И. В. АРНОЛЬД

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

УЧПЕДГИЗ · МОСКВА
1939

И. В. АРНОЛЬД

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА

УТВЕРЖДЕНО ВСЕСОЮЗНЫМ КОМИТЕТОМ ПО ДЕЛАМ ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ В КАЧЕСТВЕ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1938

Отв. редактор *А. В. Занковов.*
Техн. редактор *В. Якунина.*

Сдано в набор 20/VII 1937 г. Подписано к печати 31/XII 1937 г.
Формат бумаги 60×92 1/16. Бумага 60×92 Камской фабрики. Тираж 10 000 экз.
Изд. листов 30. Бум. листов 15. Авт. лист. 32,82. Тип. зн. в 1 бум. листе 101184.

Цена 4 руб. 90 коп. Переплет 1 руб. 50 коп.

Учпедгиз № 9645. У-3. Заказ № 1747.
Уполн. Главлита № Б—29248.

Набрано во 2-й типографии Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига" „Печатный Двор" имени А. М. Горького, Ленинград, Гатчинская, 26.

Отпечатано с матриц в 1-й тип. Леноблисполкома и Совета 2-я Советская, 7. Заказ №

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Что в этой книге содержится, как она написана и какие требования предъявляет к читателю?

Начну с последнего. Предполагается прежде всего, что читатель владеет элементарной математикой в объеме курса средней школы. В некоторых главах от читателя требуется сверх того знакомство с теорией пределов и с понятием функции, скажем, такое, какое дается во всяком курсе математического анализа.

Этим требования к читателю в отношении его математических знаний исчерпываются. Но зато сравнительно большие требования предъявляются к уровню его математического развития. Самый характер трактуемых вопросов предполагает наличие у читателя довольно значительных навыков в области абстрактного логического мышления и умения ориентироваться в методологической стороне дела. С другой стороны, я старался вести изложение так, чтобы систематическая самостоятельная работа над этой книгой могла содействовать, в свою очередь, развитию у читателя указанных навыков и ориентировки.

Теперь о содержании книги. Она состоит из двух частей — учения о числе в его последовательных обобщениях и начальн глав теории чисел в обычн смысле слова. Объединение это несколько разнородного материала в одной книге обусловл стремлением включить в книгу весь материал арифметической части „Специального курса элементарной математики", входящего, согласно действующей программе, как обязательный предм в учебный план педвузов. Этим объясняется и несколько отличающийся от обычного характер изложения в последних двух главах книги (более детальное изложение вопросов об общем наибольшем делителе и наименьшем кратном, о признаках делимости и др.), а также и включение в первую часть вопросов, непосредственно к развитию понятия числа отношения не имеющих (теории показательной и логарифмической функций и в связи с этим некоторых общих теорем теории функций действительного переменного).

Основная же часть книги, как сказано, отведена учению о числе. Здесь читатель найдет, во-первых, ставшие уже в вопросах обоснования понятия о числе классическими: теорию количественного натурального числа по Кантору, теорию натуральных чисел и двустороннего натурального ряда Грассмана, теорию пар для введения отрицательных, дробных и комплексных чисел, теорию сечений Дедекинда, сходящихся последовательностей Кантора и примыкающие к ним теории степенной, показательной и логарифмической функций; далее, краткие сведения о трансфинитных числах, излагаемые в связи с учением о натуральном числе, теорию кватернионов в геометрическом изложении и элементарные сведения из теории гиперкомплексных чисел в объеме, необходимом для доказательства теоремы Фробениуса, в известном смысле завершающей учение о числовом поле в его связи с обобщением понятия о числе.

Весь перечисленный материал выделен в тексте так, что читатель, желающий ознакомиться с той или иной теорией вне зависимости от основной нити изложения, может, отвлекаясь от отдельных вводных фраз, непосредственно приняться за чтение соответствующих параграфов книги. В особенности это относится к § 1—4, 12, 13, 17, 19—23, 36—41, 46—50, 58—67, 69, 73, 78—81, 90, 102, 106—121.

Такое выделение, естественное для книги, содержащей изложение большого числа разнородных по своему содержанию вопросов, обусловлено также и тем, что остальная часть ее содержит материал, повидимому, впервые включаемый в систематический курс теоретической арифметики и уже потому не могущий претендовать на вхождение в общепринятый минимум сведений по этому курсу.

Это прежде всего относится к операторной теории числа и измерения и к примыкающей к ней теории операций высших ступеней (включая и теорему Абеля), затем к теории ε-приближений, теории натуральной показательной функции, а также к учению о делимости, в котором в основу положены понятие о наименьшем кратном (а не о наибольшем общем делителе, как обычно) и отношение делимости для дробных чисел. Имея в виду сравнительную элементарность вопросов, я позволил себе не наводить литературных справок и потому лишен возможности сослаться на какие-либо литературные источники по указанным пунктам, за исключением разве указанных в тексте работ Гамильтона, от которых ведет свое начало операторная теория числа.

Сюда же в известной мере относится и несколько отличающееся от обычного изложение теории количественного натурального числа, в котором я преследовал методологическую и частично методическую цель установления непосредственной связи между принципом полной индукции и определением конечности множества, чтобы лишь на следующей ступени абстракции установить систему аксиом Пеано.

Несколько особое положение занимает также небольшая методологическая экскурсия в область философских споров сравнительно недавнего происхождения, связанных с так называемым „интуиционизмом". Ни на что большее, кроме беглого ознакомления читателя с постановкой вопроса, эта часть не претендует; предъявляя здесь, быть может, и более высокие требования к читателю, чем в остальных частях книги, автор не считал возможным просто обойти молчанием обстоятельства, имеющие фундаментальное значение в вопросах обоснования арифметики.

Положенные в основу методологические установки, из которых и вытекал выбор того, а не иного способа изложения, определяются общим стремлением с моей стороны установить связь между формальной стороной и тем конкретным содержанием понятия числа, которое обусловлено его ролью в изучении тех или иных конкретных величин, тех или иных количественных соотношений действительности.

Изложение теории натурального числа, принятое в главах I и II, и последовательное проведение операторной точки зрения позволяют, по моему мнению, осветить возникающие в связи с указанной установкой методологические вопросы с большей ясностью, нежели это было бы возможно в пределах классических формальных теорий. Кроме того, я считал, что с точки зрения интересов читателя здесь следовало предпочесть проникнутое определенным мировоззрением изложение более, быть может, легкому и менее ответственному сухому перечислению математических фактов. В этих двух обстоятельствах я видел достаточное оправдание для включения указанных выше вопросов и указанных методов изложения в книгу, предназначенную для заполнения весьма существенного пробела в нашей учебной литературе.

Москва, июнь 1937 г.

И. Арнольд.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава V.

Операторная теория действий третьей ступени.

Глава VI.

Действительные числа.

Глава VII.

Степенная, показательная и логарифмическая функции.

Глава VIII.

Определение действительных чисел с помощью их рациональных приближений.

Глава IX.

Теория сходящихся последовательностей Кантора.

ВВЕДЕНИЕ.

Развитие математики, начиная с середины прошлого столетия, шло под знаком особого внимания к вопросам обоснования.

Мы будем предполагать в общих чертах известным читателю тот процесс, который характеризует в этом смысле развитие геометрической мысли и ее последний этап, отмеченный открытием Лобачевского и последующей тщательной работой над логическим обоснованием геометрии и установлением системы непротиворечивых геометрических аксиом. Аналогичная работа шла параллельно и в отношении логического обоснования математического анализа, являющегося важнейшим орудием математического познания действительности.

И в том и в другом случае основной, исходной базой логических построений оказалось *понятие числа.* Логический анализ арифметических понятий стал, таким образом, неотъемлемой частью указанного процесса, вызванного к жизни насущнейшей потребностью разобраться в недостаточно ясной с логической стороны структуре математических дисциплин, чрезвычайно усложнившихся во время своего бурного роста в XVII и XVIII веках.

По пути анализа понятия числа удалось установить, что ряд обобщений этого понятия, вызывавших сомнения методологического характера с самого начала своего возникновения, допускает строгое логическое обоснование на основе понятия *натурального,* т. е. *целого положительного* числа.

Содержание этого утверждения распадается на две части, существенно отличающиеся друг от друга.

Во-первых, Гамильтоном (Hamilton) были установлены общие принципиальные основы, на которых может быть построена теория отрицательных и дробных рациональных чисел, если систему натуральных чисел считать заданной. На этой основе впоследствии были построены формальные теории, известные под именем „теорий пар", не оставляющие уже никаких пробелов в логическом переходе от понятия целого числа к дробным и отрицательным числам. На той же логической основе осуществляется и переход от понятия действительного числа к системе комплексных чисел, а также и дальнейшие обобщения (теория векторов в пространстве, теория кватернионов, гиперкомплексные числа). В этой части задачи обоснования понятия числа основные пути логических построений, а также методологический анализ смыслового значения последовательных обобщений понятия числа восходят к фундаментальному сочинению Гамильтона „Lectures on Quaternions“, изданному в 1853 году.

Около того же времени (1857) Дедекинду (Dedekind) и, независимо от него, несколько позже Мере (Méray) и Кантору (Cantor) удалось построить на логической основе *теорию действительных чисел*. Отправным пунктом при этом служила система (положительных и отрицательных) *рациональных* чисел. В отличие от построений Гамильтона и примыкающих к нему теорий, носящих ярко выраженный алгебраический характер, мы встречаемся здесь с принципиально новым элементом построения — анализом понятия *непрерывности*. Самая постановка вопроса и методы ее решения были здесь тесно связаны с соответствующими проблемами математического *анализа*.

Оставалось еще провести логический анализ и установить аксиомы, лежащие в основе понятия *натурального числа*.

Первый шаг в этом направлении был сделан Германом Грассманом (Grassmann). В изданном им совместно с братом Робертом в 1861 году учебнике арифметики содержатся определения основных операций, достаточные для дальнейших формальных построений, устанавливающих основные законы арифметических действий. В системе аксиом Грассмана понятие натурального числа отражено, однако, лишь в наиболее абстрактном аспекте порядкового числа, в котором система натуральных чисел рассматривается лишь с точки зрения взаимного расположения их в натуральной последовательности 1, 2, 3, 4,...

Дополняющий построение Грассмана анализ самого понятия числа как характеристики свойств множеств или собраний предметов основан на фундаментальных работах основателя теории множеств Кантора, который обратил внимание на понятие *взаимно-однозначного соответствия* и на связанное с этим общее понятие *мощности* множеств. Далее, Кантор последовательно провел логическое разделение понятий *количественного* и *порядкового* числа, рассматривая наравне с *конечными* также и *бесконечные* множества и вводя для характеристики этих последних количественные и порядковые *трансфинитные* числа.

Дальнейшие работы, связанные с именами Дедекинда, Пеано (Peano), Фреге (Frege) и Ресселя (Russel), могут быть, в известной мере, охарактеризованы как синтез построений Грассмана и Кантора, в котором основной задачей являлось выделение класса *конечных* множеств и соответственно системы конечных чисел, составляющих предмет изучения обыкновенной арифметики. При этом выяснилась фундаментальная роль в этом как раз отношении *принципа полной индукции*, лежащем в основе построений Грассмана. Этот принцип или эквивалентное ему предложение используется для выделения класса *конечных* множеств и входит, таким образом, как часть, во всякое определение *натурального* числа.

Несмотря на то, что построение теории натуральных чисел было доведено до высокой степени формальной законченности (и даже — для исключения интуиции — записано с помощью особой системы логических обозначений, введенной Пеано и известной под названием „пазиграфии“), вопрос об обосновании арифметики, в частности, вопрос о *непротиворечивости* аксиом, все же оставался открытым и после этих работ.

В настоящее время не подлежит сомнению то обстоятельство, что вопрос этот не может быть разрешен в рамках чисто формальных арифметических теорий.

С одной стороны, методологическая критика основных логических понятий (уже в XX веке), связанная с именами Брауэра (Brouwer) и Вейля (Weyl) и известная под названием „*интуиционизма*“, весьма остро поставила вопрос о непротиворечивости системы аксиом арифметики и формальной логики и о смысле математических суждений вообще. Можно считать общепризнанным, что то сравнительно непринужденное обращение с основными понятиями „множества“, „соответствия“, „все“, „существует“ и т. д., которое характеризует упомянутые выше работы Пеано, Фреге и Ресселя, во всяком случае нуждается в более глубоком обосновании и анализе, нежели тот, который возможен в рамках формальных логических построений.

В частности, попытки одного из крупнейших математиков современности, Гильберта (Hilbert), поставить вопрос (в несколько иной плоскости) все же на формальную почву и доказать этим путем основное положение о *непротиворечивости систем аксиом логики и арифметики* в их классической формулировке до сих пор не увенчались успехом.

Можно, вообще, думать, что лежащая в основе формальных построений точка зрения на математику как на процесс „писания некоторых знаков по определенным формальным правилам“ характеризует лишь некоторые внешние свойства структуры *отдельных отрезков* математических построений. В эту узкую схему не укладывается все многообразие применения в рамках даже самой математики методов содержательного, неформализованного мышления.

Примечание. В отношении сравнительно недавно предложенного Генценом (Gentzen) [1]) решения проблемы непротиворечивости было бы преждевременным высказывать здесь какое-либо суждение.

В применении к непосредственно интересующему нас вопросу об обосновании арифметики из изложенного следует, что, с одной стороны, сравнительно законченные формальные построения Грассмана и Пеано отражают лишь одну сторону дела. Применение непосредственного процесса счета и других содержательных методов рассуждения уже в рамках самой арифметики может выйти за пределы первоначальной формальной схемы. С другой стороны, и более широкая задача общего логического обоснования понятия *количественного* числа и соответствующих построений, относящихся ко множествам, приводит, как было указано выше, к неразрешенным методологическим проблемам общего характера, также выходящим за пределы чисто формальной трактовки вопроса.

---

[1]) G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Mathematische Annalen, 112 (1936), стр. 493—565.

Резюмируя, можно сказать, что вопрос об обосновании понятия натурального числа в настоящее время еще далек от своего разрешения.

Имея это в виду, мы в последующем элементарном изложении вопроса о натуральном числе ограничиваемся, оставаясь в рамках классических концепций Кантора, Пеано и Грассмана, следующими элементарными задачами:

1) установить понятие *количественного числа* в связи с вопросом о том, какие отношения действительности находят свое отражение в этом понятии,

2) установить свойства класса *конечных множеств* и соответствующие свойства системы конечных количественных (натуральных) чисел, пользуясь *принципом полной индукции*, рассматриваемым как определение класса конечных множеств,

3) выделить те свойства системы натуральных чисел, которые лежат в основе дальнейших формальных построений, составляющих содержание *грассмановской теории порядкового числа*.

По этому плану и построены первые две главы настоящей книги.

Составляющее предмет изложения дальнейших глав обобщение понятия числа уже не содержит добавочных осложнений по сравнению с теми, которые были только что указаны в отношении понятия натурального числа. В этом смысле оправдывается известное изречение Кронекера (Kronecker) „Der liebe Gott schuf die ganze Zahl, alles übrige ist Menschenwerk", которое и сам Кронекер вряд ли имел в виду понимать дословно.

ГЛАВА I.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Счет.

В простейших своих применениях к изучению действительности натуральное целое положительное число выступает как *результат счета* предметов какой-либо совокупности.

Процесс счета требует выполнения некоторых предпосылок психологического характера, относящихся к лицу, производящему счет, и некоторых условий, которым должны удовлетворять совокупности, подвергаемые счету. Например, совокупности должны состоять из раздельных, не сливающихся между собой предметов; лицо, производящее счет, должно быть в состоянии отличать эти предметы друг от друга и от предметов, не подлежащих счету и т. п.

На перечислении и исследовании такого рода предпосылок, так же как и на вопросе об историческом развитии процесса счета, мы сейчас останавливаться не будем. Мы попытаемся прежде всего выяснить, *какие именно соотношения действительности находят свое отражение в числовой характеристике совокупностей или множеств предметов.*

§ 2. Множества.

Введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассматривая какие-либо предметы $a, b, c, \ldots, d$ как отдельную группу или совокупность, мы будем говорить, что имеется **множество** предметов $a, b, c, \ldots, d$, а самые эти предметы будем называть **элементами** этого множества.

Принадлежность элемента a множеству M будем обозначать знаком *включения*

$$a \subset M$$

(a включается в M, a есть элемент M).

Если все элементы множества M включаются в множество N, то мы будем говорить, что M есть **подмножество** или **часть** множества N, и также писать

$$M \subset N.$$

Если при этом *не все* элементы N включаются в M, то мы будем называть M **правильной частью** N.

Задание какого-либо определенного множества осуществляется путем указания закона или правила, позволяющего судить о том, *какие элементы включаются в определяемое множество и какие нет.* Это правило может, в частности, сводиться к прямому перечислению элементов множества.

Не останавливаясь на более детальном логическом анализе относящихся сюда вопросов, ограничимся простейшими примерами.

1. Множество букв на этой странице книги.

2. Множество всех букв русского алфавита.

Слово „буква" имеет несколько различный смысл в этих двух примерах, как это часто бывает в обыденной речи. В первом случае буква „а" в первой строке и та же буква „а" в иной строке — различные элементы множества; во втором — речь идет о буквах как таковых, так что для задания множества простым перечислением достаточно однократное выписывание букв алфавита.

Следующие множества могут быть образованы лишь на соответствующей ступени абстракции.

3. Множество всех равносторонних треугольников.

Здесь, очевидно, необходимо дополнительно указать, при каких условиях два равносторонних треугольника считаются различными, а при каких совпадающими элементами этого множества.

4. Множество M всех множеств, число элементов которых равно двум.

Элементами множества M служат здесь в свою очередь *множества*. Например, элементами M являются множество букв в слове „то", множество рук нормального человека, множество цифр в двуричной системе счисления и т. д.

5. Множество M нулей в десятичном разложении числа $\pi = 3{,}141592...$

6. Множество, состоящее из одного элемента a в том случа если в десятичном разложении числа π где-нибудь есть один надцать нулей под ряд, и из двух элементов a и b — в противном случае.

Образование такого рода множеств и применение к ним законов обычной логики (не вызывающих сомнений в отношении таких конечных множеств, от косвенного задания которых н трудно перейти к прямому перечислению элементов) приобрел в математике сыздавна права гражданства.

Лишь сравнительно недавно было обращено внимание на то, что в отношении множеств, образованных на основе *бесконечных процессов* и *не допускающих прямого перечисления элементов*, дело обстоит далеко не так просто. Мы вернемся к затронутому здесь вопросу в дальнейшем (§ 14).

Для рассуждений, к которым мы сейчас переходим, достаточно, если читатель будет вкладывать в понятие множества привычное ему содержание, охарактеризованное приведенным выше описательным определением. При этом в первую очередь речь будет итти о самых простых конечных множествах, допускающих прямое перечисление элементов.

§ 3. Равномощные множества.

Мы будем говорить, что между двумя множествами M и N установлено *взаимно-однозначное соответствие*, если каждому элементу множества M соответствует один и только один элемент множества N, и, обратно, каждый элемент множества N поставлен в соответствие с одним и только одним элементом множества M.

Такое соответствие может осуществляться различными способами, с помощью пространственных, временных или каких-либо других связей между элементами множеств (например, соответствующими могут считаться два предмета, расположенные рядом, друг над другом, появляющиеся или рассматриваемые одновременно или непосредственно один за другим, одинаково обозначенные и т. п.).

Два множества M и N, между элементами которых возможно установить взаимно-однозначное соответствие, мы будем называть ***равномощными*** *и писать*

$$M \sim N.$$

Примеры. 1. Множества начальных и конечных букв в строках данной страницы равномощны между собой.

2. Множество букв в слове „множество" равномощно с множеством цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

3. Множество всех четных положительных чисел и множество всех натуральных чисел суть равномощные множества. Для установления взаимно-однозначного соответствия достаточно в этом случае отнести натуральному числу n четное число $2n$, так что в двух бесконечных строчках

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \ldots \end{array}$$

соответствующие элементы находятся в одном столбце.

Для того чтобы это утверждение не казалось слишком парадоксальным, читателю следует иметь в виду, что равномощность характеризует, грубо говоря, *„одинаковую составленность" множеств из своих элементов*. С этой точки зрения приведенный факт представляется вполне естественным.

4. Множество точек конечного отрезка l равномощно с множеством точек, содержащихся в половине этого отрезка.

Здесь соответствие можно осуществить геометрически, построив треугольник с основанием l и проектируя из противоположной вершины как из центра точки его средней линии на основание.

Возможность установить взаимно-однозначное соответствие множества и его правильной части характеризует, как мы увидим ниже, *бесконечные* множества.

Для того чтобы получить некоторый навык в обращении с понятием о мощности в применении к бесконечным совокупностям, читатель может уже сейчас прочитать первые страницы § 80.

§ 4. Классы равномощных множеств и количественные числа.

Путь, на который мы теперь станем для определения общего понятия о числе или количестве элементов множества, будет аналогичен следующей схеме установления общих понятий на основе процесса *абстракции* или *отвлечения*.

Пусть имеется в виду ознакомить кого-либо или передать, сообщить кому-либо содержание некоторого общего понятия, скажем, для примера, понятия „растение". Можно с этой целью перечислить характерные свойства, которыми должны обладать предметы, включаемые нами в общий класс „растений". Но иногда приходится поступать и иначе. Если бы мы могли перечислить и показать собеседнику все те предметы, которые мы называем „растениями", то можно было бы сказать, что общее понятие „растение" образуется путем *отвлечения от индивидуальных отличий* отдельных растений. Иначе говоря, понятие „растение" можно рассматривать как выражение совокупности свойств, *общих всем предметам указанного класса и отличающих эти предметы от „не-растений"*.

Такому образованию понятий соответствует часто встречающаяся в обыденной практике передача или „сообщение понятий" путем многократных указаний на объекты имеющегося в виду класса. Так, например, понятие о „красном цвете" обычно передается многократными указаниями типа: „вот это красное", „вот это тоже красное", „а вот это не красное, это зеленое". Подчеркнем, что здесь речь идет лишь о способе передачи понятия; в основе классификации лежат, конечно, объективные свойства изучаемых объектов.

Естественно, что понятия, передаваемые указанным путем в обыденной жизни, обладают неизбежно некоторой расплывчатостью, зависящей от того, что класс соответствующих объектов указывается *не исчерпывающим* образом. Экстраполяция, т. е. включение новых объектов в тот же класс, производится на основе практически, быть может, и достаточно определенных, но все же не зафиксированных в явной форме признаков.

Обойтись совершенно без понятий, вводимых этим путем, очевидно, нельзя.

Цель, которая обычно преследуется при установлении основных определений (аксиом) той или иной отрасли математики, требует сведения числа таких понятий к тому минимуму, без которого вообще невозможно говорить о *логическом мышлении*. При этом эти основные понятия стремятся выбрать так, чтобы можно было быть уверенным в том, что обычное словесное объяснение, сопровождаемое приведением примеров, обладает достаточной степенью практической определенности.

Если предполагать, что такие основные понятия установлены, то дальнейшее введение новых понятий можно производить уже с помощью *логических определений*, исчерпывающим образом выделяющих тот класс объектов или ту группу свойств изучаемых объектов, которые характеризуются вводимым понятием.

Мы и ставим себе в настоящем параграфе такую цель в отношении *общего понятия количественного числа.*

При этом мы будем придерживаться той же общей схемы введения понятия путем абстракции. Именно, мы дадим определение понятия числа не в стандартной, привычной читателю форме: „число есть то-то и то-то", а на основе логических определений, выполняющих роль указаний типа „вот тут речь идет о числе", „а вот здесь речь идет не о числе".

Отличие от не вполне определенных понятий обыденной практики, вводимых путем многократных указаний, как раз и будет заключаться здесь в том, что заменяющие эти указания логические определения *исчерпывающим* образом будут выделять те свойства изучаемых объектов, которым соответствует *понятие числа.*

В этом смысле можно сказать, что это понятие будет установлено уже с соблюдением тех требований полной определенности, которые предъявляются ко вновь вводимым терминам в математике.

При этом мы, согласно сказанному выше, будем вынуждены опираться на ряд других понятий, устанавливаемых иным путем и не подвергаемых здесь дальнейшему анализу. Все эти основные понятия входят в упомянутый выше минимум, необходимый для того, чтобы вообще можно было говорить о логическом мышлении.

В частности, мы будем опираться на понятия „тождества" и „различия", „соответствия" и „множества" и на основной аппарат логики, оставив пока в стороне все относящиеся к этим основным понятиям критические соображения принципиального характера, о которых шла речь во введении[1]).

Будем теперь рассматривать ***классы*** (совокупности) *равномощных между собой множеств.*

Примером такого класса может служить, скажем, совокупность всех множеств, равномощных с множеством букв a, b, c, d, e. В этот класс входят: множество пальцев на руке человека, множество диагоналей фигуры ◇ и др.

Отдельные множества, входящие в такой класс, качественно различны между собой. Элементы одного множества, например, суть такие-то, определенные буквы, такого-то шрифта, разделенные запятыми. Элементы другого — не-буквы, не разделены запятыми и т. д.

Отвлечемся от этих качественных особенностей, отличающих отдельные множества определенного класса друг от друга и рассмотрим только те *общие свойства* этих множеств, которые отличают их от множеств *других* классов равномощных между собой множеств.

Этим самым мы *выделим в каждом из множеств* данного класса лишь те внешние, безразличные по отношению к качественному составу его черты, которые характеризуются его *при-*

[1]) Читателя, интересующегося подробностями по затронутым здесь вопросам, мы отсылаем к „Сборнику статей по философии математики" под ред. С. А. Яновской (Учпедгиз 1936).

надлежностью к данному классу равномощных между собой множеств. Это и есть как раз те свойства, которые имеют в виду, когда говорят о **количестве** или **числе** элементов множества.

Описанный процесс мы рассматриваем здесь как *определение* понятия о количестве или числе элементов множества, основанное на понятии равномощности. С этой точки зрения было бы неправильным, например, в начале настоящего параграфа сказать, что мы рассматриваем класс множеств, „число" элементов которых одинаково и равно „числу" элементов множества a, b, c, d, e, так как такая фраза предполагает уже наличие понятия числа. В противоположность этому суждение о количестве или числе элементов какого-либо множества мы рассматриваем, по *определению*, как суждение о принадлежности множества определенному классу равномощных множеств.

Другими словами, понятие о числе или количестве элементов множества есть понятие *о тех свойствах множества, которые мы выделяем, рассматривая каждое множество с точки зрения его принадлежности определенному классу равномощных множеств.*

Употребляя термин „количественный" в философском смысле противоположения „качественному", говорят, подчеркивая приводящий к понятию числа процесс отвлечения от качественных различий, что натуральное число есть *общая количественная характеристика* некоторого класса равномощных между собой множеств.

Для того чтобы в дальнейших логических построениях избежать несколько расплывчатого термина „количественная характеристика", мы можем просто сказать, что ***количественное число есть понятие о некотором классе равномощных между собой множеств.***

§ 5. Конкретный смысл числовых соотношений.

Согласно приведенному выше определению, все множества одного и того же класса имеют одну и ту же числовую характеристику. Стало быть, *свойства чисел* являются не чем иным, как абстрактным выражением тех свойств конкретных множеств, которые не зависят от их качественного состава, а зависят только от их принадлежности определенному классу равномощных множеств.

Так, например, все множества, принадлежащие определенному выше в § 4 классу, характеризующемуся числом 5, обладают целым рядом общих свойств. Ни одно из этих множеств не может быть разбито на две равномощные между собой части. Всякое множество этого класса превращается после отнятия одного элемента в множество, которое может быть разбито на две или четыре равномощные между собой части и т. п. Все такие свойства должны найти отражение в соответствующих *арифметических свойствах числа* 5, характеризующего рассматриваемый класс.

Понятие о взаимно-однозначном соответствии позволяет нам установить *критерий*, отличающий свойства множеств, зависящие от их качественного состава, от свойств, общих для всех множеств данного класса и в этом смысле от качественного состава не зависящих.

Именно, свойства этого последнего рода, установленные для *одного* из множеств данного класса равномощных между собой множеств, имеют место и для всех других множеств того же класса. Такие свойства сохраняются, стало быть, при *замене множества любым равномощным с ним*. Этот признак независимости от качественного состава можно охарактеризовать, как *инвариантность* (неизменность) *относительно взаимно-однозначного отображения* (операции замены множеств им равномощными).

Таким образом, на вопрос, поставленный в § 1, мы можем ответить так.

Конкретным содержанием арифметических положений, выраженных в форме той или иной связи между числами, являются инвариантные относительно взаимно-однозначного отображения свойства множеств.

Установление основных свойств чисел, как будет ясно из дальнейшего изложения, опирается исключительно на *ту степень индивидуализации элементов множества*, при которой становится возможным применение понятий о *„соответствии“*, о *„тождестве“* и *„различии“*. При этом не важно, на основании каких качественных отличий такая индивидуализация проведена.

Умение судить о том, в каких случаях мы пользуемся *лишь* указанной здесь *степенью индивидуализации элементов множеств* при оперировании с ними, сравнительно легко приобретается на практике. Это умение и лежит обычно в основе суждения о том, что мы имеем дело с теми или иными инвариантными свойствами множеств, т. е. со свойствами, характеризуемыми понятием о *числе* элементов множества.

§ 6. Конкретные заместители абстрактного понятия о числе.

Высказанное в предыдущем параграфе общее положение имеет многочисленные приложения. Так, например, производство арифметических операций с помощью подсобных конкретных множеств (пальцев руки, камешков, зарубок и, в более совершенной форме, костяшек на счетах и т. п.) есть не что иное, как оперирование с некоторыми конкретными представителями классов равномощных множеств. Эти представители выступают здесь в роли *конкретных заместителей* абстрактного понятия о числе.

Производство арифметических действий с помощью таких заместителей является вполне законным, поскольку при выводе *не пользуются существенным образом* индивидуальными качественными особенностями избранных представителей, а опираются исключительно на те свойства этих конкретных множеств, которые являются у них *общими* со всеми другими *равномощными* им множествами.

Полученные на основе такого опыта суждения носят количественный характер в указанном выше смысле слова, являются инвариантными относительно взаимно-однозначного отображения и потому *могут быть перенесены на любые равномощные совокупности иного качественного состава.*

Согласно с этим, начальная стадия изучения количественных свойств множеств состоит в следующем: 1) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между исследуемыми конкретными множествами и некоторым *стандартным* множеством, выделяемым по тем или иным практическим соображениям: неизменность, доступность опыту и т. п. (множество зарубок, множество пальцев, бусинок на четках и др.); 2) опыт, относящийся к этим выделенным множествам, используется для установления количественных соотношений в области исследуемых конкретных множеств, *не подвергавшихся непосредственному эксперименту.*

Здесь мы имеем, стало быть, дело уже с примитивной формой *научного предсказания,* т. е. с одним из элементов научного познания действительности.

§ 7. Процесс счета и переход к абстрактной формулировке арифметических положений.

Исследование процесса счета у первобытных народов показывает, что переход от указанной формы примитивного познания к обобщению и закреплению результатов первоначального опыта в форме словесных положений, выражающих уже соотношения *между числами,* проходит примерно по следующей схеме.

За *стандартные множества,* о которых только что шла речь, принимаются части некоторой, расширяемой по мере надобности *стандартной совокупности,* элементами которой чаще всего служат пальцы одной или обеих рук, дополняемые далее по различным, но всегда определенным (для данного времени и местности) законам.

При *счете* (т. е. при установлении взаимно-однозначного соответствия с исследуемым конкретным множеством) элементы стандартной совокупности используются всегда в *одном и том же порядке* (обычно повторяющем исторический порядок расширения стандартной совокупности при возникновении потребности охватить множества большей мощности). Типичным примером может служить такая совокупность:

большой палец руки, указательный, средний, безымянный, мизинец, запястье, локоть, плечо, грудь,...

В силу сохранения неизменного порядка следования элементов при составлении стандартных множеств каждое из этих последних может быть охарактеризовано *названием последнего употребленного при счете элемента* стандартной совокупности.

За этими названиями закреплялось в силу этого значение *числовых символов.*

В нашем примере стандартное множество, состоящее из пальцев руки, запястья и локтя, характеризуется словом „локоть", выступающим, таким образом, в роли числительного „семь".

С течением времени первоначальное смысловое значение этих числовых символов утрачивалось и на место положенной в основу стандартной совокупности становилась система **числовых символов**, т. е. *словесных или иных знаков, следующих друг за другом в определенном порядке* и непосредственно используемых для характеристики и сравнения мощности множеств (на законах, по которым такая система символов может быть систематически продолжаема, т. е. на законах нумерации на вопросе о системах счисления, не имеющих принципиального значения, мы здесь останавливаться не будем).

Результаты опытов над конкретными множествами, формулированные в терминах избранной системы числовых символов, и составляют начальное содержание основных арифметических положений.

Здесь мы вплотную подходим к той ступени абстракции, на которой материал многократного опыта фиксируется в форме предложений, относящихся к *числам.*

В выборе некоторой *основной системы таких предложений,* отражающей соответствующие свойства множеств, и выведении из нее *дальнейших следствий путем логических рассуждений* и заключается построение арифметики как одной из наиболее абстрактных ветвей научного познания, позволяющего предсказывать имеющие место в действительности соотношения без обращения к непосредственному эксперименту.

Сейчас мы и перейдем к изучению системы основных положений, исходя из которых, Кантор (около 1870 г.) построил *теорию количественных чисел,* с тем, чтобы затем вернуться к более детальному анализу только что встретившейся на нашем пути идеи порядка и *порядкового числа.*

§ 8. Основные операции над множествами и над количественными числами в теории Кантора.

Руководящей мыслью Кантора является определение действий над числами на основе соответствующих действий над множествами.

Пусть даны не имеющие общих элементов множества

$$M, N. P, \dots, Q,$$

классы которых (в смысле § 5) характеризуются соответственно количественными числами

$$m, n, p, \dots, q.$$

Множество S, состоящее из всех элементов множеств M, N, P, ..., Q, называется суммой этих множеств.

Более развернутое логическое определение суммы множеств таково:

„a есть элемент суммы S множеств M, N, P, ..., Q, т. е.

$$a \subset S$$

в том и только в том случае, если либо $a \subset M$, либо $a \subset N$, ..., либо $a \subset Q$".

Легко убедиться, что, заменяя множества $M, N, \ldots, Q$ соответственно равномощными с ними множествами $M', N', \ldots, Q'$, мы получим сумму S', равномощную с S, так что *количественное число s, характеризующее класс множества S,* зависит только от того, каким классам принадлежат множества $M, N, \ldots, Q$, т. е. *вполне определяется системой чисел $m, n, \ldots, q$.*

Это число s и называется, по определению, **суммой чисел** $m, n, \ldots, q$, так что

$$s = m + n + \ldots + q.$$

Так как в определении суммы множеств нет вообще никакой речи о порядке, в котором рассматриваются множества $M, N, \ldots, Q$, то отсюда вытекает **переместительный** закон сложения чисел, согласно которому *сумма $m+n+\ldots+q$ не зависит от порядка слагаемых.*

Точно так же **сочетательный** закон сложения, согласно которому из равенств

$$\begin{aligned} m+\ldots+n &= r \\ p+\ldots+q &= s \\ \ldots\ldots\ldots \\ u+\ldots+v &= t \end{aligned}$$

следует равенство

$$m+\ldots+n+p+\ldots+q+\ldots+u+\ldots+v = r+s+\ldots+t,$$

непосредственно вытекает из аналогичного свойства суммы множеств, представляющего собой одно из формальных свойств логической связки „либо".

Действительно, суждение

„либо $a \subset R$, либо $a \subset S$, либо ..., либо $a \subset T$"

при условии, что множество R есть сумма множеств $M, \ldots, N$ множество S есть сумма множеств $P, \ldots, Q$, а T есть сумма множеств $U, \ldots, V$, раскрывается так:

„либо $a \subset M, \ldots$, либо $a \subset N$, либо $a \subset P, \ldots$, либо $a \subset V$",

а потому множество, рассматривавшееся как сумма множеств $R, S, \ldots, T$, есть в то же время сумма множеств $M, \ldots, N, P, \ldots, V$.

Не останавливаясь на уже чисто формальных определениях обратных действий вычитания и деления, перейдем к определениям действий умножения и возвышения в степень, которые в теории Кантора имеют довольно своеобразную форму.

Пусть даны множества $M, N, \ldots, Q$ и пусть

$$\mu \subset M, \ \nu \subset N, \ \ldots, \ \xi \subset Q.$$

Составим символ $\qquad (\mu, \nu, \ldots, \xi),$

назовем его *сочетанием* элементов $\mu, \nu, \ldots, \xi$ и образуем *множество K всех таких сочетаний*, получающихся при *всевозможных выборах* элемента μ из M, элемента ν из $N, \ldots$, элемента ξ из Q.

Два таких сочетания будем считать различными, если они отличаются выбором элемента хотя бы одного из множеств M, $N, \ldots, Q$. Порядок, в котором рассматриваются множества M, $N, \ldots, Q$ и взятые из них элементы $\mu, \nu, \ldots, \xi$, при этом безразличен.

Нетрудно видеть, что класс множества K зависит только от того, каким классам принадлежат множества $M, N, \ldots, Q$. Поэтому количественное число k, характеризующее класс множества сочетаний K, зависит только от чисел $m, n, \ldots, q$. *Это число k и есть, по определению,* ***произведение*** *чисел $m, n, \ldots, q$,* так что

$$k = m \cdot n \ldots q.$$

Так, например, множество сочетаний

$$(\alpha, \lambda), (\alpha, \mu), (\beta, \lambda), (\beta, \mu), (\gamma, \lambda), (\gamma, \mu)$$

определяет количественное число **6** как произведение количественных чисел **3** и **2**, характеризующих классы множества M, состоящего из элементов

$$\alpha, \ \beta \text{ и } \gamma,$$

и множества N, состоящего из элементов

$$\lambda \text{ и } \mu.$$

Из самого определения непосредственно следуют **переместительный** и **сочетательный** законы умножения количественных чисел. Не представляет никаких затруднений и доказательство **распределительного** закона умножения по отношению к сложению

$$(m + n + \ldots + q)\, r = mr + nr + \ldots + qr.$$

Проведение этих доказательств мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Число m^n может быть определено так.

Пусть $M(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ и $N(\lambda, \mu, \ldots, \nu)$ суть множества классов m и n.

Заменим в множестве N каждый из его элементов каким-либо элементом множества M, допуская при этом многократное использование одного и того же элемента множества M. Будем получающиеся при указанной замене комбинации считать совпадающими только тогда, когда одинаковые элементы из N заменены одинаковыми элементами из M. Число l, характеризующее класс множества L таких комбинаций, и есть, по определению, m^n.

Так, например, 2^3 есть число, характеризующее класс множества комбинаций

$$\begin{array}{ll} (\lambda, \lambda, \lambda) & (\mu, \lambda, \lambda) \\ (\lambda, \lambda, \mu) & (\mu, \lambda, \mu) \\ (\lambda, \mu, \lambda) & (\mu, \mu, \lambda) \\ (\lambda, \mu, \mu) & (\mu, \mu, \mu) \end{array}$$

получающихся, если элементы множества α, β, γ класса 3 заменять независимо друг от друга элементами множества λ, μ класса 2.

Как видно, определения Кантора несколько отличаются от обычных. С точки зрения обоснования элементарных операций над числами с помощью операций над множествами нет, впрочем, принципиальных оснований предпочесть эти определения обычным, разбираемым во всяком курсе методики арифметики. Однако, обращая внимание читателя на симметрию и изящество, отличающие определения Кантора, мы имеем в виду и еще одно обстоятельство, приводящее нас вплотную к одному из важнейших в теоретической арифметике вопросов принципиального характера.

§ 9. Бесконечные множества и трансфинитные количественные числа.

Дело в том, что все приведенные выше определения имеют место не только для конечных множеств и соответствующих им конечных количественных чисел, но переносятся слово в слово и на множества *бесконечные*, образующие также *классы равномощных множеств*. Эти классы характеризуются в полном соответствии с тем, что было сказано в § 4 о количественных числах вообще, введенными Кантором **трансфинитными** *количественными числами*.

Трансфинитное количественное число есть, таким образом, не что иное, как *понятие о некотором классе равномощных между собой бесконечных множеств*.

Так, например, множество элементов, образующих бесконечную последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

не может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие ни с каким конечным множеством, т. е. имеет, как говорят, *иную мощность*, чем любое конечное множество. Класс всех равномощных с этой последовательностью множеств есть класс так называемых **счетных** множеств, т. е. таких, элементы которых могут быть *перенумерованы с помощью чисел натурального ряда*.

Вводя для обозначения этого класса новое количественное „трансфинитное“ число $\aleph_0$ (*алеф-нуль*), мы можем, согласно с данными в § 8 определениями, составить числа

$$\aleph_0+1,\ \aleph_0+2,\ \ldots,\ \aleph_0+\aleph_0,\ \ldots$$
$$\aleph_0^2,\ \ldots,\ 2^{\aleph_0},\ \ldots\ \aleph_0^{\aleph_0},\ \ldots$$

и т. п.

Число $\aleph_0+1$, например, обозначает класс совокупности, состоящей из последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и *еще* одного элемента a (порядок безразличен!)

Число $\aleph_0+\aleph_0$ обозначает класс совокупности, состоящей из двух последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Из самого обозначения тут видно, что это есть класс совокупности *сочетаний* элементов множества a, b класса **2** с элементами счетного множества $1, 2, \ldots, n, \ldots$ нижних индексов, так что в соответствии с определением умножения (§ 8) можно написать:

$$\aleph_0+\aleph_0=2\cdot\aleph_0.$$

Рассматривая, однако, подробнее построенные таким образом классы, мы наталкиваемся на парадоксальные на первый взгляд факты, показывающие, что *трансфинитные числа не во всем следуют законам обычной арифметики.*

Действительно, расположив элементы множества, соответствующего числу $\aleph_0+1$, в порядке:

$$a;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ldots,$$

мы видим, что элементы его могут быть перенумерованы (номер первый — элемент a, номер второй — элемент a_1 и т. д.). Множество это, стало быть, не выходит из класса *счетных*, охарактеризованных числом $\aleph_0$, так что

$$\aleph_0+1=\aleph_0.$$

Аналогично, расположив элементы двух последовательностей $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ в порядке:

$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \ldots,\ a_n,\ b_n,\ \ldots,$$

мы можем провести нумерацию элементов полученного множества, в которой a_1 будет иметь номер 1, b_1 — номер 2, a_2 — номер 3 и т. д. Это означает, что

$$\aleph_0+\aleph_0=2\aleph_0=\aleph_0.$$

Множество, характеризуемое числом $\aleph_0\cdot\aleph_0$, есть множество сочетаний

$$\begin{array}{ccccc}
(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & \ldots, & (a_1, b_n), & \ldots \\
(a_2, b_1), & (a_2, b_2), & \ldots, & (a_2, b_n), & \ldots \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
(a_n, b_1), & (a_n, b_2), & \ldots, & (a_n, b_n), & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Класс этого множества, очевидно, тот же, что и класс множества $\aleph_0^2$, получающегося, по определению операции возвышения в степень, заменой в множестве из двух элементов (буквы a и b) каждого из этих элементов, независимо друг от друга элементами счетного множества (нижние индексы 1, 2, 3, ...). Таким образом

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2,$$

как в обычной арифметике.

Но, кроме того, построенное множество можно перенумеровать, полагая хотя бы

$$\begin{array}{lll} (a_1, b_1) = c_1; & (a_1, b_2) = c_3; & (a_1, b_3) = c_6 \\ (a_2, b_1) = c_2; & (a_2, b_2) = c_5; & \ldots \\ (a_3, b_1) = c_4; & \ldots & \end{array}$$

и так далее, перебирая последовательно *диагонали* написанной выше таблицы.

Итак, $$\aleph_0^2 = \aleph_0.$$

Аналогично нетрудно вывести, что вообще

$$\aleph_0^n = \aleph_0,$$

если n — натуральное число.

Этот опыт мог бы навести на ложную мысль, что все множества, которые мы можем таким путем построить, — счетные и что кроме $\aleph_0$ не понадобится для характеристики классов бесконечных множеств никаких иных „трансфинитных" чисел.

Но вот, рассмотрим $2^{\aleph_0}$. Согласно определению, мы можем взять множество из двух элементов, скажем 0 и 1, и составить множество комбинаций, получающихся путем *независимой замены нулем и единицей элементов какого-либо счетного множества*. Каждая такая комбинация есть, таким образом, некоторая последовательность типа

$$0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots,$$

состоящая из нулей и единиц. При этом мы получим *все возможные* последовательности такого типа, с *любым* чередованием нулей и единиц.

Докажем теперь, что $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$, т. е. докажем, что множество указанных последовательностей *не может быть перенумеровано*.

Метод доказательства известен под именем **диагонального процесса Кантора** и допускает обобщение для целого ряда аналогичных случаев.

Допустим противное тому, что требуется доказать, т. е. допустим, что кому-либо удалось перенумеровать рассматриваемое множество. Представим себе, что комбинации, о которых идет речь, выписаны затем в порядке возрастающих номеров:

$$1)\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$$
$$2)\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \ldots$$
$$\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$n)\ \nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_n, \ldots$

. . . .

(греческие буквы могут иметь лишь значения 0 и 1).

Составим теперь комбинацию того же типа по следующему закону. На первом месте поставим 0, если $\alpha_1 = 1$, и 1, если $\alpha_1 = 0$. На втором поставим 0, если $\beta_2 = 1$, и 1, если $\beta_2 = 0$. Аналогично, на третьем месте поставим цифру, отличную от третьей цифры третьей комбинации, вообще, на *n-ом месте* поставим цифру, *отличную от n-ой цифры n-ой комбинации.*

Полученная последовательность нулей и единиц *не может иметь никакого номера в приведенной нумерации,* так как, по построению, она отличается от каждой занумерованной комбинации именно той своей цифрой, которая стоит на месте, соответствующем испытываемому номеру: от первой — первой цифрой, от второй — второй цифрой и т. д.

С другой стороны, построенная комбинация *принадлежит рассматриваемому множеству*, которое содержит ведь *все* комбинации из нулей и единиц.

Полученное противоречие показывает, что множество класса $2^{\aleph_0}$ уже *не есть счетное* множество, так что $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$.

Подобным путем можно строить все новые и новые классы множеств, неограниченно расширяя систему количественных трансфинитных чисел.

Несоблюдение некоторых основных законов обычной арифметики (поглощение высшими количественными числами низших), обнаруженное нами выше на простейших примерах, является характерным для всей системы трансфинитных количественных чисел.

§ 10. Необходимость логической характеристики конечных множеств.

Из изложенного в § 9 вытекает, что установленных в § 4 и 8 определений *недостаточно* для выделения основных арифметических положений, определяющих интересующую нас систему *конечных количественных* (натуральных) *чисел.*

В самом деле, с этими определениями оказались совместимыми такие соотношения, как

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0,\ 2\aleph_0 = \aleph_0,\ \aleph_0^2 = \aleph_0$$

и т. п., не могущие иметь места в обыкновенной арифметике конечных количественных чисел. Для построения этой последней необходимо, стало быть, дать *общую логическую характеристику конечных множеств,* сузив, таким образом, общее определение количественного числа в данной выше формулировке, включающее в себя, как мы видели, и трансфинитные числа.

Только после дополнительного установления такой характеристики мы сможем быть уверены в том, что соответствующая более узкому определению система конечных количественных чисел и будет, в смысле задач нашего логического анализа, *Класс множеств, обозначаемый количественным числом* **2**, *состоит из множеств, которые могут быть получены из множеств класса* **1** *путем присоединения одного элемента.*

Класс множеств, обозначаемый количественным числом **3**, *состоит из множеств, которые могут быть получены из множеств класса* **2** *путем присоединения одного элемента.*

Вообще, если определения эти выписаны для классов до класса $\mathbf{n}$ включительно, то

Определение 3. ***Следующий за n класс n'*** *определяется, как класс множеств, которые могут быть получены из множеств класса* $\mathbf{n}$ *путем присоединения одного элемента.*

Нетрудно видеть, что этим дана логическая характеристика разложения множества на сумму из множества ближайшего низшего класса и множества первого класса, т. е. *как раз того процесса, который мы фактически совершаем при счете элементов какого-либо конкретного множества, перебирая их последовательно один за другим.*

На практике при последовательном перебирании элементов принадлежность какого-либо множества классу **1** непосредственно ясна на каждой стадии процесса. Заключение же о принадлежности множества более высокому классу, если оставить в стороне косвенные методы, производится по следующей схеме. Сначала устанавливается, что некоторое подмножество данного множества (состоящее из одного элемента) принадлежит классу **1**, затем путем присоединения еще одного элемента образуется подмножество, принадлежащее классу **2**, и т. д., пока таким образом не будет охвачено все множество. Одновременно с окончанием процесса устанавливается в соответствии с определениями вышеприведенного типа и *класс* множества.

Следует отметить, что при описанном здесь последовательном определении классов множеств, установление определения каждого индивидуального класса сопровождается *фактическим построением* некоторого конкретного множества соответствующего класса (за такое конкретное множество можно принять, например, множество выписанных определений указанного типа).

§ 12. Конечные множества.

Не вдаваясь здесь, как и в § 9, в несколько преждевременный для нас логический анализ понятия бесконечной последовательности, будем считать достаточно очевидным для читателя тот факт, что уже для простейших бесконечных множеств типа

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

установление класса множества на основе процесса последовательного перебирания элементов в соответствии с определениями § 11 *невозможно,* так как этот процесс *не оканчивается.*

Так мы приходим к мысли определить *конечные* множества, как такие, процесс перебирания элементов которых *заканчивается.* Однако, такая формулировка лишь весьма расплывчато передает нужное нам свойство конечных множеств. Для того чтобы это определение могло служить действительной основой *логических* рассуждений, необходимо определить, какое логическое содержание вкладывается в утверждение, что „процесс перебирания элементов заканчивается“.

Возвращаясь к определениям § 11, мы можем, отвлекаясь от имевшейся там в виду задачи определения класса множества и фиксируя свое внимание на частной задаче *установления конечности множества*, принять, в точном соответствии с логической характеристикой процесса перебирания элементов, следующие два положения в качестве определения понятия **„конечное множество“**.

Определение 1. *Множества класса* 1 *суть конечные множества.*

Определение 2. *Если множество M есть конечное множество, то и множество M', образованное из M присоединением одного элемента, есть конечное множество.*

Таким образом мы признаем множество конечным, если это суждение о конечности получено как логическое следствие приведенных двух положений.

Всякий законченный процесс перебирания элементов множества имеет, стало быть, своим следствием *установление конечности* множества. В частности, множества классов 2, 3 и других суть конечные множества.

Употребляя слово класс в общелогическом смысле слова, мы можем иными словами сказать, что класс конечных множеств состоит, по определению, из ***тех и только тех*** множеств, принадлежность которых к этому классу установлена (или может быть установлена) как следствие только что формулированных положений 1 и 2.

Приведенное определение конечности находится, как мы видели, в чрезвычайно тесном соответствии с фактическим установлением конечности множеств на практике. Мы отмечаем здесь это обстоятельство, так как далеко не все определения конечности, принимаемые с той же целью теоретического обоснования последующих заключений, обладают этим свойством. Мы считаем, в частности, совершенно не соответствующими сути дела и не имеющими никаких преимуществ с логической стороны довольно искусственные определения, основанные на рассмотрении различных расположений элементов множества. Непосредственное установление конечности множества на основании таких определений потребовало бы рассмотрения множества всех его расположений — процесс, который вряд ли кому-либо придет в голову осуществлять на практике.

§ 13. Принцип полной индукции.

Для дальнейшего существенно формулировать одно общее предложение, вытекающее из принятого нами определения конечности множества.

Пусть установлено, что некоторая система множеств (назовем ее Q) обладает следующими свойствами:

1) все множества класса 1 входят в Q,

2) если в Q входят все множества некоторого класса n, то в Q входят и множества следующего класса n'.

Мы утверждаем, что тогда *всякое конечное множество* M *входит в систему множеств* Q.

Действительно, согласно определению § 12, конечность множества M должна быть установлена как следствие формулированных там двух положений 1 и 2. Согласно с постулированными свойствами системы Q, каждому использованному при установлении конечности суждению как типа 1, так и типа 2 будет соответствовать суждение о принадлежности соответствующего подмножества множества M к системе Q. Стало быть, одновременно с суждением о *конечности* множества M будет получено и *суждение о его принадлежности к классу* Q.

При проведении этого рассуждения, так же как и при самом определении конечности, непосредственным материалом нашего рассмотрения служат не столько множества, сколько процессы установления суждения о множествах. Поэтому с методологической точки зрения представляется важным не возвращаться вновь к рассуждениям этого типа, а формулировать полученный результат, как *основное свойство конечных множеств:*

Конечные множества включаются во всякую систему множеств, к которой 1) принадлежат все множества класса 1 и 2) если принадлежат множества класса n, то принадлежат и множества следующего класса n'.

Всякое суждение S о множестве M может быть формулировано, как *включение этого множества в некоторую систему множеств* Q_s (включающую в себя те и только те множества, *для которых верно суждение* S). Например, суждение „множество M содержит в качестве элемента букву a“ равносильно включению $M \subset Q_s$, где Q_s есть система всех множеств, которые содержат в качестве элемента букву a.

Основываясь на этом, чисто формальном обстоятельстве, мы можем формулировать установленное свойство конечных множеств так:

Суждение S верно для ***всех*** *конечных множеств, если оно верно для множеств класса* **1** *и если из предположения, что оно верно для множеств класса* ***n*** *вытекает, что оно верно для множеств следующего класса* ***n'***.

В этой формулировке это свойство носит название **принципа полной индукции.**

Заметим еще, что вместо того, чтобы говорить о „всех конечных множествах“, можно говорить о „всех *классах* (в смысле § 12) конечных множеств“ или, что то же, о *всех конечных количественных числах.*

Принцип полной индукции заключает в себе единственный прямой метод доказательства *общих предложений,* характеризующих совокупность *всех* конечных множеств. С этой точки зрения можно сказать, что в области общих суждений о множествах принцип полной индукции является определением класса конечных множеств.

§ 14. Принцип полной индукции и суждения об открытых совокупностях.

1. В вопросах обоснования арифметики отмеченное только что обстоятельство имеет чрезвычайно важное принципиальное значение.

Совокупность *всех* конечных множеств (или *всех* классов конечных множеств в смысле § 12) нельзя рассматривать как законченную совокупность, элементы которой можно перебрать, пересмотреть один за другим. С точки зрения фактического положения дела эта совокупность представляется *открытой* совокупностью, так как мы можем и фактически строим все новые и новые конечные множества, притом все более и более высоких классов мощности.

Идеализируя этот процесс и образуя понятие о *всех* конечных множествах, мы сейчас же сталкиваемся с тем, что суждения о *всех* конечных множествах, как суждения об „*открытой*" совокупности, элементы которой нельзя пересмотреть, имеют *иной фактический смысл*, нежели обычные суждения о всех элементах некоторой вполне законченной, заданной совокупности.

Для того чтобы уяснить себе это различие, рассмотрим подробнее пример, ставший в затрагиваемой области методологической критики классическим. Пусть речь идет о вопросе, встречаются ли среди цифр десятичного разложения числа π где-нибудь одиннадцать нулей под ряд или нет.

Суть дела заключается в том, что здесь ставится вопрос о принадлежности или непринадлежности вполне определенного объекта к некоторой вполне определенной законом своего построения открытой совокупности. Если бы мы имели дело с конечной совокупностью, все элементы которой можно пересмотреть, то этот вопрос *решался бы, в принципе, путем такого пересмотра* и из двух возможностей „встречается" и „не встречается" осуществление одной из них могло бы быть установлено конечным числом испытаний. Но так как здесь речь идет об открытой совокупности, то такой метод решения вопроса *принципиально невозможен* и мы вынуждены спросить себя, во-первых, *какой смысл* следует приписать утверждению, что „*нули есть*".

Если такое суждение высказывается *без указания верхнего предела числа цифр*, которые нужно рассмотреть, чтобы эти нули найти, то оно является по отношению к процессу последовательного определения цифр числа π *бессодержательным, не допускающим проверки*. Такого рода суждение нельзя рассматривать как *конкретное предсказание:* можно найти сколько угодно цифр и все утверждать: „нули есть, но они дальше". В этом смысле можно сказать, что суждение „нули есть" приобретает *содержательный смысл* только тогда, когда либо будет указано, *до какого места нужно довести разложение, чтобы добраться до этих нулей,* либо будет установлена принципиальная возможность такое указание дать.

Однако общие теоремы существования в математике отнюдь не всегда имеют только что указанный смысл.

Приведем пример для выяснения этого положения.

От противного доказывается (см. § 47), что не существует рационального числа, равного $\sqrt{2}$. С другой стороны, всякое рациональное число разлагается в конечную или периодическую десятичную дробь (чистую или смешанную). Из доказательства несуществования $\sqrt{2}$ в системе рациональных чисел вытекает поэтому *ложность* предложения, что какая-нибудь группа цифр повторится в цифрах числа $\sqrt{2}$ неограниченное число раз под ряд. Однако это отрицательное суждение в такой форме лишено в указанном выше смысле слова содержания, так как оно не включает еще указания, до какого места нужно довести разложение $\sqrt{2}$ для того, чтобы установить нарушение периодичности в случаях, когда обнаружится повторение какой-либо группы цифр несколько раз под ряд.

Написав, однако, в явной форме то рациональное число r, которое соответствовало бы неограниченному повторению этой группы цифр, мы сможем, сравнивая квадрат числа r с числом 2, найти такое n, чтобы $|r-\sqrt{2}|=\frac{|r^2-2|}{|r+\sqrt{2}|}$ было больше $\frac{1}{10^n}$.

Доведя разложение $\sqrt{2}$ до n-ой цифры, мы должны будем, стало быть, неизбежно натолкнуться на нарушение периодичности в повторении рассматриваемой группы цифр.

Мы видим на этом примере, что два факта: „посылки, определяющие число $\sqrt{2}$, противоречат, допущению, что $\sqrt{2}$ рациональное число“ и „для всякого повторения группы цифр в десятичном разложении числа $\sqrt{2}$ можно указать такое число знаков, для которого повторение будет нарушено“, хотя и связаны друг с другом, но представляют собой *различные по смыслу* утверждения. Из сравнительно простого доказательства первого *не вытекает непосредственно* второе утверждение, требующее для своего установления более детального использования свойств способа задания иррационального числа $\sqrt{2}$.

2. Этому различию между общими утверждениями существования (в особенности доказанными от противного) и суждениями, имеющими характер конкретных предсказаний, которые можно проверить путем конечного числа испытаний, впервые было придано принципиальное значение Кронекером.

Кронекер выставил требование, чтобы всякое теоретическое построение (доказательство существования, проверка выполнения тех или иных условий, входящих в текст определений и теорем) могло быть осуществлено путем *конечного числа испытаний,* т. е. имело **финитный** смысл.

Кронекеру и его последователю Шатуновскому удалось дать такого рода формулировки и доказательства по отношению к целому ряду теорем теории чисел и алгебры. При этом, как это было впервые замечено Шатуновским, последовательное проведение указанного требования связано с отказом от применения *закона исключенного третьего* по отношению к открытым (и, в частности, бесконечным) совокупностям.

В таком построении приходится давать положительные определения отрицательным терминам (строго фиксировать финитное содержание отрицания „не"). Теоремы с отрицательным характером заключения приобретают тогда определенное положительное финитное содержание.

Поясним это на примере. Пусть доказано, что предположение о равенстве основания натуральных логарифмов, числа e, рациональному числу приводит к противоречию. Если допустить по отношению к открытой совокупности действительных чисел закон исключенного третьего, то мы можем, далее, рассуждать так. Если e не равно никакому рациональному числу, то, стало быть, *e либо больше, либо меньше* всякого рационального числа. Это суждение, однако, не имеет *финитного* смысла, так как оно не заключает в себе указания метода, с помощью которого для всякого данного рационального числа r можно будет конечным числом испытаний решить вопрос о том, какое из неравенств $r<e$ или $r>e$ имеет место. Обычное доказательство иррациональности числа e этот вопрос оставляет открытым и потому, с точки зрения Кронекера и Шатуновского, высказанное суждение либо должно быть отвергнуто, либо обосновано иным путем, подобно тому, как это было сделано выше в вопросе о периодичности в цифрах числа $\sqrt{2}$. В данном случае это удается сделать; однако в классической форме математических построений мы сплошь и рядом встречаемся с таким нагромождением применения закона исключенного третьего и общих утверждений типа „все", „не все" и „существует", применяемых к открытым совокупностям, что переход к соответствующим финитным суждениям может оказаться в общем случае неосуществимым.

3. Для того чтобы гарантировать финитность утверждений на каждой стадии построения, основателями наиболее резкой принципиальной позиции в рассматриваемом направлении, носящем название **интуиционизма** и связываемом с именами Брауэра и Вейля, было предложено отказаться с самого начала от применения закона исключенного третьего к открытым совокупностям и вести все построения по особым логическим правилам, отражающим те взаимоотношения в области бесконечных множеств, которые могут быть сформулированы в *финитной* форме. Эти правила и образуют то, что называется *интуиционистской логикой.*

Математические конструкции, удовлетворяющие этим требованиям, отличаются крайней громоздкостью и требуют отказа от целого ряда классических методов рассуждения, в особенности в тех отделах математики, которые связаны с наиболее тонкими вопросами теории множеств и функций действительного переменного. В силу этого и сейчас еще резко расходятся мнения в вопросе об оценке предлагаемого интуиционистами пути реконструкции математических дисциплин.

Однако не подлежит сомнению, что интуиционистская критика сыграла чрезвычайно важную роль, поставив со всей резкостью вопрос о *смысле суждений,* относящихся к *открытым бесконечным совокупностям.*

Мы видели выше, что в этом отношении такие совокупности существенным образом отличаются от тех конечных множеств, все элементы которых можно пересмотреть, перебрать один за другим. Смысл суждения о существовании, получаемого как следствие некоторого предложения, доказанного от противного, не совпадает непосредственно с финитным смыслом соответствующего содержательного (положительного) утверждения.

Для того чтобы выяснить несколько подробнее характер этого отличия открытых совокупностей от конечных множеств, а также основания, по которым отказ от применения закона исключенного третьего приобретает в интуиционистской логике *принципиальный характер,* мы вернемся к рассмотренному выше примеру с цифрами числа π и спросим себя, каков фактический, финитный смысл утверждения о том, что „одиннадцати нулей под ряд никогда не встретится".

Это суждение, правда, носит уже характер предсказания по отношению к процессу последовательного вычисления цифр числа π, однако оно не может быть ни исчерпывающим образом проверено, ни получено в результате пересмотра цифр числа π, так как эти последние образуют открытую бесконечную совокупность. Поэтому, говоря, что это суждение выражает свойство совокупности *всех* цифр числа π, мы никак не можем утверждать, что такого рода оборот речи имеет здесь точно такой же *смысл,* как и в применении к *конечным* совокупностям, допускающим пересмотр всех своих элементов. Для выяснения смысла утверждения об отсутствии нулей необходимо поэтому рассмотреть это утверждение с генетической точки зрения, проследив, каким путем оно может быть получено.

Исходным пунктом в доказательстве такого утверждения, если бы оно было установлено, являлась бы та система предложений, которой определено число π. Когда мы говорим об определенном процессе получения цифр числа π, мы как раз и имеем в виду то обстоятельство, что закон следования этих цифр друг за другом однозначно устанавливается некоторой конечной системой предложений, служащих определением числа π. Доказать, что нулей нет, значит, таким образом, *вывести это предложение* путем конечного числа умозаключений *из определения числа* π.

Можно поэтому сказать, что *фактическое финитное содержание* утверждения „нулей нет" заключается в установлении *некоторого свойства системы предложений, определяющих число* π.

Став на такую точку зрения, мы приходим к совершенно естественному объяснению того, что отрицание общего предложения и соответствующее содержательное финитное утверждение для открытых совокупностей не совпадают между собой и имеют различное смысловое значение.

Действительно, финитное содержательное суждение „нули есть" имеет, как было указано выше, тот смысл, что *нули должны встретиться, когда разложение будет доведено до определенного места;* суждение „нулей нет" имеет финитный смысл: *предложение „нулей нет" вытекает из посылок, определяющих число* π.

Эти два суждения не находятся друг по отношению к другу в отношении утверждения и отрицания. Они не совместны, но *из отрицания факта, формулированного в первом положении, не вытекает утверждение второго.* Если не найдено одиннадцати нулей, то это нисколько не противоречит возможности, что общее предложение „нулей нет" *останется,* вообще, *недоказанным.*

Обратно, *отрицание факта, формулированного во втором положении, не есть утверждение первого:* если предложение об отсутствии нулей не доказано, то отсюда не следует существование нулей в том смысле слова, который подразумевается в первом суждении. (Мало того, если даже общее предложение, выражающее некоторое свойство цифр числа приведено к противоречию с помощью применения закона исключенного третьего *в его классической форме,* то и это обстоятельство неравносильно по смыслу соответствующему содержательному утверждению, как мы это видели выше на примере числа $\sqrt{2}$.)

Таким образом, в рассматриваемом нами примере налицо как раз *фактическая возможность* того третьего положения (tertium интуиционистов), которая исключается законом исключенного третьего в его классической формулировке: „одиннадцать нулей под ряд либо существуют, либо не существуют". С точки зрения финитного содержания суждений у нас нет оснований утверждать, что такая формулировка имеет тот же смысл, что и соответствующее утверждение относительно конечных множеств. Здесь как раз возможно *фактическое* наличие третьего: неверно первое (не доказано, что нули есть) и неверно второе (не доказано, что их нет). При этом у нас нет в распоряжении никакого общего метода, аналогичного указанию на принципиальную возможность пересмотра всех элементов конечных совокупностей, который давал бы основания утверждать, что фактическое наличие tertium в математике всегда имеет временный характер и что все проблемы такого типа („существует или не существует" по отношению к открытым совокупностям) *принципиально разрешимы* в ту или иную сторону.

Между тем для классической математики, основанной на законе исключенного третьего, как раз и характерно такое обращение с бесконечными множествами, при котором они рассматриваются как вполне заданные, законченные, лежащие в готовом виде перед исследователем и допускающие, если не фактически, то принципиально тот же *пересмотр всех элементов,* как и конечные множества. Как раз такого рода экстраполяция классической логики, выражающей свойства конечных множеств и относящихся к ним суждений, на открытые бесконечные множества и признается интуиционистами *незаконной.*

Как бы ни относиться к крайним выводам, вытекающим из такой точки зрения, нельзя отказаться от методологического анализа смыслового значения тех построений, которые основаны на применении закона исключенного третьего в его классической форме к бесконечным совокупностям.

Отметим один из результатов в этом направлении, полученный советскими математиками Колмогоровым и Гливенко для довольно широкой области предложений: если с помощью классической логики доказано некоторое предложение, то в финитной интуиционистской математике верно его двойное отрицание. Поясним это на примере, приведенном на странице 33. Полученное с помощью закона исключенного третьего суждение о наличии нарушения периодичности в цифрах числа $\sqrt{2}$ соответствует следующему финитному суждению: невозможно доказать отсутствие нарушения периодичности. Это предложение действительно непосредственно связано с тем фактом, который установлен классическим доказательством иррациональности числа $\sqrt{2}$; для „снятия двойного отрицания", т. е. доказательства возможности установления нарушения конечным числом испытаний, необходимо добавочное исследование.

4. Подчеркнутое нами выше финитное значение общих предложений об открытых совокупностях, как выражения свойств тех *законов,* которыми эти совокупности определены, лежит в основе широко задуманного плана Гильберта обосновать применение законов классической логики и, в частности, закона исключенного третьего по отношению к бесконечным совокупностям путем доказательства *формальной непротиворечивости* соответствующих построений.

Направление Гильберта и его школы, известное под названием **формализма,** принимает критерий формальной непротиворечивости в качестве определения понятия „существования" в математике и в качестве критерия принятия или непринятия того или иного математического построения.

Отказываясь, в согласии с интуиционистской критикой, от непосредственного, наивного рассмотрения бесконечных множеств наравне с конечными, Гильберт переносит вопрос в другую плоскость, рассматривая *свойства законов,* определяющих множества, *и умозаключений,* которые делаются из этих законов по правилам классической логики. Другими словами, объектом финитного рассмотрения здесь являются *конечная* система предложений, фиксирующих исходные аксиомы, включая и классические законы логики, и *конечные* системы предложений, представляющие то или иное математическое доказательство.

Вспомогательным аппаратом в этой области исследований, названной Гильбертом **„метаматематикой"**, служит так называемая *формализованная* или *символическая логика.*

В этой последней логические суждения, записанные с помощью особых знаков для логических терминов „и", „или",

„включается“, „следует“, „все“, „существует“ и т. п., изучаются с точки зрения их *внешней структуры* при полном отвлечении от их смыслового значения в отношении первоначальной системы удовлетворяющих этим суждениям объектов. Доказательству или выводу соответствует в такой записи получение из одних конфигураций символов других по чисто внешним правилам подстановки или замещения одной группы знаков другой.

Классическому математическому доказательству, основанному на наивном представлении о возможности пересмотреть все элементы бесконечной совокупности, соответствует в символической записи некоторая конечная конфигурация символов, полученная финитным путем из исходных посылок. Эту возможность *финитного рассмотрения в области метаматематики* доказательств, содержание которых по отношению к *первоначальной системе объектов выходит за пределы финитного*, Гильберт и предполагал использовать для доказательства непротиворечивости соответствующих построений, опираясь на то, что в области метаматематики непротиворечивость обнаруживается как чисто внешнее свойство конфигураций знаков, изображающих математическое доказательство.

Как мы уже упоминали в § 1, попытки Гильберта не увенчались успехом, и есть все основания думать, что вопрос о взаимоотношении содержательных и формальных методов в математических построениях не может быть решен этим путем.

5. Методологические проблемы, возникшие в связи с интуиционистской критикой, находятся и сейчас еще в стадии разработки.

В частности, и вопрос об обосновании арифметики, связанный с изучением основной для математики бесконечной совокупности натуральных чисел, не может быть даже правильно поставлен вне зависимости от разрешения указанных здесь методологических задач общего характера.

Отсылая читателя, интересующегося подробностями, к указанному на странице 17 сборнику [см. также Гейтинг (Heyting), Обзор исследований по основаниям математики], вернемся к теме начала настоящего параграфа.

Так как класс конечных множеств представляет собой открытую совокупность, то все перечисленные выше обстоятельства обязывают с особой внимательностью отнестись к определению того, *какой смысл* вкладывается в утверждение „*все* конечные множества или *все* классы конечных множеств обладают таким-то свойством“.

Если оставить в стороне общие свойства множеств вообще, то *установление в общем виде специфических свойств конечных множеств фактически всегда основывается на непосредственно или косвенном применении принципа полной индукции.*

С финитной точки зрения можно поэтому принцип полной индукции в той форме, в какой он дан на странице 31, считать определением того, какой фактический смысл следует приписать фразе: „суждение S верно для *всех* классов конечных множеств“.

Эту точку зрения легче всего уяснить себе, если поставить вопрос: как конкретно *проверить* справедливость какого-либо утверждения этого типа относительно *всех* классов конечных множеств? Всякая система множеств, которая *уже построена* и для которой можно провести соответствующий контроль, включает, очевидно, лишь множества *до какого-то определенного класса,* являющегося в этой системе построенных множеств наивысшим. Если мы не наткнемся в ней на противоречие, то проведение контроля в этой системе может только дать некоторое субъективное убеждение в том, что исследуемое предложение, вероятно-де, верно вообще. Однако никто не согласится признать такой контроль *исчерпывающим* и эквивалентным общему доказательству этого предложения, даже если построенных или так или иначе конкретно заданных множеств более высокого класса не существует.

Таким образом, мы видим, что общие предложения данного типа мы рассматриваем как имеющие характер *предсказания* по отношению к множествам, которые могут быть фактически построены, только поскольку они доказаны *с помощью принципа полной индукции.*

В построении соответствующей логической теории конечных множеств это обстоятельство и сказывается в том, что принцип полной индукции включается в определение класса конечных множеств.

С финитной точки зрения (см. выше стр. 34) общие высказывания о всех конечных множествах являются поэтому выражением соответствующих свойств системы положений 1 и 2 § 12.

В силу соображений, изложенных в § 13, всякое такое высказывание, установленное применением принципа полной индукции, *находит свое отражение в свойствах конечных множеств,* которые уже построены или могут быть построены. С финитной точки зрения следует, однако, остерегаться отождествлять это положение с тем, которое имеет место для высказываний о всех элементах класса, содержащего конечное число элементов, так как класс конечных множеств является открытой совокупностью. В частности, относительно дизъюнкции: либо все натуральные числа обладают некоторым свойством, либо существует натуральное число, не обладающее этим свойством, можно повторить все то, что было сказано выше относительно вопроса о цифрах числа π. Характерным примером доказательства существования натурального числа, не включающего финитной конструкции, могут служить рассуждения конца § 109 гл. XIII.

§ 15. Свойства конечных множеств и системы конечных количественных чисел.

1. Теорема 1. *Конечное множество не может быть равномощно своей правильной части.*

Доказательство. Для множеств класса 1 это очевидно, так как такие множества не имеют правильных (т. е. не совпадающих с самим множеством) частей.

Пусть доказываемое положение установлено для множеств класса n.

Всякое множество $B_{n'}$ следующего класса n' по определению § 11 можно рассматривать как сумму некоторого множества B_n класса n и еще одного элемента α.

Допустим, что $B_{n'} \sim A$, где $A \subset B_n$, есть правильная часть $B_{n'}$. Так как α не содержится в A, то, исключив α из $B_{n'}$, а соответствующий α элемент α_1 из A и сохраняя тот же закон соответствия, мы найдем для остатка A_1 множества A, что $A_1 \sim B_n$ и $A_1 \subset B_n$, что по допущению для множеств класса n влечет за собой тождественное совпадение A_1 с B_n. Это, однако, невозможно, так как A_1 не содержит элемента α_1, входящего в B_n.

Если же $\alpha \subset A$, то пусть β есть элемент $B_{n'}$, не содержащийся в A. Рассмотрев правильную часть A' множества $B_{n'}$, получающуюся из A заменой элемента α из A элементом β с сохранением прежнего закона соответствия, мы придем к предыдущему случаю.

Теорема, таким образом, доказана методом полной индукции.

Отсюда непосредственно вытекает такой положительный признак множеств, не входящих в систему всех конечных множеств и носящих, в соответствии с этим, название **бесконечных** множеств:

Теорема 2. *Если возможно установить взаимно-однозначное соответствие между некоторым множеством M и его правильной частью, то множество M есть бесконечное множество.*

Этот принцип бесконечности множества был принят Дедекиндом за *определение* самого понятия „*бесконечное множество*“. Определением конечности в этом случае служило бы утверждение теоремы 1. Не станем повторять по этому поводу замечаний на странице 30.

Нетрудно видеть, что обнаруженное нами в § 9 отклонение законов операций над трансфинитными числами от законов обычной арифметики обусловлены *именно этим свойством* бесконечных множеств.

Теорема 1 настоящего параграфа показывает, таким образом, что определения § 12 действительно достигают своей цели выделения интересующей нас системы конечных множеств из слишком широкого для арифметики класса множеств вообще.

2. Теорема 3. *Если классы (количественные числа) k и l различны, то и следующие за ними классы (количественные числа) k' и l' различны.*

Действительно, пусть множества $A_{k'}$ и $A_{l'}$ классов k' и l' равномощны, т. е. $A_{k'} \sim A_{l'}$. Рассмотрим $A_{k'}$ как сумму A_k и элемента α, $A_{l'}$ как сумму A_l и элемента β.

Если в указанном соответствии α соответствует β, то $A_k \sim A_l$, что невозможно по условию.

Если нет, то пусть α соответствует β', а β соответствует α'. Изменим закон соответствия, отнеся α элементу β, а α' — элементу β'. Этим положение сводится к предыдущему случаю.

Аналогичная теорема относительно *предшествующих* классов очевидна.

Теорема 4. *В ряду последовательных классов конечных множеств (конечных количественных чисел) нет совпадающих классов.*

Доказательство. Класс **1** отличен от класса **2** и всякого конечного класса n', в построении которого применена операция присоединения элемента, так как согласно определению 2 § 11 множество, состоящее из одного элемента, есть правильная часть всякого такого класса.

Допустим, что предложение доказано для системы всех классов до n включительно. Совпадение класса n' с одним из предыдущих (отличных, по доказанному от первого класса) влекло бы за собой, согласно теореме 3, совпадение n-го класса с одним из предыдущих, что по допущению невозможно.

Доказанное свойство системы последовательно определяемых конечных классов находится в непосредственной связи с утверждением теоремы 1. Поясним несколько подробнее характер этой связи, переходя от логических рассуждений к конкретному рассмотрению процесса определения класса множества (§ 11).

Пусть в этом процессе мы остановимся на „какой-либо промежуточной стадии" разложения исследуемого конечного множества A_n на сумму некоторого подмножества A одного из предыдущих классов и дополнительных, еще не рассмотренных элементов, образующих множество B. Из теоремы 1 следует, что правильная часть A множества A_n не может быть равномощна множеству A. Последовательное определение классов конечных множеств, согласно с определением § 11, не может, таким образом, ни на какой стадии процесса привести к совпадающим классам.

В частности, отсюда следует, что *одно и то же множество не может оказаться при различных способах перебирания его элементов причисленным к различным классам: класс множества определяется однозначно.*

На это положение, являющееся лишь другим выражением доказанной выше невозможности установить взаимно-однозначное соответствие между множеством и его правильной частью, обратил особое внимание Гельмгольц (Helmholtz), формулируя его как утверждение о *независимости числа элементов конечного множества от порядка счета.*

В вопросах обоснования арифметики это положение играет важную роль, обусловливая *однозначное расположение конечных количественных чисел по величине,* к установлению которого мы и перейдем.

Теорема 5. *Всякие два конечных множества M и N либо равномощны между собой, либо одно из них равномощно правильной части другого.*

Пусть N есть произвольное конечное множество. Докажем теорему, проводя индукцию относительно класса множества M.

Если M множество класса **1**, то оно равномощно с множеством класса **1** и равномощно правильной части множеств других классов, по самому определению этих последних.

Пусть для множеств M до n-го класса включительно теорема доказана.

Рассмотрим множество $M_{n'}$ следующего класса как сумму множества M_n класса n и элемента α.

Если множество N равномощно с частью множества M_n, то оно равномощно с правильной частью $M_{n'}$.

Если же правильная часть N_1 множества N равномощна с множеством M_n, то возможны два случая:

либо в разложении множества N на сумму его части N_1 и дополнительного множества N_2 это последнее принадлежит классу **1**, т. е. состоит из одного элемента β;

либо, если N_2 не принадлежит к классу **1**, то оно может быть представлено как сумма множества N_3 (не пустого) и множества, состоящего из одного элемента β.

Поставив элемент β множества N в соответствие с элементом α множества $M_{n'}$, мы получим в первом случае $M_{n'} \sim N$, а во втором — $M_{n'}$ окажется равномощным с правильной частью (состоящей из N_1 и элемента β) множества N.

Теорема, таким образом, доказана.

Если в области *конечных* множеств мы условимся говорить, что *мощность* одного множества M **меньше** *мощности* другого N (а *мощность* N **больше** *мощности* M) в том случае, когда M *равномощно правильной части* N, то в силу предыдущей теоремы *всякие два конечных множества сравнимы между собой в отношении их мощности.*

Понятие „меньше“ в отношении мощности конечных классов обладает при этом формальным свойством, известным под названием **транзитивности:**

Теорема 6. *Если мощность множества A меньше мощности множества B, а эта последняя меньше мощности множества C, то мощность множества A меньше мощности множества C.*

Для доказательства достаточно заметить, что, поставив в соответствие элементам A те элементы C, которые соответствуют элементам равномощной с A части множества B, мы тем самым осуществляем взаимно однозначное отображение множества A на правильную часть множества C.

Сопоставляя это с тем, что при образовании следующего за данным класса равномощных множеств путем присоединения одного элемента, мы в соответствии с только что принятым определением переходим от меньшей мощности к большей, мы можем сказать, что при определенном в § 11 последовательном построении классов равномощных множеств эти классы строятся в порядке *возрастающей мощности:* мощность каждого класса *больше* мощности каждого из ему предшествующих

Приняв соответствующее

Определение. *Количественно число* m *меньше или больше количественного числа* n *в зависимости от того, в каком из этих двух отношении находятся мощности соответствующих этим числам классов,* мы можем сказать, что в определенной процессом § 11 последовательности количественных чисел

$$1, 2, 3, \ldots$$

количественные числа располагаются в порядке возрастания.

Теоремы 4, 5 и 6 настоящего параграфа выражают, таким образом, следующие свойства понятий „равно", „больше" или „меньше" для количественных чисел.

1) *Для всяких двух количественных чисел* m *и* n *имеет место одно* из трех соотношений $m<n$, $m>n$, $m=n$.

2) Каждое из этих соотношений *исключает два остальных.*

3) Если $m<n$ и $n<p$, то $m<p$.

4) Если $m<n$, то $n>m$.

На значении этих свойств, определяющих так называемое **скалярное расположение** системы количественных чисел, мы подробно остановимся впоследствии, когда будем говорить о понятии *скалярной величины* вообще.

3. Докажем еще две теоремы относительно конечных множеств.

Теорема 7. *Всякая часть конечного множества есть конечное множество.*

Для множеств классов 1 и 2 это очевидно.

Пусть теорема доказана для множеств класса n.

Рассмотрим множество $A_{n'}$ следующего класса как сумму множества A_n класса n и элемента a.

Пусть A какая-либо часть множества $A_{n'}$. Поступая так же, как в доказательстве теоремы 1, мы убеждаемся в том, что A либо есть часть множества A_n, либо равномощна с некоторой его частью. В обоих случаях из допущения следует, что A есть конечное множество.

Теорема 8. *Сумма конечного множества конечных множеств есть конечное множество. При этом класс суммы не „пустых" множеств* (см. n° 4 настоящего параграфа) *выше класса каждого из слагаемых.*

Доказательство проводится, в соответствии с текстом теоремы, путем двойной индукции: относительно *числа* слагаемых *множеств* и относительно *числа элементов* в одном из слагаемых множеств (для случая двух слагаемых).

Проведем это.

Множество, получаемое путем присоединения множества класса 1 к конечному множеству A, есть, согласно определению, конечное множество.

Допуская, что сумма конечного множества A и конечного множества B_n класса n есть конечное множество, мы найдем, что сумма A и множества $B_{n'}$, получаемого из B_n прибавлением одного элемента a, получается из суммы A и B_n той же операцией, т. е. приводит нас к конечному множеству.

Таким образом, сумма любых двух конечных множеств есть конечное множество.

Если допустить теперь, что сумма S некоторого числа m множеств есть конечное множество, то, пользуясь сочетательным свойством суммы (§ 8), мы можем рассматривать сумму $(m+1)$ множеств как сумму двух конечных множеств: только что упомянутого S и $(m+1)$-го прибавляемого множества.

Этим проведена индукция по отношению к числу слагаемых множеств и теорема доказана полностью, так как заключение о классе суммы очевидно.

Предоставляем читателю доказать аналогичные теоремы для операций умножения и возвышения в степень конечных количественных чисел.

4. Число нуль. Введя в рассмотрение так называемое **пустое** множество, не содержащее никакого элемента, мы можем условиться класс этого множества, не совпадающий ни с одним из определенных выше классов, обозначать новым количественным числом **нуль.** В соответствии с определением операции присоединения одного элемента количественное число 0 можно рассматривать как предшествующее 1 в натуральном ряду. В этом смысле говорят, что нуль *меньше* всякого другого количественного числа. В соответствии с определением операции сложения естественно принять $n+0=n$ и $0+n=n$ каково бы ни было натуральное число n. Определенче остальных операций над числом 0 также носит чисто условный характер, и мы рассмотрим этот вопрос в другом месте (§ 22).

Этим и заканчивается по существу построение *теории количественных чисел* как *системы классов конечных множеств.*

На основе принятого в § 12 определения конечности мы установили здесь *расположение* количественных чисел в порядке возрастания. Тем самым исключены соотношения, рассмотренные в § 9, могущие иметь место лишь для трансфинитных количественных чисел: для конечных количественных чисел сумма двух таких чисел есть, как мы видели, конечное количественное число, *большее каждого из слагаемых* (если среди них нет нуля). Аналогичные теоремы имеют место и в отношении остальных операций.

Дальнейшее развитие арифметики на основании установленных свойств конечных количественных чисел представляет уже совершенно элементарную задачу, на которой мы не останавливаемся, переходя в § 19 к рассмотрению теории натурального ряда с иной, более абстрактной точки зрения, принадлежащей Грассману.

Прежде чем перейти к этой теории, рассмотрим еще **один** вопрос первостепенного принципиального значения.

§ 16. Натуральный ряд как бесконечная совокупность.

Поставив в соответствие каждому классу конечных множеств следующий за ним класс (т. е. классу **1** — класс **2**, классу **2** — класс **3**, вообще классу n — класс n'), мы тем самым устанавливаем *взаимно однозначное соответствие* между системой классов

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

и ее *правильной* частью

$$2, 3, 4, 5,$$

Таким образом, в силу теоремы 2 § 15, совокупность всех классов конечных множеств, или, что то же, *совокупность всех конечных количественных чисел, есть бесконечное множество*.

Непосредственный смысл этого утверждения заключается, как видно из приведенного здесь доказательства, как раз в возможности установить указанный закон соответствия. Это обстоятельство выражает, таким образом, некоторое свойство системы определений § 11, характеризующих *процесс* построения последовательных классов количественных чисел (ср. также § 14).

Аналогично и суждение о возможности „для всякого класса конечных множеств рассматривать класс непосредственно высший“ выражает соответствующее свойство структуры системы определений § 11 [определение 3, стр. 29]. Мы выходим за пределы финитных (см. § 14) предложений, позволяя себе говорить о том, что утверждаемое этим суждением положение вещей *осуществлено* в системе конечных множеств, так как такой системы в *законченном* виде не существует.

С генетической точки зрения иногда рассматривают суждение „ко всякому конечному множеству можно присоединить еще один элемент“ как *результат идеализации практического опыта, относящегося к конкретным конечным множествам*.

Следует, однако, иметь в виду, что во многих случаях, когда это суждение применяется в математическом доказательстве, это последнее можно рассматривать само по себе как *осуществление построения нужного числа* (или описание того, как такое число построить).

Так, например, в рамках арифметических рассуждений фактический смысл фразы „дано число n, рассмотрим следующее за ним число $n+1$ “заключается в том, что мы имеем в виду делать логические выводы из посылок, определяющих число n, и определения 3 страницы 29, § 11.

Присоединение этой новой посылки к тем положениям типа 1 и 2 § 11, которые определяют число n, если оно вполне задано, есть действие, равносильное *построению множества* (если угодно, можно говорить здесь о множестве посылок типа 1 и 2 § 11) *с числом элементов, на единицу большим*.

Мы можем поэтому не говорить заранее о возможности или невозможности такого построения, принимая, что в тех случаях, когда этот вопрос в рамках арифметики может быть поставлен, он разрешается тем, что такое построение фактически (в указанном выше принципиальном смысле слова) совершается.

Имея в виду то направление методологической критики, которому мы посвятили § 14, следует отметить, что исследование смысла суждений, относящихся к системе натуральных чисел, имеет первостепенное принципиальное значение, так как эта система представляет собой *первое, исходное для дальнейших построений бесконечное множество,* заданное определенным законом последовательного построения его элементов.

Принимая за данное множество натуральных чисел и позволяя себе говорить о *всех* его элементах, т. е. о *всех* конечных количественных числах, о *любом* натуральном числе и т. д., можно затем строить новые бесконечные множества, в простейшем случае последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

задавая *закон,* которым по *каждому* натуральному числу n *определяется* соответствующий элемент a_n построяемого множества.

Согласно упомянутой уже в § 14 точке зрения, утверждения, относящиеся к элементам такого рода открытых совокупностей, можно рассматривать как свойства соответствующих *законов* их определения (например той системы предложений, которой устанавливается соответствие между натуральным числом n и элементом a_n). Основным таким законом для самого натурального ряда чисел являются рассматриваемые ниже (§ 17) свойства 1—4.

Дальнейшие построения в области теории множеств все более и более усложняют взаимоотношение между фактическим смыслом суждений об элементах бесконечных совокупностей и теми представлениями, которые мы с ними связываем, употребляя термины „все" и „существует" в обычном смысле слова.

С этой точки зрения и содержание арифметических положений, основанных на неограниченном применении к натуральному ряду чисел суждений этого типа, *выходит за пределы простейшего элементарного опыта, относящегося к конкретным конечным множествам.* В связи с этим приобретает особую остроту и вопрос о *непротиворечивости системы аксиом арифметики.*

До получения достаточно удовлетворительного ответа на указанные в § 14 общие вопросы методологического порядка приходится причислять к числу ждущих своего разрешения проблем и вопрос об обосновании арифметики, связанный с построением основной для математики *бесконечной совокупности* натуральных чисел.

ГЛАВА II.

ПОРЯДКОВОЕ НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО.

§ 17. Аксиоматика натурального ряда. Система аксиом Пеано.

1. В предыдущих параграфах мы установили следующие основные свойства классов конечных количественных чисел:

Класс множеств, состоящих из одного элемента, есть класс наименьшей мощности (§ 15, теорема 4).

Всякому классу конечных множеств можно поставить в соответствие класс непосредственно следующей большей мощности (§ 11, определение 3 и § 16).

Все классы, кроме первого, определяются как следующие за непосредственно предшествующим классом (§ 11, определение 3). При этом, *если классы* k и l *различны, то и следующие за ними классы различны и наоборот* (§ 15, теорема 3).

Если предложение S доказано для первого класса и если из допущения, что оно верно для n-го класса, следует, что оно верно для следующего класса n', то мы говорим, что оно верно для всех классов конечных множеств (§ 13).

Формулируем эти положения как свойства натурального ряда чисел 1, 2, 3, ...

1. *Единица есть натуральное число, не следующее ни за каким натуральным числом.*

2. *Всякому натуральному числу n однозначно соответствует непосредственно следующее за ним натуральное число n'.*

3. *Всякое натуральное число n, за исключением единицы, непосредственно следует за одним и только одним натуральным числом.*

4. *Если предложение S доказано для единицы и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, следует, что оно верно для непосредственно следующего натурального числа n', то предложение S верно для всех натуральных чисел.*

Только что перечисленные четыре *свойства системы натуральных чисел,* как мы подробно покажем в ближайших параграфах, *оказываются достаточным базисом* для установления *независимо от теории конечных множеств* основных определений и вывода всех положений арифметики уже чисто дедуктивным путем.

Это обстоятельство играет фундаментальную роль в теоре тической арифметике. Оно показывает, что, формулировав указанные четыре положения как результат обобщения опыта, относящегося к конечным совокупностям, мы можем перейти на следующую ступень абстракции, отвлекаясь от первоначально присущего натуральному числу значения количественной характеристики класса равномощных множеств и опираясь лишь на тот факт, что *система натуральных чисел представляет собой ряд*

$$1, 2, 3, \ldots,$$

возникающий в результате последовательного построения ***из первого элемента*** 1 с *помощью отношения* ***„непосредственного следования за“*** *все новых и новых, по определению, отличных друг от друга элементов.*

Этому конкретному описанию процесса построения элементов натурального ряда соответствует в качестве *исчерпывающей логической характеристики система положений* 1—4, *вполне определяющая структуру и основные свойства натурального ряда*

$$1, 2, 3, \ldots$$

Все взаимоотношения между числами являются, другими словами, следствиями этих четырех положений, которые можно, таким образом, рассматривать как систему *определений* или *аксиом арифметики,* определяющих в достаточной для дальнейших построений мере формальный смысл входящих в эти определения трех терминов: **„единица“**, **„натуральное число“** и **„непосредственно следующее за“.**

Систему положений 1—4 мы будем называть **системой аксиом Пеано.**

Примечание. Принятая Пеано система аксиом лишь по форме отличается от приведенной. Дословный текст пяти аксиом Пеано таков: 1) „0 есть натуральное число“; 2) „следующее за натуральным числом есть натуральное число“; 3) „0 не следует ни за каким натуральным числом“; 4) „всякое натуральное число следует только за одним натуральным числом“; 5) аксиома полной индукции. То, что первый элемент системы здесь 0, а не 1, не имеет принципиального значения.

2. Для лучшего уяснения постановки вопроса целесообразно будет охарактеризовать соответствующую теорию как теорию **порядкового** числа в смысле Грассмана, в отличие от изложенной теории количественного числа в смысле Кантора.

С этой точки зрения на систему чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

следует смотреть как на последовательность некоторых знаков, *каждый из которых определяется своим положением в ряду этих знаков* и никакого другого смысла не имеет.

Можно было бы писать

$$\text{I, II, III, IV, V}, \ldots,$$

или

$$a, b, c, d, e, \ldots,$$

или $\square$, $\wedge$, $\bigcirc$,

или III, 9, $\wedge$ $\bigcirc$, b, ..

Приводя такие примеры различных обозначений, мы хотим подчеркнуть, что во всех этих случаях мы отвлекаемся от значения II или 9 как цифры, b — как буквы, $\triangle$ — как фигуры и 2 — как количественного числа. Во всех этих случаях это лишь *знак элемента последовательности, следующего за тем элементом, который ни за каким не следует.*

В этом смысле мы и будем говорить, что каждый из этих знаков имеет *порядковый* смысл, и никакого количественного значения ему не приписывается. Эта роль чисел как системы знаков, следующих друг за другом в зафиксированном порядке, была нами уже отмечена ранее при описании процесса счета (§ 7).

В наглядной схеме расположения элементов последовательности в *строчку* соотношение, выражаемое словами „элемент такой-то следует за таким-то“ осуществлено как пространственное взаимное расположение употребляемых для обозначения элементов знаков — один знак расположен *справа* от другого, *рядом* с ним.

В логических построениях, к которым мы приступаем, нельзя приписывать соотношению „непосредственно следует за“ какой-либо узкий конкретный смысл. Можно опираться лишь на ту *логическую связь, которая имеется между этим соотношением и построением нашей системы знаков.*

Эта связь исчерпывающим образом устанавливается положениями 1—4 настоящего параграфа, которые мы в этом именно смысле и рассматриваем, как **совместное определение** терминов „единица“, „непосредственно следует за“ и „натуральное число“.

Для совершенно отчетливого уяснения того обстоятельства, что здесь речь идет именно о *взаимной связи* этих терминов, а не о каком-либо определенном их конкретном смысле, применим следующий прием.

Покажем, что система положений 1—4 может быть удовлетворена, если дать терминам „натуральное число“, „непосредственно следует за“ и „единица“ *иную интерпретацию, иной конкретный смысл,* нежели тот, который они имели в рамках изложенной теории количественного числа.

§ 18. Различные интерпретации системы аксиом Пеано.

Возможность различных интерпретаций одних и тех же терминов сопровождает, вообще, всякий переход на более высокую ступень абстракции. Так, уже в теории количественных чисел соотношение, например, $5+7=12$ допускает различные интерпретации на различного рода конкретных множествах. То же свойство присуще и более сложным математическим построениям.

1. Системе аксиом геометрии на плоскости, устанавливающей *связь между терминами* „точка“, „прямая“, „пересекает“, „лежит на“, можно удовлетворить, принимая следующие интерпретации этих понятий, лишенные уже обычного конкретного геометрического смысла:

„*точка*“: система двух чисел a, b,

„*прямая*“: совокупность пар чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $Ax+By+C=0$, где A, B, C — заданные числа, причем $A^2+B^2>0$,

„точка *лежит на* прямой“ или „прямая *проходит через* точку“: система значений $x=a$ и $y=b$ удовлетворяет уравнению $Ax+By+C=0$.

При такой интерпретации основные аксиомы геометрии на плоскости будут удовлетворены, всякое утверждение относиельно взаимного расположения прямых и точек будет иметь, однако, некоторый аналитический смысл определенного высказывания об уравнениях и удовлетворяющих им числах. Мы говорим, что и здесь мы занимаемся „геометрией“, поскольку речь идет о *тех же самых взаимных связях* между изучаемыми объектами.

Укажем еще примеры иных возможных интерпретаций тех же терминов.

„*Точки*“: окружности плоскости раз навсегда определенного радиуса r;

„*прямая*“: совокупность двух параллельных со взаимным расстоянием r;

„точка *лежит на* прямой“ или „прямая *проходит через* точку“: окружность касается обеих параллельных, о которых шла речь только что.

Этого типа интерпретация геометрии пространственных точек и прямых подробно рассмотрена во втором томе „Энциклопедии элементарной математики“ Вебера и Вельштейна. Точки интерпретируются там как сферы, а прямые как бесконечные цилиндры того же радиуса.

В некоторых вопросах начертательной геометрии применялся следующий прием для изображения на плоскости пространственных образов. Точка с декартовыми координатами x, y, z изображалась на плоскости окружностью с центром в точке x, y и радиусом z. Прямые изображались соответственно семействами таких окружностей, вообще говоря, переменного радиуса или, что то же, парами прямых, являющимися огибающими таких семейств окружностей; условие „точка лежит на прямой“ интерпретируется и здесь как касание.

2. Еще один пример. Пусть формальные свойства знаков $+$, $\cdot$, $\wedge$, $\vee$, $=$ и черточки над буквой определяются следующей системой аксиом L:

$a=a$; если $a=b$, то $b=a$;
если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$;
$a \cdot a=a$; $a+a=a$; $a+b=b+a$; $a \cdot b=b \cdot a$;

$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c;\ a\cdot\bar{a}=\wedge;\ a+\bar{a}=\ \ ;\ a\cdot\wedge=\wedge;$$
$$a+\wedge=a;\ a\cdot\vee=a;\ a+\vee=\vee;\ \bar{\wedge}=\vee.$$

Рассмотрим возможные интерпретации этой системы аксиом. Пусть при этом знак равенства „=“ имеет обычный смысл.

1) Пусть буквы могут иметь значения α и β, где α и β — два какие-либо числа, причем $\alpha<\beta$. $\wedge$ пусть означает α; $\vee$ — означает β; $a\cdot b$ — наименьшее (не большее) из двух чисел a и b; $a+b$ — наибольшее (не меньшее) из двух чисел a и b; знак $\bar{a}$ — „другое“ число, т. е. α, если $a=\beta$, и β, если $a=\alpha$.

Легко убедиться, что все аксиомы выполнены. Аналогичную интерпретацию нетрудно построить для системы *нескольких* (а не только *двух*) чисел.

2) Пусть буквы обозначают области плоскости, $a\cdot b$ — общую часть a и b; $a+b$ — часть плоскости, включающую все точки a и все точки b, $\bar{a}$ — все точки *вне* a; $\vee$ — всю плоскость, $\wedge$ — несобственнную область, не содержащую ни одной точки (пустую). Аксиомы будут удовлетворены. Например, $(a+b)\cdot c=$ $=a\cdot c+b\cdot c$ выражает здесь тот факт, что соединение общей части a и c с общей частью b и c есть общая часть c и области, получающейся от объединения областей a и b.

3) Пусть, далее, буквы обозначают любые подмножества некоторого множества Q; $a\cdot b$ — общую часть a и b; $a+b$ — сумму a и b; $\vee$ — множество Q, $\wedge$ — пустое множество, $\bar{a}$ — все элементы Q, кроме вошедших в a. Эта интерпретация заключает предыдущую как частный случай и соответствует так называемой *„логике классов“*.

4) Пусть буквы означают суждения, знак $a=b$ — одновременную ложность или истинность суждений a и b; $\wedge$ — ложное, $\vee$ — истинное суждение, знак „+“ связку *„или“*, знак „·“ связку *„и“*, знак черточки — отрицание суждения.

Аксиомы удовлетворены. Связь определяемых терминов, ими устанавливаемая, соответствует, таким образом, известным *законам формальной логики* (*логики суждений* или предложений).

Имея в виду эту последнюю интерпретацию и используя *буквы* для обозначения предложений и дальнейших действий на основе системы аксиом L, мы переходим от содержательной интерпретации 4 к другой, в которой фиксируемые связи носят более *внешний* характер. В этой *буквенной интерпретации*, известной под названием „алгебры логики“, рассуждениям соответствует *выкладка*, в интерпретации 2 (принадлежащей Эйлеру) — рассмотрение *геометрических* объектов и их взаимного расположения. И тот и другой метод могут служить как для вывода следствий из какой-либо системы посылок, так и для контроля того, что в более содержательных интерпретациях 3 и 4 мы не совершили ошибки, сделав вывод на основании каких-либо случайных качественных особенностей объектов, а не на основании фиксированных аксиомами L формальных связей между ними (которые, ведь, и соответствуют законам логики). Эта буквенная интерпретация и была использована Гильбертом в его математических исследованиях (см. § 14, стр. 38).

3. Для нас здесь важно было лишь иллюстрировать следующее общее положение: общие, абстрактные построения, опирающиеся на систему аксиом L, имеют своим предметом изучения *взаимную связь* между определяемыми аксиомами L символами. Результаты будут верны для всякой интерпретации, в которой осуществлены связи той же формальной структуры.

Возможность различных качественных интерпретаций одних и тех же соотношений настолько характерна для математического метода, что в известном порядке идей эта возможность может быть положена в основу *определения предмета математики* как науки о таких взаимоотношениях действительности, которые допускают *различные качественные интерпретации* и могут поэтому быть названы, в философском смысле слова противоположения качественному, количественными соотношениями действительности.

В каждой ветви математики изучаемые количественные соотношения выделяются системой аксиом, устанавливающей те ***взаимные связи*** между основными понятиями данной дисциплины, которые и составляют ***предмет исследования.*** Говоря, что система аксиом, фиксирующая эти взаимные связи, является ***совместным определением основных понятий,*** мы хотим подчеркнуть, что все дальнейшие построения должны основываться на зафиксированной в аксиомах системе связей, а не на каких-либо добавочных случайных особенностях объектов. Этим требованием мы *закрепляем в качестве предмета изучения именно интересующие нас количественные соотношения* и обосновываем уверенность в том, что все выводы будут иметь место при любом конкретном истолковании аксиом.

Приведение примеров различных интерпретаций играет в отношении уяснения *значения аксиом как абстрактного выражения общих всем интерпретациям количественных связей* ту роль указаний типа „вот эта изучаемая связь“, „вот это тоже эта же связь“, „а вот это не эта связь“, о которых мы уже говорили выше в начале § 4.

4. Всякий закон построения некоторой бесконечной последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

может быть использован для построения соответствующей интерпретации системы аксиом Пеано. Приведем примеры.

I. Пусть 1) термин „*единица*“ означает: произвольное постоянное число a, большее 1;

2) термин „*непосредственно следует за*“ означает: „равно квадрату“;

3) „*натуральное число*“ означает: „степень числа a, показатель которой есть какая-либо целая неотрицательная степень двойки“.

Легко убедиться, что положения 1—4 при этом выполнены. „Первый“, т. е. не равный квадрату никакого другого элемента определенной таким образом совокупности, есть a. „Следующий“

за ним, согласно нашей интерпретации термина „следующий“, есть a^3, „следующий“ за этим a^4 и т. д.

II. Пусть 1) *„единица“* означает: данный отрезок AB;

2) *„непосредственно следует за“*: „равен половине“.

В этом случае *„система натуральных чисел“* будет иметь значение: „совокупность, состоящая из отрезка AB и всех его долей, получаемых при делении его на представляющее степень двойки число частей“.

III. Пусть 1) *„единица“* означает: „некоторый человек X“;

2) *„непосредственно следует за“*: „отец“.

Здесь мы определяем в качестве *„системы натуральных чисел“* совокупность, состоящую из X и всех его предков по мужской линии. Если допустить, что имена всех этих лиц различны, то можно было бы эти имена использовать для счета на совершенно равных правах с обычными числами (относительно введения арифметических операций см. следующие параграфы). Отметим только, что наше определение носит формальный характер и не стоит ни в какой связи с вопросом о реальном существовании определяемой совокупности (ср. § 16).

Наконец, когда мы просто определим последовательность каких-либо знаков

$$\Delta, \nabla, \ldots$$

по какому-либо закону, удовлетворяющему требованиям 1—4, то этим самым мы также осуществляем некоторую интерпретацию рассматриваемых понятий.

Можно сказать, что, кроме положений 1—4, в каждой такой интерпретации вводятся некоторые *добавочные*, в этом смысле слова *качественные* признаки определяемых объектов. В одной интерпретации это то, что эти объекты — буквы, в другой, что это такие-то числа или такие-то знаки.

Говоря, что мы имеем в виду *общее понятие о* ***порядковом натуральном числе,*** мы *отвлекаемся от этих добавочных признаков как несущественных,* требуя, чтобы все выводы делались *лишь на основе положений* 1—4.

Все такие выводы по отношению к терминам „единица“, „натуральное число“, „следующий за“ будут иметь место, в соответствующем истолковании, для элементов каждой из последовательностей, построенных путем различных интерпретаций этих терминов.

Это мы и выражаем, говоря, что понятие „порядковое натуральное число“, определяемое системой аксиом Пеано, есть не что иное, как *общее абстрактное понятие о порядковом месте элемента* в расположенных совокупностях некоторого определенного типа (*последовательностях*). При этом общая логическая характеристика того, совокупности какого именно типа имеются в виду, т. е. *характеристика понятия* ***последовательности,*** *и заключена в положениях* 1—4.

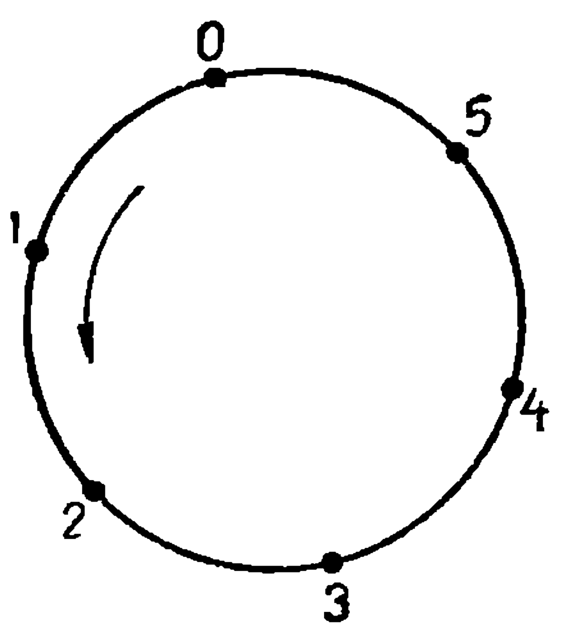
5. Для уяснения роли каждого из этих последних в этом отношении мы рассмотрим примеры расположенных совокупностей, удовлетворяющих *не всем четырем требованиям*. При этом отношение „следования“ мы будем в числовых примерах интерпретировать расположением „рядом справа“ или „рядом, в направлении стрелки“, не останавливаясь на соответствующей арифметической формулировке.

I. Вот множество („двусторонний ряд“)

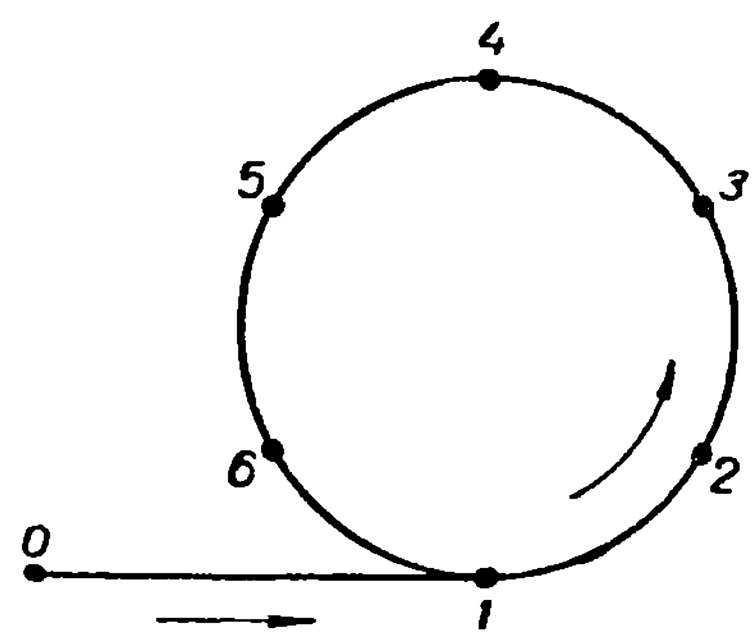
$$\ldots \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$$

Здесь не выполнена *первая* аксиома. В системе нет элемента, не следующего ни за каким, т. е. нет „единицы“ („нет элемента, играющего роль единицы в смысле определений 1—4“). Четвертая аксиома теряет в связи с этим смысл. Ее можно, однако, было бы заменить принципом „двусторонней“ индукции (см. § 23).

II. Круговое расположение (черт. 1): здесь также не выполнена *первая* аксиома. В связи с этим отпадает утверждение, соответствующее теореме 4 § 15.



Черт. 1.



Черт. 2

III. Множество 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Не выполнена *вторая* аксиома.

IV. $0, \ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Не выполняются *вторая* и *четвертая* аксиомы (нуль играет роль единицы).

V. Множество, изображенное на чертеже 2.

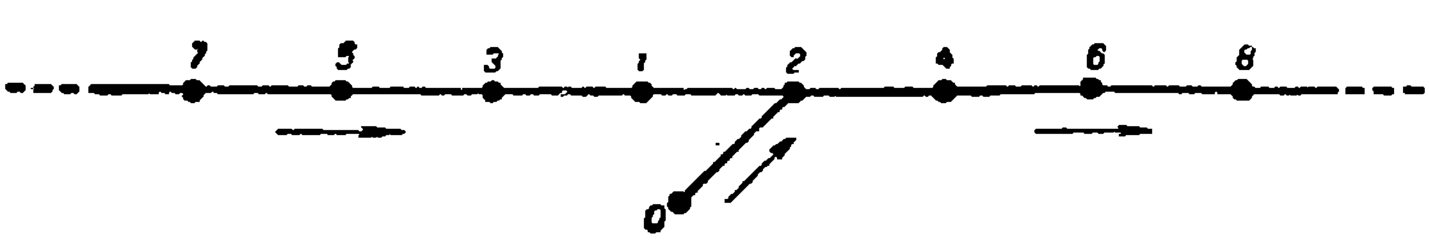
Не выполнена *третья* аксиома.

VI.

$$0, \begin{matrix} 1, 3, 5, 7, \ldots \\ 2, 4, 6, 8, \ldots \end{matrix} \quad \rightarrow$$

Не выполнена *вторая* аксиома.

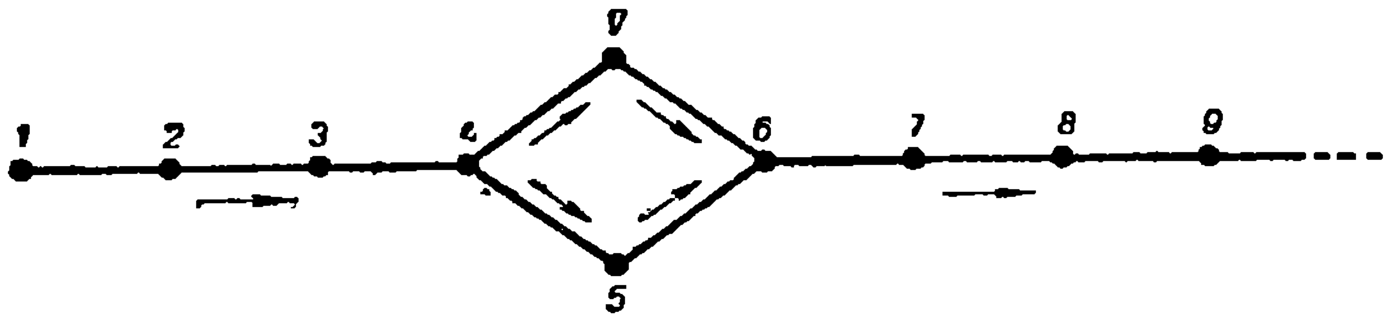
VII.



Черт. 3.

Нуль играет роль „единицы“. Не выполнены *третья и четвертая* аксиомы (нуль — четное число, если n — четное, то и следующее за ним четное; однако не все элементы четные).

VIII.



Черт. 4.

Здесь не выполнены *вторая* и *третья* аксиомы.

IX.

$$10,\ 100,\ 1000,\ \ldots,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\quad 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$$

Здесь не выполнена одна только *четвертая* аксиома. Первый член — 10, если n-ый — целая положительная степень 10-ти, то и следующий есть степень 10-ти; однако не все элементы суть степень десяти.

Обратим в связи с этим примером внимание читателя на роль принципа полной индукции в фиксировании смысла неопределенного выражения „и так далее“ в фразе „первый элемент, затем второй, затем третий и *так далее*“, грубо передающей идею последовательности, точной логической характеристикой которой и служит, как выясняется из примеров I—IX, система аксиом 1 — 4. В известной мере эти же примеры служат ответом на вопрос о взаимной независимости аксиом, на котором мы здесь останавливаться не будем.

6. Подчеркнем в заключение настоящего параграфа, что исходная интерпретация системы аксиом Пеано, в которой термины „единица“, „натуральное число“ и „непосредственно следует за“ имеют свой *обычный количественный смысл*, получается, в частности, если дать известные уже нам логические определения этих терминов:

1) „*единица*“: класс множеств M, состоящих из одного элемента, т. е. таких, что если a M и $b \subset M$, то a и b тождественны (стр. 28);

2) „*непосредственно следует за*“: „следующий“ в смысле определения 3 (§ 11, стр. 29) этого термина для классов, т. е. класс множеств, получающихся из множеств предыдущего класса присоединением множества, состоящего из одного элемента (определение 2 § 11);

3) „*система натуральных чисел*“ система классов конечных множеств.

Иногда сначала устанавливают систему аксиом 1—4, а затем дают приведенную здесь интерпретацию, сообщающую определяемым терминам их обычное количественное значение. Мы предпочли обратный путь как более естественный и более приспособленный для выяснения ряда методологических вопросов.

В связи с этим следует иметь в виду, что теоремы следующих параграфов, в которых мы займемся систематическим выведением следствий из аксиом 1—4, относясь к более абстрактной области учения о последовательностях и являясь в этом смысле более общими, *в своей количественной интерпретации* будут выражать лишь известные уже нам (§ 15) свойства конечных количественных чисел как классов конечных множеств.

§ 19. Метод индуктивных определений Грассмана.

Усвоивши основную для нас сейчас точку зрения на систему натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ... как на систему *порядковых* чисел, определяемую лишь положениями 1—4 § 17, читатель поймет, что дальнейшие построения наталкиваются на трудности, как только мы перейдем к определению *основных операций* над числами. В самом деле, каким образом, имея дело с последовательностью, скажем,

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots,$$

можно притти к заключению, что

$$b+c=e,$$

если b, c и e имеют лишь порядковый смысл, т. е. если при установлении указанного положения употребление этих знаков в *количественном* смысле методологически незаконно?

Предпошлем систематическому изложению теории Грассмана, изящным образом преодолевшего указанные трудности путем применения *метода индуктивных определений и доказательств*, следующий элементарный пример, поясняющий этот метод.

Пусть речь идет о сумме натуральных (количественных) чисел от 1 до n. Мы можем, конечно, написать

$$s_n=1+2+3+\ldots+n.$$

Однако в этой формуле имеется знак „$+\ldots+$“, имеющий *конкретный смысл*, передающийся лишь *словесным описанием*.

