



В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ.
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

Часть 13-я

13-18

ЛЕКЦИЯ № 13

Теорема Э. Нетер

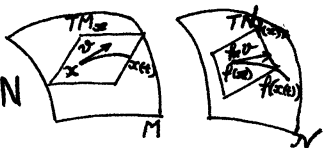
В предыдущих лекциях мы видели, что системы, допускающие вращение относительно оси Z , имеют первый интеграл M_z . Оказывается, это — частный случай весьма общей теоремы: всякой однопараметрической группе преобразований, сохраняющих функцию Лагранжа, отвечает первый интеграл уравнений движения.

Пусть $f: M \rightarrow N$ гладкое отображение* многообразия M в многообразие N .

Определение. Дифференциалом $f_*: TM \rightarrow TN_{f(x)}$ отображения f в точке $x \in M$ называется отображение касательных пространств, которое задается следующим образом. Пусть $v \in TM_x$. Рассмотрим кривую $x(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow M$,

$x(0) = x$, с вектором скорости

$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v$. Тогда $f_* v$ есть вектор скорости кривой $f(x(t)): \mathbb{R}^1 \rightarrow N$



$$f_* v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x(t))$$

Задача. Докажите, что $f_* v$ зависит не от выбора кривой $x(t)$, но лишь от вектора v .

Задача. Докажите, что отображение $f_*: TM_x \rightarrow TN_{f(x)}$ линейно.

В случае, когда $N = \mathbb{R}^1$ — прямая, дифференциал f_* есть обычный дифференциал функции df .

Задача. Пусть в окрестности точки $x \in M$ выбраны координаты $x = x_1, \dots, x_m$, в окрестности $y = f(x) \in N$ — координаты $y = y_1, \dots, y_n$, и вектор v задается координатами $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + v^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ т.е. отображение, которое в локальных координатах выражается гладкими функциями.

ми $\dot{x} = \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m$. Докажите, что вектор $f_* v$ задается координатами $\dot{y} = \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_m$, где

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \dot{x} \quad \text{т.е.} \quad \dot{y}_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \dot{x}_j.$$

Определение. Совокупность касательных пространств к M^m в разных точках x образует $2m$ -мерное многообразие $TM = \bigcup_{x \in M} TM_x$, называемое касательным пучком M . Локальными координатами на TM служат наборы $(x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)$. Дифференциал $f_*: TM \rightarrow TN$ есть гладкое отображение.

Пусть теперь M -гладкое многообразие, L -гладкая числовая функция на его касательном пучке TM . Пусть $h: M \rightarrow M$ -гладкое отображение.

Определение. Система (M, L) допускает отображение h , если для любого касательного вектора $v \in TM$

$$L(h_* v) = L(v)$$

Пример. Пусть $M = \{x_1, x_2, x_3\}$, $L = \frac{m}{2} \{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\} - U(x_1, x_2)$. Система допускает сдвиг $h: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 + s, x_2, x_3)$ вдоль оси x_1 , и не допускает, вообще говоря, сдвигов вдоль оси x_2 .

Теорема Нетер. Если система (M, L) допускает однопараметрическую группу преобразований $h^s: M \rightarrow M$, $h^0 = E$, то соответствующая L система уравнений Лагранжа имеет первый интеграл, а именно

$$I(q, \dot{q}) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds} \right|_{s=0}$$

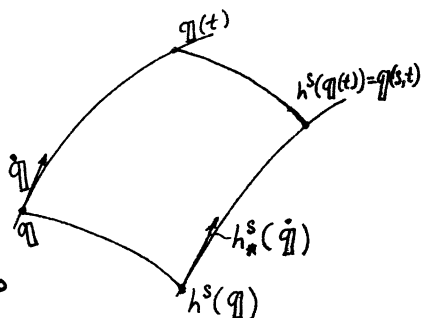
где $h^s(q)$ - запись преобразования h^s в локальных координатах q на M .

Доказательство.

Пусть $q(t)$ — решение уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Так как h^S сохраняет L , то сдвиг решения, $h^S(q(t))$, при любом S также удовлетворяет уравнениям Лагранжа.



Обозначим через $q(s, t)$ точку $h^S q(t)$, и пусть $\dot{q}(s, t) = \frac{\partial q}{\partial t}$, $q'(s, t) = \frac{\partial q}{\partial s}$, $\dot{q}' = \frac{\partial^2 q}{\partial s \partial t}$. По условию $0 = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot q' + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}'$

Подставляя $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ из уравнения Лагранжа, и записывая $\dot{q}'$ в виде $\frac{d}{dt} q'$, находим

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) q' + \frac{\partial L}{\partial q} \left(\frac{d}{dt} q' \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q' \right) = \frac{dI}{dt}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Первый интеграл $I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} q'$ определен выше с помощью локальных координат q . Оказывается, величина $I(v)$ не зависит от выбора координатной системы q .

Действительно, I есть скорость изменения $L(v)$, когда вектор $v \in TM_x$ меняется внутри TM_x со скоростью $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} h^S x$. Итак, $I(v)$ есть корректно определенная в целом функция касательного вектора $v \in TM$.

Пример 1. Рассмотрим систему материальных точек x_i с массами m_i ,

$$L = \sum m_i \frac{\dot{x}_i^2}{2} - U(x) \quad x_i = x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3$$

стесненную связями $f_j(x) = 0$. Предположим, что система допускает сдвиги вдоль оси e_1 :

$$h^S: x_i \mapsto x_i + \lambda e_1 \quad \text{при всех } i$$

Иными словами, связи допускают движение системы как целого вдоль оси e_1 , и потенциальная энергия при этом не меняется.

Из теоремы Нетер заключаем:

Если система допускает сдвиги вдоль оси e_1 , то проекция ее центра тяжести на ось e_1 движется прямолинейно и равномерно. Действительно, $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^S x_i = e_1$. Согласно предыдущему замечанию, сохраняется величина

$$I = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} e_1 = \sum m_i \dot{x}_{i1}$$

т.е. первая компонента P_1 вектора количества движения. для систем без связей мы это уже доказывали раньше.

Пример 2. Если система допускает вращения вокруг оси e_1 , то сохраняется кинетический момент относительно этой оси

$$M_1 = \sum_i ([x_i, m_i \dot{x}_i] e_1).$$

Действительно, легко проверить, что если h^S поворот вокруг оси e_1 на угол S , то $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} h^S x_i = [e_1, x_i]$

откуда
$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i] = \sum_i (m_i \dot{x}_i [\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_i]) = \sum_i ([\mathbf{x}_i, m_i \dot{x}_i] \mathbf{e}_1)$$

Задача 1. Пусть частица движения в поле однородной винтовой линии $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$, $z = c\varphi$. Найти соответствующий этой винтовой симметрии закон сохранения.

Ответ: В любой системе, допускающей винтовые движения, оставляющие на месте нашу винтовую линию, сохраняется величина $I = c_1 P_1 + M_1$.

Задача 2. Пусть твердое тело движется по инерции. Доказать, что его центр инерции движения прямолинейно и равномерно. Если центр инерции покоится, то кинетический момент относительно него сохраняется.

Задача 3. Какие величины сохраняются при движении тяжелого твердого тела, закрепленного в некоторой точке O ? В частности, если тело симметрично относительно проходящей через O оси?

Л Е К Ц И Я I 4

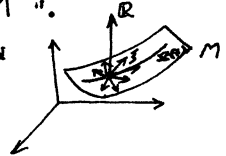
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим голономную систему (M, L) , где M - поверхность в трехмерном пространстве $\mathcal{X}$,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - u(x)$$

В механических терминах: "материальная точка $\mathcal{X}$ массы m вынуждена оставаться на гладкой поверхности M ".

Пусть $\mathcal{X}(t)$ - траектория точки. Если бы выполнялось уравнение Ньютона $m\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$,



то в отсутствии внешних сил ($u=0$) траектория была бы прямой и не могла бы лежать на поверхности M .

С точки зрения Ньютона это указывает на присутствие новой силы, "вынуждающей точку оставаться на поверхности".

Определение. Величина

$$R = m\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

называется силой реакции связи.

с учетом силы реакции R уравнения Ньютона очевидно справедливы:

$$m\ddot{x} = - \frac{\partial u}{\partial x} + R$$

Физический смысл силы реакции R становится ясным, если мы рассмотрим нашу систему со связью как предел систем с потенциальной энергией $u + Nu_1$, $N \rightarrow \infty$, $u_1(x) = p^2(x, M)$. при больших N потенциал связи Nu_1 обуславливает быстропе-

ременную силу $F = -N \frac{\partial u}{\partial x}$; при предельном переходе ($N \rightarrow \infty$) остается среднее значение R силы F по колебаниям x около M . Сила F перпендикулярна к поверхности M . Поэтому сила реакции R перпендикулярна M :

$$(R, \xi) = 0 \text{ для всякого касательного вектора}$$

В механике касательные вектора к конфигурационному многообразию называются "виртуальными перемещениями". Итак,

$$(m\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x}, \xi) = 0$$

для всякого виртуального перемещения ξ , или еще иначе: работа силы реакции на любом виртуальном перемещении равна 0.

