклона звена с номером  $k$  к стойке или к оси.  
 $\eta$  — коэффициент полезного действия.