Попытаемся облечь определение числа s_n в такую форму, которая, не включая неопределенных символов типа „$+\ldots+$“, была бы по содержанию равносильна первоначальному определению.

С этой целью заметим, что, положив $s_1=1$, $s_2=1+2$, мы можем вместо слов „и так далее, $s_n=1+2+\ldots+n$“ указать *общий закон перехода* от суммы s_{n-1} к следующей — s_n, положив для любого $n\geqslant 2$

$$s_n=s_{n-1}+n.$$

Это равенство в соединении с

$$s_1=1$$

вполне определяет значение символа s_n для любого натурального числа n.

Такого рода определение значения s_n мы назовем **индуктивным** или **рекуррентным** определением.

Естественно, что и свойства суммы s_n придется доказывать *методом полной индукции*. Так, для доказательства формулы

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

достаточно убедиться, что

$$s_1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

и что допущение

$$s_{n-1} = \frac{(n-1)n}{2}$$

влечет за собой в соответствии с равенством

$$s_n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

формулу

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

которая, таким образом, оказывается доказанной для всех значений натурального числа n.

Метод Грассмана и заключается в построении индуктивных определений и доказательств для основных арифметических действий и их свойств.

§ 20. Теория арифметических действий по Грассману.

Итак, мы исходим из натурального ряда

$$1, 2, 3, \ldots, n, n', \ldots,$$

в котором элемент 1 не следует ни за каким элементом, за каждым элементом n непосредственно следует один и только один элемент n', который не следует ни за каким другим элементом, кроме n, а предложения, утверждающие что-либо относительно *всех* элементов ряда, доказываются на основании принципа полной индукции.

(Обратим внимание на то, что элемент, следующий за данным, мы обозначаем знаком „$'$“, избегая, например, употреблять вместо n' знак $n+1$, так как для порядковых чисел n и 1 сложение еще не определено и не имеющее пока никакого смысла обозначение $n+1$ могло бы вызвать нежелательные количественные ассоциации.)

1. Грассмановское **индуктивное определение операции сложения** состоит из двух положений:

$$1)\ a + 1 = a',$$
$$2)\ a + b' = (a + b)'.$$

Первое из этих равенств есть *определение* операции, обозначенной знаком $+1$, и может быть прочитано так:

1) *прибавление единицы к какому-либо натуральному числу а есть, по определению, действие, дающее в результате непосредственно следующее за а натуральное число а'.*

Второе положение есть индуктивное определение операции прибавления любого натурального числа. Это становится очевидным, если в словесной формулировке начать со скобок правой части: если уже известно, что означает знак $+b$ прибавления натурального числа b, то смысл знака $+b'$ фиксируется определением: 2) *операция $a+b'$ прибавления к числу a непосредственно следующего за b числа b', по определению, есть действие, дающее в результате непосредственно следующее за $a+b$ натуральное число $(a+b)'$.*

Пользуясь тем, что знак $a+1$ имеет теперь вполне определенный смысл следующего за a числа a', можно эту вторую часть грассмановского определения переписать так:

$$a+(b+1)=(a+b)+1.$$

Эта формула определяет, таким образом, что значит „прибавить число $b+1$", если известно, что значит „прибавить число b" и „прибавить 1".

Так как из утверждения, что n есть натуральное число, согласно аксиоме 2 вытекает, что n' есть натуральное число, притом вполне определенное, то из равенства $a+b'=(a+b)'$ заключаем, что сумма $a+b'$ есть вполне определенное натуральное число, коль скоро a и $a+b$ суть натуральные числа. Так как, кроме того, $a+1=a'$, то, согласно аксиоме 4, заключаем, что сумма натурального числа a и любого натурального числа b есть некоторое натуральное число, притом вполне определенное. *Операция сложения,* таким образом, *всегда выполнима и однозначна* в области натуральных чисел.

Приведем пример нахождения суммы с помощью определения Грассмана, изображая натуральный ряд последовательностью букв

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ \ldots$$

Так как A как первый член ряда есть „единица", то определение Грассмана перепишется в виде:

$$(1)\ X+A=X',\quad (2)\ X+Y'=(X+Y)'.$$

Получаем последовательно:

$$A+A=A'=B$$
$$A+B=A+A'\quad (\text{так как } B=A').$$

Далее, по общей формуле (2) продолжаем:

$$A+A'=(A+A)'.$$

Но так как $A+A=B$, то

$$(A+A)'=B'=C.$$

Итак,

$$A+B=C.$$

Аналогично найдем, что

$$B+B=B+A'=(B+A)'=(B')'=C'=D$$

и

$$B+C=B+B'=(B+B)'=D'=E.$$

Легко видеть, что эти соотношения, при выводе которых мы намеренно употребили буквы вместо цифр для того, чтобы подчеркнуть пользование лишь порядковым смыслом этих знаков, превращаются в известные числовые тождества

$$1+1=2,\ 1+2=3,\ 2+2=4 \text{ и } 2+3=5,$$

если обозначать начальные числа нашей последовательности цифрами 1, 2, 3, 4, 5, ... вместо букв A, B, C, D, E, ... Эти цифры при этом не имеют количественного смысла. Так, 2 определяется соотношением $2=1'$, т. е. как элемент, следующий за 1, 3 — как $2'$ и т. д.

Следует в связи с этим помнить, что в рамках рассматриваемой теории *нельзя* было бы определять $a+b$, как элемент натурального ряда, стоящий *на* b *мест правее,* т. е. получающийся путем b последовательных переходов, начиная от a, к непосредственно следующему числу, так как такое определение опирается на *количественное* истолкование второго слагаемого b. Применение же грассмановского индуктивного определения автоматически вызывает осуществление требуемого числа последовательных переходов к следующему натуральному числу в каждом конкретном случае сложения двух натуральных чисел. Аксиомы 1) $a+1=a'$ и 2) $a+b'=(a+b)'$ позволяют, таким образом, от количественных *описаний содержательного характера* („на b мест правее") перейти к *формальным* операциям с соотношениями типа 1) и 2), не требующим непосредственного осуществления процесса счета. Этот переход, характерный для математического метода вообще, дает возможность уже и здесь применять *выкладку*, основанную на формулах 1) и 2), как одно из основных средств для получения тех или иных результатов, как общего, так и частного характера.

2. Установим теперь основные свойства операции сложения. Знакоположение типа $A+B+C+D$ означает в дальнейшем, соответственно общепринятым соглашениям о применении скобок, то же, что и $[(A+B)+C]+D$.

Теорема 1 (*ассоциативный закон сложения*)

$$(p+q)+r=p+(q+r).$$

Доказательство. При $r=1$ это равенство имеет место, согласно определению сложения.

Допустим, что оно доказано для некоторого натурального числа r и докажем, что тогда оно верно и для следующего числа r'.

По определению сложения

$$(p+q)+r'=[(p+q)+r]'.$$

По допущению $(p+q)+r=p+(q+r)$, стало быть

$$[(p+q)+r]'=[p+(q+r)]'.$$

Применяя вновь дважды определение сложения, получим далее,

$$[p+(q+r)]'=p+(q+r)'=p+(q+r').$$

Этим доказано, что

$$(p+q)+r'=p+(q+r').$$

Согласно с аксиомой 4 ассоциативный (сочетательный) закон сложения этим доказан для всех натуральных чисел.

Следствие.

$$A+a_1+a_2+\ldots+a_n=A+(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Если в этом равенстве числу n придавать количественный смысл *числа слагаемых*, то оно доказывается по методу полной индукции так:

$$[A+a_1+\ldots+a_{n-1}]+a_n=[A+(a_1+\ldots+a_{n-1})]+a_n=$$
$$=A+[(a_1+\ldots+a_{n-1})+a_n]=A+(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n).$$

Первый и последний из написанных знаков равенства имеют место в силу допущения, что формула верна для $n-1$ слагаемого заключенной в скобки суммы, второй согласно той же формуле для двух слагаемых.

Если, однако, нежелательно придавать индексу n количественное значение, то придется и здесь поступить аналогично тому, как это было сделано выше в § 19.

Именно, определение для

$$s_n=A+a_1+\ldots+a_n$$

будет таково:

$$s_{n'}=s_n+a_{n'};\qquad s_1=A+a_1,$$

а для

$$\sigma_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

таково:

$$\sigma_{n'}=\sigma_n+a_{n'};\qquad \sigma_1=a_1.$$

Надо доказать, что

$$s_n=A+\sigma_n$$

при всяком n.

Для $n=1$ это верно, так как $A+a_1=A+a_1$.

Далее, допуская справедливость доказываемого равенства для числа n, получим:

$$s_{n'}=s_n+a_{n'}=(A+\sigma_n)+a_{n'}=A+(\sigma_n+a_{n'})=A+\sigma_{n'},$$

чем теорема и доказана.

Можно также написать в несколько более общей форме

$$A+a_1+\ldots+a_n+B=A+(a_1+\ldots+a_n)+B.$$

Теорема 2 (*коммутативный закон сложения*)

$$p+q=q+p.$$

Доказательство. Установим сначала, что $p+1=1+p$ при любом p. Для $p=1$ это верно. Пусть это равенство верно для некоторого p. Тогда

$$p'+1=(p+1)+1=(1+p)+1=1+(p+1)=1+p'$$

Здесь нами использовано определение сложения (первое и четвертое равенства), допущение $p+1=1+p$ (второе) и ассоциативный закон сложения (третье равенство).

Этим установлено, что формула $p+q=q+p$ верна при $q=1$ и при любом p. Допустим, что она доказана для некоторого q. Тогда

$$\begin{aligned} p+q' &= (p+q)'=(q+p)'=q+p'=q+(p+1)= \\ &= q+(1+p)=(q+1)+p=q'+p. \end{aligned}$$

Здесь использованы: определение сложения (первое, третье, четвертое и седьмое равенства), допущение $p+q=q+p$ (второе и пятое равенства) и ассоциативный закон сложения (шестое равенство).

Согласно аксиоме 4, коммутативный (переместительный) закон сложения этим доказан для всех натуральных чисел.

Отметим попутно полученное в качестве промежуточного результата тождество

$$p+q'=p'+q.$$

Из теорем (1) и (2) вытекает тождество

$$A+p+B+q+C=A+q+B+p+C,$$

выражающее переместительный закон в несколько более общей формулировке.

3. Определение умножения в обычной форме $n\cdot b=b+ +b+\ldots+b$ („n раз“) предполагает *количественный* смысл множителя n как числа слагаемых.

В теории Грассмана **рекуррентное определение умножения** состоит из двух положений

$$1)\ 1\cdot a=a;\quad 2)\ b'\cdot a=b\cdot a+a.$$

Соответствие этого определения обычному читатель уяснит себе лучше всего, если будет рассматривать первый сомножитель как множитель (коэфициент). Применение этих формул к конкретным случаям автоматически вызывает появление того числа слагаемых, которое требуется согласно обычному определению.

Примеры. $2\cdot a=1'\cdot a=1\cdot a+a=a+a;\quad 3\cdot a=2'\cdot a= =2\cdot a+a=a+a+a.$

Равенство $1\cdot a=a$ отвечает на вопрос, „что значит умножить число a на 1“, а соотношение $b'\cdot a=b\cdot a+a$, которое можно записать также в виде

$$(b+1)a=ba+a,$$

выражает, что *результат умножения числа a на следующее за b число b' равен, по определению, произведению числа a на b сложенному с числом a.*

Из определения следует, что результат умножения a на 1 есть натуральное число, притом вполне определенное. На основании формулы $b'a = ba + a$ и соответствующего свойства операции сложения заключаем отсюда, что результат умножения a на всякое натуральное число b есть натуральное число, притом вполне определяемое числами a и b. Операция умножения, таким образом, всегда выполнима и однозначна в области натуральных чисел.

Теорема 3 [*дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению* („левый")].

$$d(a+b) = da + db.$$

Доказательство.

При $d = 1$ это равенство обращается в

$$1 \cdot (a+b) = 1 \cdot a + 1 \cdot b, \text{ т. е. } a + b = a + b.$$

Пусть для натурального числа d оно доказано. Тогда

$$d'(a+b) = d(a+b) + a + b = da + db + a + b =$$
$$= da + a + db + b = d'a + d'b.$$

Здесь использованы: определение умножения (первое и четвертое равенства), допущение (второе равенство) и переместительный закон сложения (третье равенство), *левый* распределительный закон („для того, чтобы сумму умножить на число, достаточно каждое слагаемое умножить на это число и полученные произведения сложить"); *правый* распределительный закон (случай, когда множитель есть сумма слагаемых) будет вытекать отсюда после того, как будет доказана

Теорема 4 (*коммутативный закон умножения*)

$$ab = ba.$$

Доказательство.

Установим сначала, что

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a$$

при любом a. Для $a = 1$ равенство верно. Пусть оно верно для некоторого a. Тогда

$$a' \cdot 1 = a \cdot 1 + 1 = 1 \cdot a + 1 = a + 1 = a' = 1 \cdot a$$

Здесь использованы: определение умножения (первое, третье и пятое равенства), допущение (второе равенство) и определение сложения (четвертое равенство).

Доказав, таким образом, что равенство $ab = ba$ имеет место при любом a для $b = 1$, допустим, что это равенство доказано для некоторого $b \neq 1$. Тогда

$$ab' = a(b+1) = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + 1 \cdot a = ab + a =$$
$$= ba + a = b'a.$$

Здесь применены: определение сложения (первое равенство), левый распределительный закон (второе равенство), доказанное равенство $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ (третье равенство), допущение $ab = ba$ (четвертое равенство) и определение умножения (пятое равенство).

Этим коммутативный (переместительный) закон умножения доказан для всех натуральных чисел.

Следствие (*„правый“ распределительный закон*).

$$(a + b) c = ac + bc.$$

Для доказательства достаточно написать

$$(a + b) c = c (a + b) = ca + cb = ac + bc$$

Теорема 5 (*ассоциативный закон умножения*).

$$a (bc) = (ab) c.$$

Доказательство. Для $a = 1$ написанное равенство превращается в $1 \cdot (bc) = (1 \cdot b) c$, т. е. $bc = bc$. Допустим, что оно доказано для натурального числа a. Тогда

$$a' (bc) = a (bc) + bc = (ab) c + bc = (ab + b) c = (a'b) c.$$

Здесь применены: определение умножения (первое и четвертое равенства), допущение $a (bc) = (ab) c$ (второе равенство) и распределительный закон (третье равенство).

Этим сочетательный закон умножения доказан для любых натуральных чисел.

Так как все изучаемые в арифметике преобразования являются следствием установленных законов операций, то теорию основных арифметических действий можно считать, таким образом, обоснованной.

Рекуррентные рассуждения, совершенно аналогичные примененным при формулировке и доказательстве следствия теоремы 1 (стр. 60), позволяют обобщить дистрибутивный, коммутативный и ассоциативный законы на случай любого числа слагаемых и сомножителей. Провести это мы предоставляем читателю. Для активного усвоения метода можно, кроме того, предложить читателю в качестве упражнения установить соответствующее определение *операции возвышения натурального числа в натуральную степень* и доказать известные свойства этого действия, выражаемые формулами

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c} \text{ и } (a^b)^c = a^{bc}.$$

Небесполезно также попытаться строить различные варианты изложенной теории, изменяя порядок следования теорем 3, 4 и 5 настоящего параграфа.

§ 21. Сравнение натуральных чисел в теории Грассмана.

Поскольку, рассматривая элементы натурального ряда, как порядковые числа, мы не можем опираться, как в теории количественного числа, на понятия о *большей* или *меньшей* мощности, придется здесь провести в несколько иной форме рассуждения, вполне аналогичные тому, что было уже сделано в § 15.

За исходный пункт можно было бы принять соотношение $a<a'$ и свойство транзитивности отношения „$<$". Ради формальной простоты изложения мы поступим иначе, приняв

Определение 1. *$a<b$ и $b>a$, если $b=a+n$, т. е. мы говорим, что натуральное число a* ***меньше*** *натурального числа b, если это последнее есть сумма числа a и некоторого натурального числа n.*

Следствие. *$a<a+1$, т. е. $a<a'$.*

Теорема 1. *Если $a<b$ и $b<c$ то $a<c$* (свойство транзитивности соотношения „$<$").

Доказательство. По определению

$$b=a+n \text{ и } c=b+m.$$

Стало быть,

$$c=(a+n)+m=a+(n+m).$$

Теорема 2. *Всякое натуральное число, отличное от 1 больше 1.*

Доказательство. Для числа $2=1'$, следующего за 1, это верно, так как $1'=1+1$.

Из неравенств $a'>a$ и $a>1$, по теореме 1, следует $a'>1$ и, стало быть, если соотношение $a>1$ верно для числа a, то оно верно и для следующего числа a'. Этим теорема доказана для всех натуральных чисел, начиная с числа $2=1'$.

Теорема 3. *Соотношения*

$$a=b,\ a<b \text{ и } a>b$$

исключают друг друга.

Доказательство.

I. Пусть $a<b$, т. е. $b=a+n$. Равенство $a=b$ влечет $a+n=a$ или $n+a=a$. Для $a=1$ получаем $n+1=1$, т. е. $n'=1$, что невозможно, так как по определению (аксиома 1) единица не следует ни за каким натуральным числом.

Пусть теперь невозможность равенства $a+n=a$ доказана для натурального числа a. Докажем, что отсюда будет следовать невозможность равенства $a'+n=a'$.

Действительно, переписав его в виде

$$n+a'=(n+a)'=a',$$

мы заключили бы, согласно аксиоме 3, что $n+a=a$.

Этим доказано, что соотношения $a<b$ и $a=b$ исключают друг друга, каковы бы ни были натуральные числа a и b.

II. Пусть $a<b$ и одновременно $a>b$. Тогда, по определению, вместо $a>b$ можно написать $b<a$ и, по теореме 1, из соотношений $a<b$ и $b<a$ вывести $a<a$, что, по доказанному в I, невозможно.

Теорема 4. *Между всякими двумя натуральными числами имеет место одно из соотношений*

$$a=b,\ a<b \text{ или } a>b.$$

Доказательство. Рассмотрим какое-либо натуральное число a, и проведем индуктивное рассуждение по отношению к другому числу b.

Если $b=1$, то либо $a=1$ и тогда $a=b$, либо (теорема 2) $a>1$, т. е. $a>b$.

Пусть доказано, что для числа a и для числа b одно из соотношений $a=b$, $a<b$ или $a>b$ имеет место.

Докажем, что то же утверждение будет верно для числа a и для числа b':

1) если $a<b$, то, так как $b<b'$, то $a<b'$;

2) если $a=b$, то, на том же основании, $a<b'$;

3) если $a>b$, то $a=b+n$.

В соответствии с теоремой (2) здесь возможны два случая: либо $n=1$, тогда $a=b+1=b'$;

либо $n>1$, тогда $n=1+m$ и

$$a=b+(1+m)=(b+1)+m=b'+m,$$

т. е. $a>b'$.

Теорема доказана полностью.

Как видим, аксиомы 1 и 3 играют решающую роль в однозначном определении взаимного расположения чисел в натуральном ряду. Нетрудно заметить также, что доказательство соответствующих теорем § 15 проведено нами по тому же формальному образцу, с той лишь разницей, что роль соотношения $a+n=b$ ам выполняют соответствующие *количественные* определения.

§ 22. Введение нуля.

После того как система натуральных целых положительных чисел построена (§ 17—21), можно с помощью формальных определений расширить эту систему и ввести нуль и отрицательные натуральные числа. На общих вопросах, связанных с расширением понятия о числе, мы остановимся в следующей главе, затронув здесь лишь ту сторону дела, которая непосредственно связана с теорией Грассмана.

Определение. Введем в качестве натурального числа символ 0, поставив его на первое место ряда, перед единицей, и изменяя соответственно текст положений 1—4 § 17.

Мы полагаем, стало быть, по определению,

1) $0'=1$.

Распространяя на это число общее определение сложения, получим

$$0+1=0'=1 \text{ и } 0+a'=(0+a)'=a',$$

следовательно, вообще

$$0+a=a.$$

2) Так как нуль предшествует 1, то из общего определения сложения ничего не может вытекать относительно операции прибавления нуля. Мы полагаем, *по определению* (сохраняя тем коммутативный закон и соответствие с количественным определением стр. 44),

$$a+0=a.$$

Распространяя на число нуль общее определение умножения, получим:

$1\cdot 0=0$ и $b'\cdot 0=b\cdot 0+0=0$ по индукции. Стало быть, вообще

$$b\cdot 0=0.$$

3) Так же, как и для сложения, соотношение

$$0\cdot b=0$$

устанавливается как определение.

Согласно с определением понятия „$<$“, нуль меньше 1 и всякого другого натурального числа.

Таким образом, в расширенной введением нуля системе все свойства действий и расположения чисел остаются в силе.

Можно было бы с самого начала включить 0 как первый элемент в систему натуральных чисел и соответственно строить определения действий; так и поступает Пеано (см. примечание на стр. 48). Выбор способа изложения в этом отношении для теории существенного значения не имеет.

§ 23. Отрицательные числа и теория двустороннего натурального ряда.

Вводя знак $'a$ для обозначения предшествующего a элемента натурального ряда, так что

$$'(a')=('a)'=a,$$

мы можем построить теорию так называемого **двустороннего натурального ряда**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots,$$

причем -1 вводится здесь как элемент, предшествующий 0, т. е.

$$-1='0,$$

-2 как элемент, предшествующий -1, т. е.

$$-2='(-1),$$

и т. д.

Аксиоматика такого расположения будет отличаться от аксиоматики простого натурального ряда.

Аксиома 1 отпадает, так как (покуда нет речи о действиях, а имеется в виду лишь *взаимное расположение* элементов) *никакой из элементов ничем не выделяется из среды других*. Это становится наглядным, если отказаться от цифрового обозначения и писать

$$\ldots, e, f, g, h, \ldots$$

Аксиома 2 дополняется требованием однозначного соответствия каждому элементу n *непосредственно предшествующего* элемента $'n$, в связи с чем аксиома 3 отпадает, а в аксиоме 4 формулируется принцип *двусторонней* индукции: если предложение S доказано для какого-либо элемента ряда и если из допущения, что оно верно для n, следует, что оно верно для последующего элемента n' и для предыдущего $'n$, то предложение S доказано для всех элементов ряда.

Нетрудно дополнить определения основных действий, данные в § 20, так, чтобы охватить все элементы двустороннего натурального ряда, т. е. нуль, положительные и отрицательные целые числа. Так и поступал Грассман в своем учебнике арифметики.

Наметим в основных чертах соответствующую теорию.

1. Так как в действиях сложения и умножения число 0 и число 1 играют особую роль, удовлетворяя соотношениям $a+0=a$ и $1 \cdot a=a$, не имеющим места ни для каких других натуральных чисел, то установление определения этих действий сопряжено с *одновременным выделением* (индивидуализацией) *одного из элементов* симметричной двусторонней последовательности $\ldots, a, b, c, \ldots$, в которой *первоначально все элементы равноправны.*

Выбрав такой элемент и обозначая его знаком 0, мы можем прежде всего выделить совокупность **„положительных“** чисел с помощью определений:

1) *Следующее за* 0 *число* $0'=1$ *есть положительное число.*

2) *Если n есть положительное число, то следующее за ним n' тоже есть положительное число.*

Присоединяя сюда формулированные выше свойства двустороннего ряда, мы видим, что система определенных таким путем чисел будет удовлетворять аксиомам 1—4 § 17 и, следовательно, теория действий может быть для нас построена по образцу § 20.

То же имеет место и для системы **„отрицательных“** чисел, выделяемых с помощью определений:

1) *Предшествующее нулю число* $'0=-1$ *есть отрицательное число.*

2) *Если n есть отрицательное число, то предшествующее ему число $'n$ также есть отрицательное число.*

Для того чтобы получить определения действий, общие для всего ряда, поступим так.

Введем в определение действия сложения (§ 20) знак *предыдущего* элемента вместо знака последующего. Формула $a+b'=(a+b)'$ после замены $b'=c$, $b='c$ превращается в $a+c=(a+'c)'$, или

$$a+'c='(a+c).$$

Для системы положительных чисел это соотношение вытекает, таким образом, из определения сложения.

Взяв его за основу для проведения левосторонней индукции, мы получим возможность определить операцию $a+b$ для всех отрицательных значений b.

Так,

$$a+(-1)=a+'0='(a+0)='a,$$
$$a+(-2)=a+'(-1)='[a+(-1)]=''a$$

и т. д.

Итак, для двустороннего натурального ряда *определение сложения* заключает в себе три формулы:

$$a+0=a, \tag{1}$$
$$a+b'=(a+b)' \tag{2}$$

и

$$a+'b='(a+b). \tag{3}$$

Установление общих свойств действия представляло бы собой повторение рассуждений § 20 путем левосторонней индукции.

2. Прежде чем перейти к определению умножения, установим понятие о *симметричном числе* и рассмотрим действие вычитания, *обратное* действию сложения.

Теорема 1. *Всякому числу n соответствует одно и только одно число $\bar{n}$, удовлетворяющее соотношению*

$$n+\bar{n}=0.$$

При этом, если n есть положительное, то $\bar{n}$ — отрицательное число, и наоборот.

Число $\bar{n}$ мы будем называть числом **симметричным** с n. Из определения следует, что $\bar{\bar{n}}=n$.

Доказательство. Заметим предварительно, что, согласно с определением сложения, всегда

$$a+b'=(a+b)'=(b+a)'=b+a'.$$

Полагая $n=1$, из равенства $1+x=0$ находим $1+x=x'=0$, откуда число x, симметричное с 1, определяется однозначно:

$$x='0=-1.$$

Допуская, что для числа n симметричное число $\bar{n}$, удовлетворяющее соотношению $n+\bar{n}=0$, однозначно определено, из соотношения

$$n'+x=0$$

получим:

$$n'+x=n+x'=0,$$

откуда, по допущению, следует:

$$x'=\bar{n},$$

т. е.

$$x='(\bar{n}).$$

Таким образом, симметричное с n' число n' *однозначно определяется по формуле*

$$x=\overline{n'}='(\overline{n}).$$

Аналогично, равенство $'n+x=0$ *приведет к*

$$x=\overline{'n}=(\overline{n})'.$$

Из этих формул (которые можно было бы принять и за определение понятия симметричного числа) индуктивным путем заключаем, что положительным n соответствуют отрицательные $\overline{n}$, и наоборот. Для нуля, очевидно, $\overline{0}=0$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были элементы двустороннего ряда a и b, всегда существует одно и только одно третье число c, удовлетворяющее соотношению*

$$c+b=a.$$

Это число c называется **разностью** чисел a и b и обозначается знаком

$$c=a-b.$$

Доказательство. Число $c=a+\overline{b}$ есть искомое; действительно,

$$a+\overline{b}+b=a+0=a.$$

Другого такого числа быть не может, так как из равенства $c+b=c_1+b$ вытекает

$$c+b+\overline{b}=c_1+b+\overline{b},$$

или $c+0=c_1+0$; $c=c_1$.

Обратная сложению операция вычитания оказывается, таким образом, для элементов двустороннего ряда всегда *выполнимой* и *однозначной*.

Примечание. Действию $a-b$ можно было бы также дать рекуррентное определение:

$$a-0=a;\quad a-'b=(a-b)';\quad a-b'='(a-b).$$

Доказать теорему 2 на основе этого определения мы предоставляем читателю в виде упражнения.

Из изложенного вытекает, что, сохраняя для положительных чисел прежнее определение отношения „$<$“

$$a<b,\ \text{если}\ b=a+n,$$

где n есть *положительное* число, мы можем, распространяя это определение на совокупность всех элементов двойного ряда, установить этим однозначное расположение этих последних „по величине“.

Действительно, если $a>b$, то $b=a+\overline{n}$ и здесь $\overline{n}$ есть, по доказанному, некоторое отрицательное число.

Следовательно, $a > b$, $a = b$ или $a < b$, в зависимости от того, *будет ли разность*

$$a - b$$

положительным числом, нулем или отрицательным числом.

Отсюда следует непосредственно обобщение соответствующих теорем § 21 для двустороннего ряда.

В частности, $'a - a = -1$, так что $'a < a$. Все отрицательные числа, таким образом, меньше 0 и всех положительных чисел.

3. Для того чтобы получить общее определение *умножения*, преобразуем формулу $b'a = ba + a$, полагая $b' = c$. Мы получим $ca = 'ca + a$, откуда (теорема 2)

$$'ca = ca - a = ca + \bar{a}.$$

Путем левосторонней индукции получаем отсюда определение умножения для любого отрицательного множителя.

Так,

$$(-1)a = '0 \cdot a = 0 \cdot a + \bar{a} = 0 + \bar{a} = \bar{a}.$$

Умножение на -1 осуществляет, таким образом, переход к числу, симметричному с данным

$$(-2)a = '(-1)a = (-1)a + \bar{a} = \bar{a} + \bar{a} = 2 \cdot \bar{a}$$

и т. д.

Предоставляем читателю доказать, что вообще

$$\bar{b} \cdot a = b \cdot \bar{a} = \overline{ba}$$

и, в частности,

$$\bar{b} \cdot \bar{a} = ba.$$

Доказательство основных свойств операции умножения, определяемой системой равенств

$$0 \cdot a = 0, \quad b'a = ba + a; \quad 'ca = ca - a,$$

мы также опускаем.

Как для ряда положительных чисел, так и для двустороннего ряда установленные определения и основные свойства арифметических действий служат отправной точкой для дальнейших построений, не представляющих, как было уже отмечено, никаких принципиальных трудностей.

На этом мы заканчиваем первый раздел, посвященный обоснованию понятия целого числа и действий над целыми числами.

Прежде чем перейти к следующему разделу, мы остановимся еще на вопросе о связи между концепциями *количественного* и *порядкового* числа, к которому, с несколько иной точки зрения, нам еще придется вернуться впоследствии.

§ 24. Порядковые трансфинитные числа.

В теории конечных натуральных чисел имеется, как мы видели, полный параллелизм между формальными свойствами системы *конечных количественных чисел* (§ 15), достаточных для определения класса каждого конечного множества, и только что (§ 20) построенной системой *конечных порядковых чисел*, достаточных для определения (путем нумерации) порядкового места элемента во всяком конечном упорядоченном множестве.

Смысл этого утверждения ясен. Для формального доказательства нужно, однако, прежде всего установить логическое определение понятия „упорядоченное" множество, соответствующее нашим привычным представлениям.

1. Пусть для множества M установлено понятие о *взаимном расположении* любых двух его элементов по *рангу* (порядку), которое мы будем обозначать знаком „ε", не придавая этому знаку никакого конкретного смысла, а требуя лишь выполнения условий:

1) *между всякими двумя различными элементами a и b имеет место либо соотношение $a \varepsilon b$, либо соотношение $b \varepsilon a$*;

2) *соотношение $a \varepsilon a$ не имеет места*;

3) *если $a \varepsilon b$ и $b \varepsilon c$, то $a \varepsilon c$.*

Всякое множество, для элементов которого такого рода соотношение установлено, мы будем называть **упорядоченным.**

Примером может служить множество

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\ b_2,\ b_1,$$

в котором знак ε будет означать „расположено слева от", причем $a_n \varepsilon a_{n+p}$, $b_{n+p} \varepsilon b_n$ и $a_n \varepsilon b_p$ при любых n и p.

Для построения нужной нам теории придется сузить понятие об упорядоченных множествах, вводя следующее определение:

Множество M называется ***вполне упорядоченным,*** *если оно упорядочено и во всякой его части $Q \subset M$ найдется низший по рангу элемент, т. е. такой элемент $q \subset Q$, что $q \varepsilon q_1$, если $q_1 \subset Q$ и $q_1 \neq q$.*

Это различение имеет существенное значение лишь для бесконечных множеств. Так, упорядоченное множество $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$, рассмотренное выше, не является вполне упорядоченным, так как в его части $\ldots, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1$ нет низшего по рангу элемента. Нетрудно показать, что всякая последовательность и, в частности, натуральный ряд 1, 2, 3, 4, ... есть вполне упорядоченное множество.

Индуктивно доказывается, что *всякое конечное упорядоченное множество вполне упорядочено.*

Для множеств класса 1 это тривиально. Если это верно для множеств класса n, то пусть M_{n+1} есть множество класса $n+1$, состоящее из M_n и элемента α. В M_n есть, по допущению, наинизший по рангу элемент β.

Если $\alpha \varepsilon \beta$, то всякая часть множества M_{n+1}, содержащая α, имеет α наинизшим по рангу элементом, а всякая часть, не содержащая α, включается в множество M_n.

Если $\beta \varepsilon \alpha$, то приходим к тому же результату, меняя роли α и β и представляя M_{n+1} как сумму β и множества M_n класса n.

Из этого и вытекает высказанное выше утверждение о том что с помощью порядковых натуральных чисел, т. е. элементов натурального ряда 1, 2, 3, ..., *ранг каждого элемента упорядоченного конечного множества может быть обозначен порядковым числом* (номером) так, что элементам низшего ранга соответствуют меньшие номера и всякому промежуточному номеру между двумя натуральными номерами — элемент промежуточного ранга.

Действительно, отнеся элементу низшего ранга в M число 1, мы найдем, по доказанному, в оставшейся части множества M элемент низшего ранга. Отнеся ему число 2, найдем в оставшейся части элемент низшего ранга, который снабдим № 3. Если допустить, что такое соответствие установлено для множества класса n, то для множества следующего класса понадобится лишь использовать число n', как номер. Нумерация оказывается, таким образом, возможной для всякого конечного упорядоченного множества.

Поставив тот же вопрос по отношению к *бесконечным* вполне упорядоченным множествам, мы увидим, что натуральных чисел *не хватит* для характеристики расположения элементов даже в таком простом вполне упорядоченном множестве, как

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots,\ x,\ \ldots;\ z, \qquad (1)$$

где a, b, c, d, ..., x, ... есть последовательность, а z, *по определению, находится в отношении* $x \varepsilon z$ *к каждому члену этой последовательности.*

В самом деле, для нумерации членов последовательности понадобятся уже *все* натуральные числа и охарактеризовать таким числом *ранг* элемента z, не имеющего непосредственного предшествующего ему элемента, невозможно.

Введение Кантором порядковых *трансфинитных* чисел и можно рассматривать, как естественное расширение натурального ряда, имеющее целью построить такую систему порядковых чисел, с помощью которой можно было бы охарактеризовать ранг элемента *во всяком вполне упорядоченном множестве.*

Начнем с частных случаев.

Для характеристики положения элемента z сразу после всех элементов некоторой последовательности a, b, c, ... мы введем новый знак ω, определяя его как первое порядковое трансфинитное число, следующее сразу после всех натуральных чисел. Нумерация элементов множества типа (1) будет, стало быть, иметь вид

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;\ a_\omega.$$

Положение порядкового числа ω по отношению к натуральным числам иллюстрируется соответственно схемой

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots;\ \omega.$$

Пусть теперь дано вполне упорядоченное множество, в котором за всеми элементами некоторой последовательности следуют *еще два* элемента. Естественно будет ввести порядковое число ω или (в соответствии с прежним определением сложения) $\omega+1$ и занумеровать члены такого множества так

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots;\ a_\omega,\ a_{\omega+1}.$$

Для нумерации элементов множества, состоящего из двух идущих под ряд последовательностей, будут использованы, очевидно, все порядковые числа типа

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots;\ \omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \ldots,\ \omega+n,\ \ldots$$

Порядковое число, непосредственно следующее за всеми этими, обозначим через $\omega+\omega=2\omega$, следующее за ним — через $2\omega+1$ и т. д.

Читатель легко уяснит себе таким образом смысл схемы

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\quad \omega,\ \omega+1,\ \ldots;\ 2\omega,\ 2\omega+1,\ \ldots;\ 3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots$$
$$n\omega,\ n\omega+1,\ \ldots;\ \omega^2,\ \omega^2+1,\ \ldots;\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1,\ldots;\ \omega^2+2\omega,$$
$$\omega^2+2\omega+1,\ \ldots;\ \omega^2+n\omega,\ \omega^2+n\omega+1,\ \ldots;\ 2\omega^2,\ 2\omega^2+1,\ \ldots$$

и использование ее для нумерации элементов вполне упорядоченных множеств соответствующих типов.

2. Перейдем теперь к общей логической характеристике намеченного здесь процесса последовательного построения порядковых чисел все более и более высокого ранга.

Анализируя приемы, употребленные в приведенных выше примерах, мы видим, что, кроме известного уже нам принципа построения *непосредственно следующего за данным* (α) порядкового числа ($\alpha'=\alpha+1$), неограниченное применение которого, начиная от 1, порождает натуральный ряд 1, 2, 3, 4, ..., здесь использован *второй принцип* построения порядковых чисел, *непосредственно следующих за* ***последовательностью*** *уже построенных порядковых чисел.*

Таким путем были введены порядковые числа ω, 2ω, ..., $n\omega$, ..., ω^2, $\omega^2+\omega$, ..., между тем как промежуточные $\omega+1$, $\omega+2$, ..., $\omega^2+\omega+1$, ..., $\omega^2+\omega+2$, ..., $\omega^2+\omega+n$, ... получены применением первого принципа.

Получающаяся на основе неограниченного применения двух принципов —

1) *всякому порядковому числу α соответствует непосредственно следующее за ним порядковое число α'*;

2) *всякой последовательности порядковых чисел α_1, α_2, ..., α_n, ... соответствует непосредственно следующее за ней порядковое число, которое мы обозначим знаком* $\operatorname{seq}\alpha_n$ (sequens — следующий) —

система порядковых чисел носит название **системы порядковых трансфинитных чисел второго класса.**

Примечание. *Две* последовательности α_n и β_n определяют *одно и то же* трансфинитное число $\operatorname{seq}\alpha_n=\operatorname{seq}\beta_n$, если для всякого элемента каждой из них можно в другой указать элемент более высокого ранга. Так, например,

$$\omega=\operatorname{seq} n,\ \text{но также}\ \omega=\operatorname{seq}(2n)=\operatorname{seq}(2n+1);$$
$$2\omega=\operatorname{seq}(\omega+n);\ \omega^2=\operatorname{seq}(n\omega),$$

но также и

$$\operatorname{seq}(n\omega+1)=\omega^2,\ \operatorname{seq}(n\omega+n)=\omega^2$$

и т. п.

Заметим еще, что, вводя для постоянного трансфинитного числа α и вообще для выражения α, не содержащего индекса n, пробегающего последовательность $n=1, 2, 3, \ldots,$ обозначение $\alpha'=\operatorname{seq}\alpha$, мы можем формально объединить в один оба принципа 1) и 2) и основанные на них в дальнейшем определения.

Аналогично тому, как принцип полной индукции можно рассматривать, как определение того, в каких случаях некоторое предложение S считается доказанным для всех натуральных чисел, здесь придется установить, принимая во внимание второй принцип построения, следующий принцип так называемой **трансфинитной индукции:**

„Предложение S доказано для *всех* трансфинитных чисел 2-го класса, если оно доказано для 1 и если

1) из допущения, что оно верно для числа α следует, что оно верно для следующего числа α' и, *кроме того,*

2) *из допущения, что оно верно для каждого элемента последовательности порядковых трансфинитных чисел*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots,$$

вытекает, что оно верно для следующего за ней числа $\operatorname{seq}\alpha_n$.

3. Соответственно с этим, грассмановские определения основных действий придется дополнить так, чтобы было возможно проведение трансфинитной индукции.

Таким образом, присоединяя к определениям § 20 соотношения

$$\alpha+\operatorname{seq}\beta_n=\operatorname{seq}(\alpha+\beta_n),$$
$$\operatorname{seq}\beta_n\cdot\alpha=\operatorname{seq}(\beta_n\cdot\alpha),$$

мы тем самым определим операции сложения и умножения для всех трансфинитных чисел 2-го класса.

Обозначения, принятые нами выше, согласованы с таким определением действий.

Так,

$$2\omega=1'\omega=\omega+\omega=\omega+\operatorname{seq}n=\operatorname{seq}(\omega+n),$$
$$\omega^2=\omega\cdot\omega=\operatorname{seq}n\cdot\omega=\operatorname{seq}(n\omega)$$

и т. п.

Переместительные законы сложения и умножения здесь *нарушаются.*

И впрямь,

$$1+\omega=1+\operatorname{seq}n=\operatorname{seq}(1+n)=\omega\neq\omega+1,$$
$$\omega\cdot 2=\operatorname{seq}n\cdot 2=\operatorname{seq}(n\cdot 2)=\omega\neq 2\omega.$$

Сочетательные законы сложения и умножения *верны.* Для доказательства применим принцип трансфинитной индукции.

Допуская, что для элементов γ_n последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ имеет место равенство

$$(\alpha+\beta)+\gamma_n=\alpha+(\beta+\gamma_n),$$

найдем:

$$(\alpha+\beta)+\operatorname{seq}\gamma_n=\operatorname{seq}[(\alpha+\beta)+\gamma_n]$$

и

$$\alpha+(\beta+\operatorname{seq}\gamma_n)=\alpha+\operatorname{seq}(\beta+\gamma_n)=\operatorname{seq}[\alpha+(\beta+\gamma_n)],$$

т. е. для $\gamma=\operatorname{seq}\gamma_n$ имеет место равенство

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Аналогично, трансфинитная индукция относительно β_n дает

$$(\operatorname{seq}\beta_n\cdot\alpha)\gamma=\operatorname{seq}(\beta_n\cdot\alpha)\cdot\gamma=\operatorname{seq}(\beta_n\alpha\gamma)$$

и

$$\operatorname{seq}\beta_n\cdot(\alpha\gamma)=\operatorname{seq}(\beta_n\alpha\gamma),$$

так что

$$(\beta\alpha)\gamma=\beta(\alpha\gamma).$$

Левый распределительный закон, вообще говоря, *не имеет места:*

$$\omega(\omega+\omega)=\operatorname{seq}n\cdot(\omega+\omega)=\operatorname{seq}n\cdot 2\omega=\operatorname{seq}(2n)\omega=\omega^2,$$
$$\omega\cdot\omega+\omega\cdot\omega=\omega^2+\omega^2=\operatorname{seq}[n\omega+\omega^2]=2\omega^2.$$

Правый распределительный закон верен.

Проведем трансфинитную индукцию, допуская, что верна формула

$$(\beta+\gamma_n)\alpha=\beta\alpha+\gamma_n\alpha$$

и доказывая, что отсюда будет следовать

$$(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha,$$

если

$$\gamma=\operatorname{seq}\gamma_n,$$

а именно:

$$(\beta+\gamma)\alpha=(\beta+\operatorname{seq}\gamma_n)\alpha=\operatorname{seq}(\beta+\gamma_n)\cdot\alpha=\operatorname{seq}(\beta\cdot\alpha+\gamma_n\alpha)=$$
$$=\beta\cdot\alpha+\operatorname{seq}\gamma_n\alpha=\beta\cdot\alpha+(\operatorname{seq}\gamma_n)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha.$$

Обратим внимание на *отличие* законов действий над количественными и порядковыми трансфинитными числами.

Для *количественных* чисел переместительный, сочетательный и распределительный законы имели место, но зато были возможны соотношения типа

$$\aleph_0+1=\aleph_0,\quad 2\aleph_0=\aleph_0,\quad \aleph_0^2=\aleph_0$$

и т. п. (§ 9), для *порядковых* чисел

$$\alpha+1\neq\alpha,\quad 2\alpha\neq\alpha,\quad \alpha^2\neq\alpha,$$

между тем как законы переместительный и распределительный не соблюдены.

4. В теории конечных натуральных чисел каждое число можно рассматривать и как количественное и как порядковое: формальные свойства тех и других там совпадают, — расщепление происходит лишь при переходе к трансфинитным числам, в теории которых становится, таким образом, явным *логическое различие между идеями порядкового и количественного числа,* сливающимися в области конечных чисел в одно понятие *натурального числа*.

Введение порядковых трансфинитных чисел изложенным выше способом оттеняет, кроме того, ту роль, которую играет *принцип полной индукции* в фиксировании смысла выражения *„и так далее"* или *„все"* по отношению к системе натуральных чисел 1, 2, 3, ... Тот же способ выражения по отношению к системе трансфинитных порядковых чисел имеет, как мы видели, совершенно иной смысл, фиксируемый *принципом трансфинитной индукции*.

Возможна и несколько иная трактовка понятия порядкового числа, при которой определение основных действий получает более наглядное истолкование, а самое понятие порядкового числа получается в результате абстракции от свойств *одинаково расположенных* множеств в полной аналогии с тем, как в § 4 было установлено понятие количественного числа.

На место понятия класса равномощных множеств становится здесь понятие класса или, согласно выражению Кантора, **порядкового типа** одинаково расположенных множеств.

Два вполне упорядоченные множества M и N принадлежат, по определению, к ***одному и тому же типу*** (одинаково расположены), *если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие так, что соответствующие элементы одинаково расположены друг по отношению к другу в обоих множествах.*

Порядковое число и есть понятие класса (порядкового типа) одинаково расположенных множеств.

Так, число 3 есть понятие класса множеств типа a, b, c, где

$$a \varepsilon b \varepsilon c.$$

Обозначая тип пустого множества знаком 0, тип множества из одного элемента через 1, тип множества 0, 1, где $0 \varepsilon 1$, порядковым числом 2, мы можем определить *следующее за данным начальным отрезком порядковых чисел* 0, 1, 2, 3, ... , *n натуральное число n', как тип множества всех предшествующих ему порядковых чисел*

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

рассматриваемых в указанном порядке.

Аналогично с этим порядковое число ω, следующее за всеми конечными порядковыми числами, есть *тип множества этих чисел*

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots,$$

т. е. *порядковый тип всех последовательностей*

Число ω', следующее за ω, характеризует тип множества предшествующих ему порядковых чисел

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots;\ \omega$$

и т. д.

Соединяя два вполне упорядоченных множества M типа α и N типа β в одно так, чтобы все элементы M предшествовали элементам N с сохранением как в M, так и в N взаимного расположения, мы определим порядковое число $\alpha+\beta$ как порядковый тип полученного таким путем множества. Так, соотношение

$$3+2=5$$

обозначает, соответственно с этим определением, что, соединяя множества $a\varepsilon b\varepsilon c$ и $d\varepsilon e$ в одно упорядоченное множество

$$a\varepsilon b\varepsilon c\varepsilon d\varepsilon e,$$

мы получаем множество типа 0, 1, 2, 3, 4, 5; формулы $\omega+1=\omega'$ и $1+\omega=\omega$ выражают очевидные факты, характеризующие порядковый тип множеств

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; a$$

и

$$a; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Аналогичным путем можно определить и операцию умножения, как замену элементов одного множества (1-го сомножителя) всей совокупностью элементов другого (2-го сомножителя) с сохранением взаимного расположения.

Такой операцией из множеств

$$a, b \text{ и } a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

получаем множество

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots; a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots,$$

тип которого есть

$$2\omega=\omega+\omega.$$

При обратном порядке сомножителей придем к расположению

$$a, b; \ a, b; \ a, b; \ldots,$$

тип которого

$$\omega\cdot 2$$

выражается попрежнему порядковым числом ω, так что $\omega\cdot 2=\omega$ и, таким образом, $\omega\cdot 2\neq 2\cdot\omega$.

Можно показать [см., например, Бэр (Baire), Теория разрывных функций], что введение трансфинитных чисел 2-го класса является необходимым и достаточным для числового обозначения ранга элементов в любом *счетном* вполне упорядоченном множестве или, что то же, для обозначения *порядкового типа* всякого такого множества.

Совокупность всех трансфинитных чисел 2-го класса есть множество *несчетное* (см. там же), следующей за $\aleph_0$ высшей мощности. Одна из труднейших нерешенных проблем теории множеств, известная под названием Kontinuumproblem, состоит в анализе высказанного Кантором предположения, что мощность системы всех действительных чисел (или, что то же, мощность $2^{\aleph_0}$) совпадает с мощностью системы всех трансфинитных чисел 2-го класса.

ГЛАВА III.

ИЗМЕРЕНИЕ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН И ОПЕРАТОРНАЯ ТЕОРИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ.

В настоящей главе мы займемся обобщением понятия числа, а именно, теорией отрицательных и дробных чисел. Так же как и в предыдущей главе, мы ставим себе цель выяснить, какие задачи, связанные с изучением конкретных величин, приводят к этим обобщениям и как осуществляется переход к соответствующим аксиоматическим теориям, лежащим в основе дальнейших формальных построений арифметики. Считая при этом достаточно хорошо знакомой читателю основную роль дробных чисел для обозначения долей величин, допускающих деление на равные части, мы почти не будем останавливаться на связанных с этим элементарных вопросах, уделив главное внимание так называемой операторной теории и формальной теории пар.

§ 25. Соотношения скалярного расположения. Скалярные величины.

1. Обычно мы приписываем понятиям „меньше", „больше" и „равно" некоторый *количественный* смысл. Это означает следующее. Когда мы говорим, что в каком-то отношении A меньше B, то мы представляем себе, что B заключает в себе что-то в количестве, равном запасу этого „что-то" в A, *плюс* еще некоторое количество того же самого „чего-то".

Такое представление нельзя, однако, считать соответствующим сути дела. Понятия „больше", „меньше" и „равно" следует рассматривать как соотношения *расположения* или *порядковые* соотношения, в общем случае не являющиеся характеристикой запаса „чего-то", из чего „состоят" располагаемые объекты в указанном выше смысле слова.

Черт. 5.

Так, например, когда мы говорим о расположении точек на прямой (черт. 5), то соотношения расположения „правее" и „левее" обладают, как это ясно всякому, знакомому с теорией относительных чисел, теми же формальными свойствами, что и понятия „больше" и „меньше". Бессмысленно, однако, было бы говорить, что у точки C запас „правизны“ больше, чем у точек A и B.

Произведя знакомый уже нам процесс абстракции от специфических качественных особенностей соотношений расположения в различных возможных конкретных интерпретациях этих соотношений, мы можем выделить те основные свойства их, которые *общи* всем таким интерпретациям. Эти свойства и будут общим выражением тех интересующих нас в каждом отельном случае взаимоотношений между объектами, которые мы изучаем с помощью понятий „больше“, „меньше“ и „равно“, т. е. будут служить абстрактным *определением* этих понятий.

Формулируем эти свойства, изменяя из понятных методических соображений привычные читателю обозначения.

Пусть дана некоторая система S объектов A, B, C, ... и пусть установлены взаимоотношения между парами таких объектов, обозначаемые знаками ε и θ, обладающие следующими свойствами:

1) *Между всякими двумя объектами A и B имеет место одно и только одно из соотношений*

$$A\varepsilon B,\ B\varepsilon A \quad \text{или} \quad A\theta B.$$

2) *Если $A\varepsilon B$ и $B\varepsilon C$, то $A\varepsilon C$.*
3) *Если $A\theta B$ и $B\theta C$, то $A\theta C$.*
4) *Для всякого A имеет место соотношение $A\theta A$.*

В этом случае мы будем говорить, что в системе S установлено **скалярное расположение** элементов, систему S будем называть **скалярной величиной**, соотношение θ будем называть **равенством,** а соотношение ε — **основным соотношением расположения,** употребляя для обозначения этого соотношения также и иные термины („меньше“, „больше“, „раньше“, „позже“, „левее“, „правее“ и т. д.), в зависимости от интерпретации.

Аксиомы 2 и 3 выражают так называемые свойства *„транзитивности“* соотношений ε и θ, а аксиома 4) — свойство *„рефлективности“* соотношения θ.

2. Из установленных определений вытекает целый ряд следствий, верных во всякой интерпретации.

Теорема 1. *Соотношение θ обратимо, т. е., если $B\theta A$, то и $A\theta B$.*

Доказательство. По аксиоме 1 верно одно и только одно из трех соотношений

$$B\varepsilon A,\ A\varepsilon B,\ B\theta A.$$

Так как имеет место $B\theta A$, то ни $B\varepsilon A$, ни $A\varepsilon B$ не имеют места. С другой стороны, по той же аксиоме верно одно и только одно из соотношений

$$A\varepsilon B,\ B\varepsilon A \text{ и } A\theta B.$$

По только что сказанному, должно иметь место

$$A\theta B.$$

Аксиома 1 утверждает, в противоположность доказанному свойству соотношения θ, *необратимость* соотношения ε.

Теорема 2. *Если $A\varepsilon B$ и $B\theta C$, то $A\varepsilon C$.*

Доказательство. Допустив, что $A\theta C$, мы придем к противоречию, так как из $A\theta C$ и $C\theta B$ следовало бы, что $A\theta B$. Точно так же допущение $C\varepsilon A$ и соотношение $A\varepsilon B$ дают $C\varepsilon B$, что невозможно. Стало быть, по аксиоме 1, $A\varepsilon C$.

Теорема 3. *Если $A\varepsilon B$ и $A\theta C$, то $C\varepsilon B$.*

Доказательство аналогично.

Вводя знак $A\ni B$ для случая, когда $B\varepsilon A$, можно формулировать те же свойства относительно соотношения „$\ni$“, соответствующего понятию „больше“ в тех случаях, когда „ε“ есть „меньше“, и наоборот.

Если бы речь шла только об установлении понятия равенства, то к аксиомам 3 и 4 следовало бы присоединить заключение теоремы 1, *определив,* таким образом, *соотношение равенства θ, как рефлективное* ($A\theta A$), *обратимое* (если $A\theta B$, то $B\theta A$) и *транзитивное* (если $A\theta B$ и $B\theta C$, то $A\theta C$) *соотношение, установленное в некоторой системе объектов.*

В тех случаях, когда объекты системы вполне индивидуализированы, так что отношение $A\theta B$ между различными объектами невозможно, для установления скалярного расположения достаточны такие аксиомы:

1) Между всякими двумя объектами A и B имеет место одно из соотношений $A\varepsilon B$ или $B\varepsilon A$.

2) Если $A\varepsilon B$ и $B\varepsilon C$, то $A\varepsilon C$.

3) Соотношение $A\varepsilon A$ не имеет места ни для какого A.

3. Перейдем теперь к примерам соотношений, удовлетворяющих указанным аксиомам.

Пусть мы имеем дело с системой всех прямоугольников A, B, C, ... и принимаем следующие определения.

1) $A\varepsilon B$, если прямоугольник A может быть целиком помещен внутрь B.

2) $A\theta B$, если A и B конгруентны.

Легко видеть, что соотношение θ удовлетворяет всем свойствам „равенства“, а соотношение ε — транзитивно и необратимо, так что аксиомы 2, 3 и 4 удовлетворены. Однако, аксиома 1 не удовлетворяется, так как возможно построить два неконгруентных прямоугольника, из которых ни один не может быть помещен внутри другого. Поэтому данными определениями не устанавливается скалярное расположение системы прямоугольников и соотношение ε не обладает всеми свойствами понятия „меньше“.

Изменив определение 2 так:

2) $A\theta B$, если A и B конгруентны, а также если ни один из двух прямоугольников A и B не может быть помещен внутри другого, мы добьемся того, что будут удовлетворены аксиомы 1, 2 и 4. Однако аксиома 3 не удовлетворена. Действительно, прямоугольник размерами 2×6 не может быть помещен внутри

прямоугольника 4×5 (и наоборот); прямоугольник 4×5 не может быть помещен внутри прямоугольника 3×7 (и наоборот); однако прямоугольник 2×6 умещается в прямоугольнике 3×7.

Стало быть, и тут не установлено скалярное расположение. В противоположность этому, в теории измерения площадей доказывается, что мы можем удовлетворить всем аксиомам, установив определение: $A \varepsilon B$, если прямоугольник может быть разрезан на части, совокупность которых целиком умещается внутри прямоугольника B, и $A \theta B$, если из таких частей может быть целиком составлен прямоугольник B. Устанавливаемое этими определениями скалярное расположение прямоугольников совпадает с расположением их по величине площади.

Рассмотрим еще один пример. Пусть речь идет о расположении шахматных игроков A, B, C, ... по силе игры. Примем, что A играет сильнее B ($A \varepsilon B$) или так же, как B ($A \theta B$), в зависимости от результата одной (или нескольких) партий. Мы можем принять, что аксиомы 1 и 4 выполнены. Однако транзитивность не имеет места ни для соотношения ε, ни для соотношения θ. Поэтому указанный метод расположения может иметь смысл некоторого приближения лишь поскольку мы представляем себе дело так, что при большом числе сыгранных партий соотношение ε транзитивно, а соотношение θ вообще маловероятно и в случаях осуществления также транзитивно.

В первых двух из приведенных выше примеров были выполнены все аксиомы, кроме одной — 1 или 3. Этим доказывается *независимость* этих аксиом от остальных. Мы предоставляем читателю придумать аналогичные примеры невыполнения других аксиом, отсылая по вопросу о взаимной независимости аксиом скалярного расположения к книге „Введение в анализ" Шатуновского, впервые поставившего и решившего этот вопрос в общем случае.

Скалярное расположение элементов может быть иллюстрировано расположением точек на бесконечной прямой. Соотношение ε в этом случае может означать „лежать слева от" или „лежать справа от".

4. Аналогично можно установить аксиомы, характеризующие *круговое расположение* элементов, например, взаимное расположение точек на замкнутой кривой. Очевидно, что, определив соотношение $A \varepsilon B$ так: „двигаясь от A в положительном направлении, мы можем притти к B", мы придем к тому, что всегда одновременно и $A \varepsilon B$ и $B \varepsilon A$. Для характеристики расположения точек здесь необходимо либо выделить одну определенную точку, переходить которую нельзя (разрезать кривую), либо, в симметричной форме, установить соотношение между *тремя* точками.

Мы предоставляем читателю проанализировать, соответствуют ли круговому расположению точек на замкнутой прямой аксиомы:

1) Между всякими тремя различными точками α, β, γ имеет место либо соотношение $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$, либо соотношение $\Omega(\gamma, \beta, \alpha)$.

2) Если имеет место соотношение $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$, то имеет место соотношение $\Omega(\beta, \gamma, \alpha)$.

3) Из соотношений $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\Omega(\beta, \gamma, \delta)$ вытекают соотношения $\Omega(\alpha, \beta, \delta)$ и $\Omega(\alpha, \gamma, \delta)$.

Нетрудным упражнением может служить еще установление аксиом, которыми определяются соотношения типа „$\leqslant$" и „$\geqslant$". Равенство можно здесь определять как одновременное выполнение обоих соотношений.

§ 26. Числовая характеристика значений скалярной величины.

Перейдем теперь к важному для дальнейшего изложения характерному примеру скалярной величины.

Пусть мы желаем расположить по степени твердости элементы некоторой совокупности тел, одинаковых по форме, но сделанных из различных материалов, скажем, алмаза, кварца, свинца и т. д.

Отвлекаясь от деталей, мы можем представить себе сравнение тел A и B в отношении их твердости так. Испытываем, какое из двух тел оставляет царапину на поверхности другого. Если A царапает B, но B не царапает A, то говорим, что A тверже B. Если B царапает A, но A не царапает B, то говорим, что B *тверже* A. В остальных случаях считаем, что A и B — *одинаковой твердости.*

Таким образом, по определению, для тел рассматриваемой совокупности выполнено положение 1: между любыми двумя элементами A и B совокупности имеет место одно и только одно из соотношений — „A тверже B", „B тверже A", „A и B — одинаковой твердости".

В первом приближении можно считать также выполненными и следующие два положения:

2) если „A тверже B" и „B тверже C", то „A тверже C", и

3) если „A одинаковой твердости с B, а B — с C", то „A одинаковой твердости с C".

Так как, кроме того, выполнена аксиома 4, то мы можем сказать, что на основе указанного определения можно установить скалярное расположение тел в отношении их *твердости* и самые понятия „тверже" и „одинаковой твердости" обладают всеми свойствами понятий ε и θ, т. е. формальными свойствами соотношений „меньше" и „равно".

Вместе с тем, легко усмотреть, что здесь выражение типа „тело A содержит больший запас „твердости", нежели B" звучит в достаточной мере странно, так как у нас нет оснований представлять себе дело так, что „твердость" кварца „состоит из" „твердости" свинца „*плюс*" „твердость" какого-либо другого тела.

Здесь перед нами пример скалярной величины в довольно чистой форме. Отличие этой величины от скалярных величин такого рода, как длина, площадь, вес, в особенности существенно иметь в виду при переходе к характеристике значений такой величины с помощью *чисел.*

В нашем примере дело сведется к построению так называемой **шкалы** твердости.

Расположив рассматриваемые тела в таблицу так, чтобы тела одинаковой твердости попадали в один и тот же вертикальный столбец, а тела большей твердости располагались правее тел меньшей твердости

$$\begin{matrix} . & A & B & C & D & .. \\ . & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & .. \\ .. & A_2 & . & . & . & .. \end{matrix}$$

(такое расположение возможно именно в силу того, что для обоих понятий „тверже" и „правее" выполнены аксиомы расположения 1—4), мы можем затем охарактеризовать каждый столбец *числом*. При этом у нас имеется чрезвычайно большой *произвол* в выборе чисел для характеристики каждого столбца: всякие числовые отметки пригодны, лишь бы расположению тел по степени твердости соответствовало расположение чисел в порядке возрастания (или убывания).

Так, например, можно было бы перенумеровать столбцы, начиная с первого, целыми числами 1, 2, 3, 4, ... При этом мы могли бы для тел, не подвергнутых исследованию при составлении таблицы и оказавшихся впоследствии на промежуточных местах, употребить дробные числа опять же с большим произволом.

Можно было бы поступить и как-либо иначе, скажем, первому столбцу отнести число 100, второму 110, третьему 120 и т. д.

Инвариантными относительно способа нумерации являются здесь только *соотношения скалярного расположения между числами* и только они отражают действительные свойства исследуемой системы тел. Остальные числовые соотношения, в отличие от тех случаев, когда характеристика величины числом получается как результат *счета* или *измерения*, отражают лишь *случайные свойства способа нумерации столбцов*.

Так, например, если твердость тела B охарактеризована числом 2, твердость тела F — числом 6, то бессмысленно говорить, что вторая твердость „в три раза больше" первой или „на 4 больше" первой. Равенствам

$$6:2=3 \quad \text{и} \quad 6-2=4$$

не соответствует никакое реальное соотношение между свойствами тел B и F. В другой системе нумерации мы получили бы для B число 110, для F — число 150 и ни о каком „втрое" и „на четыре" тут уже не было бы речи. Лишь то, что $2<6$, сохраняется для всякой возрастающей шкалы ($110<150$) и выражает единственный действительный факт, о котором можно судить, зная две характеристики твердости: тело F царапает B, но не наоборот.

Желая подчеркнуть эти особенности в построении числовых шкал, мы будем говорить, что в этих случаях число используется в ***порядковом*** смысле, что мы имеем дело с *поряд-*

*

ковой числовой характеристикой значений скалярной величины. При этом, как было отмечено выше, речь может итти о порядковом смысле не только целых, но и дробных (и даже иррациональных) чисел.

§ 27. Числовая характеристика значений измеримых величин.

Перейдем теперь от общего случая скалярной величины к наиболее часто встречающемуся случаю *измеримых* величин.

В этом параграфе мы имеем в виду предварительно рассмотреть несколько примеров для иллюстрации того, что *числовые характеристики* значений измеримых величин могут иметь *различное смысловое значение*.

При этом читатель должен иметь в виду, что смысловое значение числовых характеристик зависит, конечно, от того, для каких величин, с какой целью и *каким путем* эти характеристики *вводятся*. С этой точки зрения вопрос будет нами рассмотрен ниже в § 33, в нижеследующих же примерах преследуется цель предварительного ознакомления с постановкой вопроса. Поэтому мы будем исходить здесь из *готовых* числовых характеристик таких величин, как время, температура и т. д., в их обычной форме, не останавливаясь на обсуждении того, как эти характеристики введены.

1. Рассмотрим числовые шкалы для точек прямой, значений температуры или моментов времени. Как известно, эти шкалы строятся иначе, нежели шкала твердости, и предполагают в той или иной форме процесс измерения. Посмотрим, как это отразится на смысловом значении различных соотношений между числовыми отметками этих шкал.

Легко видеть, что во всех указанных случаях *сложение числовых отметок* не имеет непосредственного объективного смысла. Это находит свое отражение и в явной несуразности вопросов вроде „сколько будет без четверти два *да* половина пятого?“ Вследствие произвольности начала отсчета соотношение $A+B=C$ между числовыми отметками, имеющее место для одной шкалы, будет неверно в другой; оно, следовательно, неинвариантно и выражает свойства *шкалы*, а не изучаемой величины.

Так, например, измеряя температуру по Цельсию, мы получим $3°+0°=3°$. Ведя отсчет по шкале абсолютной температуры, мы получим вместо этого $276°+273°=549°$. То же относится и к сложению числовых отметок моментов времени, если переходить, скажем, от отсчетов по местному к отсчетам по не совпадающему с ним зональному времени. Для того чтобы подчеркнуть, что, при всем том, порядковое расположение значений рассматриваемых величин инвариантно передается числовыми отметками при любом выборе начала, мы будем говорить, что в случаях, аналогичных рассмотренным, числовые отметки шкал имеют *порядковый* смысл.

Мы можем, однако, выделить некоторые, зависящие от рассмотренных, числовые характеристики, по отношению к которым операция сложения приобретает осмысленный характер. Это *разности* температур, *разности* числовых отметок, характеризующих моменты времени, т. е. числа, отвечающие промежуткам времени и т. д.

Если температура была первоначально 3°, потом повысилась на 5°, то этот факт может быть записан формулой

$$3^\circ + 5^\circ = 8^\circ,$$

в которой, однако, смысловое значение числовых характеристик *различно*: 3° и 8° соответствуют непосредственным отсчетам на шкале, число же 5° характеризует величину *перехода* от одного значения температуры к другому.

Повышение температуры на 5° и последующее ее повышение на 4° дает результирующее повышение на

$$5^\circ + 4^\circ = 9^\circ.$$

В этой формуле числа характеризуют **переходы** от одного значения температуры к другому и соответствуют разностям числовых отметок соответствующей шкалы.

Такого рода соотношения можно установить для переходов и в случае любой скалярной величины чистого типа, например для шкалы твердости. Однако в общем случае может случиться, что характеристика переходов разностью числовых отметок шкалы *без указания начальной и конечной точек перехода* будет носить исключительно формальный характер, не отражающий никаких объективных (не зависящих от способа построения шкалы) свойств изучаемой величины.

Суть дела заключается в том, что в общем случае скалярной величины не имеет смысла говорить о *равенстве* или *неравенстве* переходов *с различными начальными точками,* например для случая шкалы твердости о равенстве перехода от свинца к кварцу, переходу, скажем, от полевого шпата к рубину.

В связи с этим характеристика *одним и тем же числом* двух таких переходов может оказаться случайным свойством способа построения шкалы.

В этом смысле следует иметь в виду, что и для такой величины, как температура, равенство $10^\circ - 5^\circ = 95^\circ - 90^\circ$ двух переходов служит лишь выражением соответствующего соотношения для линейных отрезков шкалы термометра. Вопрос о том, в какой мере это равенство отражает свойства физической величины, которую мы намерены изучать, говоря о температуре, есть, по существу, вопрос о целом комплексе физических явлений. Об этом не следует забывать, исходя — в математических построениях — из определения величины, называемой „температурой" на основе определенного процесса измерения — в простейшем случае на основе рассмотрения положения столбика ртути в термометре. Так, например, равенство перехода от 1° к 2° С и перехода от 15° к 16° С означает, по определению, лишь то, что в обоих случаях удлинение столбика ртути в термометре одинаково; для тесно связанной с понятием температуры физической величины, именуемой „количеством теплоты“, эти переходы, однако, неравноправны, с чем и приходится считаться при установлении известного из элементарного курса физики определения калории.

Вообще, до тех пор, пока мы имеем дело со скалярными величинами, для которых понятие о равенстве переходов не имеет не зависящего от способа построения шкалы объективного смысла, соотношения между переходами типа

$$a+b=c$$

имеют смысл лишь для переходов

$$a=B-A \quad \text{и} \quad b=C-B$$

с общей связующей точкой B и выражают в этом случае лишь эквивалентность двух последовательных переходов от A к B и затем от B к C одному переходу от A к C.

Иначе обстоит дело для таких величин, для которых **равенство переходов** с различными начальными точками может быть определено *независимо от того или иного способа построения шкалы* на основе свойств изучаемой скалярной величины. Это имеет место, например, для таких величин, как длина, время, масса, количество теплоты и т. п.

В этих случаях становится возможным изменять начальную точку перехода, заменяя переход *равным* ему в согласии с установленным определением равенства. Это позволяет, заменяя слагаемые равными им с общей связующей точкой, *складывать* переходы с различными начальными точками и тем самым обосновывает то представление о „*составленности*“ одних переходов из других, о котором мы говорили в начале § 25. Такого рода величины, в отличие от скалярных величин чистого типа, называются **аддитивными** величинами. Для этих величин числовые характеристики строятся (см. ниже § 28) так, чтобы *равным* переходам соответствовали *равные* числа. При этом условии равенства типа

$$a+b=c$$

для чисел, измеряющих переходы, приобретают смысл, характеризующий свойства самой величины, а не только случайные свойства шкалы. В этом смысле можно говорить о *количественном* (а не порядковом) значении чисел, характеризующих переходы в области аддитивных величин.

В частности, если равенством $A=0$ в системе порядковых отметок задается начальная точка шкалы, выбор которой произволен, то равенство $a=0$ для случая, когда $a=B-A$ есть числовая характеристика перехода, выражает не зависящий от произвола в построении шкалы факт совпадения двух значений B и A. В этом смысле можно говорить о порядковом (в системе числовых отметок) и количественном (в системе переходов) значении числа нуль.

Перейдем теперь к операциям второй ступени в области аддитивных величин. В отношении *перемножения* чисел, отнесенных переходам, мы можем повторить все то, что мы уже говорили о сложении порядковых числовых отметок, отнесенных значениям скалярной величины. Вне каких-либо добавочных связей и дополнительных соглашений перемножение двух разностей показаний термометра или двух разностей показаний часов имеет формальный смысл и никаким реальным соотношениям в области *самой изучаемой величины* не соответствует. Для примера достаточно напомнить известную методическую трудность *конкретного* истолкования правила знаков при умножении при использовании значения *одной* направленной величины.

Соотношение $(-2)\cdot(-3)=+6$ не поддается конкретному истолкованию ни для числовых отметок, ни для числовых характеристик переходов в пределах одной и той же (например температурной или временной) шкалы.

2. Для получения числовых характеристик, для которых все операции первых двух ступеней будут допускать естественное конкретное истолкование, нам придется подняться еще на одну ступень выше, рассмотрев *отношения чисел, соответствующих переходам,* т. е. отношения разностей двух числовых отсчетов порядковой шкалы рассматриваемой величины.

Тот факт, что отношение одного перехода t к другому s выражается числом α, может быть записан формулой

$$t=\alpha\cdot s.$$

В этой формуле смысловое значение числовых характеристик различно: t и s отвечают переходам, множитель же α есть характеристика ***операции,*** которую нужно совершить над переходом s, чтобы притти к переходу t (например, при $\alpha=2$ удвоить, при $\alpha=-\frac{2}{3}$ разбить на три равных перехода, сложить два из них и переменить направление полученного перехода $\frac{2}{3}\cdot s$ на обратное).

Последовательное применение двух таких операций, характеризуемых числами α и β, равносильно третьей операции того же типа. Характеризующее ее число γ равно произведению чисел α и β, так что

$$\gamma=\beta\alpha.$$

Так, например, равенство

$$-2=3\left(\ \frac{2}{3}\right)$$

выражает тот факт, что применение операции утроения к результату применения описанной выше операции $\alpha=-\frac{2}{3}$, равносильно удвоению исходного перехода с одновременным изменением направления результата на противоположное. Этот факт не зависит от выбора начала отсчета и единицы меры, т. е. от допустимого произвола в построении шкалы.

В частности, отметим, что для чисел, отнесенных переходам, равенство $r=1$ имеет условный смысл, соответствуя произвольному, принятому за единицу переходу. Равенство же $\tau=\frac{r_1}{r_2}=1$, где r_1 и r_2 — числа, отнесенные двум переходам, выражает не зависящий от выбора единицы меры факт равенства этих переходов (равенство двух отрезков, двух промежутков времени и т. п.).

Мы видим, таким образом, что истолкование чисел, соответствующих отношениям переходов, как знаков действий (*операторов*) позволяет дать конкретное истолкование основным операциям над числами, при котором числовые соотношения не зависят уже ни от выбора начальной точки шкалы, ни от выбора единицы меры (инвариантны) и выражают, в соответствии с этим, объективные зависимости в области изучаемой величины, а не случайные свойства той или иной числовой шкалы.

Задача **измерения** и заключается в построении системы числовых характеристик *отношений переходов*. При этом, как мы увидим ниже, числовые характеристики строятся в порядке, противоположном рассмотренному, т. е. числовые отметки (шкала) получаются в последнюю очередь.

Такое построение, отражающее свойства изучаемой величины, в общем случае чисто скалярных величин (ср. рассмотренный выше случай шкалы твердости) неосуществимо. Ниже, переходя к систематическому изложению теории измерения, мы и установим условия, которым должна удовлетворять скалярная величина, для того, чтобы она была измерима в указанном смысле слова.

3. В заключение настоящего параграфа мы позволим себе сделать следующие замечания общего характера.

Приступая к систематическому изложению теории измерения скалярных величин, мы будем считать, что первоначально у нас имеется в распоряжении лишь *система целых положительных чисел*. На пути решения задачи об измерении мы естественным образом придем к необходимости вводить *новые категории чисел*, а именно отрицательные, дробные и иррациональные числа. При этом мы станем на точку зрения Гамильтона, рассматривая все категории чисел, появляющиеся в результате измерения одних переходов другими, как **операторы**, т. е. знаки операций, соответствующих определенным правилам получения одних переходов из других.

Мы увидим, что с этой точки зрения, наиболее близко соответствующей как историческому ходу развития понятия числа, так и логическому развитию идеи измерения, т. е. характеристики значения величины числом, введение новых чисел и установление основных правил операций имеет совершенно отчетливый смысл и допускает на всех стадиях построения совершенно конкретную интерпретацию. Этим операторная теория выгодно отличается от формальных теорий (теории пар и т. д.), восходящих по существу также к Гамильтону, но в современной трактовке преследующих несколько иные цели. С точки зрения порядка изложения существенно при этом подчеркнуть, что содержание этих формальных теорий, которые мы изложим в главе IV, становится значительно более ясным в свете общих построений, связанных с изучением скалярной величины вообще. Это и естественно: характерный для узко формальной точки зрения отрыв этих теорий от их логического и исторического источника не только не способствует выяснению сути дела, а зачастую непосредственно ведет к искажению методологической перспективы, при котором фактическое содержание процесса развития математических идей подменяется гипотетическим логическим построением. Сюда относятся, например, весьма распространенная трактовка развития понятия числа, при которой введение новых чисел производится в силу необходимости решать уравнения, не допускающие решения в прежней числовой системе. Так, отрицательные числа появляются при решении уравнений типа $x+a=0$, где $a>0$, дробные — при решении уравнений типа $ax \pm b=0$, иррациональные и комплексные при решении уравнений $x^2=a$ и $x^2=-a$ и иных, не имеющих рациональных корней и т. п. При этом законы операций устанавливаются путем распространения на новые символы тех законов действий, которые имели место в прежней числовой системе, когда аналогичные символы имели числовой смысл (принцип *перманентности* Ганкеля).

Так, например, правило сложения дробей $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ соответствует формуле, верной в области *целых* чисел при условии, что a и b делятся на c, правило сложения отрицательных разностей $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$ соответствует формуле, верной в области *положительных* чисел при условии $a>b$ и $c>d$.

По существу речь идет, стало быть, о том, чтобы *определять операции над вводимыми вновь числовыми символами так, чтобы сохранялись основные формальные законы действий.*

Не подлежит, конечно, сомнению, что такая концепция *логически* возможна. Что же касается действительного пути исторического развития и методологической стороны дела, то эта концепция отражает лишь некоторые, хотя и важные, но весьма частные стороны гораздо более широкого процесса *изучения скалярных величин.*

Логическое построение, проводимое здесь, значительно точнее отражает сущность этого процесса, в силу чего становятся, в частности, более ясными структура и смысл формальных теорий.

§ 28. Аддитивные величины. Задача измерения.

1. Возвращаясь к общему случаю скалярной величины (§ 25), мы отвлечемся сейчас от характеристики значений величины и переходов с помощью чисел и будем рассматривать каждый переход от одного значения величины A к другому — B как некоторый новый объект изучения, *вполне определяемый заданием значений* A *и* B *в заданном порядке.*

Переход от A к B мы будем обозначать знаком

$$(B,\ A)$$

и рассматривать его иногда как знак операции, применение которой к значению A дает в результате значение B. Это мы будем записывать так

$$(B,\ A) \text{ к } A = B.$$

Не налагая никаких добавочных требований, мы можем определить:

1) *соотношение скалярного расположения между переходами с общей начальной точкой* A, полагая

$$(B,\ A) \varepsilon (C,\ A)$$

в том случае, если

$$B \varepsilon C,$$

и

2) *операцию* **композиции** *двух переходов* $(C,\ B)$ и $(B,\ A)$ *с общей связующей точкой* B *как образование нового перехода от* A к C, записывая это так

$$(C,\ B) \text{ к } (B,\ A) = (C,\ A).$$

Эти определения имеют смысл в самом общем случае, например для шкалы твердости.

В общем классе скалярных величин мы выделим теперь класс величин, для которых система переходов образует, как мы будем говорить, *аддитивную скалярную величину* с помощью следующего требования.

На основе свойств изучаемой величины должно быть возможным установить (имеющее объективный смысл, т. е. не зависящее от способа построения числовой шкалы) *определение равенства переходов с различными начальными точками*, удовлетворяющее условиям:

1) *Равенство возможно только между переходами одного направления,* т. е. если

$$(A,\ B) = (A',\ B') \text{ и } A \varepsilon B, \text{ то и } A' \varepsilon B'.$$

2) *Если* $(A,\ B) = (A',\ B')$, то и $(B,\ A) = (B',\ A')$.

3) *При замене переходов равных им соотношение композиции не нарушается,* так что из

$$(A,\ B) = (A',\ B') \text{ и } (B,\ C) = (B',\ C')$$

следует

$$(A,\ B) \text{ к } (B,\ C) = (A',\ B') \text{ к } (B',\ C'),$$

или

$$(A,\ C) = (A',\ C').$$

Наконец, мы предположим еще, что переходы, по крайней мере, одного направления допускают ~~в этом направлении~~ *перенесение с сохранением равенства,* т. е.

4) *для всякого перехода* (B, A), *где* $A \varepsilon B$, *существует при* 1' *равный ему переход* (B', A').

Из этих условий вытекает возможность однозначно установить *скалярное расположение всех переходов* друг относительно друга, заменяя сравниваемые переходы равными им с общей начальной точкой и применяя к последним критерий 1 страницы 90.

Такая замена, в силу условия 4, всегда возможна, причем сравнение переходов приводит к одним и тем же результатам *независимо от выбора начальной точки.*

Действительно, если

$$(B, A) \varepsilon (C, A)$$

и

$$(B', A') = (B, A), \quad (C', A') = (C, A),$$

то

$$(C, B) = (C, A) \text{ к } (A, B) = (C', A') \text{ к } (A', B') = (C', B')$$

и, следовательно, при $B \varepsilon C$ будет и $B' \varepsilon C'$, т. е.

$$(B', A') \varepsilon (C', A').$$

Для переходов противоположного направления (B, A) и (C, D) при $B \varepsilon A$ и $C \varepsilon D$ можно просто положить $(B, A) \varepsilon (C, D)$ при $(D, C) \varepsilon (A, B)$.

Далее, на основе перенесения переходов с сохранением равенства мы можем теперь распространить определение *композиции* на случай переходов без общей связующей точки, называя (C, A) **композицией** любых переходов (M, N) и (K, L), соответственно *равных* переходам (C, B) и (B, A) с общей точкой B.

Таким образом, если $(M, N) = (C, B)$ и $(K, L) = (B, A)$, то, по определению,

$$(M, N) \text{ к } (K, L) = (C, B) \text{ к } (B, A) = (C, A).$$

В силу условия 3 (стр. 90) результат композиции однозначно (в смысле равенства) определяется заданием переходов (M, N) и (K, L), т. е. не зависит от выбора равных заданным переходов с общей связующей точкой. Действительно, если $(C', B') = (M, N) = (C, B)$ и $(B', A') = (K, L) = (B, A)$, то, согласно условию 3, $(C', A') = (C, A)$.

Операция композиции, как легко видеть, *ассоциативна*, так как

$$(D, C) \text{ к } (C, B) \text{ к } (B, A) = (D, B) \text{ к } (B, A) = (D, C) \text{ к } (C, A).$$

Из условия 4 следует, далее, что переходы, по крайней мере, в одном направлении (которое мы будем называть *положительным*) *допускают неограниченную композицию* (в теории измерения это требование можно было бы заменить условием неограниченной дробимости, однако для имеющихся в виду приложений предпочтительнее исходить из условия 4).

Резюмируя полученные результаты, мы можем сказать, что в рассматриваемом случае переходы образуют **аддитивную** величину, т. е. *такую скалярную систему, в которой определена однозначная и ассоциативная операция композиции - ограниченно выполнимая в одном, по крайней мере, направ. i.*

Отметим здесь, что то обстоятельство, что переходы вы олнимы, быть может, *не от всякой начальной точки,* для дальнейших построений существенной роли не играет.

2. Задача **измерения** для аддитивных величин может быть теперь поставлена так.

Требуется установить такую характеристику значений величины (в рассматриваемом случае — переходов) с помощью чисел, при которой

1) *каждому значению величины* (переходу) *соответствовало бы число,*

2) ***равным** значениям величины* (переходам) *соответствовали бы **равные** числа,* а неравным — неравные так, чтобы *соотношению скалярного расположения* ε *в области значений величины* (переходов) *соответствовало бы соотношение „меньше" в области характеризующих значения величины* (переходы) *чисел, и*

3) ***композиции** равных между собой значений величины* (переходов) *соответствовала бы **сумма** отнесенных им чисел.*

Примечание. Мы говорим о композиции *равных* между собой переходов для того, чтобы не вводить ненужного здесь допущения о независимости композиции переходов от их порядка. Это свойство будет вытекать как следствие из тех общих положений, на которых основан дальнейший ход рассуждения.

Мы переходим сейчас, в порядке решения поставленной задачи, к рассмотрению последовательных расширений исходной числовой системы натуральных чисел, необходимых для того, чтобы удовлетворить требованию 1. Мы будем обозначать в дальнейшем значения аддитивной величины (переходы) малыми латинскими буквами начала алфавита $a, b, c, \ldots$, натуральные числа — латинскими буквами средины алфавита $r, s, m, n, \ldots$, а числа как *операторы,* в том числе и вновь вводимые числовые символы, рассматриваемые как операторы, — греческими буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Соотношение ε для значений аддитивной величины (переходов), соответствующее положительному направлению, мы будем обозначать для простоты знаком „$<$".

Имея в виду дальнейшие приложения, мы будем ниже придерживаться терминологии, соответствующей теории измерения скалярных величин, т. е. говорить об измерении *переходов,* образующих рассматриваемую аддитивную величину; в той части построения, которая не требует введения отрицательных чисел, читатель может слово „переход" заменить словами „значение аддитивной величины".

§ 29. Операторная теория рациональных чисел.

1. Рассмотрим какой-либо переход положительного направления

$$a = (B, A), \quad (A \varepsilon B).$$

Результат b композиции n таких переходов

$$b = a \text{ к } a \text{ к } a \text{ к} \dots \text{к } a$$

мы будем обозначать знаком

$$b = na.$$

Целое число n мы рассматриваем здесь как **оператор**, применение которого к переходу a дает в результате переход b. Действие, обозначенное знаком n, состоит в композиции n переходов, равных a.

Числу 1 соответствует операция, не меняющая перехода, так что

$$1a = a.$$

Установим теперь следующие определения общего характера.

Два оператора α и β мы назовем ***равными*** *в том случае, когда применение их к равным переходам дает равные результаты.*

Далее, мы будем писать

$$\alpha < \beta,$$

если переходы αa и βa находятся в отношении

$$\alpha a < \beta a,$$

коль скоро переход a — положительного направления.

Суммой $\alpha + \beta$ операторов α и β мы назовем оператор, результат применения которого к какому-либо переходу a равен *композиции* переходов αa и βb, так что, по определению,

$$(\alpha + \beta)\, a = \alpha a \text{ к } \beta a.$$

Произведением $\beta\alpha$ операторов α и β мы назовем оператор, применение которого к какому-либо переходу a равносильно *последовательному производству* (композиции) операций α и β, т. е. применению оператора β к переходу αa. Таким образом, если

$$\gamma = \beta\alpha,$$

то, по определению,

$$\gamma a = \beta\, (\alpha a).$$

Вследствие аналогии с соответствующим положением для переходов, согласно которому композиции переходов мы относим сумму характеризующих переходы чисел, мы будем иногда операторы α, β, γ, ... называть переходами второй ступени, а обычные переходы называть операторами первой ступени.

Для рассмотренных выше операторов — целых чисел — приведенные выше определения дают, очевидно, результаты, совпадающие с обычными.

Сохраняя эти определения для всех категорий операторов, которые мы будем вводить ниже, мы положим их в основу определений равенства и неравенства и основных двух действий: сложения и умножения для новых категорий чисел, в полном соответствии с нашим стремлением удовлетворить требованиям 1—3 страницы 92 (§ 28).

Пусть теперь некоторый переход b связан с переходом a соотношением

$$nb = ma, \tag{1}$$

где m и n — целые числа.

Мы будем обозначать операцию α, применение которой к переходу a дает в результате переход b, знаком

$$\alpha = \frac{m}{n}$$

и писать

$$b = \frac{m}{n} a.$$

Равенство (1) служит, таким образом, определением операции $\alpha = \frac{m}{n}$.

Операторы типа $\frac{m}{n}$ мы будем называть дробями, вводя этим самым новую категорию чисел — дробные числа.

Если переход a допускает разбиение на n равных переходов, из которых a получается путем композиции, то можно сказать, что **дробь** $\frac{m}{n}$, согласно с определением, есть *знак операции, состоящей из разбиения перехода a на n равных между собой компонент композиции, с последующей композицией m полученных, таким образом, переходов, равных $\frac{1}{n}a$.*

Пусть, наряду с

$$nb = ma,$$

имеем

$$n_1 b = m_1 a.$$

Согласно с общим определением равенства операторов, это означает, что

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}.$$

С другой стороны, из приведенных равенств следует

$$nn_1 b = mn_1 a = nm_1 a,$$

откуда

$$mn_1 = nm_1.$$

Этим условием определяется, таким образом, *равенство* дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$, рассматриваемых как операторы.

Аналогичным путем выводим, что

$$\frac{m}{n} < \frac{m_1}{n_1},$$

если $mn_1 < nm_1$.

Аксиомы скалярного расположения (§ 25), очевидно, выполнены.

Пусть

$$nb = ma \quad \text{и} \quad n_1c = m_1a.$$

Согласно с общим определением сложения для операторов,

$$\left(\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1}\right) a = b \text{ к } c.$$

С другой стороны

$$nn_1 (b \text{ к } c) = (mn_1 + nm_1)\, a,$$

откуда

$$b \text{ к } c = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1}\, a,$$

так что

$$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1}.$$

Этим равенством определяется, таким образом, операция *сложения* дробей. Нетрудно проверить непосредственно, что эта операция обладает свойством ассоциативности $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ и коммутативности $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Обратная операция — *вычитания* — выполнима в случае, если $\frac{m_1}{n_1} \text{ в } \frac{m}{n}$, т. е. если $mn_1 > nm_1$. Тогда

$$\frac{m}{n} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 - m_1n}{nn_1}$$

есть дробь, которая, будучи сложена с $\frac{m_1}{n_1}$, дает в результате $\frac{m}{n}$.

Рассмотрим теперь соответствующее определению умножения последовательное производство двух операций $\frac{r}{s}$ и $\frac{m}{n}$.

Полагая

$$nb = ma$$

и

$$sc = rb,$$

найдем, с одной стороны, по определению умножения операторов

$$c = \frac{r}{s}\left(\frac{m}{n}\, a\right) = \left(\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n}\right) a$$

и, с другой стороны,

$$snc = rma,$$

т. е.

$$c = \frac{rm}{sn} a.$$

Равенством

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{m}{n} = \frac{rm}{sn}$$

определяется, таким образом, операция *умножения* дробей. Ассоциативный и коммутативный законы и дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению, очевидно, выполнены.

2. Перейдем теперь к введению отрицательных чисел.

Пусть

$$(C, D) = \alpha (A, B),$$

где α—рациональное (пока, конечно, положительное) число.

Мы введем знак

$$-\alpha$$

для обозначения операции, приводящей от перехода (A, B) к переходу (D, C), так что

$$(D, C) = (-\alpha)(A, B).$$

Отрицательное число $-\alpha$ мы определяем, таким образом, как *оператор, состоящий в применении операции α с последующей переменой направления перехода на противоположное.*

Так как при $\alpha(A, B) = (C, D)$ мы имеем $\alpha(B, A) = (D, C)$, то, вводя для операции перемены направления перехода на противоположное знак (-1), так что $(-1)(A, B) = (B, A)$, мы могли бы написать, в согласии с общим определением умножения операторов,

$$-\alpha = (-1)\alpha = \alpha(-1).$$

Введем еще число 0 как оператор, дающий в результате применения к любому переходу (C, D) *нулевой* переход.

$$0 \cdot (C, D) = (A, A) = (B, B) = \ldots$$

Нулевой переход к композиции с любым другим переходом не меняет этого перехода

$$(A, A) \text{ к } (A, B) = (A, B).$$

Неотрицательное число α мы назовем **абсолютной величиной** как числа α, так и числа $-\alpha$ и обозначим знаком $|\alpha|$, так что

$$|-\alpha| = \alpha \quad \text{и} \quad |\alpha| = \alpha,$$

если α — положительное число или нуль.

Согласно с общим определением скалярного расположения переходов и операторов, найдем, что

1) равенство $\alpha=\beta$ в новой, расширенной отрицательными числами и нулем числовой системе **относительных** чисел возможно лишь, если знаки (при $\alpha \neq 0$) и абсолютные величины чисел α и β совпадают;

2) если $A \in B$, то

$$(A, A)<(B, A) \quad \text{и} \quad (A, B)<(A, A),$$

так что

$$0<\alpha \quad \text{и} \quad -\alpha<0,$$

если α положительное число;

3) если

$$\alpha<\beta,$$

то, по определению, при $A \in B$ будет $\alpha(B, A)<\beta(A, B)$ и, стало быть, $-\beta(B, A)<-\alpha(B, A)$, т. е.

$$-\beta<-\alpha.$$

Этими соотношениями устанавливается скалярное расположение системы всех относительных чисел, удовлетворяющее требованиям § 25.

3. Перейдем к определению основных операций.

Пусть $\alpha>0$ и $\beta>0$ и

$$(C, D)=-\alpha(A, B), \quad (E, F)=-\beta(A, B).$$

Тогда

$$(C, D) \text{ к } (E, F)=[(-\alpha)+(-\beta)](A, B)=$$
$$=(\alpha+\beta)(B, A)=-(\alpha+\beta)(A, B).$$

Это дает обычное правило сложения относительных чисел одинакового знака.

Пусть попрежнему $\alpha>0$ и $\beta>0$ и пусть

$$(C, D)=-\alpha(A, B), \quad (E, F)=\beta(A, B).$$

Тогда

$$(C, D) \text{ к } (E, F)=(-\alpha+\beta)(A, B)=$$
$$=\alpha(B, A) \text{ к } \beta(A, B).$$

Если $\alpha>\beta$, то, как было показано выше при рассмотрении операции вычитания дробей,

$$\alpha=\gamma+\beta,$$

где $\gamma>0$. Поэтому

$$\alpha(B, A)=\gamma(B, A) \text{ к } \beta(B, A),$$

и так как

$$\beta(B, A) \text{ к } \beta(A, B)=(A, A)=0,$$

то

$$\alpha(B, A) \text{ к } \beta(A, B)=\gamma(B, A)=-\gamma(A, B).$$

Итак,

$$(-\alpha+\beta)(A, B)=-\gamma(A, B),$$

т. е.

$$-\alpha+\beta=-\gamma=-|\alpha-\beta|.$$

Аналогично, в случае $\beta>\alpha$ получим

$$-\alpha+\beta=+|\beta-\alpha|.$$

Перестановка слагаемых на результат не влияет, и мы получаем, таким образом, обычные правила сложения относительных чисел.

Замечая, что из равенства

$$(C,\ D)\ \text{к}\ (D,\ E)=(C,\ E)$$

следует

$$(C,\ D)=(C,\ E)\ \text{к}\ (E,\ D),$$

найдем, что операция вычитания

$$\alpha-\beta$$

в области относительных чисел может быть заменена сложением

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

Далее, так как перемена направления перехода на противоположное может быть совершена как до, так и после применения какой-либо рациональной операции $\alpha=\frac{m}{n}$, то

$$\beta(-\alpha)(A,\ B)=-(\beta\alpha)(A,\ B),$$
$$\alpha(-\beta)(A,\ B)=-(\alpha\beta)(A,\ B),$$

и, наконец, так как двукратная перемена направления приводит к исходному переходу,

$$(-\alpha)(-\beta)(A,\ B)=\alpha\beta(A,\ B).$$

Мы приходим к известному правилу знаков при умножении относительных чисел.

Выполнение основных законов действий контролируется, как обычно.

4. Проведенный здесь метод введения дробных и отрицательных чисел как *операторов*, как легко видеть, наиболее точно соответствует генетическому происхождению этих категорий чисел и фактической их роли в приложениях. Та ступень абстракции, на которой эта операторная теория строится, сохраняет, наряду с достаточной общностью и строгостью формальных определений, возможность совершенно отчетливой содержательной интерпретации действий над числами. Одновременно с этим весь процесс последовательных обобщений понятия числа рассматривается как одно единое целое и все построения ведутся в рамках одной и той же схемы, тесно связанной с общей задачей измерения скалярных величин.

Отметим, в частности, отчетливость интерпретации правила знаков при умножении в операторной теории относительных чисел. Неудача попыток истолкования этого правила на обычных схемах долг, имущество, на направленных отрезках и т. д. зависит от того, что в этих схемах относительные числа интерпретируются не как операторы, применяемые к переходам, а как *самые переходы*, что, как мы уже отмечали в § 26, методологически неправильно. В истолковании на схеме $s=v \cdot t$ множимое v истолковывается как путь, проходимый в единицу времени. В связи с этим значения t играют роль операторов по отношению к v и интерпретация проходит сравнительно гладко.

Аналогичное замечание верно и в отношении действия умножения дробей. Если не подчеркивать операторного смысла дробных множителей (найти часть и т. д.), то объединение в одном понятии умножения различных по существу и характеру результатов действий резко противоречит представлениям, соответствующим операциям с целыми числами. Общее понятие умножения представляло, в связи с этим, затруднения еще в XVI веке.

Операции же первой ступени допускают истолкование в области самих переходов.

§ 30. Аксиома Архимеда.

Перейдем теперь к следующей стадии обобщения — к понятию действительного числа.

Мы будем для простоты рассматривать лишь переходы положительного направления.

Известный из элементарной геометрии факт существования несоизмеримых отрезков заставляет нас считаться с тем, что в общем случае не всякий переход может быть охарактеризован рациональным числом.

Несоизмеримость перехода b и перехода a в рассматриваемой здесь теории измерения выразится в том, что ни для одной пары целых чисел m и n не будет иметь место равенство

$$nb=ma.$$

Таким образом в случае несоизмеримости переходов b и a для *каждой* произвольным образом выбранной пары целых чисел m и n должно иметь место *одно из двух соотношений*

1) $$nb>ma,$$

либо

2) $$nb<ma.$$

В первом случае:

$$b>\frac{m}{n}a,$$

во втором:

$$b<\frac{m}{n}a.$$

Рассмотрим сначала возможные предельные случаи.

I. Переход b таков, что для *всякого* рационального числа $\frac{m}{n}$

$$b < \frac{m}{n} a,$$

т. е. b меньше всякого перехода, соизмеримого с a. Другими словами, с помощью сколь угодно точного измерения долями a переход b невозможно будет отличить от нулевого перехода (A, A). Если при этом $b \quad (A, A) = 0$, то мы будем говорить, что переход b ***несравним*** с переходом a.

II. Переход b таков, что для *всякого* рационального числа $\frac{m}{n}$

$$b > \frac{m}{n} a,$$

т. е. b больше всякого перехода, соизмеримого с a. В этом случае переход a нельзя будет отличить от нулевого при сколь угодно точном измерении долями b. Переход b мы назовем и в этом случае ***несравнимым*** с a.

Можно, таким образом, сказать, что случай I соответствует существованию „несравнимо малых", а случай II —существованию „несравнимо больших" по отношению к a переходов.

Легко построить пример скалярной величины, для которой такие несравнимые между собой переходы действительно существуют.

Рассмотрим хотя бы такое скалярное расположение точек $M(x, y)$ с неотрицательными декартовыми координатами x, y, при котором, по определению,

$$M(x, y) \varepsilon M'(x', y'),$$

если

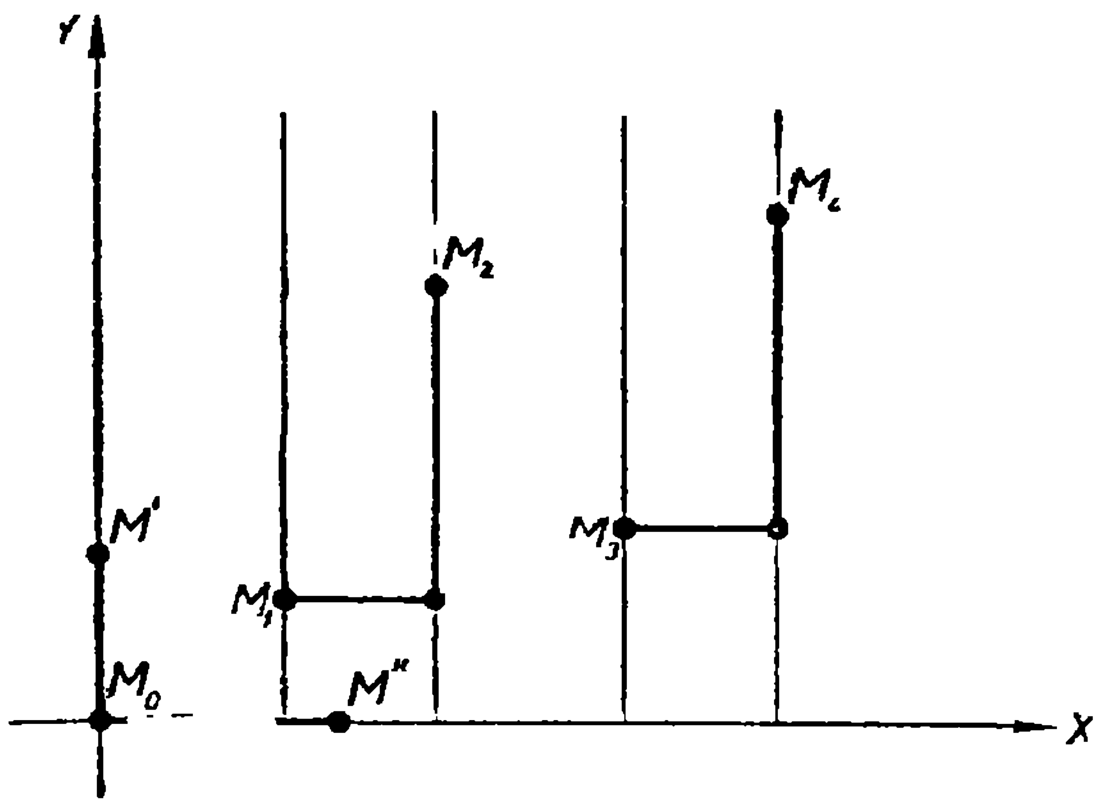
$$x < x'$$

и, в случае равенства $x = x'$,

$$M(x, y) \varepsilon M'(x, y'),$$

если

$$y < y'.$$



Черт. 6.

Переходы (M_2, M_1) и (M_4, M_3) будем, по определению, считать равными в том и только в том случае, если для соответствующих координат

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \quad \text{и} \quad y_2 - y_1 = y_4 - y_3.$$

Условия § 27, очевидно, выполнены.

С другой стороны, нетрудно видеть, что переход

$$b = (M'(0, y), \; M_0(0, 0)) \qquad y \neq 0$$

„несравнимо мал“ по отношению к переходу

$$a=(M''(x, 0),\ M_0(0, 0)) \qquad x \quad 0,$$

так как, в силу определения отношения ε, мы будем имет

$$b<\frac{m}{n}a$$

при любом выборе чисел m и n.

Соответственно с этим переход a „несравнимо большой“ по отношению к переходу b.

Несколько менее искусственный пример можно получить, располагая в *порядке роста* при $x\to\infty$ функции

$$x^{a},\ \ln x,\ e^{x}$$

и составленные из них путем перемножения и образования сложных функций (итерации) функции

$$x^{a}\ln x,\ \ln\ln x,\ x(\ln x)^{a},\ xe^{x},\ e^{e^{x}} \text{ и т. п.}$$

Соотношение ε для этих функций определяется, согласно с известным определением порядка роста, так:

$$\varphi(x)\,\varepsilon\,\psi(x),$$

если

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

Переход (ψ, φ) мы будем считать равным переходу (ψ_1, φ_1), если

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\frac{\psi_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Если выбрать за основную функцию (начало отсчета) функцию $\varphi_0(x)=1$, то применение перехода $(\varphi, 1)$ к функции $\psi(x)$ сведется к умножению $\psi(x)$ на $\varphi(x)$.

Выбирая переход $a=(x, 1)$ за основной, мы найдем, что соизмеримые с ним переходы соответствуют умножению на

$$x,\ x^{2},\ x^{3},\ \ldots;\ x^{n},\ \ldots;\ x^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{2}{3}},\ \ldots$$

вообще на

$$x^{\frac{m}{n}},$$

где $\dfrac{m}{n}$ — рациональное число.

Переход $(\ln x, 1)$ „несравнимо мал“ по отношению к переходу $(x, 1)$, так как

$$(\ln x,\ 1)\,\varepsilon\,(x^{r},\ 1)$$

при всяком рациональном $r>0$, ибо

$$\ln x\,\varepsilon\,x^{r},$$

согласно известной формуле

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0.$$

Переход $(e^x, 1)$ „несравнимо велик" по отношению к переходу $(x, 1)$, так как

$$(x^r, 1) \varepsilon (e^x, 1),$$

ибо

$$x^r \varepsilon e^x,$$

согласно известной формуле

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^r}{e^x} = 0.$$

В случаях, подобных только что рассмотренному, система операторов, воспроизводящих всю совокупность возможных переходов, должна была бы быть построена на существенно иных принципах (напоминающих постановку вопроса в § 24), нежели обычное измерение, приводящее к системе действительных чисел.

Мы исключим, поэтому, все скалярные величины такого типа, введя аксиому *конечной сравнимости* переходов, известную под названием **аксиомы Архимеда:**

Каков бы ни был переход a и другой данный переход b (оба положительного направления), *всегда можно указать такое натуральное число n, что n раз повторенный* (в смысле композиции с самим собой) *переход a превзойдет переход b, так что*

$$na > b.$$

Этой аксиомой исключаются оба случая I и II, соответствующие несравнимым между собой переходам.

Как мы сейчас покажем, именно в силу этой аксиомы оказывается, кроме того, вообще возможным различение неравных между собой переходов при помощи приближенного измерения их одним и тем же третьим переходом.

Системы переходов, для которых аксиома Архимеда не выполняется, объединяются под общим названием *не-архимедовых* величин.

§ 31. Соизмеримые и несоизмеримые переходы.

1. Итак, предположим, что аксиома Архимеда выполнена. Тогда для любых двух переходов a и b будут существовать как такие рациональные числа $r = \frac{m}{n}$, для которых

$$nb > ma, \tag{1}$$

так и такие $r' = \frac{m'}{n'}$, для которых

$$n'b < m'a. \tag{2}$$

Назовем числа r, удовлетворяющие соотношению (1), числами первого (нижнего, левого) класса R, а числа r', удовлетворяющие соотношению (2), числами второго (верхнего, правого) класса R'.

Таким образом

$$r \subset R, \text{ если } ra < b$$

и

$$r' \subset R', \text{ если } r'a > b.$$

Из неравенств

$$ra < b < r'a$$

следует, что все числа первого класса меньше всех чисел второго класса

$$r < r'.$$

В случае, когда a и b соизмеримы, существует еще одно число третьего, промежуточного, класса

$$r_0 = \frac{m_0}{n_0},$$

для которого

$$n_0 b = m_0 a \quad \text{и} \quad b = r_0 a.$$

Это есть *единственное* рациональное число, удовлетворяющее всем неравенствам

$$r < r_0 < r'$$

при любых $r \subset R$ и $r' \subset R'$.

Таким образом, если переходы b и a — соизмеримы, то переход b вполне определяется классами чисел R и R' с помощью разделяющего эти классы рационального числа r_0 по формуле

$$b = r_0 a.$$

Мы покажем сейчас, что при *условии выполнения аксиомы Архимеда задание двух классов чисел R и R' однозначно определяет переход b по заданному переходу a* как в том случае, когда a и b соизмеримы, так и в том случае, когда a и b несоизмеримы.

Это обстоятельство играет фундаментальную роль в теории измерения и в построении теории действительных чисел, позволяя *определить оператор* α, соответствующий преобразованию перехода a в несоизмеримый с ним переход $b = \alpha a$ *с помощью задания двух классов чисел* R и R', определенных соотношениями (1) и (2).

Докажем высказанное утверждение.

Пусть n — произвольное целое число. Согласно аксиоме Архимеда, можно найти такое целое число $m \geqslant 0$, что

$$ma < nb < (m+1)a. \tag{3}$$

Число $\frac{m}{n}$ принадлежит, таким образом, к классу R, а число

$\frac{m+1}{n}$ к классу R' [в случае, когда a и b – соизмеримы, в первом из неравенств (3) следует поставить знак $\leqslant$, что не нарушает дальнейшего хода доказательства].

Так как разность между числами $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m}{n}$ равна $\frac{1}{n}$ и при $n \to \infty$ делается сколь угодно малой, то мы можем, другими словами, сказать, что аксиома Архимеда имеет следствием возможность найти два числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$, измеряющие b с помощью a с недостатком и с избытком *с любой степенью точности* $\frac{1}{n}$.

Полагая $b=(D, C)$, допустим теперь, что какому-нибудь другому переходу $b'=(D', C)$ соответствуют *те же классы чисел* R и R', что и переходу (D, C). Тогда мы будем иметь, наряду с формулами (3), для тех же чисел $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ неравенства

$$ma < nb' < (m+1)a. \qquad (4)$$

Производя в соотношениях (3) и (4) вычитание крест-накрест, найдем, предполагая без нарушения общности, что $D \in D'$,

$$nb' - nb = n(D', C) - n(D, C) < a,$$

или

$$n(D', D) < a$$

при любом n, что, согласно аксиоме Архимеда, возможно лишь при

$$(D', D) = (D, D) = 0,$$

так что D' и D совпадают и

$$b' = (D', C) = (D, C) = b.$$

Этим и доказано, что переход b *однозначно* определяется заданием перехода a и двух классов R и R' соответствующего разбиения всех рациональных чисел на два или, в случае соизмеримости, на три класса.

2. Отметим еще следующие свойства классов рациональных чисел R и R', определяющих переход b при заданном a.

Теорема 1. *В нижнем классе R нет наибольшего, а в верхнем классе R' нет наименьшего числа.*

В этом легко убедиться, вводя, например, для случая $r \in R$, т. е. $ra < b = (D, C)$, обозначение

$$(D', C) = ra$$

и рассматривая переход

$$(D, D') > 0.$$

По аксиоме Архимеда найдется такое натуральное число s, что

$$s(D, D') > a,$$

т. е. $\frac{1}{s} a < (D, D')$. Но тогда

$$\frac{1}{s} \quad r) a < (D, D') \text{ к } (D', C) = (D, C) = b,$$

т. е. число

$$\frac{1}{s} \quad r \quad R.$$

Таким образом, для всякого числа r нижнего класса можно указать большее число $r \; \frac{1}{s}$, все еще принадлежащее нижнему классу.

Аналогично докажется теорема и для верхнего класса.

Если - с целью достижения большей симметрии в определениях - рассматривать и для случая соизмеримых переходов деление *всех* рациональных чисел на *два* только класса, присоединив промежуточное рациональное число r_0 к какому-либо из двух классов R или R' [ослабляя при этом знак неравенства в соответствующей из формул (1) или (2)], то, согласно доказанной только что теореме, отличие случая соизмеримых переходов от случая несоизмеримых переходов может быть формулировано так.

Если переходы соизмеримы, то число r_0 оказывается *крайним* в том классе, к которому оно причислено: *наименьшим* — в верхнем, *наибольшим* — в нижнем.

Если же переходы несоизмеримы, то ни в одном из двух классов R и R', исчерпывающих в совокупности все рациональные числа, *нет крайнего* числа: в верхнем — наименьшего, в нижнем — наибольшего.

Теорема 2. *В классах R и R' можно указать числа, принадлежащие различным классам и сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.*

Утверждение это было, по существу говоря, доказано выше на страницах 103—104. Действительно, построенные там рациональные числа

$$r = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad r' = \frac{m}{n} \; \frac{1}{}$$

принадлежат к различным классам и отличаются друг от друга на дробь $\frac{1}{n}$, которая может быть сделана сколь угодно малой.

§ 32. Действительные числа.

1. Так как, по доказанному в предыдущем параграфе, переход b однозначно задается заданием исходного перехода a и

классов R и R' по формулам (1) и (2) (стр. 102), то мы можем сказать, что *задание классов* R и R' равносильно заданию *оператора,* с помощью которого из перехода a получается переход b.

Мы приходим, другими словами, к тому, чтобы ввести, объединяя в общую схему случаи соизмеримых и несоизмеримых переходов, новую категорию операторов, которые мы назовем действительными числами, с помощью следующих определений.

1) *Всякое разбиение всех рациональных чисел* (или всех, кроме одного промежуточного) *на два класса* R и R' *так, что все числа одного класса меньше всех чисел другого, определяет некоторое* ***действительное число*** α.

2) *Если действительное число* α *определено классами* R и R', *порождаемыми формулами* (1) и (2) (стр. 102), *то мы будем говорить, что переход* b *получается из перехода* a *с помощью применения оператора* α, *и писать*

$$b = \alpha a.$$

Введение действительных чисел позволяет, таким образом, в случае выполнимости аксиомы Архимеда, однозначно охарактеризовать каждый переход с помощью *действительного* числа.

3) *Два действительных числа мы будем называть равными, если они определяются одними и теми же классами* R *и* R'

Это определение в точности соответствует определению равенства двух отношений, принадлежащему еще Евклиду и охватывающему случаи соизмеримых и несоизмеримых отрезков:

„отношение CD к AB равно отношению C_1D_1 к A_1B_1, если всякий раз, как

$$nCD \gtreqless mAB$$

(где n и m — целые числа), имеют место соответственные неравенства

$$nC_1D_1 \gtreqless mA_1B_1\text{“}.$$

Как легко видеть, в введенной нами терминологии это как раз и означает, что классы R и R', определяющие отношение CD к AB, совпадают с классами чисел R и R', определяющих отношение C_1D_1 к A_1B_1, т. е. C_1D_1 получается из A_1B_1 с помощью *того же оператора* α, с помощью которого CD получается из AB.

Основанная на этом определении евклидова теория пропорций и являлась в системе греческой геометрии логическим эквивалентом современной теории действительных чисел.

4) В соответствии с общим определением скалярного расположения для операторов (стр. 93), мы устанавливаем по определению для действительных чисел α и β неравенства

$$\alpha < \beta,$$

если *верхний* класс R' для числа α и *нижний* класс R для числа β имеют общие элементы.

Если такой общий элемент есть $\bar{r}$ и $b=\alpha a$, $c=\beta a$, то, согласно формулам (1) и (2) (стр. 102), мы будем иметь

$$\alpha a = b < \bar{r} a < c = \beta a,$$

соответственно с чем мы и принимаем по определению, что

$$\alpha < \beta.$$

В частности, если α определяется классами R и R' и $r \subset R$, $r' \subset R'$, то

$$r < \alpha < r'.$$

Таким образом, мы видим, что определение оператора с помощью классов R и R' заключается по сути дела в установлении *места* действительного числа α в *скалярной системе рациональных чисел* соответственно определенному неравенствами

$$ra < b < r'a$$

месту, занимаемому переходом b в *скалярной системе соизмеримых* с a *переходов типа* $\frac{m}{n}a$.

В том случае, когда существует *рациональное* число r_0, удовлетворяющее неравенствам $r < r_0 < r'$, действительное число α, определяемое классами R и R', совпадает с этим рациональным числом. Если же в системе рациональных чисел нет промежуточного числа r_0, то соответствующий пробел заполняется, согласно неравенствам $r < \alpha < r'$, числовым символом вновь вводимого рода — **иррациональным** числом α.

2. Перейдем теперь к определению действий над действительными числами.

Согласно общему определению действий для операторов, для суммы $\lambda = \alpha + \beta$ и произведения $\mu = \alpha\beta$ действительных чисел мы должны иметь

$$\lambda a = \alpha a \text{ к } \beta a$$

и

$$\mu a = \alpha(\beta a).$$

Отсюда следует, что если α определяется классами чисел R и R', а β классами чисел S и S', то сумма $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ должны быть определены так, чтобы для всяких $r \subset R$, $r' \subset R'$ и $s \subset S$, $s' \subset S'$ было

$$r + s < \alpha + \beta < r' + s'$$

и

$$rs < \alpha\beta < r's'.$$

Обозначим через L класс всех чисел типа $r + s$, через L' класс всех чисел типа $r' + s'$ и аналогично через M и M' классы чисел rs и $r's'$.

Для доказательства того, что классы L и L' определяют некоторое действительное число λ, а классы M и M' — некоторое действительное число μ, достаточно будет убедиться в том, что в обоих случаях в указанные классы входят все рациональные числа, кроме, быть может, одного.

С этой целью рассмотрим рациональное число t, удовлетворяющее для каких-либо $r_1 \subset R$ и $s_1 \subset S$ неравенству

$$t < r_1 + s_1.$$

Так как $t - r_1 < s_1$, то, стало быть, $t - r_1 \subset S$ и можно положить $t - r_1 = s_2$ или $t = r_1 + s_2$, откуда вытекает, что

$$t \subset L.$$

Аналогично докажется, что при

$$t > r_1' + s_1'$$

должно быть

$$t \subset L'.$$

Остается случай, когда

$$r + s < t < r' + s'$$

для всех r, s, r', s'. Докажем, что может существовать *только одно* рациональное число t, удовлетворяющее *всем* таким неравенствам.

В самом деле, если

$$r + s < t_1 < t_2 < r' + s',$$

то

$$t_2 - t_1 < (r' + s') - (r + s) = (r' - r) + (s' - s) < \frac{2}{n},$$

коль скоро, в соответствии с теоремой 2 § 33, r' и r, так же как и s' и s, выбраны так, что

$$r' - r < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad s' - s < \frac{1}{n}.$$

Так как число $\frac{2}{n}$ произвольно мало, то разность $t_2 - t_1$ не может быть отлична от нуля и мы получаем $t_2 = t_1$.