Это и есть "принцип Даламбера".

Для системы из материальных точек x_i с массами m_i силы реакции R_i определяются как $R_i = m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial u}{\partial x_i}$, а принцип Даламбера имеет вид $\sum (R_i, \xi_i) = 0$

$$\text{или } \sum ((m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial u}{\partial x_i}), \xi_i) = 0, \text{ т.е.}$$

Сумма работ сил реакций на любом виртуальном перемещении $\{\xi_i\} \in TM_x$ равна 0. Если определять систему с голономной связью как предел при $N \rightarrow \infty$, то принцип Даламбера становится теоремой; ее доказательство намечено выше для простейшего случая.

Иногда, однако, принимают сам принцип Даламбера за определение голономной связи.

Таким образом, имеется три определения голономной системы со связями:

I) Предел системы с потенциальной энергией $U + N U_1$,

$$N \rightarrow \infty.$$

2) Голономная система (M, L) , где M -гладкое подмногообразие конфигурационного пространства системы без связей, L -лагранжиан.

3) Система, удовлетворяющая принципу Даламбера.

Все три определения математически эквивалентны.

Доказательства утверждений $1) \Rightarrow 2)$ и $1) \Rightarrow 3)$ наметено выше и в деталях проводится не будет. Мы докажем, что

$2) \Leftrightarrow 3)$.

Точнее, пусть M -подмногообразие евклидова x -пространства, $M \subset \mathbb{R}^N$, и $x(t): \mathbb{R}^1 \rightarrow M$ - кривая; $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Определение. Кривая $x(t)$ называется условной экстремалью функционала действия

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\dot{x}^2}{2} - u(x) \right\} dt$$

если дифференциал $\delta\Phi = 0$ при условии, что для сравнения берутся близкие кривые, соединяющие x_0 с x_1 на M .

Мы будем писать

$$\delta_M \Phi = 0 \quad (I)$$

Очевидно, уравнение (I) эквивалентно уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad L = \frac{\dot{x}^2}{2} - u(x), \quad x = x(q)$$

в каждой локальной системе координат q на M .

Теперь мы можем сформулировать теорему об эквивалентности $2) \Leftrightarrow 3)$.

ТЕОРЕМА. Чтобы кривая $x(t) \in M \subset \mathbb{R}^N$ была условной экстремалью действия (т.е. удовлетворяла уравнению (I)) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнению Даламбера: $(\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x}, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in TM_x$



ЛЕММА. Пусть $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ - непрерывное векторное поле, заданное в точках кривой $x(t) \in M \subset \mathbb{R}^N$. Если для каждого непрерывного касательного векторного поля $\xi(t)$ вдоль $x(t)$, $(\xi(t) \in TM_{x(t)})$, обращаемого в 0 при $t = t_0, t_1$, имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \xi(t) dt = 0,$$

то поле $f(t)$ в каждой точке $x(t)$ перпендикулярно поверхности M (т.е. $(f(t), h) = 0$ для каждого вектора $h \in TM_{x(t)}$).

Доказательство леммы повторяет рассуждения, с помощью которых выводились уравнения Эйлера-Лагранжа в предыдущих лекциях.

Задача. Проведите подробное доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Сравним значения Φ на двух кривых $x(t)$ и $x(t) + \xi(t)$, $\xi(t_0) = \xi(t_1) = 0$. Получим, интегрируя по частям:

$$\delta \Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{x} \dot{\xi} - \frac{\partial u}{\partial x} \xi \right) dt = - \int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \xi dt$$

Из этой формулы видно, что уравнение (I) $\delta_M \Phi = 0$ эквивалентно совокупности уравнений

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\ddot{x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \xi dt = 0 \quad (3)$$

для всех касательных векторных полей $\mathcal{J}(t) \in TM_{\mathcal{X}(t)}$,
 $\mathcal{J}(t_0) = \mathcal{J}(t_1) = 0$. По лемме (где надо положить $\mathcal{F} = \ddot{\mathcal{X}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{X}}$)
 совокупность уравнений (3) эквивалентна уравнению Даламбера (2).
 Теорема доказана.

Замечание 1. Выведем из доказанной теоремы принцип Даламбера для системы из n точек $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^3$ $i = 1, \dots, n$ с массами m_i , с голономными связями. В координатах $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^3 = \sqrt{m_i} \mathcal{X}_i$ кинетическая энергия принимает вид $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\mathcal{X}}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{X}}^2$.

По доказанной теореме экстремали принципа наименьшего действия удовлетворяют условию

$$\left(\ddot{\mathcal{X}} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{X}}, \mathcal{J} \right) = 0$$

(принцип Даламбера для точки в $\mathbb{R}^{3n}$: $3n$ -мерная сила реакции ортогональна многообразию M в метрике T). Возвращаясь к координатам $\mathcal{X}_i$, получаем

$$0 = \left(\sqrt{m_i} \ddot{\mathcal{X}}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \sqrt{m_i} \mathcal{X}_i}, \sqrt{m_i} \mathcal{J}_i \right) = \sum_i \left(m_i \ddot{\mathcal{X}}_i + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{X}_i}, \mathcal{J}_i \right)$$

т.е. принцип Даламбера в указанной раньше форме: сумма работ сил реакции на виртуальном перемещении равна нулю.

Замечание 2. Принципу Даламбера можно придать несколько иную форму, если обратиться к статике.

положением равновесия называется такая точка $\mathcal{X}_0$, что $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}_0$ есть траектория.

ТЕОРЕМА. Чтобы точка $\mathcal{X}_0$, находящаяся на гладкой поверхности M под действием силы $\mathcal{F} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \mathcal{X}}$, была положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы сила была ортогональна поверхности: $(\mathcal{F}, \mathcal{J}) = 0$ для всех $\mathcal{J} \in TM_{\mathcal{X}_0}$.

Это следует из уравнения Даламбера ввиду $\ddot{\mathcal{X}} = 0$.

Определение. $-m\ddot{x}$ называется силой инерции.

Теперь принцип Даламбера принимает такой вид:

ТЕОРЕМА. Если к действующим силам добавить силы инерции, то x станет положением равновесия.

Ибо уравнение Даламбера

$$(-m\ddot{x} + R, f) = 0$$

выражает, согласно предыдущей теореме, тот факт, что x есть положение равновесия системы с силами $-m\ddot{x} + R$.

Совершенно аналогичные предложения справедливы и для системы точек:

Если $x = \{x_i\}$ — положение равновесия, то сумма работ действующих сил на виртуальном перемещении равна 0.

Если к действующим силам добавить силы инерции $-m_i \ddot{x}_i(t)$, то положение $x(t)$ станет положением равновесия.

Итак, задача о движении приводится к задаче о равновесии под действием других сил.

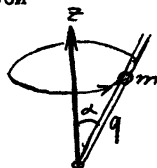
Замечание 3. До сих пор мы не рассматривали случая, когда связи зависят от времени. Все сказанное выше переносится на такие связи без изменений.

Голономные системы с движущимися связями могут быть определены любым из трех эквивалентных способов 1) 2) 3) (см. выше).

Пример. Рассмотрим бусинку, скользящую по стержню, наклоненному под углом α к вертикальной оси и вращающемуся равномерно, с угловой скоростью ω , вокруг этой оси

(весом пренебрежем). За координату q примем расстояние от точки 0. Кинетическая энергия и Лагранжиан $L = T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 z^2$,

$$z = q \sin \alpha$$



Уравнение Лагранжа $m\ddot{q} = m\omega^2 q \sin \alpha$

Сила реакции в каждый момент времени ортогональна виртуальным перемещениям (т.е. направлению стержня) но вовсе не ортогональна действительной траектории.

Замечание 4. Из уравнения Даламбера легко выводятся законы сохранения. Например, если среди виртуальных перемещений есть сдвиг вдоль оси x_1

$$\xi_i = e_1$$

то сумма работ сил реакции на этом перемещении

$$\sum (R_i, e_1) = (\sum R_i) e_1 = 0$$

Будем теперь рассматривать силы реакции как внешние силы. Тогда замечаем, что сумма первых компонент внешних сил равна 0. Значит сохраняется первая компонента P_1 вектора количества движения.

Этот же результат мы получили выше из теоремы Нетер.

Задача. Пусть $h^S: M \times \mathbb{R}^1 \rightarrow M \times \mathbb{R}^1$ однопараметрическая группа преобразований $M \times \mathbb{R}^1$ (конфигурационное пространство $\times$ (ось времени)). Показать, что если функция Лагранжа $\Delta(v, t)$ ($v \in TM$) допускает такую группу преобразований, то соответствующие уравнения движения имеют некоторый первый интеграл I . В частности, если Δ не зависит от t , всегда допустим сдвиг по времени $h^S(x, t) = (x, t + s)$
 $x \in M, t \in \mathbb{R}^1$

Соответствующий первый интеграл есть интеграл энергии.