Существование такого, по доказанному единственного, числа t соответствует случаю, когда классы L и L' *определяют рациональное число* t, которое мы и назовем *суммой* действительных чисел α и β.

В остальных случаях классы L и L' исчерпывают все рациональные числа и определяют иррациональное число λ, являющееся, по определению, *суммой* чисел α и β.

Аналогично доказывается и соответствующее свойство классов M и M', в силу чего мы можем во всех случаях утверждать, что этими классами определяется действительное (рациональное или иррациональное) число μ, называемое, по определению, *произведением* чисел α и β.

При доказательстве приходится пользоваться тем, что разность $r's' - rs = (r' - r)s' + r(s' - s)$ может быть сделана сколь угодно малой за счет сближения r' и r, а также s' и s.

Теперь мы можем доказать, что требования общих определений для операторов, выражаемые равенствами

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

и

$$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a),$$

действительно выполняются при указанных определениях суммы $\lambda = \alpha + \beta$ и произведения $\mu = \alpha\beta$.

Действительно, из неравенств $ra < \alpha a < r'a$ и $sa < \beta a < s'a$ вытекает, что

$$(r + s)a < \alpha a + \beta a < (r' + s')a$$

и

$$rsa < \alpha(\beta a) < r's'a.$$

С другой стороны, тем же неравенствам удовлетворяют, по определению, и переходы λa и μa, откуда, по доказанной в § 33 единственности определения перехода с помощью соответствующих классов, и вытекает, что

$$\lambda a = (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

и

$$\mu a = (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a).$$

В частности, отсюда следует, что при характеристике переходов действительными числами выполняется основное требование теории измерения, согласно которому композиции переходов соответствует *сумма* отнесенных им чисел. Так как сложение действительных чисел, очевидно, коммутативно, то отсюда следует коммутативность композиции переходов для величин, удовлетворяющих введенным в предыдущих параграфах требованиям.

Нетрудно, далее, установить определения и для остальных основных действий в области действительных чисел, а также убедиться в выполнении основных формальных законов этих действий (сочетательность, дистрибутивность и т. д.). Мы не останавливаемся здесь на этих вопросах, так как теорией действительных чисел мы подробно займемся в главе VI.

3. Заметим в заключение, что теория иррациональных чисел, основанная на рассмотрении двух классов рациональных чисел, удовлетворяющих требованию определения 1 (стр. 106), принадлежит германскому математику Дедекинду и относится к 1858 г. Дедекинд не рассматривает третьего класса, включая, в случае, когда определяемое действительное число — рациональное, это число в один из классов, нижний или верхний. Соответствующее разбиение *всех* рациональных чисел на два класса носит в общем случае название *сечения Дедекинда*. Отличие рациональных чисел от иррациональных устанавливается в этом случае признаком, указанным на странице 105.

Изложенная выше теория измерения, в которой сравнение кратных $\left(mb \gtreqless na\right)$ заменяет собой известный из элементарной геометрии метод разыскания общей меры с помощью алгорифма Евклида, позволяет, как мы видели, весьма просто осуществить переход к теории Дедекинда и сближает теорию сечений с евклидовой теорией пропорций. Любопытно отметить, что метод сравнения кратных не лишен и практических приложений. Так, отношение длин делений двух равномерных шкал точнее всего определяется путем разыскания двух наиболее близких делений при наложении обеих шкал друг на друга (аналогичное построение осуществлено в конструкции нониуса). Тот же метод используется для сравнения хода двух хронометров путем определения на слух моментов наибольшего сближения у них ударов маятника. О делении интервалов на части здесь не приходится и думать и указанный путь является единственным способом добиться нужной степени точности. Для синхронизации хронометров также применяются аналогичные нониусу специальные хронометры, у которых число ударов маятника в единицу времени на 1 отличается от нормального.

С некоторыми арифметическими приложениями того же метода мы познакомимся в главе XIII.

§ 33. Построение шкалы числовых отметок на основе процесса измерения.

1. Резюмируем полученные результаты, возвращаясь к основному вопросу о характеристике значений скалярной величины, удовлетворяющей введенным выше условиям, с помощью *чисел*.

Выбрав какой-либо переход $a=(A, B)$ за основной, мы можем каждому переходу $b=(C, D)$ отнести то действительное число α, которое, будучи применено как оператор к переходу a, даст в результате переход b:

$$b=(C,\ D)=\alpha a=\alpha(A,\ B).$$

Основному переходу a будет при этом отнесено число 1, композиции переходов — сумма отнесенных им чисел, противоположным по направлению переходам — обратные по знаку числа, нулевому переходу — число нуль.

Выбирая, далее, какое-либо значение O данной скалярной величины за начальное, мы можем отнести каждому значению C скалярной величины действительное число γ, измеряющее переход (C, O) в выбранной единице меры a соответственно с формулой

$$C=(C,\ O) \text{ к } O=\alpha a \text{ к } O.$$

Эта формула есть краткая запись тех операций, с помощью которых, отправляясь от фиксированной начальной точки O и пользуясь основным переходом a, мы приходим к значению C охарактеризованному числом α.

Таким образом, в приведенной схеме числовых характеристик число α фигурирует трижды:

1) как характеристика *операции*, с помощью которой переход (C, O) получается из перехода (A, B),

2) как числовая характеристика *перехода* (C, O) при выбранном основном переходе (A, B),

3) как числовая характеристика *значения* скалярной величины C при выбранных основном переходе (A, B) и начальной точке отсчета O.

Лишь в первом случае мы имеем дело с **отвлеченными количественными числами** в чистом виде, для которых все основные операции — сложение, вычитание, умножение и деление — допускают совершенно отчетливое конкретное истолкование и имеют притом инвариантный смысл, не зависящий ни от выбора начальной точки шкалы, ни от выбора единицы меры.

Числа, измеряющие переходы, окажутся здесь, очевидно, разностями числовых отметок начальной и конечной точек перехода. При изменении начала отсчета эти числа не меняются, а числовые отметки получают одно и то же приращение на число, измеряющее переход от нового начала к старому. При изменении основного перехода как числа, измеряющие переходы, так и числовые отметки приобретают одного и того же множителя, соответствующего оператору, переводящему новый основной переход в старый.

Числа, соответствующие операторам, оказываются равными отношениям чисел, измеряющих переходы, т. е. отношениям разностей числовых отметок.

Взаимоотношение этих трех типов числовых характеристик было уже нами рассмотрено в § 26 и 27.

Позволяя себе оперировать *одновременно* с числовыми характеристиками этих трех типов, мы сталкиваемся с отсутствующей в системе отвлеченных чисел-операторов необходимостью различать по смысловому значению первое и второе слагаемые и сомножители и соответственно рассматривать два типа каждого из обратных действий: вычитания и деления. Так как эти обстоятельства играют значительную роль в методике и, как мы увидим ниже, позволяют значительно яснее представить себе дальнейшие обобщения в области операций третьей ступени, то мы остановимся здесь несколько подробнее на этих вопросах.

Мы будем здесь обозначать числовые характеристики значений величины и самые эти значения одними и теми же буквами $A, B, C, \ldots$ и точно так же числа, измеряющие переходы, и самые переходы — одними и теми же буквами a, b, c,

1) Сложение *операторного* типа

$$A + b = C.$$

В этой формуле, соответствующей соотношению $C = b$ к A, первое слагаемое и результат характеризуют значения величины, второе слагаемое играет роль *оператора первой ступени*, характеризующего действие — переход (C, A), применение которого к A дает значение C.

Аналогичную роль играет и вычитаемое в формуле вычитания *операторного* типа

$$C-b=A.$$

В формуле же

$$C-A=b$$

речь идет о *разностном сравнении* или *измерении первой ступени* C посредством A, т. е. о нахождении операции перехода $b=(C, A)$, с помощью которой от значения A можно перейти к C.

Это двоякое смысловое значение вычитания проявляется уже в элементарных задачах типов: „было столько-то, стало на столько-то меньше; сколько осталось?“ и „что надо отнять от того-то, чтобы получить то-то?“.

2) Сложение, соответствующее *композиции операторов первой ступени,* т. е. переходов:

$$a+b=c.$$

Здесь элементы обеих частей — операторы первой ступени — переходы. Смысл равенства: последовательное применение двух операторов первой ступени (осуществление переходов a и b) равносильно применению оператора первой ступени c (переходу c).

Оба слагаемых равноправны и сложение коммутативно.

3) Пользуясь формулой $B=O+b$, можно, *предварительно применяя измерение первой ступени ко второму слагаемому* B, формально определить *сложение для двух числовых характеристик значений скалярной величины* A *и* B так:

$$A \quad B=A+b,$$

где

$$b=B-O$$

есть результат разностного сравнения B и принятого за начало отсчета значения O.

К тому же результату придем, применив разностное измерение к обоим слагаемым. Именно, если еще и

$$a=A-O,$$

то мы положим

$$A \quad B=O + a + b=O \quad b+a=B+A.$$

Мы видим, что определенная таким образом сумма A , B, естественно, неинвариантна, т. е. зависит от выбора точки O, но обладает свойством коммутативности.

Пользуясь несколько неточным способом выражения, можно прочесть формулу

$$A \cdot \quad B=A \quad b$$

так: из значения величины A мы получаем новое значение „так“ (т. е. с помощью равного перехода), как B получено из значения величины O.

Числовые выкладки, как легко видеть, во всех случаях одни и те же Однако сложение третьего типа имеет исключительно формальный смысл; мы фиксируем на нем внимание читателя лишь для того, чтобы полностью провести аналогию между операциями различных ступеней.

Именно, аналогично предыдущему, мы различаем

1') *Умножение операторного типа*

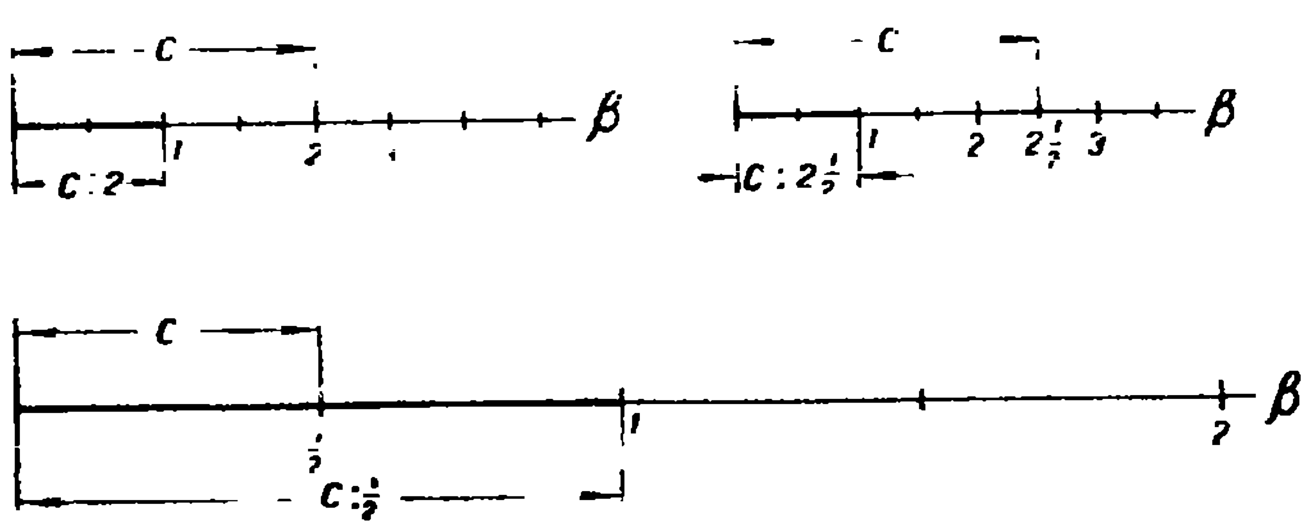
$$c = \beta a.$$

В этой формуле c и a характеризуют переходы, между тем как множитель β есть **оператор второй ступени,** характеризующий действие (в случае рационального оператора состоящее из операций сложения равных слагаемых и разложения на равные слагаемые, а в общем случае выражающееся с любой степенью точности такими операциями). Смысл равенства $c = \beta a$: применение оператора β к переходу a дает в результате переход c.

Тот же операторный смысл имеет делитель α (или, что то же, множитель $\frac{1}{\alpha}$) в формуле

$$c : \beta = a.$$

Это есть *деление операторного типа,* обычно рассматриваемое лишь для случая целого β. Смысл этого действия легко уясняется, впрочем, и для дробного β на примерах, соответствующих, выражаясь несколько вольно, делению на $2\frac{1}{2}$ части, „на $\frac{1}{2}$ части" и т. п. На чертеже 7 следует представлять себе нижнюю линейку с делениями для отсчета значений β растяжимой. Различная степень растяжения соответствует



Черт. 7.

случаям деления на 2, $2\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$

В формуле же

$$c : a = \beta$$

речь идет о *кратном сравнении* („делении по содержанию" или об *измерении второй ступени* c посредством a), т. е. о нахождении операции второй ступени (состоящей из сложения равных слагаемых и разбиения на равные слагаемые или приближенно выражающейся таким путем), посредством которой из a можно получить c.

2') Умножение, соответствующее *композиции* (*последовательному производству*) *операций* второй ступени:

$$\gamma=\alpha\beta.$$

Здесь оба сомножителя и произведение - операторы. Смысл равенства: последовательное производство операций β и α равносильно применению оператора γ. Сомножители равноправны и умножение коммутативно.

3') Пользуясь формулой

$$b=\beta c,$$

где c - единица меры, можно, применяя предварительно операцию измерения второй ступени к первому сомножителю, формально определить *умножение для чисел a и b, отнесенных переходам*, так:

$$ba=\beta a,$$

где

$$\beta=b:c$$

есть результат измерения b посредством c, принятого за единицу.

К тому же результату придем, применив измерение второй ступени к обоим сомножителям. Именно, если еще и

$$\alpha=a:c,$$

то мы получим

$$ab=\alpha\beta c=\beta\alpha c=ba.$$

Определенное таким образом произведение ab коммутативно, но, естественно, неинвариантно, т. е. зависит от выбора единицы меры c. На практике этот случай встречается в вопросе нахождения площади прямоугольника и в других приложениях аналогичного рода.

Пользуясь и здесь несколько неточным способом выражения, можно прочесть формулу $ba=\beta a$ так: из a мы получаем новую величину $d=\beta a$ „так" (т. е. с помощью того же оператора второй ступени β), как b получено из c, принятого за единицу меры.

Мы вернемся в главе V к затронутым здесь вопросам в связи с операциями высших ступеней.

2. В заключение позволим себе подчеркнуть следующее.

В методике преподавания много внимания уделялось различным трактовкам вопроса о действиях с „именованными" числами. Как вытекает из изложенной выше теории измерения, всякие числовые характеристики опираются на основную базу „отвлеченных" числовых характеристик, которые вводятся в первую очередь и *над которыми и производятся все арифметические действия*. Выделение какой-то особой категории „именованных" чисел и действий над ними лишено поэтому всяких оснований: под „*числом*" в математике всегда разумеется „отвлеченное" число, вследствие чего само прилагательное „отвлеченный" является с принципиальной точки зрения излишним.

В связи с этим в формальной теории действий над числами — в силу коммутативности первых двух операций нет вообще никакого смысла различать различные типы прямых и обратных действий первых двух ступеней. Мы остановились здесь на таком различении, во-первых, ввиду дальнейших обобщений на случай коммутативных операций третьей степени. и, во-вторых, по следующим соображениям.

Поскольку речь идет о приложениях и конкретном истолковании действий над числами, необходимо — в частности, и с точки зрения методики — отдавать себе достаточно ясный отчет в том, как вводятся при измерении величин различные числовые характеристики и каков в связи с этим конкретный смысл числовых соотношений в различных случаях. Мы стоим здесь на той точке зрения, что в наиболее общей форме это конкретное истолкование получается, если последовательно проводить операторную концепцию числа, изложенную выше. Это позволяет, в частности, с уверенностью ориентироваться в различных методических приемах, преследующих цель конкретного истолкования действий на той или иной ступени развития понятия числа. Таковы, например. упомянутые уже ранее вопросы об умножении и делении дробей и отрицательных чисел; отметим здесь еще довольно распространенное неточное общее определение умножения, операторный смысл которого разъяснен в п. 3' настоящего параграфа, а также истолкование действий над отрицательными числами, в которых эти последние трактуются, как *вычитаемые*: читатель легко узнает здесь — для операций первой ступени — композиционное сложение переходов пункта 2 и — для операций второй ступени — операторное умножение пункта 1.

Наконец, отметим еще, что различение смыслового значения равенств между физическими величинами как соотношений между переходами или между операторами представляет собой простейший общий метод ориентировки в вопросах *размерности*.

§ 34. Классификация скалярных величин на основе критерия выполнимости операций.

Остановимся на остававшемся до сих пор в тени вопросе о *выполнимости* введенных выше операций в области переходов, получаемых при изучении той или иной скалярной величины.

Кроме основного постулата о возможности неограниченной композиции переходов положительного направления, изложенная выше теория ни в одном пункте не требует ни

1) выполнимости любого перехода от *любой начальной точки*, ни

2) выполнимости операции $\frac{m}{n}$ (A, B) по отношению к *любому* переходу (A, B), ни

3) выполнимости операции $\alpha(A, B)$, т. е. существования переходов, соответствующих любому действительному оператору α,

определенному *произвольным* дедекиндовым сечением области рациональных чисел.

Критерий выполнимости или невыполнимости тех или иных переходов или операций может быть положен в основу классификации скалярных величин.

Скалярная величина называется **непрерывной**, если выполнено требование 3, т. е. *каждому действительному числу* (хотя бы в некотором интервале) *соответствует некоторый переход* и, следовательно, *при фиксированном выборе начальной точки, некоторое значение величины.*

Это свойство *постулируется* для основной геометрической непрерывной величины - системы точек на прямой или системы соответствующих переходов — отрезков прямой, а также для целого ряда физических величин (время, масса и т. д.), известные свойства которых обусловливают принятие при математическом их изучении указанного постулата непрерывности (в пределах макроскопической физики).

Однако и для непрерывных величин необязательно выполнение требований 1 и 2. Так, например, величина θ, характеризующая отношение некоторой величины A к ее минимальному возможному значению $A_0 > 0$, будет принимать лишь значения $\theta \geq 1$. Требование 2, таким образом, не будет выполнено, так как выполнимость операции $\frac{1}{n}\theta$ будет иметь место лишь для $\theta \geq n$.

Целый ряд встречающихся в естествознании и обычной практике непрерывных величин, которые естественно назвать **существенно положительными**, не удовлетворяет требованию 1. Таковы, например, если не рассматривать дальнейших обобщений: масса, плотность, объем, длина отрезка или вектора, вес и т. д.

В области этих величин сложение может быть определено обычно с самого начала для любых двух значений величины в объективном смысле и потому процесс измерения проводится здесь для значений величины так, как это в общем случае было проведено для системы переходов.

Для характеристики значений таких величин достаточно *положительных* чисел; в большинстве случаев можно, отвлекаясь от микроструктуры материи, считать выполненным постулат 2 неограниченной делимости, так что сколь угодно малому числу соответствуют все же значения величины. Число же *нуль* играет при этом роль *абсолютного* (а не условного) начала, притом роль *предельную,* так как самому числу нуль никакого значения величины не соответствует.

В силу того, что такого рода существенно положительные величины долгое время являлись единственным материалом изучения, представление об „отсутствии чего бы то ни было“, связанное с числом нуль, значительно затрудняло развитие теории **направленных** скалярных величин, характеризующихся (п. 1) *выполнимостью переходов не только прямого, но и обратного направления* (т. е. с точки зрения, укрепившейся при изучении существенно положительных величин „невозможных“ переходов к значениям „меньшим, чем ничто“).

В области направленных величин, как мы видели выше, число нуль имеет:

1) порядковый смысл, соответствующий значению величины, выбранному за начало отсчета, и

2) количественный смысл в области переходов или разностей числовых отметок. В этом последнем случае равенство перехода нулю соответствует факту совпадения двух значений величины и имеет непосредственный, а не предельный, как в рассмотренном выше случае, смысл.

К числу направленных величин, для которых нуль имеет значение произвольного начала отсчета, принадлежат также многие физические величины. Наиболее характерным примером служат величины, объединяемые под общим названием *потенциала*. При этом существенно отметить, что объективную роль — в соответствии с произвольностью начала отсчета — играют обычно связанные с этими величинами *переходы*, измеряемые *разностью потенциалов*.

Заметим попутно, что привычка оперировать с направленными величинами в настоящее время может вызывать, в свою очередь, недоразумения в отношении величин, которые в процессе экспериментального изучения оказываются имеющими абсолютные границы. Сюда относится, например, представление о том, что температура -272° *близка* к температуре -273°, температура $-272^\circ{,}5$ еще *вдвое ближе* и т. п. Легко видеть, что 1) абсолютный нуль температуры играет здесь *предельную* роль и что 2) понятие о „близости“ и „вдвое ближе“ основано на таком определении *равенства переходов*, которое способно вызвать лишь ложные представления в области соотношений, характеризующихся понятием абсолютной температуры. Достаточно перейти к иному определению равенства переходов и, тем самым, к иному способу измерения и числовой характеристики, введя, например, величину $\log T$ в качестве характеристики температуры, и абсолютному нулю будет соответствовать предельное значение $-\infty$, формулировки же „близко“ и „вдвое ближе“ потеряют, как это им и следует, всякий смысл.

Эту зависимость числовых характеристик физических величин *от исходных определений* следует вообще всегда иметь в виду, так как неправильные представления довольно часто проскальзывают незамеченными даже в точные науки под прикрытием привычных оборотов речи и имеющих, вообще говоря, довольно многообразный смысл словесных формулировок.

ГЛАВА IV.

ТЕОРИИ ПАР.

§ 35. Переход к теории пар.

То обстоятельство, что построения § 29—33, приводящие к последовательным обобщениям понятия числа, *не опираются* на требования выполнимости условий 1—3 (стр. 115), играет чрезвычайно важную методологическую роль.

В соответствии с изложенной выше теорией относительных чисел, мы можем сказать, что даже существенно положительным величинам соответствует *система переходов*, образующих уже *направленную* величину, в которой каждому переходу a соответствует переход противоположного направления $-a$.

Аналогично этому, даже для *дискретных* величин, не допускающих, вообще говоря, деления на части, *система операторов* образует величину, в которой каждому оператору $\alpha = n$ соответствует оператор $\alpha = \frac{1}{n}$ такой, что композиция (последовательное применение) этих операторов дает единичный оператор 1, не меняющий значения величины, к которой он применяется. Эту систему операторов можно, если угодно, рассматривать также, как некоторую систему переходов по отношению к данной аддитивной, существенно положительной и дискретной величине. При этом *равенство* этих *„переходов второй ступени“* определяется, как *равенство отношений* значений величины, *обратные друг другу операторы* n и $\frac{1}{n}$ характеризуют *два противоположных „направления“* в области переходов второй ступени. *композиции* переходов соответствует *умножение* чисел и т. д.

Эта возможность построения относительных чисел на основе изучения существенно положительной величины (путем рассмотрения переходов первой ступени) и дробных на основе изучения дискретной величины, не допускающей деления на части (путем рассмотрения переходов второй ступени), и используется как раз при построении формальных теорий отрицательных и дробных чисел, опирающихся *лишь на систему целых положительных чисел как на исходную скалярную величину* и известных под названием **теорий пар.**

Поясним это подробнее. Рассмотрим скалярную величину, соответствующую расположению совокупностей дискретных предметов в порядке возрастающей мощности.

Значения этой величины характеризуются целыми положительными числами

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

С точки зрения намеченной выше классификации скалярных величин мы имеем здесь дело 1) с абсолютной и притом предельной начальной точкой нуль, которой не соответствует никакого значения величины, и 2) с абсолютной и притом неделимой единицей меры 1, т. е. с существенно положительной дискретной величиной, для которой операция деления на части, вообще говоря, невыполнима.

Однако, согласно только что сказанному, переходы, порождаемые этой величиной, образуют уже направленную величину. В области переходов

$$(m, n),$$

соответствующих разностям $m-n$, представлены уже не только положительные числа $m-n$ при $m>n$, но и отрицательные числа, характеризующие противоположные по направлению переходы (n, m), где $n<m$.

Определяя равенство переходов (p, q) и (r, s), как равенство разностей $p-q$ и $r-s$ или $q-p$ и $s-r$, мы можем, исходя из обнимающей оба случая формулы

$$p+s=q+r,$$

построить теорию относительных чисел, как теорию *пар* (m, n) *положительных чисел*, определяющих соответствующий переход.

Аналогично, рассматривая операторы кратного сравнения или переходы второй ступени, мы найдем, что в области операторов или отношений представлены все рациональные числа. Соотношение

$$mn_1=nm_1,$$

служащее (см. § 29) определением равенства операторов $\frac{m}{n}$ и $\frac{m_1}{n_1}$, можно здесь рассматривать, как определение равенства двух *переходов второй ступени*

$$(m, n) \text{ и } (m_1, n_1),$$

рассматриваемых в исходной системе целых чисел. Опираясь на это определение, можно, таким образом, построить теорию дробных чисел, как *пар*

$$(m, n)$$

целых чисел, определяющих соответствующий переход второй ступени.

Таким образом мы приходим уже к чисто *арифметическим* теориям относительных и рациональных чисел, построение которых опирается лишь на основную для арифметики скалярную систему *натуральных чисел.*

Эти построения, отвлекающиеся от внешнего субстрата какой-либо иной скалярной величины, помимо указанной, лежат, стало быть, внутри самой арифметики и играют поэтому основную роль в современном аксиоматическом обосновании понятий отрицательного и дробного числа.

К изложению этих теорий, которые могут быть развиты независимо друг от друга, мы и переходим.

§ 36. Отрицательные числа как пары положительных чисел.

Мы считаем, что приведенных только что замечаний достаточно для уяснения связи теории пар с общей теорией скалярных величин. Сейчас, ставя своей основной целью выяснение логической структуры рассматриваемых аксиоматических теорий, мы уделим основное внимание формальной стороне дела.

Определение 1. ***Относительными числами** называются пары*

$$(a,\ b)$$

положительных чисел a и b, определяемые заданием этих чисел в указанном порядке и подчиненные законам скалярного сравнения и законам действий, устанавливаемым следующими определениями.

Определение 2. *Пара*

$$(a,\ b) \gtrless (c,\ d)$$

соответственно тогда, когда

$$a + d \gtrless b + c.$$

Следствие. *Всякая пара переходит в равную ей, если к обоим ее элементам прибавить одно и то же число*, т. е.

$$(a + r,\ b + r) = (a,\ b).$$

Можно также сказать, что всеми такими парами и только ими задается одно и то же относительное число, равное $(a,\ b)$.

Теорема 1. *Система пар образует скалярную величину, удовлетворяющую постулатам* § 25.

Так, например, если

$$(a,\ b) > (c,\ d) \quad \text{и} \quad (c,\ d) > (e,\ f),$$

то

$$a + d > b + c \quad \text{и} \quad c + f > d + e.$$

Складывая, получим

$$a + d + c + f > b + c + d + e,$$

что возможно лишь, если

$$a+f>b+e,$$

т. е.

$$(a,\ b)>(e,\ f).$$

Аналогично проверяются и остальные постулаты.

Определение 3. *Суммой двух пар $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ называется пара*

$$(a+c,\ b+d),$$

так что по определению

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d).$$

Примечание. Если рассматривать систему пар как систему переходов и определять сложение пар $(a,\ b)$ и $(b,\ f)$ как композицию переходов $(a,\ b)$ и $(b,\ f)$, дающую в результате переход $(a,\ f)$, то определение 3 будет вытекать, как частный случай, из общего определения композиции переходов § 28 и определения равенства пар. Действительно, если $(c,\ a)=(b,\ f)$, так что $c+f=d+b$, то $a+c+f=a+d+b$ и, следовательно, $(a,\ f)=(a+c,\ b+d)$.

Теорема 2. *Сумма не меняется при замене слагаемых равными им.*

Действительно, если $(a',\ b')=(a,\ b)$ и $(c'\ d')=(c,\ d)$, то

$$a'+b=a+b',\quad c'+d=d'+c$$

и, следовательно,

$$a'+c'+b+d=b'+d'+a+c,$$

т. е.

$$(a'+c',\ b'+d')=(a+c,\ b+d).$$

Это предложение можно формулировать еще так: сумма относительных чисел не зависит от способа задания их той или иной парой из системы равных между собой пар.

Сложение относительных чисел есть, таким образом, операция, всегда выполнимая и однозначная.

Теорема 3. *Сложение обладает свойствами переместительности и сочетательности.*

Это также проверяется непосредственно.

Теорема 4. *В системе относительных чисел операция **вычитания**, обратная операции сложения, всегда выполнима и однозначна,* т. е. всяким двум парам

$$(a,\ b)\quad\text{и}\quad(c,\ d)$$

соответствует система равных между собой пар $(x,\ y)$, удовлетворяющих соотношению

$$(a,\ b)+(x,\ y)=(c,\ d).$$

Для доказательства достаточно заметить, что написанное соотношение, по определению сложения, равносильно равенству

$$(a+x,\ b+y)=(c,\ d),$$

а это последнее, по определению 1, равносильно соотношению

$$a+x+d=b+y+c$$

или

$$x+d+a=y+c+b.$$

Согласно с определением 1, это означает, что

$$(x, y)=(c+b, d+a).$$

Все пары, обладающие требуемым свойством, таким образом, равны между собой и равны паре $(c+b, d+a)$. Обозначая операцию вычитания знаком „—", мы можем, стало быть, написать

$$(c, d)-(a, b)=(c+b, d+a)=(c, d)+(b, a).$$

Пара (b, a) называется **противоположной** или **обратной по знаку** по отношению к паре (a, b). Можно условиться писать

$$(b, a)=-(a, b).$$

Написанная выше формула выражает, таким образом, что вычитание может быть заменено прибавлением противоположной вычитаемому пары.

Сумма пары (a, b) и противоположной ей (b, a) равна

$$(a, b)+(b, a)=(a+b, a+b).$$

Одновременно можно написать

$$(a, b)-(a, b)=(a+b, a+b).$$

Отсюда, по теореме 4, вытекает, что все пары с совпадающим первым и вторым элементами равны между собой

$$(a, a)=(b, b)=\ldots$$

и являются единственными парами, обладающими тем свойством, что *прибавление их к любой другой паре не изменяет этой последней* (в смысле соотношения равенства).

Всякую пару типа (a, a) мы будем в соответствии с последним свойством называть **модулем** *операции сложения* или **нулем** и писать

$$(a, a)=0.$$

Стало быть: сумма противоположных пар или, что то же, разность равных пар равна нулю.

Теорема 5.
$$(a, b) \gtreqless (c, d)$$

в зависимости от того, будет ли разность

$$(a, b)-(c, d) \gtreqless 0.$$

Так, если $(a, b)>(c, d)$, т. е. $a+d>b+c$, то $a+d+e>$ $>b+c+e$, т. е.

$$(a, b)-(c, d)=(a+d, b+c)>(e, e)=0.$$

Остальные случаи не стоит рассматривать.

Следствие. *Сумма*

$$(a, b)+(c, d)\gtreqless(a, b)$$

в зависимости от того, будет ли

$$(c, d)\gtreqless 0.$$

Обозначая $(a, b)+(c, d)$ через (a', b'), находим

$$(c, d)=(a', b')-(a, b)$$

и применяем предыдущую теорему.

Теорема 6. $(a, b)>0$, *если* $a>b$, и $(a, b)<0$, *если* $a<b$.

В самом деле, неравенства

$$a+c>b+c \text{ и } a>b,$$

так же как и

$$a+c<b+c \text{ и } a<b,$$

равносильны.

Следствие. *Если* $(a, b)>0$, *то противоположная пара* $(b, a)<0$, *и наоборот.*

Этими теоремами устанавливается связь между скалярным расположением пар и расположением положительных чисел, используемых в качестве элементов пар.

Определение 4. ***Произведением*** *двух пар* (a, b) и (c, d) *называется пара*

$$(ac+bd, ad+bc),$$

так, что, по определению,

$$(a, b)(c, d)=(ac+bd, ad+bc).$$

Примечание. Для уяснения происхождения этого определения достаточно рассмотреть тождество $(a-b)(c-d)=bd+ac-ad-bc$. Содержание определения выходит, однако, за пределы этого тождества, *предполагающего*, что $a>b$ и $c>d$, да и пары (a, b) и (c, d) мы *не в праве еще* отождествлять с разностями $a-b$ и $c-d$ [Ср. принцип перманентности Ганкеля (стр. 127)]. Мы ограничиваемся этими указаниями, так как содержательное смысловое определение умножения относительных чисел было дано в § 29, здесь же речь идет о формальном аксиоматическом построении теории.

Теорема 7. *Произведение не меняется при замене сомножителей равными им парами* (т. е. операция умножения однозначна).

Действительно, если $(a, b)=(a', b')$, т. е. $a+b'=a'+b$, то

$$ac+b'c=a'c+bc$$

и

$$ad+b'd=bd+a'd,$$

откуда, складывая крест-накрест, находим

$$ac+bd+a'd+b'c=bc+ad+a'c+b'd,$$

т. е.

$$(a,\ b)\cdot(c,\ d)=(a',\ b')\cdot(c,\ d).$$

Аналогично можно поступить и в отношении второго множителя, что, впрочем, излишне, так как имеет место

Теорема 8. *Умножение пар обладает свойствами переместительным, сочетательным и распределительным по отношению к сложению.*

Переместительность очевидна, так как элементы пар в произведение входят симметрично.

Предоставляя читателю убедиться в выполнимости сочетательного закона, проверим лишь, что

$$[(a,\ b)+(e,\ f)]\,(c,\ d)=(a,\ b)\,(c,\ d)+(e,\ f)\,(c,\ d).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}(a+e,\ b+f)(c,\ d)&=(ac+ec+bd+fd,\ ad+ed+bc+fc)=\\&=(ac+bd,\ ad+bc)+(ec+fd,\ ed+fc)=\\&=(a,\ b)\,(c,\ d)+(e,\ f)\,(c,\ d).\end{aligned}$$

Теорема 9. *При перемене знака одного из сомножителей,* т. е. *замене его противоположной парой, произведение меняет знак,* т. е. *переходит в противоположную пару.*

Справедливость этой теоремы проверяется непосредственно на основе определения 4.

Так как при $(a,\ b)>0$ и $(c,\ d)>0$ будет

$$ac+bd-(bc+ad)=(a-b)\,(c-d)>0$$

и, стало быть, $(a,\ b)\,(c,\ d)>0$, то отсюда получаем обычную формулировку правила знаков при умножении.

Из только что приведенного неравенства в связи с теоремой 9 вытекает далее

Теорема 10. *Произведение равно нулю в том и только в том случае, если один из сомножителей равен нулю.*

В этом нетрудно убедиться и непосредственно.

Если $(a,\ b)\cdot(c,\ d)=0$, то

$$ac+bd=bc+ad.$$

Пусть $(a,\ b)\neq 0$, т. е. $a\neq b$. Если $a>b$, то мы можем написать

$$(a-b)\,c=(a-b)\,d,$$

откуда следует, что $c=d$, т. е. $(c,\ d)=0$.

Если же $a<b$, то из того же соотношения получаем

$$(b-a)\,d=(b-a)\,c,$$

откуда опять следует, что $d=c$ и, следовательно, $(c,\ d)=0$

Обратная умножению операция *деления* в случае, если элементы пар, как мы пока предполагаем, *целые* числа, не всегда выполнима.

Однако, в тех случаях, *когда деление* (на пару, отличную от нуля) *выполнимо, оно однозначно*. Это предложение есть следствие только что доказанной теоремы 10. Действительно, если

$$(a,\ b)\ (x,\ y)=(a,\ b)\ (x_1,\ y_1),$$

то

$$(a,\ b)\ (x,\ y)-(a,\ b)\ (x_1,\ y_1)=(a,\ b)\ [(x,\ y)-(x_1,\ y_1)]=0,$$

откуда, при очевидно необходимом условии $(a,\ b)\neq 0$ следует

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1).$$

§ 37. Пары как числовые системы с двумя единицами.

Разыщем теперь *модуль операции умножения*, т. е. такие пары $(x,\ y)$, которые при умножении на любую пару не изменяют этой последней, так что

$$(a,\ b)\ (x,\ y)=(a,\ b).$$

Это соотношение приводит к равенству

$$ax+by+b=bx+ay+a,$$

или

$$ax+b(y+1)=a(y+1)+bx,$$

что будет удовлетворено при

$$x=y+1.$$

Согласно теореме об однозначности операции деления все пары $(x,\ y)$, удовлетворяющие соотношению $(a,b)\ (x,y)=(a,\ b)$, при любых неравных a и b равны между собой и суть пары типа

$$(y+1,\ y),$$

у которых первый элемент превышает второй на единицу.

Всякую такую пару мы будем называть **положительной единицей** *в области пар* и обозначим знаком E. Противоположную пару $(y,\ y+1)$ будем обозначать знаком $\bar{E}$ и называть **отрицательной единицей** *в области пар*.

Из теоремы 9 следует, что

$$(a,\ b)\bar{E}=-(a,\ b)E=-(a,\ b)=(b,\ a),$$

т. е. умножение на $\bar{E}$ равносильно перемене знака пары.

Определим теперь операцию умножения пары *на целое положительное число* n так:

$$n\ (a,\ b)=(a,\ b)+\ldots+(a,\ b)\ (n\ \text{слагаемых})=(na,\ nb),$$

тогда

$$(a,\ b)=(a,\ b)E=(a,\ b)\ (y+1,\ y)=(ay+a+by,\ ay+by+b)=$$
$$=a(y+1,\ y)+b(y,\ y+1)=aE+b\bar{E}.$$

К этому мы и клонили дело, вводя единицы E и $\bar{E}$.

Таким образом, всякая пара может быть представлена в виде

$$(a,\ b) = aE + b\bar{E}.$$

Элементы пары — положительные числа a и b являются, таким образом, ее *компонентами в разложении по единицам* E и $\bar{E}$.

Условие равенства двух пар можно рассматривать как следствие соотношения

$$E + \bar{E} = O,$$

где O есть модуль сложения.

При сложении двух пар соответствующие их компоненты складываются, умножение же, как легко убедиться, можно производить, применяя к выражениям типа $aE + b\bar{E}$ распределительный закон и используя соотношения

$$E \cdot E = E, \quad \bar{E} \cdot \bar{E} = E, \quad E \cdot \bar{E} = \bar{E}.$$

Арифметику, или, как говорят, *алгебру пар*, можно, таким образом, рассматривать как *исчисление с двумя единицами, действия над которыми подчиняются указанным формальным законам* (ср. построения гл. X—XII).

§ 38. Включение положительных чисел в систему пар. Принцип перманентности.

1. Возвращаясь к теории относительных чисел как пар, рассмотрим основной вопрос о *включении системы положительных чисел в систему пар.*

Это осуществляется с помощью особого соглашения. В принятой нами системе изложения, в которой в качестве элементов пары используются лишь положительные числа (нуль исключается), это соглашение заключается в следующем.

Всякую пару $(a,\ b)$ при $a > b$ условимся считать равной положительному числу $a - b$.

Принимаемое таким образом условие, в силу которого система положительных чисел включается в систему пар, влечет за собой естественное обязательство проверить: не находятся ли введенные выше определения скалярного расположения, сложения и умножения в противоречии с теми, которые установлены для положительных чисел.

Другими словами, необходимо доказать, что, рассматривая положительные числа $r = a - b$ как пары $(a,\ b)$ и применяя определения, относящиеся к *парам,* мы получим те же результаты, что и при непосредственном оперировании этими положительными числами.

Проверить это нетрудно. Действительно, определение равенства и неравенства пар $(a,\ b)$ и $(c,\ d)$ соответствует соотношениям, вытекающим из неравенств $a - b > c - d$ при $a > b$ и $c > d$. Только случай выполнения последних неравенств соответствует совпадению пар с положительными числами. Не следует поэтому забывать, что, включая соотношение $a-b>c-d$ как частный случай, определение 2 (стр. 120) является, тем не менее, более общим, так как оно относится и к таким парам, для которых $a<b$ или $c<d$, и, следовательно, разность $a-b$ или $c-d$ в области положительных чисел не существует.

В согласии с операциями над разностями находится и определение сложения $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$ и, как уже было отмечено выше, также и определение умножения.

Число E совпадает, очевидно, с положительной единицей.

При $a<b$ разность $a-b$, отсутствующая в области положительных чисел, может быть представлена в форме пары (a, b). Действительно,

$$b+(a, b)=bE+aE+b\bar{E}=aE=a.$$

Не прибегая к единичным парам E и $\bar{E}$, можно тот же результат получить так

$$a-b=(a+x, x)-(b+x, x)=(a+x, x)+(x, b+x)=(a, b).$$

Таким образом, введение пар делает операцию вычитания положительных чисел выполнимой и в том случае, когда уменьшаемое a меньше вычитаемого b. Результат есть *отрицательное* число

$$(a, b)=-(b, a)=r\bar{E}, \text{ где } r=b-a.$$

С формальной точки зрения можно сказать, что символ (a, b) замещает отсутствующую в системе положительных чисел разность $a-b$ и подчинен *тем же формальным правилам* сравнения и действий, *что и эта разность в случае ее существования в системе положительных чисел.*

2. Эта, относящаяся по существу к формальной стороне построения идея может до известной степени служить путеводной нитью в установлении определений, характеризующих систему пар (a, b), и представляет собой частный случай общего **принципа перманентности** Ганкеля, о котором мы уже упоминали (§ 27, n° 3).

Смысл этого принципа заключается в следующем. Пусть на рассматриваемом этапе расширения понятия числа некоторое обратное действие (в нашем случае — вычитание) не всегда выполнимо в имеющейся числовой системе. Поставим *требование:* расширить понятие числа, вводя новую категорию чисел так, чтобы

1) в новой числовой системе *сохранялись основные свойства прямых действий* и чтобы

2) интересующее нас обратное действие было *всегда выполнимо* в расширенной числовой системе.

Тогда мы сможем *доказать*, что элементы новой числовой системы *должны* для соблюдения указанных требований

1) однозначно соответствовать символам, выражающим результат данного обратного действия, в тех случаях, когда оно невыполнимо в прежней числовой системе, и

2) подчиняться тем же формальным законам действий, которым, в случаях выполнимости рассматриваемого обратного действия, подчинены соответствующие символы в прежней числовой системе.

В нашем случае речь должна была бы итти о действии вычитания и о символах разности $a - b$.

Говоря о „перманентности“ (permanere — оставаться, сохраняться), и имеют в виду указанное *сохранение основных формальных законов действий.*

Для того чтобы подчеркнуть, что при переходе к новой числовой системе прежнее значение символа, выражающего результат обратной операции, в данном случае $a - b$, должно быть расширено путем введения *новых определений*, как раз и целесообразно, во избежание путаницы, говорить о вновь вводимых числах, как о парах (a, b), избегая знака $a - b$. Принцип перманентности в только что приведенном истолковании позволяет и в рассматриваемом случае построения системы относительных чисел притти к основным определениям, которые *необходимо установить* для системы пар, если потребовать, чтобы в этой последней формальные законы прямых операций были сохранены, а символ (a, b) во всех случаях представлял результат действия вычитания $a - b$, так что $b + (a, b) = a$.

Так, например, полагая еще $d + (c, d) = c$ и требуя, чтобы в новой числовой системе сложение было однозначной операцией и обладало переместительным и сочетательным свойствами, найдем

$$b + (a, b) + d + (c, d) = a + c$$

или

$$b + d + (a, b) + (c, d) = a + c.$$

Так как, с другой стороны, должно быть

$$b + d + (a + c, b + d) = a + c,$$

то необходимо, чтобы

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Таким образом, определение сложения пар с необходимостью вытекает из поставленных требований.

Логическая подоплека проведенного только что рассуждения заключается, очевидно, в том, что *основные формальные свойства обратных действий вытекают как следствие из определений этих действий как обратных соответствующим прямым и из свойств этих последних.*

В нашем случае свойство операции вычитания, выражаемое формулой

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d),$$

вытекает как следствие из формул $b + (a - b) = a$ и $d + (c - d) = c$ и свойств операции сложения; доказательство этого утверждения мы и провели выше, используя поставленные требования, чтобы пара (a, b) выражала результат вычигания a b, а свойства операции сложения в новой числовой области были сохранены.

Аналогичным путем можно показать необходимость в указанном выше смысле и остальных определений в системе пар. Не следует, однако, думать, что при таком построении мы *выводим* или *доказываем* соответствующие формулы. Мы доказываем только предложение: для того чтобы были выполнены такие-то и такие-то требования, *необходимо принять* такие-то и такие-то *определения*. Эти последние от этого не перестают быть *определениями*, содержащими в этом смысле недоказуемые формулы. *Достаточность* этих определений для достижения поставленной цели должна быть обнаружена последующим построением теории, в которой, как мы и сделали выше, доказывается на основе принятых определений выполнение тех или иных законов действий. В этом „синтетическом" построении теории принцип перманентности находит свое отражение в требовании, чтобы новые определения не противоречили прежним в тех случаях, когда новые числовые объекты, по определению, совпадают с прежними.

Мы вернемся в дальнейшем (§ 41) к вопросу о том, какие формальные требования определяют расширение понятия числа, приводящее к системе рациональных чисел.

Активная роль принципа перманентности с исторической точки зрения не так уж велика. Если обобщению понятия числа в некоторых случаях и предшествовало *оперирование по привычным законам с выражениями, не имевшими смысла в первоначальной числовой области*, то такое оперирование являлось лишь источником недоумений и постоянных сомнений в вопросе о том, что называть числом, а что нет. Лишь осознание конкретного смысла новых числовых символов в их связи с изучением скалярных и иных величин одновременно *со строгим формальным обоснованием* соответствующих теорий устраняло указанные сомнения, следы которых до сих пор сохранились в терминах „иррациональный", „мнимый" и т. д., которыми первоначально характеризовались новые категории чисел.

3. Некоторые формальные упрощения в изложенной выше теории пар произойдут, если допустить в качестве элемента пары число *нуль*.

В этом случае модуль сложения представляется парой (0, 0), модуль умножения — положительная единица E — парой (1, 0), а отрицательная единица $\bar{E}$ — парой (0, 1). Всякая пара может быть представлена в форме

$$(a,\ b)=a(1,\ 0)+b(0,\ 1).$$

Отождествление пар, для которых $a>b$, с положительными числами $a-b$ может быть осуществлено соглашением

$$(a,\ 0)=a;$$

отсюда как следствие при $a-b=r$ получаем:

$$(a,\ b)=(b+r,\ b)=(b,\ b)+(r,\ 0)=r=a-b$$

Мы предпочли несколько иное изложение, при котором нуль вводится одновременно с отрицательными числами как модуль операции сложения; усложнение отдельных формул искупается их большей общностью, а в проведенном только что контрольном испытании определений яснее выступает формальная связь между символом (a, b) и разностью $a - b$.

Заметим еще следующее. После того как система относительных чисел построена, можно рассматривать разности $\alpha - \beta$ относительных чисел при любых α и β. На основании установленных нами выше свойств операций в системе пар легко доказываются теперь *теоремы* о сравнении таких разностей, о их сложении и перемножении, по форме *аналогичные определениям* установленных для пар (a, b). Если поэтому рассмотреть подчиненные тем же законам действий пары (α, β), элементы которых относительные числа, то не придем уже ни к какой новой числовой системе.

§ 39. Общие свойства системы относительных чисел. Группа, кольцо, поле.

Резюмируем теперь основные свойства скалярной системы относительных чисел в отношении операций первой и второй ступени. В области относительных чисел:

1) *Операция сложения* всегда выполнима, однозначна и однозначно обратима. Существует единственное относительное число нуль, *модуль* сложения. Операция сложения обладает сочетательным свойством.

Всю совокупность *этих* свойств выражают, говоря, что относительные числа образуют **группу** *относительно сложения.*

Так как, сверх того, операция сложения коммутативна, а множество всех относительных чисел — бесконечно, то мы имеем здесь дело с *коммутативной* или, как говорят, с **абелевой бесконечной группой.**

2) Если, как мы это до сих пор и делали, рассматривать лишь целочисленные элементы пар, то *операция умножения* всегда выполнима, однозначна, но не всегда обратима, если же обратима, то однозначно (если исключить пары, равные *нулю*) Существует, далее, единственное относительное число 1, модуль умножения. Операция умножения обладает свойствами переместительным и сочетательным.

Так как операция деления не всегда выполнима, то относительные числа не образуют группы относительно операции умножения. Совокупность перечисленных в п. 2 свойств системы отличных от нуля относительных чисел выражают, говоря, что эта система есть *бесконечная коммутативная* ***полугруппа*** *относительно умножения,* включающая единицу (модуль умножения). Система одних только *положительных* чисел есть *полугруппа* относительно операции *сложения,* притом не включающая модуля сложения (нуля).

3) Операция умножения дистрибутивна относительно сложения.

Объединяя совокупность всех перечисленных свойств в отношении обеих операций, говорят, что система *целых* (положительных и отрицательных) *чисел* образует *коммутативное* **кольцо** (*Ring*).

Системы, в которых сверх перечисленных свойств имеет место однозначная обратимость операции умножения, т. е. *выполнимость операции деления* (за исключением деления на нуль), характеризуются терминами **„числовая область"**, **„числовое поле"** [также *„корпус"* (*Körper*) и *„тело"*].

Полученное *кольцо* относительных чисел необходимо дополнить введением дробных чисел для того, чтобы получить *числовое поле.*

Изучение числовых систем на основании общих свойств операций, подобных положенным в основу только что приведенной классификации, составляет одну из задач *абстрактной алгебры*, изучающей, помимо встречающихся в арифметике тривиальных числовых систем, также и значительно более общие образования со свойствами, в той или иной степени отличающимися от тривиальных.

С некоторыми из таких систем, а именно с *конечными* группами и полями нам еще придется встретиться ниже, в главе XIV.

Примечание. Перечисленные свойства числового кольца (в частности и числового поля) не независимы друг от друга. Так, например, нетрудно доказать, что коммутативность сложения вытекает как следствие из остальных свойств числового кольца, причем даже достаточно, не требуя выполнимости операции вычитания во всех случаях, потребовать лишь, чтобы каждое из равенств $a+b=a+c$ и $b+a=c+a$ влекло бы как следствие равенство $b=a$.

По отношению к операции умножения можно не требовать при этом коммутативности и ассоциативности и опираться лишь на наличие единицы (модуля умножения) и оба дустрибутивных закона (левый и правый).

Действительно, в этих предположениях мы можем написать

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd,$$
$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

откуда

$$bc+ad=ad+bc$$

и, при $c=d=1$,

$$b+a=a+b.$$

Гильберт (Hilbert) заметил, что, присоединяя к свойствам некоммутативного относительно *умножения* числового поля еще аксиомы скалярного расположения и соответствующие свойства операций: $a+c>b+c$ при $a>b$ и $ac>bc$, $ca>cb$ при $a>b$ и $c>0$, можно, принимая еще аксиому Архимеда (§ 30), доказать, что и *умножение должно быть коммутативным.*

Ограничиваясь с самого начала неотрицательными числами, заметим предварительно, что для целого n

$$a\cdot n=a(1+1+\ldots+1)=a+a+\ldots+a=(1+1+\ldots+1)a=n\cdot a.$$

Допустим теперь, что при $a>0$ и $b>0$ имеет место соотношение $ab-ba>0$. Тогда на основании выполнимости операции деления мы можем найти такое $c>0$, что

$$(a+b+1)c=ab-ba.$$

Выбирая число d так, чтобы было

$$0<d<1 \text{ и } d<c,$$

на основании аксиомы Архимеда найдем два целых числа m и n таких, что

$$md<a\leqslant(m+1)d \text{ и } nd<b\leqslant(n+1)d$$

откуда будет следовать

$$ab < mnd^2 + (m + n + 1) d^2,$$
$$ba > mnd^2$$

и

$$ab - ba < (m + n + 1) d^2.$$

Но $md < a$, $nb < b$, $a < 1$ и потому

$$(m + n + 1) d < a + b + 1$$

и, стало быть,

$$ab - ba < (a + b + 1) d < (a + b + 1) c,$$

что противоречит исходному равенству $(a + b + 1) c = ab - ba$.

Поэтому должно быть $ab - ba = 0$ и $ab = ba$.

Заметим, что заключение о коммутативности сложения было нами при аналогичных условиях получено выше (§ 32, стр. 109). В весьма общей форме соответствующие предложения относительно обеих операций будут нами попутно установлены ниже, при рассмотрении общих свойств ассоциативных операций (§ 68).

§ 40. Дробные числа как пары целых чисел.

1. Определение 1. ***Рациональными числами*** *называются пары (a, b) целых чисел a и b, из которых второе — положительное, определяемые заданием этих чисел в указанном порядке и подчиненные законам скалярного сравнения и законам действий, устанавливаемым следующими определениями.*

Определение 2. *Пара*

$$(a, b) \gtreqless (c, d)$$

соответственно тогда, когда

$$ad \gtreqless bc.$$

Следствие. *Всякая пара переходит в равную ей, если оба ее элемента умножить на одно и то же положительное число,* т. е.

$$(ar, br) = (a, b).$$

Всеми такими парами (и только ими) задается, таким образом, одно и то же рациональное число, равное (a, b).

Теорема 1. *Система пар образует скалярную величину, удовлетворяющую постулатам* § 25.

Так, например, если

$$(a, b) > (c, d) \text{ и } (c, d) > (e, f),$$

то

$$ad > bc \text{ и } cf > de.$$

Умножая первое неравенство почленно на $f > 0$, а второе на $b > 0$, найдем

$$adf > bcf > dbe,$$

и так как $d > 0$, то

$$af > be,$$

т. е.

$$(a, b) > (e, f).$$

Аналогично проверяются и остальные постулаты.

Установив эту теорему, мы в дальнейшем будем допускать и отрицательные (*не нулевые*) значения второго элемента пары, полагая притом

$$(a, -b)=(-a, b).$$

Это включается в общее определение равенства, для соотношений же $>$ и $<$ мы сохраним условие положительности второго члена пары.

Определение 3. ***Суммой** двух пар (a, b) и (c, d) называется пара*

$$(ad+bc, bd),$$

так что, по определению

$$(a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd).$$

В частности,

$$(a, b)+(c, b)=(ab+cb, bb)=(a+c, b).$$

Теорема 2. *Сумма не меняется при замене слагаемых равными им парами* (операция сложения однозначна).

Действительно, если $(a', b')=(a, b)$, то $a'b=b'a$ и потому имеет место равенство произведений

$$(a'd+b'c)\,bd=(ad+bc)\,b'd,$$

так что

$$(a'd+b'c, b'd)=(ad+bc, bd),$$

. или

$$(a', b')+(c, d)=(a, b)+(c, d).$$

То же верно и относительно второго слагаемого, так как верна

Теорема 3. *Сложение пар обладает переместительным и сочетательным свойством.*

Это также проверяется непосредственно.

Теорема 4. *В системе рациональных чисел операция вычитания, обратная операции сложения, всегда выполнима и однозначна.*

Действительно, соотношение

$$(c, d)+(x, y)=(cy+dx, dy)=(a, b)$$

равносильно равенству

$$(cy+dx)\,b=ady$$

или

$$xbd=y\,(ad-bc),$$

а это означает, что

$$(x, y)=(ad-bc, bd)=(a, b)+(-c, d).$$

В частности, отсюда следует, что *модуль сложения* представлен парами типа

$$(a, b)-(a, b)=(0, b),$$

которые все между собой равны. Такие пары мы будем называть **нулевыми парами.**

Теорема 5. $$(a, b) \gtreqless (c, d)$$

в зависимости от того, будет ли разность

$$(a, b) \quad (c, d) \gtreqless 0.$$

Действительно, принимая, что $b>0$ и $d>0$, найдем, что оба эти соотношения сводятся к

$$ad - bc \gtreqless 0.$$

Определение 4. ***Произведением*** *двух пар* (a, b) и (c, d) *называется пара*

$$(ac, bd),$$

так что, по определению

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Теорема 6. *Произведение не меняется при замене сомножителей равными им парами* (операция умножения однозначна).

Действительно, если $(a', b') = (a, b)$ и $(c', d') = (c, d)$, то

$$a'b = ab'; \ c'd = d'c$$

и, следовательно,

$$a'c'bd = acb'd',$$

т. е.

$$(a', b')(c', d') = (a'c', b'd') = (ac, bd) = (a, b)(c, d).$$

Теорема 7. *Умножение обладает свойствами переместительности, сочетательности и, кроме того, свойством распределительности относительно сложения.*

Проведем доказательство для дистрибутивного закона

$$[(a, b) + (c, d)](e, f) = (ad + bc.\ bd)(e, f) = (ade + bce, bdf) =$$
$$(ade, bdf) + (bce, bdf) = (ae, bf) + (ce, df) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f).$$

Теорема 8. *В системе рациональных чисел обратная умножению операция* ***деления*** *на ненулевую пару всегда выполнима и однозначна,* т. е. всяким двум парам

$$(c, d) \text{ и } (a, b), \text{ где } a \neq 0,$$

соответствует система равных между собой пар (x, y), удовлетворяющих соотношению

$$(a, b)(x, y) = (c, d).$$

Для доказательства достаточно заметить, что написанное соотношение по определению умножения равносильно равенству

$$(ax, by) = (c, d),$$

что эквивалентно, по определению 1, соотношению

$$axd = byc,$$

или

$$x \cdot ad = y \cdot bc.$$

Так как по условию $a \neq 0$ и d как второй элемент пары, не нуль, то $ad \neq 0$ и, согласно с определением 1, полученное равенство означает, что

$$(x, y) = (cb, da).$$

Все пары, обладающие требуемым свойством, таким образом. равны между собой и равны паре (cb, da).

Обозначая операцию деления знаком „:“, мы можем, стало быть, написать

$$(c, d):(a, b) = (cb, da) = (c, d)(b, a).$$

Пара (b, a) называется **обратной** по отношению к паре (a, b). Операция деления может быть заменена, таким образом, умножением на обратную пару.

Произведение пары (a, b) и обратной ей (b, a) равно

$$(a, b)(b, a) = (ab, ba).$$

Одновременно можно написать

$$(a, b):(a, b) = (ab, ba).$$

Отсюда вытекает, что все пары с совпадающими первым и вторым элементами [за исключением пары (0,0), которая, согласно с общим определением, в рассматриваемую систему не входит] равны между собой

$$(a, a) = (b, b) = ..$$

и являются единственными парами, обладающими тем свойством, что умножение их на любую другую пару не изменяет этой последней (в смысле соотношения равенства).

Пары типа (a, a) представляют, таким образом, *модуль операции умножения* (*„единичные“* пары).

Теорема 9. *Произведение равно нулевой паре в том и только в том случае, если один из сомножителей есть нулевая пара.* Утверждение вытекает из предыдущего; впрочем и непосредственное доказательство тривиально. Из равенства $(a, b)(c, d) = 0$ следует $ac = 0$ и потому либо $a = 0$, либо, если это не так, $c = 0$.

2. Рассмотрим теперь вопрос о *включении системы целых чисел в систему пар.*

Установим соглашение.

Всякую пару, второй элемент которой равен 1, *условимся считать равной целому числу, являющемуся первым ее элементом,* так что

$$(a, 1) = a.$$

Отсюда будет следовать, согласно с общим определением равенства пар, что, вообще,

$$(ab,\ b)=a.$$

Нетрудно проверить, что определения, установленные для пар, в частных случаях, когда пары оказываются равными целым числам, будут согласованы с определениями, установленными для этих последних.

Так, соотношение $(a,\ 1)\gtreqless(b,\ 1)$ приводит к $a\cdot 1\gtreqless b\cdot 1$, или $a\gtreqless b$, сумма $(a,\ 1)+(b,\ 1)=(a+b,\ 1)=a+b$, произведение $(a,\ 1)\ (b,\ 1)=(ab,\ 1)=ab$.

Выполнимая в области целых чисел лишь при $a=rb$, где r целое число, операция деления целого числа a на целое число b, отличное от нуля, *всегда выполнима и однозначна в области пар*

$$a:b=(a,\ 1):(b,\ 1)=(a,\ 1)\ (1,\ b)=(a,\ b).$$

Здесь можно повторить то, что было сказано выше относительно *принципа перманентности*. В настоящем случае символ $(a,\ b)$ замещает отсутствующее в системе целых чисел частное

$$a:b$$

и подчиняется тем же формальным правилам, что и дробь $a:b$ в случаях, когда a делится нацело на b.

3. В полной аналогии с тем, что было сказано в § 40, из установленных выше свойств действий в области рациональных чисел будут вытекать *теоремы* о правилах оперирования с частными

$$\alpha:\beta$$

от деления дроби α на дробь β 0. Эти правила по форме аналогичны определениям, установленным для пар $(a,\ b)$ в настоящем параграфе.

Так как операция деления на число $\beta\neq 0$ в области рациональных чисел всегда выполнима, то рассмотрение пар типа $(\alpha,\ \beta)$ не приведет нас ни к какой новой числовой системе, а соглашение установленное выше, в применении к этим парам даст нам при $\beta\neq 0$

$$(\alpha,\ \beta)=\alpha:\beta$$

для *любой* такой пары $(\alpha,\ \beta)$.

То обстоятельство, что при установлении свойств символа $\alpha:\beta$ мы имеем дело уже с *теоремами*, которые *надо доказывать*, в особенности важно подчеркнуть в элементарном преподавании, где совершенно сходное положение имеет место при установлении основных правил действий с так называемыми *алгебраическими дробями*. Учащийся, хорошо знающий из элементарной теории дробей, что

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

испытывает обычно некоторое недоумение по поводу того, что эти очевидные соотношения почему-то вдруг заново доказываются для алгебраических дробей. Недоумение это имеет своим источником психологическое *субституирование* (подстановку) *целых положительных чисел* на место букв (явление того же порядка, что и утверждение, будто $-a$ отрицательное, а $+a$ положительное число). Поэтому здесь нужно с достаточной отчетливостью указать, что *содержание* доказываемой буквенной формулы в теории алгебраических дробей, где числитель и знаменатель могут принимать любые положительные и отрицательные значения, *по существу выходит за пределы известного правила перемножения обыкновенных дробей.* Целесообразно даже формулировать подобного рода общие предложения не как „правила действий над дробями", а как *общие законы действий.* Так, например, можно сказать, что формула

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

равносильна утверждению, что частное не изменяется, если делимое и делитель умножить на одно и то же число $c \neq 0$.

Заметим попутно, что изложенная в § 29 операторная точка зрения, отражая в самом определении действий над дробями только что указанную сторону дела, позволяет в гораздо большей мере, чем обычное изложение, сохранить для одинаковых по форме записи утверждений также и *одинаковое по существу содержательное их истолкование.*

Соответственно с этим становится ясным и путь доказательства. *По определению* $\frac{a}{b}=k$ означает, что $a=bk$, а отсюда из однозначности и сочетательного свойства операции умножения следует $ac=(bc)k$ и, значит, $\frac{ac}{bc}=k$. Мы видим, таким образом, что соотношение $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$ будет верно во всякой числовой системе, для которой верны указанные только что свойства операции умножения.

Вообще, свойства операций, выражаемые известными читателю из курса элементарной алгебры тождествами и неравенствами, вытекают из сравнительно небольшого числа основных свойств, характеризующих *скалярное числовое поле* (см. § 15). Это обстоятельство, надо думать, достаточно хорошо известно читателю из элементарного курса алгебры и поэтому мы позволим себе ограничиться только что приведенным примером.

Как раз указанной основной ролью свойств числового поля и объясняется то, что при формальном построении всякой числовой системы прежде всего стараются установить, *какие именно из этих свойств выполнены, а какие нет.* Так мы поступали уже неоднократно (§ 8, 9, 20, 24, 36, 40) и так будем поступать и впредь в аналогичных случаях (§ 61, 72, 76, 83 и гл. XI).

§ 41. Система рациональных чисел как числовое поле.

Система всех отличных от нуля рациональных чисел образует *бесконечную коммутативную группу* по отношению к операции умножения.

Согласно с сказанным в § 39, свойства системы всех рациональных чисел в отношении обеих основных операций сложения и умножения характеризуют систему рациональных чисел как *числовое поле*.

Система рациональных чисел играет основную роль по отношению ко всем другим числовым полям, являясь, как мы это сейчас покажем, *составной частью всякой числовой системы, обладающей свойствами поля* и сохраняющей для натуральных чисел обычное определение равенства (за исключением тривиального случая, когда система состоит из одного лишь числа *нуль*).

Напомним еще раз, что по определению *в числовом поле операции сложения и умножения всегда выполнимы, однозначны, ассоциативны и* (за исключением случая деления на нуль) *однозначно обратимы; умножение дистрибутивно по отношению к сложению*.

Итак, предположим, возвращаясь к доказательству высказанного выше утверждения, что некоторое числовое поле содержит число $a \neq 0$. Тогда оно содержит, по определению, также элемент $a-a=0$, элемент $a:a=1$ и, стало быть, также

$$1+1=2,\quad 2+1=3,\ldots$$

т. е. все целые положительные числа, далее

$$0-1=-1,\quad 0-2=-2,\ldots,$$

т. е. все отрицательные числа, а потому и все частные $m:n$ т. е. все дроби $\frac{m}{n}$ с любым целым числителем и знаменателем.

Другими словами, всякое числовое поле будет заключать в себе как часть систему *рациональных* чисел.

Сохранение в данном поле обычного определения равенства для натуральных чисел, которое мы внесли в условие доказываемого предложения, обеспечивает (в силу свойств числового поля) совпадение условий равенства, имеющих место для рациональных чисел *как таковых*, с теми условиями, которые вытекают для рациональных чисел *как элементов данного поля* из определений, *в этом поле* установленных. Если отбросить требование, о котором идет речь, то может оказаться, что в данном поле имеют место соотношения типа $n=m$ для целых чисел, *неравных* между собой в *обычном* смысле, а также аналогичные соотношения для дробей и заключение теоремы пришлось бы соответственно модифицировать. С примерами числовых полей последнего типа мы встретимся в главе XIV (§ 115, стр. 449).

Доказанное предложение выясняет одну из весьма важных сторон осуществленного нами на данной стадии расширения понятия числа. Оно показывает, что обобщения понятия числа, проведенные при построении системы рациональных чисел, *необходимо вытекают из требования расширить числовую систему натуральных чисел так, чтобы полученная система была числовым полем*.

Следует, однако, помнить, что эта логическая необходимость совершенно не равнозначна исторической и методологической *обусловленности*.

Процесс обобщения понятия числа чрезвычайно тесно связан с изучением скалярных и направленных величин и задачей измерения, как это и было показано выше. Внутреннее же, чисто арифметическое построение систем относительных и дробных чисел основано, как было уже указано в § 35, на том, что соответствующие этим системам скалярные величины (переходы первой и второй ступени) порождаются лежащей в основе арифметики исходной скалярной величиной — натуральным рядом целых положительных чисел.

ГЛАВА V.

ОПЕРАТОРНАЯ ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЙ ТРЕТЬЕЙ СТУПЕНИ.

§ 42. Постановка вопроса.

Как мы видели выше, операторная теория рациональных и действительных чисел основана на рассмотрении переходов первой ступени для скалярной величины, которую образуют натуральные числа. Если иметь в виду получаемые на этой основе числовые характеристики переходов, то *композиции* переходов первой ступени отвечает *сложение* отнесенных им *чисел*. Соответственно с этим, *операторы* дают ответ на вопрос, как одно такое число получается из другого путем операций разбиения на равные слагаемые и объединения равных слагаемых в одну сумму (и еще, быть может, предельного перехода, описанного с помощью понятия сечения). Такое построение операторов для чисел, характеризующих переходы, мы будем называть **аддитивным измерением** этих чисел.

Основой дальнейшего изложения является возможность рассматривать *переходы второй ступени* для скалярной величины, которую образуют *числа*, причем операция, названная нами *композицией* переходов, отнюдь *не истолковывается как сложение*.

Мы уже видели, что наряду с переходами (b, a), соответствующими разности $b-a$ чисел b и a, можно уже для системы целых положительных чисел построить систему *переходов второй ступени* от a к b, соответствующих кратному отношению b к a. С такой точки зрения мы и подошли к теории дробных чисел как пар целых чисел (ср. § 35, стр. 119 и § 40). Равенство двух *таких* переходов $(b, a)=(d, c)$ определяется с помощью соотношения $bc=ad$, а *композиция* соответствует *перемножению* характеризующих их чисел $\frac{b}{a}$ и $\frac{d}{c}$.

Если, оперируя с переходами первой ступени, мы имеем в виду аддитивное изменение величин (*на* столько-то и еще *на* столько-то, *на* столько же, *на* сколько то-то больше того-то и т. п.), то здесь, рассматривая переходы второй ступени, мы имеем в виду аналогичные мультипликативные изменения (*во* столько-то раз и еще *во* столько-то раз, *во* столько раз, *во* сколько раз то-то больше того-то и т. п.).

Поясним это подробней.

С формулами

$$A + \alpha a + \beta a = A + (\alpha + \beta) a = A + \sigma a \tag{1}$$

и

$$A + \alpha (\beta a) = A + (\alpha\beta) a = A + \pi a, \tag{1'}$$

где A и $a \neq 0$ какие-либо числа, можно сопоставить *операторные формулы*

$$\alpha + \beta = \sigma; \quad \alpha\beta = \pi. \tag{2}$$

Соответственно с общим операторным смыслом действий над рациональными числами мы можем, переходя от записи типа (2) к формулам типа (1), прочесть, например, равенства

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \text{ и } (-2)(+3) = -6$$

так: деление на 3, умножение на 4 и последующее деление на 2 равносильно делению на 3, соединенному с удвоением; вычитание удвоенного результата утроения равносильно вычитанию ушестеренного количества и т. п.

Это есть частное истолкование операторного смысла действий над числами, которое может быть проиллюстрировано и на целых числах, если выбрать A и a в формулах (1) и (1') так, чтобы все операции были выполнимы.

В основе этого истолкования лежат переходы первой ступени, соответствующие „слагаемым" или „прибавляемым" количествам αa, βa и т. д. Положительным значениям операторов отвечает *присоединение*, отрицательным, грубо говоря, — *погашение* слагаемого (вычитание), дробным — *разбиение* на равные слагаемые и *объединение* таких слагаемых в одну сумму.

Как раз подчеркнутое общее значение рациональных операторов как *характеристик действий присоединения, погашения, разбиения и объединения* (имеющее место, как мы видели в § 29 в общем случае, когда исходная операция *композиции* переходов *не* истолковывается как сложение) и лежит в основе возможности охарактеризовать с помощью рациональных операторов *мультипликативную* структуру чисел.

Именно, заменяя операцию сложения операцией умножения, т. е. заменяя переходы первой ступени переходами второй ступени, мы можем соответственно охарактеризовать операторами, грубо говоря, действия *присоединения* сомножителя, *погашения* сомножителя (деления), *разбиения* на равные сомножители и *объединения* равных сомножителей в одно произведение.

Этому будет соответствовать конкретная интерпретация дробных и отрицательных показателей в формулах типа

$$A \cdot a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = Aa^{\alpha+\beta} = Aa^{\sigma} \tag{3}$$

и

$$A (a^{\alpha})^{\beta} = Aa^{\alpha\beta} = A \cdot a^{\pi}, \tag{3'}$$

аналогичных формулам (1) и (1') и представляющим, что мы здесь особо подчеркиваем, интерпретацию *тех же* операторных формул (2)

$$\alpha + \beta = \sigma \text{ и } \alpha\beta = \pi.$$

При этом, аналогично предыдущему, можно подобрать для всякой операции (2) целые числа A и a так, чтобы соответствующие действия были выполнимы.

С этой точки зрения равенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3} \text{ и } (2)(3)=6$$

для *операторов третьей ступени* показателей — получают следующее истолкование; „разбиение на три равных сомножителя последующее объединение четырех таких сомножителей в одно произведение и разбиение результата на два равных сомножителя равносильно разбиению на три равных сомножител с последующим объединением двух таких множителей в одно произведение“ и „деление на произведение двух сомножителей каждый из которых равен произведению трех равных сомножителей, равносильно делению на произведение шести таких сомножителей“.

Общность операторного смысла действий и составляет основу известной аналогии между действиями над радикалами и действиями над дробными числами, находящей свое выражение в употреблении *дробных показателей.*

С другой стороны, отвлекаясь от рассмотрения переходов и обращаясь к самим *числам,* мы можем, в случае операторов второй ступени, охарактеризовать каждое число B с помощью формулы

$$B=A+\alpha a, \quad (a\neq 0).$$

Оператор α характеризует операцию, приводящую к числу B при начале отсчета A и единице меры a. Полагая $A=0$ и $a=1$ мы найдем, что оператор α отвечает здесь на вопрос о том, как число B составлено из единицы *аддитивным* путем, т. е. с помощью разбиения на равные *слагаемые* и объединения равных слагаемых в одну *сумму.*

Аналогично, полагая в формуле

$$B=A\cdot a^{\alpha}$$

$A=1$ и выбирая за основание a произвольное, отличное от 1 число, мы можем сказать, что **оператор третьей ступени** α отвечает на вопрос о том, как число B получается из числа a *мультипликативным* путем, т. е. путем действия разбиения на равные *сомножители* и объединения таких сомножителей в одно *произведение.* Здесь мы имеем дело, стало быть, с **мультипликативным** (логарифмическим) **измерением** чисел, характеризующим мультипликативную составленность чисел из основания a.

Но, с другой стороны, по отношению к *переходам второй ступени, композиция* которых есть *умножение* соответствующих чисел, это измерение укладывается в общую схему аддитивного измерения системы переходов второй ступени, удовлетворяющей всем требованиям, наложенным в § 28 на измеряемую аддитивную величину. Соответственно с указанным здесь смыслом операторов. композиции переходов, как и в общем случае, отвечает сложение *измеряющих переходы* чисел (операторов третьей ступени).

Используя эту общность операторного смысла чисел, являющихся результатом измерения, мы и строим в следующем параграфе теорию обычного измерения для переходов второй ступени. параллельно с этим подчеркивая мультипликативный смысл процесса измерения по отношению к соответствующим переходам *числам*. Все изложение при этом повторяет построения § 29–32 применительно к указанному конкретному истолкованию композиции переходов второй ступени как умножения.

Заметим, что теорию можно строить, имея в распоряжении лишь целые положительные числа в качестве элементов основной области. Однако для того, чтобы все операции были выполнимы придется потребовать расширения основной области, вводя, во всяком случае, все положительные действительные числа. Мы и будем предполагать, что это расширение произведено, *не останавливаясь здесь на вопросах выполнимости*, подробно разобранных в главе VII. Для *операторов* третьей ступени, являющихся результатом мультипликативного измерения, нам придется вводить действительные (рациональные и иррациональные, положительные и отрицательные) числа даже в том случае, когда основная область содержит лишь целые положительные числа.

§ 43. Операторная теория возвышения в степень с дробным показателем.

1. Итак, рассмотрим переходы (b, a) от одного положительного числа к другому, равенство которых определено так: $(b, a)=(d, c)$ в том и только в том случае, когда $ad=bc$.

Всякому переходу (a, b) соответствует переход противоположного направления (b, a). Условимся считать переходы (a, b) от b к a, для которых $a>b$, переходами *положительного* направления.

Применение перехода (b, a) к числу a дает в результате число b, так что (b, a) к $a=b$.

Композиция переходов (c, b) и (b, a) есть, по общему определению, переход (c, a). Для переходов без общего связующего звена, по общему определению композиции (стр. 91), найдем, используя принятое нами условие равенства переходов,

$$(c, d) \text{ к } (a, b)=(ca, da) \text{ к } (ad, bd)=(ac, bd).$$

Если поэтому отнести каждому переходу (a, b) действительное число — дробь $\frac{a}{b}$, то *равным переходам* будут соответствовать *равные дроби* (отношения), а композиции переходов *произведение* чисел, отнесенных переходам.

Выберем произвольный переход $(\alpha, 1)$, которому в только что указанном смысле соответствует число $\alpha:1=\alpha$, за основной и будем с помощью этого перехода *измерять* все остальные.

В отличие от чисел $b:a$, соответствующих переходам, равным (b, a), мы будем строго придерживаться иной терминологии для чисел, полученных в результате *измерения* с помощью перехода α, именно будем говорить, что эти числа *измеряют* соответствующие переходы (b, a), а также ***измеряют (мультипликативно) соответствующие действительные числа*** $\frac{b}{a}$ ***при основании*** α.

Так, например, переходу $(16, 2)$ соответствует число $16:2=8$; тот же переход измеряется числом 3, если переход $(2, 1)$ принят за основной, ибо $(16, 2)=(16, 8)$ к $(8, 4)$ к $(4, 2)=(2, 1)$ к $(2, 1)$ к $(2, 1)$. Число 3 *мультипликативно измеряет* число $16:2=8$ при основании $\alpha=2$.

Переходы и *соответствующие* им числа мы будем в дальнейшем обозначать одной и той же малой греческой буквой. Вообще, читателю следует сосредоточить основное внимание на мультипликативном измерении *чисел* и знак композиции „к" читать как знак *умножения;* соответствующие же переходы мы рассматриваем лишь для того, чтобы полностью применить общую теорию измерения главы III.

Введем обозначение $[n]\alpha$ для результата композиции n переходов, равных α. Тогда для перехода $(\alpha^n, 1)$, которому соответствует число α^n при n — целом положительном, получим

$$(\alpha^n, 1)=(\alpha^n, \alpha^{n-1}) \text{ к } (\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}) \text{ к } \ldots \text{ к } (\alpha, 1)=(\alpha, 1) \text{ к } (\alpha, 1) \text{ к } \ldots \text{ к } (\alpha, 1)=$$
$$=[n](\alpha, 1),$$

или

$$\alpha^n=[n]\alpha.$$

Таким образом, n есть здесь число, *измеряющее* (в обычном смысле слова) переход $(\alpha^n, 1)$ посредством принятого за единичный перехода $(\alpha, 1)=[1](\alpha, 1)$. Формула $\alpha^n=[n]\alpha$ как раз и выражает тот факт, что для *соответствующих* переходам чисел мы имеем дело с *мультипликативным* измерением.

Число n в формуле $\beta=[n]\alpha$ есть *оператор третьей ступени*, показывающий, что число β может быть получено из α путем *объединения* в одно произведение *n сомножителей, равных* α (аналогично тому, как в случае обыкновенного аддитивного измерения оператор n второй ступени в формуле $b=na$ показывает, что b получается из a путем объединения в одну сумму n слагаемых, равных a). Для того чтобы подчеркнуть этот операторный смысл числа n и аналогию с § 29—32, мы сохраним обозначение $[n]$ для показателей степени.

Из этого определения непосредственно следует

Теорема 1. $[n]\alpha=[n']\alpha$ *тогда и только тогда, когда* $n=n'$.

Действительно, в силу монотонности операции композиции, найдем, полагая здесь и в дальнейшем $\alpha>1$, что

$$[n+1]\alpha=[n]\alpha \text{ к } \alpha>[n]\alpha$$

и, следовательно, при $n'>n$ будет и $[n']\alpha>[n]\alpha$.

Теорема 2. $[n]([m]\alpha)=[nm]\alpha$.

Теорема 3. $[n]\alpha$ к $[m]\alpha = [n \quad m]$

Обе эти формулы непосредственно вытекают из определения и выражают известные свойства операции возвышения в целую положительную степень.

Если теперь

$$[m]\alpha = [n]\beta,$$

то мы будем писать

$$\beta = \left[\frac{m}{n}\right]\alpha,$$

а также

$$\beta = \left[\frac{1}{n}\right][m]\alpha$$

и

$$\beta = [m]\left[\frac{1}{n}\right]\alpha,$$

если операция $\left[\frac{1}{n}\right]\alpha$ выполнима.

Оператор $\left[\frac{m}{n}\right]$ означает, таким образом, совокупность следующих действий: композиции m переходов, равных α, и последующего разбиения результата на n равных переходов или, другими словами, если операция $\left[\frac{1}{n}\right]\alpha$ выполнима: *разбиения числа α на n равных сомножителей с последующим объединением m таки. сомножителей в одно произведение.*

2. Последнее истолкование дает возможность установить законы действий с дробными показателями, соответствующие элементарной теории действий с *радикалами* на основе совершенно *конкретных представлений.* В отличие от обычных методов изложения, при которых действие извлечения корня рассматривается исключительно как *обратная операция,* а соответствующие доказательства носят характер *апостериорной проверки,* подчеркиваемые здесь *операторные представления* открывают возможность *прямого истолкования* смысла всякого преобразования радикалов на каждой стадии выкладки. На методическом значении этого обстоятельства мы остановимся ниже.

В соответствии с указанным значением оператора $\left[\frac{m}{n}\right]$ можно, далее, считать число $\frac{m}{n}$ возникающим в результате *подсчета числа* (целого или, в приведенном выше смысле слова, дробного) *сомножителей, равных α, из которых „состоит“ число* β.

Действие *логарифмирования* числа β при основании α получает, таким образом, также вполне конкретное истолкование и может быть охарактеризовано как *мультипликативное* измерение. Обычно доказываемые путем апостериорной проверки свойства операции логарифмирования становятся в такой интерпретации непосредственно очевидными.

Перейдем теперь к законам действии с дробными операторами третьей ступени $\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right]$. Заметим, что мы здесь находимся в точно таком же положении, как и в § 29 при введении рациональных чисел как операторов второй ступени. Поэтому по существу *нет надобности* повторять приведенные там рассуждения заново. Однако, основной задачей § 29 было именно введение рациональных чисел; здесь же мы будем предполагать теорию рациональных чисел *тем или иным способом построенной,* обращая основное внимание на конкретный смысл операторов третьей ступени; поэтому определениям § 29 будут здесь соответствовать доказуемые *теоремы.*

Теорема 1*a*. $\left[\frac{1}{n}\right]\alpha = \left[\frac{1}{q}\right]\alpha$ тогда и только тогда, когда $n = q$.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 1.

Теорема 2*a*. $\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1}{m}\right]\alpha = \left[\frac{1}{nm}\right]\alpha$.

В конкретном истолковании она очевидна: разбиение α на m равных сомножителей и последующее разбиение каждого из них на n равных сомножителей эквивалентно разбиению α на mn равных сомножителей.

С методической точки зрения соответствующая наглядная схема, иллюстрирующая, скажем, формулу $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[6]{\alpha}$, именно, схема

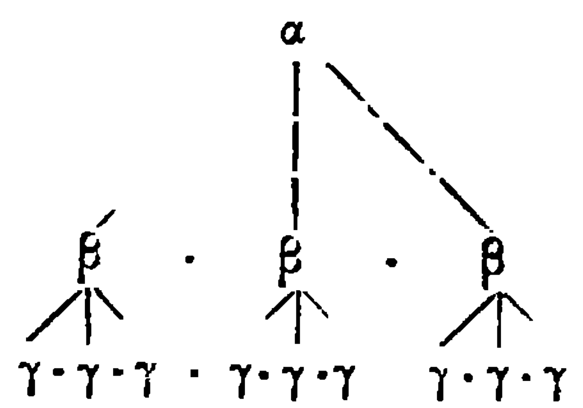
$$\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \quad \beta \cdot \beta \\ \gamma \quad \gamma \cdot \gamma \quad \gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \end{array}$$

где

$$\beta = \sqrt[3]{\alpha}, \quad \gamma = \sqrt{\beta} = \sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[6]{\alpha},$$

заслуживает внимания по следующим соображениям.

Обычное формальное доказательство поверкой, основанное на определении: „$\sqrt[6]{\alpha}$ есть такое число, которое, будучи и т. д. вряд ли можно воспроизводить при каждом применении доказанного „правила". С точки зрения этого определения смысл равенства $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[6]{\alpha}$, ведь, такой: „число, которое, будучи возвышено в квадрат, дает число, которое, будучи возвышено в куб, дает число α, равно числу, которое, будучи возвышено в шестую степень, дает число α". Естественно, что в мыслительном аппарате среднего учащегося такая постройка может удержаться в равновесии лишь при очень осторожном проведения доказательства, а затем заменяется механическим применением правила. Это влечет за собой формальное восприятие данного отдела курса, частые ошибки и затруднения в понимании очевиднейших, с точки зрения существа дела, соотношений (даже и при значительных формальных навыках). Так, например, запомнив еще и раньше, что „при умножении показатели складываются“, учащийся, с точки зрения механического правила, при введении радикалов до дробных показателей может иметь склонность написать $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$, или, например, $\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a} = \sqrt[7]{a}$, так как неустойчивое построение, „которое, будучи“ он не в состоянии воспроизводить в каждом отдельном случае, а механические правила „складываются“ и „перемножаются“ никакими отчетливыми представлениями и эмоциями не постороннего характера друг от друга не отделяются. Указанное выше конкретное истолкование без труда воспроизводится в каждом отдельном случае и может сопровождать выкладку с самого начала обучения действиям над радикалами, схема же



для иллюстрации формулы $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[9]{a}$ совершенно исключает ошибки, подобные вышеприведенной.

В силу этих соображений рассматриваемое нами операторное изложение операций третьей ступени, сопровождаемое указанным конкретным истолкованием, заслуживает внимания с методической точки зрения. От проведения аналогии с аддитивным измерением путем рассмотрения переходов при этом, разумеется, следует воздержаться. Заметим еще, что в таком изложении не следует бояться выражений типа „в произведение $a^2\sqrt{a}$ число a входит множителем $2\frac{1}{2}$ раза“, поскольку смысл этих выражений вполне точно определен.

Формальное доказательство теоремы $2a$ протекает, как обычно

$$[nm]\left[\frac{1}{n}\right]\left[\frac{1}{m}\right]a = a$$

по теореме 2.

Теорема $1b$.

$$\left[\frac{p}{q}\right]a = \left[\frac{np}{nq}\right]a.$$

Как конкретное истолкование, так и формальное доказательство протекают, на основе предыдущего, по одной и той же схеме

$$\left[\frac{np}{nq}\right]\alpha=\left[\frac{1}{q}\right]\left[\frac{1}{n}\right][n]\,[p]\,\alpha=$$

$$=\left[\frac{1}{q}\right][p]\,\alpha=\left[\frac{p}{q}\right]\alpha.$$

При этом мы не обязаны считать операцию $\left[\frac{1}{nq}\right]\alpha$ выполнимой. Так, например, имея дело лишь с *целыми* числами α, можно все же написать $\left[\frac{3}{2}\right]4=\left[\frac{15}{10}\right]4$, хотя операция $\left[\frac{1}{10}\right]4=$ $=\sqrt[10]{4}$ и невыполнима в области целых чисел. Но, по определению, $\left[\frac{15}{10}\right]4=\left[\frac{1}{10}\right][15]\,4=8=\left[\frac{3}{2}\right]4$, так как $[10]\,8=[15]\,4$ и $[2]\,8=$ $=[3]\,4$. Поэтому мы и пишем $\left[\frac{m}{n}\right]=\left[\frac{1}{n}\right][m]$, а не $\left[\frac{m}{n}\right]=$ $=[m]\left[\frac{1}{n}\right]$. С точки зрения методической предпочтительнее считать операции выполнимыми и из двух возможных способов разложения оператора $\left[\frac{m}{n}\right]$ выбирать последний.

Теорема 1с.

$$\left[\frac{p}{q}\right]\alpha=\left[\frac{m}{n}\right]\alpha$$

тогда и только тогда, когда $pn=mq$, т. е. $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$

Доказательство вытекает из предыдущего, так как равенство $\left[\frac{pn}{qn}\right]\alpha=\left[\frac{mq}{nq}\right]\alpha$ возможно только при $pn=mq$. Такой метод рассуждения ближе к обычному представлению о делении на части, здесь — о разбиении на равные сомножители, нежели непосредственное доказательство на основе определения дробного оператора $\left[\frac{m}{n}\right]$.

Теорема 3а.

$$\left[\frac{p}{q}\right]\alpha\ \text{к}\left[\frac{m}{n}\right]\alpha=\left[\frac{p}{q}+\frac{m}{n}\right]\alpha.$$

Доказательство на основе того же приема и теоремы 2.

$$\left[\frac{p}{q}\right]\alpha\ \text{к}\left[\frac{m}{n}\right]\alpha=\left[\frac{pn}{qn}\right]\alpha\ \text{к}\left[\frac{mq}{nq}\right]\alpha=$$

$$=\left[\frac{1}{nq}\right][pn+mq]\,\alpha=\left[\frac{p}{q}\quad\frac{m}{n}\right]\alpha.$$

Введен е оператор $[x]$ противоположного направления, с отрицательными значениями x может быть произведено на любой стадии построения аналогично тому, как это было сделано в главе III.

В области переходов второй ступени всякому переходу (d, c) соответствует обратный переход (c, d). Все переходы (d, c) положительного направления, для которых $c < d$, измеряются положительными числами, если в основание измерения положить переход $a = (\alpha, 1)$, где $\alpha > 1$.

Основной переход $(\alpha, 1)$ от единицы к α мы *измеряем* числом 1, *соответствует* же этому переходу число α.

Условимся измерять переход противоположного направления от α к единице числом -1. Это находится в согласии с операторной концепцией § 29.

Переход от α к 1 равен, по определению равенства переходов второй ступени („во столько же раз, во сколько...), переходам от α^{n+1} к α^n, от 1 к $\frac{1}{\alpha}$, от $\frac{1}{\alpha}$ к $\frac{1}{\alpha^2}$ и т. д. В частности,

$$(1, \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right),$$

а потому число, *соответствующее* в вышеприведенном смысле слова всем этим переходам, есть

$$\frac{1}{\alpha}$$

и мы можем написать

$$\frac{1}{\alpha} = [-1]\,\alpha,$$

в согласии с обычным определением отрицательного показателя -1; если на $\frac{1}{\alpha}$ смотреть как на оператор второй ступени, то это и соответствует несколько неприятной для слуха формулировке о „погашении“ множителя α.

Так как композиция переходов сопровождается перемножением соответствующих им чисел, то, полагая вообще

$$(c, d) = [-x]\,\alpha,$$

коль скоро

$$(d, c) = [x]\,\alpha,$$

мы можем написать

$$\frac{1}{\alpha^n} = [-n]\,\alpha$$

и, стало быть, вообще, для любых рациональных r

$$\alpha^r = [r]\,\alpha.$$

Теоремы 1, 2, 3 распространяются обычным образом и на отрицательные значения оператора третьей ступени $[x]$.

Нуль *измеряет* при этом „единичные" переходы (в композиции с другими не меняющие этих переходов):

$$(a, a) = (b, b) = \ldots = (1, 1) = [0]\,\alpha.$$

Соответствует переходам этого типа, очевидно, число 1.

4. Для иррациональных значений x определение символа $[x]\,\alpha$ таково же, как и в § 32. Именно, если β в мультипликативном смысле слова несоизмеримо с α, т. е. равенство $\left[\frac{m}{n}\right]\alpha = \beta$ ни при каких целых m и n невозможно, то мы строим сечение (R, R') на основании условий

$$[r]\,\alpha < \beta < [r']\,\alpha.$$

Производящее это сечение действительное число x и есть тот оператор, который переводит α в β путем операции третьей ступени. Точнее говоря, по определению, мы полагаем $\beta = [\lambda]\,\alpha$.

Для того чтобы убедиться, что *всякий* переход β этим путем *однозначно* может быть охарактеризован действительным числом, достаточно, как мы видели в § 31, убедиться в *выполнении для рассматриваемой системы переходов аксиомы Архимеда:* для всякого перехода $\gamma > 1$ найдется при $\alpha > 1$ такое целое число n, что

$$[n]\,\alpha > \gamma,$$

или, в обыкновенных обозначениях,

$$\alpha^n > \gamma.$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что в силу неравенств

$$\alpha^n > \alpha^{n-1}$$

последовательность $U_n = \alpha^n$ есть возрастающая последовательность и, стало быть, либо $\lim U_n = \infty$, либо, если U_n ограничена, существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = l$ (см. § 51). Так как в этом последнем случае также $\lim\limits_{n\to\infty} U_{n-1} = l$, то из соотношения $U_n = U_{n-1}\cdot\alpha$ получаем, переходя к пределу при $n\to\infty$, равенство $l = l\cdot\alpha$, невозможное при $\alpha > 1$. Итак, $\lim U_n = \infty$ и, стало быть, для любого γ, начиная с некоторого n,

$$[n]\,\alpha > \gamma,$$

если только $\alpha > 1$.

Аксиома Архимеда, таким образом, выполнена, и всякий переход β, согласно § 31, однозначно может быть охарактеризован числом x, определяемым приведенным выше сечением.

В применении к настоящему случаю общие рассуждения на странице 104 принимают такую форму.

Для всякого действительного числа $\gamma > 1$ можно при любом n найти число m так, что

$$\alpha^m \leqslant \gamma^n \leqslant \alpha^{m+1}.$$

Тогда

$$\left[\frac{m}{n}\right]\alpha \leqslant \gamma \leqslant \left[\frac{m+1}{n}\right]\alpha$$

и, стало быть, числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ „мультипликативно измеряют" число γ с точностью до $\frac{1}{n}$ с избытком и с недостатком. Стало быть, $\frac{m}{n} \subset R, \frac{m+1}{n} \subset R'$. Пусть теперь также и $\gamma' = [x]\alpha$, где x определяется тем же сечением (R, R'). Тогда

$$\left[\frac{m}{n}\right]\alpha \leqslant \gamma' \leqslant \left[\frac{m+1}{n}\right]\alpha$$

и

$$\alpha^m \leqslant (\gamma')^n \leqslant \alpha^{m+1}.$$

Допуская, без нарушения общности, что $\delta = \frac{\gamma'}{\gamma} \geqslant 1$, найдем, деля неравенства для γ и γ' крест-накрест, что

$$\delta^n < \alpha$$

при любом n, что, согласно предыдущему, возможно лишь при $\delta = 1$ и $\gamma = \gamma'$.

На основании приведенных в § 32 определений действий над действительными числами мы заключаем, что теоремы 1, 2, 3 имеют место и для любых действительных операторов третьей ступени, так что

1) $[x]\alpha = [y]\alpha$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $[x][y]\alpha = [xy]\alpha$;
3) $[x]\alpha$ к $[y]\alpha = [x+y]\alpha$.

§ 44. Мультипликативное (логарифмическое) измерение.

1. Построенная в предыдущем параграфе система операторов третьей ступени является по доказанному достаточной для того, чтобы представить *каждое действительное число* γ в форме

$$\gamma = [x]\alpha.$$

Действительное число x, отвечающее в этом смысле на вопрос: из „скольких" множителей, равных α, составлено число γ, называется, как известно, логарифмом числа γ при основании α и обозначается знаком $\log_\alpha \gamma$.

Основные свойства логарифмов, выражаемые формулами

$$\log_\alpha(\beta\gamma) = \log_\alpha \beta + \log_\alpha \gamma, \tag{1}$$
$$\log_\alpha(\gamma^\beta) = \beta \log_\alpha \gamma, \tag{2}$$

с точки зрения конкретного истолкования: мультипликативного измерения или „подсчета множителей, равных α", представляются совершенно очевидными. Формулу (1) мы могли бы предвидеть заранее, ибо процесс измерения приводит, как известно, к числовым характеристикам, при которых *композиции* измеряемых переходов (в данном случае умножению соответствующих чисел, отвечает *сложение* измеряющих переходы чисел. В несколько упрощенной формулировке соотношение (1) можно прочесть так *для того чтобы узнать, сколько раз* α *входит множителем в произведение* $\beta\gamma$, *достаточно подсчитать, сколько раз* α *входит множителем в* β *и* γ, *и полученные результаты сложить*

Формулы перехода от одного основания логарифмов к другому в точности соответствуют формулам, связывающим между собой результаты измерения одних и тех же величин различными единицами меры.

Действительно, если

$$\gamma=[x]\beta\,;\;\beta=[y]\alpha$$

то $\gamma=[xy]\alpha$ и соответственная формула

$$\log_\alpha\gamma=\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma,$$

грубо говоря, выражает следующее утверждение: чтобы подсчитать, сколько раз α входит множителем в γ (в точном смысле слова, произвести указанное выше мультипликативное измерение γ с помощью α), достаточно подсчитать, из скольких множителей, равных β, состоит γ, и умножить результат на число, показывающее, из скольких множителей, равных α, состоит β. В простейшем случае это положение иллюстрируется схемой, указанной на странице 147.

В силу тех же соображений, вполне аналогичных рассуждениям, устанавливающим, что отношение отрезков равно отношению их длин, выраженных в одной и той же произвольной единице меры, мы можем написать равносильную предыдущей формулу

$$\log_\alpha\beta=\frac{\log_\gamma\beta}{\log_\gamma\alpha}$$

(логарифм β при основании α равен отношению логарифмов β и α, взятых при одном и том же третьем основании).

В качестве примера того, какая степень наглядности достигается при рассматриваемом истолковании операции логарифмирования как мультипликативного измерения, мы приведем еще две совершенно очевидные с точки зрения этого истолкования формулы

$$\lg_{a^n}b^n=\log_a b$$

и

$$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d a=1.$$

Приближенное логарифмическое измерение может производиться на тех же основаниях, что и обычное приближенное измерение. Общий метод, вытекающий из определения (стр. 150), может применяться и к частным случаям. Так, неравенство

$$10^3<2^{10}<10^4$$

дает значение $\log_{10} 2$ с точностью до $\frac{1}{10}$

$$\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{10}.$$

Пользуясь более полными таблицами степеней двух, найдем $10^{31} < 2^{103}$, $2^{93} < 10^{28}$, откуда

$$0{,}300 < \log_{10} 2 < 0{,}30107.$$

Аналогично, из приближенного равенства $81^9 \approx 15 \cdot 10^6$, найдем, полагая $\log_{10} 5 \approx 0{,}7$, что $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$. Здесь четыре верных знака.

Далее, тем же путем находим $75^9 \approx 75 \cdot 10^{15}$ и $\log_{10} 5 \approx 0{,}6989$; из формулы $64^9 \approx 18 \cdot 10^{15}$ следует тогда $\log_{10} 2 \approx 0{,}30103$. Выкладки этого типа, состоящие из комбинированных возвышения в степень и разложения на множители, оставляя довольно большой простор для изобретательности учащихся, могут служить интересным материалом для упражнений и тогда, когда пользование таблицей логарифмов уже известно.

2. Однако, можно указать элементарный метод вычисления логарифмов, с точки зрения концепции мультипликативного измерения совершенно очевидный и аналогичный обычному процессу измерения с помощью единицы, ее десятой, сотой и т. д. доли. Этот метод в особенности целесообразно применять для подготовки к объяснению устройства таблиц десятичных логарифмов. Предварительное проведение упражнений соответствующего типа значительно повышает сознательность в отношении учащихся к таблицам логарифмов и пользованию ими.

Подход к делу может быть, например, для десятичных логарифмов, такой.

Подсчитав число знаков в числе N, мы тем самым определяем наивысшую степень n числа 10, которая входит в N, т. е. измеряем мультипликативно N посредством 10 *с точностью до единицы.*

Чтобы получить более точный результат, *разделим* (соответственно мультипликативности измерения) N на найденную степень 10^n и обозначим через N_1 частное $N : 10^n$, так что

$$N = 10^n \cdot N_1,$$

где $0 < N_1 < 10$.

Для измерения N_1 нам необходимо взять более мелкую единицу меры. С этой целью мы составим (последовательно извлекая квадратный корень) таблицу (в операторных обозначениях):

$$\left[\frac{1}{2}\right] 10 = [0{,}5]\, 10 = 3{,}1623\ \ldots = \sqrt{10}$$

$$\left[\frac{1}{4}\right] 10 = [0{,}25]\, 10 = 1{,}7783\ldots = \sqrt{3{,}1623\ldots}$$

$$\left[\frac{1}{8}\right] 10 = [0{,}125]\, 10 = 1{,}3335\ldots$$

$$\left[\frac{1}{16}\right]10=[0{,}0625]\,10=1{,}1548\ldots$$

$$\left[\frac{1}{32}\right]10=[0{,}0312\ldots]\,10=1{,}0746\ldots$$

$$\left[\frac{1}{64}\right]10=[0{,}0156\ldots]\,10=1{,}0366\ldots$$

$$\left[\frac{1}{128}\right]10=[0{,}0078\ldots]\,10=1{,}0182\ldots$$

$$\left[\frac{1}{256}\right]10=[0{,}0039\ldots]\,10=1{,}0090\ldots$$

$$\left[\frac{1}{512}\right]10=[0{,}0020\ldots]\,10=1{,}0045\ldots$$

$$\left[\frac{1}{1024}\right]10=[0{,}0010\ldots]\,10=1{,}0022\ldots$$

$$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$$

Делим теперь N_1, на то из чисел этой таблицы 10^{α}, которое меньше N_1, и частное обозначим знаком N_2, так что

$$N_1=10^{\alpha}N_2$$

и

$$N=10^{n}\cdot 10^{\alpha}\cdot N_2.$$

Продолжая так далее, мы получим значение $\log_{10}N$ с той степенью точности, которая выражается последней из взятых в показателе дробей $\frac{1}{2^n}$.

Вычисления совершенно элементарны и ничего, кроме умения производить операцию извлечения квадратного корня и деления, не требуют. При этом, очевидно, никогда не придется делить дважды на одно и то же число таблицы, а значение логарифма получится сначала в форме систематической дроби в системе счисления с основанием 2.

Для перевода в обычную десятичную дробь можно воспользоваться вторым столбцом таблицы, в котором дроби $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ и т. д. обращены в десятичные.

Схема расположения вычислений такова

$$\begin{array}{llll}
N\,|\,\underline{10^{n}} & & & \\
 & N_1\,|\,\underline{10^{\alpha_1}} & & \\
 & & N_2\,|\,\underline{10^{\alpha_2}} & \\
 & & & N_3\,|\,\underline{10^{\alpha_3}} \\
 & & & \ldots
\end{array}$$

$$N=10^{n}\cdot 10^{\alpha_1}\cdot 10^{\alpha_2}\cdot 10^{\alpha_3}$$

$$\log_{10}N=n+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots$$

3. Еще ближе к структуре десятичных таблиц совершенно аналогичный прием, основанный на *десятичном мультипликативном размельчении единицы меры* (основания логарифмов).

Так, например, для построения вспомогательной таблицы, дающей возможность посредством весьма простых вычислений найти *двузначный* десятичный логарифм числа, достаточно знать что

$$10^{0,1} \approx 1,26 \text{ и } 10^{0,01} \approx 1,023.$$

Эти значения могут быть приняты учащимися на веру, либо вычислены вышеуказанным способом.

На основе их составляем вспомогательную таблицу степеней этих чисел, причем контролем могут служить соотношения

$$10^{0,3} \approx 2 \text{ и } 10^{0,5} \approx 3,16.$$

Таблица степеней чисел $10^{0,1}$ и $10^{0,01}$

Показатели степеней / Числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$10^{0,1}$	1,26	1,59	2,00	2,51	3,16	3,98	5,01	6,31	7,94
$10^{0,01}$	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12	1,15	1,17	1,20	1,23

Примеры расположения вычислений

```
1.   720|100
     7,20|6,31
     6 31  1,14|1,12
      890  1,12  1,01
      631   200
      259
```

$$720 \approx 10^2 \cdot 10^{0,8} \cdot 10^{0,05},$$

$$\log_{10} 720 \approx 2,85.$$

```
2.   4310|1000
       4,31   |3,98
       3 98    1,08    |1,07
        3300   1,07     1,009
        3184   0,0100
```

$$4310 \approx 10^3 \cdot 10^{0,6} \cdot 10^{0,03},$$

$$\log_{10} 4310 \approx 3,63.$$

Аналогичная, значительно более пространная таблица может служить для вычисления пятизначных логарифмов путем пятикратного производства действия деления.

Таблица степеней чисел $10^{0,1}$ и $10^{0,01}$

Показатели степеней / Числа	1	2	3	4	5	6	7		
$10^{0,1}$	1,25893	1,58489	1,99526	2,51189	3,16229	3,98107	5,01187	6,30957	7,94328
$10^{0,01}$	1,02331	1,04713	1,07152	1,09648	1,12202	1,14815	1,17490	1,20227	1,23027
$10^{0,001}$	1,00231	1,00462	1,00693	1,00925	1,01158	1,01399	1,01625	1,01859	1,02094
$10^{0,0001}$	1,00023	1,00046	1,00069	1,00092	1,00115	1,00138	1,00161	1,00189	1,00207
$10^{0,00001}$	1,00002	1,00004	1,00006	1,00009	1,00012	1,00014	1,00016	1,00019	1,00021

Таблицу эту могут составить сами учащиеся на основе знания чисел, стоящих в первом столбце.

Пример расположения вычислений при пользовании этой таблицей:

```
34285|10000
     3,4285|3,16229
           1,08418|1,07152
                  1,01182|1,01158
                         1,00024|1,00023
                                1
```

$$34285 \approx 10^{4+0,5+0,03+0,005+0,0001} = 10^{4,53510}.$$

$$\log_{10} 34285 \approx 4,53510.$$

Вычисления эти способствуют уяснению смысла понятия логарифма и отчетливому пониманию смысла и построения таблиц десятичных логарифмов.

Вместе с тем фактическое производство вычислений требует не так уж много времени и основано на совершенно элементарных и ясных по идее выкладках.

Нам кажется, что приведенные в этой главе методические соображения свидетельствуют о том, что в элементарном преподавании должны найти себе место: 1) истолкование действия возвышения в дробную степень как применение оператора третьей ступени, заключающееся в последовательном производстве операций разбиения на равные сомножители и объединения равных сомножителей, и 2) истолкование операции логарифмирования как мультипликативного измерения, т. е. разыскания оператора третьей ступени, показывающего, как измеряемое число получается из данного путем объединения равных сомножителей и разбиения на равные сомножители.

§ 45. Операции высших ступеней.

1. В заключение настоящей главы мы рассмотрим само собой напрашивающийся вопрос об операциях четвертой и высших ступеней.

Операции эти сами по себе представляют лишь весьма относительный интерес как с чисто математической, так и в особенности с точки зрения приложений. В этом смысле мы должны предостеречь читателя от возможных увлечений чисто формальными аналогиями и обобщениями ради обобщений, характеризующими, вообще, дурной математический вкус. Однако в рамках излагаемой операторной теории рассмотрение этих операций представляет все же известный методологический интерес.

Дело заключается в том, что в математической литературе укрепилось сделавшееся ходячим мнением совершенно ложное убеждение в том, что связь между операциями различных ступеней исчерпывается аналогией в формальных свойствах операций сложения и умножения и дальше для операций третьей ступени существенным образом видоизменяется ввиду некоммутативности прямого действия третьей ступени — возвышения в степень ($b^a \neq a^b$).

Причины этого заблуждения, как мы сейчас покажем, кроются в методологически неправильном *смысловом* истолковании основных операций. Операторная теория, в которой мы отличаем: 1) числовые характеристики *значений* скалярной величины, 2) числовые характеристики *переходов* и 3) числовые характеристики *операторов*, применяемых к переходам, позволяет совершенно точно установить *действительный характер связи между операциями различных ступеней*. Это приводит совершенно естественным образом к общей теории операций, в которой сложение и умножение с точки зрения своих формальных свойств ничем не отличаются от любой другой пары операций смежных ступеней.

Отсюда будет, в частности, следовать, что и в рамках чисто арифметической постановки вопроса различение смыслового значения чисел и операций над ними не является посторонним добавлением к общеизвестным формальным теориям, а действительно лежит в существе дела. Именно исключительно формальная точка зрения, сопровождавшаяся совершенным обесцвечиванием смыслового значения чисел и операций над ними, и явилась источником упомянутого выше заблуждения, а также скрывала и от методистов целый ряд возможностей конкретного истолкования операций третьей ступени, о которых мы только что говорили.

2. Нам придется сейчас попросить читателя вернуться к § 33 и, просмотрев проведенную там классификацию операций сложения и умножения по их смысловому значению, обратить в особенности внимание на переход к третьей форме обеих операций (стр. 112 и 113–114), в которой определению действия предшествует *измерение* первой или второй ступени по отношению к одному или обоим аргументам операции.

После этого читатель естественным образом придет к различению следующих прямых действий третьей ступени.

1) ***Операторное*** возвышение в степень

$$\beta = \alpha^{\gamma} = [\gamma]\alpha.$$

Здесь основание α и результат β действительные числа которые можно, как в § 43, рассматривать как переходы второй ступени, показатель *x — оператор третьей ступени.* Смысл равенства: применение оператора третьей ступени $[x]$ к числу α дает в результате число β.

2) ***Композиция операторов*** третьей ступени

$$[z]=[y]\ [x].$$

Здесь элементы обеих частей — операторы третьей ступени. Смысл равенства: последовательное производство операций $[x]$ и $[y]$ равносильно применению оператора третьей ступени $[z]$, т. е. если

$$\beta=[x]\alpha \text{ и } \gamma=[y]\beta,$$

то

$$\gamma=[z]\alpha.$$

Так как, кроме того, при построении операторов третьей ступени мы ввели новую (показательную или логарифмическую) числовую характеристику действительных чисел как переходов второй ступени так, что композиции *переходов* второй ступени (умножению чисел основной области) соответствует *сложение* в области операторов третьей ступени, то здесь мы находимся в том же положении по отношению к области переходов второй ступени, в каком мы находились при построении операторов второй ступени по отношению к переходам первой ступени. В силу этого *композиции операций* (а не переходов) соответствует и здесь *умножение* характеризующих эти операции чисел:

$$z=xy;$$

формула

$$(\alpha^x)^y=[y]\ [x]\alpha=\alpha^z=\alpha^{xy}$$

и соответствует второму типу действий третьей ступени — композиции двух *операций* третьей ступени.

3) Желая теперь ввести определение **прямой операции третьей ступени** для того случая, когда оба аргумента операции принадлежат основной области действительных чисел — переходов второй ступени, мы поступим так же, как и в аналогичном положении для операций сложе́ния и умножения, произведя предварительное измерение третьей ступени (мультипликативное или логарифмическое измерение) по отношению к одному или обоим аргументам операции α и β. Обозначая определяемую операцию знаком $[\beta,\ \alpha]$, мы примем, стало быть, такое определение

$$[\beta, \alpha]=[b]\ \alpha=\alpha^b,$$

где $[b]$ есть оператор третьей ступени, измеряющий β при произвольном выборе основания измерения η. Иными словами,

$$b=\log_\eta\beta$$

и

$$[\beta, \alpha]=\alpha^{\log_\eta\beta}.$$

Здесь мы опирались на операторное возвышение в степень (пункт 1). Словесный текст определения совершенно аналогичен приведенным на страницах 112 и 114 определениям для действий первых двух ступеней: произвести прямое действие третьей ступени над числом α и числом β значит, по определению, применить к α тот оператор третьей ступени, посредством которого β получается из принятого за основание системы мультипликативного измерения числа η (т. е. составить из α новое число „так, как“ — подразумевается, с помощью операции третьей ступени — из η получается β).

Другая формулировка того же определения основана на *композиции* операций третьей ступени. Именно, мы полагаем

$$[\beta, \alpha] = [b][a]\eta,$$

где

$$\beta = [b]\,\eta \quad \text{и} \quad \alpha = [a]\,\eta,$$

е.

$$[\beta, \alpha] = \eta^{ba} = \eta^{\log_\eta \alpha \cdot \log_\eta \beta}$$

В этой форме становятся непосредственно очевидными *коммутативность* и *ассоциативность* операции $[\beta, \alpha]$, а также и *распределительность* этого действия относительно операции ступени на единицу низшей — *умножения*.

Действительно,

$$\log_\eta [\alpha \cdot \beta, \gamma] = \log_\eta (\alpha \cdot \beta) \cdot \log_\eta \gamma = (\log_\eta \alpha + \log_\eta \beta) \cdot \log_\eta \gamma = \\ = \log_\eta [\alpha, \gamma] + \log_\eta [\beta, \gamma],$$

так что

$$[\alpha \cdot \beta, \gamma] = [\alpha, \gamma] \cdot [\beta, \gamma].$$

3. Отсюда можно перейти дальше, к операциям четвертой ступени и т. п.; все эти формальные обобщения включаются как частный случай в общую теорию монотонных и непрерывных ассоциативных операций, которую мы изложим в § 68, когда читатель будет уже в достаточной мере знаком с теорией действительных чисел и операций над ними, составляющей предмет нижеследующих глав.

Заметим лишь, в заключение, что в силу сказанного выше каждая формула и каждое определение, формулированное относительно операций каких-либо ступеней, допускает повышение и понижение ступеней операций на любое число единиц. Еще раз предостерегая читателя от увлечения чисто механическими аналогиями, приведем в качестве примера формулу

$$\frac{d \ln f(x)}{d \ln x} = \lim_{h \to 1} \log_h \frac{f(xh)}{f(x)} = \varphi(x)$$

и ее обращение

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{\int_a^b \varphi(x)\, d \ln x} = \lim_{\substack{h_i \to 0 \\ \Pi h_i = \frac{a}{b}}} \Pi (h_i)^{\varphi(x_i)},$$

которое можно представить в виде

$$\frac{f(b)}{f(a)}=\lim_{\substack{\delta_i\to 0\\ \Sigma\delta_i=\ln\frac{b}{a}}}\Pi(1+\varphi(x_i)\delta_i)=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Sigma\Delta x_i=b-a}}\Pi\left(1+\varphi(x_i)\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

Выражения этого типа, под названием *логарифмических интегралов*, играют известную роль в приложениях (например в теории линейных диференциальных уравнений).

Отметим еще малоизвестную коммутативную и ассоциативную операцию, ступенью ниже сложения, *относительно которой сложение*, как легко убедиться, *дистрибутивно*:

$$\gamma=\log_\eta(\eta^\alpha+\eta^\beta).$$

Определенная так функция двух переменных $\gamma=f(\alpha,\beta)$ и есть очевидно, та функция от $\log x$ и $\log y$, которая выражает $\log(x+y)$ через $\log x$ и $\log y$.

$$\log(x+y)=f(\log x,\ \log y).$$

ГЛАВА VI.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА.

§ 46. Постановка вопроса.

Теория действительных чисел играет весьма важную роль в обосновании основных положений анализа и геометрии, а также и ряда отделов элементарной математики (операции третьей ступени, теория пределов, свойства непрерывности геометрических образов, задача измерения в геометрии). Поэтому мы вернемся сейчас к вопросу о введении иррациональных чисел и построении системы действительных чисел, затронутому уже в § 31 и 32 главы III, и займемся прежде всего теорией Дедекинда как наиболее простой и исторически первой логически строгой теорией иррациональных чисел. Мы будем при этом, не опираясь на изложенное в § 31 и 32 главы III, следовать в общих чертах за ходом мысли самого Дедекинда, отсылая интересующегося деталями читателя к брошюре Дедекинда „Непрерывность и иррациональные числа" (русский перевод под ред. С. О. Шатуновского).

Несколько схематизируя ситуацию, постараемся поставить себя в то исходное положение, с которым пришлось иметь дело Дедекинду. Это положение таково:

1) Имеется в распоряжении в той или иной мере отчетливо построенная и не вызывающая сомнений теория *рациональных чисел.*

2) Наряду с этим изучаются *непрерывные* величины, пользуются в отдельных случаях *иррациональными* выражениями, в анализе на каждом шагу рассматриваются величины, определяемые путем *предельного перехода*, и т. д.

В частности, например, *принимается,* что монотонно возрастающая переменная величина u_n, ограниченная сверху постоянным числом, *имеет предел.* Читатель знает, что это же утверждение используется и в элементарной математике, скажем, при определении длины окружности, площади круга и т. д.

3) Однако, как же обосновывается хотя бы это предложение и целый ряд других подобного рода общих суждений?

Прибегают (это и сейчас делается в элементарном преподавании) к наглядной геометрической схеме (черт. 8), в которой значения u_n истолковываются как абсциссы некоторой последовательности точек U_n, причем произносятся фразы такого, примерно, рода: „так как прямая „*непрерывно*“ заполнена точками то, „*очевидно*“, „*должна*“ существовать точка U, к которой точки U_n неограниченно приближаются так, что $\lim U_n = U$“.

Далее, на основе привычной схемы измерения отрезков считают, что всякой *точке* соответствует некоторое рациональное или иррациональное *число* (ее абсцисса) и, следовательно, то, что верно относительно точек прямой, верно и относительно действительных чисел, определяемых как результат измерения отрезков, так что не только $\lim U_n = U$, но и $\lim u_n = u$, где u — абсцисса точки U.

Черт. 8.

Не говоря уже о том, что используемое здесь определение системы действительных чисел выходит за рамки *арифметики* как науки о числе, такая ссылка на геометрические факты могла бы еще иметь смысл, если бы все обстояло благополучно с понятием о *непрерывности* по отношению к точкам прямой линии. Однако, если спросить себя, на чем основана принудительность приведенной выше аргументации, имеющей целью *доказать* существование предела ограниченной монотонной последовательности, то оказывается, что понятие „непрерывности прямой линии“ *лишено здесь логического определения* (сказанное в § 34 главы III в счет не идет, так как мы рассматриваем додедекиндовскую ситуацию).

Стало быть, рассматриваемая аргументация состоит не в том, что требуемое *доказывают*, а в том, что аппелируют к *наглядному представлению* о „непрерывной заполненности прямой точками“ и дальше описательных выражений этого типа и несколько нетерпеливых утверждений „очевидно“ и „должна“ дело не идет.

Дедекинд поставил и разрешил возникающие в описанной ситуации задачи:

1) Зафиксировать в форме *логического определения*, которое могло бы служить надежной основой дальнейших умозаключений, основное свойство прямой линии, заключенное в наших наглядных представлениях о *непрерывной заполненности прямой точками*.

2) Построить независимо от геометрических представлений исключительно на основе системы *рациональных* чисел, как данной, *арифметическую теорию иррациональных чисел*, так, чтобы те свойства системы действительных чисел, для обоснования которых раньше прибегали к наглядным геометрическим представлениям, *логически вытекали* из общего определения действительного числа.

Решение обеих задач потребовало проведения анализа привычных представлений о геометрической прямой, к которому мы и переходим.

§ 47. Рациональная числовая прямая.

Приступая к анализу наших представлений о расположении точек на геометрической прямой, рассмотрим сначала несколько подробнее взаимоотношение между системой точек на прямой линии и системой рациональных чисел.

Выберем произвольно на прямой начало координат и единицу меры и отметим сначала на прямой все „целочисленные" точки, т. е. точки, абсциссы которых суть целые числа $0, \pm 1, \pm 2$ и т. д. (черт. 9).

Черт. 9.

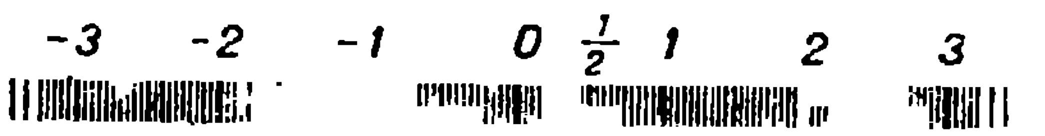
Мы видим, что на прямой остаются свободные, не заполненные целочисленными точками *интервалы.*

Если теперь представить себе, что на прямой отмечены все „рациональные" точки, т. е. точки с рациональными абсциссами и только эти точки, то мы получим, как мы будем говорить, **„рациональную числовую прямую"**, на которой уже *не будет интервалов, целиком свободных от точек* (черт. 10).

Действительно, *между всякими двумя рациональными числами a и b можно вставить третье рациональное число* хотя бы среднее арифметическое их

$$\frac{a+b}{2}.$$

Это построение можно затем повторить, и мы приходим к заключению, что в каждом рациональном интервале заключается неограниченное количество различных между собой рациональных чисел. Это выражают, говоря, что система рациональных чисел обладает свойством **плотности.**



Черт. 10.

Однако, несмотря на то, что в любом, сколь угодно малом, рациональном интервале заключено неограниченное количество рациональных чисел, все же, как известно, *рациональные точки* не заполняют сплошь *геометрической* прямой, т. е. на последней остаются еще точки, которым *не соответствует никакое рациональное число.*

Мы приведем здесь классическое доказательство этого положения, принадлежащее еще Евклиду.

Теорема. На рациональной числовой прямой нет точки соответствующей концу отрезка, равного диагонали квадрата со стороной 1, т. е. *не существует рационального числа, квадрат которого был бы равен* 2.

Доказывая это предложение от противного, допустим, что такое рациональное число найдено и, после сокращения, представлено *несократимой дробью*

$$\frac{p}{q}.$$

Тогда

$$\frac{p^2}{q^2}=2; \quad p^2=2q^2,$$

откуда следует, что p — число четное, т. е. $p=2n$. Подставляя это значение в предыдущее равенство, получим

$$4n^2=2q^2; \quad q^2=2n^2,$$

откуда следует, что q — число четное, т. е. $q=2m$ и

$$\frac{p}{q}=\frac{2n}{2m},$$

что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Таким образом, если бы мы радиусом, равным диагонали единичного квадрата, попытались из нулевой точки, как из центра, сделать засечку на *рациональной* числовой прямой, то соответствующая дуга прошла бы сквозь рациональную числовую прямую, *не задев ни одной ее точки.* Там, где на геометрической прямой помещается конец отрезка, равного диагонали единичного квадрата, на рациональной числовой прямой находится *пустое,* не заполненное никаким рациональным числом *место.*

Таких пустых мест бесконечно много. Так, если брать рациональные части $\frac{m}{n}d$ диагонали d единичного квадрата, то всем таким отрезкам будут соответствовать пустые места на рациональной числовой прямой (если бы $\frac{m}{n}d$ выразилось рациональным числом $\frac{r}{s}$, то d выразилось бы рациональным числом $\frac{rn}{sm}$, что, по доказанному, невозможно). То же относится вообще к отрезкам, при определении длин которых мы приходим к выражениям типа $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $6\cdot\frac{\pi}{2}$ и т. п., в системе рациональных чисел, не имеющих числового смысла.

Если сравнивать бесконечные совокупности в отношении их мощности, то можно даже утверждать, что эти пустые места образуют множество более высокой мощности, нежели совокупность рациональных чисел (см. ниже, § 82).

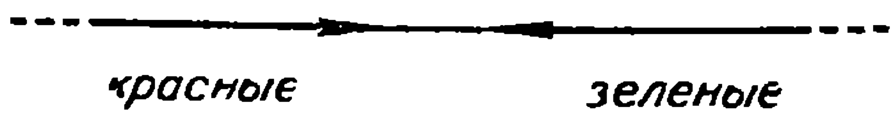
§ 48. Определение непрерывности по Дедекинду.

Перейдем теперь от частных случаев к общей характеристике рассматриваемого отличия геометрической прямой и рациональной числовой прямой.

Подчеркнем еще раз, что речь будет итти не о выводе или доказательстве, а о *первичном установлении логического определения,* характеризующего одно из основных свойств геометрической прямой.

Прежде всего отметим, что геометрическую прямую мы считаем *плотной,* т. е. считаем, что *две различных* ее точки всегда ограничивают некоторый *отрезок*, состоящий из бесчисленного множества точек, *промежуточных* между данными.

Это представление о плотности совокупности точек геометрической прямой выражает, другими словами, невозможность существования двух соседних, находящихся *непосредственно рядом* друг с другом, но *различных* между собой точек.

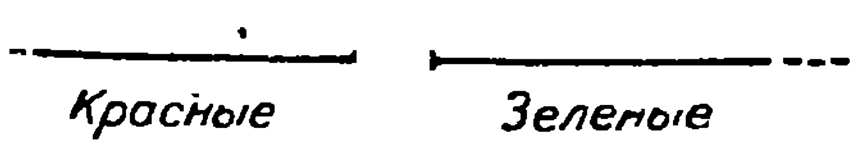


Черт. 11

Однако свойство плотности, как только что было отмечено, присуще и совокупности *рациональных* чисел и *не в нем*, следовательно, отличие непрерывной прямой от прямой с „пустыми местами“.

Проведем теперь следующий, несколько вольный по форме, но соответствующий сути дела анализ нашего представления о непрерывности прямой.

Допустим, что мы закрашиваем точки геометрической прямой в два цвета — красный и зеленый — так, чтобы: 1) все точки оказались закрашенными: каждая в один и только один цвет и 2) все красные точки были расположены слева от всех зеленых. Если красные точки закрашивать движением кисти слева направо, а зеленые — справа налево, то такое встречное наслоение точек слева и справа (черт. 11) мы воспринимаем как приближение к какому-то *месту стыка* обоих цветов на прямой.

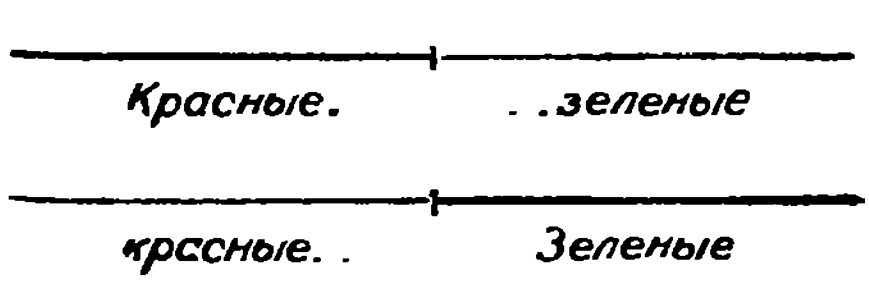


Черт. 12.

Черт. 13.

Если мы представляем себе прямую непрерывной, сплошь заполненной точками, то это значит, что в месте смыкания цветов должна быть какая-то *точка прямой*.

Эту точку можно было бы оставить незакрашенной и тогда она как раз и разграничивала бы красные и зеленые точки; если же потребовать, чтобы *все без исключения точки прямой были закрашены*, то эта точка должна быть *либо последней* (крайней правой) красной, *либо первой* (крайней левой) зеленой.



Черт. 14.

Какие случаи мы исключаем с помощью этой формулировки?

Во-первых, могло бы случиться, что одновременно существуют *и последняя* красная *и первая* зеленая точки. Однако, согласно отмеченному выше свойству плотности, это означало бы, что промежуток между этими двумя (различными, ведь) точками остался бы незакрашенным. Такая картина (черт. 12) возможна лишь для прямой, из которой вырван целый интервал промежуточных точек.

Во-вторых, могло бы случиться, что нет *ни последней* красной, *ни первой* зеленой. Такая картина возможна для прямой, из которой выброшен либо целый отрезок, включая концы, либо *по крайней мере одна точка*, как раз та, о которой шла речь выше как о *месте стыка* обоих цветов (черт. 13).

Мы приходим, таким образом, к заключению, что нашим представлениям о сплошном заполнении геометрической прямой точками соответствуют лишь случаи существования *крайней* точки в *одном* и *только одном* из двух рассматриваемых классов точек — в левом классе красных или правом классе — зеленых точек (черт. 14).

Следуя Дедекинду, мы примем определения.

Определение 1. ***Сечением*** (A, A') (или, как теперь говорят, *дедекиндовым сечением*) *системы точек на прямой линии называется такое разбиение всех точек системы на два класса нижний* (левый) A *и верхний* (правый) A', *при котором*

1) *каждая точка системы отнесена к одному и только одному из этих двух классов,* и

2) *все точки нижнего класса A расположены слева от точек верхнего класса A'.*

Это определение может относиться не только к системе всех точек геометрической прямой, но и к системе значений других скалярных величин, в частности, к системе рациональных чисел. В общем случае термины „слева“ и „справа“ означают два противоположных отношения скалярного расположения § 27 главы III (для системы рациональных чисел — отношения „меньше“ и „больше“). Имея в виду это обобщение, мы установим

Определение 2. *Скалярная величина называется* ***непрерывной,*** *если при всяком сечении, в ней произведенном, существует крайний элемент в одном и только одном из двух классов сечения.*

Этот элемент называется элементом, ***производящим*** сечение.

Можно, таким образом, сказать, что свойство непрерывности характеризует *полноту* или *замкнутость* рассматриваемой системы по отношению к операции образования сечений.

Мы принимаем, в частности, за определение непрерывности геометрической прямой отмеченное выше наличие крайней точки в одном и только одном из классов при разбиении всех точек прямой на два класса так, что все точки одного класса расположены левее всех точек другого.

В системе аксиом геометрии это или эквивалентное этому предложение должно быть принято в качестве одного из основных *постулатов,* служащих логическим определением прямой линии, а также и других, более общих протяженностей

§ 49. Отсутствие непрерывности в системе рациональных чисел.

Числовая прямая рациональных чисел *не обладает* непрерывностью в только что определенном смысле этого слова.

Докажем это, основываясь на теореме § 47.

Разобьем все рациональные числа на два класса: левый, включающий все числа, квадрат которых меньше 2, и правый, включающий все числа, квадрат которых больше 2.

Так как числа, квадрат которого был бы равен 2, в системе рациональных чисел не существует, то этим разбиты на два класса *все без исключения* рациональные числа. И так как притом все числа левого класса меньше всех чисел правого класса, то мы имеем дело с *дедекиндовым сечением области рациональных чисел.*

Однако свойство непрерывности здесь нарушено: в левом классе *нет наибольшего*, а в правом — *наименьшего* (рационального, само собой разумеется, ибо только о рациональных числах и идет речь) *числа.*

Это утверждение нетрудно доказать (ограничиваясь, естественно, рассмотрением положительных рациональных чисел).

Пусть r — какое-нибудь число левого класса, так что

$$r^2 < 2$$

и

$$2 - r^2 = d$$

есть положительное число.

Покажем, что можно выбрать рациональное число $\varepsilon > 0$ так, чтобы все еще было

$$(r + \varepsilon)^2 < 2,$$

т. е. чтобы число $r + \varepsilon$, большее r, принадлежало тому же левому классу. С этой целью подберем ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$(r + \varepsilon)^2 = r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2 < 2,$$

или, что то же, неравенство

$$(2r + \varepsilon)\,\varepsilon < d.$$

Взяв $\varepsilon < 1$, будем иметь

$$(2r + \varepsilon)\,\varepsilon < (2r + 1)\,\varepsilon$$

и, стало быть, накладывая на ε еще добавочное условие

$$\varepsilon < \frac{d}{2r + 1},$$

мы удовлетворим требованию

$$(r + \varepsilon)^2 < 2.$$

Итак, *справа* от всякого числа r левого класса найдется всегда еще число $r + \varepsilon$ левого класса, т. е. крайнего, наибольшего числа в левом классе нет.

Аналогично, при

$$r^2 > 2$$

имеем $r^2 - 2 > 0$ и потому требованию

$$(r - \varepsilon)^2 = r^2 - 2r\varepsilon + \varepsilon^2 > 2$$

можно удовлетворить, полагая

$$r^2-2r\varepsilon>2,$$

или

$$\varepsilon<\frac{1}{2}\,\frac{r^2-2}{r}.$$

Стало быть, и в правом классе нет крайнего, наименьшего числа, т. е. вообще в системе рациональных чисел *нет числа, производящего рассматриваемое сечение* рациональных чисел на два класса.

Таким образом, обнаруженное выше на примере отрезка, равного диагонали единичного квадрата, расхождение между системой точек геометрической прямой и системой рациональных чисел укладывается в общую схему, основанную на дедекиндовском определении непрерывности: пустые места в системе рациональных чисел характеризуются сечениями этой системы, ни в одном из классов которых нет крайнего элемента.

Соответственно с только что сказанным, *задача построения арифметической теории действительных чисел* (§ 46) может быть формулирована, как требование *заполнить все свободные места в системе рациональных чисел, обнаруживающиеся при производстве сечений в этой системе, новыми числами так, чтобы расширенная этим путем числовая система обладала свойством непрерывности.* Это и осуществляется введением иррациональных чисел.

§ 50. Введение иррациональных чисел. Непрерывность системы действительных чисел.

1. Определение 1. *Каждое сечение* (A, A') *в системе рациональных чисел, которое не производится никаким рациональным числом* (т. е. такое, что ни в одном из двух классов A и A' нет крайнего элемента), *определяет* ***иррациональное число*** α, *которое* ***больше*** *каждого рационального числа r нижнего класса сечения и* ***меньше*** *каждого рационального числа r' верхнего класса, так что, по определению,*

$$r<\alpha<r', \tag{1}$$

если

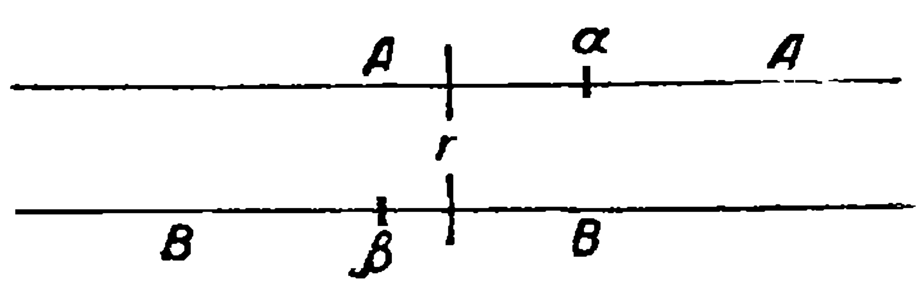
$$r\subset A \text{ и } r'\subset A'.$$

Про иррациональное число α мы будем говорить, что оно ***производит*** сечение (A, A').

Объединяя в одно оба случая, когда сечение производится рациональным и иррациональным числом, мы можем, стало быть, сказать, что *в области рациональных чисел* всякое сечение производится числом (рациональным или иррациональным).

Мы можем, таким образом, установить общее определение действительного числа, объединяя в одно понятие рациональные и иррациональные числа и называя ***действительным (вещественным) числом*** *всякое число, определяемое сечением в области рациональных чисел и производящее это сечение.*

Определение 2. *Два иррациональных числа α и β, определенные соответственно сечениями* (A, A') *и* (B, B'), *называются* ***равными,*** *если классы A и B, а стало быть, и классы A' и B' совпадают. Если же классы A и B не совпадают, то числа α и β называются различными или неравными, и притом говорят, что*



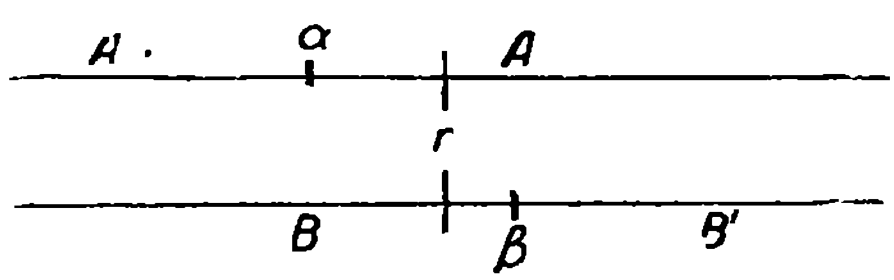
Черт. 15.

$$\alpha > \beta,$$

если в классе A есть хоть одно (рациональное, разумеется) *число, которого нет в классе B* (черт. 15) и, соответственно,

$$\alpha < \beta,$$

если в классе B есть хоть одно число, которого нет в классе A (черт. 16).



Черт. 16.

В силу этих определений система действительных чисел образует, как нетрудно убедиться, *скалярную величину,* для которой удовлетворены постулаты § 25.

Примечание. Можно было бы, впрочем, поступить и иначе, введя сразу определение равенства и неравенства для *действительных* чисел. При этом, однако, нужно было бы исключить из рассмотрения крайние элементы классов, так как в сечениях, определяющих одно и то же рациональное число, это число может быть отнесено как к нижнему, так и к верхнему классу. Текст соответствующих определений читатель найдет в § 32.

Из самого определения неравенства двух иррациональных чисел вытекает, что между двумя различными действительными числами можно вставить по крайней мере одно, а следовательно (так как в классах сечений, определяющих иррациональные числа, нет крайних чисел), и бесчисленное множество *рациональных* чисел.

Отсюда, в частности, следует, что действительные числа образуют систему, обладающую свойством *плотности.*

2. Из приведенных выше определений вытекает возможность построить рациональные приближения всякого иррационального числа α, заданного сечением (A, A'), с недостатком и с избытком с любой степенью точности.

Точнее говоря, при любой заданной наперед мере точности $\varepsilon > 0$, можно для данного иррационального числа α указать два рациональных числа r' и r, принадлежащих различным классам, так что

$$r < \alpha < r',$$

и *отличающихся друг от друга не больше, чем на* ε, так что

$$r' - r < \varepsilon.$$

Нахождение таких пар чисел может быть осуществлено различными способами.

Можно, например, исходя из произвольно взятых в классах

A и A' рациональных чисел r_0 и r_0', разделить разность $r_0' - r_0 = d$ на такое целое число n, чтобы было

$$h = \frac{d}{n} < \varepsilon.$$

Для этого достаточно взять $n > \frac{d}{\varepsilon}$. Тогда в системе *конечного* числа чисел

$$r_0,\ r_0 + h,\ r_0 + 2h,\ \ldots,\ r_0 + (n-1)h,\ r_0 + nh = r_0'$$

мы сможем найти наибольшее

$$r = r_0 + kh,$$

принадлежащее классу A, и следующее за ним

$$r' = r_0 + (k+1)h$$

наименьшее, принадлежащее уже классу A'. Разность $r' - r = h$ будет по построению меньше ε.

Если, в частности, за r_0 выбрать наибольшее целое число N_0 класса A, а за r_0' число $N_0 + 1 \subset A'$ и затем разделить разность $r_0' - r_0 = 1$ на 10 равных частей, то мы придем к числам типа

$$r_1 = N_0 + \frac{N_1}{10} \quad \text{и} \quad r_1' = N_0 + \frac{N_1 + 1}{10},$$

принадлежащим различным классам и отличающимся друг от друга на $\frac{1}{10}$.

Продолжая этот процесс далее, т. е. деля интервал (r_1, r_1') вновь на 10 частей и т. д., мы придем к последовательностям чисел типа

$$r_n = N_0 + \frac{N_1}{10} + \frac{N_2}{10^2} + \ldots + \frac{N_n}{10^n} \quad \text{и} \quad r_n' = N_0 + \frac{N_1}{10} + \frac{N_2}{10^2} + \ldots + \frac{N_n + 1}{10^n},$$

причем

$$r_n < \alpha < r_n'$$

и

$$r_n' - r_n = \frac{1}{10^n}.$$

Целое число N_0 и последовательность чисел $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ определяют так называемое **разложение иррационального числа α в бесконечную десятичную дробь.**

Приведенное рассуждение показывает, что, опираясь на закон, определяющий классы сечения (A, A'), с помощью которого задано иррациональное число α, мы имеем принципиальную возможность найти сколько угодно чисел десятичного разложения иррационального числа α.

Так, например, отнеся к классу A все рациональные числа, квадрат которых меньше 2, а к классу A' — остальные числа, мы найдем сначала $N_0=1$, $N_0+1=2$. Возвышая числа 1,1; 1,2; 1,3; ... ; 1,9 в квадрат и сравнивая с двойкой, найдем: $N_1=4$; $N_1+1=5$ и, аналогично, $N_2=1$; $N_3=4$. Цифры дроби 1,414 совпадают здесь с первыми цифрами известного разложения числа $\sqrt{2}$ в десятичную дробь.

При одной и той же степени сближения между собой чисел r и r' число испытываемых чисел будет в общем случае наименьшим, если вместо деления на произвольное число n или, в частности, на 10 равных частей, применять *деление* исходного промежутка r_0, r_0' *пополам*. При $r_0=N_0$, $r_0'=N_0+1$ это приведет к разложению в бесконечную систематическую дробь с основанием системы счисления, равным 2.

Испытанию на принадлежность к классу A или A' придется на каждой стадии процесса подвергать среднее арифметическое между полученными до того числами r и r' различных классов, причем разность между приближениями с избытком и с недостатком уменьшается вдвое. После n испытаний мы будем иметь

$$r_n' - r_n = \frac{d}{2^n},$$

т. е. сравнительно высокую степень точности.

Экономичность такого приема иногда бывает существенно учитывать на практике. Так, если все точки провода, исследуемого на наличие разрыва, в равной мере доступны, то выгодно испытать среднюю точку на присутствие тока и, определив этим путем, в какой половине разрыв, перейти к средней точке этой половины и т. д. Аналогичные соображения могут играть роль и в практике приближенных вычислений.

Как мы увидим ниже (§ 59), доказанное здесь предложение допускает обращение: знание приближенных значений иррационального числа с любой степенью точности достаточно для его определения (т. е. для построения соответствующего сечения). Это обстоятельство играет чрезвычайно важную роль для установления связи между теорией Дедекинда и другими методами введения иррациональных чисел (ср. § 60 и § 70—77).

3. Ограничиваясь пока только что приведенными указаниями на связь дедекиндовского определения иррациональных чисел и привычной читателю схемой разложения иррациональных чисел в бесконечные десятичные дроби, вернемся к нашей основной задаче, формулированной в конце предыдущего параграфа.

Докажем основное предложение о том, что новая, расширенная по сравнению с системой рациональных чисел система действительных чисел, обладает сверх того интересующим нас свойством **непрерывности.**

Теорема. *Всякое сечение системы* ***действительных*** *чисел производится некоторым действительным числом, рациональным или иррациональным.*

Подчеркнем необходимость доказательства этой теоремы.

Читателю может на первый взгляд показаться, что доказывать нечего. Ведь всякое сечение системы рациональных чисел, которое не производится рациональным числом, определяет некоторое иррациональное число. Что же еще доказывать? А вот что. Иррациональные числа заполняют пустые места в системе *рациональных* чисел, а нас сейчас интересует система всех *действительных* чисел, рациональных и *иррациональных*. В этой системе мы производим сечения (о чем до введения иррациональных чисел вообще не могло быть и речи) и надо *доказать* (правда, это уже совсем просто), что эти *новые* сечения в *новой* числовой области не обнаружат уже свойств разрывности и не потребуют вновь введения еще каких-то чисел для заполнения соответствующих пустых мест в системе действительных чисел.

Это и будет означать, что в отношении операции образования сечений система действительных чисел обладает требуемой полнотой или замкнутостью.

Итак, допустим, что в системе действительных чисел произведено сечение

$$(\alpha, \alpha').$$

Нам надо доказать, что при этом имеет место одно из двух: либо в нижнем классе α найдется наибольшее, либо в верхнем классе α' наименьшее действительное число.

В сечении (α, α') на два класса разбиты все действительные числа. Рассмотрим, в частности, совокупность A всех *рациональных* чисел, входящих в левый класс сечения (α, α'), и совокупность A' всех рациональных чисел, входящих в правый класс сечения (α, α'). Так как всякое рациональное число обязано заключаться либо в α, либо в α' и так как все числа в классе α меньше всех чисел класса α', то совокупности A и A' можно рассматривать соответственно как нижний и верхний классы некоторого *сечения*

$$(A, A'),$$

произведенного в системе *рациональных* чисел.

Согласно сказанному на странице 168, это сечение *производится* некоторым рациональным или иррациональным действительным числом γ.

Докажем, что именно это число *и производит исходное сечение* (α, α') области *действительных* чисел.

Для этого достаточно обнаружить, что всякое число α, меньшее γ, принадлежит к α, а всякое число β, большее γ, к α'. Так вот, пусть

$$\alpha<\gamma.$$

Как в том случае, когда α и γ рациональные, так и в том случае, когда одно или оба эти числа иррациональные, мы можем вставить между α и γ рациональное число r так, что

$$\alpha<r<\gamma.$$

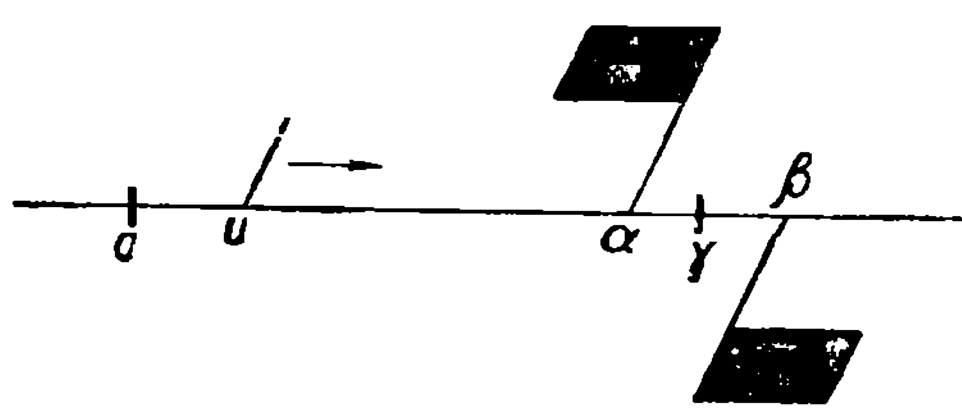
Это рациональное число r, будучи меньше γ, принадлежит, согласно определению γ, к классу A, а, стало быть, так как $A \subset \mathfrak{a}$, к классу $\mathfrak{a}$ исходного сечения. К тому же классу должно поэтому принадлежать и меньшее r число α, т. е.

$$\alpha \subset \mathfrak{a}.$$

Аналогично докажется, что всякое число β, большее γ, входит в $\mathfrak{a}'$.

Относительно самого числа γ в общем случае можно утверждать лишь, что оно принадлежит либо классу $\mathfrak{a}$, либо классу $\mathfrak{a}'$; но, согласно доказанному, в обоих случаях оно будет *крайним* в соответствующем классе, т. е. будет числом, *производящим* сечение $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}')$.

Доказанная теорема, обнаруживающая непрерывность построенной на основе системы рациональных чисел, т. е. *арифметическим путем*, совокупности всех действительных чисел, носящей соответственно этому название **континуума** (*continuus* — непрерывный), позволяет, как мы это увидим ниже, обосновать общие предложения арифметики и анализа, не прибегая уже к расплывчатым наглядным представлениям о непрерывных величинах геометрического (и другого) происхождения (ср. § 46).



Черт. 17.

Однако из методических соображений можно позволить себе пользоваться как в формулировке свойства непрерывности, так и в его приложениях геометрической и даже механической терминологией, имея при этом в виду лишь фиксируемое только что доказанной теоремой *арифметическое содержание* соответствующих утверждений.

Так, в ряде случаев следующая формулировка теоремы о непрерывности может несколько облегчить ее применение.

Пусть точка u движется по числовой прямой действительных чисел от некоторой точки a вправо (или влево), обладая некоторым свойством Σ так, что, раз потеряв это свойство, точка u **вновь его не приобретает** (черт. 17). Тогда должно существовать *либо последнее* положение точки u, в котором она *еще обладает* свойством Σ, либо *первое*, в котором она *уже* свойством Σ *не обладает*. Это „критическое" значение $u=\gamma$ характеризуется, таким образом (при движении вправо), тем, что точки $u=\alpha$, сколь угодно близкие к γ, но находящиеся слева от γ, свойством Σ обладают (верхний флажок на чертеже), а точки $u=\beta$, сколь угодно близкие к γ, но расположенные справа от γ, свойством Σ не обладают (опущенный флажок на чертеже).

Для любого „критического" интервала (α, β), заключающего точку γ, мы имеем, стало быть, противоположное расположение флажков на концах.

Эта формулировка эквивалентна утверждению теоремы о непрерывности. Критическое число γ определяется, очевидно, сечением, в котором к левому классу, кроме чисел, меньших a, отнесены все значения $u = a$, для которых свойство Σ имеет место, а к правому классу — все остальные числа. В силу условия о невозвращении свойства Σ все числа правого класса действительно больше всех чисел левого.

Заметим, что, вообще, сечение часто определяется непосредственным заданием *лишь одного* из своих классов, причем ко второму относят *все числа, не вошедшие в первый.*

§ 51. Теорема об ограниченных монотонных последовательностях. Точные границы ограниченного множества.

1. Для того чтобы убедиться воочию в том, что теорема о непрерывности действительно позволяет дать строгое логическое доказательство для целого ряда теорем, уверенность в справедливости которых имела своим первоначальным источником наглядные геометрические представления, приведем здесь некоторые из таких доказательств.

В интересующем нас отношении в особенности характерна теорема, доказываемая нами в § 52. Материалом § 51 нам придется воспользоваться в дальнейшем. Что же касается § 53—56 включительно, то читатель, для которого изложение окажется трудным, может при первом чтении эти параграфы пропустить и приступить непосредственно к § 58, который можно рассматривать как продолжение начатых в § 50 построений, относящихся к теории действительных чисел.

Теорема. *Всякая монотонно-возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.*

Дано, стало быть, что при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u_n < u_{n+1} \tag{1}$$

и

$$u_n < B, \tag{2}$$

где B — некоторое постоянное число.

Требуется доказать *существование* действительного числа, являющегося пределом u_n при $n \to \infty$.

Приведем сначала доказательство, не опираясь на теорему о непрерывности и придерживаясь рамок арифметической теории Дедекинда. В этой последней *доказать существование* какого-либо действительного числа значит *построить сечение* области рациональных чисел, определяющее это число. В условиях доказываемой теоремы мы построим нужное сечение (A, A'), отнеся к классу A' все рациональные числа r', обладающие тем же свойством, что и число B, т. е. такие, что

$$u_n < r' \text{ при любом } n, \tag{3}$$

а к классу A — все *остальные* числа r, т. е. такие, что

$$r < u_{n_1} \text{ хотя бы для одного } n_1,$$

а, стало быть, по свойству (1)

$$r < u_n \text{ при } n \geqslant n_1. \tag{4}$$

Определяемое сечением (A, A') действительное число γ и есть предел последовательности u_n.

В самом деле, пусть дан *любой* рациональный интервал (r, r'), заключающий внутри себя значение γ:

$$r < \gamma < r'.$$

Тогда, начиная с некоторого n_1, в силу свойства (4) чисел r левого класса A, мы будем иметь, учитывая одновременно и (3)

$$r < u_n \quad r' \text{ при } n \quad n_1.$$

А как раз это свойство членов последовательности заключаться, начиная с некоторого n, в любой (сколь угодно тесной) окрестности числа γ по определению предела и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \gamma.$$

Мы ограничились рассмотрением окрестностей γ типа (r, r'), где r и r' — рациональные числа, так как во всяком интервале (α, β) при $\alpha < \gamma < \beta$ заключен рациональный интервал этого типа.

Опираясь на теорему непрерывности, мы могли бы с самого начала говорить о сечении, произведенном в системе всех действительных чисел, и тогда последнее замечание было бы излишним. В этой форме доказательство было бы, как нетрудно убедиться, эквивалентно рассуждению, использующему указанную выше схему движущейся справа налево, начиная от значения B, точки u с сохранением такого свойства Σ: все u_n меньше u.

Критическая точка γ в таком движении и есть, очевидно искомый предел, так как во всяком критическом интервале $\alpha < \gamma < \beta$ слева от γ найдется хоть одно $u_{n_1} > \alpha$ и потому все u_n, начиная с $n = n_1$, попадут в окрестность (α, β) числа γ.

2. Аналогичное рассуждение доказывает известную теорему о существовании **точной верхней и точной нижней границы** всякого *множества* чисел z, принадлежащих *конечному* интервалу (A, B), так что

$$A < z < B.$$

Рассматривая в этих условиях движение переменной точки u, обладающей свойством Σ:

$$u < \text{всех } z,$$

начиная от значения $u = A$ вправо, мы найдем, что критическая точка γ_1 в этом движении будет либо *последней* точкой, для которой еще

$$\gamma < \text{всех } z,$$

либо *первой*, для которой это условие не выполнено и для которой, стало быть,

$$\gamma_1 = \text{одному из } z.$$

В обоих случаях число γ_1 называется **точной нижней** (левой) **границей** множества z.

В первом случае γ_1 не принадлежит множеству z, во втором принадлежит. В обоих случаях для *любого* числа γ', *большего* γ, *найдутся такие* z', *которые меньше* γ', т. е. лежат в интервале (γ, γ')

$$\gamma \leqslant z' < \gamma'.$$

Можно также сказать, что проведенное построение определяет γ_1 как *наибольшее число, не превышающее ни одного из элементов множества* z. Теорема непрерывности, которую мы здесь использовали, доказывает *существование* такого числа в самом общем случае. Предоставляем читателю построить (логически определить) соответствующее *сечение*.

Определив аналогично **точную верхнюю границу** γ_2, мы найдем, таким образом, что в неравенствах

$$\gamma_1 \leqq z \leqq \gamma_2$$

(где знак $=$ может и не иметь места) границы γ_1 и γ_2 уже не могут быть сближены.

Для усмотрения того, что точные границы множества могут и не достигаться ($\gamma_1 <$ всех z), достаточно рассмотреть пример множества z всех положительных правильных дробей. Здесь $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 1$ и притом $\gamma_1 < z < \gamma_2$.

Понятие о точных границах множества играет чрезвычайно важную роль в математическом анализе.

§ 52. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.

Докажем теперь теорему, выражающую одно из „очевидных" свойств *непрерывных функций*, а именно:

Непрерывная функция не может перейти от одного своего значения к другому, не проходя по дороге через все промежуточные значения.

Напомним обычное определение *непрерывной* функции.

Функция $f(x)$ *непрерывна при* $x = a$, *если*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Это соотношение можно перевести на язык неравенств следующим образом.

Какой бы (*„сколь угодно"* тесный) *интервал* (A, B), *заключающий внутри себя значение* $f(a)$, *так что*

$$A < f(a) < B,$$

ни был задан, всегда можно указать соответствующую (*„достаточно"* узкую) *окрестность* (c, d) *числа* a *такую, что при всяком* x, *лежащем в этой окрестности, т. е. при*

$$c < x < d,$$

значения $f(x)$ *наверно будут попадать в заданную окрестность* (A, B) *числа* $f(a)$, *т. е. будет*

$$A < f(x) < B.$$

Пользуясь этим, мы можем установить нужное для дальнейшего, да и само по себе имеющее многочисленные приложения вспомогательное предложение.

Лемма. *Если $f(x)$ непрерывна при $x=a$ и $f(a)\neq 0$, то можно указать окрестность (c, d) числа a, в которой функция $f(x)$ сохраняет знак числа $f(a)$.*

Для доказательства допустим, что $f(a)>0$, и выберем, что всегда возможно, два числа A и B так, чтобы было

$$0<A<f(a)<B.$$

Подобрав тогда соответствующую интервалу (A, B), согласно сказанному выше, окрестность (c, d) числа a, найдем, что при

$$c<x<d$$

наверное

$$0<A<f(x)<B,$$

т. е. во всяком случае

$$f(x)>0,$$

что и требовалось доказать.

Для доказательства теоремы о промежуточных значениях достаточно будет убедиться в том, что непрерывная функция не может перейти *от отрицательных* значений *к положительным,* не принимая при этом значения *нуль.*

Действительно, *если это будет доказано,* то при

$$f(a)<C<f(b)$$

в интервале (a, b) должно найтись значение $x=\gamma$, для которого непрерывная одновременно с $f(x)$ функция

$$F(x)=f(x)-C,$$

имеющая отрицательное значение

$$F(a)=f(a)-C$$

при $x=a$ и положительное значение

$$F(b)=f(b)-C$$

при $x=b$, должна обратиться в нуль при некотором $x=\gamma$, так что

$$F(\gamma)=f(\gamma)-C=0.$$

При $x=\gamma$ функция $f(x)$ будет, таким образом, принимать заданное промежуточное между $f(a)$ и $f(b)$ значение

$$f(\gamma)=C.$$

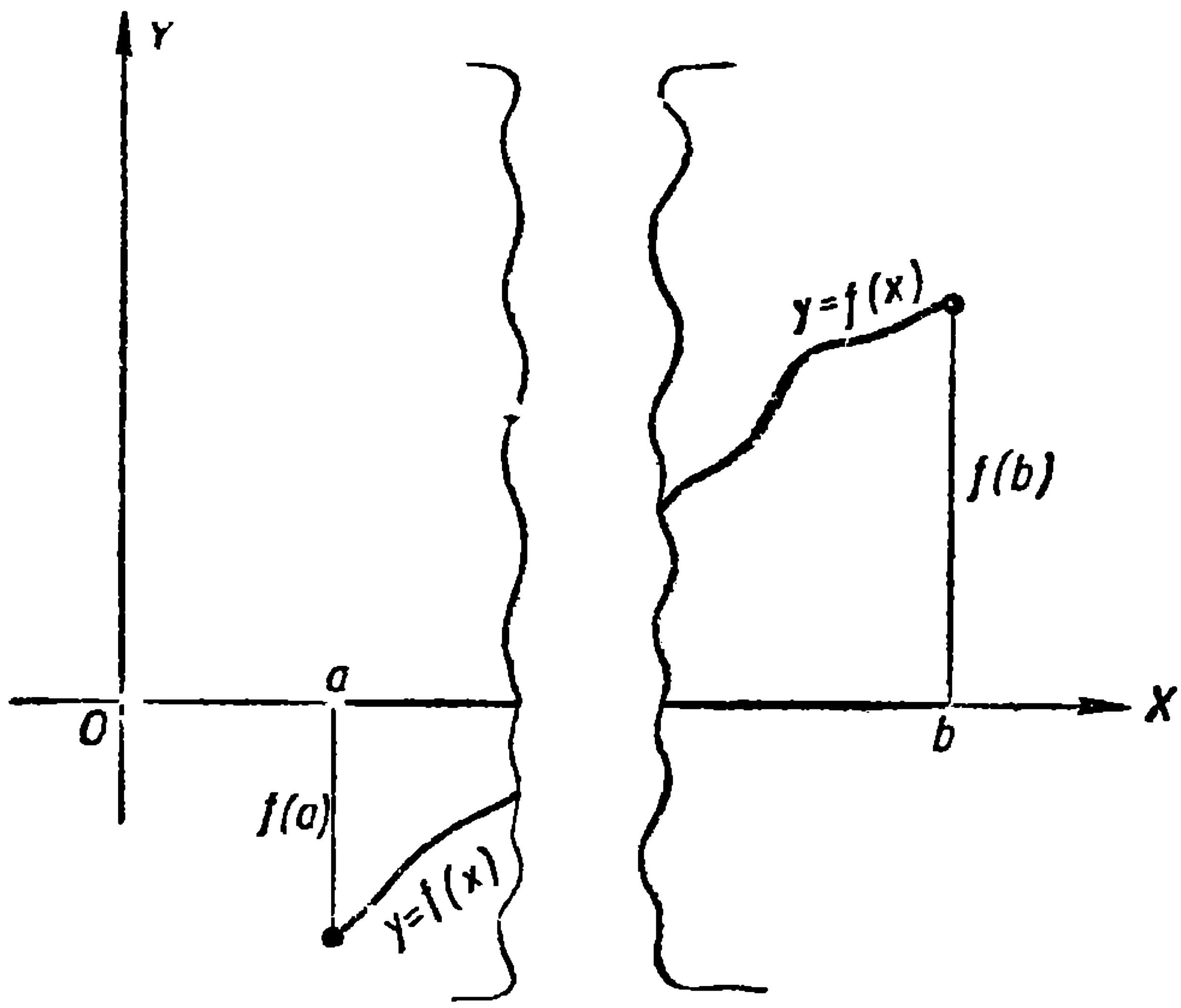
Итак, достаточно доказать, что верна

Теорема. *Непрерывная функция, принимающая на концах некоторого интервала (a, b) значения разных знаков, должна обратиться в нуль по крайней мере для одного значения x внутри интервала (a, b).*

Если опираться на наглядные геометрические представления о *непрерывной линии*, уравнение которой есть $y=f(x)$ (черт. 18), то текст теоремы делается „*очевидным*“. Кривая „*должна*“ где-то пересекать ось X.

Эта геометрическая очевидность и явилась основой уверенности в справедливости высказанного утверждения, носящего, однако, по самому смыслу своему, *аналитический* характер.

Замечая, что в суждении об „очевидности“ мы существенным образом опираемся на представление об отсутствии „пустых мест“ (§ 49), можно заранее сказать, что строгое *аналитическ е* доказательство теоремы невозможно вне соответствующ. й теории иррациональных чисел.



Черт. 18.

Мы дадим два варианта доказательства.

Первый метод эквивалентен построению сечения, определяющего искомую точку γ, для которой $f(\gamma)=0$, и напрашивается сам собой, если попытаться применить схему движущейся точки u. За свойство Σ следует принять такое: *все* значения $f(x)$ в замкнутом интервале

$$(a, u)$$

имеют тот же знак, что и число $f(a)$.

Дойти с сохранением этого свойства до точки b точка u не может.

Стало быть, существует критическая точка $x=\gamma$, в любой окрестности

$$u_1<\gamma<u_2$$

которой найдутся как значения $f(x)$ того же знака, что и $f(a)$ (при $x<\gamma$), так и значения $f(x)$ противоположного знака или равные нулю [по крайней мере для некоторых сколь угодно близких к γ значений x, лежащих справа от γ, условие: $f(x)$ того же знака, что и $f(a)$, не выполняется].

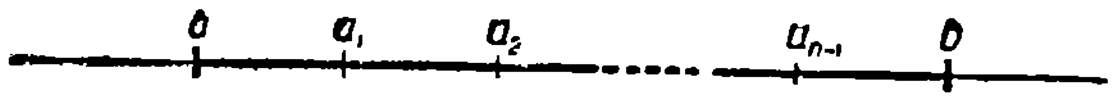
Согласно доказанной выше лемме, это возможно только в том случае, когда

$$f(\gamma)=0.$$

Легко видеть, что этот метод доказательства приводит нас к первому слева (наименьшему) корню уравнения $f(x)=0$.

Несмотря на то, что это доказательство преследует теоретическую цель и принадлежит к типу так называемых *доказательств существования* (*Existenzbeweis*), не имеющих в виду методов эффективного нахождения искомого объекта в конкретных случаях, его можно дополнить конструкцией, пригодной для приближенного нахождения корня уравнения $f(x)=0$ с помощью так называемого **метода деления промежутка.**

Заменим непрерывное движение точки u скачкообразным, т. е. рассмотрим ряд точек (черт. 19), получающихся хотя бы при делении (a, b) на n равных частей.



Черт. 19.

Так как в ряду чисел

$$f(a),\ f(u_1),\ f(u_2),\ \ldots,\ f(u_{n-1}),\ f(b)$$

крайние имеют разные знаки, то либо одно из промежуточных чисел равно нулю и тогда корень найден, либо по крайней мере одна пара смежных значений

$$f(u_i),\ f\ (u_{i+1})$$

имеет *разные знаки* и тогда один из корней уравнения $f(x)=0$ заключен между

$$u_i \text{ и } u_{i+1},$$

т. е. определен (при делении на n равных частей) с точностью до $\frac{1}{n}(b-a)$.

Если мы умеем определить знак функции $f(x)$ для каждого фиксированного значения аргумента, то с помощью указанного построения мы можем определить значение корня *с любой наперед заданной степенью точности.*

Для уменьшения числа испытаний, а также в теоретических рассуждениях целесообразно делить каждый раз промежуток пополам.

Опираясь на теорему о монотонных последовательностях, можно таким путем получить второе, независимое от предыдущего доказательство теоремы.

Проведем это доказательство.

Запишем условие теоремы в такой форме:

$$f(a)\cdot f(b)<0.$$

Разделим интервал (a, b) пополам и положим $c=\frac{a+b}{2}$. Так как

$$[f(a)\cdot f(c)]\cdot[f(c)\cdot f(b)]<0,$$

то по крайней мере одно из произведений в квадратных скобках имеет отрицательный знак. Обозначим это произведение через $f(a_1)\cdot f(b_1)$, полагая, стало быть, либо $a_1=a$, $b_1=c$, либо $a_1=c$, $b_1=b$. Мы будем иметь

$$f(a_1)\cdot f(b_1)<0.$$

Поступая аналогично с интервалом (a_1, b_1) и продолжая процесс далее, мы построим две последовательности чисел

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

причем

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

В силу последнего соотношения существующие (по теореме § 51, стр. 174) пределы монотонных и ограниченных последовательностей a_n и b_n равны между собой, так что

$$\lim a_n = \lim b_n = \gamma.$$

Вспоминая, что, переходя в неравенстве

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

к пределу, мы обязаны ослабить знак неравенства, найдем, по определению непрерывной функции,

$$\lim_{n \to \infty} [f(a_n) \cdot f(b_n)] = f(\lim a_n) \cdot f(\lim b_n) = [f(\gamma)]^2 \leqslant 0,$$

что возможно лишь при $f(\gamma) = 0$.

Если не желать пользоваться соображениями о предельном переходе в неравенствах, то можно притти к тому же результату, применяя, как и в первом методе, доказанную выше лемму.

§ 53. Метод конечного покрытия и метод деления промежутка.

1. В доказательстве теорем, подобных только что рассмотренной, весьма легко сделать одну *логическую* ошибку, не являющуюся, однако, ошибкой в отношении фактического положения вещей и потому сравнительно трудно обнаруживаемую.

После того как лемма § 52 доказана, само собой напрашивается такой ход рассуждений.

Будем доказывать теорему, обратно противоположную теореме § 52 и, следовательно, равносильную ей.

Пусть $f(x)$ в интервале (a, b) нигде не обращается в нуль. Докажем, что в этом случае $f(x)$ сохраняет знак числа $f(a)$ во всем интервале (a, b).

Действительно, по лемме, в достаточно малой окрестности каждой точки интервала функция $f(x)$ *должна сохранять знак*.

Построим на этом основании такую окрестность (a, a_1) точки a, в которой (включая и значение $x = a_1$) функция $f(x)$ сохраняет знак числа $f(a)$ (неравного нулю по условию). Затем, вновь применяя лемму, построим аналогичную окрестность (a_1, a_2) для точки a_1 и т. д. На n-ой стадии процесса мы можем, объединяя все малые интервалы в один, утверждать, что в интервале (a, a_n) функция сохраняет знак числа $f(a)$. Так как, по допущению, в достаточно малой окрестности *каждой* точки интервала функция $f(x)$ сохраняет знак, то „в конце концов“ мы „дойдем“

до точки b и наша обратно-противоположная теорема (а с ней и теорема § 54) будет доказана.

В этом рассуждении кроется логическая ошибка, замаскированная словами „*в конце концов дойдем*", поскольку в последнее утверждение вкладывается тот смысл, что, применяя построение *конечное* число раз, мы перекроем весь интервал (a, b) *конечным* числом интервалов типа (a_i, a_{i+1}), в каждом из которых $f(x)$ сохраняет знак. Однако утверждение о том, что мы доберемся до точки b путем конечного числа шагов указанного типа в проведенном ходе рассуждения *ниоткуда не следует,* хотя, как мы ниже покажем, это утверждение по существу правильно и его можно, несколько уточнив формулировку, *доказать.* А в том, что дело обстоит не так уж просто, можно убедиться, замечая следующее. A priori не исключена, ведь, возможность того, что длина интервалов (a, a_1), (a_1, a_2), ... уменьшается с каждым шагом, например в геометрической прогрессии, *так,* что (вспомним Ахиллеса и черепаху) длина интервала (a, a_n) *при всяком* n остается меньше хотя бы $\frac{b-a}{2}$, в силу чего никакое a_n не может превзойти числа $\frac{a+b}{2}<b$. Найдя даже предел $\lim a_n = a'$ при этом условии и перешагнув через a' с помощью леммы, мы не решаем вопроса, ибо он сейчас же возникает вновь в той же форме.

Это затруднение иногда пытаются обойти следующим образом. Каждой точке x интервала по лемме соответствует некоторая ее окрестность, в которой $f(x)$ сохраняет знак. Обозначим через δ *наименьшую* из длин таких окрестностей. Тогда при достаточно большом n наверное будет $n\delta > b-a$, а, стало быть, и подавно, n окрестностей указанного типа, примкнутых друг к другу, должны покрыть интервал (a, b), поскольку длина каждой из них не меньше, чем δ. Доказана ли этим конечность процесса? Попутно было, ведь, предложено выбрать наименьшую из длин *всех* окрестностей, построенных согласно лемме для *каждой* точки x интервала (a, b). Но эти окрестности, так же как и точки интервала, образуют *бесконечное* множество, а из бесконечного множества окрестностей, вообще говоря, *нельзя* выбрать интервала и с наименьшей длиной и нельзя даже утверждать, что возможно выбрать положительное число δ, меньшее длины *каждой* из бесконечного числа этих окрестностей. Достаточно рассмотреть случай, когда в рассматриваемом множестве интервалов — окрестностей встречаются интервалы сколь угодно малой длины, как, например, в указанном выше гипотетическом примере, когда длины окрестностей (a, a_1), $(a_1\ a_2)$, ... образуют геометрическую прогрессию. Таким образом, и здесь мы упираемся в ту же самую проблему: необходимо *логически обосновать* возможность ограничиться рассмотрением лишь *конечного* числа окрестностей.

2. Во всех подобного рода случаях это логическое обоснование может быть дано. Приведем здесь доказательство соответствующей общей теоремы, известной под названием леммы Бореля-Гейне.

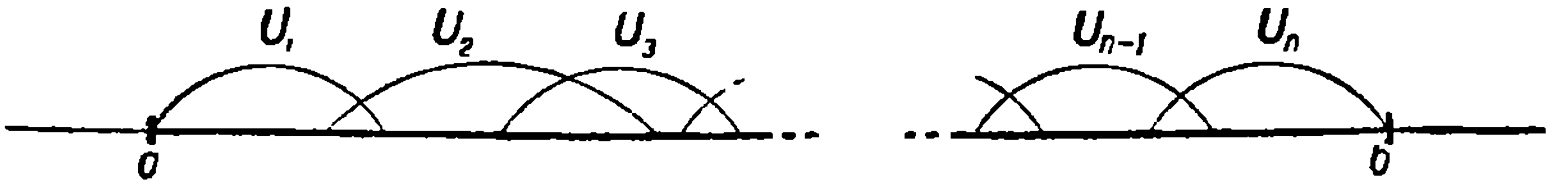
Лемма I. *Пусть по какому-либо закону построено некоторое* (в общем случае бесконечное) *множество S интервалов U, перекрывающих в совокупности весь интервал* (a, b), *т. е. таких, что всякая точка x интервала* (a, b) *лежит внутри по крайней мере одного из интервалов системы S.* [Для концов интервала (a, b) достаточно потребовать их принадлежности к одному из интервалов системы S].

При этих условиях *из множества S можно выбрать конечное число интервалов*

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

в совокупности перекрывающих весь интервал (a, b) и притом, если угодно, образующих „*цепочку*", т. е. расположенных так, что каждый следующий интервал U_{k+1} имеет общую часть с предыдущим U_k (черт. 20).

Доказательство. Мы можем *начать* построение некоторой цепочки, и так как точка a, по условию, принадлежит одному из интервалов U системы S, можем продолжать такое



Черт. 20.

построение и дальше. Допустим противное тому, что требуется доказать, т. е. допустим, что *при любом последовательном выборе* интервалов $U_1, U_2, \ldots$ мы не в состоянии будем добраться до точки b с помощью конечной цепочки интервалов из системы S. Тогда, стало быть, некоторые близкие к a точки интервала будут принадлежать к классу *достижимых* с помощью конечной цепочки, а другие, например b, — к классу *недостижимых.*

Всякая точка интервала (a, b) принадлежит к одному из этих двух классов, все достижимые точки расположены левее всех недостижимых и, стало быть, мы имеем дело с сечением, произведенным по теореме непрерывности некоторым числом γ [о точках вне интервала (a, b) можно, очевидно, при этом умолчать; любители доводить педантизм до нелепости могут, впрочем, присоединить числа, меньшие a, к левому, а числа, большие b, к правому классу сечения]. Возможны два случая: $\gamma < b$ и $\gamma = b$. Предположим, что $\gamma < b$. По условию теоремы в системе S должен существовать интервал (r, r'), заключающий внутри себя точку γ. По построению, всякая точка слева от γ, в том числе и точка r, достижима. Поэтому можно выделить в системе S конечную цепочку интервалов $U_1, U_2, \ldots, U_k$, перекрывающих интервал (a, r). Присоединяя к этой цепочке интервал

$$U_{k+1} = (r, r'),$$

мы *перекроем конечной цепочкой*

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_k,\ U_{k+1}$$

также и интервал

$$(a,\ r')$$

вопреки допущению, что все точки x, лежащие справа от γ, в том числе и точки интервала

$$(\gamma,\ r') \subset (a,\ r'),$$

недостижимы.

Аналогичное рассуждение доказывает, что и само число b не может быть первой недостижимой точкой γ.

Лемма, таким образом, доказана.

3. Применение ее к доказательству теоремы § 52, после проведенных выше на странице 181 рассуждений, не составляет затруднений.

Ведь ее только и нехватало (с этим, надо думать, читатель охотно согласится).

Лемма Бореля-Гейне позволяет провести аналогичным путем доказательство теорем следующего общего типа.

Пусть известно, что 1) некоторое предложение P имеет место для *соответственно подобранной* окрестности U_x каждой точки x интервала $(a,\ b)$. Тогда это предложение P будет верно и для всего интервала $(a,\ b)$, если только 2) *из того обстоятельства, что* предложение P имеет место для каждого звена конечной цепочки интервалов $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$, *можно заключить, что* оно верно для всего интервала, перекрываемого этой цепочкой.

Другими словами, можно утверждать, что свойства, выражаемые предложением P, *передающиеся* при выполнении их для каждого звена конечной цепочки всей цепочке в целом и *имеющие место* хотя бы в *сколь угодно малой окрестности каждой точки интервала* $(a,\ b)$, *имеют место для всего интервала.*

Нетрудно видеть, что в доказательстве теоремы § 52 (а не обратно противоположной ей теоремы) мы идем по противоположному пути: свойство *всего* интервала [„в интервале $(a,\ b)$ функция $f(x)$ не сохраняет знака"] переносим в *сколь угодно малую окрестность* некоторой точки γ интервала $(a,\ b)$, которая и является искомой.

Это заключение о существовании точки, в любой окрестности которой имеет место некоторое предложение Q, можно провести в общем виде для всех таких предложений или свойств, которые, *будучи верны для всего интервала,* перекрытого некоторой конечной цепочкой $U_1,\ U_2,\ \ldots,\ U_n$, *должны быть верны по крайней мере для одного из ее звеньев.*

Можно, грубо говоря, сказать, что свойства типа P *передаются* от совокупности частей интервала целому интервалу, а свойства типа Q от целого интервала — по крайней мере одной из его частей.

Это общее предложение о свойствах типа Q (в указанном выше смысле обратно противоположное лемме Бореля-Гейне), называемое иногда леммой Больцано-Вейерштрасса), мы докажем в следующей формулировке, принадлежащей С. О. Шатуновскому.

Лемма 2. Если 1) некоторое предложение Q *верно для всего интервала* (a, b) и если 2) при всяком разбиении интервала, для которого Q верно, на конечное число частей предложение Q *сохраняет силу по крайней мере для одной из частей,* то в интервале (a, b) *существует по крайней мере одна точка, в сколь угодно малых* (необязательно во всех) *окрестностях которой предложение* Q имеет место.

Допустив противное, мы придем к заключению, что для каждой точки x интервала (a, b) можно построить столь малую окрестность U_x, что ни для U_x, ни для какой-либо части U_x предложение Q не имеет места. Выбрав, по лемме Бореля-Гейне, конечную цепочку таких окрестностей, перекрывающих весь интервал (a, b), мы придем к противоречию, так как, по условию, по крайней мере для одной из частей в соответствующем нашей цепочке разбиении интервала (a, b) на части должно иметь место предложение Q, вопреки положенному в основу построения свойству окрестностей U_x.

Эту лемму можно доказать и прямым путем, применяя знакомый уже нам метод деления промежутка. Тогда лемма Бореля-Гейне может быть доказана от противного. Предоставляем и то и другое читателю.

§ 54. Теорема Вейерштрасса о предельной точке ограниченного множества.

1. Рассмотрим в качестве примера применения различных формулировок теоремы о непрерывности § 50, в частности, и лемм 1 и 2 § 53 известную теорему Вейерштрасса (Weierstrass) о существовании точки сгущения или предельной точки всякого бесконечного множества точек, лежащих в конечном интервале (a, b).

Напомним, что точка c называется **точкой сгущения** или **предельной точкой** множества M, если в *любой* окрестности (A, B), где $A < c < B$, точки c находится *неограниченное* количество точек множества M.

Например, для множества всех рациональных чисел всякое действительное число, согласно рассуждениям, проведенным на странице 169, будет точкой сгущения; для множества дробей вида $(-1)^n \frac{n}{n+1}$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ точками сгущения служат -1 и $+1$.

Теорема (Вейерштрасса). *Если все элементы x бесконечного множества M заключены в интервале (a, b), то в этом интервале существует по крайней мере одна точка сгущения множества M.*

Предложение Q, о котором речь идет в лемме 2 § 53, в данном случае есть суждение „интервал содержит бесконечное множество точек множества M". Такое свойство интервала должно при разбиении интервала на конечное число частей сохраняться по крайней мере для одной его части, и потому мы можем заключить по лемме 2 о существовании точки γ, в сколь угодно малой окрестности которой заключено бесконечное количество элементов множества M. Это и будет, согласно определению, точка сгущения множества M.

Вместо того чтобы применять лемму 2, можно было бы доказывать теорему от противного на основе леммы 1. Если ни одна точка x интервала не есть точка сгущения множества M то можно выделить окрестность U_x точки x, заключающую разве что *конечное* число элементов M. Если ни одна точка интервала не есть предельная точка M, то, перекрыв по лемме 2 интервал конечной цепочкой окрестностей U_x указанного только что типа, мы найдем, что во всем интервале (a, b) может заключаться лишь конечное число элементов M, что противоречит условию теоремы.

2. Наконец, эту же теорему можно доказать и непосредственно, отправляясь от теоремы § 50, рассматривая хотя бы переменную точку u, перемещающуюся от b к a с сохранением условия (свойство $\sum$), что в интервале (a, u) содержится неограниченное число элементов множества M. Критическая точка γ и будет искомой, так как в интервале (a, u_1) при $u_1 < \gamma$ содержится конечное, в интервале же (a, u_2) при $u_2 > \gamma$, а. стало быть, и в интервале (u_1, u_2) — бесконечное число элементов множества M. Читатель без труда переведет это построение на арифметический язык сечений.

Заменяя непрерывное движение точки u рассмотрением дискретных значений $u_1, u_2, \ldots, u_n$, мы приходим к построению, аналогичному приведенному на страницах 179—180 и позволяющему находить приближенные значения γ с любой степенью точности [в том случае, когда мы можем определять, в какой из частей интервала (a, b) при любом его разбиении на конечное число частей заключено бесконечное количество элементов множества M]. В частности, при последовательном делении интервала (a, b) пополам мы придем к доказательству той же теоремы методом деления промежутка, основанному на теореме 1 и протекающему по схеме рассуждения на странице 179.

В элементарном изложении путь непосредственного деления промежутка следует, конечно, предпочесть всякому иному. Можно даже производить деление сначала с помощью целочисленных точек, затем выделенный единичный интервал делить вновь на 10 равных частей и т. д. Это приведет к представлению искомого действительного числа γ в форме бесконечной десятичной дроби.

§ 55. Теорема о равномерной непрерывности.

В качестве приложений леммы Бореля-Гейне рассмотрим еще доказательство нескольких важнейших общих свойств непрерывных функций.

Напомним сначала понятие о *равномерной непрерывности* функции в данной области.

Если $f(x)$ непрерывна в точке x, то, по определению,

$$\lim_{x'\to x} f(x') = f(x),$$

или, что то же,

$$|f(x') \quad f(x)| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$|x' - x| < \delta(\varepsilon, x).$$

„Достаточно малое" число δ зависит в общем случае как от „сколь угодно малого" числа ε, *так и от рассматриваемого значения* x.

Так, например, для $f(x) = \frac{1}{x}$ найдем при $x = \frac{1}{a} > 0$, что неравенство $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right| < \varepsilon$, или, что то же, двойное неравенство

$$a - \varepsilon < \frac{1}{x'} < a + \varepsilon$$

будет выполнено при

$$\frac{1}{a+\varepsilon} < x' < \frac{1}{a-\varepsilon},$$

т. е. при

$$-\frac{\varepsilon}{a(a+\varepsilon)} < x' - \frac{1}{a} < \frac{\varepsilon}{a(a-\varepsilon)}.$$

За $\delta(\varepsilon, x)$ придется, стало быть, принять меньшее из двух чисел $\frac{\varepsilon}{a(a+\varepsilon)}$ и $\frac{\varepsilon}{a(a-\varepsilon)}$, т. е. положить

$$\delta(\varepsilon, x) = \frac{\varepsilon}{a(a+\varepsilon)}.$$

Как видим, зависимость этого числа от $x = \frac{1}{a}$ такова, что при одном и том же ε число δ придется выбирать тем меньшим, чем меньше значение $x = \frac{1}{a}$. Определенное, например, для $x = \frac{1}{2}$ число $\delta = \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}$ не будет уже пригодно для $x = \frac{1}{3}$, так как для обеспечения выполнения неравенства $\left|f(x') - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| < \varepsilon$ придется потребовать, чтобы было $\left|x' - \frac{1}{3}\right| < \frac{\varepsilon}{3(3+\varepsilon)}$. Эти обстоятельства легко уяснить себе на графике, обратив внимание на изменение наклона (крутизны) кривой $y = \frac{1}{x}$ при уменьшении $|x|$.

Во многих случаях, однако, нам приходится считаться с необходимостью обеспечить выполнение неравенства

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

в условиях, когда мы не можем *заранее* указать значения x и даже не можем ответить на вопрос, *в какой части* рассматриваемого интервала (a, b) находятся числа x и x'.

С такой необходимостью приходится, например, считаться тогда, когда мы имеем дело с функцией $y=f(x)$, связывающей значения переменной x, определяемые, скажем, путем фактического производства измерения, со значениями интересующей нас переменной y, которые требуется *вычислить* по формуле $y=f(x)$ с *заданной степенью точности* ε.

Связь между ε и δ в этом случае имеет следующий весьма конкретный смысл.

Измерение дает вместо „истинного" значения x лишь приближенное значение x'. Спрашивается, какова должна быть точность в измерении x, т. е. число δ в неравенстве

$$|x'-x|<\delta,$$

для того, чтобы можно было гарантировать, что результат вычисления $f(x')$ отличается от „истинного" значения $f(x)$ меньше, чем на ε, т. е.

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon.$$

Так как при этом мы *не знаем точно* значения x, а знаем лишь *интервал, в котором могут находиться значения* x и x', то, очевидно, отвечая на этот вопрос, мы должны по данному ε найти δ, *годное для любых пар значений* x и x' в этом интервале.

Для всех функций, относительно которых известно, что они непрерывны в *каждой точке* некоторого замкнутого интервала (a, b), можно доказать принципиальную возможность для каждого $\varepsilon>0$ найти ***зависящее лишь от*** ε и от вида функции значение δ, *обеспечивающее для любых пар значений* x и x' из интервала (a, b), удовлетворяющих условию $|x'-x|<\delta(\varepsilon)$, выполнение неравенства $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.

Это свойство известно под несколько неудачным названием **„равномерной непрерывности"** функции.

Используя уже рассмотренный выше пример, мы можем сказать, что непрерывная в разомкнутом интервале $0<x\leqslant b$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$ не обладает в этом интервале свойством равномерной непрерывности, так как из соотношения

$$\delta(\varepsilon, x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to 0$$

вытекает, как легко видеть, что годного для всех значений x в указанном интервале числа $\delta(\varepsilon)$ найти нельзя.

Если ограничить область изменения x замкнутым или разомкнутым интервалом типа (α, β), где $\beta>\alpha>0$, то функция $f(x)=\frac{1}{x}$ будет равномерно непрерывной в этом интервале. Действительно, так как $\delta(\varepsilon, \alpha)<\delta(\varepsilon, x)$ при $x>\alpha$, то значение

$$\delta(\varepsilon)=\delta(\varepsilon, \alpha)$$

будет и подавно (с избытком) пригодно для всего интервала (α, β), так что при любых значениях x' и x, бо́льших α и удовлетворяющих неравенству $|x'-x|<\delta(\varepsilon)$, будет обеспечено выполнение требуемого неравенства $\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$. Это число $\delta(\varepsilon)$ одновременно характеризует степень точности, с которой надо определять значение x для того, чтобы приближенное значение $\frac{1}{x'}$ дроби $\frac{1}{x}$ отличалось от истинного $\frac{1}{x}$ не более чем на ε, если про x и x' известно лишь, что оба эти числа лежат где-то в интервале (α, β).

Мы и намерены доказать возможность такого „обеспечения" выполнения неравенства $|f(x')-f(x)|<\varepsilon$ для общего случая непрерывной в замкнутом интервале функции.

Итак, речь идет о теореме.

Теорема. *Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке замкнутого интервала (a, b), равномерно непрерывна в этом интервале.*

Доказательство. По определению непрерывности мы можем построить для каждой точки x интервала (a, b) такую окрестность $x-\delta$, $x+\delta$, что для всех точек этой окрестности

$$x-\delta<x'<x+\delta, \quad x-\delta<x''<x+\delta$$

будет выполнено неравенство

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

В самом деле, здесь достаточно в общем определении непрерывности функции в точке x выбрать $\delta(\varepsilon, x)$ так, чтобы из неравенства

$$|x'-x|<\delta(\varepsilon. \ x)$$

вытекало неравенство

$$|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Если еще и $|x''-x|<\delta(\varepsilon, x)$, так что $|f(x'') \quad f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, то мы и будем иметь

$$|f(x')-f(x'')|<|f(x')-f(x)|+|f(x)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Теперь читатель должен противостоять искушению выбрать наименьшее из всех $\delta(\varepsilon, x)$ при изменении x в интервале (a, b). Таких дельт бесконечное число и, стало быть, мы попадаем впросак так же, как и на странице 181. Поэтому лучше уже сразу применить лемму Бореля-Гейне и построить конечную цепочку интервалов U_i только что указанного типа

$$x-\delta(\varepsilon, x), \quad x+\delta(\varepsilon, x),$$

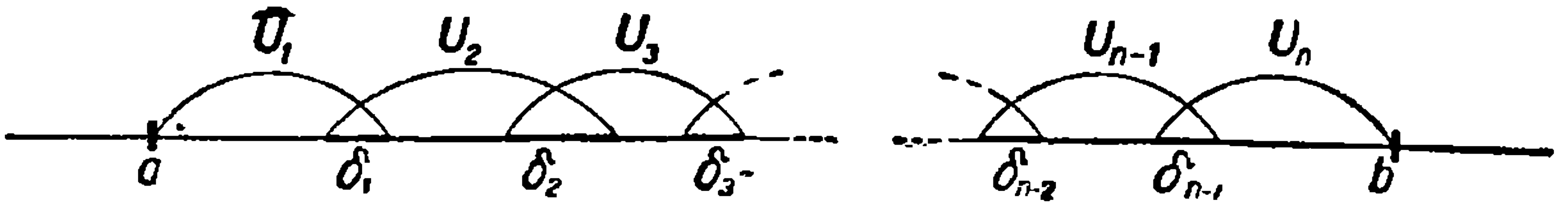
перекрывающую весь интервал (a, b) (черт. 21).

Интервалы U_1 и U_2 имеют *общую часть* (по определению цепочки"). Обозначим длину ее через δ_1. Длина *общей части* U_2 и U_3 пусть будет δ_2 и т. д.

Из *конечного* числа чисел

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$$

мы выберем теперь *наименьшее* и обозначим его через δ.



Черт. 21.

При таком выборе δ, как нетрудно видеть, неравенство

$$|x' - x''| < \delta$$

может выполняться только в том случае, если можно указать (по крайней мере один) *интервал* U_i, которому принадлежат *оба числа* x' и x'' *одновременно.*

А поскольку интервалы U_i как раз и построены так, что для любых x' и x'', лежащих одновременно в одном из U_i, выполнено неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

то этим и доказано, что выбранное нами δ удовлетворяет поставленному требованию (возможно, что это не наивыгоднейший выбор δ с точки зрения величины „допуска", но наиболее простой для общего доказательства).

Значение доказанной теоремы с точки зрения теории операций над действительными числами будет выяснено ниже (§ 72 и 79).

§ 56. Теорема Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своих точных границ.

Из свойства равномерной непрерывности непосредственно вытекает *ограниченность* непрерывной в каждой точке замкнутого интервала функции.

Действительно, рассмотрев хотя бы построенную выше цепочку $U_1, U_2, \ldots, U_n$, мы найдем, что уклонение $f(x)$ от $f(a)$ на протяжении всего интервала (a, b) не может превышать числа $n\varepsilon$, так что при $a \leqslant x \leqslant b$

$$f(a) - n\varepsilon < f(x) < f(a) + n\varepsilon.$$

Множество значений, принимаемых непрерывной функцией в замкнутом интервале, таким образом, оказывается ограниченным. Оно имеет, стало быть, по доказанному на странице 175 **точную нижнюю** и **точную верхнюю** границы γ_1 и γ_2, так что для всех x в (a, b)

$$\gamma_1 \leqslant f(x) \leqslant \gamma_2,$$

причем промежуток (γ_1, γ_2) нельзя уже заменить меньшим.

Границы γ_1 и γ_2, как мы видели, в общем случае могут достигаться, могут и не достигаться.

Для непрерывных функций можно, однако, доказать долгое время также принимавшееся без строго арифметического обоснования предложение о достижении точных границ, впервые доказанное Вейерштрассом и носящее его имя.

Теорема Вейерштрасса. *Функция, непрерывная в каждой точке замкнутого интервала* (a, b), *достигает в нем свое точной нижней и своей точной верхней границы,* т. е. существует такое значение x_1, для которого

$$f(x_1) = \gamma_1,$$

и такое значение x_2, для которого

$$f(x_2) = \gamma_2.$$

Проще всего доказывается это предложение от противного. Действительно, если $f(x)$ нигде не принимает значения γ_1, то, как легко показать, функция

$$F(x) = \frac{1}{f(x) - \gamma_1}$$

будет непрерывной в каждой точке интервала (a, b) и, следовательно, по доказанному выше, должна быть *ограниченной* в этом интервале. Последнее, однако, невозможно, так как, по определению точной нижней границы, в интервале (a, b) найдутся значения x, для которых значения $f(x)$ *сколь угодно близки* к γ_1, а, стало быть, значения дроби $\frac{1}{f(x) - \gamma_1}$ сколь угодно велики.

Требование *замкнутости* интервала (a, b) играет здесь существенную роль, так как γ_1 и γ_2 могут не достигаться на концах интервала (a, b). Аналогично, пример функции $f(x) = \frac{1}{x}$, определенной и непрерывной для всех положительных ... показывает, что ... ра... т... х ин... ов ... ние *огр... ни енности* ... функции в общем случае ... тся ... рным. То же ... и к теореме о равномерной непрерывности.

§ 57. Замечания о теоремах существования.

1. Относительно доказанных ... теорем следует заметить ... е. Все они являются ... *те... существования* и отнюдь не преследуют цели указать, ... и следует находить искомое ..., ... существ... ...вится. В ин... в ... самый ход док... до... ...ые косв... н... ... от ... приближенного вычисления с ... растал ... ст ... мы отмечали уже ... Однако, ... вообще говоря, вопрос о *эффективном нахождении искомого числа* ... со ... совсем иного р..., ... ли показательство существования и решается иным путем.

Характерным примером такого взаимоотношения этих двух проблем может служить приведенное выше доказательство теоремы Вейерштрасса о достижении точных границ непрерывной функцией. Как известно, методы нахождения экстремальных значений основаны на совершенно иных приемах. Проведенное выше от противного доказательство существования не имеет к ним никакого отношения. Правда, можно было бы — предоставляем это в виде упражнения читателю — провести доказательство и этой теоремы всеми теми методами, которые мы проанализировали выше на примере теоремы § 54. В частности, можно было притти и к теоретической конструкции, определяющей искомое число с любой степенью точности, однако и этот метод практически не может итти в сравнение с теми которые разрабатываются с соответствующей специальной целью (используют аппарат диференциального исчисления и т. д.).

Поэтому в доказательствах существования часто и не стремятся к тому, чтобы притти к эффективной конструкции, а выбирают наиболее простой путь теоретического рассуждения, ведущий к заключению теоремы.

Не следует, однако, на этом основании недооценивать значения общих теорем существования искомого объекта. Эти теоремы, во-первых, устанавливают весьма важные *свойства изучаемых объектов* (множ[illegible]ункций и т. д.), а, во-вторых, могут служить *основой для* [illegible] *нейших построений, прес*[illegible]*ющих цели нахождения* [illegible] *ели ины.*

Этот последний слу[illegible] и[illegible] это и в вопросе об экстремальных значениях ф[illegible]ции. С[illegible]ое до[illegible]тельство соответствующих теор[illegible] ди[illegible]нциального исчисления основывается обычно как раз на те[illegible]ме §

2. П[illegible] ив[illegible] д[illegible] м[illegible] ещ[illegible] один пр[illegible]р довольно общего характера. Один из простейших [illegible]ых приемов д[illegible] решения ка[illegible] алг[illegible] т[illegible] ст[illegible] ит[illegible] р[illegible]ний (а т[illegible] и и[illegible] ч) — метод *ит*[illegible]*ци* [illegible] *и по*[illegible] *те*[illegible]*ьных приближений* — протекает по следующей схеме. Пусть, ск[illegible] м[illegible] н[illegible] решить уравнение

$$x = x^3 [illegible] 1.$$

Возьмем произвольное значение x и [illegible]ставим последовательность

$$x_1 = x_0^3 + 1, \quad [illegible] = x_1^3 + 1, \quad x_3 = [illegible] + 1, \ \ldots, \ x [illegible] = x_n [illegible] + 1, \ \ldots$$

Если сущест[illegible]*ует* пре[illegible]л это[illegible] последовательности, так[illegible]

$$\lim_{n \to [illegible]} x_n = \lim_{n \to [illegible]} x_{n-1} = l,$$

то этот предел l наверно[illegible] до[illegible]ен б[illegible]ть *корнем уравнения*

$$x = x^3 [illegible] 1,$$

как это неп[illegible]о вытекает путем п[illegible] го перехода пр[illegible] $n \to \infty$ из [illegible]ения

$$x_n = x_{n-1}^3 + 1.$$

Для того чтобы выяснить, пригоден ли этот метод для решения предложенного кубического уравнения, необходимо таким образом, прежде всего дать ответ на вопрос о *существовании* предела последовательности x_n при том или ином выборе начального значения x_0. Примеров такого рода применения теорем существования в математике очень много.

3. Отметим еще одну сторону дела. Вопрос о *смысле* общих доказательств существования, не включающих эффективного построения искомого объекта, в настоящее время приобрел особую остроту в связи с тем направлением методологической критики, о котором мы говорили в главе I (§ 15).

В построении системы действительных чисел мы позволяем себе говорить о „всех возможных разбиениях всех рациональных чисел на два класса так, что и т. д.", о „всех возможных разбиениях всех действительных чисел на два класса так, что и т. д.", доказываем существование действительных чисел, применяя „бесконечное число раз" к совокупностям, составленным из „бесконечного числа" действительных чисел, закон исключенного третьего (ср., например, деление промежутка для доказательства теоремы § 54). Используя, однако, приемы того же типа, что и на страницах 32 и 14 (пример 6), можно без труда построить такие функции и такие множества точек, для которых, например, решение вопроса о том, в какой половине интервала (a, b) заключается неограниченное число элементов множества, представляет собой неразрешенную проблему типа tertium (стр. 36). Построения, основанные на методе деления промежутка, теряют в применении к таким объектам эффективность, так как уже первая стадия построения не может быть фактически осуществлена.

Естественно, что с точки зрения финитистов такого рода доказательства приходится признать нагромождением незаконных методов рассуждения, теоремы существования в их общей формулировке неверными и во всяком случае имеющими не тот смысл, на который они претендуют, и вообще всю теорию нуждающейся в коренной переработке и замене системой суждений, имеющих финитный эффективный смысл.

Если и не становиться на такую точку зрения, то во всяком случае в теории действительных чисел в особенности приходится считаться с необходимостью доказывать непротиворечивость и выяснять смысл логических построений, оперирующих с бесконечными множествами так, как будто это — законченные конечные множества, все элементы которых можно пересмотреть, перебрать один за другим (см. литературу, указанную на стр. 17 и 38).

§ 58. Всюду плотные множества и их сечения.

1. В § 50 было доказано, что всякое сечение в области действительных чисел производится действительным числом. При доказательстве мы исходили из определения действительного числа с помощью сечения, произведенного в области рациональ-

ных чисел. Мы можем, поэтому, сказать, что для осуществления расширения первоначальной числовой системы, необходимого для получения непрерывной числовой области действительных чисел, нам достаточно ввести в рассмотрение все сечения в области *всех рациональных* чисел.

Однако при определении действительных чисел рассматривать непременно *все* рациональные числа нет *необходимости*.

Позволим себе для уяснения сути дела прибегнуть к геометрической иллюстрации. Определяя действительное число α сечением в области рациональных чисел, мы непосредственно фиксируем скалярное положение отрезка длины α по отношению ко всем отрезкам, соизмеримым с единицей меры. Точки с рациональными абсциссами на геометрической прямой или, что то же, на числовой прямой действительных чисел играют, таким образом, роль *системы вех,* настолько *густой,* что указание положения конца отрезка по отношению ко всем этим вехам (сечение) *достаточно* для однозначного определения отрезка.

Совершенно ясно, что ту же роль могут играть и другие, более экономные по составу, но все же достаточно густые системы вех. Достаточная густота будет при этом, очевидно, характеризоваться требованием, чтобы между концами двух *любых различных* отрезков помещалась *по крайней мере одна вешка.* Тогда эти отрезки можно будет отличать друг от друга по различию скалярного расположения их концов в отношении этой вешки. Другими словами, длина всякого отрезка определится *сечением, произведенным в системе чисел, отнесенных вешкам системы.*

Требование, налагаемое на систему вех в арифметических терминах, может быть формулировано так: мы должны иметь в распоряжении систему чисел S, обладающую тем свойством, что *между всякими двумя* действительными числами α и $\beta \neq \alpha$ можно вставить хоть одно число (а, следовательно, и бесконечное множество чисел) *системы* S.

Такое множество чисел S, элементы которого найдутся в любом интервале (α, β), *называется* ***всюду плотным*** *на числовой прямой действительных чисел или, просто, всюду плотным.*

Такая система чисел S может состоять и из иррациональных чисел, например рациональных кратных числа $\sqrt{2}$, т. е. чисел типа $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ и т. п.

Примечание. Не всякое *плотное в себе* множество, т. е. такое, между двумя элементами *которого* содержится элемент того же множества, будет *всюду* плотным. В качестве примера небезынтересно рассмотреть множество чисел, получающихся, если каждую двоичную систематическую дробь рассматривать, *как число, записанное в системе счисления с бо́льшим основанием,* скажем, в троичной или десятичной системе счисления. В последнем случае мы имеем, стало быть, дело просто со всеми десятичными дробями, в представлении которых участвуют лишь цифры 0 и 1. Множество это, очевидно, *плотное в себе,* оставляет, однако, на числовой прямой *целые интервалы* свободными от своих точек. Можно даже показать, что такое множество *ни в одном интервале* не будет всюду плотным. Представляем детали доказательства и выяснение геометрической картины распределения точек таких множеств на числовой прямой читателю.

Итак, возвращаясь к нашей основной теме, мы можем формулировать следующее предложение.

Теорема. *Всякое действительное число однозначно определяется своим положением относительно элементов любого всюду плотного множества S* (т. е. может быть определено сечением, произведенным в этом множестве).

Доказательство повторяет, по существу, изложенные выше геометрические соображения. Всякое действительное число α, не входящее во множество S, разбивает элементы последнего на два класса: 1) класс чисел из S, меньших α, и 2) класс чисел из S, бóльших α. Для двух различных действительных чисел α и β эти классы не могут совпадать, так как, по определению всюду плотного множества, между α и β найдутся числа системы S. Аналогичное верно и по отношению к классам сечений, производимых во множестве S элементами самого множества S, причем число, производящее такое сечение, может принадлежать любому из двух классов сечения.

Легко видеть, что, *исходя* из такой системы S, мы можем строить систему действительных чисел так же, как и исходя из системы рациональных чисел, с той лишь разницей, что слово *„рациональный“* следует всюду заменить словами *„принадлежащий системе S“*.

При этом, в частности, и все рациональные числа, не входившие в систему S, будут определяться наравне с остальными действительными числами, сечениями в системе S.

Доказательство теоремы непрерывности § 50 сохраняет свою силу и при таком введении действительных чисел и получается из рассуждений, проведенных на страницах 172—173 с помощью только что указанной замены терминов.

2. Для *первичного введения* иррациональных чисел пригодны, разумеется, лишь всюду плотные множества S, состоящие только из *рациональных* чисел.

Так, например, можно ввести все недостающие рациональные и все иррациональные числа, исходя из системы S всех конечных *двоичных дробей*, т. е. дробей со знаменателем, равным степени двойки.

Этим можно, например, воспользоваться для того, чтобы значение показательной функции A^{α} при всех рациональных и иррациональных значениях α определить с помощью значений A^{s} той же функции для показателей, могущих быть представленными в виде двоичной дроби. Для таких значений s число A^{s} может быть вычислено с помощью последовательных операций извлечения *квадратного корня*, умножения и деления.

Ту же роль для построения системы действительных чисел может играть и всякая другая система всех конечных систематических дробей в любой системе счисления.

В частности, для построения вполне строгой теории иррациональных чисел можно воспользоваться, как исходной, системой *конечных десятичных дробей*.

Другой пример дает множество S всех чисел вида

$$a_0+\frac{a_1}{n_1}+\frac{a_2}{n_1 n_2}+\ldots+\frac{a_k}{n_1 n_2\ldots n_k},$$

причем

$$0\leq a_i<n_i,$$

а

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_k,\ \ldots$$

есть фиксированная последовательность возрастающих целых чисел, k — произвольно, числители a_i — произвольные натуральные числа, соответственно меньшие, чем n_i. Предоставляем читателю доказать, что это множество всюду плотное.

Полагая $n_1=\ldots=n_k=2$ или 10, мы приходим к предыдущим случаям.

§ 59. Основная лемма.

1. Сделаем еще один существенный шаг по пути сокращения необходимых для определения действительного числа данных.

Поскольку основная роль классов A и A' сечений в системе рациональных чисел или в всюду плотном множестве S заключается в определении скалярного положения определяемого действительного числа α по отношению к исходной скалярной системе рациональных чисел или элементов множества S, постольку нет необходимости в том, чтобы в классах A и A' рассматривать числа, *далеко отстоящие от числа* α. Достаточно, чтобы в классах A и A' *были представлены числа,* ***сколь угодно близкие*** *к определяемому числу справа и слева.* Этим будет однозначно зафиксировано положение числа α по отношению ко всем элементам исходной всюду плотной скалярной системы, а потому и по отношению ко всем остальным действительным числам.

Формулируем точнее и докажем соответствующее предложение, которое мы будем в дальнейшем называть *основной леммой.*

Лемма. *Если имеются два таких класса R и R'* (рациональных) *чисел, что*

1) *ни одно из чисел $r\subset R$ не превосходит ни одного из чисел* $r'\subset R$, так что

$$r\leq r',$$

2) *в классах R и R' существуют неравные друг другу числа r и r', сколь угодно мало отличающиеся друг от друга,* так что для любого $\varepsilon>0$ можно указать $r\subset R$ и $r'\subset R'$ такие, что

$$0<r'-r<\varepsilon,$$

то существует одно и только одно действительное число α *удовлетворяющее неравенствам*

$$r\leq\alpha\leq r',$$

при любых r и *r' из классов R* и *R'.*

*

Нетрудно, прежде всего, доказать, что если такое число существует, то оно может быть *только одно*.

Действительно, допуская, что еще

$$r \leqslant \beta \leqslant r'$$

и $\alpha < \beta$, мы сможем, согласно с определением, данным на странице 169, вставить между α и β одно, а, стало быть, и два рациональных числа q_1 и q_2 так, что

$$\alpha < q_1 < q_2 < \beta.$$

Из неравенств

$$r \leqslant \alpha < q_1 < q_2 < \beta \leqslant r'$$

будет, однако, следовать

$$q_2 - q_1 < r' - r,$$

а так как разность $r' - r$, по условию, может быть сделана сколь угодно малой, то

$$q_2 - q_1 < \varepsilon,$$

где ε — произвольно, что возможно лишь, если

$$q_2 = q_1,$$

вопреки построению. Стало быть, $\alpha = \beta$.

Мы здесь избегали рассмотрения разности $\beta - \alpha$, так как действий над иррациональными числами мы пока еще не определяли.

Что касается существования числа α, то тут проще всего воспользоваться доказанным в § 51 существованием точной верхней границы множества элементов класса R. Эта точная граница α как раз и удовлетворяет требуемым неравенствам: она не меньше любого из r и, во всяком случае, не больше любого из r', ибо в противном случае между r' и α не было бы ни одного $r \subset R$, вопреки определению *точной* верхней границы.

Можно провести доказательство и непосредственно, не опираясь на понятие точной верхней границы, построив дедекиндово сечение (A, A') *всех* рациональных чисел так, чтобы оно определяло искомое число α. С этой целью достаточно будет отнести к классу A все рациональные числа, которые меньше всех чисел класса R', и к классу A' — все остальные рациональные числа. Так как всякое r, входящее в R, меньше всех r', то оно, по определению, входит в класс A и потому $r \leqslant \alpha$. Так как, аналогично, всякое r', входящее в R', по определению, входит в класс A', то $\alpha \leqslant r'$. При этом мы исключили из рассмотрения тривиальный случай, когда существует (по указанному выше, единственная) пара совпадающих между собой чисел r и r'. Их общее значение и будет в этом случае искомым числом α.

Примечание. 1. Все условия леммы, как мы показали в § 50, выполнены, если R и R' суть классы некоторого дедекиндова сечения, т. е. обнимают в совокупности все рациональные числа. То же утверждение имеет место и в том случае, когда R и R' — классы сечения, произведенного в всюду плотном множестве S.

Примечание 2. В классах R и R' достаточно *сохранить лишь те числа, которые лежат в сколь угодно малом* (рациональном) интервале (A, B), заключающем внутри себя число α. Действительно, взяв два рациональных числа q_1 и q_2 так, чтобы было $A < q_1 < \alpha < q_2 < B$, и обозначая наибольшую из разностей $q_1 - A$ и $B - q_2$ через δ, мы найдем, что неравенство $r' - r < \delta$ несовместимо с условием, чтобы одно или оба числа r и r' лежали *вне интервала* (A, B). В *частях* классов, R и R', лежащих *внутри* (A, B) *сохранены* поэтому сколь угодно мало отличающиеся друг от друга пары чисел r и r'. Для этих частей классов R и R' выполняются, таким образом, условия доказанной леммы.

2. Для дальнейшего существенно установить критерии равенства и неравенства действительных чисел α и β, определенных соответственно классами R и R' и T и T', согласно тексту леммы.

Если $\alpha < \beta$, то можно выбрать рациональные числа A, B и C так, чтобы было

$$A < \alpha < B < \beta < C.$$

Согласно только что сделанному примечанию 2, в интервале (A, B) должны найтись некоторые r' из класса R', а в интервале (B, C) некоторые t из класса T, так, что

$$r' < B < t.$$

Это означает, что при $\alpha < \beta$ *найдутся такие r'* класса R', *которые меньше некоторых t класса T. Верхний* класс R' для α и *нижний* класс T для β, таким образом, *захватывают* друг друга в этом смысле слова (хотя, может быть, и *не имеют* общих элементов). Это соотношение между классами является аналогичным указанной на странице 169 схеме, имеющей место для того случая, когда α и β определены сечениями, включающими все рациональные числа.

В случае равенства $\alpha = \beta$, очевидно, *все r меньше всех t'* и *все t меньше всех r'*.

Рассмотренные критерии и устанавливают скалярное расположение действительных чисел α и β, заданных классами чисел, удовлетворяющих условиям леммы.

3. Основная лемма представляет собой весьма простое и ясное по смыслу вспомогательное предложение, которое быстро приводит к цели при установлении *основных операций* над действительными числами и притом не только в самой теории Дедекинда, а и в близких с ней построениях, нередко применяемых в элементарном преподавании ради избежания логически простейшего, но несколько пугающего своей абстрактностью и ярко выраженным *логическим* характером понятия о сечении.

К числу таких построений относятся: 1) *теория двусторонних последовательностей* и 2) имеющая с ней много точек соприкосновения *теория бесконечных десятичных дробей*.

Рассмотрим, как ставится вопрос об определении иррациональных чисел в этих теориях.

§ 60. Двойные последовательности и бесконечные десятичные дроби.

1. В теории двойных последовательностей каждое действительное число определяется с помощью двух последователь-

ностей рациональных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, из которых первая — монотонно-возрастающая (не убывающая), а вторая — монотонно-убывающая (не возрастающая), причем все элементы первой меньше всех элементов второй, а разность $b_n - a_n$ стремится к нулю с возрастанием n.

Таким образом,

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$
$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Можно также сказать, что мы имеем дело с последовательностью *вложенных друг в друга* интервалов

$$(a_n, b_n),$$

длина которых стремится к нулю.

В силу основной леммы § 58, всякая такая последовательность определяет *одно и только одно* действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n$$

при всяком n, т. е. принадлежащее каждому из интервалов (a_n, b_n).

Это предложение иногда называют *принципом вложенных интервалов* Кантора.

Обратно, всякое действительное число может быть определено с помощью двух последовательностей рассматриваемого типа. Это вытекает из рассуждений, приведенных в § 50. Применяя метод деления какого-либо промежутка (a_1, b_1), в котором заведомо заключено определяемое число γ, т. е. деля (a_1, b_1) пополам и обозначая через (a_2, b_2) ту из половин первоначального интервала, в которой заключено число γ, и продолжая так далее, мы найдем

$$a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n,$$
$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$

и, стало быть, числа a_n и b_n определяют число γ в указанном здесь смысле слова, соответствующем тексту основной леммы.

2. В *первичном* построении теории иррациональных чисел с помощью двойных последовательностей, *по определению*, каждая пара таких последовательностей *определяет действительное* число, причем соотношения равенства и неравенства вводимых чисел устанавливаются соответственно критерию, рассмотренному в конце § 59, также с помощью соответствующих *определений*. Доказываемые нами здесь теоремы служат, таким образом, лишь для того, чтобы установить *возможность* такого построения теории действительных чисел и *эквивалентность* ее теории Дедекинда.

Числа a_n и b_n можно рассматривать как приближенные значения действительного числа γ *с недостатком и с избытком*, причем с возрастанием n числа a_n и b_n выражают γ все точнее и точнее, с погрешностью, не превышающей разности

$$b_n - a_n,$$

стремящейся к нулю при $n \to \infty$.

Простота этой связи между числами γ и элементами определяющих его последовательностей и является положительной стороной рассматриваемого метода введения иррациональных чисел.

Следует отметить, что такие двойные последовательности рассматривались еще в 1668 году английским математиком Грегори (Grégory), в эпоху, когда приближенные вычисления со все возрастающей степенью точности и пользование бесконечными процессами стали приобретать права гражданства в арифметике. Около того же времени основоположник теории логарифмов Непéр (Napier) установил и правила, согласно которым действия над иррациональными количествами сводятся к производству соответствующих операций над их приближениями.

С технической стороны оперирование с иррациональными числами, таким образом, не представляло уже тогда принципиальных затруднений; однако для построения отчетливой логической теории отдельных технических правил было мало, и позже, когда строгое обоснование общих предложений анализа стало уже необходимостью, Дедекинду все еще приходилось иметь дело (в 1858 году!) с отмеченной уже выше методологической запутанностью вопроса, в которой еще очень нелегко было отделить логические и арифметические понятия от наглядных геометрических представлений.

3. Вторая теория—*бесконечных десятичных дробей*—в известной мере может рассматриваться как частный случай предыдущей, если иметь в виду определение действительного числа с помощью его десятичных приближений *с недостатком* и *с избытком* с возрастающей степенью точности.

Действительно, обозначая через c_0 целую часть, а через c_1, c_2, c_3, ... первую, вторую и т. д. цифры в десятичных дробях, выражающих определяемое действительное число с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... и т. д. с недостатком, мы можем сказать, что в этом случае действительное число определяется с помощью двух последовательностей

$$a_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{c_n}{10^n},$$

и

$$b_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{c_n + 1}{10^n}.$$

Элементы первой, т. е. числа a_n, с возрастанием числа n возрастают (не убывают), оставаясь меньше всех элементов второй, не возрастающей, последовательности приближений с избытком.

При этом разность $b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$,

служащая для оценки погрешности, неограниченно убывает с увеличением числа знаков n в дробях a_n и b_n.

Нетрудно, далее, показать, что, вообще, при любом выборе целого числа d в качестве основания системы счисления, всякое действительное число может быть определено с помощью двух последовательностей типа

$$a_n = c_0 + \frac{c_1}{d} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{d^{n-1}} + \frac{c_n}{d^n},$$

$$b_n = c_0 + \frac{c_1}{d} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{d^{n-1}} + \frac{c_n + 1}{d^n},$$

где

$$0 \leqslant c_i < d \text{ при } i = 1, 2, 3, \ldots$$

В самом деле, если действительное число α определено сечением (A, A') области рациональных чисел, то мы можем найти два последовательных целых числа

$$a_0 = c_0 \subset A \text{ и } b_0 = c_0 + 1 \subset A',$$

принадлежащие различным классам этого сечения, затем, деля интервал $(c_0, c_0 + 1)$ на d равных частей, два числа

$$a_1 = c_0 + \frac{c_1}{d} \subset A \text{ и } b_1 = c_0 + \frac{c_1 + 1}{d} \subset A',$$

принадлежащих снова различным классам, и т. д.

Система чисел a_n и b_n, так построенная, удовлетворяет требованиям основной леммы § 59 и определяет единственное действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам $a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n$. Так как, в силу условий $a_n \subset A$ и $b_n \subset A'$, число α, определенное сечением (A, A'), должно удовлетворять тем же неравенствам, то отсюда и вытекает, что число γ совпадает с числом, определенным сечением (A, A').

Подробнее останавливаться на теориях двусторонних последовательностей мы не будем, так как аналогичное и притом более общее построение встретится нам ниже при рассмотрении теории сходящихся последовательностей Кантора. Изложение теории двойных последовательностей читатель может найти в курсе теоретической арифметики Фербера (см. также Гибш, „Элементарная математика"), а теорию бесконечных десятичных дробей — в курсе „Введение в анализ" Селиванова.

§ 61. Основные операции в области действительных чисел.

Заметим предварительно следующее.

Если мы имеем дело с монотонной функцией одной или, вообще, нескольких рациональных аргументов, скажем, с монотонно возрастающей относительно каждого своего аргумента функцией

$$f(r, \ldots, t),$$

то естественно потребовать при обобщении определения этой функции на действительные значения аргументов, чтобы промежуточным между данными рациональными числами $r, \ldots, t$ и $r', \ldots, t'$ действительным значениям $\alpha, \ldots, \beta$ соответствовало промежуточное между $s=f(r, \ldots, t)$ и $s'=f(r', \ldots, t')$ значение $\gamma=f(\alpha, \ldots, \beta)$. Числа s и s' мы сможем здесь рассматривать как приближения γ с любой степенью точности, если разность $s'-s$ может быть сделана сколь угодно малой за счет достаточной малости разностей $r'-r, \ldots, t'-t$, т. е. за счет достаточной близости приближений $r, \ldots, t$ и $r', \ldots, t'$ к определяемым им числам $\alpha, \ldots, \beta$. Для всякой монотонной функции f, для которой будет доказано это последнее предложение, выражающее свойство равномерной непрерывности функции f для рациональных значений аргументов, мы сможем, стало быть, опираясь на основную лемму § 59, определить число

$$\gamma=f(\alpha, \ldots, \beta)$$

как единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$f(r, \ldots, t) \leqslant \gamma \leqslant f(r', \ldots, t'),$$

при условиях

$$r \leqslant \alpha \leqslant r', \ldots, t \leqslant \beta \leqslant t'.$$

Это определение операций над иррациональными числами на основе соответствующих действий над их рациональными приближениями находится в полном соответствии с упомянутой уже (стр. 199) концепцией Непера.

Приведенной здесь схеме мы и будем следовать в этом параграфе и § 62—64, имея в виду, в первую очередь, тот случай, когда действительные числа — аргументы операции или функции — заданы классам R и R' соответствующих дедекиндовых сечений системы рациональных чисел. Определения сохраняют свою силу и для общего случая задания иррационального числа двумя классами рациональных чисел R и R', удовлетворяющими условиям основной леммы § 61.

1. Сложение. Пусть число α определяется классами R и R', как единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r \leqslant \alpha \leqslant r', \text{ где } r \subset R \text{ и } r' \subset R',$$

а β определяется, аналогично, классами T и T'.

Образуем классы чисел

$$r+t \text{ и } r'+t',$$

складывая все числа левых классов друг с другом и все числа правых классов друг с другом.

Так как

$$(r'+t')-(r+t)=(r'-r)+(t'-t)<\varepsilon,$$

коль скоро $r'-r$ и $t'-t$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, то *классы* $r+t$ и $r'+t'$ *определяют,* в соответствии с текстом основной леммы, *един-*

ственное действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$r+t \leqslant \gamma \leqslant r'+t'.$$

Это число γ и называется, по определению, ***суммой действительных чисел*** α и β.

В частном случае, когда α и β — рациональные числа, γ будет, как легко видеть, совпадать с суммой $\alpha+\beta$ в обычном смысле слова, имеющем место в системе рациональных чисел. Требование принципа перманентности, таким образом, соблюдается.

Заметим, что в случае, когда (R, R') и (T, T') — сечения Дедекинда, *нельзя* утверждать, что классы $r+t$ и $r'+t'$ образуют *сечение*. В том случае, если сумма двух иррациональных чисел $\alpha+\beta$ есть *рациональное* число (например $\alpha=1-\sqrt{2}, \beta=1+\sqrt{2}$), это рациональное число $\alpha+\beta$ *не может войти ни в один из классов* $r+t$ и $r'+t'$, как это следует из неравенств $r+t<\alpha+\beta<r'+t'$, вытекающих из *иррациональности* чисел α и β. Можно, конечно, образовать *сечение*, определяющее сумму $\alpha+\beta$ и в этом случае, отнеся к нижнему классу числа типа $r+t$, а к верхнему — *все остальные*, как это и делает Дедекинд, желая строго выдержать принцип определения действительного числа при помощи сечения. Определения, основанные на лемме § 59, обладают, однако, преимуществом большей симметрии и общности и не требуют никаких оговорок подобного рода.

Для случая, когда иррациональное число определяется не сечением Дедекинда (R, R'), а классами R и R' общего вида, необходимо еще убедиться в *однозначности* операции сложения, т. е. независимости результата от *способа задания слагаемых классами* R, R' и T, T'. Эта однозначность вытекает из того, что суммы $r+t$ и $r'+t'$ во всяком случае входят в соответствующие классы сечения, определяющего число $\alpha+\beta$, и, стало быть, неравенства $r+t \leqslant \alpha+\beta \leqslant r'+t'$ должны быть удовлетворены при любом выборе классов R, R' и T, T'. В том, что суждение об однозначности получается *автоматически* при рассмотрении *сечений* (R, R') и (T, T'), и заключается одно из существенных преимуществ такого способа введения иррациональных чисел. Впрочем, *вводя* иррациональные числа с помощью классов, удовлетворяющих основной лемме, нетрудно установить однозначность операции сложения (и остальных операций) непосредственно, исходя из критерия равенства конца § 59. Так, если классы R_1, R_1' и T_1, T_1' определяют те же числа α и β, то $r<r_1'$, $t<t_1'$; $r_1<r'$; $t_1<t'$. Складывая, найдем, что аналогичные неравенства

$$r+t<r_1'+t_1' \text{ и } r_1+t_1<r'+t'$$

выполнены и для классов, определяющих сумму чисел α и β в обоих случаях, чем и доказана однозначность операции сложения.

2. Умножение. Совершенно аналогично предыдущему и ограничиваясь для простоты положительными числами, мы можем образовать два класса чисел

$$rt \text{ и } r't',$$

удовлетворяющих, очевидно, неравенству

$$rt < r't',$$

а также и требованию, чтобы разность

$$r't' - rt = (r' - r)t' + r(t' - t)$$

могла быть сделана сколь угодно малой.

Доказательство последнего утверждения соответствует рассуждениям, обычно применяемым при установлении теоремы о пределе произведения

$$\lim(xy) = \lim x \cdot \lim y.$$

Согласно примечанию 2 на странице 197, мы можем ограничиться рассмотрением значений r в некотором интервале (A, B) и значений t' в некотором интервале (C, D), т. е. положить

$$r < B \text{ и } t' < D.$$

Тогда из выполняющихся в силу свойств классов r и r', а также t и t' неравенств

$$r' - r < \frac{\varepsilon}{2D} \quad \text{и} \quad t' - t < \frac{\varepsilon}{2B}$$

будет следовать

$$(r' - r)t' + r(t' - t) < \frac{\varepsilon}{2D} \cdot D + \frac{\varepsilon}{2B} \cdot B = \varepsilon,$$

т. е.

$$r't' - rt < \varepsilon.$$

Классы rt и $r't'$ определяют, таким образом, единственное действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам

$$rt \leqslant \gamma \leqslant r't'.$$

Это число γ и называют, по определению, ***произведением действительных чисел*** α и β, так что

$$\gamma = \alpha\beta.$$

Несколько иной способ определения тех же операций был уже рассмотрен нами в § 34 главы III.

3. Обратным операциям — **вычитанию и делению** можно дать здесь прямые определения, производя соответствующие операции над рациональными числами *разноименных* классов.

Так, придерживаясь предыдущих обозначений, мы для определения числа $\alpha - \beta$ построим классы чисел

$$r - t' \text{ и } r' - t.$$

Неравенства $r - t' < r' - t$ и условие осуществимости неравенства $(r' - t) - (r - t') < \varepsilon$, очевидно, выполнены. Таким образом, $\alpha - \beta$ есть единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r - t' \leqslant \alpha - \beta \leqslant r' - t.$$

Основываясь на этом определении, легко уже показать, что действия вычитания и сложения суть обратные действия. В самом деле, по определению, сумма $(\alpha-\beta)+\beta$ есть единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r-t'+t \leqslant (\alpha-\beta)+\beta \leqslant r'-t+t'.$$

С другой стороны,

$$r-t'+t < r \leqslant \alpha \leqslant r' < r'-t+t'$$

и, стало быть, тем же неравенствам удовлетворяет и число α, так что

$$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta.$$

Допуская, что еще $\alpha=\gamma+\beta$ и $s \leqslant \gamma \leqslant s'$, найдем $s+t \leqslant r'$ и $r \leqslant s'+t'$ или $s \leqslant r'-t$, $r-t' \leqslant s'$, так что $\gamma=\alpha-\beta$. Действие, обратное сложению, совпадает, таким образом, с установленной выше однозначной операцией, результат которой был обозначен знаком $\alpha-\beta$.

Аналогично обстоит дело и с операцией деления.

При этом, как всегда, предполагаем, что делитель β отличен от нуля. Ограничиваясь вновь для простоты положительными числами, мы можем, стало быть, отделить β от нуля положительным рациональным числом A и рассматривать, согласно примечанию 2 на странице 197, лишь числа t и t', удовлетворяющие неравенствам

$$0 < A < t \leqslant \alpha \leqslant t'.$$

Тогда можно построить классы

$$\frac{r}{t'} \text{ и } \frac{r'}{t},$$

причем

$$\frac{r}{t'} < \frac{r'}{t},$$

а разность

$$\frac{r'}{t}-\frac{r}{t'}=\frac{r't'-rt}{tt'} < \frac{1}{A^2}(r't'-rt)$$

может быть сделана, согласно доказанному выше при рассмотрении операции умножения, меньшей любого наперед заданного числа.

Частное $\frac{\alpha}{\beta}$ и определяется как единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{r}{t'} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} \leqslant \frac{r'}{t}$$

Произведение $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta$, по определению умножения, есть единственное число, удовлетворяющее наравенствам

$$\frac{r}{t'}\cdot t \leqslant \frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta \leqslant \frac{r'}{t}\cdot t',$$

и так как, с другой стороны, тем же неравенствам

$$\frac{r}{t}\cdot t < r \leqslant \alpha \leqslant r' < \frac{r't'}{t}$$

удовлетворяет и число α, то

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta = \alpha.$$

Допуская, что еще $\alpha = \gamma\beta$ и $s \leqslant \gamma \leqslant s'$, найдем $st \leqslant r'$ и $r \leqslant s't'$, или $s \leqslant r' : t, r : t' \leqslant s'$, так что $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. Действие, обратное умножению, совпадает, таким образом, с установленной только что однозначной операцией, результат которой был обозначен знаком $\frac{\alpha}{\beta}$.

4. Установление того, что перечисленные рациональные операции обладают всеми обычными свойствами действий как в отношении скалярного расположения (сумма положительных слагаемых больше каждого из слагаемых, знак разности зависит от скалярного расположения вычитаемого и уменьшаемого по отношению друг к другу и т. п.), так и в отношении формальных свойств действий, характеризующих область действительных чисел, как ***числовое поле*** (сочетательный, переместительный и распределительный законы), не представляет уже труда.

Так, например, если

$$\alpha - \beta > 0,$$

то по определению найдутся r и t' такие, что $r - t' > 0$, т. е. найдется такое r, которое больше некоторого t'. А это, в связи с неравенствами $\alpha \geqslant r > t' \geqslant \beta$ и означает, что

$$\alpha > \beta.$$

Аналогично, из выполнения, например, переместительного закона для произведения рациональных чисел непосредственно вытекает совпадение классов чисел rt и tr, так же как и $r't'$ и $t'r'$, и, следовательно, равенство произведений $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$.

Заметим, что, распространив определение и свойства операции вычитания на действительные числа, мы можем обобщить лемму § 59 на тот случай, когда классы R и R' состоят *из каких угодно действительных* (а не только рациональных) *чисел*. Доказательство остается то же. Этим нам придется воспользоваться при построении операций третьей ступени, к которым мы и переходим.

ГЛАВА VII.

СТЕПЕННАЯ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ.

§ 62. Операция извлечения корня. Степенная функция.

1. Прямое действие возвышения в целую степень в обычном определении

$$\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha, \qquad (n \text{ сомножителей})$$
$$\alpha^{-n} = 1 : \alpha^n,$$
$$\alpha^0 = 1$$

не требует дополнительных доказательств существования.

Заметим только следующее. Задавая число α сечением $r \leqslant \alpha \leqslant r'$, естественно желать определить α^n как единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r^n \leqslant \alpha^n \leqslant (r')^n.$$

Здесь имеется некоторое отклонение от неравенств, соответствующих формуле $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha$, так как мы перемножаем между собой лишь *равные* числа левых и правых классов $(R, R'), \ldots, (R, R')$. Это, однако, не играет никакой роли, так как классы r^n и $(r')^n$ удовлетворяют условиям основной леммы. Доказывать возможность удовлетворить неравенству $(r')^n - r^n < \varepsilon$ можно при этом либо методом полной индукции, обобщая полученное выше неравенство для разности $r't' - rt$, либо воспользовавшись известным алгебраическим тождеством, из которого при $r' < B$ следует, что

$$(r')^n - r^n = (r' - r)[r^{n-1} + r^{n-2}r' + \ldots + (r')^{n-1}] <$$
$$< (r' - r)\, nB^{n-1} < \varepsilon,$$

коль скоро

$$r' - r < \frac{\varepsilon}{nB^{n-1}}.$$

Читатель узнает в этом доказательство непрерывности степенной функции x^n, проведенное здесь в отношении рациональных значений аргумента x.

Перейдем к операции извлечения корня $\sqrt[n]{\beta}$. Речь, стало быть, идет о нахождении числа α, удовлетворяющего соотношению

$$\alpha^n = \beta,$$

причем мы предполагаем, что $\beta > 0$ и $\alpha > 0$.

Для доказательства существования такого числа α построим сечение (A, A') системы всех рациональных чисел, отнеся к левому классу A все числа r, для которых

$$r^n \leqslant \beta,$$

а к правому — все числа r', для которых

$$(r')^n > \beta.$$

Так как всякое рациональное число попадает в один из классов, причем всегда $r < r'$, то разбиение (A, A') есть, действительно, дедекиндово сечение и, стало быть, им определяется некоторое действительное число α, причем

$$r \leqslant \alpha \leqslant r'.$$

В силу сказанного выше об определении α^n, мы можем сказать, что α^n есть единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$r^n \leqslant \alpha^n \leqslant (r')^n.$$

С другой стороны, тем же неравенствам, по построению, удовлетворяет число β и, стало быть, найденное число обладает требуемым свойством

$$\alpha^n = \beta.$$

Итак, в области действительных чисел одна из обратных операций третьей ступени — извлечение корня из положительного числа — всегда *выполнима*.

2. Приведенное определение находится в непосредственной связи с методом нахождения приближенных значений корня $\sqrt[n]{\beta}$ путем испытания соответствующих рациональных приближений. Действительно, принадлежность каждого рационального числа s тому или иному классу сечения (A, A') устанавливается путем испытания, заключающегося в сравнении числа s^n с числом β. Методами, указанными на страницах 170—171, мы можем таким путем находить приближенные значения $\sqrt[n]{\beta}$ с любой степенью точности.

Полагая

$$\alpha^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{\alpha})^p \text{ и } \alpha^{-s} = \frac{1}{\alpha^s},$$

мы найдем, таким образом, что выражение

$$\alpha^r$$

имеет смысл при всяком положительном действительном α и любом рациональном значении r.

Степенная функция $f(x) = x^r$ (точнее, ее **арифметическая ветвь**) определена этим для всех рациональных значений r и любых положительных значений аргумента x.

Обычным путем доказываются *монотонность* и *непрерывность* этой функции.

Если

$$x_1 < x_2, \text{ то } x_1^r < x_2^r \text{ при } r > 0 \text{ и } x_1^r > x_2^r \text{ при } r < 0.$$

Для натуральных значений показателя r это вытекает из соответствующих свойств операции умножения. Остается рассмотреть случай дробного показателя $r = \frac{m}{n} > 0$. Если $x_1 < x_2$, то, допуская, что $x_1^{\frac{m}{n}} \geqslant x_2^{\frac{m}{n}}$, найдем, возвышая в n-ую степень, что $x_1^m \geqslant x_2^m$, что возможно лишь при $x_1 \geqslant x_2$, вопреки условию. Монотонность функции x^r этим доказана.

Для доказательства свойства *непрерывности* можно поступить, опираясь на формулировку, данную на странице 176 (§ 52), так.