Замечание 5. Подчеркнем еще раз, что голономность той или иной физической связи (с той или иной степенью точности) есть вопрос эксперимента. С математической точки зрения голономность связей есть постулат физического происхождения; его можно вводить в разных эквивалентных формах, например, в виде принципа наименьшего действия (1) или принципа Даламбера (2) — но при определении связей речь всегда идет о новых, по сравнению с уравнениями Ньютона, экспериментальных фактах. Если определение связей дано, можно написать уравнения движения. Остается лишь их решить.

Замечание 6. Наша терминология несколько отличается от принятой в учебниках механики, где принцип Даламбера распространяется на более широкий класс систем ("неголономные системы" с идеальными связями). В этих лекциях мы не будем рассматривать неголономных систем. Замечу только, что примером неголономной системы является катящийся по плоскости без скольжения шар. Для неголономной системы в принципе Даламбера виртуальные перемещения не есть произвольные касательные вектора к конфигурационному пространству.

ЛЕКЦИЯ 15. КОЛЕБАНИЯ

Определение. Точка x_0 называется положением равновесия системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

если $x(t) = x_0$ есть решение этой системы. Иными словами, $f(x_0) = 0$, т.е. в точке x_0 векторное поле $f(x)$ обращается в нуль.

Пример. Рассмотрим динамическую систему с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}) = T - U$, $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \geq 0$, $U = U(q)$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \dot{q} = \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n \quad (2)$$

Уравнения Лагранжа можно записать в виде системы $2n$ уравнений первого порядка вида (1). Постараемся найти положения равновесия.

ТЕОРЕМА. Точка $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ тогда и только тогда будет положением равновесия системы (2), когда точка q_0 — критическая точка потенциальной энергии, т.е.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_0} = 0 \quad (3)$$

Доказательство. Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

Из (2) видно, что при $\dot{q} = 0$ будет $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial q} = 0$.

Поэтому $q = q_0$ есть решение в случае (3) и только в этом случае, что и требовалось доказать.

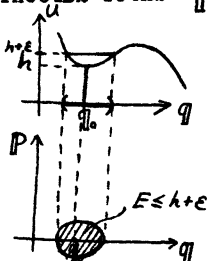
Займемся теперь исследованием движений при начальных ус-

ловиях, близких к положению равновесия.

ТЕОРЕМА. Если q_0 есть локальный минимум $u(q)$, то положение равновесия $q = q_0$ устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Пусть $u(q) = h$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ содержащая q_0 связная компонента множества q : $u(q) \leq h + \varepsilon$ будет сколь угодно малой окрестностью точки q_0 .

При этом связная компонента соответствующей области $E \leq h + \varepsilon$ ($E(p, q) = T + u$ — полная энергия) в фазовом пространстве p, q будет сколь угодно малой окрестностью точки $p = 0, q = q_0$.



Но область $E \leq h + \varepsilon$ инвариантна относительно фазового потока по закону сохранения энергии. Значит при достаточно близких к $(0, q_0)$ начальных условиях $p(0), q(0)$ вся траектория $p(t), q(t)$ близка к $(0, q_0)$, что и требовалось доказать.

Задача. Может ли положение равновесия $q = q_0, p = 0$ быть асимптотически устойчивым?

Задача. Докажите, что для системы с одной степенью свободы и с аналитическим потенциалом $u(q)$ условие $\ll u(q_0) \text{ — локальный минимум} \gg$ не только достаточно, но и необходимо для устойчивости положения равновесия q_0 .

Замечание. Неизвестно, необходимо ли это условие для устойчивости в аналитической системе с n степенями свободы.

Вернемся теперь к общей системе (I). При исследовании решений системы (I), близких к положению равновесия x_0 , часто пользуются линеаризацией. Предположим, что $x_0 = 0$ (общий слу-

чай приводится к этому сдвигом системы координат). Тогда первый член ряда Тейлора $\mathbb{R}$ линейный:

$$\mathbb{P}(x) = Ax + R_2(x), \quad A = \left. \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial x} \right|_0, \quad R_2 = O(x^2)$$

где линейный оператор A в координатах $x_1, \dots, x_n$ задается матрицей a_{ij} :

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j; \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Определение. Переход от системы (I) к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n) \quad (4)$$

называется линеаризацией системы (I).

Задача. Докажите, что линеаризация — корректно определенная операция: она не зависит от системы координат.

Преимущество линеаризованной системы состоит в том, что она линейна и потому немедленно решается:

$$y(t) = e^{At} y(0), \quad \text{где } e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \dots$$

Посмотрим теперь, что можно сказать о решениях исходной системы (I), зная решения линеаризованной системы (4).

При достаточно малых x разница между линеаризованной и исходной системами $R_2(x)$ мала по сравнению с x . Поэтому в течение долгого времени решения $y(t)$, $x(t)$ обеих систем с начальным условием $y(0) = x(0) = x_0$ останутся близкими.

Точнее, справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Для любого $T > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|x(0)| < \delta$, то $|x(t) - y(t)| < \varepsilon \delta$ для всех t из интервала $0 < t < T$.

Доказательство. $x=0$ и $y=0$ удовлетворяют (I) и (4) соответственно. Поэтому, по теореме о непрерывной зависимости, при достаточно малом δ решения $x(t)$ и $y(t)$ с начальным условием $|x(0)|=|y(0)|<\delta$ будут при $0<t<T$ оставаться в окрестности начала координат радиуса $C_1(T)\delta$ (докажите!) При достаточно малом δ в этой окрестности будет $|R_2(x)|\leq C_2|x|^2$, т.е. $|R_2(x(t))|\leq C_2 C_1^2(T) \delta^2$.

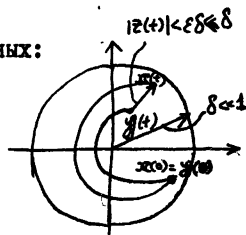
Рассмотрим теперь разность $z(t)=x(t)-y(t)$. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = Az + R_2(x(t)), z(0)=0.$$

Решаем уравнение для z вариацией постоянных:

$$z = e^{At} C(t), \quad \dot{z} = Az + e^{At} \dot{C}(t)$$

$$C(t) = \int_0^t e^{-As} R_2(x(s)) ds$$



Пусть $\max_{0 \leq t \leq T} \|e^{At}, e^{-At}\| = C_3(T)$.

Теперь из $|R_2(x(t))| \leq C_2 C_1^2 \delta^2$

находим последовательно $C(t) \leq T C_3 C_2 C_1^2 \delta^2$,

$$|z(t)| \leq T C_3^2 C_2 C_1^2 \delta^2 \leq \epsilon \delta \quad \text{при} \quad \delta \leq \frac{\epsilon}{T C_3^2(T) C_2 C_1^2(T)}$$

что и требовалось доказать.

Обратимся снова к Лагранжевой системе (2) и постараемся ее линеаризовать в окрестности положения равновесия $q=q_0$.

Для упрощения формул выберем координаты так, чтобы $q_0=0$.

ТЕОРЕМА. Чтобы линеаризовать Лагранжеву систему (2) в окрестности положения равновесия $q=0$, достаточно заменить кинетическую энергию $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$ ее значением при $q=0$ $T_2 = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$, $a_{ij} = a_{ij}(0)$,

а потенциальную энергию $u(q)$ - ее квадратичной частью

$$u_2 = \frac{1}{2} d^2 u \Big|_0 = \frac{1}{2} \sum b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0}$$

Доказательство. Приведем систему Лагранжа к виду (I), используя канонические переменные p, q :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H(p, q) = T + u$$

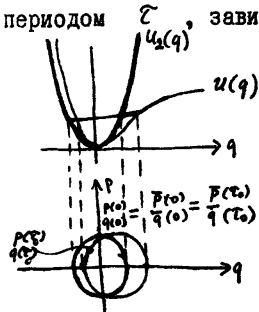
Так как $p = \dot{q} = 0$ есть положение равновесия, то разложения правых частей в ряд Тейлора в 0 начинаются с линейных по p, q членов. Так как правые части - частные производные, то эти линейные члены определяются квадратичными членами H_2 разложения $H(p, q)$. Но H_2 есть в точности функция Гамильтона системы с Лагранжианом $L_2 = T_2 - u_2$, так как, очевидно, $H_2 = T_2(p) + u_2(q)$. Итак, линеаризованные уравнения движения суть уравнения движения для описанной в теореме системы с $L_2 = T_2 - u_2$; теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему с одной степенью свободы.

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2, \quad u = u(q)$$

Пусть $q = q_0$ - устойчивое положение равновесия $\frac{\partial u}{\partial q} \Big|_{q=q_0} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0} > 0$.

как мы знаем из фазового портрета, при близких к $q = q_0, p = 0$ начальных условиях решение периодически, с периодом $\tau_{u_2(q)}$, зависящим вообще говоря, от начальных условий. Из предыдущих двух теорем вытекает

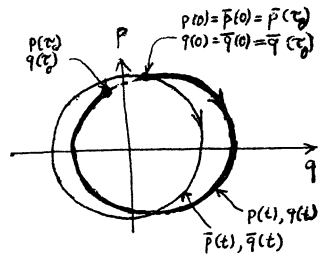


Следствие. Период τ колебаний

вблизи положения равновесия q_0
стремится при уменьшении амплитуды
колебаний к пределу $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

, где $\omega_0^2 = \frac{\theta}{a}$

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \Big|_{q=q_0}, \quad a = a(q_0)$$



Действительно, для линеаризованной

системы $T_2 = \frac{1}{2} a \dot{q}^2$, $U_2 = \frac{1}{2} \theta q^2$. (считаем $q_0 = 0$)

Решения уравнения лагранжа $\ddot{q} = -\omega^2 q$ имеют период $\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$:

$$q = q \cos \omega t + \dot{q} \sin \omega t$$

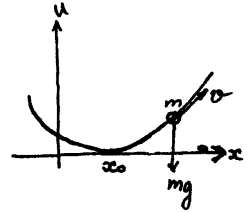
при любой начальной амплитуде.