Пусть (A, B) произвольный (положительный) интервал, заключающий число a^r. Докажем, что при достаточно близких к $a > 0$ значениях x в тот же интервал попадут и все значения x^r степенной функции. Действительно, определяя достаточную близость x к a с помощью неравенств

$$\sqrt[r]{A} < x < \sqrt[r]{B}$$

[что законно, так как в силу условия $A < a^r < B$ число a лежит в том же интервале $\left(\sqrt[r]{A}, \sqrt[r]{B}\right)$], мы найдем, как и требовалось, что

$$A < x^r < B.$$

Для перехода к обычной форме записи с помощью ε и δ достаточно положить $A = a^r - \varepsilon$, $B = a^r + \varepsilon$ и $A^{\frac{1}{r}} = a - \delta_1$, $B^{\frac{1}{r}} = a + \delta_2$. Выбрав наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 и обозначив его через δ, найдем что при $|x - a| < \delta$ будет $|x^r - a^r| < \varepsilon$.

Наконец, легко видеть, что

$$x^r \cdot y^r = (xy)^r.$$

Действительно,

$$\left(x^{\frac{m}{n}} \cdot y^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^m y^m = (xy)^m,$$

так что

$$x^{\frac{m}{n}} \cdot y^{\frac{m}{n}} = (xy)^{\frac{m}{n}}.$$

Это соотношение выражает основное *функциональное свойство* степенной функции $f(x) = x^r$, которое можно записать так

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

(ср. § 69).

§ 63. Показательная функция.

1. Перейдем теперь к распространению определения **показательной** функции a^x на все действительные (в том числе *иррациональные*) значения *показателя* x.

Заметим, прежде всего, что функция a^r обладает свойством монотонности по отношению к *рациональным* значениям показателя r, т. е. если

$$r_1 < r_2,$$

то, при $a > 1$ также и

$$a^{r_1} < a^{r_2}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что это соотношение, очевидно, имеет место для целых значений r_1 и r_2. Если же $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ и $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$, то $p_1 q_2 < q_1 p_2$ и, стало быть,

$$a^{r_1} = \left(a^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{p_1 q_2} < \left(a^{\frac{1}{q_1 q_2}}\right)^{q_1 p_2} = a^{r_2}.$$

Это свойство монотонности наводит на мысль определить значение a^β показательной функции *для любого действительного показателя* β, определяемого сечением $r \leqslant \beta \leqslant r'$, как единственное число γ, удовлетворяющее (при $a > 1$) неравенствам

$$a^r \leqslant \gamma \leqslant a^{r'}.$$

Для того чтобы принять такое определение, мы должны прежде всего убедиться в том, что условия основной леммы § 59 здесь выполнены. Мы опираемся при этом на замечание конца § 61, так как a^r и $a^{r'}$, вообще говоря, не рациональные, а какие-то действительные числа.

Так как $a^r < a^{r'}$, то остается только доказать, что при достаточной малости разности $r' - r$ разность $a^{r'} - a^r$ может быть сделана сколь угодно малой. При этом, выбрав произвольно число $r_0' > \beta$ из правого класса сечения, определяющего β, мы можем (примечание 2, стр. 197) ограничиться рассмотрением лишь тех r и r', которые меньше r_0', и, соответственно, лишь тех a^r и $a^{r'}$, которые меньше числа $B = a^{r_0'}$.

Заметив это, напишем

$$a^{r'} - a^r = a^r(a^{r'-r} - 1) < B(a^{r'-r} - 1) < B(a^{\frac{1}{n}} - 1),$$

коль скоро

$$r' - r < \frac{1}{n}.$$

С другой стороны, полагая $k = a^{\frac{1}{n}} - 1$, найдем

$$a = (1 + k)^n > 1 + nk,$$

как это следует из разложения по биному Ньютона.

Отсюда находим

$$k = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Так как число n можно выбрать сколь угодно большим, т этим и доказано, что разность

$$a^{r'} - a^r$$

может быть сделана сколь угодно малой.

Итак, a^β есть по определению единственное действительное число, удовлетворяющее (при $a > 1$) неравенствам

$$a^r \le a^\beta \le a^{r'},$$

где

$$r < \beta < r'.$$

Неравенство $(1+k)^n > 1 + nk$ можно доказать индуктивно, не прибегая к биному Ньютона. Для $n = 2$ имеем

$$(1+k^2) = 1 + 2k + k^2 > 1 + 2k.$$

Допустив, что $(1+k)^n > 1 + nk$ и умножая на $1+k$, найдем

$$(1+k)^{n+1} > (1+nk)(1+k) = 1 + (n+1)k + nk^2 > 1 + (n+1)k.$$

Заметим, впрочем, что можно было бы обойтись и без установления этого неравенства, ведя рассуждения так же, как на странице 150.

Если $a > 1$, то из неравенств $a^n < a^{n+1}$ следует, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$ либо существует и равен конечному числу l, либо равен

Переходя в тождестве

$$a^{n+1} = a \cdot a^n$$

к пределу при $n \to \infty$ в первом предположении, найдем

$$l = al,$$

что при $a > 1$ невозможно. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty.$$

Так как, аналогично, $a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}$, то при $a > 1$ можно утверждать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$ существует и равен либо 1, либо числу $\lambda > 1$. В этом последнем предположении найдем

$$a^{\frac{1}{n}} > \lambda > 1$$

и, стало быть,

$$a > \lambda^n,$$

что, по доказанному выше, невозможно, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = \infty$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$, откуда и вытекает нужное нам заключение о том, что разность

$$a^{\frac{1}{n}} - 1$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом n.

2. Нетрудно теперь установить для любых действительных значений показателя основные свойства показательной функции.

1) *Монотонность.*

Если $\beta<\gamma$, то при $a>1$ из неравенства

$$\beta<r<\gamma,$$

где r — *рациональное* число, будет, согласно определению чисел a^β и a^γ, следовать, что

$$a^\beta<a^r<a^\gamma.$$

2) *Непрерывность.* Если $\beta-\gamma<\frac{1}{n}$ и $a^\gamma<B$, то

$$a^\beta-a^\gamma=a^\gamma(a^{\beta-\gamma}-1)<B\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Последнее же выражение может быть сделано меньшим любого наперед заданного $\varepsilon>0$, коль скоро n достаточно велико, как это только что было показано.

3) *Основное функциональное свойство* показательной функции

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},$$

непосредственно вытекающее из ее определения для целых значений m и n, распространяется обычным способом на все рациональные значения показателя:

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{p_1}{q_1}}=a^{\frac{pq_1}{qq_1}}\cdot a^{\frac{p_1q}{qq_1}}=\left(a^{\frac{1}{qq_1}}\right)^{pq_1}\cdot\left(a^{\frac{1}{qq_1}}\right)^{p_1q}=$$
$$=\left(a^{\frac{1}{qq_1}}\right)^{pq_1+p_1q}=a^{\frac{p}{q}+\frac{p_1}{q_1}}.$$

Это свойство мы распространим теперь на случай *любых* действительных значений показателя.

Перемножая неравенства

$$a^r\leqslant a^\beta\leqslant a^{r'}$$

и

$$a^s\leqslant a^\gamma\leqslant a^{s'},$$

где (R, R') и (S, S') — сечения, определяющие соответственно β и γ, найдем

$$a^r\cdot a^s\leqslant a^\beta\cdot a^\gamma\leqslant a^{r'}\cdot a^{s'},$$

или

$$a^{r+s}\leqslant a^\beta\cdot a^\gamma\leqslant a^{r'+s'}. \qquad (*)$$

Но, по определению суммы действительных чисел β и γ

$$r+s\leqslant\beta+\gamma\leqslant q'+s',$$

и так как, по определению возвышения в действительную степень, $a^{\beta+\gamma}$ есть *единственное* число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^{r+s}\leqslant a^{\beta+\gamma}\leqslant a^{r'+s'},$$

то из неравенств (*) заключаем, что

$$a^{\beta} \cdot a^{\gamma} = a^{\beta+\gamma}.$$

На значении этого основного функционального свойства показательной функции $f(x) = a^x$, которое можно записать так

$$f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$$

мы остановимся подробнее в § 67.

§ 64. Логарифмическая функция.

Как известно, равенство

$$\beta = \log_a \gamma$$

означает, что

$$a^{\beta} = \gamma.$$

Полагая $a > 1$, докажем, что в системе действительных чисел для всякого положительного действительного значения γ существует такой показатель β.

С этой целью рассмотрим сечение (R, R') области рациональных чисел, определяемое неравенствами

$$a^r \leqslant \gamma < a^{r'}.$$

Всякое рациональное число r удовлетворяет одному из неравенств $a^r \leqslant \gamma$ или $a^r > \gamma$ и, стало быть, принадлежит к одному из классов R или R'. При этом из $a^r < a^{r'}$ вытекает, в силу доказанной в § 63 монотонности показательной функции, что $r < r'$, так что все числа класса R меньше всех чисел класса R'. Итак, мы действительно имеем дело с дедекиндовым сечением (R, R').

Пусть это сечение определяет действительное число β. Докажем, что оно и есть искомый показатель.

В самом деле, по определению (стр. 209), a^{β} есть единственное число, удовлетворяющее неравенствам

$$a^r \leqslant a^{\beta} \leqslant a^{r'}.$$

Но тем же неравенствам по построению удовлетворяет и число γ (ибо, если $\gamma < a^{r'}$, то и подавно, можно написать $\gamma \leqslant a^{r'}$). Стало быть,

$$\gamma = a^{\beta}$$

и существование логарифма доказано.

Проведенному здесь теоретическому построению соответствует метод приближенного нахождения числа β путем испытания рациональных чисел s в отношении их принадлежности к тому или другому классу сечения (R, R') на основе неравенств $a^s \leqslant \gamma$ и $a^s > \gamma$. Применяя методы, указанные на страницах 170—171, мы можем таким путем найти приближенное значение логарифма с любой степенью точности.

Основные свойства логарифмической функции: *монотонность, непрерывность и функциональное свойство*

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$$

непосредственно вытекают из соответствующих свойств показательной функции.

Действительно, неравенство $x<y$, т. е, $a^{\log_a x}<a^{\log_a y}$ возможно (при $a>1$, как мы и предполагаем) лишь при выполнении неравенства того же смысла для показателей, т. е. при $\log_a x<\log_a y$. Точно так же $x>y$ влечет за собой неравенство $\log_a x>\log_a y$. Монотонность логарифмической функции этим установлена.

Докажем теперь, что разность $\log_a x-\log_a y$ будет сколь угодно малой, если рассматривать значения x и y, достаточно мало отличающиеся друг от друга, но не слишком близкие к нулю — точке разрыва логарифмической функции, т. е. такие, что скажем

$$x>y>\Delta>0,$$

где Δ — некоторое фиксированное число.

При этом условии разность

$$\log_a x-\log_a y=\log_a\frac{x}{y}$$

будет меньше $\frac{1}{n}$, коль скоро

$$\frac{x}{y}<a^{\frac{1}{n}},$$

или

$$\frac{x}{y}-1=\frac{x-y}{y}<a^{\frac{1}{n}}-1.$$

Последнее же неравенство будет, очевидно, иметь место при

$$x-y<\Delta\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Итак, если разность $x-y$ *так мала, как только что указано,* то разность $\log_a x-\log_a y$ будет меньше $\frac{1}{n}$. Так как n может быть выбрано сколь угодно большим, то этим и установлена *непрерывность* логарифмической функции [притом, очевидно, *равномерная* в интервале $(\Delta,+\infty)$].

Наконец, так как $a^\beta\cdot a^\gamma=a^{\beta+\gamma}$, то, полагая здесь $a^\beta=x$, $a^\gamma=y$, находим, как обычно, что $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$. Это равенство выражает *основное функциональное свойство* логарифмической функции $f(x)=\log_a x$, а именно

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

Как раз на этом свойстве логарифмической функции и основываются ее известные приложения к практике вычислений. В этой связи естественно поставить вопрос: а нельзя ли построить какие-либо иные функции f, обладающие тем же свойством и потому могущие выполнять в отношении практики вычислений ту же вспомогательную роль, что и логарифмическая функция? При этом могло бы случиться, что такие функции в каких-либо отношениях заслуживали бы предпочтения перед функцией $\log_a x$. Ответ на поставленный вопрос будет нами дан в § 67.

§ 65. Общие теоремы о взаимно-обратных функциях.

1. Функции $\sqrt[n]{x}$ и x^n, a^x и $\log_a x$ суть взаимно-обратные функции. Доказательство существования корня $\sqrt[n]{x}$ есть, следовательно, не что иное, как построение функции, обратной x^n, а доказательство существования логарифма есть построение функции, обратной показательной функции a^x. В условиях, когда для функций x^n и a^x доказаны монотонность и непрерывность, можно эти построения рассматривать как частный случай следующей общей теоремы.

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ однозначна, монотонна и непрерывна в интервале (a, b), то существует* **обратная** *функция $x=\varphi(y)$, однозначная, монотонная и непрерывная в интервале $f(a)$, $f(b)$.* При этом, по определению обратной функции,

$$f[\varphi(y)]=y \quad \text{и} \quad \varphi[f(x)]=x$$

при всех значениях x в (a, b) и y в $[f(a), f(b)]$.

Без нарушения общности допустим, что $f(x)$ возрастающая функция.

На основании теоремы § 52 (стр. 176) о том, что всякая непрерывная в интервале (a, b) функция принимает в нем все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, можно утверждать, что каждому значению y в интервале $(f(a), f(b))$, удовлетворяющему, стало быть, неравенствам

$$f(a)\leqslant y\leqslant f(b),$$

соответствует значение x из интервала (a, b), для которого $f(x)$ принимает значение, равное y, так что

$$f(x)=y.$$

Поэтому, можно сказать, что x в интервале $(f(a), f(b))$ определится как функция y

$$x=\varphi(y)$$

так, что
$$f(\varphi(y))=y.$$

Функция $\varphi(y)$ *однозначная*, так как при $x<x'$, по условию монотонности, $f(x)<f(x')$, и, стало быть, одному и тому же y

не могут соответствовать два различных значения x и x' из интервала (a, b).

Далее, если $y<y'$ то и $\varphi(y)<\varphi(y')$, ибо, допуская противное, т. е., полагая

$$x=\varphi(y)\quad x'=\varphi(y'),$$

мы нашли бы $f(x)\geq f(x')$, т. е. $y\geq y'$, что противоречит условию $y<y'$. Значит, функция $\varphi(y)$ *монотонно возрастающая.*

Наконец, для доказательства непрерывности применим установленное на странице 176 взаимоотношение между неравенствами для аргумента и для значений функции в качестве критерия непрерывности.

Пусть y_0 есть некоторое значение из интервала $[f(a), f(b)]$ и (A, B) *сколь угодно малая часть* интервала (a, b), заключающая внутри себя значение $x=\varphi(y_0)$.

Докажем, что значения функции $\varphi(y)$ попадают внутрь этого интервала, так что

$$A<\varphi(y)<B,$$

коль скоро y лежит *в достаточно узкой* окрестности (c, d) числа y_0.

Действительно, достаточно положить

$$c=f(A)\quad \text{и}\quad d=f(B).$$

Так как $A<\varphi(y_0)<B$, то

$$c=f(A)<y_0<f(B)=d,$$

т. е. интервал (c, d) есть некоторая окрестность числа y_0. Пользуясь еще раз доказанной уже монотонностью функции $\varphi(x)$, найдем, что из неравенства

$$c<y<d$$

действительно следует требуемое неравенство

$$A<\varphi(y)<B.$$

Стало быть, при $y\to y_0$ и $\varphi(y)\to\varphi(y_0)$, т. е. функция $\varphi(y)$ *непрерывна.*

2. Заметим, что за исключением доказательства существования вся остальная часть утверждения доказывается на основании совершенно элементарного использования свойства монотонности.

Выделение части утверждений, не опирающейся на теорему о промежуточных значениях непрерывной функции, в форме отдельной, приведенной ниже теоремы, может поэтому играть известную роль с методической точки зрения, облегчая, в частности, доказательство непрерывности целого ряда функций в тех случаях, когда существование прямой и обратной функций и монотонность одной из них установлены или приняты по тем или иным соображениям без аналитического доказательства.

Теорема. *Если прямая и обратная функции* $y=f(x)$ *и* $x=\varphi(y)$ *определены в соответствующих интервалах* (a, b) и $(f(a), f(b))$, *причем прямая функция монотонная, то* 1) *обратная функция также монотонна и* 2) *обе функции и прямая и обратная непрерывны.*

Для установления этой теоремы достаточно повторить соответствующие части предыдущего доказательства в применении к функциям $\varphi(y)$ и $f(x)$.

Отметим, в частности, что на основании этой теоремы, либо что с методической точки зрения предпочтительнее — повторением соответствующих рассуждений, можно доказать непрерывность функций x^n и $\sqrt[n]{x}$, a^x и $\log_a x$, $\frac{1}{x}$ (прямая и обратная функции совпадают), $\sin x$ и $\arcsin x$ и т. п., если опираться на существование обеих функций каждой пары и монотонность одной из них.

Так, например, предложение $\lim \frac{1}{x} = 1 : \lim x$ при $\lim x \neq 0$ можно доказать так. Пусть $x \to a > 0$. Тогда и $\frac{1}{a} > 0$. Значения $\frac{1}{x}$ будут заключаться в сколь угодно малом интервале (A, B)

$$0 < A < \frac{1}{a} < B,$$

окружающем значение $\frac{1}{a}$, коль скоро x будет лежать в интервале $\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right)$, так что

$$\frac{1}{B} < x < \frac{1}{A}.$$

Так как интервал $\left(\frac{1}{B}, \frac{1}{A}\right)$ представляет собой некоторую окрестность числа a (искомый *достаточно малый* интервал), то этим и доказано, что

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to a} x}.$$

Это предложение позволяет доказывать вполне строго теорему о пределе дроби на основании теоремы о пределе произведения, не смазывая, как это часто делается, вопроса о существовании предела дроби.

Способ смазывания, о котором идет речь, таков. $\frac{u}{v} = w$, стало быть, $u = vw$ и „значит" $\lim u = \lim v \cdot \lim w$, откуда $\lim w = (\lim u) : (\lim v)$. Слово „значит" здесь именно ничего и не значит, так как в теореме о пределе произведения одно из *усло-*

вий теоремы заключается в том, что пределы сомножителей существуют, а здесь как раз и неизвестно, существует ли предел w или нет. Подобного рода обманы приучают учащегося поверхностно относиться к логическому обоснованию своих заключений и потому при любых условиях вредны и недопустимы. Можно принять что-нибудь на веру, но обязательно *знать*, что доказано а что нет.

§ 66. Замечания о многозначных операциях.

1. Мы рассмотрели показательную функцию a^x при положительных значениях a. В элементарном преподавании иногда используют странное поведение выражения a^x при $a<0$ (например при $a=-1$) для рациональных значений x в качестве примера *разрывной* функции. Такая трактовка вопроса не соответствует сути дела и только вводит учащихся в заблуждение. Полное исследование функции a^x, так же как и обратной функции $\log_a x$, для любых значений a и x возможно провести лишь в *комплексной* области. В теории функций комплексного переменного показательную функцию рассматривают как непрерывную, но *бесконечно многозначную* функцию. Те отдельные точки, которые получаются на графике функции a^x при $a<0$, следует рассматривать как следы в действительной области *различных ветвей* непрерывной в комплексной области многозначной функции a^x (см. § 88).

Следует заметить также, что, по тем же соображениям, степенная функция x^α для иррациональных α причисляется к числу бесконечно многозначных трансцендентных функций. Определение всех ветвей этой функции и исследование их проводится в теории функции комплексного переменного на основе формулы $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$.

2. Подчеркнем еще, что в *действительной области* следует соблюдать некоторую осторожность в применениях общих функциональных свойств показательной, степенной и логарифмической функций к частным случаям, имея в виду, что указанные функции бывают определены лишь для положительных значений своих аргументов.

Так, следует писать не $\sqrt{x^2}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$, а

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|x|}$$

и не $\log(x^2)=2\log x$, а

$$\log(x^2)=2\log|x|$$

и т. п.

В связи с рассмотрением многозначных операций следует обратить внимание на смысл употребляемых при этом обычно *обозначений.*

Поставим вопрос в общей форме.

Пусть F есть знак однозначной прямой операции, а Φ знак соответствующей *многозначной* обратной операции. Положим

$$F(x)=y.$$

В этом случае выражение

$$\Phi(y)$$

может иметь троякий смысл.

1) $\Phi(y)$ может обозначать ***совокупность всех*** значений x, удовлетворяющих уравнению $F(x)=y$, т. е. совокупность всех значений многозначной функции Φ. Такой именно смысл имеет знак $\sqrt{\ }$ в формуле

$$\sqrt{4}=\pm 2.$$

2) $\Phi(y)$ может обозначать ***одно какое-то*** из значений x, удовлетворяющих уравнению $F(x)=y$, т. е. одно какое-то значение многозначной функции Φ. Такой именно смысл имеет знак $\sqrt{\ }$ в формуле

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Здесь нельзя поставить знак $\pm$, так как это будет означать, что можно взять *и* тот *и* другой знак, что неверно; нельзя подразумевать и положительные значения корня, так как это тоже, вообще говоря, неверно.

3) $\Phi(y)$ может обозначать одно, *вполне определенное* значение x, удовлетворяющее уравнению $F(x)=y$, т. е. одну ***определенную***, каким-то образом заранее выделенную ***ветвь*** многозначной функции $\Phi(y)$. Такой смысл имеет знак $\sqrt{\ }$ в формуле

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а также в подавляющем большинстве общеупотребительных формул и уравнений, где под $\sqrt{x}$ обычно подразумевается положительное (арифметическое) значение корня. Заметим, что, несмотря на это, вместо правильной формулы

$$\sqrt{x^2}=|x|,$$

часто пишут все же формулу $\sqrt{x^2}=x$, верную лишь при истолковании знака $\sqrt{\ }$ по пункту 2).

Для избежания недоразумений можно в случаях, когда это особенно важно,

a) вводить особое знакоположение для обозначения выделенной главной ветви многозначной функции, например, знак $\sqrt{\ }$ для арифметического значения корня, знак $\arcsin x$ для главной ветви многозначной функции $\operatorname{Arcsin} x$ и др., сохраняя за символом $\Phi(y)$ в его обычной форме общее значение *совокупности всех* значений x;

b) пользоваться знаком *включения* „$\subset$“ вместо знака „$=$“ в случаях, указанных в пункте 2).

Так, например, можно написать в общем случае

$$F(\Phi(y)) = y,$$

так как *всякое* значение $x = \Phi(y)$ по определению удовлетворяет уравнению $F(x) = y$.

Однако, $\Phi(F(x)) \neq x$, но

$$x \subset \Phi(F(x)), \tag{*}$$

так как при $F(x) = y$ знак $\Phi(F(x)) = \Phi(y)$ обозначает *не только* решение уравнения $F(x) = y$, равное *данному* значению x, но и *всякое другое* решение того же уравнения, которое может быть *и не равно* x. Формула (*) означает, таким образом, что x есть *одно из значений* многозначного символа $\Phi(F(x))$.

Таким образом, можно было бы написать

$$x \subset \sqrt{x^2}$$
$$\cos x \subset \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

и т. д., причем нужная ветвь многозначной функции в правой части таких соотношений может быть определена на основе соответствующих дополнительных сведений о значении x. Так если во второй формуле $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, то $\cos x = + \sqrt{1 - \sin^2 x}$, если же $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$, $\cos x = - \sqrt{1 - \sin^2 x}$ и т. д.

Двусторонние включения называют при этом иногда ***полными равенствами.*** Примером может быть следующее соотношение: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, которое при $a > 0$ и $b > 0$ можно читать и как $\sqrt{ab} \subset \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и как $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \subset \sqrt{ab}$.

Для наиболее часто встречающегося случая *квадратного* корня следует иметь в виду установившееся на практике и часто не оговариваемое соглашение обозначать главную, арифметическую, ветвь просто знаком $\sqrt{\ }$, совокупность всех значений знаком $\pm\sqrt{\ }$, а *под равенствами* указанного в пункте 2) типа всегда *разуметь соответствующие включения.*

То же положение имеет место вообще для корня четной степени, и совсем уже просто обстоит дело с корнями нечетной степени – до тех пор, пока мы не выходим из области действительных значений. В комплексной области положение осложняется и тут, действительно, были попытки ввести особые знаки (двойной, пересекающий себя знак корня) для совокупности всех значений многозначной функции $\sqrt[n]{x}$.

Читатель может проследить аналогичные обстоятельства и в применении к другим многозначным операциям, обратив, например, внимание на соотношение между знаками d и $\int$ в интегральном исчислении, и знаками $f(D)$ и $\frac{1}{f(D)}$ в операторной теории линейных диференциальных уравнений. В этой последней в особенности существенно отдавать себе отчет в том, имеет ли та или иная формула смысл равенства или включения.

§ 67. Функциональные уравнения, определяющие показательную, степенную и логарифмическую функции.

1. Как мы видели в § 63 (стр. 212), функция $f(x)=a^x$ удовлетворяет соотношению

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y). \tag{1}$$

Поставим теперь обратную задачу: найти *все* те непрерывные функции, для которых верно соотношение (1). Другими словами, нужно разрешить **функциональное уравнение** (1) относительно неизвестной функции f, причем найти не частное, а самое общее решение этого уравнения.

С этой целью положим в соотношении (1) $x=y=1$. Тогда

$$f(2)=[f(1)]^2,$$

откуда, полагая в (1) $y=2$; $x=1$, получим

$$f(3)=[f(1)]^3.$$

Вообще, применяя формулу (1) $n-1$ раз, найдем

$$f(x_1+x_2+\ldots+x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\ldots f(x_n),$$

и, полагая здесь $x_1=x_2=\ldots=x_n=x$, получим

$$f(nx)=[f(x)]^n. \tag{2}$$

При $x=1$ это обратится в

$$f(n)=[f(1)]^n.$$

Итак, для *целых положительных* значений аргумента x функция $f(x)$ есть показательная функция с основанием $f(1)$.

Полагая в формуле (2) $x=\frac{1}{n}$, найдем

$$f(1)=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n, \quad \text{или} \quad f\left(\frac{1}{n}\right)=\left[f(1)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Далее, заменяя в той же формуле (2) x на $\frac{1}{m}$ и используя только что полученный результат, найдем

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\left[f\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n=\left[f(1)\right]^{\frac{n}{m}}.$$

Наконец, при $y=0$ из (1) следует

$$f(x)\cdot f(0)=f(x),$$

так, что

$$f(0)=1.$$

Поэтому при $y=-x$ из (1) следует

$$f(x)\cdot f(-x)=1,$$

или $$f(-x)=\frac{1}{f(x)}.$$
Таким образом
$$f\left(-\frac{n}{m}\right)=\frac{1}{f\left(\frac{n}{m}\right)}=\left[f(1)\right]^{-\frac{n}{m}}.$$
Формула
$$f(r)=[f(1)]^r$$
доказана *для всех рациональных значений* r.

Для того чтобы распространить ее на иррациональные и, таким образом, на все действительные значения x, нам придется использовать добавочное требование *непрерывности* искомой функции $f(x)$.

Следуя пути, намеченному на страницах 170—171, мы можем для всякого иррационального числа α построить последовательность *рациональных* чисел r_n, стремящуюся к пределу α, так что
$$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha.$$

Так как для непрерывной функции предел функции равен функции от предела, то мы найдем
$$f(\alpha)=f(\lim r_n)=\lim f(r_n)=\lim\,[f(1)]^{r_n}=$$
$$=f(1)^{\lim r_n}=[f(1)]^{\alpha}.$$

Этим и доказано, что функциональное уравнение (1) в соединении с требованием непрерывности *однозначно* определяет вид функции, именно $f(x)$ есть *показательная функция* с основанием $f(1)$. За $f(1)$ можно при этом принять любое положительное число.

Свойство непрерывности и соотношение
$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$$
являются, таким образом, *характеристическими* для показательной функции.

2. К только что рассмотренному вопросу сводятся и решения функциональных уравнений § 62 и 64.

Так, полагая в функциональном уравнении
$$f(xy)=f(x)+f(y) \tag{3}$$
$z=f(x)$ и $u=f(y)$ и рассматривая обратную функцию φ, так что $x=\varphi(z)$ и $y=\varphi(u)$, найдем
$$\varphi(z)\cdot\varphi(u)=xy=\varphi[f(x)+f(y)]=\varphi(z+u),$$
так, что по доказанному $\varphi(z)$ есть показательная, а, стало быть, обратная функция $f(x)$ есть некоторая логарифмическая функция $\log_a x$.

Решение можно получить, и не рассматривая обратной функции, а следуя сначала тому же пути, что и выше. Именно, из (3) легко вывести, что

$$f(x^2)=2f(x),\ \dots,\ f(x^n)=nf(x)$$

и вообще

$$f(x^r)=rf(x)$$

для рациональных значений r. Переходя к пределу при $\alpha=\lim r$, из требования непрерывности заключаем отсюда, что

$$f(x^\alpha)=\alpha f(x) \tag{4}$$

для любого действительного значения α.

При $x=1$ найдем $f(1)=0$; далее из (3) вытекает, что если только $f(x)$ не есть тождественный нуль, то $f(x)\neq 0$ при $x\neq 1$. Отсюда следует, что выражение

$$\alpha f(x)$$

при *фиксированном* $x\neq 1$ принимает при изменении α все действительные значения. Выбрав такое значение α, при котором, в частности, $\alpha f(x)=1$, и полагая $x^\alpha=a$, найдем из (4), что $f(a)=1$. Добившись этого, по той же формуле (4) получим

$$f(a^\alpha)=\alpha=\log_a(a^\alpha)$$

так, что, вообще,

$$f(z)=\log_a z.$$

Отрицательных значений аргумента z мы при этом не рассматриваем.

Итак, логарифмическая функция есть единственная непрерывная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению $f(xy)=f(x)+f(y)$. Этим и дан ответ на вопрос, поставленный в конце § 66.

3. Функциональное уравнение § 64

$$f(xy)=f(x)\cdot f(y) \tag{5}$$

приводится к предыдущему, если положить

$$\log_b f(x)=\varphi(x).$$

Тогда найдем

$$\varphi(xy)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

и, стало быть,

$$\varphi(x)=\log_a x \quad \text{или} \quad \log_b f(x)=\log_a x,$$

откуда

$$f(x)=b^{\log_a x}=a^{\log_a b\cdot\log_a x}=x^\alpha,$$

где через α обозначено произвольное постоянное число $\log_a b$.

Можно рассуждать и иначе. Из уравнения (5) следует, как легко убедиться,

$$f(x^n)=[f(x)]^n$$

и, вообще, $$f(x^z) = [f(x)]^z \tag{6}$$

для любого действительного значения z.

Полагая $x = a$, где a — постоянное и $f(a) = b = a^\alpha$, где α есть $\log_a b$, найдем из формулы (6) для $y = a^z$, что

$$f(y) = f(a^z) = [f(a)]^z = b^z = a^{\alpha z} = y^\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Мы ограничились и здесь положительными значениями y.

Итак, функциональные соотношения для степенной, показательной и логарифмической функций в соединении с требованием непрерывности вполне характеризуют эти функции.

§ 68. Теорема Абеля об ассоциативных операциях.

1. Вернемся теперь к затронутому в конце § 45 вопросу и докажем одну теорему, относящуюся к ассоциативным операциям, доказанную при несколько иных условиях и другим путем еще Абелем (Abel). Построение, которое мы проведем здесь, заключает в себе как частный случай теорию *степенной, показательной* и *логарифмической* функций и представляет собой не что иное, как применение к данному вопросу *общей теории измерения* (глава III).

Отправляясь от весьма общих предположений относительно изучаемых операций, мы выделяем тем самым *основной элемент* в построении операций различных ступеней, в частности и в теории показательной и логарифмической функций. В этом и заключается интерес, представляемый излагаемой ниже теорией с методологической точки зрения.

Рассмотрим однозначную непрерывную функцию двух переменных (операцию ω)

$$\gamma = \omega(\alpha, \beta),$$

где все три переменные γ, α и β могут принимать значения, принадлежащие интервалу

$$(E, U),$$

один или оба конца которого могут быть и бесконечными.

Пусть функция $\omega(\alpha, \beta)$ монотонна относительно обоих аргументов, так что

$$\omega(\alpha, \beta) < \omega(\alpha', \beta')$$

при $\alpha < \alpha'$ и $\beta \leq \beta'$ и при $\beta < \beta'$ и $\alpha \leq \alpha'$.

Далее, пусть

$$\omega(\alpha, E) = \omega(E, \alpha) = \alpha,$$
$$\omega(\alpha, U) = \omega(U, \alpha) = U.$$

при всяком α и

$$\omega(\alpha, \beta) > \alpha, \qquad \omega(\beta, \alpha) > \alpha$$

при $$E<\beta<U.$$

Для краткости эти свойства мы будем выражать, говоря, что операция ω обладает свойством **двоякой монотонности** в интервале E, U.

Если сравнивать операцию ω с операцией умножения, то можно сказать, что число E играет роль единицы, а U — роль нуля или бесконечности.

Мы назовем, далее, операцию $\omega(\alpha, \beta)$ **ассоциативной**, если

$$\omega[\omega(\alpha, \beta), \gamma]=\omega[\alpha, \omega(\beta, \gamma)]$$

для всех значений α, β и γ.

Для краткости в дальнейшем, основываясь на этом свойстве, будем писать

$$\omega(\alpha, \beta)=(\alpha, \beta), \quad \omega[\omega(\alpha, \beta), \gamma]=(\alpha, \beta, \gamma)$$

и, вообще,

$$\omega[(\alpha, \beta, \ldots, \gamma), \delta]=(\alpha, \beta, \ldots, \gamma, \delta).$$

Коммутативность операции $\omega(\alpha, \beta)$ нет необходимости вносить в условия нижеследующей теоремы, так как это свойство будет вытекать из остальных требований, налагаемых на функцию $\omega(\alpha, \beta)$.

Теорема, о которой идет речь, выражает следующий факт.

Всякая двояко монотонная, непрерывная и ассоциативная операция $\omega(\alpha, \beta)$ относительно двух аргументов α, β может быть приведена к операции сложения с помощью соответствующей непрерывной и монотонной функции $f(x)$ одного аргумента:

$$f[\omega(\alpha, \beta)]=f(\alpha)+f(\beta).$$

Функция f играет, таким образом, по отношению к операции ω ту же роль, какую функция log играет по отношению к умножению $\omega(\alpha, \beta)=\alpha\cdot\beta$.

Положив в общем случае $\gamma=\omega(\alpha, \beta)$, можно написать:

$$f(\gamma)=f(\alpha)+f(\beta).$$

В этом смысле можно сказать, что при преобразовании тройки чисел α, β и γ с помощью функции f в тройку чисел $f(\alpha)$, $f(\beta)$ и $f(\gamma)$ операция ω переходит в операцию сложения или **„отображается на сложение“**.

Теорема выражает, таким образом, тот факт, что никаких других, обладающих одновременно перечисленными свойствами операций, кроме *непрерывных отображений операции сложения*, не существует.

2. Приступая теперь к доказательству, положим

$$[1]\,\alpha=\alpha; \quad [2]\,\alpha=\omega(\alpha, \alpha)=(\alpha, \alpha)$$

и вообще

$$[n]\,\alpha=\omega([n-1]\,\alpha, \alpha)=(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha).$$

В последней скобке n аргументов, равных α. Функция

$$\varphi(\alpha)=[n]\,\alpha$$

определена и непрерывна при $E<\alpha<U$.

Далее, в силу двоякой монотонности операции ω, функция $\varphi(\alpha)$ монотонна по отношению к аргументу α, а также и по отношению к аргументу n, так что

$$\varphi(\alpha)<\varphi(\alpha') \quad \text{при} \quad \alpha<\alpha'$$

и

$$[n]\,\alpha<[n+1]\,\alpha<U.$$

При этом, очевидно, для всякого n имеем

$$\varphi(E)=E$$

и

$$\varphi(U)=U.$$

Отсюда следует, что при изменении α от E до U непрерывная и монотонная функция $\varphi(\alpha)=[n]\,\alpha$ *принимает все значения* β между E и U, и потому (§ 67) существует определенная в том же интервале непрерывная *обратная* функция

$$\alpha=\psi(\beta),$$

т. е. можно найти такое α, что

$$[n]\,\alpha=\beta.$$

Это значение α будем обозначать знаком

$$\alpha=\left[\frac{1}{n}\right]\beta,$$

распространяя этим определение оператора $[x]$ на дробные значения x и полагая, по определению

$$\left[\frac{m}{n}\right]\beta=[m]\left[\frac{1}{n}\right]\beta.$$

Отсюда, как и в § 45, выводим, что

$$[r]\,\alpha=[r']\,\alpha$$

тогда и только тогда, когда $r=r'$; далее, очевидно

$$[r_1+r_2]\,\alpha=\omega([r_1]\,\alpha,\ [r_2]\,\alpha).$$

3. Естественно теперь, следуя известным уже нам построениям § 32, 43 и 63, попытаться распространить определение оператора $[x]$ на все действительные значения x, определяя в этом случае

$$\beta=[x]\,\alpha$$

как *единственное* число, удовлетворяющее всем неравенствам

$$[r]\,\alpha\leqslant\beta\leqslant[r']\,\alpha,$$

при условии

$$r\leqslant x\leqslant r'.$$

Для того чтобы доказать возможность такого определения, необходимо проверить выполнение условий основной леммы § 61. Так как неравенство

$$[r]\,\alpha < [r']\,\alpha$$

непосредственно вытекает из условия $r < r'$ и монотонности операции $[r]\,\alpha$ относительно аргумента r, то остается лишь обнаружить, что разность

$$[r']\,\alpha - [r]\,\alpha$$

может быть сделана сколь угодно малой при достаточном сближении чисел r' и r.

Доказательство этого предложения основывается на соотношении, которое мы сейчас докажем и которое выражает собой не что иное, как аксиому Архимеда в применении к рассматриваемому здесь процессу измерения.

Из установленных выше неравенств

$$[n]\,\alpha < [n+1]\,\alpha < U$$

вытекает, что предел

$$\lim_{n\to\infty} [n]\,\alpha$$

либо равен ∞ (если $U=\infty$), либо, если последовательность $[n]\,\alpha$ ограничена, равен конечному числу $l \leqslant U$. Переходя в соотношении

$$[n]\,\alpha = \omega([n-1]\,\alpha, \alpha)$$

к пределу при $n\to\infty$, найдем

$$l = \omega(l, \alpha)$$

что возможно только при $l=U$.

Итак, во всех случаях

$$\lim_{n\to\infty} [n]\,\alpha = U.$$

Поэтому для всякого $\beta < U$ можно при любом $\alpha > E$ указать такое целое n, что $[n]\,\alpha > \beta$. Это и выражает аксиому Архимеда в применении к операции $[x]$.

Дальнейшие рассуждения можно было бы вести по образцу § 32 и 43, рассматривая операцию, обратную ω, т. е. полагая

$$\delta = \bar{\omega}(\beta_2, \beta_1)$$

при

$$\omega(\beta_1, \delta) = \beta_2.$$

Заметим попутно, что выполнимость и однозначность операции $\bar{\omega}$ свидетельствуют о том, что условия теоремы Абеля характеризуют систему чисел интервала (E, U) как *группу относительно операции* ω (см. стр. 130).

Следуя далее пути, аналогичному рассуждениям на странице 104, нетрудно показать, что при условиях $[r]\alpha \leqslant \beta_1 \leqslant [r']\alpha$ и $[r]\alpha \leqslant \beta_2 \leqslant [r']\alpha$ мы должны будем получить для определенного выше числа δ неравенство

$$[n]\delta < \alpha$$

при всяком n, что возможно лишь при $\delta = E$ и $\beta_1 = \beta_2$. Провести доказательство во всех деталях мы предоставляем читателю, выбирая здесь несколько иной способ изложения, примыкающий к построениям § 63.

Докажем, что при $E < \alpha < U$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n}\right]\alpha = E.$$

Действительно, так как

$$\left[\frac{1}{n}\right]\alpha > \left[\frac{1}{n+1}\right]\alpha > E$$

то существует

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n}\right]\alpha = \lambda \geqslant E.$$

Допуская, что $\lambda > E$, и полагая

$$\left[\frac{1}{n}\right]\alpha = \lambda_n,$$

найдем

$$\lambda_n > \lambda,$$

а потому

$$\alpha = [n]\lambda_n > [n]\lambda.$$

При $n \to \infty$ получим, в силу доказанного выше для случая $\lambda > E$ соотношения $\lim\limits_{n \to \infty} [n]\lambda = U$,

$$\alpha \geqslant U,$$

что невозможно.

Итак, $\lambda = E$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n}\right]\alpha = E.$$

В силу непрерывности функции ω отсюда следует, далее, что

$$\lim_{n \to \infty} \omega \left(\gamma, \left[\frac{1}{n}\right]\alpha\right) = \omega(\gamma, E) = \gamma.$$

Так как во всяком конечном интервале функция ω, по теореме § 55 главы VI, равномерно непрерывна, то отсюда следует возможность для всякого $\varepsilon > 0$ выбрать $\left[\frac{1}{n}\right]\alpha$ столь близким E или, что то же, *n настолько большим*, чтобы имело место неравенство

$$\left|\omega \left(\gamma, \left[\frac{1}{n}\right]\alpha\right) - \gamma\right| < \varepsilon$$

для всех γ, заключенных в каком-либо конечном интервале.

На этом основании мы можем утверждать, что при

$$r' - r < \frac{1}{n}$$

будет иметь место неравенство

$$[r']\alpha - [r]\alpha = \omega([r]\alpha, [r' - r]\alpha) - [r]\alpha < \omega\left([r]\alpha, \left[\frac{1}{n}\right]\alpha\right) - [r]\alpha < \varepsilon$$

Условия леммы § 59, таким образом, выполнены и неравенства

$$[r]\alpha \leqslant \beta \leqslant [r']\alpha$$

определяют единственное действительное число β. Мы и положим

$$\beta = [x]\alpha,$$

где x есть действительное число, определенное сечением (r, r').

Функция

$$F_\alpha(x) = [x]\alpha,$$

определенная, таким образом, для всех действительных значений x, будет, как легко видеть, монотонной относительно x функцией, принимающей при любом α все значения между E и U

Из неравенства

$$F_\alpha(r') - F_\alpha(r) < \varepsilon,$$

установленного выше при условии $r' - r < \frac{1}{n}$, вытекает, далее, что $F_\alpha(x)$ есть *непрерывная* функция аргумента x.

Пользуясь этим и переходя в доказанном выше для рациональных r_n и s_n соотношении

$$F_\alpha(r_n + s_n) = \omega([r_n]\alpha, [s_n]\alpha)$$

к пределу при $r_n \to x_1$ и $s_n \to x_2$, где x_1 и x_2 — любые действительные числа, найдем

$$F_\alpha(x_1 + x_2) = [x_1 + x_2]\alpha = \omega([x_1]\alpha, [x_2]\alpha).$$

В силу установленных только что свойств функции

$$y = F_\alpha(x)$$

в интервале $E < y < U$ можно определить *однозначную непрерывную и монотонную обратную функцию*

$$x = L_\alpha(y).$$

При этом, полагая

$$[x_1]\alpha = y_1 \quad \text{и} \quad [x_2]\alpha = y_2,$$

из только что полученного выражения для $F_\alpha(x_1 + x_2)$ найдем

$$x_1 + x_2 = L_\alpha([x_1 + x_2]\alpha) = L_\alpha[\omega(y_1, y_2)].$$

Так как

$$x_1 = L_\alpha(y_1) \quad \text{и} \quad x_2 = L_\alpha(y_2)$$

то, стало быть,

$$L_\alpha \omega(y_1, y_2) = L_\alpha(y_1) + L_\alpha(y_2). \qquad \text{(I)}$$

Этим и доказана теорема Абеля. Функция $f(x) = L_\alpha(x)$ и есть искомая функция одной переменной, отображающая операцию ω на сложение. Из формулы (I) следует, что операция ω обладает, как было уже упомянуто выше, свойством коммутативности.

Так как соотношение

$$x = L_\alpha(y)$$

по определению, равносильно

$$y = [x]\,\alpha,$$

то операция L_α осуществляет *измерение* числа y с помощью числа α на основе операции, обозначенной здесь знаком $[x]$ и связанной вышеуказанным образом с функцией ω.

Полагая $\omega(x, y) = x + y$, мы придем, очевидно к *обычному измерению*, в котором $L_\alpha(y)$ есть кратное отношение y к α

$$L_\alpha(y) = \frac{y}{\alpha}.$$

Полагая $\omega(x, y) = xy$, мы получим *логарифмическое измерение*

$$L_\alpha(y) = \log_\alpha y.$$

Функция $F_\alpha(x)$ есть в этом случае показательная функция с основанием α.

Из равенств $y = [x]\,\alpha$ и $\alpha = [z]\,\beta$ следует, как нетрудно показать, что

$$y = [x]\,[z]\,\beta = [xz]\,\beta,$$

или

$$L_\beta(y) = L_\alpha(y)\,L_\beta(\alpha).$$

4. Функция $f(y) = L_\beta(y)$, отображающая операцию $\omega(x, y)$ на сложение, определена в нашем построении лишь *с точностью до постоянного множителя* $k = L_\beta(\alpha)$.

Это заключение является вполне общим, т. е. всякая функция $f_1(x)$, отображающая $\omega(x, y)$ на сложение, отличается от $L_\alpha(x)$ лишь постоянным множителем. Это утверждение, вытекающее из самого метода построения отображающей функции, может быть обосновано и непосредственно путем следующего рассуждения.

Положим $f(x) = L_\alpha(x)$; обозначим обратную функцию через $F(x)$ и построим функцию

$$\varphi(x) = f_1(F(x)),$$

где f_1 есть *какая-то* непрерывная функция, обладающая требуемым свойством.

Из равенств
$$f[\omega(x, y)] = f(x) + f(v),$$
$$f_1[\omega(x, y)] = f_1(x) + f_1(y)$$

для функций $f(x) = u$; $f(y) = v$; $x = F(u)$; $y = F(v)$ и $\omega(x, y) = u + v$ будет следовать
$$f_1[F[\omega(x, y)]] = f_1[F(u)] + f_1[F(v)],$$
т. е.
$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Этому соотношению удовлетворяет (§ 67) только функция $\varphi(t) = kt$, где k — постоянная.

Стало быть,
$$f_1[F(t)] = kt$$
и при $t = f(x)$
$$f_1(x) = kf(x),$$

что и требовалось доказать.

Можно было бы, и не ссылаясь на § 67, опираться на то обстоятельство, что равенство
$$f_1[\omega(x, y)] = f_1(x) + f_1(y)$$
может служить исходным пунктом для построения функции f_1. Именно, мы получим
$$f_1[\omega(\alpha, \alpha)] = 2f_1(\alpha)$$
и, как легко убедиться, вообще
$$f_1([x]\,\alpha) = x f_1(\alpha).$$

Полагая при $y = [x]\,\alpha$, как и ранее, $f(y) = x$, мы и найдем
$$f_1(y) = f(y) \cdot f_1(\alpha) = kf(y).$$

Это показывает, что *построение оператора $[x]$ и соответствующей непрерывной функции $L_\alpha(x)$ с точностью до постоянного множителя однозначно определяется требованием отображения операции $\omega(x, y)$ на сложение.*

5. Легко видеть, что переход к **операциям следующей высшей ступени** возможен и в общем случае ассоциативной операции, удовлетворяющей условиям теоремы Абеля.

Действительно, определим операцию $\omega_1(x, y)$ равенством
$$L_\alpha[\omega_1(x, y)] = L_\alpha(x) \cdot L_\alpha(y). \qquad \text{(II)}$$

В каждом из двух интервалов
$$(E, \alpha) \text{ и } (\alpha, U)$$
эта функция $\omega_1(x, y)$ обладает тем же свойством, что и функция $\omega(x, y)$ в первоначальном интервале (E, U).

При этом число α играет роль числа E, а число E или U соответственно роль числа U.

Например, для случая перехода от сложения $\omega(x, y) = x +$ к умножению $\omega_1(x, y) = xy$ мы получим, полагая $\alpha = 1$, интервала (1, 0) и (1, ∞), в которых операция $\omega_1(x, y) = xy$ двояко монотонна.

В общем случае для доказательства достаточно заметить, что $L_a(a) = 1$, и потому $\omega_1(a, x) = x$. Далее,

$$\lim_{x \to E} L_a(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to U} L_a(x) = U,$$

откуда следует

$$\omega_1(E, x) = E \quad \text{и} \quad \omega_1(U, x) = U.$$

Можно положить либо $E_1 = a$, $U_1 = E$, либо $E_1' = a$; $U_1' = U$. В каждом из интервалов (E_1, U_1) и (E_1', U_1') функция ω_1 двояко монотонна, ибо при $x < a$

$$L_a(x) < 1,$$

а при $x > a$

$$L_a(x) > 1,$$

так что

$$\omega_1(x, y) < y \quad \text{при} \quad x < a$$

и

$$\omega_1(x, y) > y \quad \text{при} \quad x > a.$$

Свойство ассоциативности непосредственно вытекает из ассоциативности операции умножения.

Далее, операция ω_1 *дистрибутивна относительно* ω.

Действительно,

$$\begin{aligned} L_a(\omega_1(\omega(x, y), z)) &= L_a\,\omega(xy) \cdot L_a(z) = \\ = \{L_a(x) + L_a(y)\}\,L_a(z) &= L_a(x) \cdot L_a(z) + L_a(y) \cdot L_a(z) = \\ &= L_a(\omega_1(x, z)) + L_a(\omega_1(y, z)) = \\ &= L_a(\omega(\omega_1(x, z))), \end{aligned}$$

т. е.

$$\omega_1(\omega(x, y), z) = \omega(\omega_1(x, z), \omega_1(y, z)).$$

6. Полагая $\omega(x, y) = x \cdot y$, мы придем к операции третьей ступени

$$\omega_1(x, y) = a^{\log_a x \cdot \log_a y} = x^{\log_a y} = y^{\log_a x},$$

обладающей свойством ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности по отношению к умножению.

Эта операция отображается на сложение с помощью *повторного логарифма*

$$f(x) = \log_a \log_a x.$$

Продолжая аналогичное построение далее, мы можем построить неограниченную последовательность операций все высших и высших ступеней, обладающих перечисленными выше свойствами.

Рассмотрим примеры.

Пусть $\omega(x, y) = x + y - 1$. Это соответствует отображающей функции $f(x) = 1 - x$, так как из равенства $1 - \omega(x, y) = 1 - x + 1 - y$ как раз и получим $\omega(x, y) = x + y - 1$.

Операция следующей ступени определяется соотношением

$$1-\omega_1(x,y)=(1-x)(1-y),$$

откуда

$$\omega_1(x,y)=x+y-xy.$$

Эта операция ассоциативна, коммутативна и дистрибутивна по отношению к $\omega(x, y)=x+y-1$.

Положим еще $f(x)=\arccos x$. Мы придем к операции

$$\omega(x,y)=\cos(\arccos x+\arccos y)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}.$$

Для целого n оператор $[n]\alpha$ приводит к известной чебышевской функции

$$[n]\alpha=\cos(n\arccos\alpha).$$

Здесь

$$L_\alpha(x)=\frac{\arccos x}{\arccos\alpha} \text{ и } \omega_1(x,y)=\cos(\arccos x\cdot\arccos y).$$

7. Заменяя в равенстве (I) функцию $L_\alpha(x)=f(x)$ любой другой, отображающей $\omega(x,y)$ на сложение, функцией, получим следующую общую формулу для всех операций $\omega_1(x,y)$, *дистрибутивных по отношению к* $\omega(x,y)$ и в остальном удовлетворяющих условиям теоремы Абеля,

$$f(\omega_1(x,y))=kf(x)\cdot f(y).$$

Для доказательства того, что в этой формуле действительно заключены *все* функции $\omega_1(x,y)$, дистрибутивные относительно $\omega(x,y)$, можно поступить, например, так.

Пусть дано, что

$$\omega_1(\omega(x,y),z)=\omega(\omega_1(x,z),\omega_1(y,z)),$$

и известно, что

$$f(\omega(x,y))=f(x)+f(y).$$

Тогда должно быть

$$f(\omega_1(\omega(x,y),z))=f(\omega_1(x,z))+f(\omega_1(y,z)).$$

Обозначая

$$f(\omega_1(u,v)) \text{ через } \varphi(u,v),$$

перепишем это так

$$\varphi(\omega(x,y),z)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z).$$

Это равенство выражает, что функция $\varphi(u,z)$, рассматриваемая как функция от первого своего аргумента *при постоянном* z, отображает операцию $\omega(x,y)$ на сложение, а потому, по доказанному выше, отличается от $f(u)$ лишь постоянным множителем, который может зависеть от z. Итак,

$$\varphi(u,z)=f(u)\cdot k(z).$$

Применяя то же рассуждение ко второму аргументу, найдем

$$\varphi(u, z) = k_1(u) \cdot f(z).$$

Отсюда следует

$$\frac{k_1(u)}{f(u)} = \frac{k(z)}{f(z)},$$

что возможно лишь, если общее значение этих отношений есть не зависящее ни от u, ни от z постоянное число k.

Таким образом

$$k(z) = kf(z)$$

и

$$\varphi(u, z) = kf(u) \cdot f(z),$$

т. е.

$$f(\omega_1(u, v)) = kf(u) \cdot f(v),$$

что и требовалось доказать.

8. Рассмотрим теперь обратный вопрос об определении ω по заданной функции ω_1, удовлетворяющей условиям теоремы Абеля и связанной с ω указанным выше образом.

Полагая

$$f_1(\omega_1(x, y)) = f_1(x) + f_1(y)$$

и, с другой стороны,

$$f(\omega_1(x, y)) = f(x) \cdot f(y),$$

найдем, логарифмируя,

$$\log_a f(\omega_1(x, y)) = \log_a f(x) + \log_a f(y)$$

и, стало быть, по доказанному, должно быть

$$\log_a f(x) = cf_1(x).$$

Таким образом

$$f(x) = a^{cf_1(x)}$$

и, стало быть, соотношение

$$a^{cf_1(\omega(x, y))} = a^{cf_1(x)} + a^{cf_2(x)}$$

определяет *все возможные операции* $\omega(x, y)$, являющиеся *операциями непосредственно низшей ступени по отношению к операции* $\omega_1(x, y)$.

В частности, полагая $\omega_1(x, y) = xy$ и соответственно $f_1(x) = \log_a x$, найдем

$$a^{c\log_a \omega(x, y)} = a^{c\log_a x} \quad a^{c\log_a y},$$

или

$$[\omega(x, y)]^c = x^c \quad y^c,$$

т. е. формула

$$\omega(x, y) = \sqrt[c]{x^c + y^c}$$

дает *общий вид всех операций, по отношению к которым умножение является операцией следующей высшей ступени.*

Аналогично, для $\omega_1(x, y) = x + y$ и $f_1(x) = x$ получим

$$a^{c\,\omega(x,\,y)} = a^{cx} + a^{cy},$$

или, полагая $a^c = b$,

$$\omega(x, y) = \log_b(b^x + b^y).$$

Это есть общий вид *всех операций,* удовлетворяющих условиям теоремы Абеля, *по отношению к которым сложение дистрибутивно.*

Заметим, что рассмотрение операций низших ступеней может потребовать расширения понятия числа в соответствии со случаями неразрешимости уравнения $\omega(x, a) = b$ для некоторых пар значений a и b относительно x. Это расширение можно провести и чисто формально, примерно так, как это было сделано в § 36 и 40 главы IV.

§ 69. Натуральная показательная функция и натуральный логарифм.

1. Рассматривая в действительной области показательную и логарифмическую функции, нельзя совершенно оставить в стороне понятие о натуральной показательной функции e^x и о натуральных логарифмах при неперовом основании e.

Ввиду того что эти вопросы в большинстве случаев трактуются в курсах анализа исключительно с формальной точки зрения, мы проведем здесь несколько отличное от обычного изложение, основанное на рассмотрении так называемого процесса **„органического роста“.**

Для педагога это изложение может представить еще и тот интерес, что в подходе к вопросу мы будем, в основных чертах, следовать тому ходу идей, который привел Непера к изобретению логарифмов. Как известно, Непер первоначально пришел к системе логарифмов с основанием, близким к числу $1 : e$, которая лишь несущественным образом отличается от системы натуральных логарифмов с основанием e.

Идея Непера в основных чертах заключалась в сопоставлении непрерывного движения точки M, при котором расстояния OM подвижной точки от начала O растут в геометрической прогрессии, с непрерывным движением точки L, в котором расстояния OL растут в арифметической прогрессии.

Такого рода соответствие между положениями двух точек M и L легко себе представить для некоторой последовательности положений этих точек, например

$$OM_1 = 1,\ OM_2 = 2,\ OM_3 = 4,\ OM_4 = 8,\ \ldots, OM_n = 2^{n-1},\ \ldots,$$

и соответственно

$$OL_1 = 0,\ OL_2 = 1,\ OL_3 = 2,\ OL_4 = 3,\ \ldots, OL_n = n - 1,\ \ldots$$

Существенный шаг к построению общей теории логарифмов, сделанный Непером, заключался в том, чтобы такое сопоставление осуществить при *непрерывном* движении точек M и L по числовой прямой так, чтобы равным кратным *отношениям*

$$\frac{OM_k}{OM_l}=\frac{OM_r}{OM_s}$$

пройденных точкой M путей соответствовали равные разности

$$OL_k - OL_l = OL_r - OL_s$$

путей, пройденных точкой L.

Это сопоставление первоначально и было проведено Непером с помощью схемы движения, в которой сыграли роль чисто механические представления о скоростях движущихся точек, времени, затрачиваемом на прохождение пути, и т. д.

Ниже мы будем придерживаться для наглядности аналогичной, несколько измененной схемы, рассматривая процесс изменения (роста) некоторой величины в зависимости от возрастания времени t, именно, так называемый процесс органического роста или роста по закону непрерывно начисляемых сложных процентов.

Математическую характеристику такого процесса мы дадим, рассматривая его как предельный случай начисления сложных процентов через все меньшие и меньшие промежутки времени следующим образом.

Пусть некоторая величина A по истечении единицы времени превращается в

$$A+A\cdot k,$$

где, стало быть, k есть число, показывающее, во сколько раз приращение в единицу времени превышает первоначальное количество (при $k>1$) или какую часть его (при $k<1$) это приращение составляет. Случай „распада“ или убывания величины A включается сюда, если рассматривать также и отрицательные значения k.

Число k соответствует определенной *процентной таксе* p, связанной с k формулой

$$k=\frac{p}{100}.$$

В процессах органического роста или распада, примером которых может служить, скажем, размножение бактерий или распад радиоактивных веществ, нет смысла выделять определенные промежутки времени, *по истечении* которых производится изменение исходной величины (начисление процентов). Эти процессы происходят, грубо говоря, так, что изменение величины или начисление процентов идет *непрерывно*, причем приходится производить это начисление процентов, исходя из определенной процентной таксы не на основное, первоначальное значение величины, а на *наращенное* в силу предыдущих начислений, *все время меняющееся* значение величины.

Для характеристики такого непрерывного процесса ро естественно поэтому сначала рассмотреть *малые* промежутки времени α и принять, что за такой малый промежуток времени α первоначальное значение A, соответствующее началу этого промежутка, обратится в

$$A + A \cdot k \cdot \alpha = A(1 + k\alpha).$$

При этом начисление процентов производится *из расчета* $p\%$ в единицу времени. Так как в дальнейшем начисление будет производиться на *наращенное* значение по той же процентной таксе, то, очевидно, за единицу времени *фактически* получится не приращение, равное kA, а значительно большее.

Коэфициент k, входящий в основную формулу для малого интервала α, связанный с процентной таксой, положенной *в основу расчета* формулой $k = p : 100$, мы будем называть **коэфициентом роста.**

2. Для того чтобы перейти к случаю непрерывного роста, мы разделим сначала промежуток времени от 0 до t на малые части длиной $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, так, чтобы

$$\alpha_1 + \alpha_2 \quad \ldots + \alpha_n = \sum \alpha_i = t,$$

и применим нашу формулу к каждому из этих промежутков отдельно, начисляя приращение на имевшуюся в начале промежутка времени величину.

Первоначальное количество A_0 превратится, таким образом, за время t в

$$A_0(1 + k\alpha_1)(1 + k\alpha_2) \ldots (1 + k\alpha_n).$$

Представлению о **непрерывном** росте величины A по закону сложных процентов с коэфициентом роста k будет соответствовать получающаяся отсюда при $n \to \infty$ и одновременном стремлении длины каждого из промежутков α_i к нулю предельная формула

$$A(t) = A_0 \cdot \lim_{\substack{\alpha_i \to 0 \\ \sum \alpha_i = t}} (1 + k\alpha_1)(1 + k\alpha_2) \ldots (1 + k\alpha_n). \qquad (1)$$

Рассматриваемый процесс роста характеризуется, таким образом, грубо говоря, стремлением величины $A(t)$ *за каждый бесконечно малый промежуток времени от* t до $t + \alpha$ *получать приращение*

$$k \cdot A(t) \cdot \alpha,$$

пропорциональное количеству, имевшемуся в начале этого интервала времени.

Для того чтобы оправдать с математической точки зрения постановку вопроса, приводящую нас к формуле (1), необходимо доказать, что

1) *предел* (1) *всегда* ***существует*** и

2) *этот предел* ***не зависит от способа разбиения промежутка*** от 0 до t *на умельчающиеся части.*

С этой целью преобразуем интересующее нас выражение

$$v_n(t) = (1 + k\alpha_1)(1 + k\alpha_2) \ldots (1 + k\alpha_n),$$

раскрыв скобки.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum \alpha_i = t \\ s_2 &= \sum \alpha_i \alpha_j \\ s_3 &= \sum \alpha_i \alpha_j \alpha_k \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_m &= \sum \alpha_i \alpha_j \ldots \alpha_s \qquad (m \text{ сомножителей}) \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_n &= \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{aligned}$$

для суммы произведений чисел α_i, распространенных на все сочетания этих чисел по одному, по два и т. д., найдем, что

$$v_n(t) = 1 + ks_1 + k^2 s_2 + \ldots + k^m s_m + \ldots + k^n s_n.$$

3. Постараемся выразить все указанные суммы через первую, не вычисляя при этом слагаемых, стремящихся к нулю при $\alpha_i \to 0$.

Рассмотрим тождество

$$t^2 = (\sum \alpha_i)^2 = 2 \sum \alpha_i \alpha_j + \sum \alpha_i^2.$$

Если все α_i меньше α, то

$$\sum \alpha_i^2 < \alpha \sum \alpha_i = \alpha t.$$

Эта величина стремится к нулю одновременно с α. Поэтому можно написать

$$t^2 = 2s_2 + \omega_2,$$

или

$$s_2 = \frac{t^2 - \omega_2}{2},$$

где $\omega_2 > 0$ и притом $\omega_2 \to 0$, когда все $\alpha_i \to 0$.

Рассмотрев аналогичным образом тождество

$$t^3 = (\sum \alpha_i)^3 = 6 \sum \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \ldots,$$

приходим к предположению, оправдать которое придется с помощью метода полной индукции.

Именно, мы допустим, что уже установлено, что

$$t^m = m!\, s_m + \omega_m \qquad \text{(I)}$$

и

$$s_m = \frac{t^m - \omega_m}{m!}, \qquad \text{(II)}$$

где $\omega_m > 0$ и $\omega_m \to 0$, когда все $\alpha_i \to 0$.

Докажем, что те же соотношения будут иметь место для показателя $m + 1$.

Умножая (I) на t, найдем

$$t^{m+1}=m!\sum \alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r \cdot \sum \alpha_s - \omega_m t.$$

В написанном здесь произведении сумм встретятся произведения чисел α_i двух типов.

Во-первых, произведения $m+1$ множителей

$$\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r \cdot \alpha_s, \tag{III}$$

в которых среди индексов *нет равных.*

Посчитаем, сколько раз каждое такое произведение встретится в произведении сумм. Множитель α_s, взятый из суммы $\sum \alpha_s$, может встретиться на месте одного из множителей произведения

$$\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r,$$

в то время, как этот как раз множитель (вместо которого берется α_s), в свою очередь, должен быть взят из суммы $\sum \alpha_s$ вместо множителя α_s. Таким и только таким путем мы можем получить *то же самое* произведение $m+1$ множителей $\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r\alpha_s$.

Поэтому, кроме произведения (III), мы получим еще m равных ему произведений

$$\begin{array}{c}\alpha_s \cdot \alpha_j \ \ldots \ \alpha_r \cdot \alpha_i \\ \alpha_i \cdot \alpha_s \ \ldots \ \alpha_r \cdot \alpha_j \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_i \cdot \alpha_j \ \ldots \ \alpha_s \cdot \alpha_r,\end{array}$$

т. е. всего $m+1$ равных между собой произведений.

Таким образом в выражении

$$m!\sum \alpha_i \cdot \alpha_j \ldots \alpha_r \cdot \sum \alpha_s$$

каждое произведение $m+1$ различных по индексам множителей $\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r \cdot \alpha_s$ войдет слагаемым $(m+1)!$ раз.

Что касается произведений второго типа, *содержащих квадраты,* то, заменяя один из равных множителей такого квадрата бо́льшим числом α, мы получим

$$\sum \alpha_i^2\alpha_j \ldots \alpha_r < \alpha \sum \alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r = \alpha m s_m.$$

Множитель m, не играющий существенной роли, войдет потому, что одно и то же произведение $\alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r$ может получиться из m произведений типа

$$\alpha_i^2\alpha_j \ldots \alpha_r,\ \alpha_i\alpha_j^2 \ldots \alpha_r,\ \ldots,\ \alpha_i\alpha_j \ldots \alpha_r^2.$$

Принимая во внимание (II), найдем, что $\alpha m s_m \to 0$ одновременно с α. Так как слагаемое $\omega_m t$ также стремится к нулю при $\alpha \to 0$, то окончательно получаем, полагая

$$\omega_{m+1}=\omega_m t+m!\sum \alpha_i^2\alpha_j \ldots \alpha_r,$$

что

$$t^{m+1}=(m+1)!\,s_{m+1}+\omega_{m+1}$$

и
$$s_{m+1}=\frac{t^{m+1}-\omega_{m+1}}{(m+1)!},$$

где $\omega_{m+1}>0$, $\omega_{m+1}\to 0$ при $\alpha\to 0$, что и требовалось доказать.

4. Итак,

$$v_n(t)=1+kt+k^2\frac{t^2-\omega_2}{2!}+\ldots+k^m\frac{t^m-\omega_m}{m!}+\ldots+$$
$$+k^n\frac{t^n-\omega_n}{n!}. \quad (2)$$

Здесь $\omega_m>0$ и все $\omega_m\to 0$, когда все $\alpha_i\to 0$.

Однако непосредственно перейти в этой формуле к пределу при $\alpha_i\to 0$ *нельзя*, так как с уменьшением α_i *неограниченно увеличивается и число слагаемых n.*

Постараемся поэтому разделить трудности и сначала справиться с возрастающим числом слагаемых.

Положим для простоты

$$z=kt,$$

предполагая $z>0$, и исследуем сперва выражение

$$u_n=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!},$$

которое — скажем сначала грубо — при малых α_i, вероятно, мало отличается от v_n.

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

существует.

Если попытаться вычислять значения переменной u_n при каком-либо числовом значении z, начиная с $n=1$, то стремление u_n к конечному пределу отнюдь не покажется непосредственно очевидным. Так, если, например $z=100$, то

$$u_1=1+100,\quad u_2=1+100+\frac{100^2}{2},\quad u_3=u_2+\frac{100^3}{6}$$

и последовательно прибавляемые слагаемые быстро растут, ибо числитель дроби

$$\frac{z^m}{m!}$$

при переходе к $m+1$ множится на $z=100$, а знаменатель на число $m+1$, вначале малое.

Однако, начиная с $m=100$, начнется уменьшение слагаемых и при том все более и более быстрое.

Это обстоятельство мы и используем в общем случае для доказательства того, что переменная u_n, которая, очевидно, возрастает монотонно с возрастанием n, *ограничена*. Этого будет достаточно для того, чтобы по теореме § 51 заключить о существовании предела последовательности u_n.

Выберем такое m, чтобы $m+2$ было больше постоянного числа z. Тогда дробь

$$q=\frac{z}{m+2}$$

будет лежать между 0 и 1 и мы получим:

$$u_n=u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{z}{m+2}+\frac{z^2}{(m+2)(m+3)}+\ldots\right)<$$

$$<u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{z}{m+2}+\frac{z^2}{(m+2)(m+2)}+\ldots\right)=$$

$$=u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}(1+q+q^2+\ldots+q^n)=$$

$$=u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1-q^n}{1-q}<u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\frac{1}{1-q}.$$

Обозначая *не зависящее от n* число

$$u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{z}{m+2}}$$

через B, мы найдем, что *при всяком n*

$$u_n<B,$$

отсюда и следует существование предела u_n, который мы обозначим через $f(z)$, так что

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}\quad\ldots+\frac{z^n}{n!}\right)$$

Неравенство

$$u_m<f(z)<u_m+\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{z}{m+2}}$$

дает простой способ для оценки того, на сколько при $z<m+2$ член последовательности u_m близок к пределу $f(z)$.

Легко показать, что *выражение, стоящее в правой части попутно установленного выше неравенства,*

$$u_n-u_m<\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{1}{1-\frac{z}{m+2}},$$

с помощью которого мы оцениваем разность между u_n и u_m, *стремится к нулю с возрастанием числа m.*

В этом можно убедиться, замечая, что

$$\lim_{m\to\infty}\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}=\lim_{m\to\infty}u_m-\lim_{m\to\infty}u_{m-1}=f(z)-f(z)=0.$$

Это же можно выяснить и непосредственно, а именно, возьмем некоторое положительное число θ, меньшее единицы, и выберем s так, чтобы было

$$\frac{z}{s} < \theta.$$

Обозначая произведение $\frac{z^{s-1}}{(s-1)!}$ через S, найдем при $m > s$, что

$$\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} = S \cdot \frac{z}{s} \cdot \frac{z}{s+1} \cdot \ldots \cdot \frac{z}{m} < S \cdot \theta^{m-s}$$

откуда и вытекает, в силу соотношения $\lim\limits_{m \to \infty} \theta^{m-s} = 0$, требуемое предельное равенство.

5. Возвращаясь теперь к переменной v_n, мы зададимся каким-либо положительным числом ε и предположим, что *m выбрано настолько большим, что*

$$\frac{z^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{m+2}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда мы будем иметь

$$u_n - u_m < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(a)}$$

при всяком $n > m$, а, стало быть, и подавно

$$v_n - v_m = k^{m+1} \frac{t^{m+1} - \omega_{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + k^n \frac{t^n - \omega_n}{n!} <$$

$$< \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} = u_n - u_m < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(b)}$$

Зафиксируем теперь выбранное число m и будем менять только α_i, приближая их к нулю и соответственно увеличивая число n.

В этом процессе мы можем сравнивать между собой суммы u_m и v_m при *фиксированном, не меняющемся числе слагаемых* m и, в соответствии с доказанными выше соотношениями

$$\omega_i \to 0$$

при всех $\alpha_i \to 0$, написать

$$\lim_{\text{все } \alpha_i \to 0} v_m = u_m.$$

Другими словами, выбирая α_i достаточно малыми, скажем, полагая

$$\alpha_i < \alpha(\varepsilon) \text{ при } i = 1, 2, 3, \ldots n,$$

мы можем добиться того, чтобы был

$$u_m - v_m < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{c}$$

Сопоставляя полученные неравенства (a), (b) и (c), мы видим что при достаточной малости всех α_i и при достаточно большом (бо́льшем выбранного m) числе промежутков разбиения n величина v_n будет отстоять от u_n на расстоянии трех переходов от v_n к v_m, от v_m к u_m и от u_m к u_n, величина каждого из которых не превышает $\frac{\varepsilon}{3}$. Иначе говоря,

$$|u_n - v_n| = |u_n - u_m + u_m - v_m + v_m - v_n| \leq$$
$$\leq |u_n - u_m| + |u_m - v_m| + |v_m - v_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

или

$$|u_n - v_n| < \varepsilon.$$

А это и означает, что

$$\lim v_n = \lim u_n = f(z) = f(kt),$$

когда все α_i стремятся к нулю, а $\sum \alpha_i$ сохраняет постоянное значение t, причем это предельное соотношение имеет место при любом способе разбиения интервала $(0, t)$ на умельчающиеся части.

6. Из изложенного следует, что в характеристике процесса органического роста основную роль играет функция

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{1} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right).$$

Исследуем, что это за функция.

Формулу (1) (стр. 236) мы можем теперь переписать так

$$A(t) = A_0 f(kt).$$

Разобьем интервал от 0 до t на две части длиной в t_1 и t_2 так что

$$t = t_1 + t_2.$$

Принимая во внимание доказанную независимость предела v_n от способа разбиения интервала на умельчающиеся части, мы можем теперь разбивать каждую часть интервала в отдельности.

Положим

$$t_1 = \sum_1^{\nu} \beta_i, \quad t_2 = \sum_1^{\mu} \gamma_j.$$

Тогда

$$f(kt) = \lim v_n = \lim (1 + k\beta_1) \ldots (1 + k\beta_\nu) \cdot \lim (1 + k\gamma_1) \ldots (1 + k\gamma_\mu) =$$
$$= f(kt_1) \cdot f(kt_2),$$

т. е.
$$f(z)=f(z_1)\cdot f(z_2),$$
если $z=z_1+z_2$, или
$$f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2).$$

Это соотношение выражает совершенно естественно вытекающее из исходных предположений свойство процесса органического роста: желая получить значение $A(t)$, мы можем найти наращение за время от 0 до t_1, т. е. положить
$$A(t_1)=A_0 f(kt_1),$$
и затем вновь вычислять наращение, получаемое за промежуток времени от t_1 до t, равного t_2, исходя из нового начального значения, по той же формуле, соответствующей коэфициенту роста k:
$$A(t)=A(t_1)\cdot f(kt_2)=A_0 f(kt_1)\cdot f(kt_2).$$

На основании результатов § 67 мы можем теперь утверждать, что интересующая нас функция $f(z)$, если только она непрерывна, есть ***показательная функция с основанием*** $f(1)$.

Для доказательства свойства непрерывности заметим, что при $0<z<1$
$$1<f(z)<1+z+z^2+\cdots=\frac{1}{1-z},$$
и потому
$$\lim f(z)=1.$$
Отсюда следует, что
$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=\lim_{h\to 0} f(a)\cdot f(h)=f(a)$$
и, аналогично,
$$\lim_{h\to 0} f(a-h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)}{f(h)}=f(a).$$

Итак, мы можем положить
$$f(z)=[f(1)]^z. \tag{3}$$

Показательная функция $f(z)$ называется **натуральной** показательной функцией, ее основание $f(1)$, обозначаемое знаком e, — **натуральным основанием**, а логарифмы при этом основании, обозначаемые знаками $\ln N$ и $\log N$, — **натуральными логарифмами.**

Таким образом,
$$e=f(1)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \tag{4}$$
и
$$e^z=f(z)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}\right). \tag{5}$$

Замечая, что

$$2<1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=3,$$

мы видим, что $2<e<3$. Вычисление дает

$$e\approx 2{,}718281828459045\ldots$$

Первые знаки легко получить, слагая 1 с результатом последовательных делений 1 на 1, затем 1 на 2, полученного частного на 3, полученного частного на 4 и т. д.:

$$\begin{array}{l} 1{,}0000\ldots \\ 1{,}0000\ldots \\ 0{,}5000\ldots \\ 0{,}1666\ldots \\ 0{,}0416\ldots \\ 0{,}0083\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ 2{,}7182\ldots \end{array}$$

Оценка точности вычислений может быть проведена посредством установленной выше (стр. 240) формулы

$$u_m(1)<f(1)<u_m(1)+\frac{1}{(m+1)!}\,\frac{m+2}{m+1},$$

с помощью которой легко доказать *иррациональность* числа e. Именно, допуская, что $e=n:m$, где n и m целые, найдем $u_m(1)\cdot m!<n(m-1)!<u_m(1)\,m!+\theta$, где $0<\theta<1$, что, вопреки написанному, возможно лишь при равенстве целых чисел $u_m(1)\,m!$ и $n(m-1)!$ Число e не только иррационально, но и, более того, *трансцендентно*, т. е. не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэфициентами.

Полагая в исходной формуле (1) все α_i равными между собой, найдем $\alpha_i=\frac{t}{n}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и, стало быть, $v_n=\left(1+k\frac{t}{n}\right)^n$.

Таким образом, при $z=kt$ получаем

$$f(z)=e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \tag{6}$$

и, в частности,

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7}$$

Последнее равенство, ввиду его формальной простоты, в большинстве случаев *принимается за определение* числа e [1]).

[1]) На соотношение $\lim\,(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)=e^x$ при $\Sigma\alpha_i=x$ и $\alpha_i\to 0$ в иной связи обратил мое внимание П. К. Рашевский.

7. Основную формулу, характеризующую процесс органического роста, мы можем теперь записать так

$$A(t) = A_0 e^{kt} = {}_0 a^t,$$

где

$$a =$$

Мы видим, таким образом, что процесс роста с коэфициентом роста k, характеризующим тенденцию изменения в малых промежутках, определяется в целом показательной функцией a^t с основанием $a = e^k$. Замечая, что при $t = 1$ получаем $A(1) = A_0 \cdot a = A_0 \cdot e^k$, можно сказать, что тенденция переменной $A(t)$ увеличиваться за малые промежутки времени *из расчета* приращения $k \cdot A$ в единицу времени влечет за собой при непрерывном процессе роста *фактическое* приращение, равное $e^k \cdot A$ за единицу времени. *Коэфициенту фактического приращения* $a = e^k$ *отвечает*, таким образом, *коэфициент роста* $k = \ln a$. Это есть одно из возможных истолкований *натуральных* логарифмов в их отличии от систем логарифмов с произвольным основанием.

Несколько иная интерпретация, преследующая ту же цель, получается при рассмотрении наиболее простого с формальной точки зрения процесса роста с коэфициентом $k = 1$ и начальным значением $A_0 = 1$. Формула

$$A(t) = e \ = b$$

показывает, что такой процесс характеризуется *натуральной* показательной функцией.

Натуральный логарифм какого-либо числа b можно в соответствии с формулой

$$t = \ln b$$

рассматривать как *время*, по истечении которого первоначальная единица дорастает в этом процессе до b.

Сличая этот результат с формулой

$$A(\tau) = e^{k\tau} = a^\tau = b,$$

характеризующей процесс роста с коэфициентом $k = \ln a$, найдем, что здесь соответствующее время

$$\tau = \log_a b,$$

в силу равенства

$$k\tau = t, \quad \tau = \frac{t}{k} = \frac{t}{\ln a},$$

будет в $k = \ln a$ раз меньше (при $k < 1$ — больше) натурального времени t, в полном согласии с общей формулой перехода от натуральных логарифмов к логарифмам с основанием a

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Число $\frac{1}{\ln a}$ называется **модулем** системы логарифмов с основанием a. Для $a=10$ найдем $\ln 10 = 2{,}302\ldots$ и модуль

$$\frac{1}{\ln 10} = \log_{10} e = 0{,}43429\ \ldots,$$

так что

$$\log_{10} N = 0{,}43429\ \ldots \cdot \ln N.$$

Отметим еще вытекающую из предыдущего формулу

$$a^t = e^{kt} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t\ln a}{1} + \frac{(t\ln a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(t\ln a)^n}{n!}\right),$$

показывающую, что для натуральной показательной функции это соотношение имеет наиболее простой вид.

Примечание. Формула $f(z) = e^z$ была нами установлена выше лишь для положительных значений z. Нетрудно, однако, убедиться в том, что все заключения остаются в силе и для отрицательных значений k или t. При этом для доказательства существования предела u_n достаточно отделить четные степени z от нечетных и рассматривать u_n как разность членов соответствующих монотонных и ограниченных последовательностей с положительными членами. Что касается последовательности v_n, то, считая, что сумма абсолютных значений чисел α_i остается ограниченной, так что $\Sigma\,|\alpha_i| \leq T$, мы можем распространить утверждение о том, что $\omega_m \to 0$ при $\alpha_i \to 0$ на случай, когда α_i принимают отрицательные значения. Так как, аналогично, замена α_i на $|\alpha_i|$ может только увеличивать абсолютное значение суммы $v_n - v_m$, то из неравенства (b), доказанного для положительных $|\alpha_i|$ будет следовать, что $|v_n - v_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ при достаточно большом m и для любых знаков чисел α_i. Заключение $\lim v_n = \lim u_n$ остается поэтому в силе и для рассматриваемого случая.

Полагая соответственно $t_1 = t$ и $t_2 = -t$ в функциональном соотношении $f(kt_1)\cdot f(kt_2) = f(kt_1 + kt_2)$, мы найдем

$$f(-z) = \frac{1}{f(z)} = e^{-z}$$

для случая $-z < 0$.

8. Из полученных общих формул для процессов органического роста можно теперь, обратно, притти к исходной характеристике этих процессов в бесконечно-малом и притом дать вполне строгую формулировку для соответствующих предельных соотношений, имеющих многочисленные и чрезвычайно важные приложения.

С этой целью заметим прежде всего, что при $0 < z < 1$ из соотношения

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}\right)$$

вытекает

$$1 + z < e^z < \lim_{n\to\infty}(1 + z + \ldots + z^n) = \frac{1}{1-z}.$$

Неравенства

$$1 + z < e^z < \frac{1}{1-z} \tag{8}$$

верны и при $-1<z<0$. Для доказательства положим $z=-y$, предполагая, что $0<z<1$. Тогда как раз и будет $1<y<0$. Неравенства же (8) для e^z превратятся в

$$1-y<e^{-y}<\frac{1}{1+y},$$

откуда

$$\frac{1}{1-y}>e^{y}>1+y,$$

что и требовалось доказать.

Вычтем из всех частей двойного неравенства (8) единицу и разделим на z, предполагая, что $|z|<1$. Независимо от знака z мы можем утверждать, что

$$\frac{e^z-1}{z}$$

содержится между 1 и величиной

$$\left(\frac{1}{1-z}-1\right):z=\frac{1}{1-z},$$

которая стремится к 1, когда $z\to 0$.

Итак,

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$$

или

$$\frac{e^z-1}{z}=E,$$

где через E обозначена переменная величина, стремящаяся к единице при $z\to 0$.

Таким образом,

$$e^z=1+zE, \quad \text{где} \quad E\to 1 \text{ при } z\to 0. \tag{9}$$

Отсюда получим несколько более общую формулу

$$a^z=e^{z\ln a}=1+z\ln aE, \text{ где } E\to 1 \text{ при } z\to 0. \tag{9'}$$

При малых z можно приближенно положить

$$e^z\approx 1+z$$

и

$$a^z\approx 1+z\ln a.$$

Это и есть как раз те формулы, которые характеризуют процесс органического роста для малых промежутков.

Для натурального процесса роста с коэфициентом $k=1$ за малый промежуток времени z начальная величина $A=1$ превращается в

$$e^z\approx 1+z,$$

а для процесса с коэфициентом роста $k=\ln a$ в

$$a^z=e^{kz}\approx 1+kz=1+z\ln a.$$

Равенства (9) и (9') дают точную формулировку этих предельных соотношений, показывая, что речь идет об определении приращения за малый промежуток времени *с точностью до множителя* E, стремящегося к 1, т. е. *со сколь угодно малой относительной ошибкой.*

Естественно ожидать, что

$$\ln(1+x)\sim x \quad \text{и} \quad \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}.$$

Действительно, в соответствии с формулой

$$A(x)\approx A_0(1+kx)$$

для малых промежутков x, время, потребное для превращения 1 в $1+x$ при коэфициенте роста $k=1$, будет приближенно как раз равно x, при коэфициенте роста $k=\ln a$ — в k раз меньше. Для строгого доказательства соответствующих предельных формул положим

$$\ln(1+x)=z.$$

При $x\to0$ имеем: $\lim z=\lim\ln(1+x)=\ln\lim(1+x)=\ln1=0$. Поэтому можно написать

$$1+x=e^z=1+zE, \quad \text{где} \quad E\to1 \quad \text{при} \quad x\to0.$$

Отсюда $x=zE$ и $z=x\cdot\frac{1}{E}=x\cdot E_1$, где снова $E_1\to1$ при $x\to0$. Подставляя это значение z в исходную формулу и опуская индекс при E_1, получим:

$$\ln(1+x)=xE, \quad \text{где} \quad E\to1 \quad \text{при} \quad x\to0 \tag{10}$$

и, стало быть, вообще,

$$\log_a(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln a}=\frac{x}{\ln a}E, \quad \text{где} \quad E\to1 \quad \text{при} \quad x\to0. \tag{10'}$$

Потенцируя, можем также написать

$$1+x=e^{xE}, \quad \text{где} \quad E\to1 \quad \text{при} \quad x\to0. \tag{11}$$

Этой формулой удобно пользоваться при раскрытии неопределенностей типа 1^∞.

Формула (9') показывает, что *натуральный логарифм* числа a может быть определен как предел

$$\lim_{z\to0}\frac{a^z-1}{z}=\ln a,$$

или, если положить $z=\frac{1}{n}$,

$$\ln a=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1).$$

Сличая соотношения (10) и (10'), мы видим, что натуральные логарифмы мы могли бы отличать от всех остальных по их поведению для малых приращений единицы. Действительно в формулах типа

$$\log_a(1+x)=M\cdot x\cdot E$$

коэфициент M имеет для всех a в той или иной мере громоздкие значения, равные $M=\frac{1}{\ln a}$, и лишь для натуральных логарифмов $M=1$.

Это свойство натуральных логарифмов можно выразить еще так. При малых значениях θ

$$\ln(a+\theta a)-\ln a=\ln\frac{a+\theta a}{a}=\ln(1+\theta)\approx\theta,$$

т. е.: *при малом относительном приращении логарифмируемого числа натуральный логарифм числа увеличивается приблизительно на такую часть θ единицы, на какую часть первоначального своего значения увеличилось логарифмируемое число.* Пренебрегая некоторой неточностью выражения, можно, другими словами, сказать, что *в бесконечно-малом абсолютное приращение натурального логарифма равно относительному приращению логарифмируемого числа.*

Для десятичных логарифмов нужно было бы ввести поправочный коэфициент $M=0{,}43429\ldots$

9. Приведем примеры приложений выведенных только что предельных соотношений.

1) Пусть требуется найти

$$\lim_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Применяя формулу (11), найдем:

$$\lim_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}=\lim_{\omega\to 0}e^{\omega E\cdot\frac{1}{\omega}}=\lim_{E\to 1}e^E=e.$$

Полагая $\omega=\frac{1}{v}$, можно также написать

$$\lim_{v\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v=e,$$

где v может принимать какие угодно, а не только целые значения. Вообще,

$$\lim_{v\to\pm\infty}\left(1+\frac{z}{v}\right)^v=\lim_{E\to 1}e^{\frac{z}{v}\cdot E\cdot v}=e^z$$

при любом z и любом способе стремления v к ∞.

Запомнив соотношение $\lim\limits_{\omega\to 0}(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}=e$ легко восстановить формулы (9) и (10). Действительно, $(1+\omega)^{\frac{1}{\omega}}\approx e$, откуда $1+\omega\approx e^{\omega}$ и $\ln(1+\omega)\approx\omega$. Заметим еще, что, установив формулу $\lim\limits_{v\to\infty}\left(1+\frac{z}{v}\right)^v=e^z$ независимо от предыдущего изложения на основе одного лишь соотношения $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ методом, который читатель найдет в любом учебнике анализа, мы могли бы доказать совпадение построенной выше функции $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ с показательной функцией e^z, не прибегая к решению функционального уравнения $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

2) Применим предельные соотношения (9) и (10) к вопросу о поведении *степенной* функции в бесконечно-малом.

Применяя последовательно равенства (9) и (10), найдем для любого показателя α

$$(1+x)^\alpha=e^{xE\alpha}=1+xE\alpha E_1=1+\alpha xE_2,$$

где $E_2\to 1$ при $x\to 0$. Опуская индекс при E_2, мы можем написать

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha xE, \quad \text{где} \quad E\to 1 \quad \text{при} \quad x\to 0. \tag{12}$$

Отметим, в частности, вытекающие отсюда приближенные формулы, имеющие место при малых x:

$$(1+x)^n\approx 1+nx,$$

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x,$$

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x, \quad \frac{1}{1-x}\approx 1+x,$$

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\approx 1-\frac{1}{2}x, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}}\approx 1+\frac{1}{2}$$

и т. п.

Эти формулы эквивалентны предельным соотношениям

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$$

и т. п., которые легко получить элементарным путем. Отметим здесь, в качестве любопытного приложения элементарных приемов, употребляемых при вычислении пределов, уточнение предельного соотношения

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}xE$$

с помощью разыскания предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}}{x}.$$

Этот предел оказывается равным $-\frac{1}{8}$ вследствие чего можно записать

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2E;\quad E\to 1 \text{ при } x\to 0.$$

Так можно продолжать и дальше, вычисляя предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)}{x^3}$$

и т. д. Результат может быть использован для построения примера ложного заключения (неполной индукции) в отношении общей формы получаемых коэфициентов, так как только что написанный предел оказывается равным $\frac{1}{16}$. Общий закон составления коэфициентов может быть получен из формулы бинома Ньютона для дробного показателя.

3) Приведем еще один элементарный характерный пример приложения формулы (11).

Пусть требуется выяснить ход изменения функции

$$y=\frac{(a+x)^\alpha(b+x)^\beta}{(c+x)^\gamma(d+x)^\delta},$$

где α, β, γ, δ — положительные числа, причем мы предположим еще, что $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.

Нетрудно найти область определения функции, точки, где y обращается в нуль и в бесконечность, и установить, что в случае наличия соответствующих действительных значений $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$. Прямая $y=1$ является, таким образом, асимптотой рассматриваемой кривой. Однако этот элементарный анализ не дает ответа на вопрос о том, приближается ли y при $x\to\infty$ к единице, оставаясь *больше* 1, или же при достаточно больших значениях x значения y *меньше* 1.

Для решения этого вопроса положим $x=\frac{1}{z}$, где $z\to 0$. Мы найдем

$$y=\frac{(1+az)^\alpha(1+bz)^\beta}{(1+cz)^\gamma(1+dz)^\delta}=e^{(\alpha aE_1+b\beta E_2-c\gamma E_3-d\delta E_4)z}=$$

$$=1+(\alpha a+\beta b-\gamma c-\delta d+\omega)z,$$

где $\omega\to 0$ при $z\to 0$.

Отсюда следует не только $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, но и выполнение для больших x неравенства $y>1$ при $a\alpha+b\beta>c\gamma+d\delta$ и неравенства $y<1$ при $a\alpha+b\beta<c\gamma+d\delta$. В случае, когда $a\alpha+b\beta=c\gamma+d\delta$, решение вопроса требует применения более точных приближенных формул.

10. На основе формул (9), (10) и (12) легко получить общие соотношения, характеризующие поведение показательной, логарифмической и степенной функций при малых приращениях аргумента.

Так,

$$a^{x+\Delta x}=a^x\cdot a^{\Delta x}=a^x(1+\Delta x\cdot\ln a\cdot E)=a^x+a^x\ln a\cdot\Delta x\cdot E,$$

причем $E\to 1$, когда $\Delta x\to 0$.

Эта формула показывает, что *приращение* $\Delta(a^x)=a^{x+\Delta x}-a^x$ *показательной функции* при переходе от значения аргумента x к значению $x+\Delta x$ *с точностью до множителя, стремящегося к* 1 *при* $\Delta x\to 0$, *оказывается пропорциональным* Δx *и выражается произведением*

$$a^x\ln a\cdot\Delta x.$$

Относительная погрешность в определении приращения $\Delta(a^x)$, которую мы делаем, заменяя $a^{x+\Delta x}-a^x$ через $a^x\ln a\cdot\Delta x$, стремится, согласно сказанному, к нулю при $\Delta x\to 0$.

Произведение $a^x\ln a\cdot\Delta x$ представляет собой то, что называют **главной частью** приращения $\Delta(a^x)$ или **диференциалом** функции a^x и обозначают, как известно, знаком

$$d(a^x)=a^x\ln a\cdot dx,$$

причем dx означает здесь то же, что и Δx.

Формула

$$\Delta(a^x)\approx a^x\ln a\cdot\Delta x$$

может иметь двоякого рода применения при нахождении числа N по его десятичному логарифму, а именно, для приближенного вычисления и для приближенной же оценки точности таких вычислений.

Пусть, например, по таблицам пятизначных логарифмов, найдено, что

$$10^{0,434295}=2,718.$$

Желая найти приближенно $10^{0,434295}$, мы можем положить

$$10^{0,434295}\approx 2,718+2,718\cdot 2,3\cdot 0,000045\approx 2,71828.$$

С другой стороны, пусть требуется приближенно оценить степень точности, с которой можно найти число N, зная его десятичный логарифм с данной степенью точности δ. Полагая приближенно

$$10^{x\pm\delta}\approx 10^x\pm 10^x\cdot M\cdot\delta,\quad M\approx 0,4343,$$

мы найдем, что погрешность $10^{x\pm\delta}-10^x$ приближенно равна $\pm N\cdot 0,4343\cdot\delta$.

Аналогичным образом могут быть использованы и формулы (10) и (12).

Так,

$$\log_a(x+\Delta x)=\log_a\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right]=\log_a x+\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\log_a x+\frac{\Delta x}{x\ln a}E,$$

причем $E\to 1$, когда $\Delta x\to 0$.

Выражение $\frac{\Delta x}{x \ln a}$, *пропорциональное* Δx *и отличающееся от действительного приращения* $\Delta \log_a x = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x$ *множителем* E, *стремящимся к* 1 при $\Delta x \to 0$, т. е. дающее величину приращения $\Delta \log_a x$ со *сколь угодно малой относительной погрешностью*, называется *главной частью* приращения логарифма или *диференциалом* функции $\log_a x$ и обозначается, как известно, знаком

$$d \log_a x = \frac{1}{x \ln a} dx,$$

где dx означает здесь то же, что Δx.

Приближенная формула

$$\Delta \log_a x \approx \frac{\Delta x}{x \ln a}$$

также имеет разнообразные применения.

Так, например, зная, что $\log_{10} 2 = 0{,}30103$, мы можем приближенно положить

$$\log_{10} 2{,}0001 \approx 0{,}30103 + \frac{0{,}0001}{2} \cdot 0{,}4343 \approx 0{,}30105.$$

В общем случае формула

$$\log_{10}(N + 0{,}00001) \approx \log_{10} N + \frac{0{,}00001}{N} \cdot 0{,}4343$$

позволяет непосредственным вычислением находить табличные разности пятизначной в данном примере таблицы десятичных логарифмов, соответствующие заданным значениям логарифмируемого числа N. Эти разности, как видно из формулы, обратно пропорциональны числу N.

С другой стороны, формула

$$\log_{10}(N \pm \delta) \approx \log_{10} N \pm \frac{\delta}{N} \cdot 0{,}4343$$

позволяет приближенно оценить степень точности в определении логарифма числа, заданного с точностью до слагаемого $\pm\delta$. Погрешность $\log_{10}(N \pm \delta) - \log_{10} N$ приближенно равна

$$\pm \frac{\delta}{N} \cdot 0{,}4343.$$

Наконец, для степенной функции x^α находим

$$(x + \Delta x)^\alpha = x^\alpha \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha = x^\alpha \left(1 + \alpha \frac{\Delta x}{x} \cdot E\right) =$$
$$= x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} \cdot \Delta x \cdot E,$$

где $E \to 1$ при $\Delta x \to 0$.

Выражение $\alpha x^{\alpha-1} \Delta x$, *пропорциональное* Δx, *отличается от действительного приращения* $\Delta (x^\alpha) = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha$ *степенной функции* при $x \neq 0$ *множителем, стремящимся* к 1 при $\Delta x \to 0$, т. е. *дает величину приращения* $\Delta (x^\alpha)$ *со сколь угодно малой при* $\Delta x \to 0$ *относительной погрешностью*. Это выражение есть *главная часть* приращения $\Delta(x^\alpha)$ или *диференциал* степенной функции x^α и обозначается знаком

$$d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\,dx,$$

где dx означает то же, что и Δx.

В качестве элементарных приложений приближенной формулы

$$\Delta(x^\alpha) \approx \alpha x^{\alpha-1}\,\Delta x$$

можно здесь отметить формулу

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}},$$

могущую служить для приближенного нахождения квадратного корня, например

$$\sqrt{4{,}0008} \approx 2 + \frac{0{,}0008}{4} = 2{,}0002,$$

а также для оценки погрешности

$$\sqrt{x \pm \delta} - \sqrt{x} \approx \pm\frac{\delta}{2\sqrt{x}}$$

при нахождении квадратного корня из числа.

11. Более точные формулы для определения значения логарифмической функции можно получить, рассматривая обратную задачу определения *времени* в процессе органического роста. Для малых τ из соотношения

$$A(\tau) = A(1 + k\tau)$$

следует

$$\tau = \frac{A(\tau) - A}{kA}.$$

Полагая для простоты $k = 1$, что соответствует, как мы знаем, натуральной показательной функции, попытаемся определить время $t = \ln(1+x)$, в течение которого 1 вырастает в $1 + x$, применяя предыдущую формулу последовательно для малых промежутков времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$, соответствующих превращению $A_0 = 1$ в $1 + \alpha_1$, затем A_1 в $A_2 = 1 + \alpha_1 + \alpha_2$ и т. д., до $A_n = 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1 + x$.

Мы получим, как легко убедиться

$$\tau_1 = \alpha_1$$

$$\tau_2 = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}$$

$$\tau_3 = \frac{\alpha_3}{1+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда, пока предположительно, получим, уменьшая приращения α_i так, чтобы их сумма $\sum\alpha_i$ оставалась равной x, следующую предельную формулу для $t=\sum\tau_i$

$$t=\lim_{\text{все } \alpha_i\to 0}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_1+\alpha_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}\right).$$

Для выявления зависимости от величины x будем делить α_2 на $1+\alpha_1$, α_3 на $1+\alpha_1+\alpha_2$, т. е. воспользуемся формулами

$$\alpha_1=\alpha_1$$

$$\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}=\alpha_2(1-\alpha_1+\alpha_1^2-\alpha_1^3+\ldots)=\alpha_2-\alpha_1\alpha_2+\ldots;$$

$$\frac{\alpha_3}{1+\alpha_1+\alpha_2}=\alpha_3(1-\alpha_1-\alpha_2+(\alpha_1+\alpha_2)^2-\ldots)=$$

$$=\alpha_3-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots$$

Складывая и *отбрасывая*, по соображениям, аналогичным тем которые мы применяли выше при рассмотрении предела выражения v_n, *члены с квадратами* α_i, получим, пользуясь известными нам формулами для $s_1, s_2, \ldots, s_m$ (стр. 237),

$$t=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{2}+2!\frac{x^3}{3!}-3!\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n(n-1)!\frac{x^n}{n!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n}\right).$$

Подробное исследование величины отбрасываемых членов и проведение рассуждения, аналогичного проведенному для функции $f(z)$, мы предоставляем читателю, заметив лишь, что, ввиду отсутствия факториалов в знаменателях, для существования предела приходится потребовать, чтобы $|x|<1$.

Для доказательства того, что вышеуказанный предел, не зависящий от выбора α_i, действительно дает искомое время, равное, как было ранее установлено

$$t=\ln(1+x),$$

достаточно будет выбрать α_i так, чтобы

$$\begin{aligned}1+\alpha_1&=\sqrt[n]{1+x}=y\\ 1+\alpha_1+\alpha_2&=y^2\\ 1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=y^3\\ \ldots\ldots&\ldots,\end{aligned}$$

т. е. взять значения $A_0, A_1, A_2, \ldots$ растущей величины в геометрической прогрессии со знаменателем $y=\sqrt[n]{1+x}$. Тогда мы получим, пользуясь исходной формулой, выражающей t через α_i,

$$t=\lim_{n\to\infty}\left[y-1+\frac{y^2-y}{y}+\frac{y^3-y^2}{y^2}+\ldots+\frac{y^n-y^{n-1}}{y^{n-1}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}[y-1+y-1+\ldots+y-1]=\lim_{n\to\infty}(ny-n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{1+x}-1)=\ln(1+x),$$

причем мы воспользовались формулой, установленной на странице 248.

Доказанное таким образом разложение

$$\ln(1+x)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)$$

может служить для вычисления логарифмов не только чисел, близких к 1, но и вообще для построения таблицы логарифмов.

Так, например, положив $x=1$ и найдя $\ln 2$, можно, взяв $x=-\frac{1}{2}$, вычислить $\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)$, равный $\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$, и найти, таким образом, $\ln 3$.

Погрешность при пользовании установленной выше формулой, как легко видеть, при $x>0$ не превышает по абсолютной величине первого неучтенного слагаемого типа $\frac{x^n}{n}$. Если же $-1<x<0$, то погрешность не превысит величины $\frac{|x|^n}{n}\cdot\frac{1}{1+x}$.

Замечая это, нетрудно получить как следствие более удобные для практических вычислений формулы, в которых величина погрешности очень быстро убывает при увеличении числа учитываемых слагаемых.

Так, из соотношений, получающихся для $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$, мы получим путем вычитания

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)$$

с аналогичными приведенным выше правилами для оценки погрешности. Полагая здесь

$$x=\frac{p-q}{p+q},$$

где p и q - целые числа, найдем

$$\ln p=\ln q+2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{2n+1}\right].$$

По этой формуле можно найти $\ln p$, если известен $\ln q$, причем вычисления тем проще, чем меньше разность $p-q$ по сравнению с $p+q$. Так, уже для $p=2$, $q=1$ мы получим для вычисления $\ln 2$ сравнительно „быстро сходящуюся" формулу

$$\ln 2=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n+1}}\right).$$

Полагая $p=q+1$, найдем вообще:

$$\ln(q+1)=\ln q+2\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2q+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2q+1}\right)^3+\ldots+\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2q+1}\right)^{2n+1}\right].$$

В этой формуле достаточно взять сравнительно очень небольшое число членов в правой части для того, чтобы найти $\ln(q+1)$ по известному уже $\ln q$ с нужной степенью точности.

Можно варьировать способы вычисления, применяя разложение на множителей и составляя с помощью формул рассматриваемых типов достаточное число соответствующих линейных уравнений для определения логарифмов, входящих в разложение на множители простых или составных чисел. Эти методы уже близки к тем, с помощью которых фактически можно построить таблицу логарифмов с тем или иным числом знаков.

12. Приемом, аналогичным тому, который мы использовали для получения разложения e^x и $\ln(1+x)$, можно притти к формуле бинома Ньютона для возвышения $1+x$ в любую действительную степень μ при $|x|<1$.

Имея в виду эту цель, заметим, что, согласно формуле $\Delta(y^\mu)=\mu y^{\mu-1}\Delta y\cdot E$ (стр. 253), *относительное приращение* функции y^μ для малого $\Delta y=\alpha$ приближенно равно $\frac{\Delta(y^\mu)}{y^\mu}\approx\frac{\mu\alpha}{y}$, так что *наращенное значение* y^μ будет приближенно равно

$$y^\mu\left(1+\frac{\mu\alpha}{y}\right). \tag{*}$$

Разбивая промежуток от 0 до x на части $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так чтобы

$$\sum\alpha_i=x,$$

мы можем, поэтому, полагая

$$y_1=1;\quad y_2=1+\alpha_1;\quad y_3=1+\alpha_1+\alpha_2;\ \ldots\ y_n=1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}$$

и применяя формулу (*) последовательно к каждому из промежутков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, пока предположительно написать

$$(1+x)^\mu=\lim_{\text{все }\alpha_i\to 0}\left(1+\mu\frac{\alpha_1}{y_1}\right)\left(1+\mu\frac{\alpha_2}{y_2}\right)\ldots\left(1+\mu\frac{\alpha_n}{y_n}\right).$$

Для оправдания этого предположения и доказательства существования этого предела, не зависящего притом от способа разбиения x на слагаемые α_i, мы используем формулу (11) (стр. 248) для каждого из сомножителей рассматриваемого произведения, которое при этом перейдет в

$$e^{\mu\frac{\alpha_1}{y_1}E_1+\mu\frac{\alpha_2}{y_2}E_2+\ldots+\mu\frac{\alpha_n}{y_n}E_n}.$$

Полагая теперь $E_i=1+\omega_i$, мы можем выбрать α настолько малым, что при $\alpha_i<\alpha$ будем иметь $\omega_i<\omega$, где $\omega>0$ наперед заданное малое число. Отсюда будет следовать, что

$$\left|\mu\frac{\alpha_1}{y_1}\omega_1+\ldots+\mu\frac{\alpha_n}{y_n}\omega_n\right|<|\mu|\,\omega\sum\alpha_i=|\mu|\,\omega x.$$

Выбирая достаточно малое ω, мы можем сделать $e^{|\mu|\omega x}$ сколь угодно мало отличающимся от 1, и потому вопрос сводится к исследованию предела выражения

$$\lim_{\alpha_i \to 0} \mu\left(\frac{\alpha_1}{y_1}+\frac{\alpha_2}{y_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{y_n}\right)=\mu \lim_{\alpha_i \to 0}\left[\alpha_1+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_3}{1+\alpha_1+\alpha_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}}\right].$$

Согласно сказанному выше (стр. 255), этот последний предел равен $\log(1+x)$, и мы получаем, таким образом,

$$\lim_{\alpha_i \to 0}\left(1+\mu\frac{\alpha_1}{y_1}\right)\ldots\left(1+\mu\frac{\alpha_n}{y_n}\right)=e^{\mu\log(1+x)}=(1+x)^{\mu},$$

чем наше предположение и оправдано.

С другой стороны, раскрывая скобки в произведении

$$(1+\mu\alpha_1)\left(1+\mu\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\right)\ldots\left(1+\mu\frac{\alpha_n}{1+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}\right)=$$
$$=(1+\mu\alpha_1)\left[1+\mu\alpha_2(1-\alpha_1+\alpha_1^2+\ldots)\right]\ldots\left[1+\mu\alpha_n(1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots)\right]$$

и пренебрегая выражениями, содержащими квадраты α_i, мы придем, пользуясь формулами стр. 237 для сумм $s_1, s_2, \ldots, s_m$, к разложению по степеням x

$$1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots$$

Принципиальные основы рассуждения здесь те же, что и в предыдущих случаях; не останавливаясь на деталях, заметим, что для нахождения зависимости коэфициентов при различных степенях x от μ нет надобности в подробном проведении выкладок. Достаточно принять во внимание, что в последней части нашего рассуждения μ играет роль *буквенного параметра*, причем коэфициенты при степенях x суть *полиномы от* μ. Эти полиномы должны быть поэтому и при *нецелых* значениях μ *тождественны* с теми, которые получаются для *бесчисленного множества* целых значений μ. Они совпадают, следовательно, с известными выражениями коэфициентов в обычной формуле бинома Ньютона.

Мы ограничимся этим эскизом элементарного доказательства формулы

$$(1+x)^{\mu}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n\right)$$

для любого μ и $|x|<1$, замечая, что оно представляет интерес лишь с точки зрения метода, поскольку сама формула сравнительно легко может быть доказана с помощью теоремы Тейлора (Taylor), излагаемой в любом курсе анализа.

ГЛАВА VIII.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОМОЩЬЮ ИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ.

§ 70. Постановка вопроса. Фундаментальное неравенство.

1. Возвращаясь теперь к общей теории действительных чисел, рассмотрим подробнее вопрос об определении действительного числа с помощью его приближений с любой степенью точности.

Как мы видели в § 58—61 главы VI, суть дела заключается в том, что как неравенства, устанавливающие скалярн е расположение действительных чисел друг относительно друга, так и основные действия над действительными числами устанавливаются через посредство тех рациональных чисел, которые расположены *вблизи* определяемых действительных чисел.

При этом необязательно иметь в распоряжении *все* такие рациональные числа: достаточно иметь возможность оперировать числами, *сколь угодно близкими* к определяемым действительным числам, т. е. со сколь угодно точными рациональными приближениями действительного числа.

В том случае, когда мы имеем дело с теорией Дедекинда или аналогичными построениями, опирающимися на основную лемму § 59 главы VI, мы распределяем числа на два класса с помощью неравенства $r<r'$, т. е. считаем заранее известным, *какие рациональные числа следует рассматривать как приближения с недостатком и какие как приближения с избытком.*

Однако совершенно очевидно, что это требование излишне: *знание рациональных приближений с любой степенью точности* даже *при отсутствии сведений о том, является ли то или иное* приближение приближением *с избытком* или *с недостатком,* должно быть само по себе достаточным для того, чтобы установить место иррационального числа в системе рациональных чисел и определить основные операции над иррациональными числами с помощью операций над их рациональными приближениями. Это суждение имеет пока, конечно, характер догадки: лишь следующее ниже построение теории является доказательством высказанного утверждения.

Желание избавиться от добавочного излишнего требования в построении теории иррациональных чисел вызывается, конечно, не только наличием возможности это сделать, а обусловлено самой насущной *необходимостью.* Дело в том, что не только постановка вопроса в общем виде, но также и практика оперирования с иррациональными числами и почти все предельные процессы анализа как раз и ставят нас в такое положение, при котором действительное число задается *последовательностью своих приближений* со все большей и большей степенью точности, причем *знак* погрешности заранее *может быть неизвестен.*

Кроме того, очевидно, что, отбрасывая лишние требования, мы не только охватываем более широкую область приложений, но и лучше отражаем в теории самое существо изучаемых взаимоотношений. Это методологическое преимущество, как и позиционное преимущество в шахматной игре, как раз и сказывается в приложениях (в частности, при переходе к комплексной числовой области).

Итак, в чем же заключается задача? Мы видели, что всякая система рациональных чисел r и r', для которой $r<r'$ и среди разностей $r'-r$ имеются сколь угодно малые числа, вполне определяет соответствующее действительное число α. Можно сказать, что условия $r<r'$ и $r'-r<\varepsilon$ устанавливают наличие в системе чисел r и r' приближений действительного числа α с недостатком и с избытком с любой степенью точности ε. При этом неравенство $r'-r<\varepsilon$ влечет $r'-\alpha<\varepsilon$ и $\alpha-r<\varepsilon$, т. е. характеризует *степень точности.* Отказываясь от распределения чисел r и r' на два класса $r<r'$, мы должны теперь найти более общие, аналогичные предыдущим *условия,* относящиеся к *любой* системе чисел r, *при выполнении которых мы могли бы*

1) быть уверенными в том, что в этой системе чисел представлены *приближения к некоторому действительному числу с любой степенью точности,* и

2) отличать, узнавать в системе чисел r те числа, которые могут быть приняты за приближения к определенному числу с *данной, определенной степенью точности.*

Трудность при этом заключается в следующем. Конечно, просто было бы сказать: условие 1) выполнено, если в системе чисел r для любого ε найдутся числа, для которых

$$|r-\alpha|<\varepsilon.$$

Это неравенство и является, во-вторых, *критерием* того, что r есть приближение к α с точностью, характеризуемой числом ε.

Однако как раз в том-то и заключается *вся суть дела,* что ответ на вопросы 1) и 2) должен быть дан *без использования в формулах числа* α. Ведь мы как раз и собираемся с помощью системы чисел r *определять* число α и действия над ним; поэтому построение теории возможно только на основе ответа на вопросы 1) и 2), характеризующего *внутренние свойства системы чисел* r, т. е. свойства, о выполнении или невыполнении которых можно судить, рассматривая *только числа системы* r.

Это находится в полной аналогии с отмеченной выше ролью неравенств $r<r'$ и $r'-r<\varepsilon$, в формулировке которых отсутствует число α, появляющееся лишь в *заключении* основной леммы. Неравенства эти характеризуют поэтому *внутренние* свойства классов R и R' и позволяют использовать системы чисел, для которых они выполняются, для *введения* иррациональных чисел, определяемых классами R и R'.

2. Перейдем теперь к решению поставленной задачи. При этом мы будем считать теорию иррациональных чисел (по Дедекинду) уже построенной и лишь ниже, в изложении теории сходящихся последовательностей Кантора осветим этот вопрос с другой стороны, поставив себя в исходное положение, описанное выше в § 48 и характеризующее положение вещей *до построения* теории иррациональных чисел.

Поэтому при установлении нужных нам неравенств мы введем сначала определяемое действительное число α и поставим своей целью *исключить его* для получения нужной нам формы ответа на вопрос.

Пусть, стало быть, число r есть некоторое приближение к действительному числу α с точностью до ε, так что

$$|r-\alpha|\leqslant\varepsilon$$

или

$$\alpha-\varepsilon\leqslant r\leqslant\alpha+\varepsilon.$$

Эти неравенства выражают, что *число r лежит в интервале длиной 2ε, средней точкой которого является число α.*

Условимся обозначать всякое число r, удовлетворяющее этому требованию, знаком $\alpha(\varepsilon)$.

Выясним, как связаны *между собой* числа $\alpha(\varepsilon)$ и $\alpha(\varepsilon_1)$ для положительных значений чисел ε и ε_1, характеризующих степень точности соответствующих им приближений.

Из неравенств

$$|r-\alpha|\leqslant\varepsilon \quad \text{и} \quad |r_1-\alpha|\leqslant\varepsilon_1$$

следует:

$$|r-r_1|=|r-\alpha+\alpha-r_1|\leqslant|r-\alpha|+|\alpha-r_1|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1.$$

Итак, во всех случаях

$$|r-r_1|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1,$$

или

$$|\alpha(\varepsilon)-\alpha(\varepsilon_1)|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1. \qquad (1)$$

Это неравенство мы назовем **фундаментальным неравенством.** Оно выражает, что два приближения к одному и тому же числу α с точностью соответственно до ε и ε_1 отличаются друг от друга не больше, чем на $\varepsilon+\varepsilon_1$.

Мы пришли, таким образом, к *необходимому* условию (1), связывающему между собой приближения к одному и тому же действительному числу с одинаковой и разной степенью точности.

Имея в виду дальнейшее изложение, выясним теперь, как *на основе знания чисел типа $\alpha(\varepsilon)$ для любого ε* построить сечение Дедекинда, определяющее число α, т. е. *отделить числа, большие α, от чисел, меньших α.*

С этой целью заметим, что числа $\alpha(\varepsilon)-\varepsilon$ меньше, а числа $\alpha(\varepsilon)+\varepsilon$ больше α. При этом разность $[\alpha(\varepsilon)+\varepsilon]-[\alpha(\varepsilon)-\varepsilon]=2\varepsilon$ сколь угодно мала и, стало быть, классы чисел типа $\alpha(\varepsilon)-\varepsilon$ и $\alpha(\varepsilon)+\varepsilon$ можно использовать, согласно тексту основной леммы § 59, для определения положения числа α в системе действительных чисел.

Докажем теперь, что условие (1) является не только необходимым, но и *достаточным* в следующем смысле этого слова.

Пусть для каждого положительного числа ε выделено по какому-либо закону *некоторое* (вообще бесконечное) *множество* чисел $\varphi(\varepsilon)$ и пусть эти множества чисел, соответствующие различным значениям ε, связаны друг с другом условием

$$|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon_1)|\leqslant\varepsilon+\varepsilon_1, \tag{1'}$$

выполняющимися для *любых пар* чисел ε и ε_1 и *для всех элементов* $\varphi(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon_1)$ соответствующих множеств.

Мы утверждаем, что в таком случае мы имеем дело с *приближениями к некоторому действительному числу* α с любой степенью точности и притом, точнее говоря, *всякое число* $\varphi(\varepsilon)$ *каждого из заданных множеств может рассматриваться как приближение* $\alpha(\varepsilon)$ *числа α с точностью до* ε, так что

$$|\varphi(\varepsilon)-\alpha|\leqslant\varepsilon.$$

Имея в виду как основную задачу построение теории *иррациональных* чисел, мы ограничимся сейчас рассмотрением лишь рациональных значений ε и рациональных значений чисел $\varphi(\varepsilon)$. Существенной роли это ограничение, впрочем, не играет.

Переходя к доказательству высказанного утверждения, построим, в соответствии с обнаруженным выше свойством чисел типа $\alpha(\varepsilon)-\varepsilon$ и $\alpha(\varepsilon)+\varepsilon$, два класса (здесь рациональных) чисел, отнеся к первому все числа типа

$$\varphi(\varepsilon')-\varepsilon',$$

а ко второму — все числа типа

$$\varphi(\varepsilon'')+\varepsilon'',$$

где ε' и ε'' — любые положительные числа.

При этом все числа первого класса окажутся меньшими (не большими) всех чисел второго. Действительно, при любых ε' и ε'' из фундаментального неравенства

$$\varphi(\varepsilon')-\varphi(\varepsilon'')\leqslant\varepsilon'+\varepsilon''$$

следует

$$\varphi(\varepsilon')-\varepsilon'\leqslant\varphi(\varepsilon'')+\varepsilon''.$$

Так как, далее, разность

$$(\varphi(\varepsilon)+\varepsilon)-(\varphi(\varepsilon)-\varepsilon)=2\varepsilon$$

может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора ε, то удовлетворено и второе условие основной леммы § 59, а потому существует одно и только одно действительное число α, удовлетворяющее неравенствам

$$\varphi(\varepsilon')-\varepsilon' \leqslant \alpha \leqslant \varphi(\varepsilon'')+\varepsilon'' \qquad (2)$$

при любых ε' и ε''.

Для $\varepsilon''=\varepsilon'=\varepsilon$ отсюда следует

$$|\varphi(\varepsilon)-\alpha| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. всякое $\varphi(\varepsilon)$ есть приближение к α с точностью до ε или, как мы будем кратко говорить, *ε-приближение числа α.*

3. Фундаментальное неравенство (1) дает, таким образом, исчерпывающий ответ на поставленный нами выше вопрос. Всякую систему множеств $\varphi(\varepsilon)$, удовлетворяющую условиям (1'), можно использовать для определения действительного числа; в частности, используя лишь множества, составленные из рациональных чисел, можно этим путем *ввести* все иррациональные числа.

Имея в виду такое построение, выясним, в дополнение к сказанному выше, вопрос о том, как производить сравнение двух действительных чисел α и β на основе знания их ε-приближений, т. е. на основе неравенств типа (2) для α и аналогичных неравенств

$$\psi(\varepsilon')-\varepsilon' \leqslant \beta \leqslant \psi(\varepsilon'')+\varepsilon''$$

для β.

Если $\alpha=\beta$, то всякое ε-приближение для α есть некоторое ε-приближение для β, так что, согласно сказанному выше, должно быть

$$|\varphi(\varepsilon)-\psi(\bar{\varepsilon})| \leqslant \varepsilon+\bar{\varepsilon} \qquad (3)$$

для любых ε и $\bar{\varepsilon}$.

Если же $\alpha \neq \beta$, например $\alpha<\beta$, то β не может удовлетворять *всем* тем неравенствам типа (2), которым удовлетворяет α (ибо α — единственное число, удовлетворяющее этим неравенствам). Поэтому найдется такое ε, что

$$\varphi(\varepsilon)+\varepsilon<\beta.$$

Но это на основании того же рассуждения означает, что найдется такое $\bar{\varepsilon}$, что

$$\varphi(\varepsilon)+\varepsilon<\psi(\bar{\varepsilon})-\bar{\varepsilon}.$$

Таким образом, существование *хотя бы одной пары* чисел $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\bar{\varepsilon})$, удовлетворяющих неравенству

$$\psi(\bar{\varepsilon})-\varphi(\varepsilon)>\varepsilon+\bar{\varepsilon}, \qquad (4)$$

равносильно неравенству $\alpha<\beta$ и, аналогично, выполнение неравенства

$$\varphi(\varepsilon)-\psi(\bar{\varepsilon})>\varepsilon+\bar{\varepsilon} \qquad (4')$$

равносильно соотношению $\alpha>\beta$.

Случаи (3), (4) и (4'), как и следовало ожидать, взаимно исключают друг друга и один из них, по крайней мере, должен иметь место.

§ 71. Теория ε-приближений.

1. Определение действительного числа с помощью системы его рациональных приближений с любой степенью точности является наиболее общей арифметической постановкой вопроса о построении теории действительных чисел, охватывающей как возможные частные случаи различных предельных переходов в анализе, так и то фактическое положение вещей, с которым приходится иметь дело в математических построениях, вызываемых к жизни изучением конкретных величин.

Действительно, в тех случаях, когда рациональные числа, с которыми приходится иметь дело в вычислениях, получены из опыта с помощью того или иного процесса измерения, мы вынуждены рассматривать эти числа лишь как *приближенные значения* измеряемой величины. Понятие о *действительном числе* как о некоторой *системе рациональных ε-приближений* представляет, таким образом, *математическую идеализацию того процесса, путем которого числовое значение той или иной конкретной непрерывной величины определяется на практике.*

Идеализация заключается, в частности, в том, что в математической трактовке понятия действительного числа мы рассматриваем приближения с *любой* степенью точности, что, конечно, *нельзя* считать осуществленным на практике. Однако такая постановка вопроса в математике совершенно естественно вытекает из необходимости при теоретической обработке тех или иных задач, даже прикладного содержания, решать соответствующие математические проблемы независимо от конкретных заданий степени точности так, чтобы *любые* запросы практики в этом отношении могли быть удовлетворены. Оценка же того, в каких пределах вообще законно рассматривать ту или иную конкретную величину как *непрерывную* и применять соответствующий математический аппарат, должна производиться в каждом конкретном случае на основе данных опыта. Вопросы этого последнего рода лежат в большинстве случаев вне компетенции математики.

Вследствие указанной связи между изучением конкретных величин и рассматриваемой концепцией действительного числа, все устанавливаемые ниже определения равенства, неравенства и основных операций соответствуют тем возможным в конкретных случаях заключениям относительно скалярного расположения чисел и относительно результатов той или иной операции, которые мы в состоянии сделать, имея в распоряжении лишь *приближенные* значения величин с данной степенью точности.

В этом смысле есть известное различие в том, рассматривать ли, в частности, некоторое *рациональное* число как таковое, заданное непосредственно, или как *действительное* число, заданное системой своих приближений.

Подчеркнем еще, что поскольку мы имеем сейчас в виду наметить *построение теории иррациональных чисел,* независимое от теории Дедекинда, мы будем за *определения* принимать положения, которые с точки зрения любой построенной уже теории иррациональных чисел являются *доказуемыми* предложениями. Материал, добытый нами в предыдущем параграфе на основе теории Дедекинда, играет для нас здесь роль *наводящих указаний* в установлении соответствующих определений

2. Итак, будем рассматривать такие множества рациональных чисел $\varphi(\varepsilon)$, заданные по какому-либо закону для всякого рационального числа $\varepsilon > 0$, *которые удовлетворяют* ***фундаментальному неравенству***

$$|\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon')| \leqslant \varepsilon + \varepsilon'$$

для любых пар чисел ε и ε' *и для всех соответствующих им значений* $\varphi(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon')$.

Такие системы множеств $\varphi(\varepsilon)$ будем для краткости называть **ε-системами.**

Так же, как и в теории Дедекинда, пример рациональных приближений к числу $\sqrt{2}$ показывает, что не всякой ε-системе соответствует *рациональное* число r, для которого $|\varphi(\varepsilon) - r| \leqslant \varepsilon$ при всяком ε. В этом выражается (в рамках рассматриваемой теории) отсутствие непрерывности в системе рациональных чисел. Исходя из соображений, аналогичных изложенным в § 49—50, мы можем обосновать введение новых числовых символов — *иррациональных* чисел всякий раз, когда имеется налицо ε-система, которую нельзя рассматривать как систему приближений к рациональному числу.

В этом последнем случае мы будем говорить, по определению, что числа $\varphi(\varepsilon)$ являются системой приближений, *определяющих* ***иррациональное*** *число* α.

Всякое число $\varphi(\varepsilon)$ будем называть *ε-приближением числа* α. Само число α иногда будем обозначать знаком $\varphi(0)$.

Будем также говорить, что *ε-система определяет рациональное число r в том случае, если при всяком ε имеет место неравенство* $|\varphi(\varepsilon) - r| \leqslant \varepsilon$.

Таким образом, по определению, *всякая ε-система определяет некоторое* ***действительное*** (рациональное или иррациональное) *число.*

Заметим, что для рационального числа r за ε-систему можно, во всяком случае, принять систему чисел $\varphi(\varepsilon)$, каждое из которых равно определяемому числу r, т. е. положить $\varphi(\varepsilon) = r$ при любом ε. Условия $|\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon')| \leqslant \varepsilon + \varepsilon'$ и $|\varphi(\varepsilon) - r| \leqslant \varepsilon$ автоматически выполняются.

3. Установим теперь основные соотношения скалярного расположения в системе определенных таким образом действительных чисел.

Два действительных числа α и β, определяемых соответственно ε-системами $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$, мы будем считать, по определению,

1) *равными, если*

$$|\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon' \qquad (1)$$

при всяких ε и ε'.

Это означает, другими словами, что ε-приближения одного числа могут быть приняты за ε-приближения другого (фундаментальное неравенство не нарушается);

2) ***неравными*** *и притом* $\alpha>\beta$, *если, по крайней мере, для одной пары чисел* $\varphi(\varepsilon)$ *и* $\psi(\varepsilon')$ *имеет место неравенство*

$$|\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon')|>\varepsilon+\varepsilon' \qquad (2)$$

и притом именно

$$\varphi(\varepsilon)-\varepsilon>\psi(\varepsilon')+\varepsilon'. \qquad (2')$$

Легко показать, как это вытекает из последнего неравенства, что, *начиная с достаточно малого* ε *все* ε*-приближения числа* α *будут больше всех* ε*-приближений числа* β.

Действительно, из фундаментального неравенства следует

$$\varphi(\varepsilon_1)>\varphi(\varepsilon)-\varepsilon-\varepsilon_1 \text{ и } \psi(\varepsilon')+\varepsilon'+\varepsilon_1>\psi(\varepsilon_1).$$

Неравенство

$$\varphi(\varepsilon)-\varepsilon-\varepsilon_1>\psi(\varepsilon')+\varepsilon'+\varepsilon_1$$

будет, однако, выполнено, начиная с тех значений ε_1, которые меньше, чем половина разности между зафиксированными выше числами $\varphi(\varepsilon)-\varepsilon$ и $\psi(\varepsilon')+\varepsilon'$. Для этих ε_1 будет поэтому

$$\varphi(\varepsilon_1)>\psi(\varepsilon_1). \qquad (2'')$$

В случае, если определяемые действительные числа α и β — рациональны, эти определения не нарушают обычных, так как из неравенства (2′) будут следовать неравенства

$$\alpha\geqslant\varphi(\varepsilon)-\varepsilon>\psi(\varepsilon')+\varepsilon'\geqslant\beta.$$

Соотношение же (1) дает в силу $|\alpha-\varphi(\varepsilon)|\leqslant\varepsilon$ и $|\beta-\psi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon'$ неравенство $|\alpha-\beta|\leqslant 2\varepsilon+2\varepsilon'$ при любых ε и ε', что возможно лишь, когда $\alpha=\beta$.

Легко убедиться, что постулаты скалярного расположения выполнены. Действительно, соотношения (1) и (2), очевидно, исключают друг друга. Если, далее,

$$\alpha>\beta \text{ и } \beta>\gamma,$$

где γ определено ε-системой $\chi(\varepsilon)$, то

$$\varphi(\varepsilon)-\varepsilon>\psi(\varepsilon')+\varepsilon'>\psi(\varepsilon'')\quad\varepsilon''>\chi(\varepsilon''')+\varepsilon''',$$

т. е.

$$\alpha>\gamma.$$

Если же $\alpha=\beta$ и $\beta=\gamma$, то $\alpha=\gamma$. Действительно, как мы отметили выше, условие равенства означает, что приближения $\varphi(\varepsilon)$ числа α могут быть приняты за приближения числа β с той же степенью точности, а, стало быть, по тем же основаниям, в силу равенства $\beta=\gamma$, и за приближения числа γ с той же степенью точности, а это и означает, что $\alpha=\gamma$.

Итак, скалярное расположение действительных чисел установлено.

Полагая для рационального числа r все его приближения равными r (стр. 265), найдем, что *неравенство* $r<\alpha$, где α — действительное число, заданное ε-приближениями $\varphi(\varepsilon)$, означает, согласно (2″), что, *начиная с некоторого* ε, *все* $\varphi(\varepsilon)>r$. Это дает простой критерий для перехода от числа α, заданного системой $\varphi(\varepsilon)$, к соответствующему *сечению* в области рациональных чисел.

4. Оправдаем теперь принятую нами терминологию, согласно которой числа $\varphi(\varepsilon)$ мы называем приближениями с точностью до ε определяемого действительного числа α. С этой целью достаточно будет заметить, что так как в силу фундаментального неравенства имеем

$$\varphi(\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\varphi(\varepsilon_1)+\varepsilon_1$$

для любого ε_1, то неравенство $\varphi(\varepsilon)-\varepsilon>\alpha$ и, аналогично, неравенство $\varphi(\varepsilon)+\varepsilon<\alpha$ — невозможны. Стало быть, должно быть

$$\varphi(\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\varphi(\varepsilon)+\varepsilon.$$

Знак равенства возможен лишь для рационального α. Полученные неравенства и выражают то, что мы хотели установить.

Заметим еще, что из приведенного выше определения равенства вытекает следующее положение.

1) Если в системе ε-приближений $\varphi(\varepsilon)$ *опустить* или к ней *присоединить* новые числа так, что в новой системе $\bar\varphi(\varepsilon)$ сохраняется условие $|\bar\varphi(\varepsilon)-\bar\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon'$, то определенное системой $\varphi(\varepsilon)$ *число α не изменится,* т. е. $\varphi(0)=\bar\varphi(0)$.

Действительно, в указанных случаях либо все $\varphi(\varepsilon)$ могут быть приняты за приближения к числу $\bar\varphi(0)$ с той же степенью точности, либо, наоборот, приближения $\bar\varphi(\varepsilon)$ за приближения к $\varphi(0)$ с той же степенью точности.

Вообще, *две системы ε-приближений определяют равные числа, если они содержат как общую часть какую-либо третью систему ε-приближений.*

Отсюда выводим следующие два следствия.

2) При определении числа α можно *ограничиться* заданием значений $\varphi(\varepsilon)$ лишь *для достаточно малых* ε, не превышающих некоторого ε_1. Такую систему приближений всегда можно формально расширить, например, полагая $\varphi(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon_1)$ при $\varepsilon>\varepsilon_1$. При этом $|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|=\varphi(\varepsilon_1)-\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon'<\varepsilon+\varepsilon'$, так что условие, налагаемое при расширении, выполнено. Только что написанное неравенство выражает тот очевидный факт, что всякое приближение с точностью до ε_1 может быть принято за приближение того же числа с меньшей степенью точности $\varepsilon>\varepsilon_1$.

3) Пусть дана какая-нибудь система приближений $\varphi(\varepsilon)$, определяющая число α. Присоединим к ней для каждого ε *все рациональные числа* $r(\varepsilon)$, удовлетворяющие требованиям

$$|r(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon'$$

при любом ε'. Это условие является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы число $r(\varepsilon)$ можно было включить в систему ε-приближений числа $\varphi(0)$. Действительно, расширенная указанным образом система чисел удовлетворяет фундаментальному неравенству, так как выполнение *при любом* ε' соотношения

$$|r(\varepsilon)-r(\varepsilon'')|\leqslant|r(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|+|r(\varepsilon'')-\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon''+2\varepsilon'$$

влечет за собой неравенство

$$|r(\varepsilon)-r(\varepsilon'')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon''.$$

Поэтому, замечая, что $\varphi(\varepsilon)\subset r(\varepsilon)$, можно, сказать, что полученная новая система ε-приближений определяет то же число α. Эту систему приближений $r(\varepsilon)$ мы будем называть **полной системой рациональных приближений.** Очевидно, что всякая другая система $\bar{\varphi}(\varepsilon)$, определяющая то же число α, может быть получена из полной системы путем вычеркивания некоторых значений $r(\varepsilon)$.

4) Заметим еще, что для установления равенства или неравенства чисел $\varphi(0)$ и $\psi(0)$ достаточно сравнивать между собой приближения $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$ *с одной и той же степенью* точности. Так если

$$|\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon)|\leqslant 2\varepsilon$$

для всякого ε, то $\varphi(0)=\psi(0)$.

Действительно, фиксируя какие-либо $\varphi(\varepsilon_1)$ и $\psi(\varepsilon_2)$, найдем

$$|\varphi(\varepsilon_1)-\psi(\varepsilon_2)|\leqslant|\varphi(\varepsilon_1)-\varphi(\varepsilon)|+|\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon)|+|\psi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon_2)|\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2+4\varepsilon.$$

Так как ε — произвольно, то это возможно лишь, если

$$|\varphi(\varepsilon_1)-\psi(\varepsilon_2)|\leqslant\varepsilon_1+\varepsilon_2,$$

т. е.

$$\varphi(0)=\psi(0).$$

Обратно, если для какого-нибудь ε'

$$\varphi(\varepsilon')-\psi(\varepsilon')>2\varepsilon',$$

то $\varphi(\varepsilon')-\varepsilon'>\psi(\varepsilon')+\varepsilon'$, следовательно,

$$\varphi(0)>\psi(0).$$

5) Фундаментальное неравенство можно применять также в усиленной форме, потребовав, чтобы было

$$|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|<\varepsilon \text{ при } \varepsilon'<\varepsilon.$$

Отсюда, конечно, будет следовать, что $|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|<\varepsilon+\varepsilon'$ и все выводы остаются в силе. Однако написанное условие *достаточно,* но уже *не необходимо* для того, чтобы $\varphi(\varepsilon)$ было приближением к $\varphi(0)$ с точностью до ε. Условие это, как легко видеть, *необходимо* лишь для того, чтобы числа $\varphi(\varepsilon)$ были приближениями к $\varphi(0)$ *с точностью до* $\frac{\varepsilon}{2}$, ибо в этом случае действительно

$$|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|\leqslant|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon'')|+|\varphi(\varepsilon')-\varphi(\varepsilon'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon'}{2} \qquad \varepsilon''<\varepsilon$$

(в силу произвольности числа ε'').

§ 72. Операции над действительными числами, определенными системами ε-приближений.

Из элементарной теории приближенных вычислений известно, что значения величин, над которыми производятся операции, приходится определять со степенью точности, вообще говоря, большей заданной степени точности окончательного результата. С этим обстоятельством нам придется считаться при определении основных операций в теории ε-приближений.

В самом деле, дать определение какого-либо действия над числами, заданными системами ε-приближений, означает в этой теории не что иное, как построить, исходя из заданных систем, новую систему ε-приближений, определяющую *результат действия*. Проведение этого построения в каждом отдельном случае включает в себя поэтому и ответ на вопрос: *какие приближения исходных систем*, определяющих данные числа, *надо использовать для того, чтобы получить требуемую степень точности в новой системе ε-приближений, определяющей результат действия*.

Перейдем к простейшим операциям.

1. Сложение и вычитание.

Пусть действительные числа α и β заданы *полными* системами $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$, удовлетворяющими условиям

$$|\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon' \quad \text{и} \quad |\psi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon'.$$

Рассмотрим систему чисел

$$\varphi(\varepsilon)+\psi(\varepsilon).$$

Для нее мы имеем

$$|\varphi(\varepsilon)+\psi(\varepsilon)-(\varphi(\varepsilon')+\psi(\varepsilon'))|\leqslant 2\varepsilon+2\varepsilon'.$$

Поэтому множество чисел $\varphi(\varepsilon)+\psi(\varepsilon)$ можно рассматривать лишь как множество приближений некоторого действительного числа с точностью до 2ε, а не ε. Этого, собственно, и достаточно для того, чтобы это число определить. Для достижения формальной законченности в построении мы поступим иначе, повысив степень точности слагаемых, т. е. рассмотрим систему чисел

$$\chi(\varepsilon)=\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{1}$$

Так же как и выше, найдем

$$|\chi(\varepsilon)-\chi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon',$$

т. е. система чисел $\chi(\varepsilon)$ есть система ε-приближений некоторого действительного числа $\gamma=\chi(0)$, которое мы и принимаем по определению за сумму чисел α и β.

Так как мы исходим из полных систем приближений, то это число γ определено однозначно. При переходе к неполным системам $\varphi(\varepsilon)$ и $\psi(\varepsilon)$ нам придется опустить часть значений $\chi(\varepsilon)$, отчего, как мы знаем, число γ не изменится.

Для случая, когда α и β — рациональные числа, можно положить $\varphi(\varepsilon)=\alpha$ и $\psi(\varepsilon)=\beta$ при всяком ε и мы получим $\gamma=\alpha+\beta$ в обычном смысле слова.

Итак, ***сумма** двух действительных чисел* $\varphi(0)$ *и* $\psi(0)$ *есть, по определению, число* $\chi(0)$, *определенное системой приближений* $\chi(\varepsilon)=\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)+\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Последняя запись одновременно устанавливает *степень точности*, с которой нужно определять значения слагаемых для того, чтобы быть уверенными в том, что сложение приближенных значений будет приближением к искомой сумме с заданной степенью точности ε.

Аналогично определяется и разность $\alpha-\beta$.

Задавая число 0 системой приближений, все элементы которой нули, найдем, что соотношение $\alpha-\beta>0$ эквивалентно условию

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-\psi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)>\varepsilon \quad \text{или} \quad \varphi(\varepsilon')-\psi(\varepsilon')>2\varepsilon',$$

т. е.

$$\varphi(\varepsilon')-\varepsilon'>\psi(\varepsilon')+\varepsilon',$$

а это означает, что $\alpha>\beta$. Таким образом, критерии $\alpha-\beta\gtreqless 0$ и $\alpha\gtreqless\beta$ — равносильны.

В частности, из неравенств $\varphi(\varepsilon)-\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\varphi(\varepsilon)+\varepsilon$ получим:

$$|\varphi(\varepsilon)-\alpha|\leqslant\varepsilon,$$

что и оправдывает обозначение $\varphi(0)$, принятое нами для числа α. Кроме того, из неравенства

$$\alpha-\varepsilon\leqslant\varphi(\varepsilon)\leqslant\alpha+\varepsilon$$

следует далее, что элементы $\varphi(\varepsilon)$ всякой системы приближений действительно лежат в интервале $(\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon)$, окружающем число α. Множество $\varphi(\varepsilon)$ *полной системы приближений* состоит из *всех рациональных чисел указанного интервала*. В этом легко убедиться, замечая, что из выполнения неравенства $|r(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|\leqslant\varepsilon+\varepsilon'$ *для любого* ε' следует выполнение неравенства

$$|r(\varepsilon)-\varphi(0)|\leqslant\varepsilon.$$

Наконец, замечая, что в ε-системе чисел

$$\varphi(\varepsilon)-\psi_1(\varepsilon)+\psi_2(\varepsilon),$$

где $\psi_1(\varepsilon)$ и $\psi_2(\varepsilon)$ оба принадлежат одному и тому же множеству $\psi(\varepsilon)$, содержится как часть ε-система

$$\varphi(\varepsilon)-\psi_1(\varepsilon)+\psi_1(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon),$$

заключаем, что

$$\alpha-\beta+\beta=\alpha,$$

так что операция вычитания есть действие, *обратное* по отношению к сложению.

2. Умножение и деление.

Мы можем (см. n° 4, 2 стр. 268) ограничиться рассмотрением полной системы приближений, лишь начиная с некоторого ε_1. Так как при $\varepsilon<\varepsilon_1$

$$\varphi(\varepsilon_1)-2\varepsilon_1<\varphi(\varepsilon)<\varphi(\varepsilon_1)+2\varepsilon_1,$$

то, зафиксировав $\varphi(\varepsilon_1)$ и ε_1, можно сказать, что

$$|\varphi(\varepsilon)|<A,$$

где A — некоторое число, от ε не зависящее.

Далее, если $\psi(0)=\beta\neq 0$, например $\beta>0$, то при некотором ε_1 $\psi(\varepsilon_1)-0>2\varepsilon_1$, или $\psi(\varepsilon_1)-2\varepsilon_1>0$. Поэтому, пользуясь написанными выше неравенствами, будем иметь для $\varepsilon<\varepsilon_1$

$$\varphi(\varepsilon)>C>0,$$

где C — число, от ε не зависящее. Вообще (при $\beta\gtrless 0$)

$$|\varphi(\varepsilon)|>C>0$$

для всех $\varepsilon<\varepsilon_1$. Имея это в виду, положим, что

$$|\varphi(\varepsilon)|<A \quad \text{и} \quad |\psi(\varepsilon)|<B,$$

и рассмотрим систему чисел

$$\varphi(\varepsilon)\cdot\psi(\varepsilon).$$

Мы найдем

$$|\varphi(\varepsilon)\psi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')\psi(\varepsilon')|\leqslant|\varphi(\varepsilon)||\psi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon')|+$$
$$+|\psi(\varepsilon')||\varphi(\varepsilon')-\varphi(\varepsilon)|<(A+B)(\varepsilon+\varepsilon').$$

Поэтому положим

$$\chi(\varepsilon)=\varphi\left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right)\cdot\psi\left(\frac{\varepsilon}{A+B}\right). \tag{2}$$

Тогда предыдущее неравенство дает

$$|\chi(\varepsilon)-\chi(\varepsilon')|<\varepsilon+\varepsilon'.$$

Число $\chi(0)$, заданное системой приближений $\chi(\varepsilon)$, мы и называем, по определению, **произведением** чисел $\varphi(0)$ и $\psi(0)$. В формуле (2) содержится и ответ на вопрос о степени точности в вычислении произведения, за которую можно поручиться при оперировании с приближенными значениями сомножителей. Произведение определено однозначно, так как при переходе к неполным системам, а также при возможных изменениях в выборе чисел A и B мы получаем, согласно n° 1 (стр. 267) системы приближений $\chi(\varepsilon)$, определяющие одно и то же число.

Аналогично, для системы дробей

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)}$$

при $|\varphi(\varepsilon)|<A$; $0<C<|\psi(\varepsilon)|<B$ найдем:

$$\left|\frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)}-\frac{\varphi(\varepsilon')}{\psi(\varepsilon')}\right| \leqslant \left|\frac{\varphi(\varepsilon)\psi(\varepsilon')-\psi(\varepsilon)\varphi(\varepsilon')}{\psi(\varepsilon)\psi(\varepsilon')}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\varphi(\varepsilon)||\psi(\varepsilon')-\psi(\varepsilon)|+|\psi(\varepsilon)||\varphi(\varepsilon)-\varphi(\varepsilon')|}{|\psi(\varepsilon)||\psi(\varepsilon')|} < \frac{A+B}{C^2}(\varepsilon+\varepsilon').$$

Поэтому положим:

$$\chi(\varepsilon)=\varphi\left(\frac{C^2\varepsilon}{A+B}\right)\cdot\psi\left(\frac{C^2\varepsilon}{A+B}\right). \tag{3}$$

Тогда предыдущее неравенство дает

$$|\chi(\varepsilon)-\chi(\varepsilon')|<\varepsilon+\varepsilon'.$$

Число $\chi(0)$, заданное системой приближений $\chi(\varepsilon)$, мы и называем, по определению, **частным** от деления числа $\varphi(0)$ на число $\psi(0)$, отличное от нуля.

Так как в ε-системе чисел

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)}\cdot\psi_2(\varepsilon),$$

где $\psi_1(\varepsilon)$ и $\psi_2(\varepsilon)$ оба принадлежат множеству $\psi(\varepsilon)$, содержится как часть ε-система

$$\frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)}\cdot\psi_1(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon),$$

то

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta=\alpha,$$

т. е. операция деления есть действие, *обратное* по отношению к умножению.

Примечание. Нетрудно видеть, что с точки зрения теории Дедекинда выведенные выше соотношения являются следствием неравенств типа $|\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)|\leqslant\varepsilon$ и формул $\gamma=\alpha+\beta$ и т. д., а потому результаты одноименных операций в обеих теориях должны совпадать.

3. Рассматривая внимательнее вопрос о том, от каких свойств операций сложения, вычитания, умножения и деления зависит возможность распространить определения этих действий на действительные числа, мы видим, что здесь, в противоположность теории Дедекинда, мы и используем лишь выражаемое равенствами (1), (2) и (3) свойство *непрерывности* этих операций, совершенно не опираясь *в самом построении ε-систем* $\chi(\varepsilon)$ на свойство *монотонности* соответствующих операций.

Требование же непрерывности лежит в существе дела, как мы это сейчас выясним, поставив вопрос в более общей форме.

Пусть для рациональных значений аргументов функция

$$u=f(x, y, z, \ldots)$$

определена и однозначна и речь идет о распространении определения этой функции на *действительные* значения $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ее аргументов.

Согласно общей концепции действительного числа, которую мы сейчас рассматриваем, можно, грубо говоря, сказать, что такое определение возможно будет провести по известной нам схеме только в том случае, если функция f такова, что *система ее значений*

$$f(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \ldots)$$

для элементов систем ε-приближений

$$\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon), \ldots$$

аргументов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *может рассматриваться как некоторая система приближений к какому-то действительному числу.*

Так как принадлежность $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \ldots$ системам приближения характеризуется малостью уклонений $\alpha(\varepsilon)$ от $\alpha(\varepsilon')$ и т. д. при малых ε и аналогичным образом характеризуется принадлежность значений f некоторой системе приближений, то требуемое свойство функции f заключается, очевидно, в следующем.

Для всех рациональных значений аргументов, лежащих в некоторой фиксированной области изменения чисел $\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \ldots$, уклонение двух значений функции $f(x, y, z, \ldots)$ и $f(x', y', z', \ldots)$ друг от друга может быть сделано *сколь угодно малым* за счет *достаточной* малости разностей $|x-x'|$, $|y-y'|$ и т. д.

Точнее говоря, для всякого $\varepsilon>0$ мы должны быть в состоянии указать такое $\delta(\varepsilon)$, что при любых значениях x и x', y и y' и т. д. в данной области их изменения из неравенств

$$|x-x'|<\delta(\varepsilon), \quad y-y'|<\delta(\varepsilon), \ldots \tag{4}$$

вытекает неравенство

$$|f(x, y, \ldots) - f(x', y', \ldots)|<\varepsilon. \tag{5}$$

Это свойство известно под названием ***равномерной непрерывности*** функции в данной области значений $x, y, \ldots$ (ср. § 55).

При невыполнении указанного условия функция f непригодна для приближенных вычислений: *малым уклонениям* в результатах, скажем для конкретности, отдельных измерений, приводящих к числам $x', y', \ldots$, будут соответствовать беспорядочные и во всяком случае *не сколь угодно малые уклонения значений функции f друг от друга.* Бессмысленно было бы на основании таких результатов вычислений говорить о каком-то определенном значении $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ для действительных значений аргументов $x=\alpha$, $y=\beta, \ldots$

При этом мы должны иметь в виду именно свойство *равномерной* непрерывности в некоторой области значений аргументов потому, что выполнение неравенства (5) должно быть *обеспечено* на основе неравенств (4) независимо от того, какие именно, заранее неизвестные, значения принимают числа $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, ... в соответствующих интервалах, окружающих числа α, β, ... О поведении же функции f *для этих действительных* значений аргументов мы, естественно, на данной стадии построения вообще еще ничего не имеем права говорить.

Итак, докажем теперь в общем виде, что *всякая равномерно непрерывная операция, определенная для рациональных значений аргументов, допускает распространение этого определения и на действительные значения этих аргументов, притом так, что операция f и в действительной области сохраняет свойство непрерывности, а также и выраженные в форме соотношений между непрерывными функциями функциональные свойства, которыми она обладала для рациональных значений аргументов.*

С этой целью, определив, на основании свойства равномерной непрерывности $\delta(\varepsilon)$ по заданному ε, рассмотрим приближения:

$$\alpha(\bar{\varepsilon}),\ \beta(\bar{\varepsilon}),\ \ldots,$$

для которых

$$\bar{\varepsilon}\leqslant\frac{\delta(\varepsilon)}{2}.$$

Тогда при $\bar{\varepsilon'}\leqslant\bar{\varepsilon}$ будем иметь

$$|\alpha(\bar{\varepsilon})-\alpha(\varepsilon')|\leqslant\bar{\varepsilon}+\bar{\varepsilon}'<2\bar{\varepsilon}\leqslant\delta(\varepsilon)$$

и т. д. Отсюда будет следовать

$$|f(\alpha(\bar{\varepsilon}),\ \beta(\bar{\varepsilon}),\ \ldots)-f(\alpha(\bar{\varepsilon}'),\ \beta(\bar{\varepsilon}'),\ \ldots)|<\varepsilon.$$

Положим

$$\chi(\varepsilon)=f(\alpha(\bar{\varepsilon}),\ \beta(\bar{\varepsilon}),\ \ldots),\ \text{где}\ \bar{\varepsilon}=\frac{\delta(\varepsilon)}{2},$$

и при $\varepsilon'<\varepsilon$

$$\chi(\varepsilon')=f(\alpha(\bar{\varepsilon}'),\ \beta(\bar{\varepsilon}'),\ \ldots),$$

где $\bar{\varepsilon}'=\frac{\delta(\varepsilon')}{2}$, причем можно, по смыслу функции $\delta(\varepsilon')$, принять $\delta(\varepsilon')\leqslant\delta(\varepsilon)$ и потому $\bar{\varepsilon}'\leqslant\bar{\varepsilon}$.

Тогда мы будем иметь

$$|\chi(\varepsilon)-\chi(\varepsilon')|<\varepsilon,$$

а потому и подавно

$$|\chi(\varepsilon)-\chi(\varepsilon')|<\varepsilon+\varepsilon',$$

так что числа $\chi(\varepsilon)$ действительно представляют собой систему ε-приближений некоторого действительного числа ω, которое и принимается по определению за значение функции $f(x,\ y,\ \ldots)$ при $x=\alpha$, $y=\beta$, ... т. е.

$$\omega=f(\alpha,\ \beta,\ \ldots).$$

В силу соображений, основанных на применении п. 1 стр. 267, число ω не зависит от того, какими именно системами приближений определены числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, а также и от возможных модификаций связи между числами ε и ε.

Далее, из написанных выше неравенств будет вытекать, что

$$|f(x, y, \ldots)-f(\alpha, \beta, \ldots)| \leqslant \varepsilon,$$

коль скоро $|x-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$, $|y-\beta| \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$, и т. д.

Отсюда непосредственно следует непрерывность функции f для действительных значений аргументов. В самом деле, если α и $\bar{\alpha}$ уклоняются друг от друга меньше, чем на $\delta(\varepsilon)$, то можно выбрать рациональные значения x, уклоняющиеся от каждого из чисел α и $\bar{\alpha}$ не больше, чем на $\frac{1}{2}\delta(\varepsilon)$. Применяя только что написанное неравенство, найдем, что при этом будет

$$|f(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots)-f(\alpha, \beta, \ldots)| \leqslant 2\varepsilon.$$

Наконец, если для рациональных значений аргументов имело место тождество

$$F(f_1(x, y, \ldots), f_2(x, y, \ldots), \ldots, f_k(x, y, \ldots))=0,$$

где $F, f_1, f_2, \ldots, f_k$ — функции, удовлетворяющие условиям доказываемой теоремы, то при распространении определения этих функций на действительные значения аргументов в каждом множестве системы ε-приближений для значения функции F найдутся числа, равные нулю, откуда по замечанию (1) стр. 267 следует, что и для действительных значений аргументов тождество

$$F(f_1(\alpha, \beta, \ldots), f_2(\alpha, \beta, \ldots), \ldots, f_k(\alpha, \beta, \ldots))=0$$

должно иметь место.

Распространения определения основных операций (сложение, вычитание, умножение, деление, возвышение в степень и т. д.) на действительные значения аргументов представляют собой не что иное, как приложения приведенной здесь общей схемы к частным случаям.

Заметим, что при этом мы получаем и общее доказательство соответствующих теорем о пределе суммы, произведения, дроби и т. д., эквивалентных утверждению о непрерывности функций $x+y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ и т. д. в действительной области. С этим связано и то обстоятельство, что взаимоотношение между неравенствами (4) и (5) формально совпадает с тем, которое используется при обычном непосредственном доказательстве тех же теорем даже в том случае, когда по методическим соображениям не приходится опираться на строгую теорию иррациональных чисел. Это и естественно: обычный динамический способ выражения элементарной теории пределов есть лишь частная интерпретация изучаемых здесь взаимоотношений, связанных с понятием о приближениях с любой степенью точности.

Использованное выше неравенство

$$\varepsilon \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$$

в связи с соотношением

$$\chi(\varepsilon) = f(\alpha(\bar{\varepsilon}), \beta(\bar{\varepsilon}), \ldots).$$

отвечает на вопрос о том, *при какой степени точности* ε в определении значений x', y', z', ... аргументов функции f *обеспечена заданная степень точности* ε в определении искомого значения ω по формуле:

$$u' = f(x', y', z', \ldots).$$

Здесь, конечно, речь идет только об *обеспеченности*, так что не исключается возможность, что значение u' будет при этом выражать ω с нужной степенью точности и при менее близких к α, β, γ, ... значениях x', y', z', ...

4. Итак, мы видим, что свойство равномерной непрерывности играет решающую роль в выделении тех функций, для которых возможно оперирование с действительными числами в той форме, которая соответствует идеализированному процессу измерения. Так, как на практике всегда речь может итти только об *оперировании приближенными значениями*, то можно, в частности, сказать, что *в окрестности точек разрыва* функциональная зависимость

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

может потерять свой непосредственный смысл математического выражения имеющей место в действительности количественной связи между величинами u, x, y, z, ... Часто это обстоятельство служит указанием на качественные отличия в течение изучаемого явления вблизи таких значений x, y, z, ... ; эти отличия могут потребовать отказа от установленной для других значений аргументов формулы $u = f(x, y, z, \ldots)$.

Как мы видели в § 55, в том случае, когда мы имеем дело с функцией, определенной и непрерывной для всех действительных значений аргументов в замкнутой области, свойство *равномерной непрерывности* может быть *доказано*.

Поставленное выше условие равномерной непрерывности в рациональной области является, таким образом, *необходимым* условием для того, чтобы в действительной области функция $f(x, y, z, \ldots)$ оказалась *непрерывной*. Потребовать же для *рациональных* значений x, y, z, ... просто непрерывности *в каждой рациональной точке* недостаточно, ибо для функций, *определенных лишь в рациональных точках* из только что приведенного требования свойство *равномерной* непрерывности *не вытекает*.

На этом мы и закончим эту главу, переходя теперь к независимому от предыдущего изложению наиболее важного частного случая построения ε-приближений действительных чисел, именно, к теории сходящихся последовательностей Кантора.

ГЛАВА IX.

ТЕОРИЯ СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАНТОРА.

§ 73. Критерий сходимости Коши и его использование Кантором.

1. Теория сходящихся последовательностей, созданная известным уже нам по первой главе германским математиком почти одновременно с Дедекиндом, была вызвана к жизни той же потребностью обоснования основных положений анализа, о которой уже говорилось в § 46. Однако, за исходный пункт построения Кантор принял не деление чисел на два класса, придающее всей теории Дедекинда характер преимущественно *логической* теории, а определение иррациональных чисел с помощью *последовательностей* рациональных чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots \tag{1}$$

носящее ярко выраженный *аналитический* характер. Действительно, такого рода последовательности непосредственно получаются как результат приближенных вычислений с возрастающей степенью точности, а также представляют весьма общую форму различных предельных процессов анализа, в первую очередь процессов, связанных с разложением в бесконечные ряды.

Существование *расходящихся* последовательностей, не определяющих *никакого* числа, показывает, что не всякая последовательность типа (1) может быть использована при построении теории действительных чисел. Кантору пришлось, поэтому, задаться вопросом о том, какие же ограничения нужно наложить в общем случае на элементы $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ последовательности, определяющей действительное число. Почва, однако, в этом отношении была уже подготовлена.

Задача установления *признаков стремления к пределу* последовательностей типа

$$s_1 = a_1;\ s_2 = a_1 + a_2;\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ \ldots,$$

т. е. признаков сходимости бесконечных рядов

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

приобретавшая все большее и большее значение одновременно с расширением области приложений теории бесконечных рядов.

была в начале XIX века разрешена в общей форме французским математиком Коши (*Cauchy*).

К этому времени получили права гражданства ряды с комплексными членами, для которых соображения, основанные на рассмотрении ограниченных монотонных последовательностей, служившие (ср. § 69) источником утверждений о существовании предела для последовательностей с действительными членами, оказались уже недостаточными.

Коши установил носящий теперь его имя необходимый и достаточный признак сходимости бесконечного ряда (с действительными или комплексными членами). Этот признак заключается в том, что суммы

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_m,$$

выражающие разность

$$s_m - s_n$$

между двумя какими-либо членами исследуемой последовательности

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots,\ s_m,\ \ldots$$

частных сумм ряда

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$$

должны по модулю *становиться сколь угодно малыми* при возрастании индекса n и любом значении $m>n$.

В применении к последовательностям $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$, элементы которых вовсе не обязательно рассматривать как частные суммы какого-либо ряда, критерий сходимости Коши можно, стало быть, формулировать так: *для того, чтобы последовательность*

$$s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$$

стремилась к какому-нибудь (конечному) *пределу, необходимо и достаточно*, чтобы члены этой последовательности с возрастанием индекса *неограниченно сближались между собой* („*сходились*"), т. е. *чтобы для всякого* $\varepsilon>0$ *можно было указать такой индекс* $N(\varepsilon)$, *начиная с которого, при* $n>N(\varepsilon)$ *и* $m>N(\varepsilon)$ *разность любых двух членов последовательности была бы по абсолютной величине меньше* ε:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

при

$$n>N(\varepsilon) \quad \text{и} \quad m>N(\varepsilon).$$

Последовательности, удовлетворяющие этому условию, мы будем в дальнейшем для краткости просто называть „***сходящимися***".

Примеры

1. Последовательность $s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$, общий член которой

$$s_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2},$$

сходится, так как при $n > m > 1$ имеют место соотношения

$$s_n - s_m = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.$$

2. Последовательность $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, общий член которой

$$\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

расходится, так как при $n > m$

$$\sigma_n - \sigma_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} > \varepsilon,$$

если только

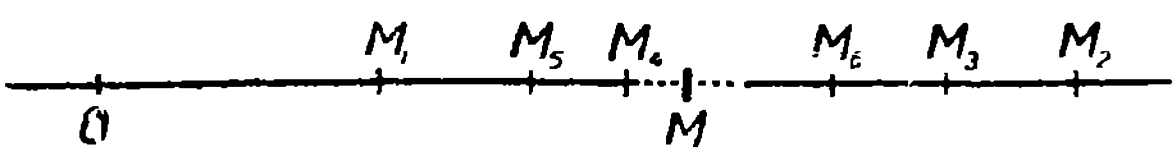
$$n > \frac{m}{1-\varepsilon},$$

причем предположено, что $0 < \varepsilon < 1$.

2. Вследствие отсутствия строгой теории иррациональных чисел указанный признак существования предела у Коши был лишен строго аналитического обоснования.

Кантор обратил внимание на то, что этот признак сам по себе характеризует *внутренние* свойства последовательности, т. е. может быть формулирован и проверяем без того, чтобы говорить о самом *пределе* последовательности. Поэтому этот признак может быть использован *до введения* иррациональных чисел для *выделения класса тех последовательностей рациональных чисел* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, с помощью которых можно *определять* действительные и, в частности, *вводить* иррациональные числа.

Поясним эту постановку вопроса. Поставим себя в то исходное положение, в котором находились Дедекинд и Кантор до создания арифметической теории действительных чисел (ср. § 46), т. е. допустим, что мы имеем дело, с одной стороны, с непрерывными величинами, главнейшие свойства которых мы основываем на наших наглядных представлениях, и, с другой стороны, с системой *рациональных* чисел, которую мы желаем дополнить новыми числами так, чтобы система действительных чисел обладала основными свойствами непрерывной величины.



Черт. 22.

Представим себе геометрическую прямую и на ней некоторую последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ с абсциссами $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ (черт. 22). Если эти точки $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ с возрастанием n приближаются на геометрической прямой к некоторому предельному положению M, то это означает, что для любого ε, начиная с некоторого $n > N(\varepsilon)$, все точки M_n

должны попадать в интервал (A, B) длиной не более ε, содержащий в центре точку M (черт. 23). Но тогда наверное расстояние между двумя любыми точками M_n и M_m при $n>N(\varepsilon)$ и $m>N(\varepsilon)$ будет меньше ε, т. е.

$$|u_n - u_m| < \varepsilon. \tag{2}$$

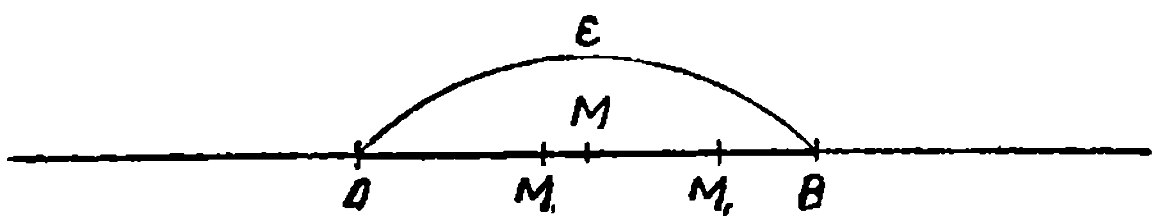
Если теперь рассмотреть точку M, соответствующую несоизмеримому с единицей длины отрезку OM, а последовательность составить из точек M_1, M_2, ... с *рациональными* абсциссами $OM_1 = u_1$, $OM_2 = u_2$, ..., то *до введения иррациональных чисел* мы окажемся в следующем положении:

1) точки последовательности M_1, M_2, ..., M_n, ... стремятся к некоторому предельному положению M и

2) соответствующая последовательность рациональных чисел u_n, *удовлетворяя* в силу наличия предельной точки M условию (2), т. е. являясь *сходящейся*, тем не менее, *не имеет никакого предела*, т. е. *не существует* никакого рационального (а других чисел еще нет) числа l, удовлетворяющего соотношению

$$|u_n - l| < \varepsilon$$

при всех достаточно больших n.



Черт. 23.

Для порядка докажем от противного это весьма очевидное утверждение. Пусть M' есть точка с абсциссой l, удовлетворяющей указанному неравенству. Тогда M' должна лежать в интервале, концы которого суть точки с абсциссами $u_n - \varepsilon$ и $u_n + \varepsilon$ (при достаточно большом n). Но если n выбрано настолько большим, что интервал (A, B) длины ε с центром в M заключает в себе точку M_n (см. выше), то и M будет лежать в указанном интервале, концы которого имеют абсциссы $u_n - \varepsilon$ и $u_n + \varepsilon$. Стало быть, отрезок MM' во всяком случае меньше отрезка длины 2ε. Так как ε произвольно мало, то это возможно лишь в том случае, когда M и M' совпадают. Это, однако, невозможно, ибо по предположению OM есть *несоизмеримый* с единицей меры отрезок и потому не может выражаться рациональным числом l.

3. Итак, в свойствах последовательностей наличие несоизмеримых отрезков или, что то же, наличие *пустых мест* в системе рациональных чисел обнаруживается в том, что *некоторые последовательности рациональных чисел*, для которых соответствующие точки M_1, M_2, ... стремятся на геометрической прямой к некоторому предельному положению и которые вследствие этого *удовлетворяют критерию сходимости* (2), тем не менее *не имеют предела в системе рациональных чисел.*

Положение здесь вполне аналогично тому, которое было нами обнаружено выше при рассмотрении *сечений*, произведенных в системе рациональных чисел (см. § 49).

Соответственно с этим и основной шаг Кантора в построении теории действительных чисел аналогичен основному шагу Дедекинда: Кантор рассматривает каждую *сходящуюся* последовательность рациональных чисел, т. е. последовательность

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots,$$

удовлетворяющую для любого $\varepsilon > 0$ условиям

$$|r_n - r_m| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$, как *определяющую некоторое* (рациональное или иррациональное) *действительное число*.

В случаях, аналогичных рассмотренному, когда отсутствует рациональный предел сходящейся последовательности, *самая эта последовательность* и используется, таким образом, для *введения* соответствующего *иррационального* числа.

Соотношения между действительными числами и основные операции над ними определяются, в соответствии с этим, как соотношения между элементами сходящихся последовательностей рациональных чисел.

Свойство *непрерывности* (полноты) системы действительных чисел формулируется в теории Кантора так: „всякая сходящаяся последовательность действительных чисел имеет действительный (рациональный или иррациональный) предел" и должно быть доказано.

Соответствующее положение для сходящихся последовательностей точек на геометрической прямой является основным геометрическим постулатом, характеризующим непрерывную заполненность прямой точками и заменяющим формулировку этого свойства, основанную на понятии сечения.

В отношении установления основных определений в теории Кантора нужно подчеркнуть еще следующее.

Легко обнаруживаемая связь между операциями над последовательностями r_n, имеющими *рациональные* пределы, и операциями *над самими этими пределами* может играть наводящую роль при установлении соответствующих *определений* для иррациональных чисел, вводимых с помощью сходящихся последовательностей, *не имеющих предела* (*рационального*, разумеется, ибо только о таком пределе и может здесь до введения иррациональных чисел итти речь).

Мы встречаемся здесь вновь с *принципом перманентности*, о котором шла речь в § 38. Суть дела и здесь заключается в том, что, используя указанным образом последовательности, имеющие рациональные пределы, мы оперируем *как раз с теми общими взаимоотношениями*, которые имеют место для непрерывных величин и которые мы желаем отразить в вводимой системе действительных чисел.

С формальной же точки зрения надо иметь в виду необходимость проверки того, что вновь вводимые определения для действительных чисел не противоречат прежним определениям, установленным в рациональной области в тех случаях, когда сходящиеся последовательности, с которыми мы имеем дело, имеют рациональные пределы и определяют, таким образом, рациональные числа.

Мы представляем и рекомендуем читателю в качестве упражнения в соответствующих местах § 76 самому найти и использовать те соотношения, верные для последовательностей, имеющих пределы, которые могут играть роль наводящих указаний при установлении основных определений теории Кантора.

§ 74. Связь с теорией ε-приближений.

Прежде чем итти дальше, заметим, что теория сходящихся последовательностей содержится, как частный случай, в изложенной теории ε-приближений.

Действительно, пусть дана некоторая сходящаяся последовательность

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots;$$

обозначим множество всех тех ее элементов

$$u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots,\ u_m,\ \ldots,$$

для которых выполнено неравенство

$$|u_n - u_m| < \varepsilon, \qquad (1)$$

т. е. совокупность всех u_n при $n > N(\varepsilon)$ через $\varphi(\varepsilon)$.

При $\varepsilon' < \varepsilon$ наверное $N(\varepsilon') \geqslant N(\varepsilon)$ и, следовательно, множество $\varphi(\varepsilon')$ составит часть множества $\varphi(\varepsilon)$.

Поэтому неравенство (1) можно записать так

$$|\varphi(\varepsilon) - \varphi(\varepsilon')| < \varepsilon \text{ при } \varepsilon' \leqslant \varepsilon,$$

а в этой форме оно выражает, во всяком случае, *достаточное* условие того, чтобы система чисел $\varphi(\varepsilon)$, состоящая из всех элементов последовательности u_1, u_2, ..., начиная с некоторого, могла быть рассматриваема, как система ε-приближений некоторого действительного числа.

Сходящиеся последовательности представляют собой, таким образом, один из простейших видов образования систем ε-приближений в форме бесконечных отрезков

$$u_{n+1},\ u_{n+2},\ \ldots$$

всех членов последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, начиная с некоторого.

Обратно, неравенство (1) есть, как мы видели (стр. 268, n° 4, 5), *необходимое* условие того, чтобы отрезки последовательности, обозначенные через $\varphi(\varepsilon)$, были приближениями к некоторому действительному числу с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$.

Из теории ε-приближений вытекает, таким образом, *необходимость и достаточность критерия Коши* $|u_n - u_m| < \varepsilon$ для существования предела последовательности u_n.

Проведенное здесь доказательство можно слово в слово повторить и для того случая, когда имеют дело не с последовательностью, а с системой значений $u(x)$ переменной x, изменяющейся непрерывно так, что $x \to \infty$ или $x \to a$, и интересуются вопросом о *существовании предела*

$$\lim_{x \to \infty} u(x) \text{ или } \lim_{x \to a} u(x).$$

В первом случае неравенство

$$|u(x') - u(x'')| < \varepsilon$$

должно быть выполнено для всех достаточно больших значений x' и x'', т. е. при

$$x' > N(\varepsilon) \text{ и } x' > N(\varepsilon),$$

во втором — для тех x' и x'', которые лежат в достаточно малой окрестности точки a, так что

$$0 < |x' - a| < \delta(\varepsilon) \text{ и } 0 < |x'' - a| < \delta(\varepsilon).$$

В этой форме критерий Коши является необходимым и достаточным признаком существования предела функции от непрерывно изменяющейся переменной.

Следует, впрочем, заметить, что только что приведенная формулировка может быть заменена равносильным критерием, относящимся лишь к *последовательностям*.

Именно, если, например, $\lim\limits_{x \to a} u(x) = L$, то, очевидно, для всякой последовательности x_n, имеющей предел a, соответствующая последовательность $u(x_n)$ сходится и имеет предел L.

Обратно, если *всякая последовательность* типа $u(x_n)$ при $x_n \to a$ *сходится*, то предел $\lim\limits_{x \to a} u(x)$ существует и при любом способе приближения x к a. Действительно, допуская противное и используя критерий Коши в приведенной выше форме, мы могли бы найти такое $\varepsilon > 0$, что неравенство

$$|u(x'_n) - u(x''_n)| < \varepsilon$$

нарушалось бы при любом выборе δ_n для некоторых значений x'_n и x''_n, удовлетворяющих неравенствам $|x'_n - a| < \delta_n$ и $|x''_n - a| < \delta_n$. Выбирая последовательность $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, так, чтобы $\delta_n \to 0$, мы могли бы таким путем построить последовательность

$$x'_1,\ x''_1,\ \ldots,\ x'_n,\ x''_n,\ \ldots,$$

имеющую предел a, между тем как соответствующая последовательность

$$u(x'_1),\ u(x''_1),\ \ldots,\ u(x'_n),\ u(x''_n),\ \ldots$$

в силу соотношений

$$|u(x'_n) - u(x''_n)| \geq \varepsilon$$

была бы, вопреки условию, расходящейся. Поэтому предел $\lim\limits_{x \to a} u(x)$ должен существовать, откуда уже само собой вытекает, что все последовательности типа $u(x_n)$, о которых было лишь известно, что они сходятся, должны иметь один и тот же предел, равный числу $L=\lim\limits_{x\to a} u(x)$.

Доказанное предложение позволяет, таким образом, определения и критерии сходимости, относящиеся к переменным с непрерывными областями изменения, формулировать в терминах, относящихся к *последовательностям*.

§ 75. Критерий сходимости Коши с точки зрения теории Дедекинда.

Ввиду фундаментального значения критерия Коши для построения теории иррациональных чисел по Кантору проведем для последовательностей доказательство соответствующей основной теоремы с *точки зрения теории Дедекинда* (независимо от теории ε-приближений) в следующей формулировке.

Теорема. *Для того чтобы последовательность* (рациональных или вообще действительных чисел)

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

имела пределом некоторое действительное число, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие сходимости Коши, т. е. чтобы для любого $\varepsilon>0$ было

$$|u_n-u_m|<\varepsilon$$

при $m>n>N(\varepsilon)$.

Необходимость условия доказывается совсем просто.

Пусть $\lim u_n=\alpha$. Тогда по определению предела при n и m, бо́льших некоторого $N(\varepsilon)$, найдем

$$|u_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |\alpha-u_m|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|u_n-u_m|\leqslant|u_n-\alpha|+|\alpha-u_m|<\varepsilon.$$

Для доказательства достаточности используем основную лемму § 59.

Пусть $|u_n-u_m|<\varepsilon$ при $m>n>N(\varepsilon)$. Рассмотрим неограниченно убывающую последовательность чисел

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n,\ \ldots\quad \left(\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\right)$$

и выберем соответствующую систему значений

$$u_{n_1},\ u_{n_2},\ \ldots,\ u_{n_i}\ \ldots,$$

для каждого из которых

$$n_i>N(\varepsilon_i)$$

так, что

$$|u_{n_i}-u_m|<\varepsilon_i$$

при $m>n_i>N(\varepsilon_i)$.

Два класса чисел R

$$u_{n_1}-\varepsilon_1,\quad u_{n_2}-\varepsilon_2,\ \ldots$$

и R'

$$u_{n_1}+\varepsilon_1,\quad u_{n_2}+\varepsilon_2,\ \ldots$$

удовлетворяют, как нетрудно видеть, условиям основной леммы § 59.

Действительно,

$$(u_{n_s}+\varepsilon_s)-(u_{n_k}-\varepsilon_k)\geqslant\varepsilon_s+\varepsilon_k-|u_{n_k}-u_{n_s}|>0,$$

ибо при $k>s$ наверно $|u_{n_k}-u_{n_s}|<\varepsilon_s$, а при $s<k$ наверно

$$|u_{n_k}-u_{n_s}|<\varepsilon_k.$$

Стало быть, все числа типа $u_{n_i}-\varepsilon_i$ меньше чисел типа $u_{n_i}+\varepsilon_i$.

Разность же

$$(u_{n_i}+\varepsilon_i)-(u_{n_i}-\varepsilon_i)=2\varepsilon_i$$

может быть сделана сколь угодно малой.

Таким образом мы можем утверждать существование единственного действительного числа α, удовлетворяющего неравенствам

$$u_{n_i}-\varepsilon_i\leqslant\alpha\leqslant u_{n_i}+\varepsilon_i,$$

из которых следует:

$$|\alpha-u_{n_i}|<\varepsilon_i.$$

Выбрав $\varepsilon_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, найдем при $m>n_i>N(\varepsilon_i)$

$$|u_m-\alpha|\leqslant|u_m-u_{n_i}|+|u_{n_i}-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{m\to\infty}u_m=\alpha.$

То обстоятельство, что и обратно, *всякое действительное число можно рассматривать как предел некоторой последовательности*, также непосредственно вытекает *из теории Дедекинда*, независимо от теории ε-приближений.

Действительно, если дано сечение (A, A') в области рациональных чисел, то, следуя хотя бы пути, указанному на странице 210 (§ 60), мы можем построить две последовательности рациональных чисел:

$$a_n=c_0+\frac{c_1}{d}+\ldots+\frac{c_n}{d^n}$$

и

$$b_n=c_0+\frac{c_1}{d}+\ldots+\frac{c_n+1}{d^n},$$

причем $a_n\subset A$ и $b_n\subset A'$.

Так как притом

$$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\ldots\leqslant a_m<b_m\leqslant\ldots\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$$

и

$$b_n-a_n=\frac{1}{d^n}<\varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, то при $m > n > N(\varepsilon)$ будет:

$$|a_n - a_m| \leqslant |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

а также

$$|b_n - b_m| < |b_n - a_n| < \varepsilon,$$

т. е. *обе последовательности* a_n и b_n *сходятся*. Число α, производящее сечение (A, A'), удовлетворяет, с другой стороны, неравенствам

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n$$

при всяком n и, стало быть,

$$|a_n - \alpha| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$$

и

$$|b_n - \alpha| \leqslant b_n - a_n | < \varepsilon$$

при достаточно большом n.

Другими словами, число α является *общим пределом* сходящихся последовательностей a_n и b_n, так что

$$\alpha = \lim a_n = \lim b_n.$$

Это доказательство показывает, в частности, что при определении иррациональных чисел с помощью *систематических дробей* (§ 60) *сходимость применяемых последовательностей обеспечивается уже самой формой их задания* — преимущество, которого лишена общая теория Кантора.

Предпосылая эти теоремы систематическому изложению теории Кантора, мы с особой настоятельностью обращаем внимание читателя на то, что здесь речь идет о *теоремах* лишь с точки зрения законченных уже теорий иррациональных чисел, *отличных от теории Кантора. В независимом* от других теорий построении теории Кантора условие сходимости *не есть нечто доказуемое*; введение этого условия обосновывается соображениями *наводящего* характера, например приведенными на странице 280, и оправдывается a posteriori достигаемой при этом непрерывностью области действительных чисел.

§ 76. Теория действительных чисел по Кантору.

1. Соответственно со сказанным в § 74 настоящей главы, построение теории действительных чисел на основе критерия сходимости § 73 протекает совершенно аналогично изложенной выше теории ε-приближений. Не опираясь на эту последнюю, приведем основные определения и теоремы теории Кантора.

Определение 1. *Всякая сходящаяся последовательность* (см. стр. 278) *рациональных чисел*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

определяет некоторое ***действительное число,*** *которое мы будем обозначать знаком*

$$[a_n].$$

Определение 2. Два действительных числа

$$\alpha=[a_n] \text{ и } \beta=[b_n],$$

определенные соответственно сходящимися последовательностями a_n и b_n, называются *равными*, если для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что

$$|a_n-b_n|<\varepsilon \tag{1}$$

для юбых значений n, бо́льших $N(\varepsilon)$.

Число α по определению *больше* β, если можно указать хотя бы одно такое положительное δ, для которого

$$a_n-b_n>\delta \tag{2}$$

при *всех* n, бо́льших некоторого $N_1(\delta)$.

Очевидно, соотношения $\alpha=\beta$ и $\alpha>\beta$ исключают друг друга.

Докажем теперь, что для всяких двух действительных чисел α и β *должно иметь место* одно из трех соотношений $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$ или $\alpha<\beta$.

В самом деле, пусть соотношения $\alpha>\beta$ и $\alpha<\beta$ не имеют места. Это значит, что *для всякого* $\delta>0$ найдутся вопреки условию (2) *сколь угодно большие* значения m, для которых

$$|a_m-b_m|\leqslant\delta. \tag{3}$$

Возьмем произвольное ε и выберем число $\delta<\frac{\varepsilon}{3}$ и число $\varepsilon'\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $N(\varepsilon')$ есть тот номер, начиная с которого, имеют место неравенства

$$|a_n-a_m|<\varepsilon' \text{ и } |b_n-b_m|<\varepsilon'.$$

Тогда, *каково бы ни было* $n>N(\varepsilon')$, мы найдем, полагая, что $m>N(\varepsilon)$ подобрано в соответствии с соотношением (3),

$$|a_n-b_n|\leqslant|a_n-a_m|+|a_m-b_m|+|b_m-b_n|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

т. е. по определению

$$\alpha=\beta.$$

Итак, если ни одно из соотношений $\alpha<\beta$ и $\alpha>\beta$ не выполняется, то наверное $\alpha=\beta$.

Легко видеть, что если при достаточно большом n выполняются неравенства

$$a_n>b_n \text{ или } a_n\geqslant b_n,$$

то соотношение $\alpha<\beta$ согласно определению не может уже иметь места. По только что доказанному отсюда следует, что *должно* быть

$$\alpha\geqslant\beta.$$

С таким *ослаблением* неравенств при переходе от членов последовательности к определяемым ими числам часто приходится иметь дело на практике.

Легко, далее, проверить, что если $\alpha=\beta$ и $\beta=\gamma$, то $\alpha=\gamma$. Действительно, если

$$|a_n-b_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $n>N_1(\varepsilon)$ и

$$|b_n-c_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при $n>N_2(\varepsilon)$, то, выбрав из двух чисел N_1 и N_2 наибольшее и обозначив его через $N(\varepsilon)$, мы найдем при $n>N(\varepsilon)$

$$|a_n-c_n|\leqslant|a_n-b_n|+|b_n-c_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т. е.

$$\alpha=\gamma.$$

Аналогично доказывается, что если $\alpha<\beta$ и $\beta<\gamma$, то и $\alpha<\gamma$. В самом деле, выбирая такое N, чтобы при $n>N$ одновременно было

$$b_n-a_n>\delta_1 \text{ и } c_n-b_n>\delta_2,$$

найдем, что

$$c_n-a_n>\delta_1+\delta_2$$

и, стало быть, по определению

$$\alpha<\gamma.$$

Таким образом, приведенными выше определениями устанавливается скалярное расположение системы действительных чисел.

Подчеркнем, что все определения, в частности, определение равенства, относятся к *достаточно большим* значениям индексов. Поэтому произвольное изменение *конечного числа первых членов* сходящейся последовательности *не изменяет определяемого ею действительного числа.*

Система рациональных чисел может быть включена в систему действительных чисел посредством дополнительного соглашения, согласно которому последовательность

$$r,\ r,\ r,\ \ldots,$$

все члены которой равны рациональному числу r, определяет это самое число r, так что $[r]=r$.

Отсюда будет вытекать, согласно определению равенства, что всякая последовательность a_n, для которой

$$|a_n-r|<\varepsilon \text{ при } n>N(\varepsilon),$$

определяет число $[a_n]$, *равное* r. Другими словами, введенное условие равносильно тому, чтобы считать, что *все последовательности, имеющие рациональный предел, определяют рациональное число, равное этому пределу* (что и соответствует основной идее Кантора; см. стр. 281).

В отношении скалярного расположения действительных и рациональных чисел требование принципа перманентности (см. § 38) не нарушается, ибо, как нетрудно видеть, соотношения

(1) и (2) влекут за собой соответственно $\alpha=\beta$ и $\alpha>\beta$ в тех случаях, когда α и β — рациональные числа.

2. Перейдем к основным операциям.

Если α и β определены сходящимися последовательностями $[a_n]$ и $[b_n]$, так что
$$\alpha=[a_n] \text{ и } \beta=[b_n],$$
то основные операции над α и β определяются на основе соответствующих действий над элементами последовательностей a_n и b_n согласно формулам
$$\alpha+\beta=[a_n+b_n],\quad \alpha-\beta=[a_n-b_n],$$
$$\alpha\beta=[a_n b_n] \text{ и } \alpha:\beta=[a_n:b_n].$$

При этом в последнем случае мы полагаем $\beta\neq 0$, так что, начиная с некоторого n, наверное
$$|b_n-0|>\delta>0,$$
т. е., начиная с некоторого n („*окончательно*“), все b_n отличны от нуля. Только эти b_n и используются при образовании последовательности $[a_n:b_n]$, первые члены которой можно взять произвольными или вовсе не рассматривать.

Введение этих определений налагает на нас два обязательства:

1) необходимо доказать, что из сходимости последовательностей $[a_n]$ и $[b_n]$ вытекает сходимость всех участвующих в определениях последовательностей $[a_n\pm b_n]$ и т. д.;

2) необходимо доказать, что сумма, разность, произведение и частное действительных чисел α и β не зависят от того, какими именно последовательностями заданы числа α и β, т. е. доказать, что при $[a_n]=[a_n']$ и $[b_n]=[b_n']$ и $[a_n\pm b_n]=[a_n'\pm b_n']$ и т. п.

Отсюда уже будет, в частности, следовать, что в случае, когда
$$[a_n]=r=[r] \text{ и } [b_n]=s=[s],$$
где r и s — рациональные числа,
$$[a_n]\pm[b_n]=[r\pm s]=r\pm s$$
и т. п., так что требование принципа перманентности не нарушается.

Проведение доказательства представляет собой повторение для частных случаев общего рассуждения (см. стр. 274) и основано на известном уже нам свойстве равномерной непрерывности основных операций.

Сложение и вычитание. Пусть при $m>n>N_1(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}$, а при $m>n>N_2(\varepsilon)$ — неравенство $|b_n-b_m|<\frac{\varepsilon}{2}$. Выбрав наибольшее из двух чисел $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ и обозначая его через $N(\varepsilon)$, найдем, что при $m>n>N(\varepsilon)$
$$|(a_n\pm b_n)-(a_m\pm b_m)|<|a_n-a_m|+|b_n-b_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Стало быть, последовательности $a_n + b_n$ и $a_n - b_n$ сходятся, если сходятся a_n и b_n.

Если, далее, $[a_n'] = [a_n]$ и $[b_n'] = [b_n]$, то из верных одновременно, начиная с некоторого N, неравенств

$$|a_n - a_n'| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |b_n - b_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

следует аналогично

$$|(a_n \pm b_n) - (a_n' \pm b_n')| < |a_n - a_n'| + |b_n - b_n'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

так что

$$[a_n \pm b_n] = [a_n' \pm b_n'].$$

Так как

$$[a_n - b_n] + [b_n] = [a_n - b_n + b_n] = [a_n],$$

то операции сложения и вычитания суть обратные друг по отношению к другу действия.

Далее, соотношение

$$[a_n - b_n] = 0$$

означает, по определению равенства, что для достаточно больших n разность

$$|(a_n - b_n) - 0| < \varepsilon,$$

т. е. $|a_n - b_n| < \varepsilon$ и

$$[a_n] = [b_n].$$

Аналогично, если

$$[a_n - b_n] > 0,$$

то, начиная с некоторого $n > N$,

$$a_n - b_n > \delta > 0,$$

т. е.

$$[a_n] > [b_n].$$

Критерий

$$\alpha - \beta \gtreqless 0$$

может, таким образом, в области действительных чисел служить для распознавания взаимного скалярного расположения чисел α и β. Однозначность операции, обратной сложению, доказывается так же, как и на стр. 204.

Остановимся еще вот на чем. Если в неравенствах

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{или} \quad a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon,$$

имеющих место при $n > m > N(\varepsilon)$, зафиксировать число $a_m = r$, то можно написать

$$r - \varepsilon < a_n < r + \varepsilon, \tag{*}$$

откуда будет следовать

$$r - \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant r + \varepsilon$$

или еще

$$\alpha - \varepsilon \leqslant a_m \leqslant \alpha + \varepsilon. \tag{**}$$

Неравенства (*) выражают, что при достаточно большом n члены сходящейся последовательности *ограничены.* Это утверждение можно распространить, если угодно, на совокупность всех членов сходящейся последовательности. Обозначая через B наибольшее из *конечного* числа чисел

$$|a_1|, |a_2|, \ldots |a_m|, |r-\varepsilon| \text{ и } |r+\varepsilon|,$$

мы можем, очевидно, написать:

$$|a_n| < B$$

при любом n.

Неравенство (**) выражает, что при выполнении условия $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при $n > m > N(\varepsilon)$ каждое из чисел a_m при $m > N(\varepsilon)$ является *приближением к a с погрешностью, не превышающей* ε.

В частности, отсюда следует, что при $\alpha > \beta$ между α и β можно вставить *бесчисленное множество рациональных чисел.* Действительно, если δ выбрано так, что $a_n - b_n > \delta > 0$, то при $2\varepsilon < \delta$ наверное будет $a_n - \varepsilon > b_n + \varepsilon$. и так как, по только что доказанному, при достаточно большом n должно быть $\alpha > a_n - \varepsilon$ и $b_n + \varepsilon < \beta$, то все рациональные числа интервала $a_n - \varepsilon$, $b_n + \varepsilon$ во всяком случае удовлетворяют поставленному требованию.

Умножение и деление. По доказанному выше мы можем для сходящихся последовательностей a_n и b_n написать:

$$|a_n| < A \text{ и } |b_n| < B,$$

где A и B — постоянные положительные числа.

Выбрав теперь

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{A+B},$$

найдем при $m > n > N(\varepsilon_1)$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon_1; \quad |b_n - b_m| < \varepsilon_1$$

и, следовательно,

$$|a_n b_n - a_m b_m| < |a_n||b_n - b_m| + |b_n||a_n - a_m| <$$
$$< \frac{A\varepsilon}{A+B} + \frac{B\varepsilon}{A+B} = \varepsilon.$$

Сходимость последовательности $[a_n b_n]$ этим доказана.

Совершенно аналогичные выкладки с заменой a_m и b_m на a_n' и b_n' показывают, что $[a_n' b_n'] = [a_n b_n]$, коль скоро $[a_n] = [a_n']$ и $[b_n] = [b_n']$.

Для доказательства сходимости последовательности $[a_n : b_n]$ выберем

$$\varepsilon_1 < \frac{\delta^2}{A+B}\varepsilon,$$

где δ есть число, о котором речь шла на странице 289, так что

$$0 < \delta < |b_n| < B$$

и

$$|a_n| < A.$$

Пусть эти неравенства, а также неравенства

$$|a_n - a_m| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |b_n - b_m| < \varepsilon_1$$

выполнены при $m > n > N(\varepsilon_1)$.

Тогда

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_m}{b_m}\right| = \frac{|a_n b_m - a_m b_n|}{|b_n b_m|} \leqslant \frac{|a_n||b_m - b_n| + |b_n||a_n - a_m|}{|b_n||b_m|} <$$
$$< \frac{A\varepsilon_1 + B\varepsilon_1}{\delta^2} = \frac{A+B}{\delta^2}\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Сходимость последовательности $[a_n : b_n]$ этим доказана.

Аналогичные выкладки с заменой a_m и b_m на a_n' и b_n' обнаруживают, что $[a_n' : b_n'] = [a_n : b_n]$, коль скоро $[a_n'] = [a_n]$ и $[b_n'] = [b_n]$.

Основные свойства операций вытекают здесь непосредственно из свойств тех же действий в системе рациональных чисел.

Так, например,

$$(\alpha + \beta)\gamma = [a_n + b_n][c_n] = [(a_n + b_n)c_n] =$$
$$= [a_n c_n + b_n c_n] = [a_n c_n] + [b_n c_n] =$$
$$= [a_n][c_n] + [b_n][c_n] = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Здесь использованы: определение умножения (второе и пятое равенства), распределительный закон умножения для *рациональных* чисел (третье равенство) и определение сложения (четвертое равенство).

§ 77. Сечения в области рациональных чисел с точки зрения теории Кантора.

Прежде чем итти дальше, рассмотрим еще вопрос о взаимоотношении теории Дедекинда и теории Кантора с точки зрения этой последней.

Выше (§ 75) мы, отправляясь от теории Дедекинда, показали, что всякое действительное число может быть определено как предел сходящейся последовательности рациональных чисел и, обратно, всякая сходящаяся последовательность действительных (и, в частности, рациональных) чисел определяет действительное число.

Станем теперь на точку зрения Кантора и покажем, что если *вводить* действительные числа с помощью сходящихся последовательностей, то можно *доказать*, наоборот, что всякое действительное число может быть определено с помощью сечения в системе рациональных чисел и, обратно, всякое сечение в области рациональных (и вообще действительных) чисел производится действительным числом.

В самом деле, в системе действительных чисел, определенных сходящимися последовательностями, как было доказано выше, выполняются условия скалярного расположения и, следовательно, всякое действительное число $\alpha = [a_n]$ определенным образом расположено относительно любого рационального числа r. При этом, если $r<\alpha$ и $\alpha<r'$, то $r<r'$, и если $\alpha<\beta$, то найдется такое рациональное число r, что $\alpha<r<\beta$. Число α производит, стало быть, *сечение* в области рациональных чисел, причем различные числа производят различные сечения.

Итак, *всякое число, определенное с помощью сходящейся последовательности рациональных чисел, может быть определено и с помощью сечения, производимого им в области рациональных чисел.*

Обратно, пусть дано некоторое сечение (A, A') в области действительных чисел. Построив, как и на странице 285, две сходящиеся последовательности a_n и b_n, удовлетворяющие условиям

$$a_n \subset A, \quad b_n \subset A', \quad b_n - a_n < \varepsilon \text{ при } n > N(\varepsilon),$$

рассмотрим действительное число

$$\alpha = [a_n] = [b_n].$$

Из неравенств $a_n \leqslant \beta \leqslant b_n$ будет следовать (стр. 287), что $\alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha$, т. е. $\alpha = \beta$. Поэтому всякое отличное от α число β должно удовлетворять при достаточно большом n одному из неравенств $\beta < a_n$ или $\beta > b_n$ и, стало быть, при $\beta < \alpha$ заключается в классе A, а при $\beta > \alpha$ в классе A'.

А это и означает, что число α *производит* сечение (A, A'), являясь *крайним* в том классе, которому оно само принадлежит.

Таким образом, основная теорема о непрерывности системы действительных чисел в смысле определения Дедекинда (§ 48 и 50) непосредственно вытекает из теории сходящихся последовательностей Кантора.

Нетрудно также показать совпадение определения основных операций в обеих теориях. Предоставляем это читателю.

§ 78. Непрерывность системы действительных чисел в формулировке Кантора.

1. Как мы уже упоминали (§ 73), можно, оставаясь целиком в рамках теории Кантора, дать соответственно иное, хотя по существу и равносильное дедекиндовскому, *определение* свойства непрерывности числовой системы, не прибегая к терминологии Дедекинда.

Именно, в соответствии с самой постановкой вопроса о введении иррациональных чисел в теории Кантора, определение непрерывности здесь формулируется так.

Числовая система S называется ***непрерывной*** *(замкнутой, полной), если всякая* ***сходящаяся*** *последовательность a_1, a_2, ..., a_n, ..., составленная из элементов S, имеет предел,* ***принадлежащий этой системе.***

Докажем это предложение для системы действительных чисел, не выходя из рамок теорий Кантора.

Нужно, стало быть, доказать, что введение новых числовых символов, определяемых сходящимися последовательностями, составленными из *рациональных* чисел, достаточно для того, чтобы в расширенной таким путем системе действительных чисел *всякая* сходящаяся последовательность, составленная из *действительных* (необязательно рациональных) чисел, имела *пределом* некоторое *действительное число*.

Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

есть сходящаяся последовательность действительных чисел и пусть

$$|\alpha_n-\alpha_m|<\frac{\varepsilon}{3}$$

при n и m, бо̀льших $N(\varepsilon)$.

Построим последовательность *рациональных* чисел, выбирая произвольно рациональные числа a_n в интервалах $\alpha_n-\frac{\varepsilon}{3}$, $\alpha_n+\frac{\varepsilon}{3}$, так что

$$|a_n-\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда при n и $m>N(\varepsilon)$ будет

$$|a_n-a_m|\leqslant|a_n-\alpha_n|+|\alpha_n-\alpha_m|+|\alpha_m-a_m|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

т. е. последовательность a_n будет сходящейся.

Рассмотрим определяемое ею действительное число

$$\alpha=[a_n].$$

По доказанному на странице 290 числа a_n будут рациональными приближениями к α с точностью до ε, так что

$$|\alpha-a_n|<\varepsilon.$$

Сопоставляя это неравенство с соотношением

$$|\alpha_n-a_n|<\frac{\varepsilon}{3},$$

найдем, что

$$|\alpha_n-\alpha|<\frac{4}{3}\varepsilon$$

при $n>N(\varepsilon)$, а это и означает, что *действительное число* α *есть предел последовательности* α_n.

2. Дедекиндовское определение непрерывности несколько шире канторовского в том смысле, что первое применимо ко всякой *скалярной* величине и основано лишь на рассмотрении отношений *взаимного скалярного расположения* ее элементов. Определение же Кантора основано на рассмотрении *разностей* между элементами, измеряющих их *взаимные расстояния*, т. е. носит *метрический* характер.

Поскольку система действительных чисел строится на основе системы рациональных чисел, в которой можно использовать как соотношения скалярного расположения, так и основные операции, в том числе и *вычитание*, указанное только что отличие для области действительных чисел роли не играет и здесь *оба определения непрерывности эквивалентны*.

Это же обстоятельство будет иметь место и вообще для всяких измеримых величин, рассмотренных в главе III, поскольку измерение основано на рассмотрении операций в системе переходов, удовлетворяющей аксиоме Архимеда. Доказательство этого общего утверждения заключено уже в предложениях § 75 и 77, устанавливающих взаимоотношение теорий Дедекинда и Кантора. Действительно, выбирая по произволу единицу меры, мы можем отнести (ср. § 29 и 34) каждому рациональному числу некоторое („рационально измеримое") значение величины S. Исходя из системы таких значений, можно каждому значению S отнести действительное число, применяя либо построение Дедекинда, либо построение Кантора в зависимости от того, какая формулировка свойства непрерывности является данной. Теоремы § 75 и 77 показывают, что в обоих случаях для системы S будет выполнено свойство непрерывности в неиспользованной при построении формулировке.

Оба определения непрерывной величины сводятся, таким образом, в конечном итоге к определению, данному на странице 116 § 34.

§ 79. Операции третьей ступени.

1. Для доказательства того, что $\sqrt[k]{A}$, где $A>0$, всегда существует в системе действительных чисел, в теории Кантора достаточно построить соответствующую сходящуюся последовательность рациональных чисел.

Самое построение это нетрудно осуществить на основе известного уже нам общего метода (стр. 200, § 60 и стр. 285, § 75) хотя бы так.

Пусть

$$c_0^k \leq A < (c_0+1)^k,$$

где c_0 — целое число. Положим соответственно

$$a_0 = c_0.$$

Выберем, далее, произвольное целое число d (основание системы счисления) и подберем не превышающее $d-1$ целое число c_1, так, чтобы

$$\left(c_0+\frac{c_1}{d}\right)^k \leq A < \left(c_0+\frac{c_1+1}{d}\right)^k.$$

Положим затем

$$a_1 = c_0+\frac{c_1}{d}.$$

Продолжая так далее, найдем

$$a_n = c_0+\frac{c_1}{d}+\frac{c_2}{d^2}+\ldots+\frac{c_n}{d^n},$$

причем

$$a_n^k \leqslant A < \left(a_n + \frac{1}{d^n}\right)^k$$

и

$$0 \leqslant c_i < d \text{ при } i = 1, 2, 3, \ldots$$

По доказанному в § 75, последовательность a_n, так же как и последовательность $b_n = a_n + \frac{1}{d^n}$, сходится, причем $[a_n] = [b_n]$, откуда следует, что

$$[b_n]^k = [a_n]^k,$$

так что при достаточно большом n разност

$$b_n^k - a_n^k = \left(a_n + \frac{1}{d^n}\right)^k - a_n^k$$

может быть сделана сколь угодно малой.

Так как

$$|a_n^k - A| < b_n^k - a_n^k,$$

то отсюда и вытекает, что

$$[a_n]^k = A,$$

и, стало быть, последовательность a_n определяет число, k-я степень которого есть A, т. е.

$$[a_n] = \sqrt[k]{A}.$$

Неравенство $\left(a_n + \frac{1}{d^n}\right)^k - a_n^k < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ можно доказать и непосредственно. Так как можно положить $b = a_n + \frac{1}{d^n} < B$ и $a = a_n < B$ в силу сходимости последовательностей a_n и b_n, то

$$b^k - a^k = (b - a)(b^{k-1} + b^{k-2}a + \ldots + a^{k-1}) <$$

$$< (b - a)kB^{k-1} = \frac{kB^{k-1}}{d^n} < \varepsilon,$$

коль скоро n достаточно велико.

2. Распространив обычным путем определение функции A^x случай всех рациональных значений x, можно положить, далее, по определению,

$$A^\alpha = [A^{r_n}], \text{ где } [r_n] = \alpha.$$

Последовательность $[A^{r_n}]$ наверное сходится, ибо

$$|A^{r_n} - A^{r_m}| = |A^{r_m}||A^{r_n - r_m} - 1| < \varepsilon,$$

коль скоро

$$|r_n - r_m| < \delta(\varepsilon),$$

согласно выкладкам, уже проведенным ранее (стр. 209, § 63).

Однозначность определения доказывается, как и раньше, заменой r_m в предыдущих неравенствах на r_m', при условии $|r_n - r_n'| < \delta(\varepsilon)$, вытекающем из равенства $[r_n] = [r_n']$.

Доказательство непрерывности показательной функции проводится по той же схеме, а функциональное свойство доказывается так

$$A^x \cdot A^y = A^{[r_n]} \cdot A^{[s_n]} = [A^{r_n} \cdot A^{s_n}] =$$
$$= [A^{r_n + s_n}] = A^{[r_n + s_n]} = A^{x+y}.$$

3. Для определения логарифма $\log_a b$ построим вновь систему чисел

$$l_n = c_0 + \frac{c_1}{d} + \ldots + \frac{c_n}{d},$$

выбирая c_i так, чтобы было

$$a^{l_n} \leqslant b < a^{l_n + \frac{1}{d^n}}.$$

Последовательность $[l_n]$ в силу тех же соображений, что и ранее, сходится.

Так как, далее, согласно недавно использованному неравенству, можно написать

$$|a^{l_n + \frac{1}{d^n}} - a^{l_n}| < \varepsilon,$$

коль скоро $\frac{1}{d^n}$ достаточно мало, то

$$a^{l_n} - b| < \varepsilon$$

при достаточно большом n, т. е.

$$[a^{l_n}] = a^{[l_n]} = b,$$

или, согласно определению логарифма,

$$[l_n] = \log_a b.$$

Мы предоставляем читателю провести построение теории степенной, показательной и логарифмической функций на основе теории Кантора во всех деталях, следуя хотя бы схеме § 63—64.

Заметим лишь, что в определении обратных операций извлечения корня и логарифмирования теория сечений приводит к цели более прямым путем; та форма изложения, которую мы только что наметили, носит, однако, согласно с духом теории Кантора, несколько более арифметический характер, соответствуя общей схеме нахождения рациональных приближений иррационального числа при некотором определенном выборе системы счисления.

4. Как уже было отмечено выше в § 72, необходимым и достаточным условием для возможности распространить в теории Кантора на все действительные значения аргументов определение функции

$$f(x, y, \ldots),$$

заданной первоначально лишь для рациональных значений x, y, ..., является *равномерная непрерывность* операции f в соответствующей области изменения аргументов $x, y, \ldots$ Для доказательства достаточно повторить слово в слово, применяясь к теории сходящихся последовательностей как к частному случаю, рассуждения § 72.

Проведем это для случая одной переменной.

Пусть функция $f(x)$ определена в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ для всех рациональных значений x и обладает свойством *равномерной непрерывности,* так что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что *при любых* рациональных x' и x'', лежащих в интервале (a, b) и удовлетворяющих неравенству

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon),$$

будет выполнено неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Пусть, далее, действительное число α лежит в интервале (a, b) и может, следовательно, быть определено сходящейся последовательностью

$$[x_n] = \alpha$$

рациональных чисел a_n, принадлежащих тому же интервалу.

Тогда можно положить, по определению,

$$f(\alpha) = [f(x_n)],$$

так как последовательность в правой части этого равенства сходится и, следовательно, определяет некоторое действительное число.

Для доказательства сходимости найдем по заданному ε соответствующее $\delta(\varepsilon)$ и выберем $N(\delta)$ так, чтобы при n и m, больших $N(\delta)$, было

$$|x_n - x_m| < \delta(\varepsilon).$$

Тогда при тех же значениях n и m должно иметь место неравенство

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

что и доказывает сходимость последовательности $f(x_n)$.

Так как аналогичное неравенство будет вытекать и из условия $[x_n'] = [x_n]$, то при этом будет также $[f(x_n')] = [f(x_n)]$ и, следовательно, определенное выше значение $f(\alpha)$ не зависит от того, какой именно последовательностью x_n задается число α.

Определенная этим путем для всех действительных значений x в интервале (a, b) функция $f(x)$ будет *непрерывна* в этом интервале.

Действительно, для произвольной последовательности $[x_n] = \alpha$ из написанных выше неравенств, согласно сказанному на странице 287, заключаем, что при любом рациональном $r = x_m$, удовлетворяющем неравенству

$$|\alpha - r| < \delta(\varepsilon),$$

будет

$$|f(\alpha) - f(r)| \leqslant \varepsilon.$$

Если теперь α и β — два любых действительных числа, отстоящие друг от друга меньше, чем на $2\delta(\varepsilon)$, то можно выбрать такое рациональное число $r = x_m$, которое отличается от каждого из чисел α и β не больше, чем на $\delta(\varepsilon)$, вследствие чего неравенство

$$|f(\alpha)-f(\beta)| \leq |f(\alpha)-f(r)|+|f(r)-f(\beta)| \leq 2\varepsilon$$

и будет выполняться как следствие неравенства

$$|\alpha-\beta|<2\delta(\varepsilon).$$

Этим и доказана непрерывность (и притом равномерная) функции $f(x)$ для всех действительных значений аргумента x в интервале (a, b).

Вспоминая (§ 55), что всякая непрерывная в каждой действительной точке замкнутого интервала функция равномерно непрерывна в этом интервале, мы можем сказать, что условие, наложенное нами на фукцию $f(x)$ для рациональных значений x, не только достаточно, но и *необходимо* для того, чтобы можно было обобщить определение этой функции на все действительные значения аргумента.

Из доказанного предложения вытекает далее, что *всякая непрерывная функция действительного аргумента однозначно определяется заданием своих значений в рациональных точках* (для рациональных значений аргумента).

Естественно (ср. § 58), что слово „рациональный" может быть здесь заменено словами „принадлежащий к некоторому всюду плотному в системе действительных чисел множеству S".

§ 80. Мощность системы действительных чисел.

Заканчивая на этом теорию действительных чисел, рассмотрим в заключение вопрос о мощности числовых систем рациональных и действительных чисел.

По самому определению понятия „счетное множество" (множество счетно, если оно равномощно с множеством всех натуральных чисел) натуральные числа сами образуют *счетное* множество.

В определении мощности остальных числовых систем, с которыми мы встречались, нам придется, собственно говоря, лишь повторить рассуждения с помощью которых в § 9 для количественных трансфинитных чисел были установлены соотношения: $2\aleph_0=\aleph_0$, $\aleph_0^2=\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}\neq\aleph_0$.

Проведем эти рассуждения.

1. *Система всех положительных и отрицательных чисел образует счетное множество.*

Действительно, производя нумерацию, начиная от числа нуль так

№ 1 — число 0, № 2 число 1, № 3 — число (—1),
№ 4 — число 2, № 5 — число (—2), ...,

т. е. относя каждому положительному числу n номер $N=2n$, а каждому отрицательному числу $-n$ (а также и числу нуль) номер $N=2n+1$, мы ставим систему всех относительных чисел во взаимно-однозначное соответствие с натуральными числами.

Система всех рациональных чисел образует счетное множество, т. е. совокупность всех рациональных чисел может быть перенумерована. Это предложение может показаться на первый взгляд несколько неожиданным, так как (§ 47, стр. 163) рациональные числа образуют *плотное* множество, и, стало быть, нет рационального числа, непосредственно следующего за данным в скалярном расположении рациональных чисел. Однако это доказывает лишь, что нельзя осуществить нумерацию рациональных чисел так, чтобы с возрастанием номера возрастали бы и числа, т. е. чтобы взаимное скалярное расположение рациональных чисел и их расположение в нумерованной последовательности совпадали.

Но, как мы упоминали выше, понятие о мощности множества характеризует лишь наиболее внешние взаимоотношения между множеством и его элементами: равномощные множества в смысле взаимно-однозначного отображения „одинаково составлены из своих элементов".

Суждение о счетности множества рациональных чисел имеет поэтому тот смысл, что в *некотором расположении* (не совпадающем с расположением в порядке возрастания) взаимоотношение между всем множеством рациональных чисел и его элементами в указанном только что смысле слова таково же, как и взаимоотношение между множеством натуральных чисел и его элементами.

Расположение, о котором идет речь, можно осуществить различными способами. Ограничиваясь для наглядности лишь положительными числами, допустим, что рациональные дроби (сократимые и несократимые) расположены в таблицу с двойным входом, n-ая строка которой содержит дроби со знаменателем n, а m-ый столбец — дроби с числителем m:

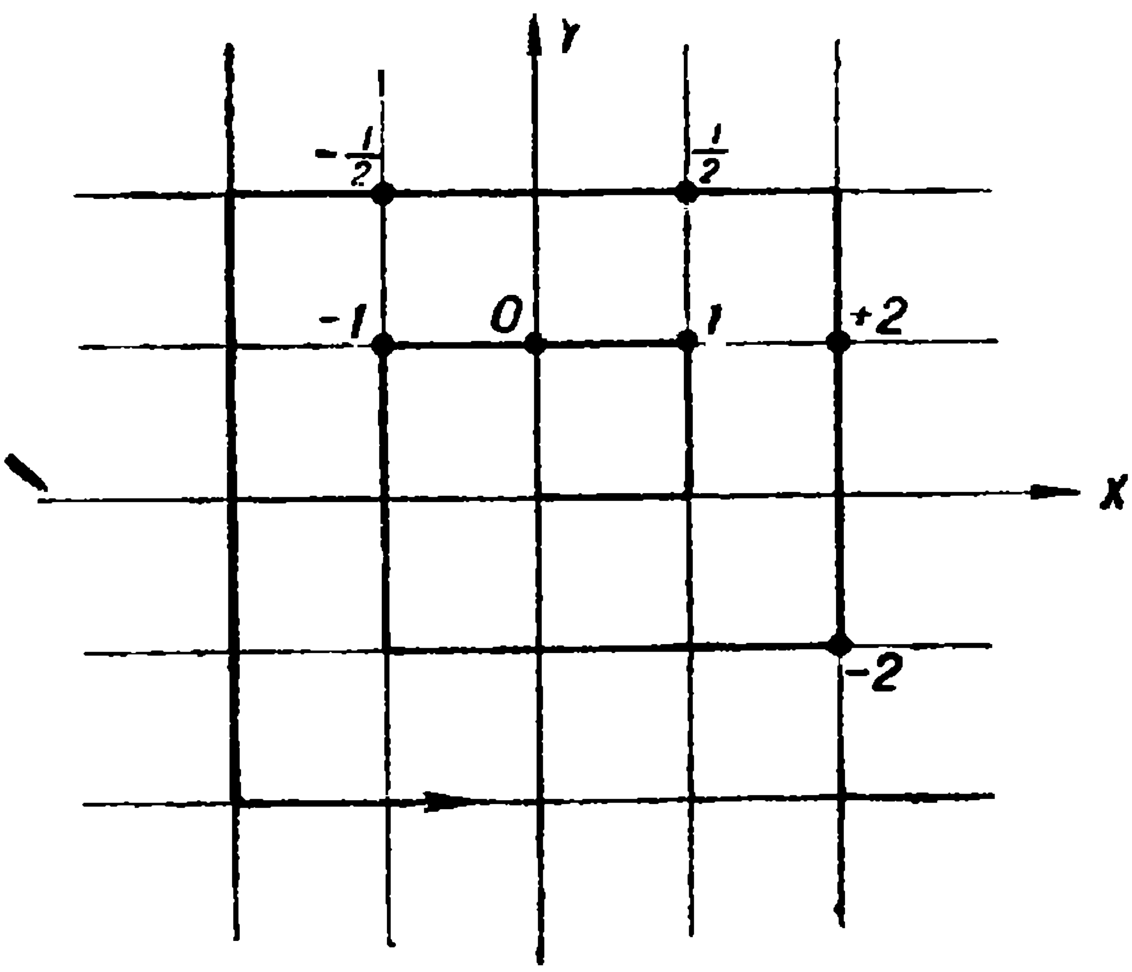
$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdot \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \\ & & & & \cdots & \cdots \end{array}$$

Перенумеруем элементы этой таблицы по диагоналям, начиная с левого верхнего угла и продолжая далее в соответствии с приводимой ниже схемой, в которой на месте каждого элемента написан отнесенный ему номер:

$$\begin{array}{llll} 1 & 3 & 6 & 10\ \ldots \\ 2 & 5 & 9\ \ldots & \\ 4 & 8\ \ldots & & \\ 7\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \end{array}$$

В силу этого закона нумерации каждой дроби $\frac{m}{n}$ будет отнесен один и только один номер (и обратно, по каждому номеру можно найти соответствующую ему дробь). Положительные рациональные числа располагаются, таким образом, соответственно своим номерам *в счетную последовательность, равномощную с множеством натуральных чисел.*

В этой нумерации *равным,* но различным по форме задания рациональным числам отнесены различные номера. Если желать избежать этого, то следует из приведенной выше таблицы вычеркнуть все *сократимые* дроби и пропускать при нумерации появляющиеся в таблице пустые места. Явная запись закона, связывающего рациональное число с его номером, весьма простая, как легко видеть, в первом случае, здесь, конечно, значительно усложнится, что, впрочем, никакого принципиального значения не имеет.



Черт. 24

Расположение (и притом всех, положительных и отрицательных) рациональных дробей в последовательность может быть весьма наглядным образом пояснено следующей геометрической схемой (черт. 24), в которой каждое рациональное число $\frac{m}{n}$ отображается точкой плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x=n$, $y=m$ (точки на оси x выпускаются), а нумерация производится в порядке движения по отмеченной жирной чертой спирали, начинающейся в начале координат и проходящей через все точки с целочисленными координатами.

2. Докажем теперь, применяя диагональный процесс Кантора (см. § 9, стр. 27), что

Система всех действительных чисел образует несчетное множество, т. е. не может быть перенумерована с помощью натуральных чисел.

Для доказательства рассмотрим множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей, заключающихся в интервале (0,1), и допустим, что удалось установить закон нумерации этих чисел, в силу которого *все* они располагаются последовательность

$$\left.\begin{array}{l} \text{№ 1) } 0,\ a_1^{(1)}a_1^{(2)}a_1^{(3)} \\ \text{№ 2) } 0,\ a_2^{(1)}a_2^{(2)}a_2^{(3)}\ \ldots \\ \text{№ 3) } 0,\ a_3^{(1)}a_3^{(2)}a_3^{(3)} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь $a_n^{(m)}$ означае m-ую цифру в десятичном разложении числа, имеющего номер n в данной нумерации.

Составим теперь десятичную дробь

$$0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots$$

выражающую число, лежащее между 0 и 1, и, следовательно, принадлежащую нашему множеству, так:

За первую цифру b_1 выберем какую угодно, только отличную от *первой* цифры числа № 1:

$$b_1 \neq a_1^{(1)}.$$

Вторую цифру, b_2, выберем отличную от *второй* цифры числа № 2

$$b_2 \neq a_2^{(2)},$$

вообще положим

$$b_n \neq a_n^{(n)}.$$

Тогда число $b = 0,\ b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$ по построению не может иметь *никакого номера* в данной системе нумерации. Действительно, оно не может находиться в последовательности (1) под номером первым, так как оно отличается от *первого* числа своей *первой* цифрой, не может находиться и под номером вторым, так как оно отличается от *второго* числа своей *второй* цифрой, и, вообще, не может находиться под номером n, так как от n-го числа оно отличается своей n-й цифрой $b_n \neq a_n^{(n)}$.

Число b, лежащее между 0 и 1, вопреки допущению, оказывается незанумерованным, чем и обнаруживается несчетность множества всех действительных чисел между 0 и 1 и, подавно, всех действительных чисел вообще.

3. Познавательная ценность этого, по смыслу своему, отрицательного суждения была обнаружена еще Кантором, доказавшим с помощью этого предложения существование **трасцендентных** чисел, т. е. чисел, не являющихся корнями никакого алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (2)$$

с рациональными коэфициентами.

Именно, основываясь на том, что совокупность всех действительных чисел образует *несчетное* множество, мы придем к заключению о существовании *несчетного* множества трансцендентных чисел, если удастся показать, что совокупность всех нетрансцендентных, так называемых **алгебраических** чисел, удовлетворяющих алгебраическим уравнениям любой степени с любыми рациональными коэфициентами, все еще представляет собой всего на всего только *счетное* множество.

К доказательству этой теоремы нетрудно притти, замечая, что всякое уравнение типа (2) имеет не более n корней; уравнений же данной, n-й степени может быть только *счетное* число, ибо речь идет о множестве всех сочетаний элементов $n+1$ *счетных* множеств всех рациональных чисел, которым принадлежат коэфициенты уравнений. Множество этих сочетаний (ср. § 9 стр. 26) имеет мощность $\aleph_0^{n+1}=\aleph_0$, т. е. счетно.

Проведем доказательство непосредственно, не опираясь на понятия, заимствованные из теории количественных трансфинитных чисел.

Во-первых, можно, приведя числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ к общему знаменателю q и умножив обе части уравнения (2) на q, заменить это уравнение равносильным уравнением с *целыми* коэфициентами.

Предполагая, что эта замена осуществлена, постараемся перенумеровать всю совокупность алгебраических уравнений любой степени с любыми целыми коэфициентами.

Так как для каждой степени n имеется все же бесконечное число уравнений, то нумерацию придется вести своеобразным диагональным процессом (аналогично стр. 300). Именно, мы разобьем все множество уравнений на *счетное* число подмножеств. в каждом из которых будет конечное число уравнений и притом различных степеней. Эти подмножества и будут играть в нашем случае роль диагоналей схемы, данной на странице 300. Мы выделим их следующим образом.

Назовем *высотой* h уравнения (2) сумму степени n уравнения и абсолютных величин его коэфициентов, т. е. целое число

$$h=n+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|. \qquad (|a_0|\neq 0).$$

Так как при *заданном* h для каждого из $n+2$ слагаемых правой части возможны, во всяком случае, лишь значения, не превышающие h, то существует лишь *конечное число* различных уравнений с данной высотой h.

В пределах каждой такой совокупности всех уравнений с данной высотой h (такие совокупности и образуют подмножества, о которых только что шла речь), мы расположим самые уравнения в любом порядке, хотя бы, рассматривая сначала наибольшие возможные значения n, затем, при фиксированном n, наибольшие возможные значения $|a_0|$ и т. д. Так как уравнений с данной высотой h — конечное число, то тут задание того или иного способа нумерации в пределах одного и того же подмножества существенной роли не играет.

Рассмотрим теперь все эти подмножества в порядке возрастающих высот $h=2, 3, 4, \ldots$ и перенумеруем теперь *все уравнения под ряд*, начиная с уравнений высоты $h=2$, переходя затем к уравнениям высоты $h=3$ и т. д. Так как для каждой высоты имеется лишь конечное число уравнений, то таким образом процесс нумерации достигает любого уравнения любой наперед заданной высоты.

Множество всех алгебраических уравнений с рациональными коэфициентами есть, таким образом, счетное множество.

Нумерация всех корней таких уравнений, т. е. всех алгебраических чисел, может быть задана тем же построением, в котором только вместо самих уравнений следует рассмотреть их корни, расположенные для каждого уравнения в любом порядке (скажем, в порядке возрастания модуля, а для одного и того же модуля в порядке возрастания аргумента). Так как каждое уравнение имеет конечное число корней, то (по исключении встречающихся не в первый раз чисел) процесс нумерации алгебраических чисел, следующих в порядке расположения их *по высотам* h, а в пределах каждой высоты в указанном выше порядке для уравнений и их корней, достигнет любого наперед заданного алгебраического числа.

Множество алгебраических чисел, таким образом, *счетно*. Так как множество *всех* действительных чисел по доказанному *не счетно*, то отсюда и вытекает существование *трансцендентных* чисел, образующих при том *несчетное* множество.

В этом смысле можно сказать, что не только на самой рациональной числовой прямой (стр. 163) количество *пустых* мест по мощности превышает количество *заполненных*, но и при всяком *алгебраическом* расширении числовой системы имеет место то же самое обстоятельство.

Установление трансцендентности конкретно заданных чисел является часто труднейшей математической проблемой. Так, лишь во 2-й половине XIX века благодаря работам Эрмита (Hermite) это было сделано для чисел e и π. Вопрос же, например, о природе таких чисел, как $2^{\sqrt{2}}$ и $e^{\pi}=(-1)^{-i}$, оставался нерешенным до работ (1929 г.) советского математика Гельфонда, которому удалось, сверх того, в 1934 г. доказать, что вообще всякое отличное от 0 и 1 алгебраическое число в иррациональной алгебраической степени есть число трансцендентное.

4. Мощность системы *всех* действительных чисел, более высокая, нежели мощность счетных множеств, носит название **мощности континуума.** Мощность совокупности всех точек *плоскости*, так же как и *совокупности всех точек трех- или, вообще, n-мерного пространства*, совпадает с мощностью континуума.

Наметим в общих чертах доказательство того, что между точками квадрата со стороной 1, заданных своими координатами

$$x=0,\ a_1a_2a_3\ \ldots,\qquad y=0,\ b_1b_2b_3\ \ldots \tag{3}$$

и точками отрезка от 0 до 1, заданных своими абсциссами

$$z=0,c_1c_2c_3\ \ldots \tag{4}$$

можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Отнесем точке (x, y), заданной координатами (3), точку

$$z=0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ \ldots \tag{5}$$

Очевидно, для каждой пары бесконечных десятичных дробей (3) мы получим одну и только одну бесконечную десятичную дробь типа (5) и, обратно, по каждой бесконечной десятичной дроби типа (4) нетрудно однозначно восстановить соответствующие ей дроби $x=0,\ c_1c_3c_5\ \ldots$, $y=0,\ c_2c_4c_6\ \ldots$ В эту схему доказательства надо внести некоторые уточнения, связанные с тем, что смешанные периодические дроби с периодом 9 и соответствующие конечные десятичные дроби с нулями на конце для и y дают *равные* числа, а получаемые при этом значения для z могут оказаться *различными*. Это дает легко устранимую неоднозначность, притом, в выгодную сторону (см. Радемахер и Теплиц „Числа и фигуры").

Ограничение, которое мы ввели, рассматривая лишь числа отрезка от 0 до 1, не играет существенной роли. Так, с помощью функции $y=\frac{1}{x}$ отрезок (0, 1) для x взаимно однозначно отображается на бесконечный интервал $(1, \infty)$ для y.

5. Из этих теорем вытекает, что дальнейшее повышение мощности идет с некоторой задержкой на уровне континуума, аналогичной той, с которой мы уже встретились на уровне счетных множеств. В частности, остановимся на одном следствии из того факта, что для задания непрерывной функции в интервале (0, 1) достаточно задать ее значения для *рациональных* точек этого интервала (§ 79, стр. 299). Поскольку множество таких точек счетно, мы можем сказать, что в задании непрерывной функции используются элементы из *счетного* числа *континуумов*.

Аналогично предыдущему можно, однако, доказать, что *соответствующее всевозможным комбинациям элементов счетного числа континуумов счетно-мерное пространство все еще будет иметь мощность континуума.*

В самом деле, допустим, что речь идет о всевозможных комбинациях не двух чисел x и y, как выше, а счетного числа действительных чисел

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,\ a_1^{(1)} a_1^{(2)} a_1^{(3)} \ldots \\
x_2 &= 0,\ a_2^{(1)} a_2^{(2)} a_2^{(3)} \ldots \\
x_3 &= 0,\ a_3^{(1)} a_3^{(2)} a_3 \ \ \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Каждой такой комбинации $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ мы можем отнести число z, лежащее в пределах от 0 до 1, положив (диагональное построение)

$$z = 0,\ a_1^{(1)} a_2^{(1)} a_1^{(2)} a_3^{(1)} a_2^{(2)} a_1^{(3)} \ldots$$

Обратно, вписывая цифры бесконечной десятичной дроби z по диагоналям в квадратную таблицу, мы однозначно определим счетное число соответствующих бесконечных десятичных дробей $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Таким образом, *множество всех непрерывных функций действительного аргумента есть множество мощности континуума.*

Применяя метод рассуждения, аналогичный диагональному процессу Кантора, легко доказать, что *мощность множества всех (непрерывных и разрывных) функций выше мощности континуума.*

В самом деле, допустим, что совокупность всех таких функций перенумерована с помощью *действительных* чисел так, что под номером α значится функция $f_\alpha(x)$.

Без ограничения общности мы можем предположить, что значения a и x ограничены интервалом (0, 1).

Составим теперь определенную в том же интервале функцию $y=f(x)$, положив для всякого значения $x=\xi$ из интервала (0, 1) значение $f(\xi)$ равным любому числу, *отличному от значения ξ-й функции $f_\xi(x)$ при том же значении аргумента $x=\xi$.* Для определенности можно, например, положить

$$f(\xi)=f_\xi(\xi)+1.$$

Функция $f(x)$ не совпадает ни с одной из занумерованных функций $f_a(x)$, так как для всякого a можно указать значение аргумента $x=a$, для которого функции $f(x)$ и $f_a(x)$ принимают *неодинаковые* значения $[f(a)\neq f_a(a)$ по построению$]$.

Этим и доказано, что множество *всех* функций действительного аргумента имеет мощность *высшую,* нежели мощность континуума.

6. Заметим, что такого рода общие теоремы могут иметь приложения и в конкретных вопросах. Так, например, на вопрос: можно ли построить такую последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ..., чтобы *всякая* функция $f(x)$, скажем в интервале (0, 1) могла быть представлена в форме бесконечного ряда $f(x)=a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots$, можно сразу ответить *отрицательно,* так как *мощность* множества различных возможных рядов указанного типа, совпадающая с мощностью *счетного* числа континуумов (значений коэфициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и т. д.), как было показано, *ниже мощности* множества всех функций, а потому запаса различных возможных рядов не может хватить для представления *всех* функций (даже если совершенно оставить в стороне вопросы сходимости). Однако, ограничив класс рассматриваемых функций примерно в той же мере, в какой мы ограничиваем класс всех функций, выделяя из него непрерывные функции, мы можем уже допустить возможность того, что соответствие между функциями данного класса и возможными рядами типа $a_1\varphi_2(x)+a_2\varphi_2(x)+\ldots$ будет взаимно-однозначным. Такой случай как раз и имеет место, в частности, для класса всех *непрерывных* функций и тригонометрических рядов типа

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$

(рядов Фурье). Возможность однозначно отнести всякой непрерывной в интервале $(0, 2\pi)$ функции такой ряд, несмотря на то, что непосредственное задание функции требует задания ее значений для системы значений аргумента мощности *континуума,* а задание ряда требует лишь задания *счетного* числа коэфициентов, обусловлена как раз тем, что мощность множеств *произвольно* задаваемых значений в обоих случаях одинакова (для *непрерывных* функций достаточно задать ее значения для *счетного* множества рациональных значений аргумента).

ГЛАВА X.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 81. Введение.

1. Изучение непрерывных скалярных величин находит, как мы видели, свое завершение в теории измерения, опирающейся на параллельное расширение понятия числ введением дробных, отрицательных и иррациональных чисел. Получающаяся в результате такого расширения система действительных чисел служит арифметическим отображением всякой непрерывной и скалярной величины и обладает свойствами „замкнутости" в отношении основных операций: сложения, вычитания, умножения и деления, а также в отношении операции предельного перехода, т. е. полнотой или непрерывностью в смысле Дедекинда или Кантора (см. § 48 и 78).

Другими словами, система действительных чисел представляет собой *непрерывное скалярное числовое поле*. В силу перечисленных обстоятельств система действительных чисел лежит в основе всех математических построений, составляющих предмет алгебры и анализа, а также и геометрии в тех частях последней, в которых применение числовых характеристик непрерывных величин является существенным элементом (а иногда и исходным пунктом) исследования.

Мы видели, что изучение непрерывных величин и основных арифметических операций привело к расширению первоначального понятия натурального числа, возникшего из изучения сравнительно узкого класса существенно положительных дискретных величин. Аналогично этому изучение направленных величин более общего характера, нежели одномерная направленная скалярная непрерывная величина, и одновременно — более детальное изучение операций, по отношению к которым система действительных чисел не обладает свойством замкнутости (как, например, операции извлечения корня, не всегда выполнимой в области действительных чисел), привело естественным образом к дальнейшему расширению понятия числа — к теории комплексных чисел и ее последующим обобщениям — теории кватернионов и гиперкомплексных чисел вообще.

2. Подобно другим категориям вновь вводимых числовых символов, комплексные числа прошли довольно сложный путь исторического развития. Применение к различным частным слу-

чаям общей формулы решения квадратных уравнений, естественно, привело к рассмотрению выражений типа $\sqrt{-a}$ при $a>0$. Первоначально появление таких выражений в результате решения той или иной задачи рассматривалось, как признак невозможности решения поставленной задачи (подразумевается, само собой разумеется, в действительных числах). Однако уже в XVI веке было обнаружено на примере решения уравнения третьей степени с помощью формулы Кардана (Cardano), что такое заключение не во всех случаях справедливо. Как раз тогда, когда у предложенного для решения кубического уравнения все три корня *действительные,* формула Кардана содержит квадратные корни из отрицательных чисел, устранить которые, не производя действий над комплексными числами, нельзя. Этот случай в применении формулы Кардана получил наименование „casus irreducibilis" (неприводимый случай) и привел уже и самого Кардана к рассмотрению действий над выражениями типа $\sqrt{-a}$ которые он называл „ложными", „поистине софистическими числами", так и не добившись отчетливых результатов в указанном направлении.

Вопрос был впервые решен в том же XVI веке итальянским математиком Бомбелли (Bombelli), которому путем формального распространения правил действий над действительными числами на выражения, содержащие квадратные корни из отрицательных чисел, удалось установить уже довольно полную систему правил и вычислений с новой категорией числовых символов и, в частности, получить из формулы Кардана значение действительных корней кубического уравнения в неприводимом случае. Однако, несмотря на то, что плодотворность этого распространения алгебраического вычислительного аппарата на числовые символы нового рода — комплексные числа вида $a+b\sqrt{-1}$ — сказывалась в дальнейшем на каждом шагу не только в алгебре, но и в анализе, смысл новых числовых символов и операций над ними оставался неясным для математиков вплоть до начала XIX столетия. Это нашло свое отражение и в самой терминологии, частично сохранившейся и до нашего времени: „мнимые", „воображаемые" (imaginaire), а также „ложные" и „невозможные" числа — все это эпитеты, сопутствовавшие, как известно, также и другим расширениям понятия числа и характеризующие то психологическое состояние неуверенности, которое неизбежно возникало каждый раз, когда при наличии установившихся и оправдывающих себя формальных правил действий, отсутствовало не только строгое логическое обоснование теории, но и всякое истолкование новой категории чисел и операций над ними с помощью тех или иных реальных взаимоотношений в области изучаемых конкретных величин.

В начале XIX века Гаусс (Gauss) дал первое строгое доказательство основной теоремы алгебры, согласно которой всякое алгебраическое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами имеет ровно n комплексных (действительных или мнимых, простых и кратных) корней, выяснив при этом не только роль комплексных чисел в алгебре, но и самый смысл соответствующего утверждения, бывший до того настолько неясным, что Гаусс мог не без основания назвать фигурировавшие в работах его предшественников комплексные корни уравнений „тенью от тени". Гаусс ввел также в рассмотрение целые комплексные числа и использовал их в исследованиях теоретико-числового характера, наложивших свой отпечаток на все дальнейшее развитие теории чисел в XIX веке, и попутно обратил внимание на геометрическую интерпретацию комплексных чисел с помощью точек плоскости [развитую также в работах Аргана (Argand) и Весселя (Wessel)].

Французский математик Коши дал довольно далеко идущее обоснование основных аналитических операций в комплексной области и этим положил начало теории функций комплексного переменного или так называемой теории аналитических функций. Эту теорию можно теперь рассматривать как основной аппарат математического анализа, в последнее время играющий все бóльшую и бóльшую роль также и в прикладных вопросах самого, что ни на есть, практического содержания. Наряду с широким использованием геометрической интерпретации, Коши в особенности подчеркивает, что на всякое соотношение равенства между комплексными выражениями следует смотреть как на *совокупность двух равенств между действительными числами*. Так, например, по собственным словам Коши, уравнение

$$\begin{gathered}\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)= \\ =(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)\end{gathered}$$

„само по себе не имеет смысла; чтобы получить из него правильные результаты, нужно, прежде всего, развернуть правую его часть по правилам, принятым для вещественных количеств, и затем приравнять действительный член левой части действительному члену правой части уравнения и коэфициент при $\sqrt{-1}$ в левой части коэфициенту при $\sqrt{-1}$ в правой части".