Остается показать, что при уменьшении амплитуды период колебаний в исходной системе, τ , стремится к периоду колебаний в линеаризованной системе, τ_0 .

С этой целью рассмотрим фазовые траектории $p(t)$, $q(t)$ исходной нелинейной системы и фазовые траектории $\bar{p}(t)$, $\bar{q}(t)$ линеаризованной системы, с общими начальными условиями $p(0)$, $q(0)$. Как мы видели выше, ^(стр. 16) при достаточно малом отклонении от положения равновесия ($|p(0)| + |q(0)| < \delta$) оудет $|p(\tau_0) - \bar{p}(0)| + |q(\tau_0) - \bar{q}(0)| < \varepsilon \delta$, откуда при $\delta > 0$ уже легко вытекает $|\tau - \tau_0| < c\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Определение. Движения в линеаризованной системе ($L_2 = T_2 - U_2$) называются малыми колебаниями вблизи положения равновесия $q = q_0$. В одномерной задаче числа τ_0 , ω_0 называются периодом малых колебаний. и частотой малых колебаний.

Пример. Найти период малых колебаний бусинки массы 1 на проволоке $y = u(x)$ в поле тяжести $g = 1$ вблизи положения равновесия $x = x_0$.



Решение. Имеем

$$U = mgy = u(x)$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Пусть x_0 — устойчивое положение равновесия: $\frac{du}{dx} \Big|_{x_0} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0} > 0$
Тогда частота малых колебаний ω определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_0}$$

ибо для линеаризованной системы $T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^2$, $U_2 = \frac{1}{2} \omega^2 q^2$
($q = x - x_0$)

Задача. Показать, что не только малые колебания, но и все движение бусинки в точности эквивалентно движению в некоторой одномерной системе с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q)$$

Указание. Принять за q длину вдоль проволоки.

ЛЕКЦИЯ 16. МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим подробнее задачу о малых колебаниях. Иными словами, рассмотрим систему, у которой кинетическая и потенциальная энергия - квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2} (A \dot{q}, \dot{q}), \quad U = \frac{1}{2} (B q, q), \quad (1)$$

$$q = q_1, \dots, q_n.$$

Кинетическая энергия - положительно-определенная форма.

Чтобы проинтегрировать уравнения Лагранжа, выберем разумным образом координаты.

Как известно из линейной алгебры, пару квадратичных форм (Aq, q) , (Bq, q) , первая из которых положительно-определена, можно привести к главным осям единой линейной заменой координат,^{*}

$$Q = C q$$

$$Q = Q_1, \dots, Q_n$$

При этом координаты Q можно выбрать так, что форма (Aq, q) приведет к сумме квадратов (Q, Q) . Пусть Q - такие координаты; тогда, так как $Q = C \dot{q}$, имеем

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{Q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i Q_i^2 \quad (2)$$

Числа λ_i называются собственными числами формы B относительно A .

Задача. Докажите, что собственные числа B относительно

^{*} Если угодно, можно ввести евклидову структуру, приняв первую форму за скалярный квадрат q , и затем ортогональным в смысле этой евклидовой структуры преобразованием привести вторую форму к главным осям.

A удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det |B - \lambda A| = 0 \quad (3)$$

все корни которого, таким образом, вещественны, если матрицы A и B симметричны.

В координатах Q система Лагранжа распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i \quad (4)$$

Итак доказана

ТЕОРЕМА. Система, совершающая малые колебания, есть прямое произведение n одномерных систем, совершающих малые колебания.

Для каждой одномерной системы могут представиться 3 случая:

Случай 1. $\lambda = \omega^2 > 0$; решение $Q = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ (колебания).

Случай 2. $\lambda = 0$; решение $Q = C_1 + C_2 t$ (безразличное равновесие).

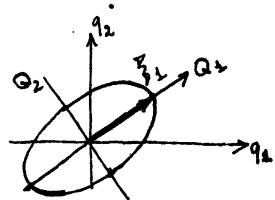
Случай 3. $\lambda = -k^2 < 0$; решение $Q = C_1 \cosh kt + C_2 \sinh kt$ (неустойчивость).

Следствие. Пусть одно из собственных чисел (3) положительно: $\lambda = \omega^2 > 0$. Тогда система (I)

может совершать периодическое колебание

вида $q(t) = (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)^T$

(5)



где ξ -соответствующий λ собственный вектор:

$$B\xi = \lambda A\xi$$

Это колебание - произведение одномерного движения $Q_i = c_i \cos \omega_i t + d_i \sin \omega_i t$ и тривиальных движений $Q_j = 0$ ($j \neq i$).

Определение. Периодическое движение (5) называется собственным колебанием системы (I), а число ω называется собственной частотой.

Замечание. Собственные колебания и частоты называют также главными, нормальными или парциальными. Неположительным λ также соответствуют собственные вектора; соответствующие движения для краткости мы тоже будем называть "собственными колебаниями", хотя они и не периодичны; соответствующие "собственные частоты" мнимые.

Задача. Доказать, что число линейно независимых настоящих собственных колебаний равно положительному индексу инерции потенциальной энергии $\frac{1}{2}(Bq, q)$.

Теперь нам результат можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА. Система (I) имеет n собственных колебаний, направления которых попарно ортогональны в смысле скалярного произведения, заданного кинетической энергией A .

Ибо орты системы координат Q в силу (2) ортогональны в смысле скалярного квадрата (Aq, q) .

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. Всякое малое колебание есть сумма собственных колебаний.

Сумма собственных колебаний, вообще говоря, не периодична. (вспомним фигуры Лиссажу!)

Для разложения движения в сумму собственных колебаний достаточно спроектировать начальные условия $q, \dot{q}$ на собственные направления ξ_i и решить соответствующие одномерные задачи (4).

Итак, уравнения Лагранжа для системы (I) можно решать следующим образом. Вначале ищем собственные колебания в виде

$$q = e^{i\omega t} \xi. \quad \text{Подставляя это в уравнения Лагранжа}$$

$$\frac{d}{dt} A \dot{q} = Bq$$

находим $(B - \omega^2 A) \xi = 0.$

Из характеристического уравнения (3) находим n собственных чисел $\lambda_k = \omega_k^2$. Им соответствуют n попарно $\left(\frac{n}{2}\right)$ ортогональных собственных векторов. Общее решение, в случае $\lambda \neq 0$, имеет вид

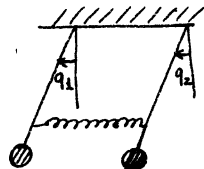
$$q(t) = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n c_k e^{i\omega_k t} \xi_k$$

Замечание. Этот результат справедлив и тогда, когда среди собственных чисел λ есть кратные.

Таким образом, в лагранжевой системе, в отличие от общей системы линейных дифференциальных уравнений, резонансные члены вида $\sin \omega t$ и т.п.

не возникают даже в случае кратных собственных чисел.

Пример. Рассмотрим систему из двух одинаковых математических маятников длин $l_1 = l_2 = 1$, масс $m_1 = m_2 = 1$ в поле тяготения с $g = 1$. Пусть маятники соединены невесомой пружи-



жиной, длина которой равна расстоянию между точками подвеса. Обозначим через q_1, q_2 углы отклонения маятников. Тогда, для малых колебаний, $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$, $U = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + \alpha(q_1 - q_2)^2)$

где $\frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ — потенциальная энергия упругости пружины.

Положим $Q_1 = \frac{q_1 + q_2}{\sqrt{2}}$,
 $Q_2 = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{2}}$

Тогда $q_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{\sqrt{2}}$,

$q_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{\sqrt{2}}$, и

обе формы приведены к главным осям: $T = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2)$

$U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2)$

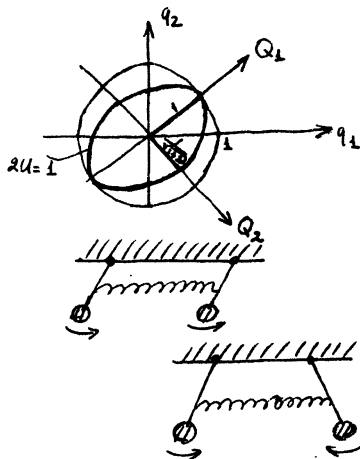
где $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{1 + 2\alpha}$.

Итак, 2 собственных колебания. следующие:

1) $Q_2 = 0$, т.е. $q_1 = q_2$: оба маятника движутся синфазно с прежней частотой 1, пружина не работает

2) $Q_1 = 0$, т.е. $q_1 = -q_2$: маятники движутся в противофазе, с увеличившейся благодаря действию пружины частотой $\omega_2 > 1$.

Пусть теперь пружина очень слаба: $\alpha \ll 1$. Тогда
 * появляется интересный эффект перекачки энергии.



Задача 1. Пусть в начальный момент маятники покоятся, и одному из них сообщена скорость $\dot{q}_1 = v$. Показать, что че-
рез некоторое время T первый маятник будет почти неподви-
жен, а вся энергия перейдет второму.

Из начальных условий следует $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$.

Поэтому $Q_1 = c_1 \sin t$, $Q_2 = c_2 \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{1+2\alpha} \approx 1+\alpha$
($\alpha \ll 1$). Но $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Поэтому
 $c_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{v}{\omega\sqrt{2}}$, и наше решение имеет вид

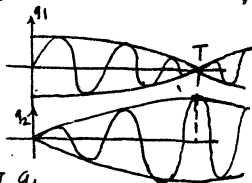
$$q_1 = \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right), \quad q_2 = \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right)$$

или, пренебрегая слагаемым $v(1-\frac{1}{\omega}) \sin \omega t$, малым вместе с α ,

$$q_1 \approx \frac{v}{2} (\sin t + \sin \omega t) = v \cos \varepsilon t \sin \omega' t$$

$$q_2 \approx \frac{v}{2} (\sin t - \sin \omega t) = -v \cos \varepsilon t \sin \omega' t$$

$$\varepsilon = \frac{\omega-1}{2} \approx \frac{\alpha}{2}, \quad \omega' = \frac{\omega+1}{2} \approx 1$$



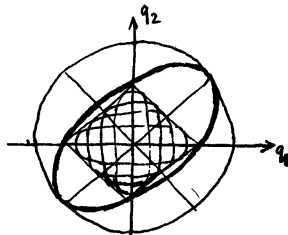
Величина $\varepsilon \approx \frac{\alpha}{2}$ мала, вместе с α , поэтому q_1 испытывает колебания частоты $\omega' \approx 1$, с медленно меняющейся амплитудой $v \cos \varepsilon t$.

Через время $T = \frac{\pi}{2\varepsilon} \approx \frac{\pi}{\alpha}$ будет колебаться практически один второй маятник, через $2T$ — опять один первый, и т.д. ("биения").

Задача 2. Исследовать собственные колебания двух разных маятников ($m_1 \neq m_2$,

$q \neq q_2$, $g = 1$), соединенных пружиной с энергией $\frac{1}{2} \alpha (q_1 - q_2)^2$.

Как ведут себя собственные частоты при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow \infty$?



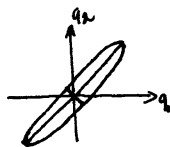
Решение. Имеем $T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2)$,

$$U = m_1 g \frac{q_1^2}{2} + m_2 g \frac{q_2^2}{2} + \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$$

Поэтому

$$A = \begin{vmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} m_1 l_1 + \alpha & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha \end{vmatrix}$$



и характеристическое уравнение имеет вид

$$\det |B - \lambda A| = \det \begin{vmatrix} m_1 l_1 + \alpha - \lambda m_1 l_1^2 & -\alpha \\ -\alpha & m_2 l_2 + \alpha - \lambda m_2 l_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

или $\alpha \lambda^2 - (b_0 + b_1 \lambda) + (c_0 + c_1 \alpha) = 0$

$$\text{где } a = m_1 m_2 g^2 l_1^2 l_2^2, \quad b_0 = m_1 g m_2 l_2 (l_1 + l_2), \quad b_1 = m_1 g^2 + m_2 g l_2^2,$$

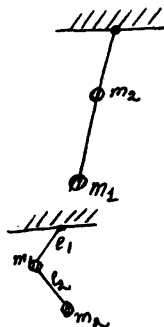
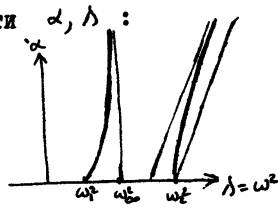
$$c_0 = m_1 m_2 g l_1, \quad c_1 = m_1 l_1 + m_2 l_2$$

Это - уравнение гиперболы на плоскости α, λ :

При $\alpha \rightarrow 0$ (слабая пружина) частоты стремятся к частотам свободных маятников ($\omega_{1,2}^2 = l_{1,2}^{-1}$); при $\alpha \rightarrow \infty$ (очень сильная пружина) одна из частот стремится к ∞ , а вторая к собственной частоте ω_∞ маятника из двух масс на одном стержне

$$\left(\omega_\infty^2 = \frac{m_1 g + m_2 g}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} \right).$$

Задача 3. Исследовать собственные колебания плоского двойного маятника.



ЛЕКЦИЯ 17

О ПОВЕДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

А) Поведение собственных частот при изменении жесткости.

Рассмотрим систему, совершающую малые колебания с кинетической и потенциальной энергиями $T = \frac{1}{2} (A\dot{q}, \dot{q}) > 0$,

$$U = \frac{1}{2} (Bq, q) > 0 \quad \text{для всех } q, \dot{q} \neq 0.$$

Определение. Система с такой же кинетической энергией и потенциальной энергией U' называется более жесткой, если

$$U' = \frac{1}{2} (B'q, q) \geq \frac{1}{2} (Bq, q) = U \quad \text{для всех } q.$$

Мы хотим выяснить, как изменятся собственные частоты при увеличении жесткости системы.

Задача. Рассмотрите одномерный случай.

ТЕОРЕМА I. При увеличении жесткости все собственные частоты увеличиваются, т.е. если $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$ — собственные частоты менее жесткой системы, а $\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_n$ — более жесткой, то $\omega_1 \leq \omega'_1$; $\omega_2 \leq \omega'_2$; $\dots$; $\omega_n \leq \omega'_n$.

Эта теор^{ема} имеет простой геометрический смысл.

Не нарушая общности можно считать, что $A = E$, т.е. что мы рассматриваем евклидову структуру, заданную кинетической энергией: $T = \frac{1}{2} (\dot{q}, \dot{q})$. Каждой системе сопоставим эллипсоид: $\exists: (Bq, q) = 1$, $\exists': (B'q, q) = 1$.

ЛЕММА I. Если система U' жестче системы U , то соответствующий ей эллипсоид $\exists'$ лежит внутри $\exists$.

Доказательство очевидно. Столь же очевидна

ЛЕММА 2. Главные полуоси эллипсоида обратны собственным частотам ω_i :

$$\omega_i = \frac{1}{a_i}$$

Поэтому теорема I эквивалентна следующему геометрическому утверждению.

ТЕОРЕМА 2. Если эллипсоид $\mathcal{E}$ с полуосями $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ содержит эллипсоид $\mathcal{E}'$ с полуосями $a'_1 \geq a'_2 \geq \dots \geq a'_n$ с тем же центром, то полуоси внутреннего эллипсоида меньше:

$$a_1 \geq a'_1, a_2 \geq a'_2, \dots, a_n \geq a'_n$$

Для доказательства теорем I и 2 заметим, что можно соединить B и B' гладким семейством

$$B(t) = (1-t)B + tB', 0 \leq t \leq 1$$

$$(B(0) = B, B(1) = B'),$$

возрастающих форм:

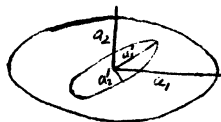
$$(B(t_2)q, q) \geq (B(t_1)q, q) \quad \text{при } t_2 > t_1$$

Поэтому достаточно доказать, что при дифференцируемом увеличении формы производные ее собственных чисел не отрицательны.

ЛЕММА 3. Пусть $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ -диагональная матрица, $A = (a_{ij})$ любая матрица. Рассмотрим матрицу $\Lambda + tA$, и обозначим через $\lambda_i(t)$ корни характеристического уравнения

$$p(\lambda, t) = \det(\Lambda + tA - \lambda E) = 0, \quad \lambda_i(0) = \lambda_i$$

Тогда $\left. \frac{d\lambda_i}{dt} \right|_{t=0} = a_{ii}$



Доказательство. При доказательстве теоремы Лиувилля мы уже использовали формулу $\det(E + At) = 1 + t \operatorname{Sp} A + O(t^2)$, $t \rightarrow 0$

Чтобы воспользоваться этой формулой, введем матрицу

$$\hat{A} = (\Lambda - \Lambda E)^{-1} A; \text{ тогда } \rho(\lambda, t) = \det(\Lambda - \Lambda E + At) = \det(\Lambda - \Lambda E) \cdot \det(E + t\hat{A}) = \rho(\lambda, 0) (1 + t \operatorname{Sp} \hat{A} + \dots)$$

Далее, диагональные элементы $\hat{A}$ суть $\hat{a}_{ii} = \frac{a_{ii}}{\lambda_i - \lambda}$,
 поэтому $\operatorname{Sp} \hat{A} = \sum_{i=1}^n \frac{a_{ii}}{\lambda_i - \lambda}$.