Последовательное проведение этой точки зрения, лежащей в основе и современных, более строгих, формальных теорий, позволяло уже получать истолкование действий над мнимыми количествами в действительной области и тем самым положило конец той неуверенности в обращении с комплексными числами, которые характеризовали первоначальное пользование ими в вопросах алгебры и анализа.

Синтез конкретного истолкования комплексных чисел и операций над ними с формально логическим обоснованием нашел свое завершение в операторной теории Гамильтона, и в связанной с ней теорией пар (a, b) действительных чисел a и b, соответствующих мнимому (комплексному) числу $a+b\sqrt{-1}$. В работах Гамильтона комплексные числа рассматриваются как совокупность операторов, порождаемых двумерной направленной величиной, которую образуют, например, векторы на плоскости, истолковываемые как „переходы" от одной точки плоскости к другой. Этим комплексные числа включаются совершенно естественным образом в ту общую схему развития понятия числа, которая была предметом изложения главы III. Одновременно становится ясным конкретный смысл соотношений между комплексными числами и операций над ними, отражающих соответствующие взаимоотношения в области двумерных направленных величин. Эти последние представляют непосредственное обобщение упомянутых в начале настоящей главы одномерных величин, изучение которых тесно связано с построением теории отрицательных, дробных и иррациональных чисел.

3. Дальнейшие обобщения в том же направлении привели Гамильтона к рассмотрению трехмерных направленных величин векторов трехмерного пространства и к соответствующей систем операторов, изображаемых числами не с двумя только (как в случае обычных комплексных чисел), а с четырьмя компонентами к числовой системе так называемых *кватернионов*. Современное векторное исчисление представляет собой естественно отделившуюся в силу целого ряда обстоятельств часть исчисления кватернионов, играющую особо важную роль в вопросах геометрии, механики и физики.

Последующее развитие тех же идей, связанное в значительной мере с именем Грассмана, привело к созданию теории *гиперкомплексных* чисел (глава XII), т. е. к числовым системам с n единицами $i_1, i_2, \ldots, i_n$, в которых каждое число представляется выражением типа

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$$

и определяется заданием n компонент $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

При этом, как мы уже упоминали выше, оказалось, одн что такого рода расширения числовой области неизбежно связаны с утерей некоторых весьма важных свойств, которыми обладает алгебра действительных и комплексных чисел. Так, уже при переходе к комплексным числам типа $a+bi$ мы получаем непрерывное числовое тело, в котором нельзя установить соотношений скалярного расположения „$>$“ и „$<$“ так, чтобы сохранить монотонность основных операций. Это обстоятельство, однако, не играет существенной роли в дальнейших построениях, так как принцип непрерывности может быть сохранен в форме Кантора и все неравенства теории пределов, записанные в форме соотношений между абсолютными величинами, непосредственно переносятся в комплексную область с помощью соответствующего обобщения понятия об абсолютной величине или *модуле* числа. В числовой системе кватернионов приходится уже отказаться от свойства коммутативности операции умножения. Фробениусом (Frobenius) было доказано, что этого нельзя избежать, если желать сохранить более ценные для построения соответствующей алгебры свойства числовой системы, в частности, однозначность деления на число, отличное от нуля. Согласно Фробениусу, единственной системой гиперкомплексных чисел, для которой сохраняются все свойства числового поля, является система обыкновенных комплексных чисел ($n=2$), а единственной системой гиперкомплексных чисел, для которых сохраняются все свойства числового поля, кроме коммутативности умножения, является система кватернионов Гамильтона ($n=4$). Эта теорема приобретает особое значение в связи с сравнительно недавно доказанным советским математиком Понтрягиным предложением, согласно которому всякая система объектов, обладающая свойствами непрерывного числового поля (кроме коммутативности умножения), для которой выполнены еще некоторые совершенно естественные добавочные условия топологического характера („локальная бикомпактность"), может быть представлена в форме гиперкомплексной числовой системы и, стало быть, по теореме Фробениуса, должна совпадать либо с системой кватернионов Гамильтона, либо, если имеет еще место коммутативность умножения, с полем обыкновенных комплексных чисел или с полем действительных чисел.

В этом смысле обыкновенные комплексные числа и кватернионы Гамильтона представляют собой действительно предельную степень возможного расширения понятия числа с сохранением основных свойств числового поля.

Это и дает ответ на поставленный еще Гауссом вопрос о причинах особой роли числовой системы комплексных чисел с двумя единицами как в рамках самой теоретической арифметики, так и в дальнейших приложениях.

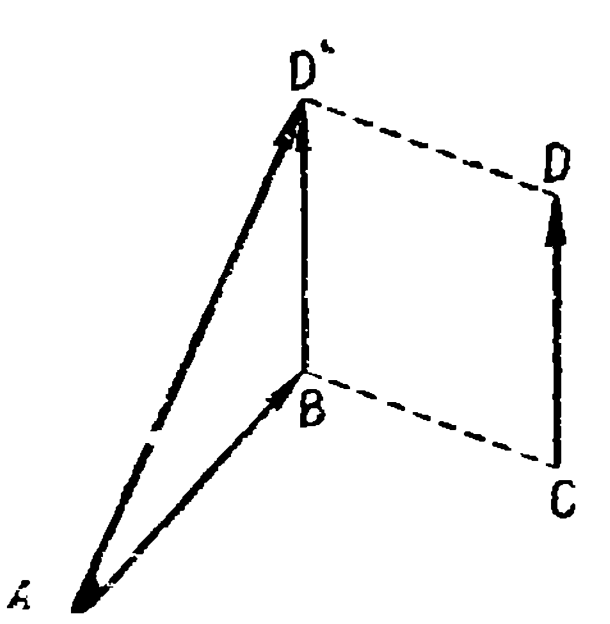
В этой главе мы и изложим сначала, следуя той же общей схеме, что и в главе III, операторную теорию комплексных чисел и соответствующую теорию пар, и далее, следуя Гамильтону, операторную теорию кватернионов и действий над ними и затем, наметив общие формальные основы построения теорий гиперкомплексных чисел, закончим изложение доказательством упомянутой выше теоремы Фробениуса.

§ 82. Комплексные числа как операторы.

1. За исходный пункт построений мы примем совокупность значений *двумерной* направленной величины. Можно было бы, аналогично ходу изложения в § 28, установить систему аксиом, определяющую это понятие. Характерным отличием от обычной одномерной скалярной величины явилось бы здесь наличие двух различных систем соотношений расположения θ, ε и θ', ε', удовлетворяющих порознь постулатам § 25, а в остальном не зависящих друг от друга. Совпадению (тождеству) двух значений величины A и B должно при этом отвечать одновременное выполнение соотношений $A\theta B$ и $A\theta' B$. Такого рода двумерное расположение осуществляется, например, в системе точек $A, B, C, \ldots$ на плоскости, если, введя, хотя бы, обычную декартову систему координат, определить отношения $A\theta B$ и $A\varepsilon B$, как отношения „$=$" и „$<$" для абсцисс точек A и B, а отношения $A\theta' B$ и $A\varepsilon' B$, как отношения „$=$" и „$<$" для их ординат. При обычном положении осей относительно наблюдателя отношение ε интерпретируется, как расположение „влево от", а отношение „ε'", как расположение „ниже, чем". Не желая вдаваться здесь в вопросы геометрической аксиоматики, связанной с общим исследованием понятия двумерного многообразия, мы и будем в дальнейшем иметь в виду исключительно указанную только что интерпретацию, приводящую к основному в теории комплексных чисел истолкованию этих последних как операторов, применяемых к векторам на плоскости. Становясь при этом вначале на чисто геометрическую точку зрения, мы *воздержимся временно от введения координат* (x, y), т. е. тех пар действительных чисел, которыми, с аналитической точки зрения, задаются элементы рассматриваемого двумерного многообразия.

2. Итак, пусть исходной системой *значений* величины будет совокупность всех точек A, B, C, ... плоскости.

Рассмотрим систему *переходов* или *векторов* на плоскости, определяемых заданием двух точек A и B в определенном порядке. Переход от A к B мы будем обозначать знаком (B, A) или, в обычном векторном обозначении, знаком $\overrightarrow{AB}$.



Черт. 25.

Композиция двух переходов с общей связующей точкой определяется, как и в § 28, соотношением (C, B) к $(B, A) = (C, A)$.

Для того чтобы распространить определение композиции на любые переходы, следуя той же схеме § 28, необходимо наличие определения *равенства* переходов или векторов, не нарушающего соотношения композиции при замене переходов равными им и допускающего построение перехода, равного данному, *от любой начальной точки*.

Этим условиям, как легко видеть, удовлетворяет известное читателю определение равенства векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, включающее в себя требования: *a*) параллельности прямых AB и CD; *b*) равенства и *c*) одинаковой направленности отрезков AB и CD.

Основываясь на указанном определении равенства, мы установим по общей схеме правило композиции переходов с различными начальными точками, совпадающее с обычным определением операции сложения двух векторов по правилу параллелограма (лучше было бы говорить: по правилу „замыкающей")

$$(D, C) \text{ к } (B, A) = (D', B) \text{ к } (B, A) = (D', A),$$

где $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{CD}$, так что $\overrightarrow{AD'}$ есть диагональ параллелограма, построенная на векторе $\overrightarrow{AB}$ и векторе $\overrightarrow{BD'}$, равном $\overrightarrow{CD}$ (черт. 25)

Образуя на основе этого определения общее понятие о переходе (B, A) или векторе $\overrightarrow{AB}$, мы откажемся, таким образом, от тех отличий между параллельными, одинаково направленными и равными по длине отрезками, которые связаны с тем или иным расположением их на плоскости.

Это иногда целесообразно подчеркнуть и в самой терминологии, говоря, что два равных параллельных и одинаково направленных отрезка представляют собой один и тот же переход (один и тот же вектор), а не „два равных“ перехода или вектора.

Мы не останавливаемся на тривиальных доказательствах ассоциативности, коммутативности и обратимости операции композиции переходов или сложения векторов.

На основе определенной таким образом композиции мы можем теперь ввести систему действительных операторов, применяемых к векторам. Именно, следуя схеме § 29, мы положим

$$n \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \ldots + \overrightarrow{AB} = (B,\ A) \text{ к } (B,\ A) \text{ к } \ldots \text{ к } (B,\ A)$$

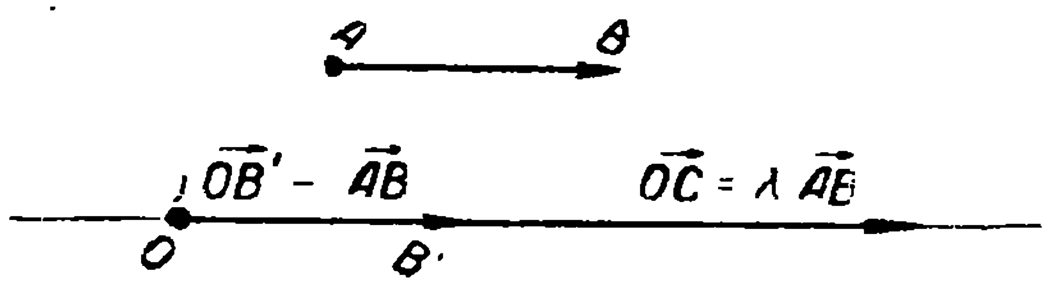
(число слагаемых равно n) и, далее, $\frac{n}{m}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если $n\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{CD}$ и, наконец,

$$(-n)\ \overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{BA}.$$

Для иррациональных операторов α значение $\alpha\overrightarrow{AB}$ определяется с помощью соответствующего сечения, производимого в скалярной системе соизмеримых с $\overrightarrow{AB}$ векторов $r \cdot \overrightarrow{AB}$.

Если зафиксировать вектор $\overrightarrow{AB}$, то получаемая из него с помощью действительных операторов λ система векторов

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB}$$



Черт. 26.

образует направленную величину в смысле § 34, однако *не исчерпывает еще* всей совокупности рассматриваемых переходов или векторов, определяемых *любыми* двумя значениями исходной двумерной величины. В нашей геометрической интерпретации все векторы типа $\lambda\overrightarrow{AB}$ изображаются отрезками, параллельными между собой и параллельными вектору $\overrightarrow{AB}$. Если зафиксировать начальную точку всех этих векторов, скажем, O, т. е. положить $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, или, применяя обозначения страницы 90,

$$C = \lambda (B,\ A) \text{ к } O,$$

то концы их C расположатся на одной прямой, проходящей через точку O и параллельной исходному отрезку AB (черт. 26).

Таким образом, действительные операторы достаточны для характеристики операций, переводящих *коллинеарные* векторы друг в друга.

3. Прежде чем идти дальше по пути обобщения понятия оператора, остановимся на связанном с только что полученным результатом способе характеристики векторов и точек плоскости с помощью пар действительных чисел, т. е. на введении *координат*.

Предполагая зафиксированной начальную точку O, выберем произвольным образом два не совпадающих между собой направления OA и OB ($\overrightarrow{OB} \neq \lambda\overrightarrow{OA}$). Тогда, как это вытекает из простых геометрических соображений, всякий вектор $\overrightarrow{OC}$ плоскости однозначно может быть представлен в виде

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}.$$

Пара действительных чисел λ, μ (координат) однозначно характеризует вектор $\overrightarrow{OC}$, а, стало быть, в соответствии с формулой

$$C = \overrightarrow{OC} \text{ к } O,$$

и точку C при фиксированном выборе точки O и единичных векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Сложению двух векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ отвечает сложение характеризующих их чисел.

При этом следует иметь в виду, что в полной аналогии со сказанным в § 33, *сложение векторов* (переходов первой ступени) имеет определенный смысл, не зависящий от выбора начала координат O и координатных векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Между тем, сложение значений двумерной величины, в рассматриваемом случае — точек, не определено и лишь условно можно было бы положить

$$C = D + E = (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}) \text{ к } O,$$

помня, что такое определение не инвариантно, а зависит от выбора начала координат O.

4. Вернемся теперь к нашей основной задаче. Как мы видели, запаса действительных операторов нехватает для того, чтобы при выборе некоторого исходного вектора $\overrightarrow{AB}$ охарактеризовать *все* остальные векторы плоскости.

Установленное до сих пор определение равенства переходов (векторов) не позволяет сравнивать между собой векторы $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ *различных направлений*, т. е. не получающиеся друг из друга, с помощью соотношения типа $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OB}$. Пусть, однако, исходная двумерная величина допускает установление взаимнооднозначного соответствия $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ между векторами различных направлений, обладающего свойствами равенства [рефлективностью, обратимостью и транзитивностью (§ 25)], притом так, что из соотношения $\overrightarrow{OC} \sim \overrightarrow{OB}$ вытекает $\lambda\overrightarrow{OB} \sim \lambda\overrightarrow{OC}$.

Разложим операцию, переводящую вектор $\overrightarrow{OA}$ в вектор другого направления $\overrightarrow{OB}$, на два составных элемента: 1) перемену направления вектора $\overrightarrow{OA}$, т. е. перевод его в вектор $\overrightarrow{OA'} \sim \overrightarrow{OA}$, одинакового направления с вектором $\overrightarrow{OB}$; 2) применение к вектору $\overrightarrow{OA'}$ действительного оператора λ, переводящего $\overrightarrow{OA}$ в вектор $\overrightarrow{OB}$, согласно формуле $\overrightarrow{OB}=\lambda\overrightarrow{OA'}$.

Для того чтобы система операторов, отнесенных к этим комплексным операциям, состоящим из указанных двух элементов, обладала основными свойствами числовой системы, необходимо:

1) Чтобы операции „перемены направления", т. е. переходы $[B, A]$ „от одного направления к другому", определяемые парой векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}\sim\overrightarrow{OA}$, образовали измеримую аддитивную величину в смысле § 28, значения которой могли бы быть охарактеризованы действительными числами.

2) Чтобы комплексные операции указанного выше типа обладали распределительным свойством относительно операции сложения векторов (переходов первой ступени).

Перечисленные свойства выполняются для рассматриваемого нами многообразия векторов на плоскости.

Действительно, в этом случае мы можем определить соотношение $\overrightarrow{AB}\sim\overrightarrow{CD}$ между векторами различных направлений, как *равенство длин* $|AB|=|CD|$ этих векторов.

Условимся для простоты изображать все векторы плоскости отрезками, исходящими из произвольной начальной точки O. Геометрическое место конечных точек векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$,... равной длины, но различных направлений, есть окружность радиуса $|OA|$, с центром в точке O. Мы положим в дальнейшем величину радиуса $|OA|$ равной 1.

Определим равенство переходов типа $[B, A]$ от одного направления $\overrightarrow{OA}$ к другому $\overrightarrow{OB}$, как равенство соответствующих дуг $\smile AB$ этой окружности. Тогда последовательному производству операций, переводящих векторы одного направления в векторы другого направления, т. е. композиции переходов $[B, A]$ и $[C, D]$, будет отвечать композиция (сложение) соответствующих дуг $\smile AB$ и $\smile BD'=\smile CD$ с общей связующей точкой B. Так как при этом дуги окружности образуют аддитивную величину, значения которой однозначно характеризуются действительными числами, измеряющими эти дуги при фиксированном выборе единицы меры, то совокупность этих чисел и доставляет нам требуемую числовую характеристику операций перехода от векторов одного направления к равным по длине векторам другого направления, причем последовательному производству таких операций соответствует *сложение* характеризующих их чисел.

5. Комплексная операция перевода вектора $\overrightarrow{AB}$ в вектор $\overrightarrow{AC}$ другого направления в той же плоскости характеризуется, таким образом, двумя действительными числами:

1) Положительным числом r в формуле

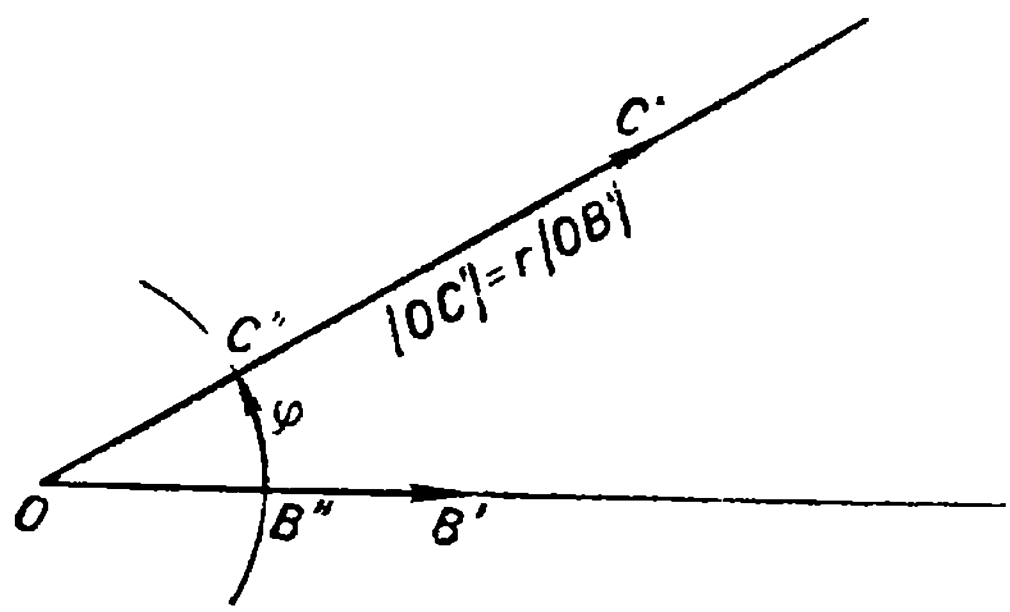
$$|AC|=r|AB|.$$

Применение оператора r к вектору $\overrightarrow{AB}$ осуществляет, таким образом, *растяжение* (или сжатие) *длины вектора* $\overrightarrow{AB}$ в *отношении* $r:1$ *без изменения направления вектора.*

2) Действительным числом φ, измеряющим дугу окружности радиуса 1, начало которой совпадает с концом B'' единичного вектора $\overrightarrow{OB''}$, коллинеарного с $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{AB}$, а конец — с концом C'' единичного вектора $\overrightarrow{OC''}$, коллинеарного с $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC}$ (черт. 27).

Применение соответствующего оператора к вектору $\overrightarrow{OA}$ осуществляет, таким образом, *поворот* вектора $\overrightarrow{OA}$ в рассматриваемой плоскости *без изменения его длины. Угол поворота по величине и по знаку задается числом* φ.

От выбора начальной точки O результат операции не зависит, так как по существу здесь речь идет о переходе от одного направления параллельных между собой направленных отрезков к другому, построение же окружности с центром в O играет чисто вспомогательную роль.



Черт. 27.

Всякий комплексный оператор указанного типа, представляющий объединение в одну двух операций: растяжения и поворота, и задаваемый соответственно парой действительных чисел $r>0$ *и* φ, *мы будем называть* ***комплексным числом*** и обозначать знаком

$$[r, \varphi].$$

Положительное число r называется **модулем**, а угол φ — **аргументом** комплексного числа.

Модуль числа α обозначается знаком $|\alpha|$ или mod α, а аргумент — знаком arg α.

Применение оператора $\alpha=[r, \varphi]$ к вектору $\overrightarrow{AB}$, дающее в результате вектор $\overrightarrow{CD}$, мы будем выражать обычной записью

$$\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}.$$

Два оператора $[r_1, \varphi_1]$ и $[r_2, \varphi_2]$, по определению, считаются **равными** в том случае, когда они осуществляют одно и то же растяжение (их модули совпадают) и один и тот же поворот (аргументы совпадают). Так как, кроме того, два оператора, аргументы которых отличаются на кратное 2π, будучи применены к одному и тому же вектору $\overrightarrow{OA}$, дают в окончательном результате один и тот же вектор $\overrightarrow{OB}$, то обычно определение равенства дополняется условием:

$$[r, \varphi_1]=[r, \varphi_2],$$

если

$$\varphi_1-\varphi_2=2k\pi, \text{ где } k \text{ — целое.}$$

В вопросах, относящихся к исследованию действий третьей ступени, от этого добавочного условия целесообразней отказаться (см. § 88, стр. 342).

Операторы чистого растяжения типа $[r, 0]$ мы будем считать совпадающими с положительными действительными числами и писать $[r, 0]=r$. Аналогично, отрицательные действительные числа как операторы, осуществляющие одновременно с растяжением перемену направления вектора на противоположное, могут быть представлены в виде $-r=[r, \pi]$ или, вообще, $-r=[r, k\pi]$, где k — нечетное целое число. Операторы чистого поворота без растяжения имеют, очевидно, вид $[1, \varphi]$.

Оператор $[r, \varphi]$ можно рассматривать, таким образом, как последовательное производство операций $[r, 0]$ и $[1, \varphi]$.

Порядок, в котором две операции: чистое растяжение и чистый поворот следуют друг за другом, как легко видеть, роли не играет.

§ 83. Основные действия над комплексными числами.

Перейдем теперь к основным действиям над комплексными числами.

1. Сложение. Согласно общему определению сложения для операторов (§ 29), полагаем:

$$(\alpha+\beta)\ \overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AB},$$

т. е. *оператор* $\alpha+\beta$, по определению, *переводит всякий вектор* $\overrightarrow{AB}$ *в сумму векторов, полученных из* $\overrightarrow{AB}$ *применением операторов* α *и* β.

Так как операция сложения векторов коммутативна и ассоциативна, то этими же свойствами обладает и операция сложения комплексных чисел, так что

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Вопрос о том, как связаны модуль и аргумент суммы с модулями и аргументами слагаемых, мы рассмотрим ниже (стр. 328).

2. Умножение. По общему определению (§ 29) произведением двух операторов β и α мы назовем третий оператор $\gamma=\beta\alpha$, применение которого равносильно последовательному производству операций β и α, так что

$$\gamma\overrightarrow{OA}=(\beta\alpha)\overrightarrow{OA}=\beta(\alpha\overrightarrow{OA}).$$

Из самого определения комплексной операции вытекает, что, если

$$\alpha=[r_1, \varphi_1];\ \beta=[r_2, \varphi_2],$$

то

$$\gamma=\beta\alpha=[r_2, \varphi_2]\cdot[r_1, \varphi_1]=[r_2r_1, \varphi_2+\varphi_1].$$

Действительно. оператор α осуществляет поворот вектора на угол φ_1 и растяжение в отношении $r_1:1$. Последующее применение оператора β дает добавочный поворот на угол φ_2 и добавочное растяжение в отношении $r_2:1$. Но композиции поворотов соответствует сложение чисел φ_1 и φ_2 (результирующий поворот на угол $\varphi_1+\varphi_2$), а последовательное применение действительных операторов r_1 и r_2 к длинам векторов эквивалентно применению оператора r_2r_1.

Таким образом, *при умножении комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются* (черт. 28).

На чертеже

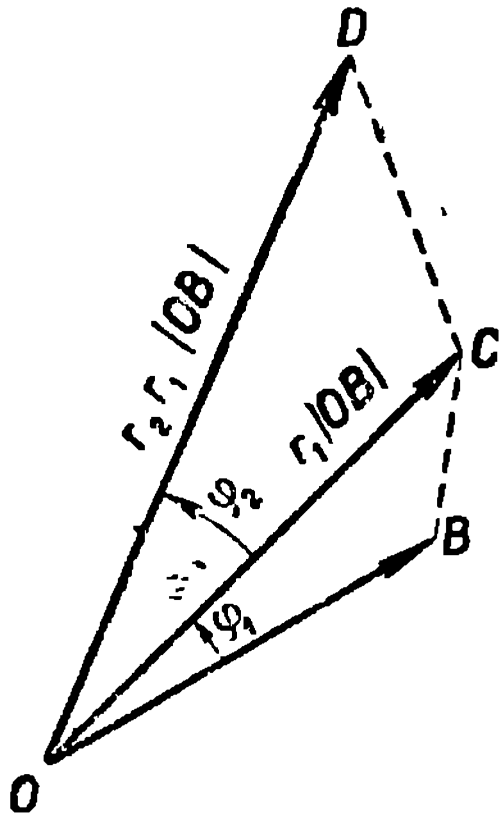
$$\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OB}=[r_1,\ \varphi_1]\overrightarrow{OB};\ |OC|=r_1|OB|,\ \widehat{COB}=\varphi_1;$$
$$\overrightarrow{OD}=\beta\overrightarrow{OC}=[r_2,\ \varphi_2]\overrightarrow{OC};\ |OD|=r_2|OC|=r_2r_1|OB|;$$
$$\widehat{DOC}=\varphi_2,\quad \widehat{DOB}=\varphi_2+\varphi_1,$$

так что

$$\overrightarrow{OD}=[r_2r_1,\ \varphi_2+\varphi_1]\overrightarrow{OB}.$$

Отсюда вытекает как следствие *переместительный* и *сочетательный* законы умножения комплексных чисел

$$\alpha\beta\delta=\alpha(\beta\delta)\ \text{ и }\ \alpha\beta=\beta\alpha.$$



Черт. 28.

Правый распределительный закон

$$(\alpha+\beta)\delta=\alpha\delta+\beta\delta$$

непосредственно следует из определения сложения операторов.

Левый распределительный закон проще всего доказывать, пользуясь сочетательным свойством, отдельно для операторов чистого растяжения и чистого поворота.

В первом случае после применения операции $[r,1]$ треугольник, образованный векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$, перейдет в подобный треугольник, образованный векторами $r\cdot\overrightarrow{AB}$, $r\cdot\overrightarrow{BC}$ и $r\cdot\overrightarrow{AC}$, так что

$$r(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=r\overrightarrow{AB}+r\overrightarrow{BC}.$$

Применение же оператора $[1,\ \varphi]$ осуществляет поворот треугольника ABC на угол φ и, стало быть, преобразованный вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$ будет замыкающей ломаной, составленной из преобразованных векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$, так что

$$[1,\ \varphi]\ (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=[1,\ \varphi]\ \overrightarrow{AB}+[1,\ \varphi]\ \overrightarrow{BC}.$$

Отсюда и вытекает, что вообще при $\delta=[r,\ \varphi]$

$$\delta(\alpha+\beta)=\delta\alpha+\delta\beta.$$

Перейдем теперь к обратным операциям.

3. Вычитание. Вводя, в соответствии с определениями, данными на странице 96, *нулевой переход* или *нулевой вектор*

$$(A, A) = (B, B) = \ldots = 0,$$

можно для *нулевого оператора* $0 = [0, 0]$ написать

$$0 \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Будем обозначать, далее, комплексный оператор

$$(-1)\,[r, \varphi] = [1, \pi]\,[r, \varphi] = [r, \varphi + \pi]$$

знаком $-[r, \varphi]$. Тогда для всякого комплексного числа α будем иметь

$$(\alpha + (-\alpha))\overrightarrow{AB} = \alpha(\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB}) = \alpha(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) = \alpha\overrightarrow{AA} = 0,$$

так что

$$\alpha + (-\alpha) = 0.$$

Поэтому из равенства

$$\xi + \alpha = \beta$$

будет вытекать

$$\xi + \alpha + (-\alpha) = \beta + (-\alpha)$$

или

$$\xi = \beta + (-\alpha), \text{ т. е. } \beta - \alpha = \beta + (-\alpha).$$

Операция вычитания комплексных чисел, таким образом, *всегда выполнима и однозначна* и может быть заменена прибавлением оператора $(-\alpha)$, противоположного по знаку вычитаемому.

4. Деление. Из равенства

$$(x, \omega) \cdot (r_1, \varphi_1) = (r_2, \varphi_2)$$

следует

$$xr_1 = r_2; \quad \omega + \varphi_1 = \varphi_2$$

и, стало быть, при $r_1 \neq 0$

$$x = r_2 : r_1, \quad \omega = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Таким образом, *операция деления комплексного числа на комплексное число, отличное от нуля, всегда выполнима и однозначна. При делении модули делятся в указанном порядке, а аргументы вычитаются.* Заметим, что в обеих операциях умножения и деления, при принятом на странице 316 определении равенства, соотношения между аргументами следует трактовать как равенства с точностью до кратного 2π.

§ 84. Возвышение в степень и извлечение корня.

1. Если $\alpha = [r, \varphi]$, то произведение n сомножителей, равных α, т. е. α^n, будет равно

$$\alpha^n = [r^n, n\varphi].$$

Однако построение обратной операции извлечения корня или возвышения в дробную степень требует некоторой осторожности, так как результат существенно зависит от того, в какой форме представлен аргумент подкоренного количества.

Действительно, полагая при данном $a=[r, \varphi]$

$$[x, \omega]^n=[r, \varphi] \text{ или } [x^n, n\omega]=[r, \varphi],$$

мы получим

$$x=\sqrt[n]{r} \text{ и } \omega=\frac{\varphi}{n}.$$

Однако, заменяя оператор $a=[r, \varphi]$ равным ему, согласно принятому условию (стр. 316), комплексным числом $[r, \varphi+2k\pi]$, мы получим

$$x^n=r \text{ и } n\omega=\varphi+2k\pi,$$

откуда

$$x=\sqrt[n]{r}, \quad \omega=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}.$$

При значениях k, при которых слагаемое $\frac{2k\pi}{n}$ не есть кратное π, мы будем получать, стало быть, комплексные числа, *неравные* числу $\left[\sqrt[n]{r}, \frac{\varphi}{n}\right]$. Однозначность операции извлечения корня имеет место, таким образом, лишь при том условии, если считать операторы $[r, \varphi]$ и $[r, \varphi+2k\pi]$ с углами поворота, отличающимися на кратное 2π, неравными между собой.

При принятом нами определении равенства комплексных чисел, существенном для установления однозначной операции первой ступени — сложения, соответствующей сложению векторов на плоскости, операция извлечения корня n-й степени оказывается n-значной.

Действительно, полагая $s=\sqrt[n]{r}$, $\omega_0=\frac{\varphi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}=\psi$ и придавая в формуле

$$\omega=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

числу k значения

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

получим n неравных между собой комплексных чисел

$$[s, \omega_0],\ [s, \omega_0+\psi],\ [s, \omega_0+2\psi],\ \ldots,\ [s, \omega_0+(n-1)\psi].$$

При других значениях k можно положить $k=qn+k_1$, где $0\leq k_1<n$, и, стало быть,

$$\omega=\omega_0+k_1\varphi+2q\pi.$$

Из последнего соотношения и будет следовать

$$[s, \omega]=[s, \omega_0+k_1\varphi],$$

где в правой части находится одно из выписанных выше n чисел.

Пусть $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Число $[s, \omega_0] = \beta$ называется *главным значением* корня n-й степени из $\alpha = [r, \varphi]$.

Можно написать

$$[s, \omega_0 + k\psi] = [s, \omega_0]\ [1, k\psi] = \beta[1, \psi]^k = \beta \cdot \varepsilon^k,$$

где $\varepsilon = [1, \psi]$ есть одно из значений *корня n-й степени из единицы*. Совокупность степеней числа ε

$$\varepsilon = [1, \psi],\ \varepsilon^2 = [1, 2\psi], \ldots,\ \varepsilon^{n-1} = [1, (n-1)\psi],$$
$$\varepsilon^n = [1, n\psi] = [1, 2\pi] = 1$$

исчерпывает собой все возможные значения корня n-й степени из 1. Операторы $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$ осуществляют поворот плоскости соответственно на углы

$$\psi = \frac{2\pi}{n},\ 2\psi,\ 3\psi,\ \ldots,\ n\psi = 2\pi.$$

Каждый из этих поворотов, по n-кратном повторении, приводит плоскость в исходное положение.

Если применить последовательно к какому-либо вектору $\overrightarrow{OA}$ операторы $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$, то концы полученных векторов располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса $|OA|$.

Очевидно, что при четном n два и только два значения $\sqrt[n]{1}$, а именно $\varepsilon^{\frac{n}{2}} = [1, \pi] = -1$ и $\varepsilon^n = [1, 2\pi] = 1$ действительны, а при нечетном n — только одно: $\varepsilon^n = 1$.

Доказанное выше равенство $[s, \omega_0 + k\varphi] = \beta\varepsilon^k$ показывает, что все значения корня n-й степени из комплексного числа α можно получить, умножая одно из них, β, на все значения корня n-й степени из единицы. В частности, если α — положительное действительное число $[r, 0]$, то $\beta = [s, 0] = \sqrt[n]{r}$ и мы получим при четном n два действительных значения $\sqrt[n]{\alpha}$, именно $+\sqrt[n]{r}$ и $-\sqrt[n]{r}$ и $n-2$ комплексных значения; при нечетном n — одно действительное значение $\sqrt[n]{r}$ и $n-1$ комплексных.

Если α — отрицательное действительное число $[r, \pi]$, то $\beta = \left[s, \frac{\pi}{n}\right]$, и, стало быть, число $[s, \omega_0 + k\psi] = \left[s, \frac{\pi + 2k\pi}{n}\right]$ будет действительным только при $2k + 1 = n$, т. е. при *нечетном* n и $k = \frac{n-1}{2}$, причем мы получим тогда число $[s, \pi] = -\sqrt[n]{r}$ где $r = |\alpha|$.

Корень же *четной* степени из отрицательного числа имеет n комплексных значений, среди которых нет, стало быть, ни одного действительного. Таким образом, введение комплексных чисел делает операцию извлечения корня всегда выполнимой и притом n-значной.

Так как, в частности, $\sqrt{1}$ имеет два значения 1 и -1, то, согласно сказанному выше, *квадратный* корень из всякого комплексного (в том числе и действительного) числа имеет *два значения, отличающихся друг от друга знаком.*

Дробная степень $\alpha^{\frac{m}{n}}$ определяется, как обычно, соотношением $\alpha^{\frac{m}{n}} = \left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^m$, и, если показатель $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, имеет соответственно n значений.

Примечание. Заметим в заключение, что не всякий корень n-й степени из 1 порождает при возвышении его в последовательные степени $1, 2, 3, \ldots, n$ совокупность *всех* корней n-й степени из 1, как это имело место в приведенном выше случае корня $\varepsilon = [1, \frac{2\pi}{n}]$. Действительно, полагая $\eta = \varepsilon^m$, найдем $\eta^k = \varepsilon^{mk}$ и равенство $\eta^k = 1$ будет выполнено уже при $k < n$, если m имеет общий делитель с n. Именно, полагая $m = m_1 d$, $n = n_1 d$ и $k = n_1 < n$, мы получим $\eta^k = \varepsilon^{m_1 d n_1} = \varepsilon^{n m_1} = 1$. Стало быть, $\eta^{k+1} = \eta$, $\eta^{k+2} = \eta^2, \ldots$ и среди последовательных степеней числа η будет не более k различных.

Если же m взаимно простое с n, то делимость показателя mk на n требует, чтобы k делилось на n, т. е. чтобы $k = n$. Если бы при этом среди степеней η с показателями, не превышающими n, встретились повторения, то мы имели бы $\eta^{k_1} = \eta^{k_2}$ и $\eta^{k_1 - k_2} = 1$, что при $0 < k_2 < k_1 \leqslant m$ и, стало быть, $0 < k_1 - k_2 < n$, по только что сказанному, невозможно.

Итак, те и только те корни из 1, которые получаются при возвышении числа $\varepsilon = \left[1, \frac{2\pi}{n}\right]$ в степень m, *взаимно простую* с n, порождают при возвышении в степень совокупность *всех* корней n-й степени из единицы. Такие корни носят название первообразных.

2. Рассмотрим весьма важный частный случай, именно операцию извлечения квадратного корня из (-1). Здесь $\alpha = [1, \pi]$ и мы получим два комплексных значения корня

$$\beta_1 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] \text{ и } \beta_2 = -\left[1, \frac{\pi}{2}\right] = \left[1, \frac{3\pi}{2}\right] = -\beta_1.$$

Комплексное число $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ обозначается знаком i и носит название **мнимой единицы.** Числа типа λi, где λ — действительное число, называются **чисто мнимыми** числами.

Обозначая через $\sqrt{-1}$ совокупность всех значений корня -1, мы можем, стало быть, написать:

$$\sqrt{-1} = \pm i.$$

Заметим, что обычно знак $\sqrt{-1}$ употребляется для обозначения самого числа i, т. е. главного значения корня.

Операция $i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ осуществляет поворот всех векторов плоскости на прямой угол в положительном направлении. Так как двукратное применение этой операции равносильно перемене направления всякого вектора на противоположное, то согласно с операторным смыслом действия умножения мы и получаем:

$$i^2 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]\left[1, \frac{\pi}{2}\right] = [1, \pi] = -1.$$

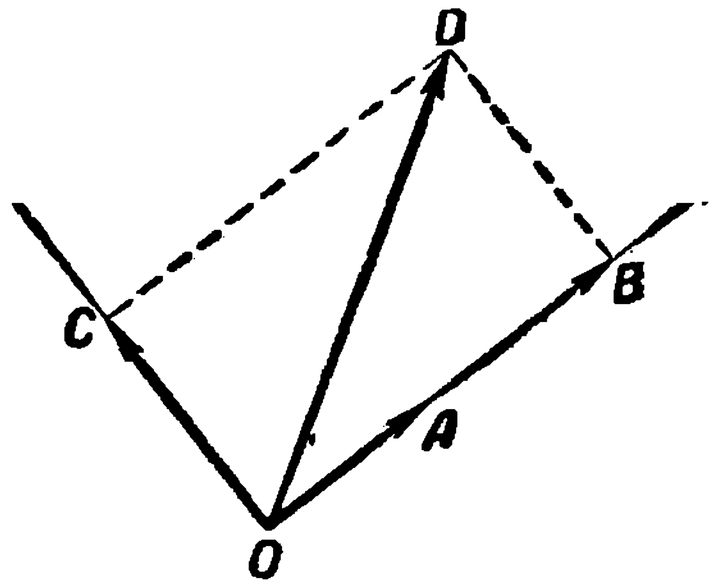
Операцию $-i$ можно также рассматривать как операцию поворота на прямой угол в противоположном направлении и интерпретировать соответственно равенство $(-i)^2 = -1$.

Мы видим, таким образом, что в теории комплексных чисел как операторов поворота и растяжения все соотношения между комплексными числами допускают совершенно отчетливое конкретное истолкование. В частности, и соотношение $i^2 = -1$ включается совершенно естественным образом в эту общую схему.

§ 85. Координатная форма комплексного числа.

1. Перейдем теперь к основному в теории комплексных чисел разложению комплексного числа на действительную и чисто мнимую часть.

Пусть комплексный оператор $\alpha = [r, \varphi]$ в применении к вектору $\overrightarrow{OA}$ дает вектор $\overrightarrow{OD}$, так что $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA}$.



Черт. 29.

Вектор $\overrightarrow{OD}$ может быть однозначно представлен в виде суммы двух векторов: $\overrightarrow{OB}$, коллинеарного с $\overrightarrow{OA}$ и получающегося, стало быть, из $\overrightarrow{OA}$ путем применения действительного оператора a, и $\overrightarrow{OC}$, перпендикулярного к $\overrightarrow{OA}$ и получающегося потому из $\overrightarrow{OA}$ применением оператора bi, объединяющего поворот на прямой угол с растяжением, характеризуемым множителем b. Числа a и b могут при этом быть как положительными, так и отрицательными.

Таким образом (черт. 29)

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OB} = a \cdot \overrightarrow{OA}; \quad \overrightarrow{OC} = bi \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} = (a + bi)\,\overrightarrow{OA}.$$

Для направленных отрезков OC, OD, OA и OB на соответствующих осях имеют место соотношения:

$$OB = OD\cos\varphi = OA \cdot r\cos\varphi,$$
$$OC = OD\sin\varphi = OA \cdot r\sin\varphi;$$

с другой стороны,

$$OB = a \cdot OA, \quad OC = b \cdot OA,$$

поэтому получаем

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi.$$

Отсюда следует, в частности, что в разложении оператора α по формуле

$$\alpha\overrightarrow{OA} = (a + bi)\,\overrightarrow{OA}$$

числа a и b не зависят от вектора $\overrightarrow{OA}$, так что можно написать для оператора α, согласно с определением сложения,

$$\alpha = [r, \varphi] = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Числа a и b называются **координатами** комплексного числа α, слагаемое a носит название **действительной**, а слагаемое bi (иногда, если нет оснований опасаться недоразумений, число b без множителя i) — **мнимой части** комплексного числа. Иногда пишут $a = R(\alpha)$ и $b = I(\alpha)$ (начальные буквы латинских и французских терминов, обозначающих действительную и мнимую части). Выражение $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называют **тригонометрической формой** задания комплексного числа $\alpha = [r, \varphi]$.

Если числа a и b даны, то модуль и аргумент определяются по формулам:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{b}{a}.$$

Аргумент определяется, очевидно, лишь с точностью до кратного 2π.

В силу этого, равенство двух комплексных чисел, заданных в координатной форме,

$$a + bi = c + di$$

равносильно двум равенствам

$$a = c \quad \text{и} \quad b = d$$

между действительными числами, характеризующими действительную и мнимую части комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$.

2. При фиксированном выборе единичного вектора $\overrightarrow{OA}$ мы можем всякий другой вектор $\overrightarrow{OD}$ плоскости представить в виде

$$\overrightarrow{OD} = (a + bi)\,\overrightarrow{OA}.$$

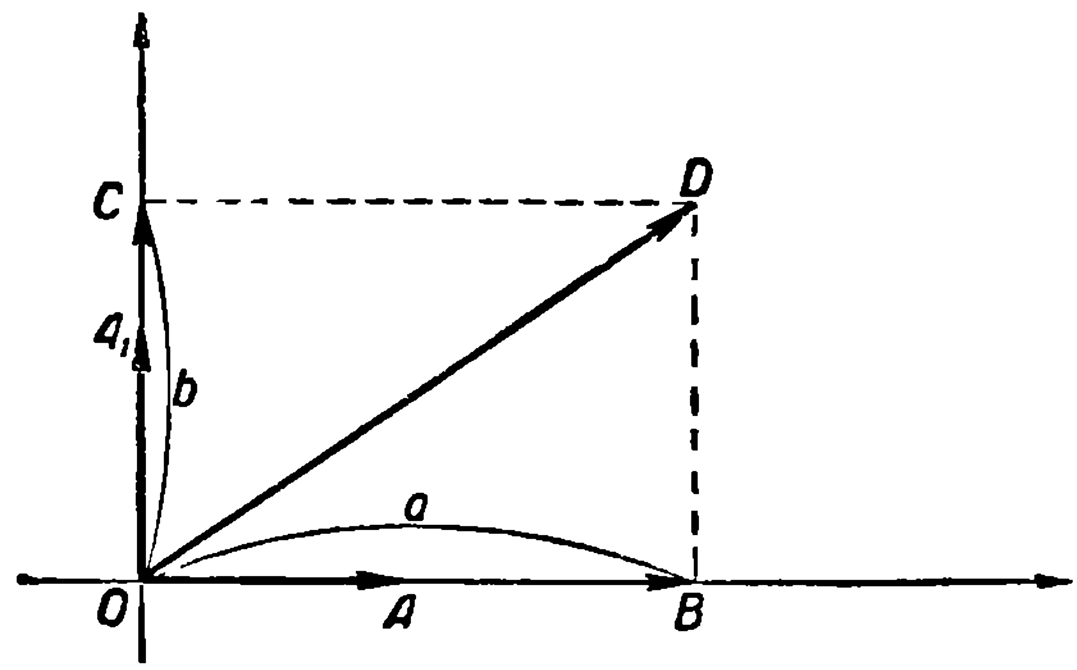
Этим соотношением устанавливается взаимно-однозначное соответствие между комплексными числами — операторами $a + bi$ и векторами $\overrightarrow{OD}$ (переходами первой ступени) плоскости, причем, в силу равенства $|OA| = 1$, координаты комплексного числа a и b совпадают с числовыми характеристиками компонент вектора $\overrightarrow{OD}$ в его разложении по двум осям, определяемым единичным вектором $\overrightarrow{OA}$ и перпендикулярным к нему вектором $i \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1}$ (черт. 30).

Если, далее, зафиксировать еще и начало координат, то всякий вектор $\overrightarrow{OD}$ плоскости однозначно характеризуется точкой плоскости D — концом этого вектора.

Таким образом, с помощью формулы

$$D = \alpha \overrightarrow{OA} \text{ к } O = (a + bi) \overrightarrow{OA} \text{ к } O$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости и системой комплексных чисел — операторов $a + bi$, причем координаты a и b комплексного числа совпадают с координатами соответствующей точки D в декартовой прямоугольной системе координат с началом в точке O и с осью абсцисс, имеющей направление единичного вектора $\overrightarrow{OA}$. Точка D называется **аффиксом** комплексного числа $a + bi$. Действительные числа отображаются точками на оси абсцисс, называемой поэтому **действительной осью**, а чисто мнимые числа вида bi — точками оси ординат, называемой **мнимой осью** комплексной плоскости. Модуль комплексного числа $a + bi$ выражает расстояние аффикса D от начала координат O, а аргумент — угол, образованный радиусом-вектором OD с положительным направлением действительной оси.



$\overline{OB} = a . \overline{OA}$, $\overline{OC} = bi\ \overline{OA}$

Черт. 30.

В соответствии с тем, что взаимное расположение точек плоскости, в отличие от точек прямой, не может быть охарактеризовано с помощью одного соотношения скалярного расположения типа „$<$“, находится и то обстоятельство, что для комплексных чисел *не вводится никакого отношения скалярного расположения, кроме отношения равенства* (возможные формальные определения, не отражая существенных свойств изучаемой двумерной величины, имели бы искусственный характер и потому были бы бесполезны).

Таким образом, мы приходим с помощью комплексных чисел к числовой характеристике „значений“ исходной двумерной величины, т. е. точек плоскости. Процесс построения этих характеристик вполне аналогичен описанному в § 33.

Если при построении теории комплексных чисел как операторов от первоначальной системы значений величины — точек плоскости — мы перешли сначала к переходам-векторам, определяемым парой точек, а затем к операторам, измеряющим один переход с помощью другого, то в построении числовых характеристик точек плоскости мы идем обратным путем, характеризуя каждую точку D тем комплексным числом-оператором, с помощью которого из *единичного перехода* $\overrightarrow{OA}$ получается вектор-переход $\overrightarrow{OD}$, применение которого к *начальной точке* O приводит к точке D. Степень произвола в установлении такой системы числовых характеристик зависит от возможности произвольно выбирать начальную точку O и единичный вектор $\overrightarrow{OA}$ как по величине, так и направлению.

Отсюда, в частности, следует, что геометрические соотношения между точками и векторами комплексной плоскости, используемые для интерпретации тех или иных соотношений между комплексными числами, не обладают свойством инвариантности и выражают по существу лишь взаимоотношения между соответствующим комплексным числам геометрическими объектами *и отправными элементами построения числовой шкалы* — началом координат O и единичным вектором $\overrightarrow{OA}$. Так, например, соотношению $\beta+\gamma=\delta$ между комплексными числами отвечает расположение аффиксов B, C и D чисел β, γ, δ, при котором фигура $OCDB$ есть параллелограм. При перемене начала O это соотношение нарушается, и, стало быть, здесь нельзя говорить об инвариантном геометрическом соотношении *между точками* B, C и D, находящем свое отражение в числовом равенстве $\beta+\gamma=\delta$. Это соответствует той общей установке § 33, согласно которой операция сложения для значений исходной скалярной величины (точек) устанавливается лишь на основе операции сложения переходов чисто формальным путем (стр. 111—112).

В области же переходов-векторов $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ и $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$, соотношения первой ступени, как, например,

$$\vec{b}+\vec{c}=\vec{d},$$

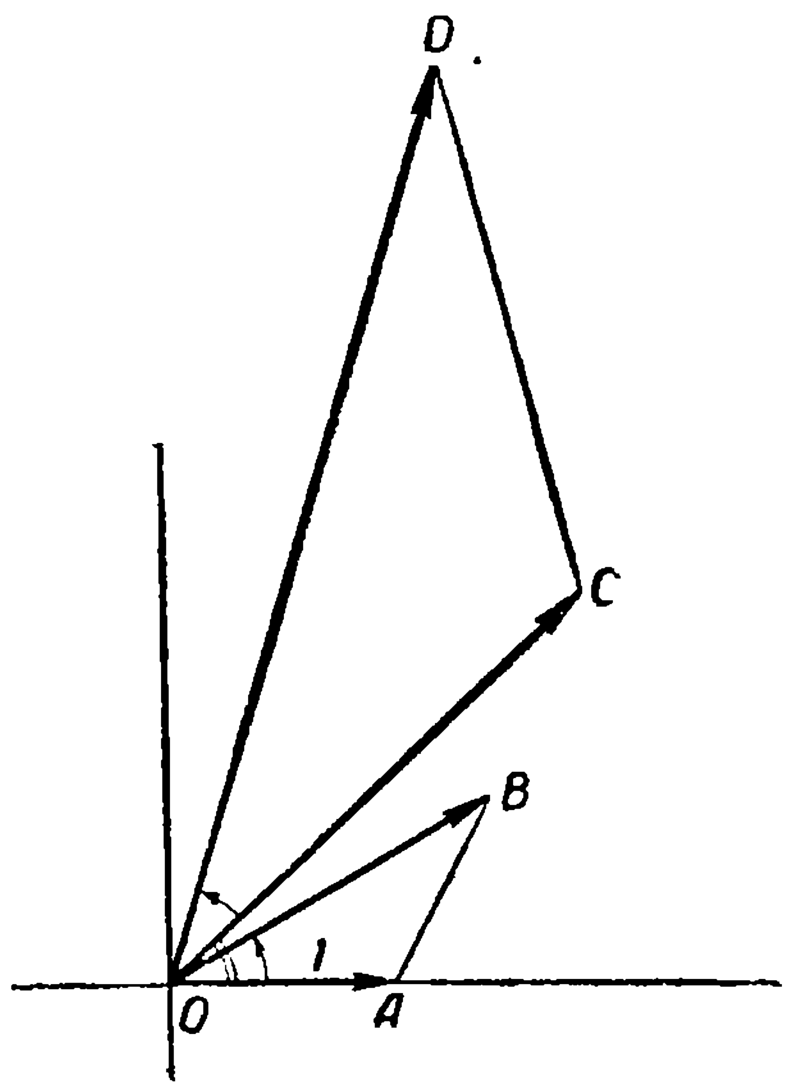
согласно установленным определениям инвариантны, не зависят от выбора точки O и вектора $\overrightarrow{OA}$ и выражают соответственно тот геометрический факт, что вектор $\vec{d}$ может быть изображен отрезком, замыкающим ломаную, составленную из отрезков, изображающих векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Аналогично, операция второй ступени—умножение — не имеет инвариантного смысла даже для векторов плоскости. Соотношению $\beta\cdot\gamma=\delta$ между комплексными числами отвечает расположение отнесенных им векторов $\overrightarrow{OB}=\beta\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}=\gamma\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}=$ $=\delta\overrightarrow{OA}=(\beta\gamma)\overrightarrow{OA}$, при котором треугольники OAB и OCD — подобны (черт. 31). Действительно, так как $\operatorname{mod}\delta=\operatorname{mod}\beta\operatorname{mod}\gamma$, то $OD=|\beta|\,|\gamma|\,1=|\beta|\cdot OC$; $OB=|\beta|\cdot 1$ и, стало быть, $OD:OC=$ $=OB:OA$, и так как $\arg\delta=\arg\beta+\arg\gamma$, то $\widehat{DOA}=\widehat{BOA}+\widehat{COA}$ и, стало быть, $\widehat{DOC}=\widehat{BOA}$.

Это соотношение между векторами соответствует формальному определению умножения, приведенному на странице 114, согласно которому вектор $\overrightarrow{OD}$ получается из вектора $\overrightarrow{OC}$ *так* (т. е. применением того же оператора третьей ступени β), *как* вектор $\overrightarrow{OB}$ получается из единицы (единичного вектора $\overrightarrow{OA}$).

При перемене единичного вектора $\overrightarrow{OA}$ эти соотношения нарушаются и, значит, здесь нельзя говорить о геометрическом соотношении между векторами $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, находящими свое отражение в числовом равенстве $\beta\gamma=\delta$.

Таким образом, как и в главе III, можно сказать, что лишь в области операторов соотношения между числами отражают инвариантные свойства изучаемых объектов, не зависящие от выбора начала координат O и единичного вектора $\overrightarrow{OA}$.



Черт. 31.

3. Мы привели здесь этот анализ смыслового значения операций над комплексными числами в трех возможных интерпретациях: точечной, векторной и операторной, имея, главным образом, в виду аналогию с главой III, где речь шла об одномерных скалярных величинах, для которых различение смыслового значения числовых характеристик может играть существенную роль в целом ряде вопросов. Следует, однако, подчеркнуть, что в области комплексных чисел эти соображения, существенные для выявления тех же характерных черт операторной теории, играют на практике сравнительно второстепенную роль, так как комплексные числа редко используются непосредственно как числовые характеристики двумерных величин. Наоборот, геометрическая схема строится как вспомогательный аппарат для иллюстрации соотношений между комплексными числами и потому вводимые геометрические объекты — векторы и точки — изучаются *лишь в их отношении к определенной, произвольно введенной системе координат* и вопрос о геометрической инвариантности тех или иных их свойств в связи с этим вообще отпадает.

Можно поэтому без особых оговорок пользоваться указанной выше точечной интерпретацией комплексных чисел в комплексной плоскости, употребляя один и тот же знак и одни и те же термины для обозначения как самих комплексных чисел, так и их аффиксов и прибегая к векторной или операторной интерпретации в тех случаях, когда это оказывается целесообразным.

§ 86. Действия над комплексными числами в координатной форме.

Перейдем теперь к рассмотрению основных действий над комплексными числами, заданными в координатной форме $a+bi$ В принятой нами системе изложения относящиеся сюда формулы вытекают из установленных выше законов основных операций и основного соотношения

$$i^2=-1.$$

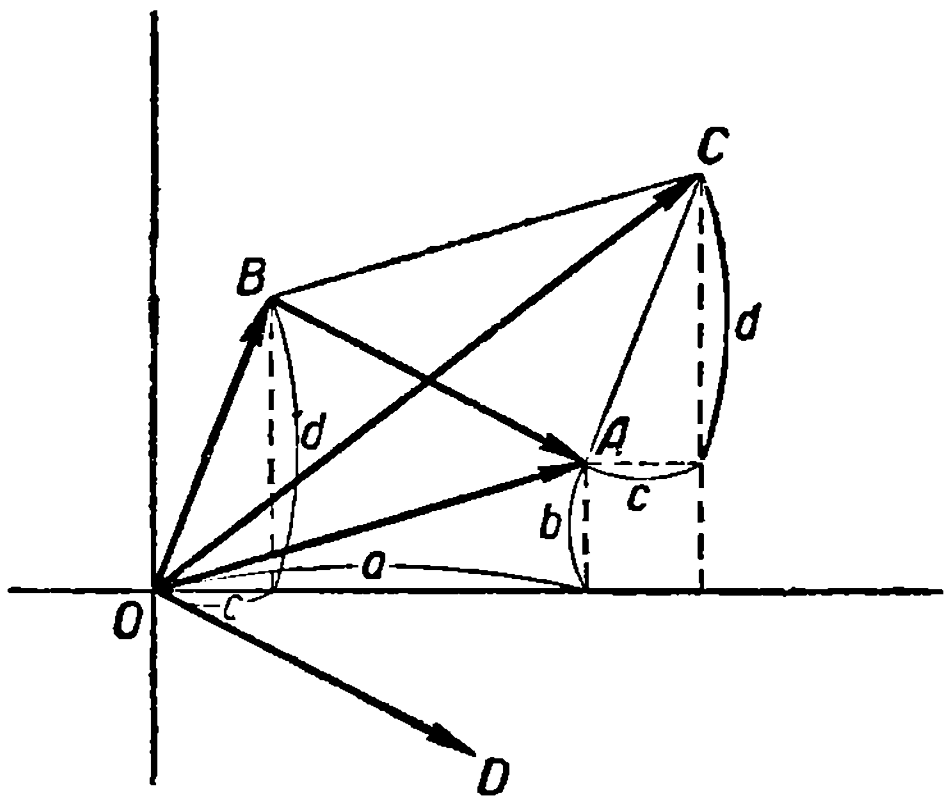
1. В особенности просто выражаются при этом результаты действий первой ступени

$$(a+bi)\pm(c+di)=a\pm c+(b\pm d)i,$$

легко иллюстрируемые геометрической схемой (черт. 32).

Здесь

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$



Черт. 32.

Следует заметить, что и в точечной интерпретации обычно разность $\alpha-\beta$ чисел $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$, отображаемых точками A и B, чаще всего интерпретируется *вектором* $\overrightarrow{BA}$, направленным от точки B к точке A, а не соответствующей *точкой* комплексной плоскости D. Модуль разности $|\alpha-\beta|$ выражает при этом расстояние $|AB|$ между точками A и B. Отсюда, на основании известных соотношений между сторонами треугольника, получаем

$$||\alpha|-|\beta||\leqslant|\alpha\pm\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$$

как обобщение известных неравенств, на которых основано доказательство многих предложений теории пределов.

К этим неравенствам можно притти и аналитическим путем, выразив модуль и аргумент суммы или разности через модуль и аргумент слагаемых.

Если

$$[r_1, \varphi_1]\pm[r_2, \varphi_2]=[r, \varphi],$$

то

$$r^2=(a\pm c)^2+(b\pm d)^2=r_1^2+r_2^2\pm 2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b\pm d}{a\pm c}=\frac{r_1\sin\varphi_1\pm r_2\sin\varphi_2}{r_1\cos\varphi_1\pm r_2\cos\varphi_2}.$$

Первое из этих соотношений выражает, как легко видеть, не что иное, как теорему о квадрате стороны треугольника. Так как $-1 \leqslant \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \leqslant +1$, то $(r_1 - r_2)^2 \leqslant r^2 \leqslant (r_1 + r_2)^2$, откуда и вытекают приведенные выше неравенства.

2. Перейдем к операции умножения. Принимая во внимание соотношение $i^2 = -1$, находим

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (bc + ad)i.$$

Геометрическая интерпретация была дана на странице 318. Если перейти к тригонометрической форме задания комплексных чисел и использовать соотношение

$$[r_1, \varphi_1][r_2, \varphi_2] = [r, \varphi] = [r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2],$$

то мы найдем:

$$ac - bd = r\cos\varphi = r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2),$$
$$bc + ad = r\sin\varphi = r_1 r_2(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1),$$

откуда вытекают известные тригонометрические тождества:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1,$$

обычное геометрическое доказательство которых включает в себя те же элементы, которые выше были использованы при установлении для комплексных чисел дистрибутивного закона умножения по отношению к сложению.

Заметим, что, используя равенство $r = r_1 r_2$, мы придем к легко проверяемому алгебраическому тождеству

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2.$$

3. Для того чтобы алгебраическим путем получить выражение для частного от деления двух комплексных чисел в координатной форме, целесообразно воспользоваться понятием о *сопряженных* комплексных числах.

Два комплексных числа

$$\alpha = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = [r, \varphi]$$

и

$$\bar{\alpha} = a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = [r, -\varphi],$$

отличающиеся знаком при i или, что то же, получающиеся одно из другого изменением знака аргумента, называются **сопряженными** (или комплексно-сопряженными) друг по отношению к другу. Аффиксы сопряженных чисел располагаются симметрично относительно действительной оси. Равенство $\alpha = \bar{\alpha}$ можно рассматривать как условие того, что число α — действительное.

Читатель легко убедится, что

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha; \quad \alpha \cdot \bar{\alpha} = |\alpha| = |\bar{\alpha}| = r$$
$$\frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha}) = a; \quad \frac{1}{2}(\alpha - \bar{\alpha}) = bi$$
$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}; \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}; \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

и, вообще,

$$\overline{f(\alpha)}=f(\overline{\alpha}),$$

если $f(\alpha)$ полином или рациональная функция с *действительными* коэфициентами. Из этого можно, в частности, вывести весьма важное следствие о том, что корни всякого алгебраического уравнения с действительными коэфициентами распадаются на пары сопряженных [если $f(\alpha)=0$, то и $\overline{f(\alpha)}=0$, а стало быть, и $f(\overline{\alpha})=0$]

Вернемся теперь к операции деления комплексного числа $\alpha=a+bi$ на число $\beta=c+di\neq 0$.

Замечая, что при $\beta\neq 0$ также и $\overline{\beta}\neq 0$, мы можем теперь, умножая числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное со знаменателем, написать

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

К тому же результату можно было бы притти, исходя из тригонометрической формы задания комплексных чисел и идя путем, обратным тому, которым мы только что шли при рассмотрении операции умножения.

4. Представляя комплексные числа в тригонометрической форме и исходя из соотношения

$$[r,\ \varphi]^n=[r^n,\ n\varphi],$$

придем к равенству

$$\{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\}^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

т. е. к известной **формуле Моавра** (Moivre)

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

Раскрывая левую часть по биному Ньютона и отделяя действительную часть от мнимой, легко получить общие формулы для выражения $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Операция извлечения корня приводит к соотношению

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

из которого, придавая числу k значения $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ (см. стр. 320), получим значения всех n корней из комплексного числа $[r,\ \varphi]$ в тригонометрической форме. В частности, все корни n-й степени из единицы даются выражением

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

при $k=0, 1, 2, \ldots n-1$ и могут быть рассматриваемы как соответствующие степени первообразного корня

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

Для корней n-й степени из -1 найдем, аналогично, значения

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n-1).$$

При некоторых значениях n корни n-й степени из $+1$ и -1 нетрудно найти алгебраическим путем. Этим обстоятельством можно воспользоваться, в частности, для нахождения значений тригонометрических функций от соответствующих дуг $\frac{\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$ и т. п.

Так, например, при $n=3$, мы получим для $\sqrt[3]{-1}$ значения

$$\varepsilon'=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3};\quad \varepsilon''=\cos\pi+i\sin\pi=-1;$$

$$\varepsilon'''=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}.$$

С другой стороны -1, ε' и $\varepsilon'''=\varepsilon'$ суть корни уравнения

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0.$$

Решая квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, найдем

$$x=\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2},$$

и так как $\sin\frac{\pi}{3}>0$, то

$$\varepsilon'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{3}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

и, стало быть,

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для нахождения значения $\sqrt[3]{1}$, равного $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, достаточно возвести число $x=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в квадрат, причем проще всего, пользуясь уравнением $x^2-x+1=0$, отнять с этой целью от x единицу

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Остальные значения $\sqrt[3]{1}$ суть $\varepsilon^2=\bar{\varepsilon}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^3=1$.

Аналогично, при $n=4$, найдем, с одной стороны,

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-(x\sqrt{2})^2=$$
$$=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

откуда получаются четыре значения $\sqrt[4]{-1}$:

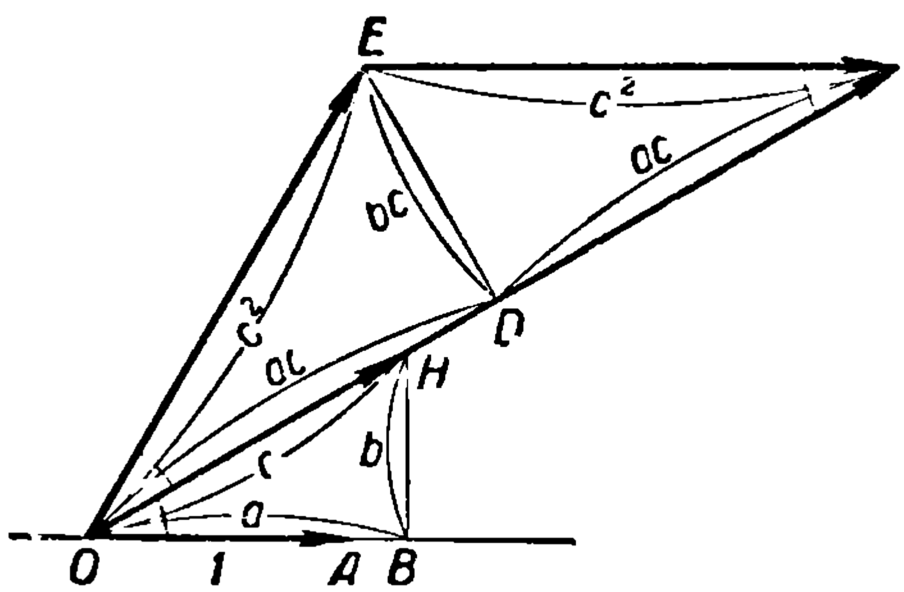
$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С другой стороны, определяя в тригонометрической форме значение $\sqrt[4]{-1}$, у которого и действительная и мнимая части положительные, можем написать

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Далее, легко видеть, что написанное выражение есть одно из значений $\sqrt{i}$. Второе, как известно, получается изменением знака, т. е. совпадает с x_1, остальные корни x_2 и x_4 суть, как это видно также из разложения $x^4 + 1 = (x^2)^2 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i)$ корни квадратные из $-i$.



Черт. 33.

Таким образом

$$\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i);$$

$$\sqrt{-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i).$$

Мы предоставляем читателю в виде упражнения рассмотреть этот вопрос с геометрической точки зрения, а также провести аналогичные выкладки для случая $n = 5$.

Выражение координат x и y квадратного корня $x + iy = \sqrt{a + bi}$ из комплексного числа $a + bi$ в явной форме через a и b с помощью квадратных радикалов читателю, надо думать, известно.

5. Мы закончим этот отдел операторным истолкованием комплексных корней квадратного уравнения с действительными коэфициентами, причем, не ограничивая общности, мы будем рассматривать уравнение

$$x^2 - 2ax + c^2 = 0, \quad \text{где} \quad a^2 < c^2.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x^2 + c^2 = 2ax$$

и попытаемся, исходя из операторного истолкования, найти его корни геометрическим построением.

Пусть вектор $\overrightarrow{OE} = x^2 \cdot \overrightarrow{OA}$ получается из единичного вектора $\overrightarrow{OA}$ двукратным применением операции x (черт. 33). Сумма

$(x^2+c^2)\overrightarrow{OA}$ изобразится вектором $\overrightarrow{OF}$. Так как, с другой стороны, должно быть $\overrightarrow{OF}=2ax\overrightarrow{OA}$, то $\widehat{EOB}=2\widehat{FOA}$, и так как $EF \parallel OA$, то также и $\widehat{EFO}=\widehat{EOF}$, т. е. треугольник OEF равнобедренный. Поэтому $|OE|=c^2$, а, значит, $\operatorname{mod} x=c$ и потому, опуская перпендикуляр ED на OF и замечая, что $|OF|=2a \operatorname{mod} x=2ac$, найдем $OD=ac$. Откладывая теперь вектор $\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OA}$ соответственно с полученными результатами $\widehat{FOE}=\arg x$ и $c=\operatorname{mod} x$ и имея в виду, что отношение подобия треугольников EOD и HOB есть c, получим

$$OH=c, \quad OB=a, \quad BH=b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

Таким образом, в разложении на действительную и мнимую части оператор x должен иметь вид

$$x=a+bi=a+i\sqrt{c^2-a^2}.$$

Симметричное построение по другую сторону оси OA приведет к сопряженному корню

$$x=a-bi=a-i\sqrt{c^2-a^2}.$$

Можно было бы итти и более тривиальным обратным путем, исходя из известных формул для корней уравнения и иллюстрируя затем выполнение соотношения $x^2+c^2=2ax$ на чертеже 33.

§ 87. Теория пределов в комплексной области.

Выше уже было упомянуто, что для комплексных чисел нет смысла устанавливать соотношения скалярного расположения. С этим обстоятельством приходится считаться при распространении основных понятий предела, непрерывности, свойств непрерывных функций и т. д. на комплексную область. Так, например, мы лишены возможности пользоваться здесь принципом непрерывности в форме Дедекинда, предполагающей скалярное расположение в системе изучаемых объектов; по той же причине и признак существования предела, относящийся к монотонным ограниченным последовательностям, теряет здесь силу и т. п. Однако, поскольку в теории пределов основные неравенства относятся к абсолютным величинам (модулям) тех или иных числовых величин, а не к самим этим величинам, постольку можно соответствующие определения и теоремы слово в слово перенести и в комплексную область, пользуясь 1) тем, что для основных операций, рассмотренных выше, соотношения между модулями для комплексных чисел таковы же, как и в действительной области (стр. 328), и 2) тем, что принцип непрерывности в формах, не использующих скалярного расположения чисел, например в форме критерия сходимости Коши-Кантора или в форме теоремы Вейерштрасса о точке сгущения (§ 54) или леммы Бореля-Гейне о конечном покрытии (§ 53), без труда обобщается и на случай комплексной области.

1. Для доказательства этих утверждений установим прежде всего понятие об окрестности комплексного числа.

Если $\alpha = a + bi$ некоторое фиксированное комплексное число, то множество всех комплексных чисел, удовлетворяющих неравенству

$$|z - \alpha| < \varepsilon,$$

образует **„круговую окрестность"** числа α радиуса ε. Аффиксы чисел z располагаются, очевидно, внутри окружности радиуса ε с центром в точке α.

Можно также рассматривать **„прямоугольные окрестности"**, состоящие из чисел $z = u + iv$, действительная и мнимая части которых удовлетворяют неравенствам типа

$$a - \delta_1 < u < a + \delta_2, \quad b - \delta_3 < v < b + \delta_4$$

или, в частности, неравенствам

$$|u - a| < \delta, \quad |v - b| < \delta'.$$

При $\delta' = \delta$ аффиксы чисел $u + iv$ заполняют квадрат со стороной 2δ с центром в точке α.

Рассмотрение окрестностей более общего вида, произвольной формы, не вносит ничего существенного нового и в интересующих нас здесь вопросах всегда может быть заменено рассмотрением круговых или прямоугольных окрестностей.

Так как внутри всякой прямоугольной окрестности лежит некоторая круговая и наоборот, то в определении предела окрестности обоих типов могут замещать друг друга.

Действительно, определим соотношение

$$\lim_{n \to \infty} z_n = \alpha$$

дословно так, как это делается в действительной области: *для всякого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $N(\varepsilon)$, *что при* $n > N(\varepsilon)$ *будет иметь место неравенство* $|z_n - \alpha| < \varepsilon$, *выражающее, что* z_n *попадает в круговую окрестность точки* α *радиуса* ε.

Отсюда будет следовать, что для всякой прямоугольной окрестности точки α, определенной хотя бы неравенствами

$$|u - a| < \delta, \quad |v - b| < \delta,$$

найдется такое N, начиная с которого (при $n \geqslant N$), все $z_n = u_n + iv_n$ будут содержаться в этой окрестности.

Действительно,

$$|u - a| \leqslant \sqrt{(u - a)^2 + (v - b)^2} = |z - \alpha|$$

и, аналогично, $|v - b| \leqslant |z - \alpha|$.

Стало быть, при $\varepsilon \leqslant \delta$ мы будем, начиная с $n \geqslant N(\varepsilon)$, иметь также

$$|u_n - a| < \varepsilon \leqslant \delta \quad \text{и} \quad |v_n - b| < \varepsilon \leqslant \delta.$$

Это можно формулировать иначе так. Если

$$\lim z_n = \lim (u_n + iv_n) = \alpha = a + bi,$$

го порознь

$$\lim u_n = a \quad \text{и} \quad \lim v_n = b.$$

Обратно, если при любом δ переменная $z_n = u_n + iv_n$, начиная с $n > N(\delta)$ попадает в прямоугольную окрестность $|u - a| < \delta$, $|v - b| < \delta$ числа $\alpha = a + bi$, то $\lim z_n = \alpha$. Действительно,

$$|z_n - \alpha| = |u_n + iv_n - (a + bi)| \leqslant |u_n - a| + |v_n - b||i| = \\ = |u_n - a| + |v_n - b| < 2\delta,$$

где δ — произвольно мало.

Таким образом, если $\lim u_n = a$ и $\lim v_n = b$, то

$$\lim z_n = \lim (u_n + iv_n) = a + bi.$$

Можно, стало быть, формулировать следующее общее положение. *Для того чтобы переменная $z_n = u_n + iv_n$ стремилась к пределу $\alpha = a + bi$, необходимо и достаточно, чтобы предел действительной части u_n переменной z_n был равен действительной части a числа α, а предел мнимой части v_n переменной z_n — мнимой части b числа α.* Этим предложением и методом, с помощью которого оно было получено, можно широко пользоваться при обобщении известных теорем о пределах на комплексную область.

2. Для установления справедливости *критерия сходимости Коши* в комплексной области положим, что последовательность z_n такова, что при $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ имеет место неравенство $|z_n - z_m| < \varepsilon$. Тогда мы получим, как и выше,

$$|u_n - u_m| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |v_n - v_m| < \varepsilon, \tag{1}$$

откуда вытекает для действительных последовательностей u_n и v_n существование пределов $\lim u_n$ и $\lim v_n$ и, стало быть, существование предела $\lim z_n$.

Условие сходимости $|z_n - z_m| < \varepsilon$ оказывается, таким образом, достаточным для существования предела z_n. Необходимость доказывается обычным путем.

Критерий Коши в комплексной области приобретает еще большее значение, чем в действительной, так как здесь неприменимы признаки существования пределов, основанные на свойствах скалярного расположения элементов последовательности (монотонность и т. п.).

3. Теорему, аналогичную той, которую мы установили только что для действительной и мнимой части переменной, стремящейся к пределу, нетрудно доказать и для модуля r_n и аргумента φ_n переменной $z_n = u_n + iv_n$.

Так как $r_n = \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, то, очевидно,

$$\lim r_n = \lim \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \operatorname{mod} \alpha.$$

Точно так же

$$\lim \varphi_n = \lim \operatorname{arctg} \frac{u_n}{v_n} = \operatorname{arctg} \frac{a}{b} = \arg \alpha,$$

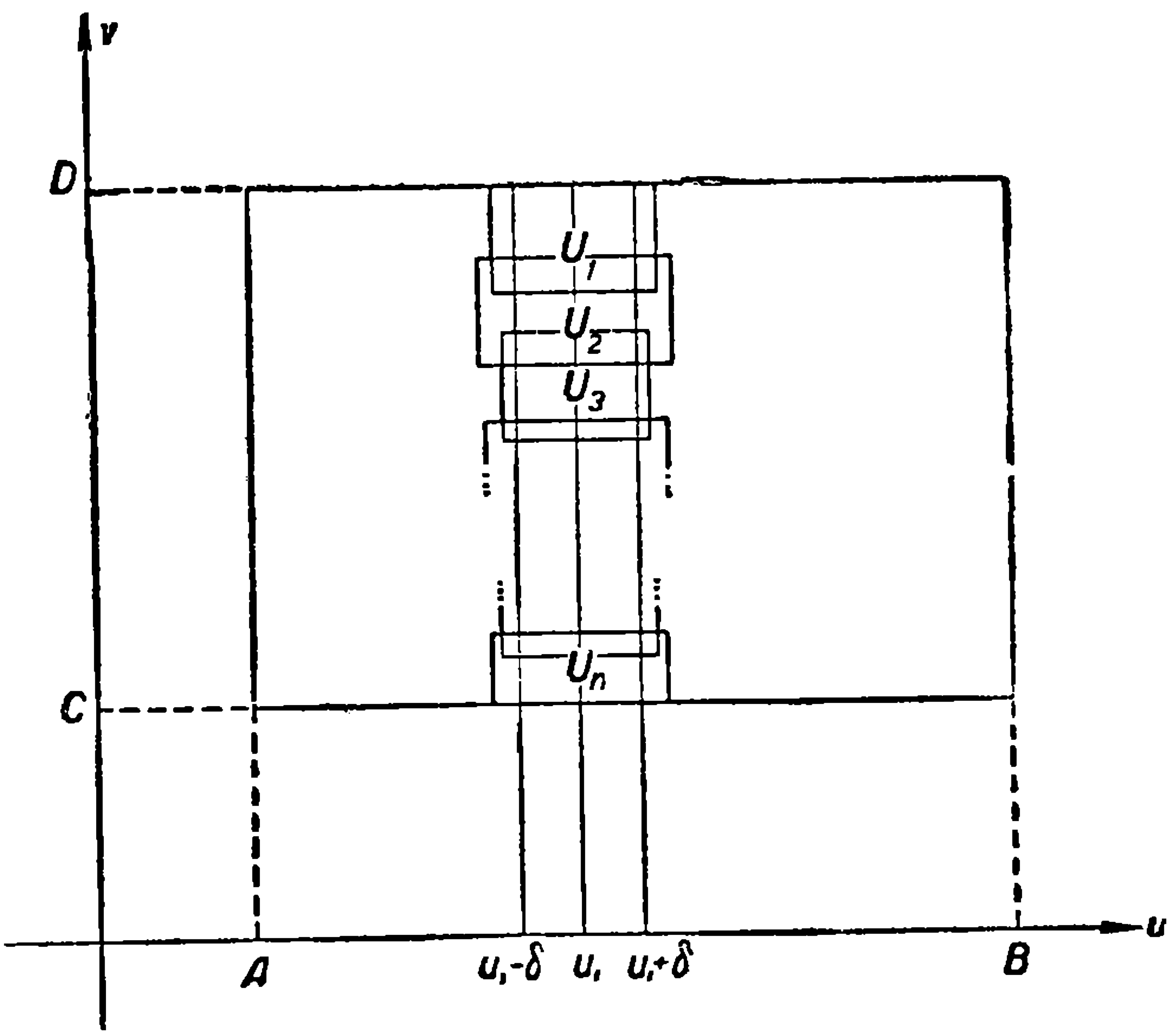
если только $\alpha \neq 0$. В случае $\alpha = 0$ предел отношения $\frac{u_n}{v_n}$ может и не существовать, что легко уяснить себе с помощью геометрической схемы последовательности точек, приближающихся к началу координат как-нибудь по спирали.

Обратно, если существует предел $\lim r_n = r$ и при $r \neq 0$ предел $\lim \varphi_n = \varphi$, то

$$\lim u_n = \lim (r_n \cos \varphi_n) = r \cos \varphi \text{ и } \lim v_n = \lim (r_n \sin \varphi_n) = r \sin \varphi,$$

а потому, полагая $\alpha = [r, \varphi]$, найдем $\lim z_n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \alpha$.

4. Докажем еще *лемму Бореля-Гейне* для прямоугольных окрестностей. Пусть каждая точка $u + iv$ некоторой замкнутой



Черт. 34.

прямоугольной области плоскости Q, определяемой неравенствами $A \leqslant u \leqslant B$, $C \leqslant v \leqslant D$ является внутренней точкой некоторой бесконечной системы прямоугольных областей $U, U', U'', \ldots$

Рассмотрим точки области Q с постоянным значением $u = u_1$. Каждая из этих точек вместе с некоторым перекрывающим ее интервалом на прямой $u = u_1$ лежит внутри одной из областей U системы S. По лемме Бореля-Гейне в применении к интервалу $C \leqslant v \leqslant D$ при $u = u_1$ можно выбрать конечное число областей $U_1, U_2, \ldots, U_n$, перекрывающих всю прямую $u = u_1$ в указанных пределах и, сверх того, захватывающих полоску конечной ширины $u_1 - \delta \leqslant u \leqslant u_1 + \delta$ около этой прямой (черт. 34). Число δ равно наименьшему из конечного числа отличных от нуля расстояний границ окрестностей $U_1, U_2, \ldots, U_n$ от прямой $u = u_1$. Так как это построение может быть проведено для всех значений u_1 в (A, B), то по лемме Бореля-Гейне в применении к интервалу (A, B) конечным числом полосок типа $u_1 - \delta$, $u_1 + \delta$ можно перекрыть весь интервал (A, B) и, стало быть, область Q будет перекрыта *конечным* числом окрестностей типа U, U', U'', ..., из которых составляются указанные полоски. А это и есть утверждение леммы Бореля-Гейне в отношении области Q. Отсюда как следствие вытекают все теоремы относительно непрерывных функций (теорему § 56 о достижении точных границ следует при этом формулировать в отношении модуля функции, принимающей комплексные значения), а также аналог леммы II § 53 и, в частности, теорема Вейерштрасса о предельной точке ограниченного множества.

Выполненность леммы Бореля-Гейне по отношению к областям, лежащим целиком в некоторых окрестностях каждого элемента непрерывного числового поля, и есть то требование „локальной бикомпактности", которое входит в условия теоремы Понтрягина (стр. 311).

§ 88. Показательная и логарифмическая функции.

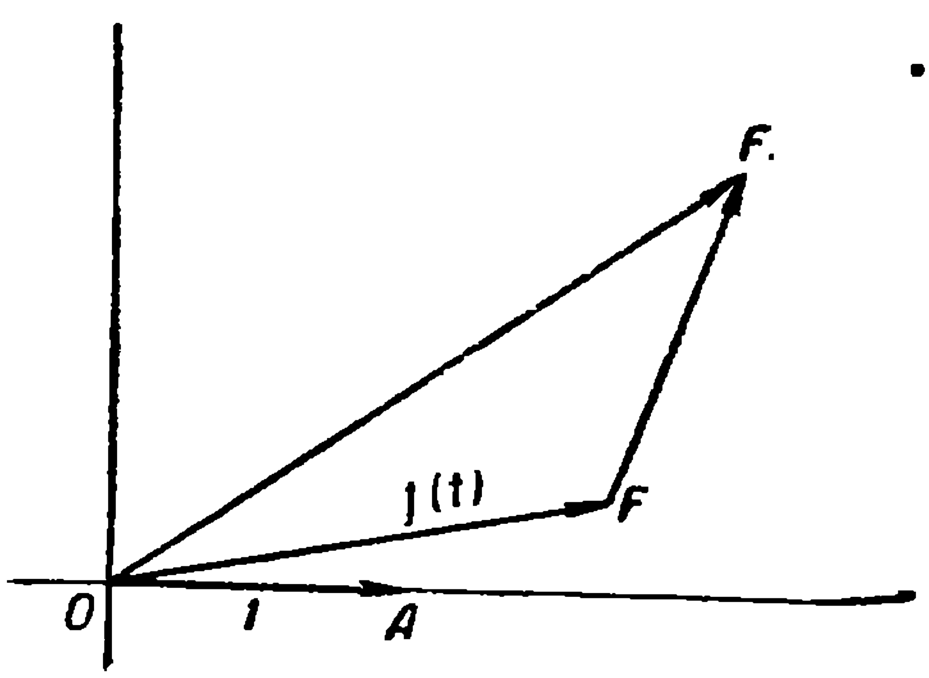
Перейдем теперь к определению показательной и логарифмической функций в комплексной области (см. § 69).

1. Будем искать функцию $f(t)$ времени t, которая за малые промежутки времени получает приращения $\Delta f(t) = \varkappa f(t)\,\Delta t$, пропорциональные своему переменному исходному значению $f(t)$ и приращению Δt времени t, но с *комплексным коэфициентом пропорциональности*

$$\varkappa = k + \omega i.$$

Такая функция, очевидно, и сама должна принимать комплексные значения.

Рассмотрим, каков геометрический смысл такой постановки вопроса.



Черт. 35.

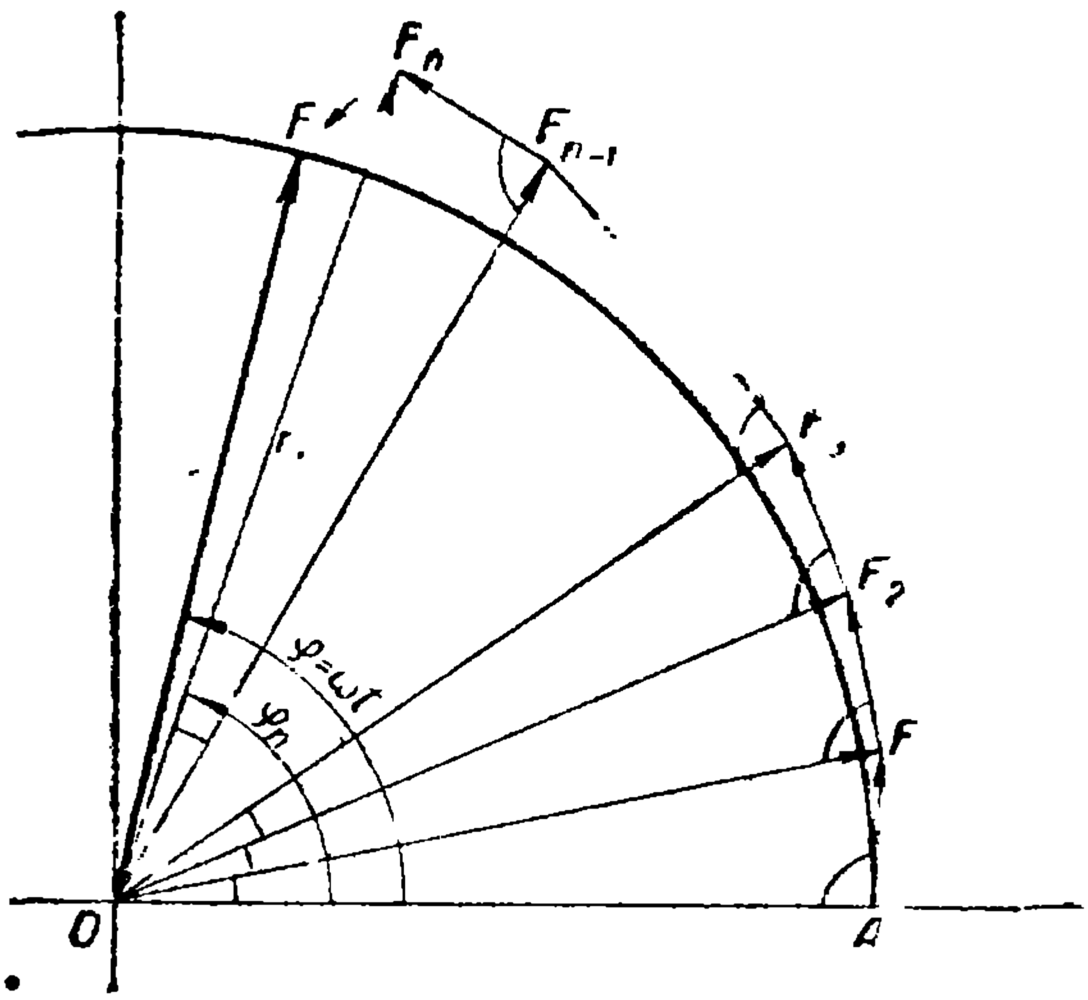
Пусть $f(t)$ изображается вектором $\overrightarrow{OF}$ (черт. 35). Применяя к нему оператор $\varkappa = [r, \varphi]$, мы получим вектор $\overrightarrow{OF_1} = \varkappa\,\overrightarrow{OF}$. Вектор $\overrightarrow{FF_1}$ изображает приращение $\Delta f(t)$, рассчитанное на единицу времени.

Таким образом, здесь речь идет об изменении вектора $\overrightarrow{OF}$ по закону, вполне аналогичному закону сложных процентов; именно, спрашивается, каково будет *фактическое непрерывное изменение* вектора $\overrightarrow{OF}$, если за малые интервалы времени Δt вектор $\overrightarrow{OF}$ подвергается растяжению и повороту $\varkappa\,\Delta t$ „*из расчета*" такого поворота и растяжения за единицу времени, какое характеризуется комплексным числом $\varkappa=[r, \varphi]$ **(комплексным коэффициентом роста).**

Если положить $f(0)=\overrightarrow{OA}$ (единичному вектору) то, как известно (§ 69), при $\omega=0$, $\varkappa=k$ (чистое растяжение) получим

$$f(t)=\overrightarrow{OA}\cdot e^{kt}.$$

Рассмотрим другой предельный случай, когда $k=0$, т. е. комплексный коэффициент роста чисто мнимый. В этом случае вектор приращения



Черт. 36

$$\overrightarrow{FF_1}=\omega i\cdot\overrightarrow{OF}\cdot\Delta t \qquad (1)$$

перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{OF}$. Исходя из начального значения $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OA}$ и разделяя интервал от 0 до t для простоты на n равных малых промежутков $\Delta t=\frac{t}{n}$, получим для момента t значения

$$\overrightarrow{OF_n}=\overrightarrow{OA}\,(1+i\omega\Delta t)^n=\overrightarrow{OA}\left(1+i\omega\frac{t}{n}\right)^n.$$

Соответствующее геометрическое построение изображено на чертеже 36.

Модуль и аргумент вектора $\overrightarrow{OF_n}$ выражаются формулами

$$r_n=\left(\sqrt{1+\frac{\omega^2t^2}{n^2}}\right)^n, \qquad \varphi_n=n\operatorname{arctg}\frac{\omega t}{n}$$

Попытаемся теперь выяснить, каково будет течение предельного непрерывного процесса изменения вектора $\overrightarrow{OF}$, который мы получим, заставляя при постоянном t число n малых интервалов, к которым применяется формула (1), неограниченно увеличиваться при одновременном стремлении длины $\Delta t=\frac{t}{n}$ каждого из них к нулю.

С этой целью воспользуемся формулой (11) § 69 n°8. Мы найдем

$$r_n=\left(1+\frac{\omega^2t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{\omega^2t^2}{n^2}E\cdot\frac{n}{2}}=e^{\frac{\omega^2t}{2n}E}\to e^0=1$$

при $n\to\infty$, ибо множитель E стремится к 1 при $n\to\infty$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mod} \overrightarrow{OF_n} = 1$.

Аналогично, замечая, что дуга и ее тангенс при одновременном стремлении обоих к нулю отличаются друг от друга множителем, стремящимся к единице, найдем:

$$\varphi_n = n \operatorname{arctg} \frac{\omega t}{n} = n \frac{\omega t}{n} E \to \omega t$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg \overrightarrow{OF_n} = \omega t$.

Отсюда вытекает, что при увеличении числа n интервалов и неограниченном стремлении длины каждого из них к нулю, ломаная $AF_1F_2 \ldots F_n$ неограниченно приближается к дуге окружности радиуса $OA = 1$ и вектор $\overrightarrow{OF_n}$ стремится к предельному положению

$$\overrightarrow{OF} = [1, \omega t] \overrightarrow{OA}$$

при всяком t (черт. 36).

Интересующий нас предельный непрерывный процесс изменения вектора $\overrightarrow{OF}$ с чисто мнимым коэфициентом роста $\varkappa = \omega i$ есть, стало быть, не что иное, как чистое вращение вектора $\overrightarrow{OF}$ с угловой скоростью ω (в радианах).

Таким образом, мы приходим к естественному обобщению формулы $\overrightarrow{OF} = f(t) \cdot \overrightarrow{OA} = e^{\varkappa t} \cdot \overrightarrow{OA}$, установленной для действительных значений k на случай чисто мнимого показателя $\varkappa = \omega i$, полагая

$$f(t) = e^{\varkappa t} = e^{i\omega t} = [1, \omega t] = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Подставляя $\omega t = \varphi$, мы можем написать

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

так что *комплексное число $e^{i\varphi}$ есть, **по определению,** оператор чистого поворота на угол φ*, в точечной интерпретации изображаемое точкой окружности единичного радиуса, соответствующей концу F дуги AF, равной φ; в векторной — вектором $\overrightarrow{OF}$, направленным из начала координат в указанную точку F.

Аналогично, в общем случае комплексного коэфициента рост вида $\varkappa = k + i\omega$ мы получим, исходя из начального вектора $\overrightarrow{OA}$ при делении промежутка t на n равных частей, вектор $\overrightarrow{OF}$ соответствующий моменту времени t, в форме

$$\overrightarrow{OF_n} = \overrightarrow{OA} \left(1 + \frac{\varkappa t}{n}\right)^n = \overrightarrow{OA} \left(1 + \frac{(k + i\omega) t}{n}\right)^n$$

На чертеже 37 векторы последовательных приращений $\overrightarrow{AF}$ $\overrightarrow{F_1F_2}, \ldots, \overrightarrow{F_{n-1}F_n}$ уже не перпендикулярны к соответствующим им векторам $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF_1}, \ldots, \overrightarrow{OF_{n-1}}$.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $\Delta t = \frac{t}{n} \to 0$, найдем

$$r_n = \left(\sqrt{\left(1+\frac{kt}{n}\right)^2 + \frac{\omega^2 t^2}{n^2}}\right)^n = \left(1 + \frac{2kt}{n} + \frac{(k^2+\omega^2)\,t^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= e^{\left(\frac{2kt}{n} + \frac{k^2+\omega^2}{n^2} t^2\right)\frac{n}{2}E} = e^{ktE + \frac{k^2+\omega^2}{2n} t^2 E} \to e^{kt}$$

при $n \to \infty$, ибо при этом множитель E стремится к 1.

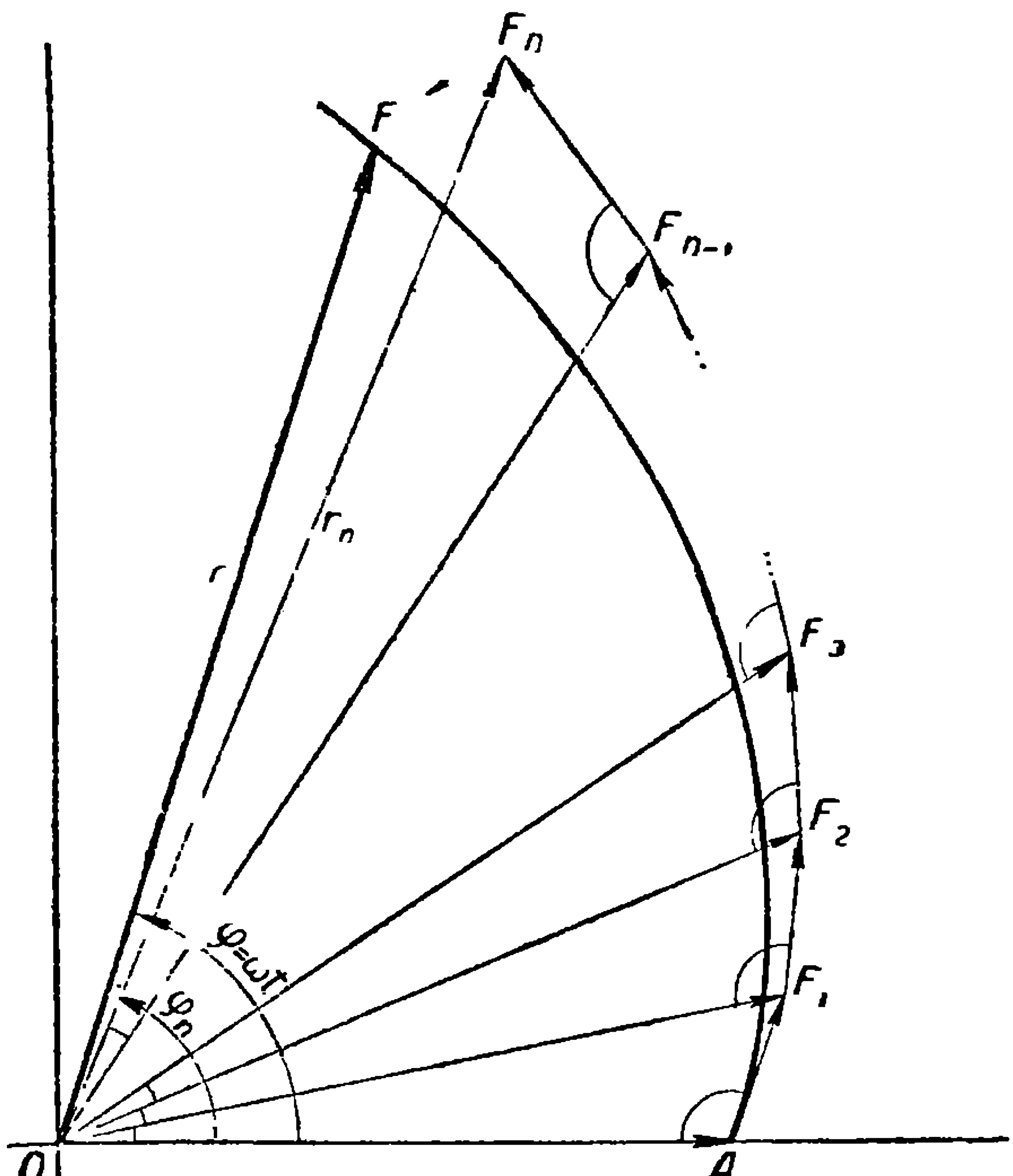
Далее,

$$\varphi_n = n \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega t}{n}}{1+\frac{\omega t}{n}} = n \frac{\frac{\omega t}{n} E}{1+\frac{\omega t}{n}} \to \omega t$$

при $n \to \infty$.

Вектор $\overrightarrow{OF_n}$ стремится, таким образом, к предельному положению $\overrightarrow{OF}$ с модулем e^{kt} и аргументом ωt, и предельный непрерывный процесс характеризуется формулой

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA}\,[e^{kt},\ \omega t] = \overrightarrow{OA} \cdot e^{kt} (\cos \omega\varphi + i \sin \omega\varphi),$$



Черт. 37.

выражающей вращение вектора $\overrightarrow{OF}$ с постоянной угловой скоростью ω, соединенное с возрастанием его модуля (растяжением) по закону органического роста с постоянным коэфициентом роста k. Траектория точки F при таком процессе есть, как легко видеть, логарифмическая спираль, имеющая в полярных координатах уравнение

$$r = e^{\frac{k}{\omega}\varphi}.$$

При $k < 0$ проекции точки F на действительную и мнимую оси плоскости будут совершать затухающие колебания около начала с частотой ω.

Полагая, как и выше, $\overrightarrow{OF} = f(t) \cdot \overrightarrow{OA} = e^{\varkappa t} \cdot \overrightarrow{OA}$, мы распространим определение показательной функции $f(t)=e^{\varkappa t}$ на комплексные значения коэфициента $\varkappa$ с помощью формул

$$f(t)=e^{\varkappa t}=e^{(k+i\omega)t}=[e^{kt}, \omega t]=e^{kt}(\cos\omega t+i\sin\omega t).$$

Подставляя $kt=y$ и $\omega t=x$, мы можем написать для комплексного аргумента $z=x+iy$

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Другими словами, *значение натуральной показательной функции для комплексного показателя* $z=x+iy$ *есть, **по определению**, комплексное число с модулем* $\operatorname{mod}(e^z)=e^x=e^{R(z)}$ *и аргументом* $\arg(e^z)=y=I(z)$.

Определенная так показательная функция обладает всеми характерными свойствами этой функции для действительной области. В частности, при любых комплексных значениях z_1 и z_2 выполняется основное функциональное уравнение показательной функции

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2),$$

т. е.

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}.$$

Это соотношение можно получить рассуждением, аналогичным проведенному на странице 242, основываясь на свойствах рассмотренного только что процесса изменения вектора OF с комплексным коэфициентом роста $\varkappa$.

Проще, однако, прибегнуть к методу непосредственной поверки. Полагая $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, найдем

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=[e^{x_1}, y_1]\cdot[e^{x_2}, y_2]=[e^{x_1}\cdot e^{x_2}, y_1+y_2]=$$
$$=[e^{x_1+x_2}, y_1+y_2]=e^{z_1+z_2}.$$

2. Из приведенных выше определений вытекает как следствие возможность представить каждое комплексное число в так называемой **показательной форме**

$$[r,\varphi]=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}.$$

В силу основного функционального свойства показательной функции в этой форме в особенности удобно представлять комплексные числа при рассмотрении операций второй и третьей ступеней. Так, например, корни n-й степени из единицы представляются в форме $e^{\frac{2k\pi}{n}}$, где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Полезно отметить частные случаи

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{2\pi i}=e^{2k\pi i}=+1$$

и вообще иметь в виду, что в комплексной области показательная функция может быть рассматриваема как периодическая функция с мнимым периодом $2\pi i$, так как

$$e^{z+2k\pi i}=e^z.$$

Это соотношение, как легко видеть, выражает известное уже нам условие равенства комплексных чисел с аргументами, отличающимися на кратное 2π. Представление комплексных чисел в показательной форме поэтому бесконечно-многозначно.

Внося еще и множитель r под знак показательной функции, можно написать

$$[r, \varphi] = re^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{\ln r + i(\varphi+2k\pi)}.$$

В этой форме показатель в правой части с точностью до значения целого числа k определяется однозначно заданием числа $z=[r, \varphi]$ и, обратно, однозначно определяет это число z. Распространяя общее определение **логарифма** на комплексную область, мы можем, стало быть, написать

$$\ln z = \ln r + i(\varphi+2k\pi) = \ln \operatorname{mod} z + i(\arg z + 2k\pi),$$

где значение $\varphi = \arg z$ взято в пределах от 0 до 2π (исключительно). Полагая $k=0$, мы получаем так называемую **главную ветвь** логарифмической функции или **главное значение** логарифма z

$$\ln r + i\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Остальные ветви бесконечно-многозначной функции $\ln z$, получающиеся при $k=1$, $k=-1$, $k=+2$, ..., отличаются от главной на чисто мнимое слагаемое, кратное $2\pi i$.

Если точку z заставить, непрерывно изменяясь, описать в комплексной плоскости замкнутый контур, заключающий внутри себя точку $z=0$, то аргумент z получит приращение $2\pi i$ и главное значение логарифма, также изменяясь непрерывно, перейдет в результате в значение $\ln z = \ln r + i(\varphi+2\pi)$, принадлежащее уже следующей ветви ($k=1$). Аналогично, сложение двух главных значений $\ln z_1$ и $\ln z_2$ может привести в случае, когда $\arg z_1 + \arg z_2 > 2\pi$, не к главному значению $\ln(z_1 z_2)$, а к *другой ветви* той же функции. Равенство $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$ следует поэтому читать, как совокупность двух включений (см. § 66): $\ln z_1 + \ln z_2 \subset \ln(z_1 z_2)$ и $\ln(z_1 z_2) \subset \ln z_1 + \ln z_2$, выражающих, что всякая сумма двух значений многозначных функций $\ln z_1$ и $\ln z_2$ есть некоторое значение многозначной функции $\ln(z_1 z_2)$ и, обратно, всякое значение $\ln(z_1 z_2)$ может быть представлено как сумма некоторых двух значений $\ln z_1$ и $\ln z_2$ („*полное*" равенство).

Можно, однако, рассматривать логарифмическую функцию как однозначную, если считать комплексные числа $[r, \varphi_1]$ и $[r, \varphi_2]$ при $\varphi_1 \neq \varphi_2$ *отличными* друг от друга (см. стр. 317).

Риман (Riemann) предложил для геометрической интерпретации комплексных чисел точками представить себе в этом случае комплексную плоскость расслоенной на бесконечное число листов, каждый из которых характеризуется значением числа k в формуле $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ $(0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi)$ и служит для изображения комплексных чисел $[r, \varphi_0 + 2k\pi]$ с данным значением k. Так как при обходе начала координат мы переходим от значения k к следующему $k+1$, то следует представлять себе последовательные листы связанными между собой наподобие бесконечной винтовой лестницы. Получаемая поверхность носит название **римановой поверхности логарифмической функции.** Для каждой точки этой поверхности число k и, следовательно, также и аргумент $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$ имеют одно определенное значение и, следовательно, точкам $z = [r, \varphi]$ этой поверхности *однозначно* соответствуют значения функции $\ln z = \ln r + i\varphi$. Различные ветви логарифма отвечают при этом *различным листам* римановой поверхности. Рассмотрение такого рода поверхностей играет существенную роль в теории функций комплексного переменного.

3. Для общего определения показательной функции α^z для комплексных значений α и z проще всего положить

$$\alpha^z = e^{z \ln \alpha}.$$

При $\alpha = [r, \varphi]$ и $z = x + iy$ получим

$$\alpha^z = e^{(x+iy)(\ln r + i(\varphi + 2k\pi))} = e^{x \ln r - y(\varphi + 2k\pi)}\{\cos(x(\varphi + 2k\pi) + y \ln r) + i \sin(x(\varphi + 2k\pi) + y \ln r)\}.$$

Функция α^z — бесконечно-многозначная, соответственно бесконечной многозначности функции $\ln z$. Различные ее ветви определяются различными значениями k.

Рассмотрим, в частности, случай $\alpha = -a$, где $a > 0$ и $y = 0$, так что показатель $z = x$ принимает действительные значения. Мы найдем $r = a$, $\varphi = \pi$ и

$$(-a)^x = a^x\{\cos(2k+1)x\pi + i \sin(2k+1)x\pi\}. \tag{2}$$

Действительные значения мы получим при $(2k+1)x\pi = n\pi$, где n — целое число, т. е. при $x = \frac{n}{2k+1}$. Так как $\cos n\pi = (-1)^n$, то при четном n мы получим $(-a)^x = a^x$, а при нечетном $(-a)^x = -a^x$. Таким образом, пытаясь построить в действительной области график функции $y = (-a)^x$, мы получим лишь бесконечное число отдельных точек, отвечающих действительным значениям функции $(-a)^x$ для значений x, равных рациональным дробям с *нечетными* знаменателями. При переходе от дроби x' с четным числителем к дроби x'' с нечетным числителем, значения $(-a)^x$ „перескакивают“ с кривой $y = a^x$ на кривую $y = -a^x$, причем ни та, ни другая не заполняются полностью, значения же независимой переменной x' и x'' (обоих типов) образуют всюду плотные множества.

Однако, рассматривая функцию $(-a)^x$ в комплексной области, мы увидим, что при изменении x от x' до x'' эта функция *непрерывно* переходит от одного своего значения $(-a)^{x'}$ к значению $(-a)^{x''}$ через соответствующие промежуточные *комплексные* значения, определяемые формулой (2). Действительные значения функции $(-a)^x$ при $x = \frac{n}{2k+1}$ принадлежат при разных k различным, при одинаковых k — одной и той же ветви функции (2). Каждая из ветвей появляется, таким образом, периодически при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ в действительной области попеременно то на кривой $y=a^x$, то на кривой $y=-a^x$, в промежуточных интервалах уходя в комплексную область.

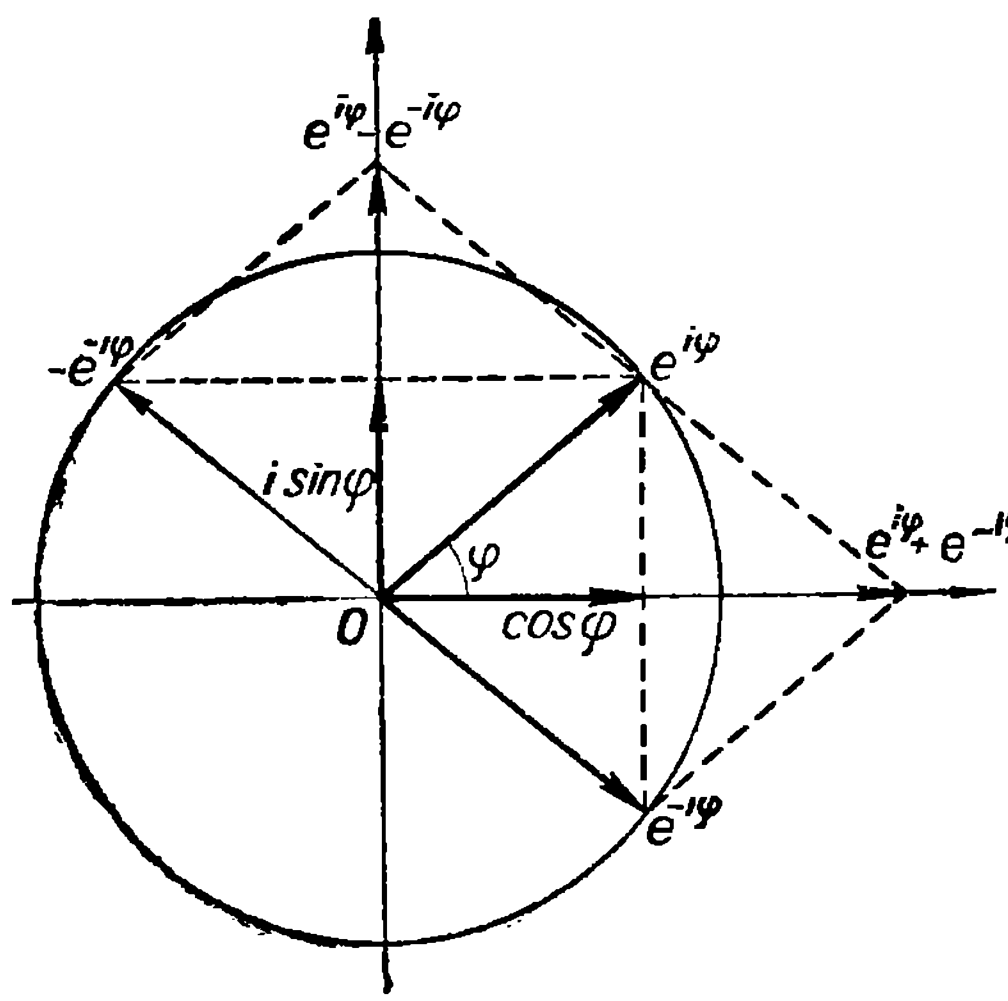
Изящная геометрическая интерпретация этих соотношений, в которой различные ветви функции $(-a)^x$ изображаются пространственными спиралями, в пересечении с плоскостью xy дающими указанные выше точки, была дана Кайнером. Для того чтобы получить эту интерпретацию, следует значения $r=a^x$ и $\varphi=(2k+1)\pi x$ рассматривать как полярные координаты плоскости, перпендикулярной к плоскости xy, с полярной осью, совпадающей с осью y.

4. В заключение отметим, что, применяя общие формулы $R(\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+\bar{\alpha})$ и $I(\alpha)=\frac{1}{2i}(\alpha+\bar{\alpha})$ к частному случаю $\alpha=e^{i\varphi}$, мы придем к известным **формулам Эйлера**

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i},$$

устанавливающим связь между тригонометрическими и показательной функциями в комплексной области и имеющим весьма многочисленные приложения. Изображая сопряженные комплексные числа $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ векторами на плоскости, легко интерпретировать эти формулы геометрически (черт. 38).



Черт. 38.

§ 89. Переход к теории пар.

Исходным пунктом предшествовавших построений для нас послужила двумерная направленная величина в ее простейшей геометрической интерпретации. Каждый комплексный оператор, порождаемый этой величиной, может быть задан парой действительных чисел a и b, однозначно определяющих комплексное число $a+bi$, причем все операции над комплексными числами также могут быть заданы с помощью указания соответствующих правил, относящихся к координатам этих чисел — действительным числам a и b. Это естественно приводит к мысли отождествить с арифметической точки зрения понятия о системе комплексных чисел и о системе пар действительных чисел (a, b) подчиненных соответствующим законам операций.

Методологическая сторона вопроса заслуживает здесь несколько более детального рассмотрения.

Как мы видели, уже в приведенной выше схеме комплексные числа и операции над ними допускают различные геометрические интерпретации — операторную, векторную, точечную. Аналогично этому, представление о комплексном числе как о паре действительных чисел (a, b) также следует рассматривать как *одну из возможных интерпретаций тех абстрактных соотношений, которые находят свое отражение в числовой системе комплексных чисел.* (Эти абстрактные соотношения фиксируются, например, условиями упомянутой на странице 311 теоремы Понтрягина).

Однако с точки зрения построения теоретической арифметики интерпретация в области пар (a, b) выделяется, прежде всего, тем, что она использует лишь чисто *арифметическое* понятие о паре действительных чисел и включается, таким образом, в общую схему арифметических методов расширения числовой системы.

С другой стороны, следует заметить, что изложенное выше операторное построение можно без труда облечь в безупречную арифметическую форму, рассматривая с самого начала не геометрическую плоскость, а систему пар *чисел* (x, y), определяя вектор заданием двух таких пар, и т. д., пользуясь обычными формулами аналитической геометрии.

Полученная таким образом операторная интерпретация комплексных чисел, приобретая с внешней стороны арифметическую форму, оставалась бы, однако, геометрической по существу.

Теория пар, в которой непосредственно вводятся координаты *самого комплексного числа*, помимо своего арифметического характера, имеет еще тот смысл, что с ее помощью выделяется общая всем интерпретациям и в этом смысле *„минимальная" совокупность соотношений между действительными числами, определяющими комплексные числа, на которых основано фактическое производство операций над этими последними.*

В истории обоснования теории комплексных чисел значение упоминавшегося уже (§ 81) принципа, согласно которому всякое равенство между комплексными числами следует рассматривать как совокупность двух равенств между действительными числами, как раз и заключается в том, что этим была впервые нащупана указанная основная арифметическая интерпретация комплексных чисел и тем устранены всякие сомнения в вопросе о правомерности использования в действительной области тех или иных результатов, полученных с помощью операций над комплексными числами.

Становясь на рассматриваемую позицию и ставя своей целью, не выходя из рамок арифметики, дать исчерпывающее формальное обоснование теории комплексных чисел, мы должны будем *заново* установить определения и свойства основных действий над вводимыми в рассмотрение парами (a, b), не опираясь на изложение предыдущих параграфов. Формально логическое существо самой поставленной задачи дает нам вместе с тем право отвлечься от вопросов генетического характера о причинах, почему то или иное действие определяется так или иначе и т. п.

Изложенную выше теорию комплексных чисел, заданных в форм $a+bi$, читатель может при этом, если он хочет, рассматриват как некоторую совокупность наводящих указаний, но не боле того

§ 90. Комплексные числа как пары действительных чисел.

I. Определение 1. ***Комплексным числом*** *называется пара действительных чисел (a, b), взятых в указанном порядке и подчиненных законам сравнения и законам действий, устанавливаемым следующими определениями.*

Определение 2. *Два комплексных числа $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ называются* ***равными*** *в том и только в том случае если*

$$a=c \quad и \quad b=d.$$

Соотношение равенства комплексных чисел удовлетворяет как легко видеть, основным постулатам § 25, определяющим понятие равенства, т. е. $\alpha=\alpha$; если $\alpha=\beta$, то и $\beta=\alpha$; из $\alpha=\beta$ и $\beta=\gamma$ следует $\alpha=\gamma$.