Из теоремы о неявной функции, примененной к $\rho(\lambda, t)$,
 находим теперь

$$\left. \frac{d\lambda_i}{dt} \right|_{t=0} = - \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\substack{\lambda=\lambda_i \\ t=0}} = - \frac{\rho(\lambda, 0) \operatorname{Sp} \hat{A}}{- \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda)} \bigg|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{\sum_{k=1}^n a_{kk} \prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda)}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda)} \bigg|_{\lambda=\lambda_i} = a_{ii},$$

ибо при $k \neq i$ $\prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_i) = 0$. Лемма доказана.

Если A — матрица неотрицательно (положительно) определенной формы, то ее диагональные элементы $a_{ii} \geq 0$ ($a_{ii} > 0$).

Поэтому из леммы 3 вытекает, что при дифференцируемом увеличении формы с диагональной матрицей ее собственные числа растут.

Но любая форма $B(t)$ имеет в каком-нибудь базисе диагональную матрицу. Поэтому собственные числа $B(t)$ растут с t :

$$\frac{d\lambda_i}{dt} > 0 \quad \text{если} \quad \left(\frac{dB}{dt} q, q \right) > 0.$$

Теоремы I и 2 доказаны.

Следствие I. Если, не меняя потенциальной энергии системы $\frac{1}{2}(Bq, q)$, увеличить кинетическую $\frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q})$, то каждая соб-

ственная частота уменьшится.

Доказательство. Собственные числа λ_k матрицы B относительно A

$$\det(B - \lambda A) = 0$$

связаны с собственными числами матрицы A относительно B

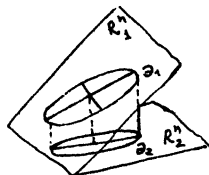
$$\det(A - \mu B) = 0$$

соотношениями $\lambda_k \mu_k = 1, \quad k = 1, \dots, n.$

Следствие 2. При ортогональном проектировании эллипсоида все его полуоси уменьшаются.

Доказательство. Пусть $p: R_1^n \rightarrow R_2^n$ — ортогональное проектирование евклидовых подпространств $R_1^n, R_2^n \subset R^{n+1}$ переводящее эллипсоид $\mathcal{E}_1 \subset R_1$ в $\mathcal{E}_2 \subset R_2$.

Рассмотрим две Лагранжевы системы δR_1^n с одинаковой потенциальной энергией $U: 2U(\mathcal{E}_1) = 1$ и кинетической $T_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{x}), T_2 = \frac{1}{2}(\rho \dot{x}, \rho \dot{x})$



При проектировании длины уменьшаются, поэтому $T_2 \leq T_1$. Но собственные частоты первой системы равны обратным величинам полуосей эллипсоида $\mathcal{E}_1$, а второй — эллипсоида $\mathcal{E}_2$ (лемма 2). Из следствия I вытекает, что полуоси $\mathcal{E}_2$ меньше полуосей $\mathcal{E}_1$, что и требовалось доказать.

Пример. При увеличении жесткости α пружины, соединяющей маятники задачи 2 лекции I6 потенциальная энергия растет, и по теореме I собственные частоты растут: $\frac{d\omega_i}{d\alpha} > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда жесткость пружины стремится к бесконечности! $\alpha \rightarrow \infty$. Тогда в пределе маятники жестко

связаны и получается система с одной степенью свободы; предельная собственная частота - $\omega_1 < \omega_n < \omega_2$.

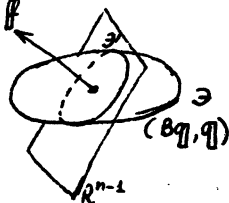
Б. Поведение собственных частот при наложении связи.

Вернемся к общей системе с n степенями свободы, и пусть $T = \frac{1}{2}(\dot{q}, \dot{q})$, $U = \frac{1}{2}(Bq, q)$, $q \in \mathbb{R}^n$ - кинетическая и потенциальная энергия системы, совершающей малые колебания.

Пусть $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ $n-1$ -мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, заданное уравнением $(f, q) = 0$, где f - ортогональный $\mathbb{R}^{n-1}$ вектор. Рассмотрим систему с $n-1$ степенями свободы ($q \in \mathbb{R}^{n-1}$), у которой кинетическая и потенциальная энергии равны ограничению T и U на $\mathbb{R}^{n-1}$ - f говорят, что наложена линейная связь

$$(f, q) = 0.$$

Пусть исходная система имела n собственных частот $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$



а система со связью - $n-1$ собственную частоту

$$\omega'_1 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega'_{n-1}$$

ТЕОРЕМА 3. Собственные частоты системы со связью разделяют собственные частоты исходной системы:

$$\omega_1 \leq \omega'_1 \leq \omega_2 \leq \omega'_2 \leq \dots \leq \omega_{n-1} \leq \omega'_{n-1} \leq \omega_n$$

В соответствии с леммой 2 эта теорема эквивалентна следующему геометрическому утверждению:

ТЕОРЕМА 4. Рассмотрим сечение n -мерного эллипсоида $E = \{q : (Bq, q) = 1\}$ с полуосями $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, гиперплоскостью $(f, q) = 0$. Тогда полуоси $n-1$ -мерного эллипсоида

да - сечения $\mathcal{E}'$ разделяют полуоси эллипсоида $\mathcal{E}$:

$$a_1 \geq a'_1 \geq a_2 \geq a'_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a'_{n-1} \geq a_n$$

Доказательство теоремы 4.

Рассмотрим семейство квадратичных форм, зависящее от параметра λ

$$B_\lambda(q) = (Bq, q) + \lambda (f, q)^2$$

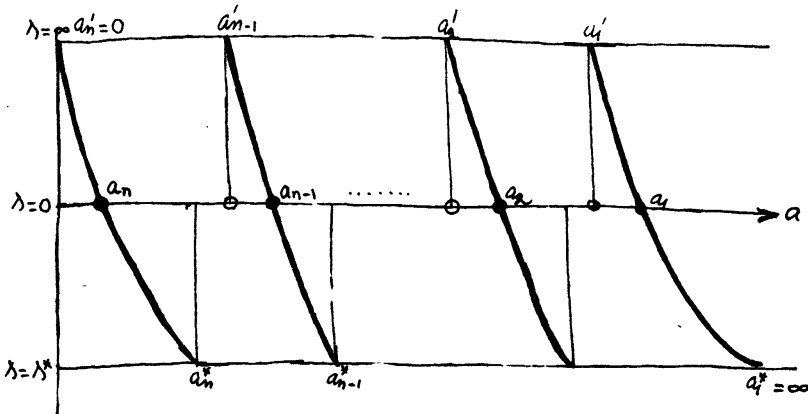


Рассмотрим соответствующее семейство эллипсоидов

$$\mathcal{E}_\lambda : B_\lambda(q) = 1 ; \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$$

Когда $\lambda > 0$ растет, форма B_λ растет, следовательно (лемма I) эллипсоиды $\mathcal{E}_\lambda$ уменьшаются. Но все они содержат сечение $\mathcal{E}'$ (на $\mathcal{E}' B_\lambda = B$ при всех λ). Когда $\lambda \rightarrow +\infty$, у эллипсоида $\mathcal{E}_\lambda$ сжимается в 0 меньшая полуось, и в пределе получается эллипсоид - сечение $\mathcal{E}'$ с полуосями $a'_1 \geq \dots \geq a'_{n-1} \geq a'_n = 0$. При этом, по теореме 2, все полуоси $\mathcal{E}_\lambda$ монотонно уменьшаются с ростом λ , так что $a_1 \geq a'_1, a_2 \geq a'_2, \dots, a_{n-1} \geq a'_{n-1}$.

Половина неравенств теорем 3, 4 доказана.



Пусть теперь λ уменьшается от 0 к $\lambda < 0$. Тогда форма B_λ уменьшается, а эллипсоиды $\mathcal{E}_\lambda$ увеличиваются.

При некотором конечном отрицательном $\lambda = \lambda^*$ форма перестает быть положительно-определенной, и эллипсоид $\mathcal{E}_\lambda$ превращается в цилиндр $\mathcal{E}_{\lambda^*}$ с направляющей $\mathcal{E}'$ и образующей $B^{-1}f$. При $\lambda \rightarrow \lambda^*$ наибольшая из полуосей $\mathcal{E}_\lambda$, a_1 , стремится к ∞ , а остальные — к полуосям $a_2^*, \dots, a_n^*$ нормального сечения $\mathcal{E}^*$ цилиндра $\mathcal{E}_{\lambda^*}$. Это нормальное сечение $\mathcal{E}^*$ есть ортогональная проекция $\mathcal{E}'$ на плоскость, ортогональную образующей цилиндра. По следствию 2, полуоси $\mathcal{E}^*$ меньше соответствующих полуосей $\mathcal{E}'$

$$a_2^* \leq a_1', a_3^* \leq a_2', \dots, a_n^* \leq a_{n-1}'$$

В то же время при переходе от $\mathcal{E}$ к большему эллипсоиду $\mathcal{E}_{\lambda^*}$ все полуоси (по теореме 2) растут:

$$a_1 \leq a_1^* = \infty, a_2 \leq a_2^*, \dots, a_n \leq a_n^*$$

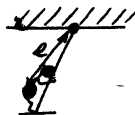
Итак, $a_1' \geq a_2^* \geq a_2$, $a_2' \geq a_3^* \geq a_3$, $\dots$, $a_{n-1}' \geq a_n^* \geq a_n$, и теоремы 3 и 4 доказаны.

ЛЕКЦИЯ 18

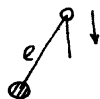
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Рассмотрим динамическую систему, параметры которой меняются со временем периодически.

Пример 1. Качели, у которых длина эквивалентного математического маятника $\ell(t)$ меняется со временем периодически: $\ell(t+T) = \ell(t)$.



Пример 2. Маятник в поле с периодически меняющейся силой тяжести (Луна) описывается "уравнением Хилла"



$$(1) \quad \ddot{q} = -\omega^2(t)q, \quad \omega(t+T) = \omega(t)$$

Пример 3. Маятник с периодически вертикально колеблющейся точкой подвеса описывается уравнением вида (1).

Для систем с периодически меняющимися параметрами правые части уравнений движения - периодические функции t . Уравнения движения можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t), \quad f(x, t+T) = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

с периодическими правыми частями. Например, уравнение (1) можно записать в виде системы

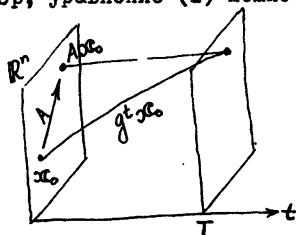
$$(3) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 \end{cases} \quad \omega(t+T) = \omega(t)$$

Напомним общие свойства систем (2).

Обозначим через $g^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

отображение $g^t x(0) = x(t)$, где

$x(t)$ - решение (2) с начальным условием $x(0)$.



Отображения g^t не образуют группы: вообще говоря,

$$g^{t+s} \neq g^t \cdot g^s \neq g^s g^t.$$

Задача. Докажите, что g^t группа тогда и только тогда, когда правые части f не зависят от t :

Задача. Докажите, что если T - период f , то $g^{T+s} = g^T \cdot g^s$, и в частности, $g^{nT} = (g^T)^n$, так что g^{nT} образуют группу (n -целые)

Отображение $g^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ играет важную роль в дальнейшем; мы назовем его "отображением за период" и обозначим через

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad Ax(0) = x(T)$$

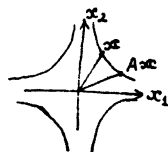
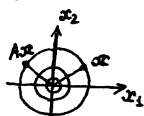
Пример. Для систем

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1$$

$$\dot{x}_1 = x_1$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$



которые можно считать периодическими

с любым периодом T , отображение A

есть поворот и "гиперболический поворот".

ТЕОРЕМА. I) Точка x_0 есть неподвижная точка отображения A ($Ax_0 = x_0$) тогда и только тогда, когда решение с начальным условием $x(0) = x_0$ периодическое с периодом

$$T.$$

2) Периодическое решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка x_0 отображения A устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива)*)

3) Если система (2) линейна, т.е. $f(x,t) = f(t)x$ -линей-

*) Неподвижная точка x_0 отображения A устойчива по Ляпунову (соответственно, асимптотически устойчива) если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ так что из $|x - x_0| < \delta$ вытекает $|A^n x - A^n x_0| < \varepsilon$ для всех $0 < n < \infty$ сразу (соответственно, $A^n x - A^n x_0 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

ная функция $\mathcal{H}$, то отображение A линейно.

4) Если система (2) гамильтонова, то отображение A сохраняет объем: $\det A = 1$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из соотношения $g^{T+S} = A g^S$

Утверждение 3 вытекает из того, что сумма решений линейной системы есть снова решение.

Утверждение 4 вытекает из теоремы Лиувилля.

Применим доказанную теорему к отображению A фазовой плоскости x_1, x_2 на себя, соответствующему уравнению (1) и системе (3). Так как система (3) линейна и гамильтонова ($\dot{x}_1 = \frac{x_2}{2}, \dot{x}_2 = -\omega^2 \frac{x_1}{2}$), получаем

Следствие. Отображение A линейно и сохраняет площади ($\det A = 1$). Для устойчивости нулевого решения уравнения (1) необходима и достаточна устойчивость отображения A .

Задача. Доказать, что поворот плоскости — устойчивое отображение, а гиперболический поворот — неустойчивое.

Изучим теперь подробнее линейные отображения плоскости на себя, сохраняющие площадь.

ТЕОРЕМА. Пусть A — матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя ($\det A = 1$). Тогда отображение A устойчиво, если $|\operatorname{Sp} A| < 2$ и неустойчиво, если $|\operatorname{Sp} A| > 2$ ($\operatorname{Sp} A = a_{11} + a_{22}$).

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа A . Они удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \operatorname{Sp} A \lambda + 1 = 0$ с вещественными коэффициентами $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{Sp} A$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A = 1$.

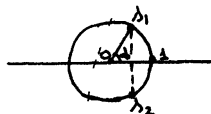
Корни λ_1, λ_2 этого вещественного квадратного уравнения вещественны при $|\operatorname{Sp} A| > 2$ и комплексно-сопряжены при $|\operatorname{Sp} A| < 2$.

В первом случае одно из собственных чисел больше, а другое меньше 1 по модулю; отображение A есть гиперболический поворот и неустойчиво.



Во втором случае собственные числа лежат на единичной окружности:

$$1 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2$$



Отображение A эквивалентно повороту на угол α (где $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$), т.е. приводится к повороту соответствующим выбором координат на плоскости. Поэтому оно устойчиво. Теорема доказана.

Таким образом, весь вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения вида (I) свелся к вычислению следа матрицы A . К сожалению, вычислить этот след явно удастся лишь в специальных случаях. Его всегда можно найти приближенно, численно интегрируя уравнение на отрезке $0 \leq t \leq T$. В важном случае, когда $\omega(t)$ близка к постоянной, помогают простые общие соображения.

Определение. Нулевое решение гамильтоновой линейной системы сильно устойчиво, если оно устойчиво и у всякой близкой линейной гамильтоновой системы нулевое решение тоже устойчиво.

Из предыдущих двух теорем вытекает

Следствие. Если $|\text{Sp} A| < 2$, то нулевое решение сильно устойчиво.

Ибо если $|\text{Sp} A| < 2$, то для отображения A' , соответствующего достаточно близкой системе, тоже выполнено условие

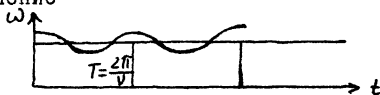
$$|\text{Sp} A'| < 2.$$

Применим это к системе с почти постоянными коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение

$$(4) \quad \ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon a(t)) x,$$

$$\varepsilon \ll 1$$

где $a(t + 2\pi) = a(t)$, например, $a(t) = \cos t$

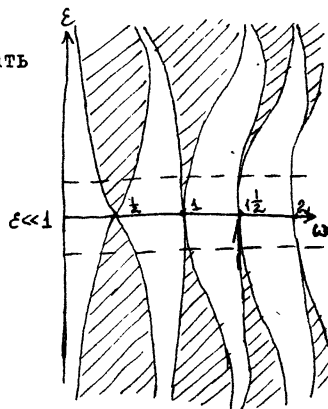


(маятник, частота которого колеблется около ω с малой амплитудой и с периодом 2π).*)

Каждую систему (4) будем изображать точкой на плоскости параметров ε, ω .

Очевидно, устойчивые системы $|SpA| < 2$

образуют на плоскости (ω, ε) открытое множество, так же как и неустойчивые системы с $|SpA| > 2$.



Граница устойчивости дается уравнением $|SpA| = 2$.

ТЕОРЕМА. Все точки оси ω , исключая целые и полуполые точки $\omega = \frac{k}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

соответствуют сильно устойчивым системам (4).

Таким образом, множество неустойчивых систем может подходить к оси ω только в точках $\omega = \frac{k}{2}$. Иными словами, раскачать качели малым периодическим изменением длины можно лишь в том случае, когда один период изменения длины близок к целому числу полупериодов собственных колебаний - результат,

*) В случае $a(t) = \cos t$, уравнение (4) называется уравнением Матье.

всем известный из эксперимента.

Доказательство сформулированной теоремы основано на том, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (4) имеет постоянные коэффициенты и явно решается.

Задача. Вычислить для системы (4) с $\varepsilon = 0$ матрицу преобразования A за период $T = 2\pi$ в базисе $x, \dot{x}$.

Решение. Общее решение

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

частное решение с начальным условием $x=1, \dot{x}=0$

$$x = \cos \omega t, \quad \dot{x} = -\omega \sin \omega t$$

частное решение с начальным условием $x=0, \dot{x}=1$

$$x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{x} = \cos \omega t$$

Ответ:

$$A = \begin{vmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega} \sin 2\pi\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{vmatrix}$$

Поэтому $|SpA| = |2 \cos 2\omega\pi| < 2$, если $\omega \neq \frac{k}{2}, k = 0, 1, \dots$

и теорема вытекает из предыдущего следствия.

Более внимательный анализ*) показывает, что вблизи точек $\omega = \frac{k}{2}, k = 1, 2, \dots$ область неустойчивости (заштрихованная на рисунке) действительно подходит к оси ω .

Таким образом, при $\omega \approx \frac{k}{2}, k = 1, 2, \dots$ нижнее положение равновесия идеализированных качелей (4) неустойчиво и они рас-
качиваются сколь угодно малом периодическом изменении длины. Это явление называется параметрическим резонансом. Характерной особенностью параметрического резонанса является то, что он

*) см., например, разобранный ниже задачу.

сильнее всего проявляется в случае, когда частота изменения параметров ν (в уравнении $4 - \nu = 1$) вдвое больше собственной частоты ω .

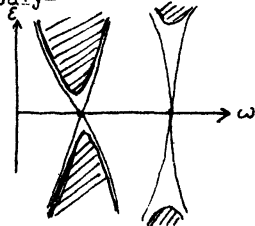
Замечание. Теоретически параметрический резонанс наблюдается при бесконечном наборе соотношений $\omega/\nu \approx \frac{k}{2}$, $k = 1, 2, \dots$. Практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда k невелико ($k = 1, 2$, реже 3). Дело в том, что а) при больших k область неустойчивости подходит к оси ω узким язычком и для резонансной частоты ω получаются очень жесткие пределы ($\sim \varepsilon^k$ для гладкой функции $a(t)$ в (4))

б) Сама неустойчивость слабо выражена при больших k , так как $|\operatorname{Sp} A| - 2$ невелик и собственные числа близки к 1 при больших k .

в) Сколь угодно малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса имеется минимальное значение амплитуды ε_k при меньших ε колебания затухают. С ростом k ε_k быстро растет.

Заметим также, что для уравнений (4) в неустойчивом случае величина x растет неограниченно.

В реальных системах, колебания достигают лишь конечной амплитуды, так как при больших x само линеаризованное уравнение (4) теряет силу и нужно учитывать нелинейные эффекты.



Задача. Найти вид областей устойчивости на плоскости t, ω для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} = -f(t)x$$

$$f(t) = \begin{cases} \omega + \varepsilon & 0 < t < \pi \\ \omega - \varepsilon & \pi < t < 2\pi \end{cases}, \quad \varepsilon < 1,$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

Решение. Из решения предыдущей задачи следует, что

$$A = A_2 A_1, \text{ где } A_k = \begin{vmatrix} C_k & \frac{1}{\omega_k} S_k \\ -\omega_k S_k & C_k \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} C_k = \cos \pi \omega_k, \\ S_k = \sin \pi \omega_k, \\ \omega_{1,2} = \omega \pm \epsilon \end{matrix}$$

Поэтому граница зоны устойчивости имеет уравнение

$$|Sp A| = |2C_1 C_2 - (\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}) S_1 S_2| = 2 \quad (5)$$

Так как $\epsilon \ll 1$, имеем $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega + \epsilon}{\omega - \epsilon} \approx 1$. Введем обозначение

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2(1 + \Delta)$$

Тогда, как легко сосчитать, $\Delta = \frac{2\epsilon^2}{\omega^2} + O(\epsilon^4) \ll 1$.

Пользуясь соотношениями $2C_1 C_2 = \cos 2\pi\epsilon + \cos 2\pi\omega$, $2S_1 S_2 = \cos 2\pi\epsilon - \cos 2\pi\omega$ перепишем уравнение (5) в виде

$$-\Delta \cos 2\pi\epsilon + (2 + \Delta) \cos 2\pi\omega = \pm 2$$

или

$$(6_1) \quad \cos 2\pi\omega = \frac{2 + \Delta \cos 2\pi\epsilon}{2 + \Delta}; \quad (6_2) \quad \cos 2\pi\omega = \frac{-2 + \Delta \cos 2\pi\epsilon}{2 + \Delta} \quad (6)$$

В первом случае $\cos 2\pi\omega \approx 1$. Поэтому положим

$$\omega = k + a, \quad |a| \ll 1; \quad \cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4)$$

Перепишем уравнение (6₁) в виде

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta} (1 - \cos 2\pi\epsilon)$$

$$\text{или } 2\pi^2 a^2 + O(a^4) = \Delta \pi^2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4)$$

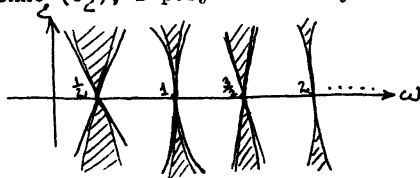
Подставляя значение $\Delta = \frac{2\epsilon^2}{\omega^2} + O(\epsilon^4)$, находим

$$a = \pm \frac{\epsilon^2}{\omega^2} + O(\epsilon^4), \quad \text{т.е. } \omega = k \pm \frac{\epsilon^2}{k^2} + O(\epsilon^2).$$

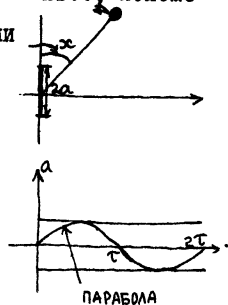
Аналогично решается уравнение (6₂); в результате получаем

$$\omega = k + \frac{1}{2} \pm \frac{\epsilon}{\pi(k + \frac{1}{2})} + O(\epsilon)$$

Итак, ответ:



Задача. Может ли верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника стать устойчивым, если точка подвеса колеблется в вертикальном направлении?



Пусть длина маятника ℓ , амплитуда колебаний точки подвеса $a \ll \ell$, период колебаний точки подвеса 2τ , причем в течение каждого полупериода ускорение точки подвеса постоянно и равно $\pm c$ (тогда $c = \frac{8a}{\tau^2}$). Оказывается, при достаточно быстрых колебаниях подвеса ($\tau \ll 1$) верхнее положение равновесия становится устойчивым.

Решение. Уравнение движения можно записать в виде

$$\ddot{x} = (\omega^2 \pm d^2)x \quad (\text{знак меняется через время } \tau)$$

где $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$, $d^2 = \frac{c}{\ell}$. Если колебания подвеса достаточно быстры, то $d^2 > \omega^2$. ($d^2 = \frac{8a}{\ell\tau^2}$).

Аналогично предыдущей задаче, $A = A_2 A_1$, где

$$A_1 = \begin{vmatrix} ch k\tau & \frac{1}{k} sh k\tau \\ k sh k\tau & ch k\tau \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} \cos \Omega\tau & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega\tau \\ -\Omega \sin \Omega\tau & \cos \Omega\tau \end{vmatrix}$$

Условие устойчивости $|Sp A| < 2$ имеет поэтому вид

$$\left| 2ch k\tau \cos \Omega\tau + \left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} \right) sh k\tau \sin \Omega\tau \right| < 2 \quad (7)$$

Покажем, что условие это выполнено при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса, т.е. когда $c \gg g$. Введем безразмерные переменные ε, μ :

$$\frac{a}{\ell} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \frac{g}{c} = \mu^2 \ll 1$$

$$\text{Тогда } k\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}, \quad \Omega\tau = 2\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}, \quad \frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = 2\mu^2 + O(\mu^4)$$

Поэтому при малых ε, η справедливы разложения с точностью $O(\varepsilon^4 + \eta^4)$

$$\operatorname{ch} k\tau = 1 + 4\varepsilon^2(1 + \eta^2) + \frac{2}{3}\varepsilon^4 + \dots \quad \cos \Omega\tau = 1 - 4\varepsilon^2(1 - \eta^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4 + \dots$$

$$\left(\frac{k}{\Omega} - \frac{\Omega}{k}\right) \operatorname{sh} k\tau \sin \Omega\tau = 16\varepsilon^2\eta^2 + \dots$$

Итак, условие устойчивости (7) принимает вид

$$2(1 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + 8\varepsilon^2\eta^2 + \dots) + 16\varepsilon^2\eta^2 < 2$$

т.е., пренебрегая малыми высшего порядка, $\frac{2}{3}16\varepsilon^4 \geq 82\eta^2\varepsilon^2$

или $\eta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, или еще $\frac{\eta}{\varepsilon} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Это условие можно переписать в виде $\mathcal{N} > \sqrt{\frac{3}{32}} \omega \frac{e}{\alpha} \approx 0,3 \omega \frac{e}{\alpha}$

$$\left(\sqrt{\frac{3}{32}} \approx 0,31\right)$$

где $\mathcal{N} = \frac{1}{2\tau}$ — число колебаний точки подвеса в единицу времени. Например, если длина маятника $\ell = 20$ см, а амплитуда колебаний точки подвеса $\alpha = 1$ см, то

$$\mathcal{N} > 0,31 \sqrt{\frac{980}{20}} \cdot 20 \approx 43 \quad (\text{колебаний в секунду})$$

Итак, верхнее положение равновесия устойчиво, если число колебаний подвеса в секунду больше 50.

Подп. к печати 11/1-67г. Л-41525. Ф. 60х90/16
Физ.л.л. 2,75. Уч.-изд.л. 2,04. Зак. 1016. Тир. 600
Цена 6 коп.

Отпечатано на ротационных в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.

Цена 6 коп.