Примечание. Соотношения „$<$“ и „$>$“ для комплексных чисел не вводятся.

Определение 3. ***Суммой*** *комплексных чисел $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ называется пара $(a+c, b+d)$, т. е.*

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d).$$

Теорема 1. *Сложение комплексных чисел есть операция, всегда выполнимая и однозначная.*

Теорема 2. *Сложение обладает переместительным и сочетательным свойствами.*

Оба утверждения проверяются непосредственно.

Теорема 3. *В системе комплексных чисел операция вычитания, обратная операции сложения, всегда выполнима и однозначна.*

Действительно, из равенства

$$(a, b)+(x, y)=(c, d)$$

следует $a+x=c$, $b+y=d$ и, стало быть,

$$(c, d)-(a, b)=(c-a, d-b).$$

Модуль сложения представлен *нулевой парой*

$$(0, 0),$$

которую мы будем также обозначать просто знаком 0.

Разность $\alpha-\beta$ равна 0 тогда и только тогда, когда $\alpha=\beta$.

Вводя понятие о ***противоположной*** $\alpha=(a, b)$ паре $-\alpha$ (обратное по знаку число) с помощью определения

$$-\alpha=(-a, -b),$$

мы можем операцию вычитания заменить операцией прибавления противоположной пары. Действительно,

$$(c,\ d)-(a,\ b)=(c,\ d)+(-a,\ -b).$$

Очевидно, что $\alpha+(-\alpha)=0$.

Определение 4. ***Произведением*** *двух комплексных чисел* $(a,\ b)$ *и* $(c,\ d)$ *называется пара*

$$(ac-bd,\ ad+bc),$$

так что, по определению,

$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc).$$

(Элементы произведения: разность произведений одноименных членов пар и сумма произведений разноименных членов пар.)

Из этого определения вытекает

Теорема 4. *Умножение комплексных чисел есть операция, всегда выполнимая и однозначная.*

Теорема 5. *Умножение комплексных чисел обладает свойством сочетательным, переместительным и распределительным по отношению к сложению.*

Доказательство.

$$(a,\ b)(c,\ d)(e,\ f)=(ac-bd,\ ad+bc)(e,\ f)=$$
$$=(ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce).$$

С другой стороны,

$$(a,\ b)\{(c,\ d)\cdot(e,\ f)\}=(a,\ b)(ce-df,\ cf+de)=$$
$$=(ace-adf-bcf-bde,\ acf+ade+bce-bdf).$$

Сравнение обоих результатов доказывает сочетательный закон.

Непосредственно проверяется коммутативность.

Далее,

$$\{(a,\ b)+(c,\ d)\}(e,\ f)=(a+c,\ b+d)(e,\ f)=$$
$$=(ae+ce-bf-df,\ af+cf+be+de)=(ae-bf,\ af+be)+$$
$$+(ce-df,\ cf+de)=(a,\ b)(e,\ f)+(c,\ d)(e,\ f),$$

что доказывает распределительный закон.

Теорема 6. *Произведение равно нулю в том и только в том случае, если по крайней мере один из сомножителей равен нулю.*

Действительно, из соотношений

$$ac-bd=0,\ ad+bc=0$$

следует

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=0,$$

что возможно лишь, если либо $a=b=0$, либо $c=d=0$.

Теорема 7. *В области комплексных чисел операция деления, обратная операции умножения, всегда выполнима и однозначна.*

Для доказательства заметим, что условие

$$(a, b)(x, y)=(c, d)$$

равносильно системе уравнений

$$ax-by=c;\ bx+ay=d.$$

Так как при $(a, b)\neq 0$ детерминант этой системы, равный a^2+b отличен от нуля, то x и y определяются и притом однозначно Можно, произведя выкладки, написать в явной форме

$$(x, y)=(c, d):(a, b)=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right).$$

Примечание. Легко видеть, что теорема 6 и утверждение об однозначности действия деления равнозначащи. Действительно, если $\alpha=\beta\gamma$ и $\alpha=\beta\gamma_1$, $\beta(\gamma-\gamma_1)=0$, откуда по теореме 6 при $\beta\neq 0$ следует равенство $\gamma=\gamma_1$. Обратно если деление на $\beta\neq 0$ однозначно, то из соотношения $\alpha\beta=0$ будет следова... $\alpha=0:\beta=0$.

2. Включение действительных чисел в систему комплексных чисел.

Определение 5. *Комплексное число вида* $(a, 0)$ *считается равным действительному числу* a.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что в тех случаях когда пары по определению 5 оказываются равными действительным числам, определения 1—4 приводят к результатам согласным с прежде установленными определениями для действительных чисел.

3. Введение модуля и аргумента. При всяких a и b можно найти $r>0$ и φ так, чтобы

$$a=r\cos\varphi;\ b=r\sin\varphi.$$

Действительно, из написанных соотношений следует

$$r=\sqrt{a^2+b^2}\quad \text{и}\quad \varphi=\operatorname{Arctg}\frac{b}{a}.$$

Положительное число r называется **модулем**, а дуга φ — **аргументом** комплексного числа $\alpha=(a, b)$. Аргумент определен с точностью до кратного 2π. Пишут $r=|\alpha|$ или $r=\operatorname{mod}\alpha$ и $\varphi=\arg\alpha$. Модуль действительного числа a совпадает с его абсолютной величиной, а аргумент есть кратное 2π, если $a>0$, и нечетное кратное π, если $a<0$.

Теорема 8. *При умножении комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство. На основании определения умножения и известного тригонометрического тождества найдем

$$(r_1\cos\varphi_1,\ r_1\sin\varphi_1)\cdot(r_2\cos\varphi_2,\ r_2\sin\varphi_2)=$$
$$=(r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2),\ r_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2))=$$
$$=(r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2),\ r_1r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

что и доказывает теорему.

Следствие. *При делении модуль делимого делится на модуль делителя, а из аргумента делимого вычитается аргумент делителя.*

4. **Возвышение комплексного числа** $(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ **в** целую положительную **степень** n приводит к результату

$$(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)^n=(r^n\cos n\varphi,\ r^n\sin n\varphi).$$

Теорема 9. *Операция извлечения корня n-й степени из комплексного числа всегда выполнима и n-значна.*

Доказательство. Соотношение

$$(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)^n=(R\cos\psi,\ R\sin\psi),$$

по предыдущему, равносильно следующим

$$r^n=R \text{ и } n\varphi=\psi+2k\pi,$$

откуда находим

$$r=\sqrt[n]{R} \text{ и } \varphi=\frac{\psi}{n}+\frac{2k}{n}\pi.$$

Придавая здесь k значения $0, 1, \ldots, n-1$, найдем n неравных между собой комплексных чисел, удовлетворяющих требованию.

В частности, в области комплексных чисел операция извлечения квадратного корня из отрицательного числа всегда выполнима и двузначна.

5. **Комплексные числа как числовая система с двумя единицами.**

Определение 6. *Пара* (0, 1) *называется **мнимой единицей** и обозначается знаком i.*

Теорема 10. *Всякое комплексное число может быть представлено в виде $a+bi$, где a и b — действительные числа. Это представление однозначно.*

Действительно, согласно определениям 1—5

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(b,\ 0)=a+(b,\ 0)(0,\ 1)=a+b\cdot i$$

и, обратно, $a+b\cdot i=(a,\ b)$.

Следствие. *Всякое комплексное число α может быть представлено в виде*

$$\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где r — модуль, а φ — аргумент числа α. (Тригонометрическая форма представления числа α.)

Примечание. Числа $a+bi$ и $a-bi$ называются **сопряженными**. Их произведение равно квадрату их общего модуля. Аргументы сопряженных чисел с точностью до кратного 2π отличаются знаками.

Теорема 11. $i^2=-1$.

Действительно, по определениям 4 и 5,

$$(0,\ 1)\cdot(1,\ 0)=(-1,\ 0)=-1.$$

Из теорем (10) и (11) вытекает, что систему комплексных чисел $(a,\ b)$ можно рассматривать как числовую систему с двумя единицами e_1 и e_2, состоящую из выражений типа

$$ae_1 + be_2$$

с любыми действительными коэфициентами a и b. Если равенство и операцию сложения для таких выражений определить, следуя тексту определений 2 и 3, то определение 4 можно рассматривать как следствие определяющих равенств

$$e_1^2=e_1;\ e_1e_2=e_2e_1=e_2;\ e_2^2=-e_1$$

и соглашения применять при перемножении a) распределительный закон, b) переместительный и сочетательный законы в отношении встречающихся действительных коэфициентов, c) сочетательный закон, в отношении произведения единиц.

Действительно, при этих условиях мы получим

$$(ae_1+be_2)(ce_1+de_2)=ae_1ce_1+be_2ce_1+ae_1de_2+be_2de_2=$$
$$=ace_1^2+bce_2e_1+ade_1e_2+bde_2^2=(ac-bd)e_1+(bc+ad)e_2.$$

Для включения действительных чисел достаточно отождествить единицу e_1 с обыкновенной действительной единицей. Тогда мы будем иметь $ae_1=a$. Если, далее, отождествить e_2 с мнимой единицей $i=(0,\ 1)$ системы пар $(a,\ b)$, то мы будем иметь

$$ae_1+be_2=a+bi=(a,\ b)$$

с полным совпадением основных определений и система ae_1+be_2 окажется тождественной с построенной выше системой комплексных чисел как пар.

Выясняющимся таким образом фундаментальным значением *закона умножения единиц* для установления общего определения умножения комплексных чисел и объясняется исключительно важная роль мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$ и соотношения $i^2=-1$. Исторически учение о действиях над комплексными числами развивалось именно по этой схеме.

К гиперкомплексным числам (см. ниже § 100) также проще всего притти путем обобщения указанной здесь постановки вопроса на случай большего числа единиц.

Предварительно мы рассмотрим частный случай системы с четырьмя единицами, известный под названием числовой системы действительных кватернионов.

Следуя Гамильтону, мы вернемся к операторной точке зрения в порядке обобщения на трехмерное пространство того хода идей, который в § 32 привел нас к системе обыкновенных комплексных чисел.

ГЛАВА XI.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ КВАТЕРНИОНОВ.

§ 91. Векторы-переходы в трехмерном пространстве.

Попытаемся обобщить теорию § 28 и 82 на случай трехмерной величины (с тремя независимыми соотношениями расположения), причем станем и здесь сначала на геометрическую точку зрения, приняв за исходную величину указанного рода — совокупность точек евклидова трехмерного пространства.

Аналогично тому, как это было сделано в § 82, мы введем переходы или векторы $\overrightarrow{AB}$ трехмерного пространства, задаваемые двумя точками A и B в определенном порядке, причем равенство двух векторов $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ определяется как одновременное выполнение условий параллельности, одинаковой направленности и равенства по длине отрезков AB и CD.

Сумма $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ однозначно определяется как вектор $\overrightarrow{AD'}$, замыкающий ломаную ABD', где $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{CD}$. Сложение векторов обладает переместительным и сочетательным свойствами. На общеизвестных деталях этой части построения мы останавливаться не будем. Подчеркнем только, что мы отказываемся сначала от введения в явной форме координат точек и компонент разложения вектора в той или иной координатной системе, причем это обстоятельство в теории кватернионов играет более существенную роль, чем в теории комплексных чисел, так как кроме исходной системы векторов-переходов нам придется еще иметь дело с отличной от нее системой векторов-операторов, для которых мы и будем вводить координатные характеристики.

Рассмотрим теперь два произвольных вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и охарактеризуем ту операцию перевода вектора $\overrightarrow{OA}$ в вектор $\overrightarrow{OB}$, которая и является предметом дальнейшего изучения. При этом подчеркнем одно обстоятельство, характерное для постановки вопроса в операторной теории вообще, здесь же, в трехмерной области, приобретающее весьма существенное значение. Когда мы определяем переход от точки A к точке B, то это есть понятие, связываемое с заданием „начальной“ и „конечной“ точек A и B и подчиненное определенным законам скалярного сравнения и композиции. Представление о „непрерывном движении" точки A, переводящем ее в точку B, является в этом смысле *излишним, добавочным элементом,* некоторой избыточной конкретизацией понятия перехода. Это становится особенно очевидным, если, имея в виду, скажем, точки плоскости, спросить себя: „а по какой кривой движется точка A при переходе от A к B?" Понятие перехода не включает в себя никаких элементов, зависящих от ответа на этот вопрос. Речь идет только о взаимном расположении начальной и конечной точек и ни о чем больше.

Точно так же оператор, переводящий вектор $\overrightarrow{OA}$ в вектор $\overrightarrow{OB}$, есть понятие, характеризующее взаимное расположение этих векторов и приобретающее определенное содержание лишь тогда, когда установлено определение *равенства* операторов (понятие об „одной и той же операции"). Представление о непрерывном изменении вектора $\overrightarrow{OA}$, при котором он переходит в вектор $\overrightarrow{OB}$, является и здесь „избыточной конкретизацией", и для уяснения дальнейшего в особенности существенно помнить, что при установлении понятия об операторе имеются в виду лишь *начальное и конечное положения вектора,* а не какая-нибудь совокупность промежуточных положений, которая может быть произвольной. Это не исключает того, что представление о каком-либо определенном движении, связываемое с переходом или оператором, может играть некоторую вспомогательную роль чисто иллюстративного характера для пояснения принимаемых определений равенства переходов или операторов.

§ 92. Кватернионы как операторы.

Два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ в пространстве трех измерений вполне определяют

1) проходящую через них плоскость OAB,

2) угол $\widehat{AOB}$,

3) отношение $\frac{OB}{OA}$ длины вектора $\overrightarrow{OB}$ к длине вектора $\overrightarrow{OA}$.

Мы и будем говорить, что эти три элемента: *плоскость OAB, угол $\widehat{AOB}$ и отношение $\frac{OB}{OA}$ определяют оператор α, переводящий вектор $\overrightarrow{OA}$ в вектор $\overrightarrow{OB}$,* и будем писать

$$\overrightarrow{OB} = \alpha \overrightarrow{OA}.$$

Другими словами, любые два вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ однозначно определяют соответствующий оператор α (Гамильтон пишет $\alpha = \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OA}$), причем два оператора

$$\alpha = \overrightarrow{OB} : \overrightarrow{OA} \text{ и } \beta = \overrightarrow{OB'} : \overrightarrow{OA'}$$

считаются, по определению, **равными,** *если все три элемента их совпадают,* т. е. $\alpha = \beta$, если *совпадают плоскости OAB*

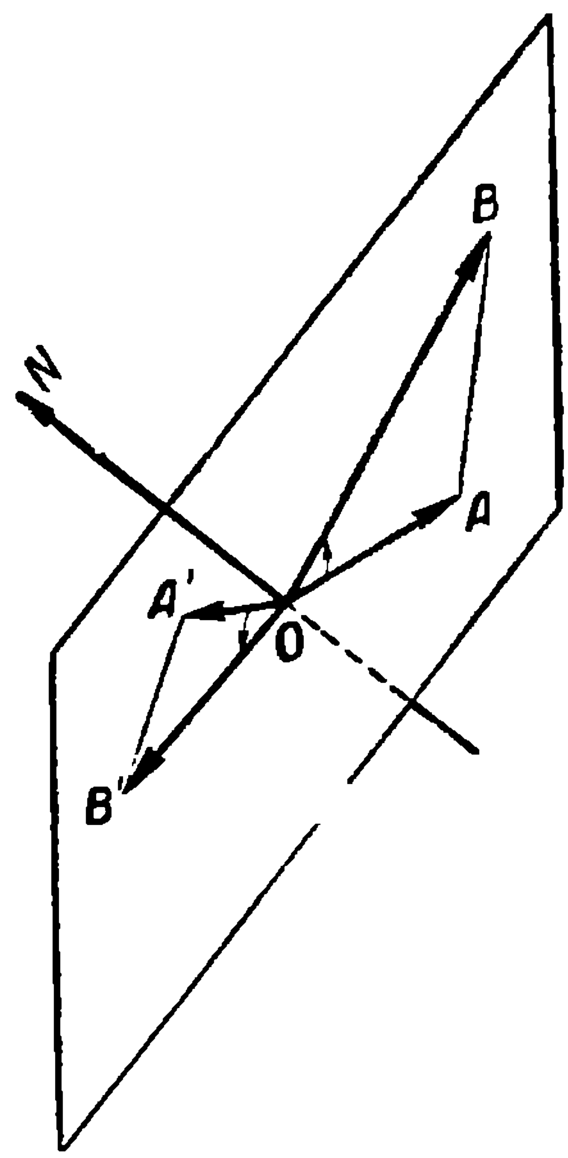
и $OA'B'$, *равны углы* $\widehat{AOB}$ и $\widehat{A'OB'}$ *и отношения* $\frac{OB}{OA}$ и $\frac{OB'}{OA'}$.

Другими словами, равным операторам соответствуют лежащие в одной плоскости подобные между собой треугольники AOB и $A'OB'$, с одной и той же ориентировкой обхода (черт. 39).

При фиксированной ориентировке плоскости OAB угол $\widehat{AOB}$ определен с точностью до кратного 2π. Для того, чтобы ориентировка плоскости однозначно определялась заданием неколлинеарных векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, можно потребовать, чтобы наименьшее положительное значение угла AOB не превышало π.

Вместо задания плоскости OAB можно также задать нормаль $\overrightarrow{ON}$ к этой плоскости, направив ось ON, скажем, так, чтобы положительное направление вращения в ориентированной плоскости OAB заставляло правый штопор с осью ON ввинчиваться в положительном направлении нормали. Ось ON называется осью оператора OAB.

Оператор α может быть определен с помощью задания четырех не зависящих друг от друга действительных чисел: например двух для характеристики направления оси ON и еще двух для характеристики угла $\widehat{AOB}$ и отношения $OB:OA$. Поэтому мы уже сейчас позволим себе называть введенные операторы кватернионами, хотя этот термин применяется обычно к некоторой определенной форме числового задания этих операторов, о которой будет речь ниже.



Черт. 39.

Таким образом, под **кватернионом** мы понимаем оператор, осуществляющий *поворот векторов, перпендикулярных к его оси, на определенный угол в плоскости, перпендикулярной к этой оси, при одновременном растяжении этих векторов в определенном отношении.*

При этом необходимо подчеркнуть, что в отличие от комплексных операторов § 82, которые могут применяться к *любому* вектору плоскости, основное определение равенства операторов-кватернионов *исключает возможность говорить о применении оператора-кватерниона* α к векторам $\overrightarrow{OC}$, *не лежащим* в плоскости оператора α, т. е. *не перпендикулярным* к оси кватерниона α. Поэтому читатель должен быть здесь особенно осторожным в отношении „избыточных конкретизаций“, о которых шла речь на странице 352, и, в частности, избегать неправильного представления о том, будто бы кватернион есть знак операции, осуществляющей вращение *всех* векторов вокруг оси кватерниона на данный угол, соединенное с растяжением в данно отношении.

Операции этого рода, как мы увидим ниже, не слишком слож ным образом выражаются *через* кватернионы, но отнюдь не со. падают с ними.

Заметим попутно, что операция вращения всех векторов во круг некоторой пространственной оси, соединенная с растяжение отнюдь не определяется однозначно заданием вектора $\overrightarrow{OA}$ и е. конечного положения $\overrightarrow{OB}$. Ось вращения, как легко видеть, мож но выбрать произвольно в плоскости, перпендикулярной к плоскости OAB и проходящей через биссектрису угла AOB.

При всем том возможно было бы построить исчисление операторов этого рода и притти, в конечном итоге, к той ж числовой системе кватернионов. Однако при этом пришлось бы установить довольно искусственное и трудно поддающееся интерпретации правило *сложения* операторов, не связанное обычным образом с операцией сложения векторов.

В противоположность этому, характеризуемая понятием кватерниона более узкая операция, однозначно определяемая парой векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, позволяет, как мы сейчас увидим, сохранить при переходе к трехмерному пространству гораздо более суще ственные черты теории операторов, построенной нами в главе X для плоских векторов.

§ 93. Сложение кватернионов. Векторы-операторы.

Перейдем теперь к основным действиям над кватернионами.

1. Сложение кватернионов α и β определяется по общей для операторного исчисления формуле

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OA}.$$

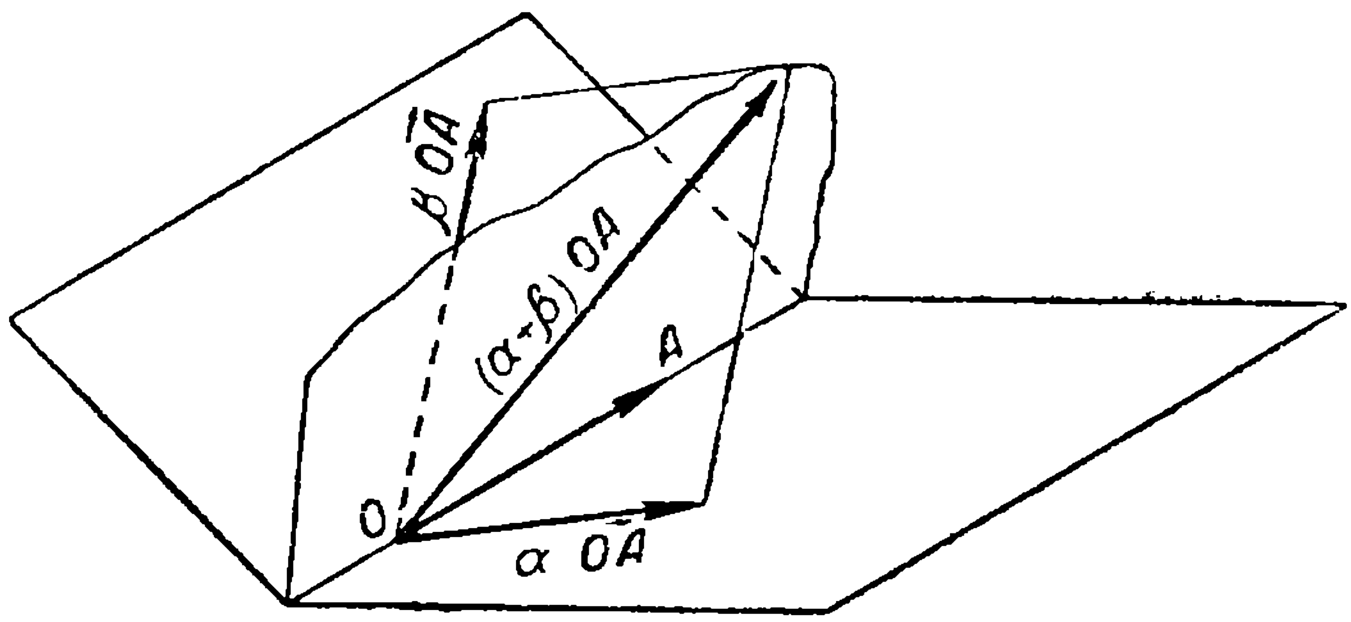
При этом, согласно только что сделанному замечанию, вектор $\overrightarrow{OA}$ должен лежать в плоскостях *обоих* кватернионов α и β. Таким образом, используя эту формулу для построения кватер ниона $\alpha+\beta$ в случае, когда оси α и β не лежат на одной прямой, нужно выбрать вектор $\overrightarrow{OA}$, лежащий на линии пересечения плоскостей кватернионов или, что то же, перпендикулярный к пло скости их осей. Оператор $\alpha+\beta$, как легко видеть, определяется однозначно и от возможного произвола в выборе вектора $\overrightarrow{OA}$ не зависит (черт. 40).

Из переместительного свойства операции сложения векторов вытекает *коммутативный* закон сложения кватернионов

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

Ввиду необходимости при сложении двух кватернионов выбирать указанным выше образом исходный вектор, ассоциативность операции сложения не вытекает столь же непосредственно из аналогичного закона для суммы векторов, и мы установим это свойство для кватернионов несколько позже

Мы рекомендуем читателю в качестве упражнения попробовать провести прямое геометрическое доказательство ассоциативного закона на основе данного выше определения сложения



Черт. 40.

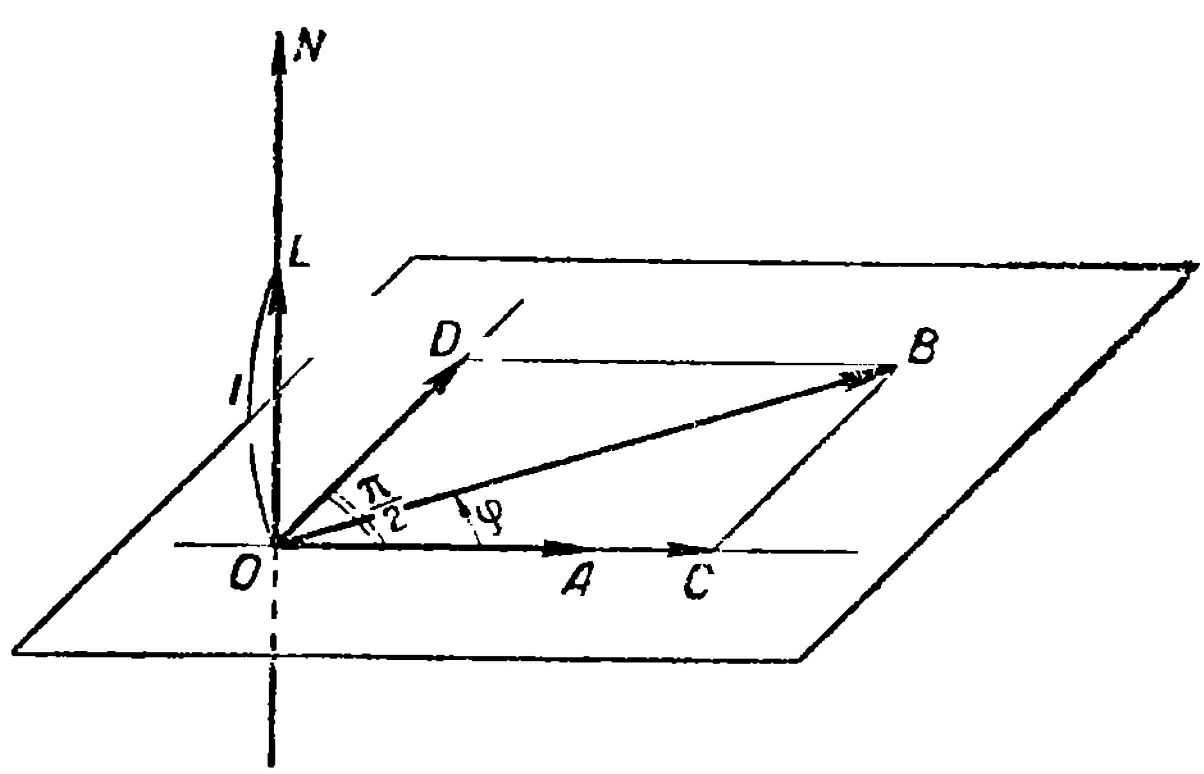
2. Мы займемся теперь основным в теории кватернионов разложением всякого кватерниона на так называемые скалярную и векторную части.

Представим вектор $\vec{OB}=\alpha\vec{OA}$ (результат применения кватерниона α к вектору $\vec{OA}$) в виде суммы двух векторов плоскости OAB:

а) вектора $\vec{OC}$, коллинеарного с исходным вектором $\vec{OA}$, и

б) вектора $\vec{OD}$, перпендикулярного к исходному вектору $\vec{OA}$ (черт. 41).

Вектор $\vec{OC}$ получается из вектора $\vec{OA}$ применением некоторого действительного оператора a_0 (растяжение в отношении $|OB|:|OA|=|a_0|$ без изменения направления или с изменением на противоположное в зависимости от знака a_0). Мы запишем это так



Черт. 41.

$$\vec{OC}=a_0\vec{OA},$$

рассматривая в этой формуле действительное число a_0 как частный случай кватерниона с неопределенной (произвольной) осью. Действительный оператор a_0 называется **скалярной частью** кватерниона α.

Вектор $\overrightarrow{OD}$ получается из вектора $\overrightarrow{OA}$ путем поворота на *прямой угол* в плоскости, перпендикулярной к оси ON кватерниона и растяжения в отношении $OD:OA=l$. Оператор α_1, переводящий вектор $\overrightarrow{OA}$ в вектор $\overrightarrow{OD}$, называется, по причинам, которые мы сейчас выясним, **векторной частью** кватерниона α.

Таким образом

$$\overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=a_0\overrightarrow{OA}+\alpha_1\overrightarrow{OA}=(a_0+\alpha_1)\overrightarrow{OB},$$

так что кватернион α представится в виде суммы его скалярной и векторной части:

$$\alpha=a_0+\alpha_1,$$

что иногда записывают так: $\alpha=\mathfrak{S}\alpha+\mathfrak{V}\alpha$, где $\mathfrak{S}\alpha=\alpha_0$, $\mathfrak{V}\alpha=\alpha_1$.

Для задания кватерниона $\alpha_1=\overrightarrow{OD}:\overrightarrow{OC}$ достаточно задать его ось $\overrightarrow{ON}$ и отношение растяжения $OD:OA=l$. Мы фиксируем при этом ориентировку плоскости так, чтобы $\widehat{DOC}=+\frac{\pi}{2}$. Кватернионы, осуществляющие поворот на *прямой* угол, требуют, стало быть, для своего задания трех действительных чисел, т. е. стольких же данных, сколько требуется для задания вектора. Будем называть всякий такой кватернион **вектором-оператором** и изображать его *вектором* $\overrightarrow{OL}$ *длины* l, *отложенным вдоль оси* ON *кватерниона* α_1 *в положительном направлении.*

Этот вектор мы будем обозначать знаком $\vec{\alpha}_1$.

Целесообразность принимаемой терминологии и вводимого геометрического изображения вытекает из справедливости следующей теоремы:

Сложению двух векторов-операторов α_1 и β_1 по правилу сложения кватернионов отвечает сложение изображающих их векторов $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\beta}_1$ по обычному правилу сложения векторов (по правилу параллелограма).

Это можно кратко записать так:

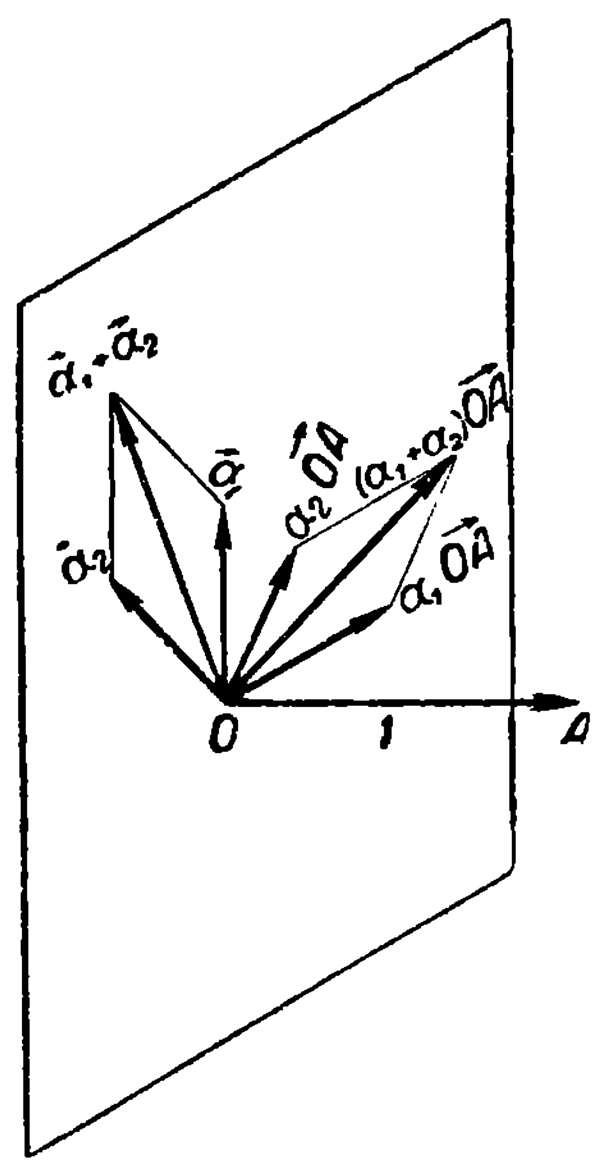
если $\alpha_1+\beta_1=\gamma_1$, *то* $\vec{\alpha}_1+\vec{\beta}_1=\vec{\gamma}_1$, *и обратно.*

Для доказательства примем длину исходного вектора $\overrightarrow{OA}$ за единицу. Тогда мы будем иметь $|\alpha_1\overrightarrow{OA}|=|\vec{\alpha}_1|$ и $|\alpha_2\overrightarrow{OA}|=|\vec{\alpha}_2|$. Таким образом, вектор $\vec{\alpha}_1$ можно получить из вектора $\alpha_1\overrightarrow{OA}$, а вектор $\vec{\alpha}_2$ из вектора $\alpha_2\overrightarrow{OA}$ поворотом на прямой угол в плоскости, перпендикулярной к OA.

При этом (черт. 42) параллелограм, образованный векторами $\alpha_1\overrightarrow{OA}$ и $\alpha_2\overrightarrow{OA}$, перейдет в параллелограм, образованный векторами $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$, и, стало быть, диагональ этого последнего $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ перпендикулярна к диагонали первого $\alpha_1\overrightarrow{OA}+\alpha_2\overrightarrow{OA}$ и равна ей по длине. Так как растяжение при переходе от $\overrightarrow{OA}$ к $\alpha_1\overrightarrow{OA}+\alpha_2\overrightarrow{OA}$ при $|OA|=1$ как раз и выражается длиной $|\alpha_1\overrightarrow{OA}+\alpha_2\overrightarrow{OA}|$, то мы и можем утверждать, что вектор $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$ есть изображение вектора-оператора, переводящего $\overrightarrow{OA}$ в $\alpha_1\overrightarrow{OA}+\alpha_2\overrightarrow{OA}$, т. е. оператора $(\alpha_1+\alpha_2)$. От выбора вектора $\overrightarrow{OA}$ результат, как мы знаем, не зависит. Можно было бы, впрочем, и не предполагать, что $|OA|=1$; тогда рассмотренные выше параллелограмы были бы не равны, но подобны, и мы пришли бы, очевидно, к тому же соотношению

$$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2=\overrightarrow{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Имея в виду доказанное соответствие между сложением операторов α_1 и α_2 и геометрическим сложением изображающих их векторов $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$, мы в дальнейшем будем под термином *вектор-оператор* (а иногда и просто *„вектор“*) понимать как *самый оператор* α_1, так и *изображающий его вектор* $\vec{\alpha}_1$, опуская в обозначениях стрелку над буквой.



Черт. 42.

Под знаком $a\alpha_1$, где a — скалярный оператор, мы будем при этом понимать вектор-оператор, соответствующий последовательному производству операций α_1 и a. Очевидно, что вектор-оператор $a\alpha_1$ изобразится вектором $\overrightarrow{a\alpha_1}$ (при любом знаке a).

Подчеркнем здесь еще раз, что в теории кватернионов надо отличать векторы, *изображающие* операторы от векторов, к которым *применяются* операторы, так как здесь *нельзя* рассматривать вектор, как мы это делаем в комплексной плоскости, как результат применения оператора α_1 к фиксированному единичному вектору $\overrightarrow{OA}=1$ (хотя бы уже потому, что оператор α_1 применим только к перпендикулярным к $\vec{\alpha}_1$ векторам пространства).

Для того чтобы использовать доказанную теорему о сложении векторных частей кватернионов в общем случае, достаточно заметить, что *при сложении двух любых кватернионов можно складывать почленно скалярные и векторные их части.*

Это непосредственно вытекает из переместительного и сочетательного свойств обыкновенного сложения векторов.

Действительно, если $\alpha=a_0+\alpha_1$, $\beta=b_0+\beta_1$, то

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{OA}=(a_0+\alpha_1)\overrightarrow{OA}+(b_0+\beta_1)\overrightarrow{OA}=$$
$$=a_0\overrightarrow{OA}+\alpha_1\overrightarrow{OA}+b_0\overrightarrow{OA}+\beta_1\overrightarrow{OA}=a_0\overrightarrow{OA}+b_0\overrightarrow{OA}+\alpha_1\overrightarrow{OA}+\beta_1\overrightarrow{OA}=$$
$$=(a_0+b_0)\overrightarrow{OA}+(\alpha_1+\beta_1)\overrightarrow{OA}$$

Стало быть,

$$(a_0+\alpha_1)+(b_0+\beta_1)=(a_0+b_0)+(\alpha_1+\beta_1).$$

При этом под $a_0 + b_0$ можно разуметь просто сумму действительных чисел a_0 и b_0, сумму же $\alpha_1 + \beta_1$ можно найти, складывая векторы-операторы $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\beta}_1$ по правилу параллелограма.

3. Теперь легко убедиться в том, что операция сложения двух кватернионов обладает сочетательным свойством. Для скалярных частей это очевидно, для векторных же вытекает из имеющей, как известно, место сочетательности операции сложения векторов по правилу параллелограма. Таким образом

$$\alpha + \beta + \gamma = (a_0 + \alpha_1) + (b_0 + \beta_1) + (c_0 + \gamma_1) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (\alpha_1 + \beta_1) + (c_0 + \gamma_1) = ((a_0 + b_0) + c_0) + ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1) =$$
$$= (a_0 + (b_0 + c_0)) + (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1)) =$$
$$= (a_0 + \alpha_1) + ((b_0 + \beta_1) + (c_0 + \gamma_1)) = \alpha + (\beta + \gamma).$$

4. Известная теорема о том, что всякий вектор α_1 однозначно представляется в виде суммы трех векторов, направленных по трем взаимно перпендикулярным осям, определяемым системой единичных векторов i, j и k, позволяет векторную часть α_1 всякого кватерниона α представить в виде

$$\alpha_1 = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$

где a_1, a_2, a_3 — скалярные операторы, выражающиеся с помощью действительных чисел. Числа a_1, a_2, a_3 называются **координатами** вектора α_1. Таким образом, всякий кватернион α может быть однозначно задан с помощью четырех действительных чисел a_1, a_2 и a_3, а именно

$$\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k. \tag{1}$$

Из доказанной нами теоремы о сложении кватернионов следует, что для кватернионов, представленных в таком виде, операция сложения совершается почленно, так что, если еще

$$\beta = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,$$

то

$$\alpha + \beta = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j + (a_3 + b_3) k.$$

Установив ниже определение и свойства операции умножения, мы придем к исчислению кватернионов, как алгебре гиперкомплексных чисел с четырьмя „единицами“ 1, i, j и k.

§ 94. Умножение кватернионов. Версоры.

Согласно общему определению умножения операторов на основе последовательного производства двух операций, мы положим для кватернионов

$$\gamma = \beta\alpha,$$

если

$$\gamma \overrightarrow{OA} = \beta \overrightarrow{OB}, \text{ где } \overrightarrow{OB} = \alpha \overrightarrow{OA},$$

т. е.

$$\gamma \overrightarrow{OA} = \beta (\alpha \overrightarrow{OA}).$$

Вектор $\overrightarrow{OA}$ следует при этом выбрать в плоскости кватерниона α так, чтобы операция $\beta\overrightarrow{OB}$ была определена, т. е. чтобы вектор $\overrightarrow{OB}$ принадлежал *одновременно плоскостям обоих кватернионов* β и α. Легко видеть, что такой выбор всегда осуществим, причем от возможного произвола в выборе вектора $\overrightarrow{OA}$ кватернион γ не зависит, так что операция умножения кватернионов всегда выполнима и однозначна.

Аналогично тому, как операция сложения приводит к расщеплению всякого кватерниона на скалярную и векторную части, так и операция умножения позволяет всякий кватернион $\alpha = \overrightarrow{OB}:\overrightarrow{OA}$ (см. черт. 41) представить в виде *произведения положительного скалярного оператора*

$$a = |OB| : |OA|,$$

осуществляющего растяжение вектора $\overrightarrow{OA}$ *в требуемом отношении, и кватерниона* α_v, *осуществляющего поворот* (без растяжения) *векторов плоскости COB на требуемый угол* φ. Порядок производства этих двух операций друг по отношению к другу безразличен, и мы можем написать

$$\alpha = a\,\alpha_v.$$

Скалярный оператор a называется **модулем** или **тензором** (tendo — вытягиваю) кватерниона и обозначается иногда знаком $\mathfrak{T}\alpha$. Мы будем также писать $a = |\alpha|$. Оператор α_v поворота на угол φ называется **версором** (verso — поворачиваю) кватерниона и обозначается иногда знаком $\mathfrak{U}\alpha$.

Разлагая версор α_v на скалярную и векторную части, получим (см. черт. 41)

$$\alpha_v = \cos\varphi + \lambda\sin\varphi,$$

где λ есть *оператор поворота на прямой угол в плоскости кватерниона* α. Этот оператор изображается, следовательно, *единичным вектором* $\vec{\lambda}$, направленным по оси кватерниона α. Этот единичный вектор называется **осью кватерниона**, а угол φ - **аргументом** кватерниона.

Итак, всякий кватернион может быть представлен в форме

$$\alpha = a(\cos\varphi + \lambda\sin\varphi),$$

аналогичной тригонометрическому представлению комплексного числа. Тензор a играет здесь роль модуля, оператор λ - роль числа i.

Заметим, что по установленному нами выше закону изображения векторов-операторов пространственными векторами, оператору i комплексной плоскости отвечал бы единичный вектор, перпендикулярный к этой плоскости.

Кватернион $\bar{\alpha} = a(\cos\varphi - \lambda\sin\varphi)$ называется **сопряженным** с данным. Очевидно, что $\mathfrak{S}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})$; $\mathfrak{V}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \bar{\alpha})$. Сопряженные векторы осуществляют поворот на один и тот же угол в одной и той же плоскости, но в противоположных направлениях и изображаются противоположно направленными векторами. Отсюда, в частности, следует, что $\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$ — формула, которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Далее, произведение сопряженных векторов равно 1, и мы получаем $a^2=|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$.

Если кватернионы заданы в форме

$$\alpha=a_0+\alpha_1, \text{ где } a_0=\mathfrak{S}\alpha, \quad \alpha_1=\mathfrak{V}\alpha,$$

то (см. черт. 41)

$$|\alpha|^2=|a_0|^2+|\alpha_1|^2.$$

Если вектор α_1 разложен по взаимно-ортогональным направлениям единичных векторов i, j, k, так что

$$\alpha=a_0+a_1i+a_2j+a_3k,$$

то $|\alpha_1|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ и, стало быть,

$$a=\mathfrak{T}\alpha=\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

Для угла φ получим (черт. 41)

$$\cos\varphi=\frac{a_0}{a}=\frac{a_0}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{|\alpha_1|}{a}=\frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}{\sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

Единичный вектор λ может быть представлен в виде

$$\lambda=\frac{a_1i+a_2j+a_3k}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

При последовательном производстве двух операций $\alpha=a\cdot\alpha_v$ и $\beta=b\beta_v$ можно, очевидно, операции растяжения и поворота отделить друг от друга и написать

$$\gamma=\beta\alpha=b\beta_v\cdot a\alpha_v=(ba)\beta_v\alpha_v$$

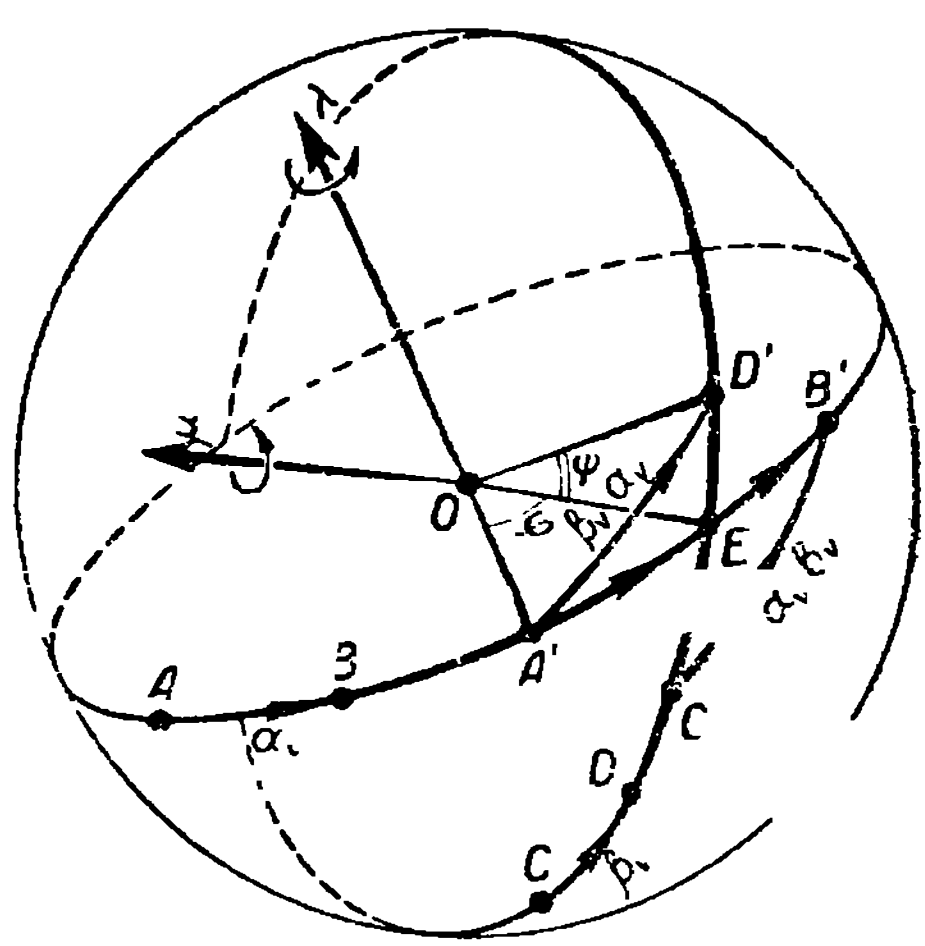
или

$$\gamma=g\gamma_v, \text{ где } g=ba, \ \gamma_v=\beta_v\alpha_v.$$

Таким образом, *тензор произведения равен произведению тензоров*, а *версор — произведению версоров сомножителей*. Отсюда, в частности, следует, что *произведение двух кватернионов может обращаться в нуль только в том случае, если один из сомножителей обращается в нуль*. Если оси сомножителей совпадают, то, как легко видеть, аргументы их складываются, как и в случае обыкновенных комплексных чисел.

§ 95. Сферическая композиция.

1. В общем случае при перемножении версоров над аргументами их производится операция, аналогичная сложению дуг окружности, которую естественней всего назвать „сферической композицией“. Обобщая постановку вопроса в § 82, мы можем с каждым направлением векторов в пространстве сопоставить некоторую точку сферы, скажем, единичного радиуса. Переходам от одного направления к другому будут соответствовать переходы от одной точки этой сферы к другой, которые, согласно определению равенства кватернионов (стр. 510), мы должны считать равными, если они лежат *на одной и той же окружности большого круга* (в плоскости версора) и ограничивают на этой окружности *равные направленные дуги.* Поэтому переходы на сфере, отображающие данный версор, можно свободно передвигать вдоль тех окружностей большого круга, на которых они лежат. К этому присоединяется еще условие, согласно которому переходы, изображаемые полуокружностями больших кругов сферы, отвечающие скалярному оператору —1, тоже считаются все равными между собой так же, как и „нулевые переходы“, отвечающие скалярному оператору +1.



Черт. 43.

Для иллюстрации закона перемножения в порядке $\beta_v \cdot \alpha_v$ версоров

$$\alpha_v = \cos\varphi + \lambda\sin\varphi$$

и

$$\beta_v = \cos\psi + \mu\sin\psi,$$

изображаемых на сфере дугами $\smile AB = \varphi$ и $\smile CD = \psi$ больших кругов в плоскостях, перпендикулярных к осям λ и μ, мы переместим дуги AB и CD вдоль этих кругов так, чтобы эти дуги (переходы) имели *общую связующую точку E* (на линии общего перпендикуляра к осям λ и μ, по которой пересекаются плоскости рассматриваемых дуг), притом *конечную* для дуги φ и *начальную* для дуги ψ. Мы полагаем, стало-быть (черт. 43)

$$\smile AB = \smile A'E = \varphi \quad \text{и} \quad \smile CD = \smile ED' = \psi.$$

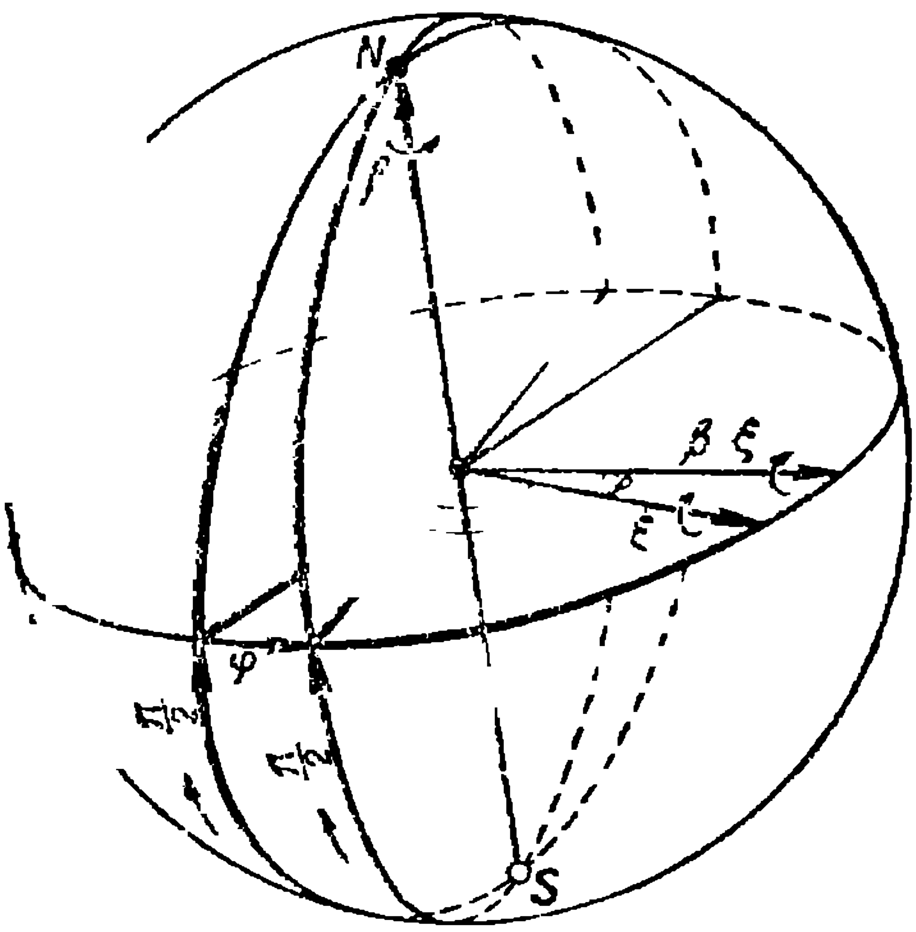
Направленная дуга $\smile A'D'$, образованная в полном согласии с общим определением композиции переходов, и отвечает, очевидно, произведению $\beta_v\alpha_v$ версоров β_v и α_v в данном порядке. Мы будем говорить, что $A'D'$ получается из $\smile AB = \varphi$ и $\smile CD = \psi$ путем **сферической композиции.**

При перемножении тех же версоров в другом порядке мы должны будем добиваться того, чтобы было

$$\smile CD = \smile C'E = \psi \quad \text{и} \quad \smile AB = \smile EB' = \varphi$$

и $\smile C'B'$, будучи равной $\smile A'D'$ по величине, окажется в общем случае лежащей *на другой* окружности большого круга. Соответствующий переход $C'B'$, согласно определению равенства, *не равен* переходу $A'D'$ и версор $\alpha_v\beta_v$ *не равен* версору β. Сферическая композиция, таким образом, *некоммутативна* и результат перемножения версоров зависит от порядка сомножителей. В силу этого и *перемножение кватернионов в общем случае некоммутативно*, так что $\alpha\beta \neq \beta\alpha$. Алгебра кватернионов этим значительно отличается от обычной, и этого читатель не должен упускать из виду в дальнейшем.

С другой стороны, как мы покажем в § 101, с нарушением законов обычной алгебры при переходе к числовым системам, существенно отличным от систем действительных и обыкновенных комплексных чисел, приходится считаться, как с неизбежностью, и возможность сохранения остальных законов действий при нарушении одного только коммутативного закона умножения следует расценивать как весьма счастливое обстоятельство.



Черт. 44.

2. Рассмотрим теперь некоторые частные случаи операции умножения кватернионов.

1) Если α и β — кватернионы с общей осью (и, следовательно, с общей плоскостью поворота), то умножение коммутативно: $\alpha\beta = \beta\alpha$, так как сферической композиции подвергаются здесь дуги одного и того же большого круга. Положение вообще аналогично тому, которое имеет место в комплексной плоскости.

2) При замене сомножителей α и β произведения $\gamma = \beta\alpha$ сопряженными с ними кватернионами $\bar{\beta}$ и $\bar{\alpha}$ отношение между модулями $|\gamma| = |\beta| \cdot |\alpha|$ остается без изменения, а направления вращения версоров β_v и α_v меняются на противоположные, вследствие чего, как легко видеть, произведение $\bar{\beta}_v\bar{\alpha}_v$ оказывается сопряженным с произведением $\alpha_v\beta_v$ (черт. 43).

Таким образом, имеет место формула

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha},$$

которой мы воспользуемся в дальнейшем.

3) Весьма важный частный случай умножения представляет умножение *вектора* ξ *на перпендикулярный к нему версор* β_v поворота на угол φ.

Представим себе, что дуга длины $\frac{\pi}{2}$, отвечающая на сфере оператору ξ, есть дуга меридиана, начинающаяся в южном полюсе S сферы (черт. 44). Откладывая от конца этой дуги по экватору дугу длины φ, отвечающую версору β_v с осью, направленной к северному полюсу N сферы, мы получим в качетве замыкающей соответствующую произведению $\beta_v\xi$ дугу меридиана, плоскость которого повернута на угол φ по сравнению с первоначальной.

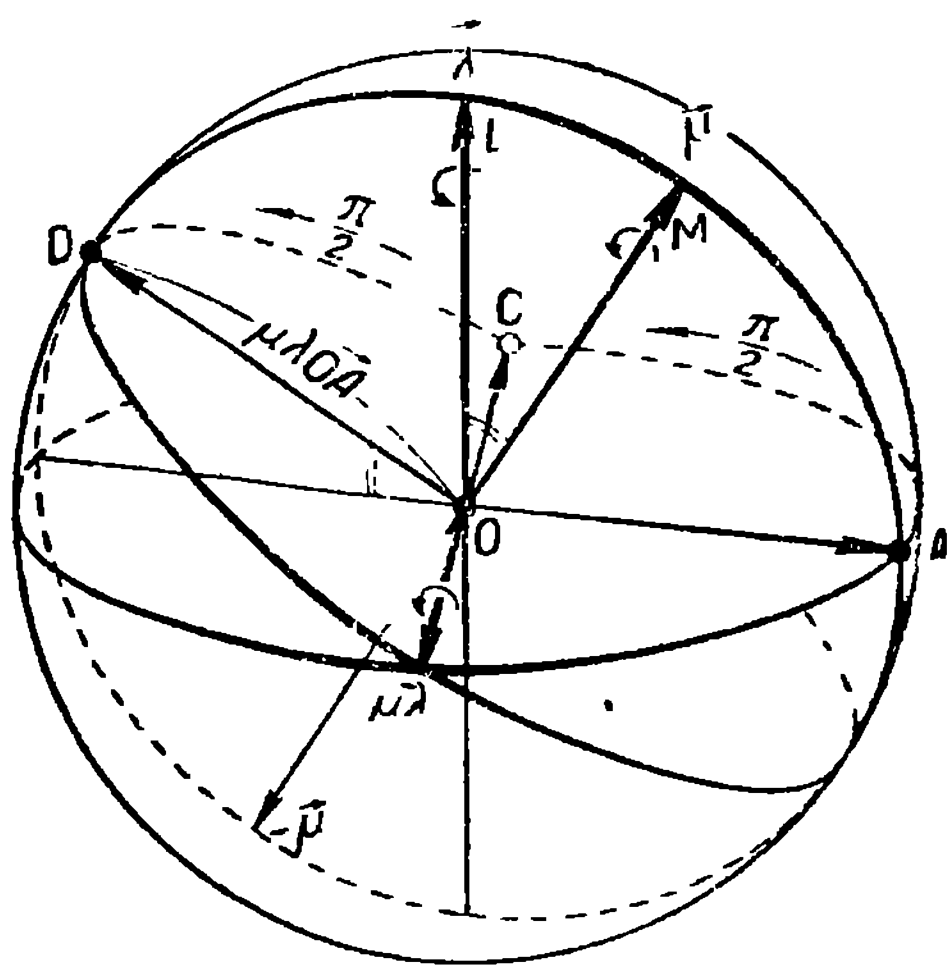
Таким образом, *умножение вектора ξ на перпендикулярный к нему версор β_v осуществляет поворот вектора на угол φ вокруг оси версора.*

Если переставить сомножители, то вектор ξ повернется на угол φ в обратном направлении, так что $\xi\beta_v = \bar{\beta}_v\xi$.

§ 96. Перемножение векторов-операторов.

Рассмотрим сначала случай, когда оба сомножителя λ и μ — *единичные* векторы.

Выберем исходный вектор $\overrightarrow{OA}$, перпендикулярный к оси вектора λ так, чтобы он лежал в плоскости LOM обеих осей OL и OM перемножаемых векторов λ и μ. Тогда вектор $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA}$ будет перпендикулярен к этой плоскости и, следовательно, вектор $\overrightarrow{OD} = \mu\lambda\overrightarrow{OA}$ будет вновь лежать в той же плоскости и одновременно будет перпендикулярен к оси μ (черт. 45).



Черт. 45.

Итак, $OA \perp OL$, $OD \perp OM$, и так как, сверх того, при остром угле $\widehat{LOM}$ оси $\overrightarrow{OL}$ и $\overrightarrow{OM}$ лежат на одном и том же, а при тупом угле LOM — в разных двугранных углах между плоскостями кватернионов, то углы с перпендикулярными сторонами $\widehat{MOL}$ и $\widehat{AOD}$ дополняют друг друга до π.

Стало быть, кватернион $\mu\lambda$ осуществляет поворот в плоскости осей $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$ от оси $\vec{\mu}$ к оси $\vec{\lambda}$ на угол, дополняющий угол между осями $\vec{\mu}$ и $\vec{\lambda}$ до π.

Иначе говоря, *произведение $\mu\lambda$ единичных векторов λ и μ есть оператор, действующий в плоскости осей этих векторов и переводящий ось $\vec{\lambda}$ правого сомножителя в продолжение $-\vec{\mu}$ оси левого сомножителя произведения* (черт. 45).

Пользуясь обозначением Гамильтона (стр. 352), можно, стало быть, при $|\lambda| = 1$ и $|\mu| = 1$ написать

$$\mu\lambda = -\vec{\mu} : \vec{\lambda}.$$

В общем случае, когда векторы — не единичные, к описанной операции присоединяется еще применение скалярного оператора, выражающегося *произведением модулей* перемножаемых векторов. Именно, полагая $\lambda' = l\lambda$ и $\mu' = m\mu$, где λ и μ — единичные векторы, мы найдем

$$\mu'\lambda' = -ml\vec{\mu} : \lambda.$$

Таким образом, *произведение* $\mu'\lambda'$ *векторов* $\lambda' = l\lambda$, $\mu' = m\mu$ *есть оператор, переводящий ось* $\vec{\lambda}$ в ось — $\vec{\mu}$ при одновременном растяжении в отношении $|\mu'\lambda'| : 1$.

Обозначая через φ угол MOL между осями $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$, мы сможем, стало быть, написать (см. стр. 355—356) .

$$\mathfrak{S}(\mu'\lambda') = -ml\cos\varphi; \qquad \mathfrak{V}(\mu'\lambda') = ml\sin\varphi \cdot \vec{\nu},$$

где $\vec{\nu}$ — единичный вектор, перпендикулярный $\vec{\lambda}$ и $\vec{\mu}$, направленный по оси кватерниона $\mu'\lambda'$.

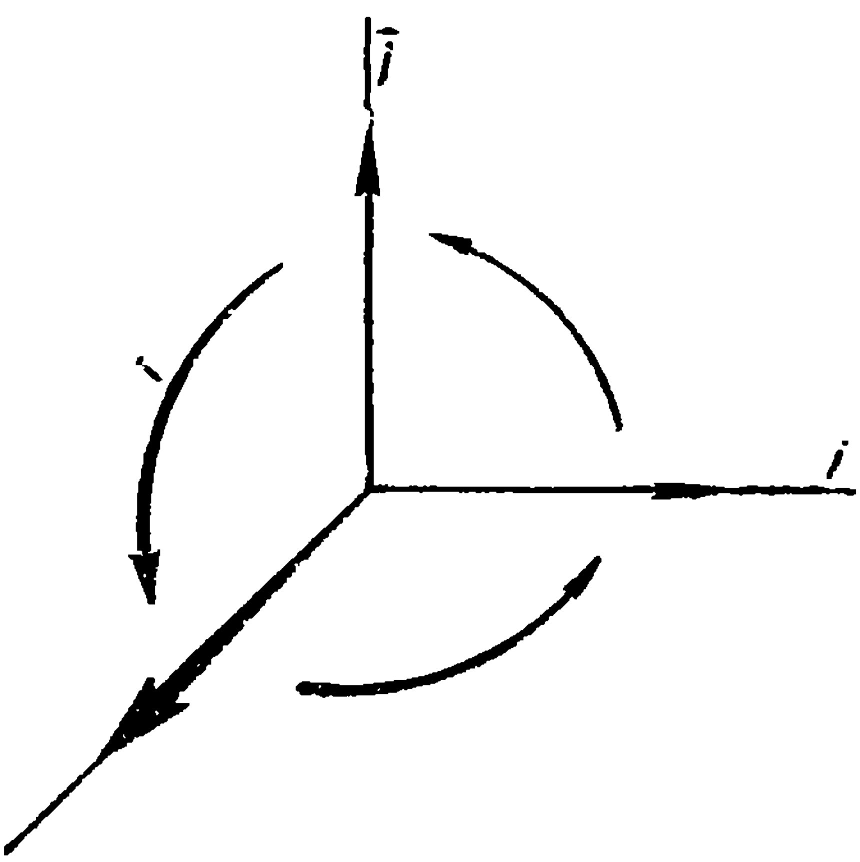
Произведение двух векторов μ' и λ' будет *вектором* в том и только в том случае, если μ' и λ' перпендикулярны друг к другу, причем тогда $\lambda'\mu' = -\mu'\lambda'$.

Аналогично, $\lambda'\mu' = \mu'\lambda'$ есть *скаляр* тогда и только тогда, когда λ' и μ' коллинеарны.

Далее, из того же общего правила перемножения векторов заключаем, что *квадрат* всякого вектора есть скалярный оператор, выражающийся отрицательным числом, *а квадрат всякого единичного вектора есть скалярный оператор* -1, в чем нетрудно убедиться и непосредственно. Никакие другие кватернионы уравнению $a^2 = -1$, очевидно, удовлетворять не могут.

§ 97. Формулы умножения комплексных единиц *i*, *j* и *k*.

Так как угол, дополняющий прямой угол до π, есть прямой, то для единичных векторов i, j и k, осуществляющих повороты вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, найдем, что квадрат каждого из них равен -1, а произведение двух из них есть операция, переводящая ось вектора, написанного в произведении слева, в ось вектора, написанного в произведении справа, т. е. выражается третьим вектором знаком + или —. При перестановке сомножителей произведение, согласно сказанному выше, меняет знак (черт. 46).



Черт. 16.

Таким образом, если векторы i, j, k образуют правую систему, то мы приходим к следующим **основным формулам умножения комплексных единиц:**

$$i^2 = -1; \; j^2 = -1; \; k^2 = -1;$$
$$ij = k; \; ji = -k;$$
$$jk = i; \; kj = -i;$$
$$ki = j; \; ik = -j.$$

Отметим, как следствие, формулы $kji=1$, $ijk=-1$.

Значение формул умножения единиц обусловливается тем обстоятельством, что вследствие справедливости дистрибутивного закона (см. ниже) на этих формулах может быть основано все исчисление кватернионов, заданных в форме $a_0+a_1i+a_2j+a_3k$.

Мы рекомендуем читателю проверить все написанные выше соотношения с помощью сферической композиции, не забывая, что порядок производства операций определяется чтением сомножителей произведения *справа налево*.

§ 98. Основные законы действий в алгебре кватернионов.

Как мы видели, операции сложения, вычитания и умножения кватернионов всегда выполнимы и однозначны. Сложение обладает при этом сочетательным и переместительным свойствами, а умножение, вообще говоря, некоммутативно.

1. Докажем теперь *дистрибутивный закон умножения* кватернионов относительно сложения.

1) Ввиду некоммутативности операции умножения, необходимо доказать как левый дистрибутивный закон $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$, так и правый $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$. Однако из соотношения $\overline{\alpha\beta}=\bar\beta\bar\alpha$ вытекает, что можно ограничиться доказательством лишь одной из этих формул. Действительно, если всегда $\gamma(\alpha+\beta)=\gamma\alpha+\gamma\beta$, то $\overline{(\alpha+\beta)\gamma}=\bar\gamma\,\overline{(\alpha+\beta)}=\bar\gamma(\bar\alpha+\bar\beta)=\bar\gamma\bar\alpha+\bar\gamma\bar\beta=\overline{\alpha\gamma+\beta\gamma}$ и потому

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

2) Если кватернион α разложен на скалярную и векторную части $\alpha=a_0+\alpha_1$, то

$$(a_0+\alpha_1)\gamma=a_0\gamma+\alpha_1\gamma,$$

что непосредственно вытекает из определения сложения, если выбрать вектор $\overrightarrow{OA}$, к которому применяются операции, так, чтобы вектор $\gamma\overrightarrow{OA}$ лежал в плоскости кватерниона α.

3) Из определения сложения следует также, что умножение на скалярный оператор обладает распределительным свойством по отношению к сложению кватернионов.

4) Если оси кватернионов α, β и γ совпадают, то распределительный закон вытекает из соответствующей теоремы для операторов в комплексной плоскости.

5) Остается доказать распределительный закон для любых трех неколлинеарных векторов-операторов

$$(\alpha_1+\beta_1)\gamma_1=\alpha_1\gamma_1+\beta_1\gamma_1,$$

из которых третий — γ_1 — можно предполагать единичным. Как мы видели выше (стр. 363), оператор $\beta_1\gamma_1$ есть действие, переводящее вектор $\vec\gamma_1$ в вектор $-\vec\beta_1$, а оператор $\alpha_1\gamma_1$ — действие, переводящее вектор $\vec\gamma_1$ в вектор $-\vec\alpha_1$. Стало быть, по определению сложения. операция $\alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1$ переведет вектор γ_1 в положение $-\vec{\alpha}_1 + (-\vec{\beta}_1) = -(\vec{\alpha}_1 + \vec{\beta}_1)$. Однако, по тому же правилу, что и выше, к тому же результату приводит и операция $(\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1$ и, стало быть, дистрибутивный закон умножения кватернионов доказан полностью.

2. Отсюда вытекают следующие формулы для произведения двух кватернионов, выраженных через основные единицы:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k)(b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) = \\ = a_0 b_0 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \\ [(a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_3 b_2 - a_2 b_3)]\, i + \\ + [(a_0 b_2 + a_2 b_0) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)]\, j + \\ + [(a_0 b_3 + a_3 b_0) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)]\, k.\end{aligned}$$

Приравнивая модуль произведения произведению модулей сомножителей, мы придем к выражению в виде суммы четырех квадратов произведения двух чисел, каждое из которых есть сумма четырех квадратов (тождество Эйлера). Мы видим, таким образом, что с помощью исчисления кватернионов можно получать не совсем тривиальные результаты и в области обыкновенной алгебры.

Для произведения $\alpha_1\beta_1$ двух векторов $\alpha_1 = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $\beta_1 = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ находим

$$\mathfrak{S}(\alpha_1\beta_1) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3),$$
$$\mathfrak{V}(\alpha_1\beta_1) = (a_3 b_2 - a_2 b_3)\, i + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, k.$$

Геометрическое истолкование и основные свойства *скалярного* $\mathfrak{S}(\alpha_1\beta_1)$ и *векторного* $\mathfrak{V}(\alpha_1\beta_1)$ произведения двух векторов общеизвестны (см. стр. 364), и мы на них останавливаться не будем, заметив только, что из сказанного на странице 364 вытекает, что условие $\mathfrak{S}(\alpha_1\beta_1) = 0$ выражает перпендикулярность векторов α_1 и β_1, а условие $\mathfrak{V}(\alpha_1\beta_1) = 0$ их коллинеарность.

3. Непосредственное доказательство *сочетательного закона* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ отнюдь не сводится к столь же тривиальному построению, какое имеет место для операторов в комплексной плоскости, в чем легко может убедиться читатель, попробовав осуществить это построение с помощью сферической композиции (стр. 361). Но доказанный нами дистрибутивный закон позволяет свести вопрос к проверке сочетательного закона для комплексных единиц i, j и k.

Поверкой с помощью формул страницы 364 убедимся, что если λ, μ, ν означают взятые в любом порядке единицы i, j, k, то

$$\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu; \quad \lambda(\lambda\mu) = (\lambda\lambda)\mu; \quad \lambda(\mu\lambda) = (\lambda\mu)\lambda, \quad \lambda(\mu\mu) = (\lambda\mu)\mu.$$

Так, например, принимая во внимание зависимость знаков от циклического расположения λ, μ, ν, найдем

$$\lambda(\lambda\mu) = \lambda(\pm\nu) = \pm(\lambda\nu) = \pm(\mp\mu) = (-1)\mu = (\lambda\lambda)\mu$$

и т. п.

Отсюда уже нетрудно вывести, что вообще

$$(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)\{(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)\}=$$
$$=\{(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)(b_0+b_1i+b_2j+b_3k)\}(c_0+c_1i+c_2j+c_3k)$$

так как каждому слагаемому, например, типа

$$a\lambda\cdot(b\mu\cdot c\nu)=abc\lambda(\mu\nu)$$

левой части (значки при буквах a, b и c мы опускаем) будет соответствовать равное ему слагаемое правой части

$$(a\lambda\cdot b\mu)\cdot c\nu=abc(\lambda\mu)\nu.$$

Таким образом, сочетательный закон

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$$

доказан для любых трех кватернионов.

4. Мы видим, что все формулы алгебры кватернионов вытекают, как следствие из доказанных законов действий и основных соотношений, определяющих закон перемножения единиц (стр. 364). Такого рода путь построения алгебры гиперкомплексных чисел и более общего вида $a_1i_1+a_2i_2+\ldots+a_ni_n$ с n „единицами“ является с формальной точки зрения простейшим и мы рассмотрим его в следующей главе.

5. Деление кватернионов. В связи с некоммутативностью умножения, обратная умножению операция деления расщепляется на две: **правое деление** $\gamma_1=\beta\alpha^{-1}$, т. е. разыскание множителя γ_1, который, будучи умножен справа на α, дал бы произведение $\gamma_1\alpha$, равное β, и **левое деление** $\gamma_2=\alpha^{-1}\beta$. Здесь $\alpha\gamma_2=\beta$. В общем случае $\gamma_1\neq\gamma_2$ и потому следует избегать неопределенного обозначения $\beta:\alpha$ или $\frac{\beta}{\alpha}$, если α не есть скаляр.

В том случае, когда α отлично от скалярного оператора переводящего всякий вектор в нулевой, оба деления *выполнимы* и *однозначны*, как это ясно из самой постановки вопроса и определения умножения.

Однозначность обоих действий деления вытекает, как и в других рассмотренных нами случаях, также и из установленного выше свойства произведения кватернионов обращаться в нуль тогда и только тогда, когда один из сомножителей обращается в нуль. Действительно, если, например, $\gamma_1\alpha=\beta$; $\gamma_1'\alpha=\beta$, то $(\gamma_1-\gamma_1')\alpha=0$ и, следовательно, $\gamma_1=\gamma_1'$.

Модуль кватерниона α^{-1}, выражающего операцию, слева и справа обратную α, равен *обратной величине модуля* α а версор кватерниона α^{-1} *сопряжен* с версором кватерниона α Стало быть, если

$$\alpha=a\alpha_v,\ \text{то}\ \alpha^{-1}=\frac{1}{a}\bar{\alpha}_v\qquad(a\neq0).$$

Если еще $\beta=b\beta_v$, то

$$\beta\alpha^{-1}=\frac{b}{a}\beta_v\bar{\alpha}_v\quad\text{и}\quad\alpha^{-1}\beta=\frac{b}{a}\bar{\alpha}_v\beta_v.$$

Нетрудно проверить эти результаты непосредственно:

$$(\beta\alpha^{-1})\,\alpha = \frac{b}{a}\beta_v\overline{\alpha}_v\cdot a\alpha_v = \frac{b}{a}\beta_v a = b\beta_v = \beta$$

и

$$\alpha\,(\alpha^{-1}\beta) = a\,\alpha_v\cdot\frac{b}{a}\overline{\alpha}_v\beta_v = a\cdot\frac{b}{a}\beta_v = b\,\beta_v = \beta.$$

Так как кватернион, сопряженный с $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ есть $\overline{\alpha} = a_0 + \overline{a_1 i} + \overline{a_2 j} + \overline{a_3 k} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$, то

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{a^2} = \frac{a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

откуда, пользуясь формулами умножения, можно получить для кватернионов, выраженных через основные единицы, в такой же форме и явные выражения левого и правого частных $\alpha^{-1}\beta$ и $\beta\alpha^{-1}$.

$\alpha^{-1} = \overline{\alpha}$ для версоров и только для них. Для единичных векторов $\alpha^{-1} = \overline{\alpha} = -\alpha$. Заметим еще что $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$, так как $(\alpha\beta)(\beta^{-1}\alpha^{-1}) = \alpha\,(\beta\beta^{-1})\,\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = 1$.

Однозначность действия деления составляет существенное отличие числовой системы кватернионов от гиперкомплексных систем с другим числом единиц, отличных от кватернионов и обыкновенных комплексных чисел.

6. Резюмируя всю совокупность доказанных свойств основных операций, мы можем сказать, что *кватернионы образуют числовое поле с некоммутативным умножением.*

Скалярное расположение элементов в этом поле, как и в поле комплексных чисел, не рассматривается.

§ 99. Вращения вокруг осей в трехмерном пространстве.

Приведем в заключение пример приложения исчисления кватернионов к геометрическим вопросам.

1. Зададимся целью записать с помощью кватернионов результат поворота вектора на угол φ вокруг некоторой пространственной оси OB.

Рассматривая вектор ξ как оператор, замечаем, что решение задачи нам уже известно (стр. 363) для того случая, когда вектор ξ перпендикулярен к оси OB. Обозначая тогда через β_φ версор поворота на угол φ с осью OB, мы получим искомый вектор ξ' в виде $\xi' = \beta_\varphi\xi$. В общем случае разложим вектор ξ на две составляющих: β_1 по оси OB и ξ_1 перпендикулярно к этой оси. Требуется, очевидно, записать результат операции, оставляющей вектор β_1 без изменения, а вектор ξ_1 поворачивающей на угол φ вокруг оси OB. Обозначая через β версор с осью OB и *углом поворота, равным* $\frac{\varphi}{2}$, легко убедиться, что выражение

$$\beta\xi\beta^{-1} = \beta\beta_1\beta^{-1} - \beta\xi_1\beta^{-1}$$

обладает требуемыми свойствами.

Действительно, в силу коллинеарности кватернионов в первом произведении можно переставить сомножители и мы получаем:

$$\beta\beta_1\beta^{-1} = \beta\beta^{-1}\beta_1 = \beta_1.$$

Далее, так как

$$\beta^{-1} = \overline{\beta} \text{ и (стр. 363) } \xi_1\overline{\beta} = \beta\xi_1,$$

то

$$\beta\xi_1\beta^{-1} = \beta^2\xi_1 = \beta_\varphi\xi.$$

В итоге вектор ξ повернется на угол φ вокруг оси OB и перейдет в вектор

$$\xi' = \beta\xi\beta^{-1}.$$

2. Таким образом, операция вращения векторов вокруг пространственных осей весьма просто выражается с помощью кватернионов. Последовательное производство двух вращений, определяемых версорами половинного угла β и γ, также есть вращение, определяемое таким же образом версором $\gamma\beta$, ибо

$$\gamma\,(\beta\xi\beta^{-1})\,\gamma^{-1} = (\gamma\beta)\,\xi\,(\gamma\beta)^{-1}.$$

Эта операция, очевидно, в общем случае некоммутативна. Ассоциативность проверяется без труда

$$\delta\,(\gamma\beta)\,\xi\,\{\delta\,(\gamma\beta)\}^{-1} = (\delta\gamma)\,\beta\xi\,\beta^{-1}\gamma^{-1}\delta^{-1} = (\delta\gamma)\,\beta\,\xi\beta^{-1}(\delta\gamma)^{-1}.$$

Дистрибутивный закон относительно сложения векторов также имеет место:

$$\beta\,(\xi_1 + \xi_2)\,\beta^{-1} = \beta\xi_1\beta^{-1} + \beta\xi_2\beta^{-1}.$$

Однако, если определять сложение для операторов вида $B_1 = \beta_1 \ldots \beta_1^{-1}$ и $B_2 = \beta_2 \ldots \beta_2^{-1}$ (точки обозначают место вектора, к которому применяется оператор) по общему правилу

$$(B_1 + B_2)\,\xi = B_1\xi + B_2\xi,$$

то мы получим справа $\beta_1\xi\beta_1^{-1} + \beta_2\xi\beta_2^{-1}$, что, вообще говоря, *не может быть приведено к тому же виду* $\beta\xi\beta^{-1}$.

Введем еще операторы более общего типа, включающие также и растяжение, а именно

$$B = b\,\beta_v \ldots \beta_v^{-1}.$$

Так как такой оператор однозначно определяется кватернионом $b\beta_v$, то, определяя сложение двух операторов типа B как образование нового оператора, определяемого суммой соответствующих кватернионов, мы могли бы притти к истолкованию всех действий над кватернионами в системе растяжений и вращений всех векторов вокруг пространственных осей. Однако, как мы уже упоминали (стр. 354), искусственность определения сложения, по существу основанного на сложении кватернионов, свидетельствует о том, что не это, а первоначальное истолкование кватерниона как оператора, применимого только к перпендикулярным к его оси векторам, является методологически правильным.

3. Пусть теперь ось вращения задана единичным вектором

$$\beta_1 = b_1 i + b_2 j + b_3 k.$$

Версор β на этой оси, имеющий аргумент $\frac{\varphi}{2}$, представится в виде

$$\beta = \cos\frac{1}{2}\varphi + \beta_1 \sin\frac{1}{2}\varphi = \cos\frac{1}{2}\varphi\,(1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k),$$

где

$$\lambda_1 = b_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \quad \lambda_2 = b_2 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi, \quad \lambda_3 = b_3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

Поэтому формула $\xi' = \beta\xi\beta^{-1}$ поворота вектора

$$\xi = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

на угол φ вокруг оси β_1 примет вид

$$\xi' = \beta\xi\beta^{-1} =$$

$$= \cos^2\frac{\varphi}{2}(1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k)(x_1 i + x_2 j + x_3 k)(1 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k).$$

Выполняя умножение и определяя коэфициенты разложения $\xi' = x_1' i + x_2' j + x_3' k$, мы придем к так называемым **формулам Эйлера**, выражающим *координаты повернутого вектора через направляющие косинусы оси вращения, угол поворота и координаты первоначального вектора.* Предоставляем выкладки читателю.

4. Заканчивая изложение теории кватернионов, заметим, что уже сам Гамильтон дал весьма большое число примеров ее приложения к геометрическим и физическим вопросам. Однако практика показала, что в этих целях целесообразнее, жертвуя законченностью арифметической стороны дела, выделить из общего исчисления ту его *часть*, которая относится к *векторам*, отвлекаясь от интерпретации этих последних как операторов. В этой форме основы **векторного исчисления**, вероятно известны читателю.

ГЛАВА XII.

ЧИСЛОВЫЕ ПОЛЯ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

§ 100. Гиперкомплексные числа.

Мы будем здесь рассматривать системы объектов, по отношению к которым будет определено понятие равенства и операции сложения и умножения. При этом, однако, мы не будем требовать выполнения *всех* свойств числового поля (см. § 39, 41). Не оговаривая в общем случае, какие именно свойства числового поля могут быть нарушены, будем для краткости называть рассматриваемые системы объектов **числовыми системами.**

1. Как мы видели выше, теорию обыкновенных комплексных чисел можно рассматривать как теорию „пар" действительных чисел (a, b), а теорию кватернионов (глава XI) как теорию „четверок" действительных чисел $(a_0, a_1, a_2, a_3,)$ с установленными для каждой из этих систем определениями равенства и основных действий.

Обобщая эту постановку вопроса, будем рассматривать *числовые системы, элементами которых являются совокупности n действительных чисел*

$$(a_1, a_2, \ldots a_n),$$

заданных в указанном порядке.

Такие совокупности n чисел, подчиненные приводимым ниже определениям, называются **гиперкомплексными числами.** Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются **координатами** гиперкомплексного числа. Можно также несколько обобщить постановку вопроса, взяв в качестве области изменения координат не поле действительных чисел, а какое-либо иное числовое поле K. В этом случае говорят о гиперкомплексных системах **над полем** K.

Для гиперкомплексных чисел принимаются следующие определения.

Определение 1. *Два гиперкомплексных числа* $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *называются* ***равными***, *если*

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \ldots \quad a_n = b_n.$$

Равенство, очевидно, обладает требуемыми свойствами рефлективности, обратимости и транзитивности.

Определение 2. *Суммой* $\gamma=\alpha+\beta$ *двух гиперкомплексных чисел* $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *называется гиперкомплексное число*

$$\gamma=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n).$$

Операция сложения, очевидно, всегда выполнима, однозначна, коммутативна, ассоциативна и однозначно обратима. Модуль сложения есть элемент (0, 0,..., 0), который мы будем для краткости обозначать знаком 0.

Определение 3. ***Произведением*** $k\alpha$ *действительного числа* k *на гиперкомплексное число* $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *называется гиперкомплексное число*

$$(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n).$$

Для рациональных $k=\frac{m}{n}$ это определение согласовано с обычным смыслом операции $\frac{m}{n}\alpha$, так что, если $\frac{m}{n}\alpha=\beta$, то $m\alpha=n\beta$, т. е. сумма m слагаемых, равных α, равна сумме n слагаемых, равных β.

Умножение на действительное число, очевидно, дистрибутивно по отношению к операции сложения гиперкомплексных чисел.

2. Рассмотрим n гиперкомплексных чисел

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1&=(1, 0, 0, \ldots, 0),\\
\varepsilon_2&=(0, 1, 0, \ldots, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n&=(0, 0, 0, \ldots, 1).
\end{aligned}$$

Тогда, согласно введенным определениям, можно написать

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\ldots+a_n\varepsilon_n.$$

Таким образом, всякий элемент рассматриваемой числовой системы линейно и притом однозначно выражается через n ее элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, называемых **единицами** (читатель должен помнить, что к модулю умножения эти единицы в общем случае никакого отношения не имеют. Ср., например, комплексные единицы i, j, k для системы векторов-операторов).

3. Заметим, что выбрать n элементов системы, через которые линейно выражаются все остальные, можно и не только указанным здесь способом.

Рассмотрим систему n чисел

$$\alpha_1=\sum_j a_{1j}\varepsilon_j, \ldots, \alpha_n=\sum_j a_{nj}\varepsilon_j.$$

Если число $\beta = \sum_j b_j \varepsilon_j$ можно представить в виде $\beta = \sum_i c_i \alpha_i$, то, подставляя вместо α_i их выражения через единицы ε_j, найдем

$$\sum_{i,j} c_i a_{ij} \varepsilon_j = \sum_j b_j \varepsilon_j.$$

Согласно определению равенства это возможно только в том случае, если

$$\sum_i c_i a_{ij} = b_j \text{ при } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Требование, чтобы *всякое* число β линейно выражалось через α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, равносильно, таким образом, требованию разрешимости системы уравнений (1) относительно неизвестных c_i *при всяком задании правых частей* b_j. Для этого необходимо и достаточно, чтобы детерминант $|a_{ij}|$ коэфициентов a_{ij} был отличен от нуля. При этом условии числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ также могут выполнять ту же роль в отношении представления чисел данной системы гиперкомплексных чисел, что и единицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Так как условие $|a_{ij}| \neq 0$ есть одновременно необходимое и достаточное условие того, чтобы *из равенства нулю всех чисел* b_j *вытекало равенство нулю всех чисел* c_i, то ограничение, налагаемое на числа α_i указанным требованием, есть не что иное, как условие *линейной независимости* n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, *всякий элемент рассматриваемой системы гиперкомплексных чисел линейно выражается через любые* n *линейно-независимых элементов и притом, как легко видеть, однозначно.*

4. Наиболее существенным в построении гиперкомплексных числовых систем является определение операции *умножения* двух гиперкомплексных чисел. Перечисленные до сих пор общие свойства, характеризующие, как говорят, **n-мерное линейное пространство**, могут иметь место и для таких систем объектов, для которых операция умножения не рассматривается и которые изучаются, по существу, не с арифметической, а с геометрической точки зрения (например системы векторов n-мерного аффинного пространства). Лишь принятие того или иного определения умножения придает изучаемым системам специфический характер гиперкомплексной *числовой* системы, порождая соответствующее исчисление или, как говорят, **алгебру** системы. Различные системы гиперкомплексных чисел или *различные алгебры* как раз и отличаются друг от друга принимаемым определением и свойствами операции умножения.

К основному интересующему нас случаю так называемых **линейных алгебр** мы придем, потребовав, чтобы операция умножения была в области рассматриваемых объектов *однозначной, всегда выполнимой* и обладала *дистрибутивным свойством относительно сложения.* Под выполнимостью *в данной системе* мы понимаем при этом требование, чтобы произведение любых двух гиперкомплексных чисел системы было гиперкомплексным числом *той же системы.*

Принимая во внимание требование о выполнении дистрибутивного закона, мы можем произведение $\alpha\beta$ двух гиперкомплексных чисел $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n$ и $\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots + b_n\varepsilon_n$ написать в виде

$$\alpha\beta = \sum_{i, j} a_i b_j \varepsilon_i \varepsilon_j. \tag{2}$$

С другой стороны, по требованию выполнимости, все попарные произведения $\varepsilon_i \varepsilon_j$ гиперкомплексных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ также должны быть гиперкомплексными числами, т. е. должны выражаться линейно через те же единицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Поэтому, можно написать n^2 (ведь, вообще $\varepsilon_i\varepsilon_j \neq \varepsilon_j\varepsilon_i$) формул

$$\varepsilon_i\varepsilon_j = c_{ij}^1\varepsilon_1 + c_{ij}^2\varepsilon_2 + \ldots + c_{ij}^n\varepsilon_n,$$

где i и j независимо друг от друга пробегают значения 1, 2, 3, ..., n.

Задание n^3 чисел c_{ij}^k вполне определяет **закон умножения единиц** и тем самым и общий закон умножения любых двух чисел α и β, заданных в координатной форме, именно

$$\alpha\beta = \sum_{i, j, k} c_{ij}^k a_i b_j \varepsilon_k.$$

От того или иного выбора чисел c_{ij}^k зависит тот или иной закон умножения и те или иные свойства этой операции, а с нею и всей соответствующей *линейной алгебры.* Так, например, полагая при $n = 2$

$$\varepsilon_1{}^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2{}^2 = -\varepsilon_1$$

(этому соответствуют значения $c_{11}^1 = 1, c_{11}^2 = 0, c_{12}^1 = c_{21}^1 = 0$, $c_{12}^2 = c_{21}^2 = 1$, $c_{22}^1 = -1$, $c_{22}^2 = 0$), мы придем, как легко видеть, к алгебре обыкновенных комплексных чисел. Предоставляем читателю выписать таблицу коэфициентов c_{ij}^k для числовой системы кватернионов.

Если составить вытекающую из принятого закона умножения таблицу умножения $\alpha_i\alpha_j = \sum_k \bar{c}_{ij}^k \alpha_k$ не для единиц, а для некоторой другой системы линейно независимых между собой чисел α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то, вообще говоря, $\bar{c}_{ij}^k \neq c_{ij}^k$. Принимая α_i за единицы, мы получим, следовательно, *другую алгебру*, однако, отличающуюся от исходной, по существу, лишь *формой задания.* Алгебры, определяемые системами коэфициентов $\bar{c}_{ij}^k$ и c_{ij}^k, называются **эквивалентными** (относительно линейного преобразования единиц).

5. Так же, как и для кватернионов, легко показать и в общем случае, что если при перемножении всяких трех единиц ассоциативный закон имеет место, так что

$$(\varepsilon_p\varepsilon_q)\,\varepsilon_r = \varepsilon_p\,(\varepsilon_q\varepsilon_r) \tag{3}$$

при любых комбинациях индексов, то и вообще

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

для всяких трех гиперкомплексных чисел системы. Уравнения (3) налагают соответствующие ограничения на числа c_{ij}^k. Если они выполняются, то получаемая алгебра называется **линейной ассоциативной алгеброй.**

Для ассоциативной алгебры можно ввести обычным путем определение целой положительной степени α^n числа, как произведения n множителей, равных α.

Остающийся произвол в выборе чисел c_{ij}^k позволяет все еще получать довольно многообразные по своим свойствам, существенно отличающиеся друг от друга гиперкомплексные системы с различными алгебрами. Естественно поставить прежде всего вопрос: нет ли среди всех этих систем гиперкомплексных чисел таких, которые обладали бы всеми свойствами числового поля и составляли, таким образом, непосредственное обобщение понятия о числе, подчиняющееся обычной алгебре. Имея в виду то, что было сказано на странице 362, можно при этом поставить вопрос сначала несколько шире, не требуя коммутативности умножения. Мы и приступим к соответствующему анализу, исходя из общего понятия о гиперкомплексной системе с линейной ассоциативной алгеброй и присоединяя еще не введенное до сих пор основное свойство числового поля — требование однозначной обратимости операции умножения.

Мы придем таким путем к теореме Фробениуса, упомянутой уже в § 81.

§ 101. Теорема Фробениуса

Итак, потребуем *выполнимости и однозначности обоих действий деления* $\beta\alpha^{-1}$ и $\alpha^{-1}\beta$ каждого числа β справа и слева (см. § 98, n° 5) на любое число α, отличное от нуля. Как нам уже известно, отсюда будет следовать, что *произведение двух чисел системы может обращаться в нуль только в том случае, когда один из сомножителей равен нулю.* Говорят в этом случае, что рассматриваемая алгебра *не содержит „делителей нуля“.*

1. Докажем теперь, что в указанных предположениях в системе существует одно и только одно гиперкомплексное число ε — модуль умножения, обладающее тем свойством, что

$$\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon = \alpha$$

при всяком α. Это число ε называют также **главной единицей.**

Для доказательства рассмотрим какое-либо отличное от нуля гиперкомплексное число β и положим $\varepsilon = \beta\beta^{-1}$. Покажем, что ε есть главная единица.

Действительно, прежде всего находим $\varepsilon\beta = \beta$. Умножая на β слева и пользуясь свойством однозначности действия деления, находим $\beta\varepsilon = \beta$. Так как при $\beta \neq 0$ всякое другое число α системы можно, согласно требованию выполнимости операции деления, представить в виде $\alpha=\beta\gamma$ и $\alpha=\gamma'\beta$, то отсюда находим $\varepsilon\alpha=\varepsilon\beta\gamma=\beta\gamma$ и $\alpha\varepsilon=\gamma'\beta\varepsilon=\gamma'\beta$, так что $\varepsilon\alpha=\alpha$ и $\alpha\varepsilon=\alpha$. Стало быть, ε есть главная единица.

В силу однозначности действия деления равенства $\alpha x=\alpha$ и $y\alpha=\alpha$ ни при каких других x и y ни для какого $\alpha\neq 0$ невозможны, и, стало быть, никакой другой главной единицы существовать не может. Мы будем обозначать главную единицу ε просто знаком 1.

Если $n=1$, то все остальные числа системы линейно выражаются через $\varepsilon=1$ и мы придем к *числовому полю действительных чисел.*

При $n>2$ мы можем включить главную единицу в число единиц $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, служащих для представления элементов системы, положив, хотя бы $\varepsilon_n=1$. Линейной зависимости между ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ и 1, по доказанному, существовать не может.

2. Заметим теперь, что согласно сказанному на странице 373 всякое число системы линейно выражается через n линейно независимых чисел и потому между всякими n числами системы должна существовать линейная зависимость. В частности, если α какое-либо число системы, то существует линейная зависимость между $n+1$ числами

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^{n-1},\ \alpha^n$$

с действительными коэфициентами. Другими словами, всякое гиперкомплексное число α линейной ассоциативной алгебры над полем действительных чисел удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0$$

с действительными коэфициентами.

Воспользовавшись основной теоремой алгебры, согласно которой левая часть всякого такого уравнения разлагается на множителей второй степени с действительными коэфициентами, мы можем, опираясь на предполагаемое отсутствие делителей нуля, утверждать больше, а именно, что *всякое отличное от действительного числа гиперкомплексное число рассматриваемой системы удовлетворяет квадратному уравнению типа*

$$(x-A)^2+B^2=0,$$

где A и B — действительные числа и $B\neq 0$. Разделяя на B, мы приведем уравнение к виду

$$(ax+b)^2=-1$$

причем $a\neq 0$.

3. В частности, единицы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ также должны удовлетворять уравнениям такого же типа:

$$(a_m\varepsilon_m+b_m)^2=-1; \qquad a_m\neq 0; \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Так как $a_m \neq 0$, то мы можем провести замену единиц (каждая новая выражается через старую, и наоборот, так что замена законна), полагая

$$\iota_m = a_m \varepsilon_m + b_m \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n - 1).$$

Тогда для всех новых единиц будем иметь

$$\iota_m^2 = -1.$$

4. Это показывает, что для случая $n = 2$ единственная гиперкомплексная система, удовлетворяющая поставленным требованиям, есть *система обыкновенных комплексных чисел.*

5. Если же $n > 2$, то существуют, по крайней мере три независимых единицы 1, λ и μ, причем $\lambda^2 = -1$ и $\mu^2 = -1$. Докажем что при этих условиях обязательно должна существовать и четвертая независимая от них единица. С этой целью докажем, что *между четырьмя числами*

$$1,\ \lambda,\ \mu,\ \lambda\mu$$

не может существовать линейной зависимости.

Действительно, допуская, что

$$\lambda\mu = c_0 + c_1\lambda + c_2\mu,$$

где c_0, c_1 и c_2 — действительные числа, умножением слева на λ найдем

$$-\mu = c_0\lambda - c_1 + c_2\lambda\mu = c_0\lambda - c_1 + c_2(c_0 + c_1\lambda + c_2\mu).$$

Так как 1, λ и μ — линейно независимы, то, перенося $-\mu$ в правую часть полученного равенства и приравнивая коэфициенты нулю, найдем, между прочим,

$$c_2^2 + 1 = 0,$$

что невозможно, так как c_2 по предположению действительное число.

Таким образом, должно быть $n \geq 4$, т. е. *гиперкомплексных систем требуемого типа при $n = 3$ существовать не может.* При $n = 4$ за четвертую единицу можно было бы принять произведение $\lambda\mu$.

6. Возникает вопрос, нельзя ли $\mu\lambda$ принять за пятую единицу. Однако, как мы сейчас докажем, $\mu\lambda$ не только линейно выражается через введенные уже числа, но и, более того, *связано с $\lambda\mu$ соотношением типа*

$$\mu\lambda = -\lambda\mu + c,$$

где c — действительное число.

Для доказательства этого утверждения заметим, что $\sigma = \lambda + \mu$ и $\delta = \lambda - \mu$ не могут быть действительными (линейная независимость единиц 1, λ и μ) и потому удовлетворяют квадратным уравнениям с действительными коэфициентами типа

$$\sigma^2 = s_1\sigma + s_2;\quad \delta^2 = d_1\delta + d_2.$$

С другой стороны,

$$\sigma^2=(\lambda+\mu)(\lambda+\mu)=\lambda\lambda+\mu\lambda+\lambda\mu+\mu\mu=-2+\mu\lambda+\lambda\mu$$

и, аналогично,

$$\delta^2=-2-\mu\lambda-\lambda\mu,$$

откуда находим, складывая

$$\sigma^2+\delta^2=s_1(\lambda+\mu)+d_1(\lambda-\mu)+s_2+d_2=-4$$

или

$$(s_1+d_1)\lambda+(s_1-d_1)\mu+s_2+d_2+4=0,$$

откуда вытекает, в силу линейной независимости единиц,

$$s_1+d_1=0,\ s_1-d_1=0$$

и, стало быть,

$$s_1=d_1=0,\ \text{т. е}\ \sigma^2=s_2$$

или

$$\mu\lambda+\lambda\mu=s_2-2=c,$$

где, как и утверждалось, c — действительное число.

7. Итак, при $n\geqslant 4$ у нас в распоряжении есть во всяком случае четыре единицы 1, λ, μ и $\lambda\mu$, причем $\lambda^2=-1$, $\mu^2=-1$, а $\mu\lambda=-\lambda\mu+c$.

Эти соотношения уже несколько напоминают соотношения между единицами в исчислении кватернионов. Посмотрим, нельзя ли добиться полного совпадения с формулами § 97 путем линейного преобразования единиц.

С этой целью положим

$$i=\lambda;\ j=m\lambda+n\mu,\ k=p\lambda\mu+q$$

и попытаемся выбрать действительные коэфициенты m, n, p и q так, чтобы $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}\neq 0$ (условие эквивалентной замены единиц) и чтобы были выполнены соотношения страницы 364, характеризующие исчисление кватернионов.

Требование $ij=k$ дает:

$$-m+n\lambda\mu=p\lambda\mu+q,$$

т. е. $p=n$ и $q=-m$.

Итак,

$$i=\lambda,\ j=m\lambda+n\mu;\ k=n\lambda\mu-m.$$

Требование $k^2=-1$ дает

$$n^2(\lambda\mu)^2-2nm\lambda\mu+m^2=-1.$$

Но (n° 6)

$$(\lambda\mu)^2=\lambda(\mu\lambda)\mu=\lambda(-\lambda\mu+c)\mu=c\lambda\mu-1.$$

Поэтому

$$n(cn-2m)\lambda\mu-n^2+m^2+1=0.$$

Так как $n\neq 0$, то, приравнивая коэфициенты нулю и полагая $c:2=c_1$, найдем $m=c_1n$, $n^2-m^2=1$, откуда

$$n=\frac{1}{\sqrt{1-c_1^2}};\quad m=\frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}.$$

Из доказанного попутно соотношения

$$(\lambda\mu)^2 = 2c_1\lambda\mu - 1$$

вытекает

$$(\lambda\mu)^2 - 2c_1\lambda\mu + c_1^2 = (\lambda\mu - c_1)^2 = c_1^2 - 1$$

и, стало быть, так как $\lambda\mu - c_1$ число комплексное, то $c_1^2 - 1 < 0$ и $1 - c_1^2 > 0$. Найденные нами значения для коэфициентов n и m, следовательно, действительны.

Итак,

$$i = \lambda; \quad j = \frac{c_1\lambda + \mu}{\sqrt{1 - c_1^2}}; \quad k = \frac{\lambda\mu - c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}},$$

причем уже установлено, что

$$i^2 = -1, \; k^2 = -1 \text{ и } ij = k.$$

Легко теперь убедиться, что остальные требуемые соотношения также выполнены.

Действительно,

$$j^2 = \frac{c_1^2\lambda^2 + c_1(\lambda\mu + \mu\lambda) + \mu^2}{1 - c_1^2} = \frac{-1 + c_1^2}{1 - c_1^2} = -1,$$

$$ji = \frac{(c_1\lambda + \mu)\lambda}{\sqrt{1 - c_1^2}} = \frac{-c_1 + \mu\lambda}{\sqrt{1 - c_1^2}} = -\frac{-\lambda\mu + c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}} = -k.$$

Мы получим, таким образом,

$$i^2 = -1, \; j^2 = -1, \; k^2 = -1; \; ij = -ji = k.$$

Этих соотношений достаточно для того, чтобы вывести остальные формулы страницы 364, уже не опираясь на выражения i, j и k, через λ и μ. Предоставляем это читателю.

Получаемая таблица умножения единиц 1, i, j и k определяет, таким образом, известную уже нам так называемую *алгебру действительных кватернионов.*

8. Докажем теперь, что числами вида $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ рассматриваемая нами система гиперкомплексных чисел должна исчерпаться.

С этой целью допустим, что в ней есть число ν, не находящееся в линейной зависимости от единиц 1, i, j, k. При этом можно предполагать, что преобразование, которое выше (n^0 3) привело нас к уравнению $\iota_m^2 = -1$, проделано и для числа ν, так что $\nu^2 = -1$.

Тогда, по доказанному выше (n^0 6) для независимых единиц 1, λ и μ соотношению $\lambda\mu + \mu\lambda = c \cdot 1$, где c — действительное число, мы сможем написать, применяя это к парам единиц i, ν; j, ν и k, ν:

$$i\nu + \nu i = c_1,$$
$$j\nu + \nu j = c_2,$$
$$k\nu + \nu k = c_3.$$

Попытаемся из этих соотношений найти выражение ν через i, j и k. С этой целью умножим первое на i, второе на j и третье на k. Мы найдем

$$i\nu i-\nu=c_1 i;$$
$$j\nu j-\nu=c_2 j;$$
$$k\nu k-\nu=c_3 k.$$

Складывая два последних, получим

$$j\nu j+k\nu k-2\nu=c_2 j+c_3 k.$$

С другой стороны, умножая равенство $i\nu+\nu i=c_1$ слева на k, а справа на j, найдем

$$j\nu j+k\nu k=-c_1 i.$$

Подставляя в предыдущее соотношение, найдем

$$-2\nu=c_1 i+c_2 j+c_3 k.$$

Таким образом, ν, вопреки предположению, линейно выражается через i, j и k.

9. Этим и доказана **теорема Фробениуса** (Frobenius): *над полем действительных чисел не существует никаких других систем гиперкомплексных чисел, обладающих всеми свойствами числового поля, за исключением*

1) *поля действительных чисел* ($n=1$),

2) *поля обыкновенных комплексных чисел* ($n=2$),

3) *некоммутативного поля действительных кватернионов* ($n=4$). Числовое поле гиперкомплексных чисел с *коммутативным* умножением возможно только для случаев $n=1$ и $n=2$ (действительные и обыкновенные комплексные числа). Этот результат, имея в виду фундаментальное значение требования об отсутствии делителей нуля в доказательстве теоремы Фробениуса, иногда формулируют так: *невозможно построить при $n>2$ линейную, ассоциативную и коммутативную алгебру гиперкомплексных чисел так, чтобы операция деления на число, отличное от нуля, была всегда однозначна и выполнима.*

10. Мы уже упоминали выше (§ 81) о **теореме Понтрягина**, согласно которой *всякое локально бикомпактное* (см. стр. 337) *непрерывное числовое поле можно рассматривать как гиперкомплексную числовую систему и потому,* опираясь на теорему Фробениуса, *свести к только что рассмотренным полям* 1), 2) и 3).

Теорема Понтрягина дает, таким образом, *аксиоматическую характеристику этих числовых полей,* т. е. определяет само содержание понятий о действительном и о комплексном числе, независимо от того, с помощью какого теоретического построения эти числовые системы вводятся.

На этом мы и закончим основную часть нашей книги, посвященную развитию понятия о числе. Читатель, желающий ознакомиться с общей теорией гиперкомплексных чисел, может обратиться к книге „Линейные алгебры" Диксона (Dickson) (которому, в частности, принадлежит изложенное в тексте доказательство теоремы Фробениуса), а также прочитать соответствующие главы „Элементарного учебника алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых" Чезаро (Cesàro) (русское издание 1936 г.).

ГЛАВА XIII.

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ. РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ.

§ 102. Предмет теории чисел.

В этой главе мы рассмотрим некоторые специфические свойства системы *целых* чисел, связанные с вопросами делимости и разложения целых чисел на множители. Вопросы этого рода встречаются в преподавании арифметики, — это обстоятельство и вызывает потребность рассмотреть их подробнее в курсе, имеющем, помимо всего прочего, служебную цель подведения теоретической базы под основной материал курса элементарной математики. По существу же дела содержание настоящей главы представляет собой вводную часть самостоятельной математической дисциплины — *теории чисел,* имевшей первоначально предметом своего изучения специфические свойства системы целых чисел (вопросы делимости, изучение простых чисел, решение неопределенных уравнений в целых числах и т. п.) и в настоящее время обнимающей целый комплекс связанных с этой первоначальной задачей вопросов, решаемых самыми разнообразными методами и соприкасающейся с целым рядом других областей современной математики алгебраического, аналитического и геометрического содержания.

Эта область математики обладает совершенно своеобразной привлекательностью, вытекающей из самого характера поставленных в ней и в значительной мере до сих пор не разрешенных классических проблем. Самая формулировка этих последних по своей четкости и внешней элементарности доступна всякому, имеющему простейшие познания из области арифметики. Вопросы здесь ставятся настолько конкретно, что обычно для частных случаев допускают истолкование на числовом материале и своеобразное экспериментирование с помощью простых выкладок и числовых таблиц. Однако, несмотря на простоту и конкретность постановки проблем, решение их в общем виде наталкивается на трудности, преодоление которых в каждом отдельном случае требует максимальной математической изобретательности и привлечения зачастую наиболее мощных средств современного математического анализа.

В качестве примера достаточно привести, хотя бы, не разрешенные до сих пор проблемы: „всякое ли четное число разлагается на сумму двух простых чисел?" (проблема Гольдбаха, см. стр. 422) и „существует ли конечное или бесконечное число пар простых чисел, отличающихся друг от друга на 2, как 11 и 13, 17 и 19, 10 006 427 и 10 006 429 и т. п.?" (проблема „близнецов"), „возможно ли при $n \geqslant 3$ решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых числах?" (задача Ферма̀).

Охарактеризованное выше положение привлекало к теории чисел внимание наиболее выдающихся математиков всех времен, усилиями которых были созданы совершенно своеобразные методы трактовки различных ее проблем, сыгравшие значительную роль в деле развития математических методов вообще и получившие в последнее время целый ряд приложений и в сравнительно далеких от первоначального материала теории чисел областях естествознания.

В первую очередь сюда относится теория кристаллов, в которой правильная дискретная структура вещества порождает ряд взаимоотношений, оказавшихся тождественными с теми, которые уже более ста лет изучались в теории чисел в связи с чисто теоретико-числовыми проблемами представления целых чисел заданной функцией других целых чисел (теория бинарных и тройничных квадратичных форм и др.). Далее следует отметить, что, вообще, современные физические теории во многом существенно опираются на аппарат дискретной математики и, в частности, на *теорию групп*, предмет изучения и методы которой неразрывно переплетаются, а порой и сливаются с соответствующими отделами теории чисел.

Ограничиваясь здесь этим общим обзором, мы отсылаем читателя, который заинтересуется теорией чисел в более широком объеме, к книгам Граве, „Элементарный курс теории чисел", Киев, 1913, Виноградов, „Теория чисел", Лежен-Дирихле, „Лекции по теории чисел" и другим специальным руководствам, так как в рамках настоящей книги мы вынуждены будем останавливаться лишь на самых простейших вопросах этой дисциплины, непосредственно связанных с материалом курса элементарной математики.

§ 103. Наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель двух чисел.

1. Одной из начальных задач теории чисел является изучение вопроса о разложении целых чисел на *множители*, находящегося в непосредственной связи с вопросами *делимости* одного целого числа на другое.

Из элементарной арифметики известно („деление с остатком"), что между всякими двумя целыми числами a и b возможно установить соотношение

$$a = bq + r,$$

где q и r — целые числа, причем

$$0 \leqslant r < b.$$

В том случае, когда $r=0$, так что

$$a=bq,$$

мы говорим, что *а делится на b*, есть **кратное** числа *b*, или что *b делит а*, есть ***делитель*** числа *а*.

Для обозначения соотношения делимости были предложены различные способы сокращенной записи, к сожалению, противоречащие друг другу и недостаточно наглядные. Так, в довольно распространенном учебнике Егорова употребляется знак $a|b$ для обозначения делимости a на b, между тем как в немецкой литературе укрепился знак a/b для обозначения того, что a есть *делитель* b. Мы позволим себе, поэтому, сохраняя только что указанное обозначение a/b, употреблять более близкий к обычной русской терминологии знак (три вертикально расположенные точки)

$$b \vdots a$$

для обозначения того, что b делится на a.

Частицей *„не"* мы будем обозначать отрицание соответствующего соотношения делимости.

Из самого определения легко вытекают следующие общеизвестные предложения:

1) *Если* $a \vdots c$ и $b \vdots c$, *то* $a \pm b \vdots c$.

2) *Если* $a \vdots b$ и $b \vdots c$, *то* $a \vdots c$.

3) *Если* $a \pm b \vdots c$ и $a \vdots c$, *то* $b \vdots c$.

4) *Если* $ab \vdots ac$, *то* $b \vdots c$ *и*, обратно, *если* $b \vdots c$, то $ab \vdots ac$.

5) Из того, что a не $\vdots\, c$ и b не $\vdots\, c$ не вытекает ни того, что $a \pm b$ не $\vdots\, c$, ни того, что ab не $\vdots\, c$.

Для доказательства основного предложения об однозначном разложении всякого числа на произведение степеней простых чисел необходимо, однако, доказать одно общее предложение о делимости, устанавливающее условия, при которых из факта делимости $ab \vdots c$ можно заключить о делимости одного из сомножителей, скажем, b на число c.

Обычно установлению этих условий в той или иной форме предшествует доказательство теоремы (см. ниже § 105--106), согласно которой общий наибольший делитель d двух чисел a и b *линейно выражается* через a и b, так что $d=ax+by$, где x и y целые (положительные или отрицательные) числа. Здесь существенным образом используется *аддитивное* сочетание чисел между собой, в то время, как в вопросах делимости мы имеем, по существу, дело с *мультипликативной* структурой целых чисел. Использование свойств аддитивной структуры чисел можно свести к необходимому минимуму, если в основу положить понятие о наименьшем кратном двух чисел a и b, что мы и сделаем.

Подчеркнем еще, что читатель, оперирующий с понятиями общего наибольшего делителя и наименьшего кратного на основе укрепившейся привычки рассматривать вместо каждого целого числа его разложение на простые множители, рискует не понять самой постановки вопроса. Здесь речь как раз идет о том, чтобы *установить теорему* об однозначном разложении на простые множители и потому чрезвычайно существенно для понимания логической последовательности следующих ниже определений и теорем уметь отказаться вначале от всяких представлений, связанных с таким разложением.

В определениях настоящего параграфа имеются в виду лишь целые *положительные* числа.

Определение. *Наименьшее из всех чисел, делящихся как на число a, так и на число b, называется* ***наименьшим общим кратным*** *чисел a и b.*

Определение законно, так как ab есть уже общее кратное чисел a и b и, стало быть, для нахождения наименьшего общего кратного достаточно испытать делимость на b конечного числа чисел

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ (b-1)a,$$

кратных a и не превышающих числа ab.

Наименьшее кратное чисел a и b мы будем обозначать знаком

$$m=[a,\ b].$$

Теорема 1. *Всякое общее кратное M чисел a и b делится на наименьшее кратное этих чисел m,* т. е. если $m=[a, b]$, $M \vdots a$ и $M \vdots b$, то $M \vdots m$.

Доказательство. Разделим число M на число m и пусть

$$M=mq+r, \text{ где } 0 \leqslant r < m.$$

Так как $M \vdots a$ и $m \vdots a$, то и $r \vdots a$. Аналогично заключаем, что $r \vdots b$. Так как, с другой стороны, m есть наименьшее общее кратное a и b, то неравенство $r<m$ возможно лишь в том случае, когда $r=0$, т. е.

$$M=mq,$$

или

$$M \vdots m.$$

Следствие. *Произведение ab чисел a и b делится на их наименьшее кратное.*

Определение. *Числа α и β называются* ***взаимно простыми*** *между собой, если они не имеют общих делителей, отличных от* 1, т. е. если из $\alpha \vdots d$ и $\beta \vdots d$ вытекает $d=1$.

Теорема 2. *Для того чтобы число m было наименьшим общим кратным чисел a и b, необходимо и достаточно, чтобы частные $\alpha=m:a$ и $\beta=m:b$ были взаимно-простыми между собой целыми числами.*

Доказательство. Пусть $\alpha \vdots d$ и $\beta \vdots d$, так что $\alpha=\alpha' d$ $\beta=\beta' d$.

Из соотношений

$$m=a\alpha=a\alpha' d \text{ и } m=b\beta=b\beta' d$$

следует, что целое число

$$m'=\frac{m}{d}=a\alpha'=b\beta'$$

есть общее кратное чисел a и b. Из условия, что m есть наименьшее кратное, необходимо следует, поэтому, что $d=1$, т. е. α и β — взаимно-простые.

Обратно, если m есть не наименьшее кратное a и b, то оно делится на их наименьшее кратное, скажем, $m'=[a, b]$. Полагая $m'=a\alpha'=b\beta'$ и $m=m'd$, найдем $m=a\alpha'd=b\beta'd$ и, следовательно, частные

$$\alpha=m:a=\alpha'd \quad \text{и} \quad \beta=m:b=\beta'd$$

имеют общий делитель $d\neq 1$, т. е. не суть числа взаимно-простые между собой.

Следствие. *Наименьшее кратное двух чисел α и β совпадает с их произведением в том и только в том случае, когда α и β — взаимно-простые.*

Доказательство очевидно, ибо b есть частное от деления числа ab на a, a — частное от деления ab на b и, стало быть, по предыдущей теореме, ab будет наименьшим кратным чисел a и b в том и только в том случае, когда b и a взаимно-простые между собой.

Теорема 3. *Если в делящемся на b произведении ac один из множителей, например a, есть число взаимно-простое с b. то другой множитель c должен делиться на b.*

Доказательство. Так как a и b взаимно-простые, то их наименьшее кратное совпадает с их произведением ab. Так как, с другой стороны, ac, по условию, есть общее кратное a и b, то (по теореме 1) $ac \vdots ab$ и, стало быть, $c \vdots b$.

Доказанная только что теорема 3 является, как мы убедимся ниже в § 108, исходным пунктом в установлении основной теоремы об однозначном разложении всякого целого числа на простые множители. Здесь мы установили ее, опираясь на теоремы, характеризующие свойства наименьшего кратного двух чисел.

2. Прежде, чем итти дальше, остановимся еще на понятии об общем наибольшем делителе двух и, вообще, нескольких чисел и его свойствах.

Теорема 4. *Частное $d=ab:[a, b]$ от деления произведения двух чисел на их наименьшее кратное **делится** на всякий общий делитель чисел a и b и,* следовательно, *является **наибольшим общим делителем** чисел a и b.*

Доказательство. Полагая

$$m=a\alpha=b\beta,$$

найдем:

$$d=ab:m=ab:a\alpha=b:\alpha$$

и

$$d=ab:m=ab:b\beta=a:\beta,$$

так что

$$b=\alpha d \quad \text{и} \quad a=\beta d,$$

где α и β, по теореме 2, — взаимно-простые между собой числа

Частное $ab:m=d$ является, таким образом, общим делителем чисел a и b.

Положим теперь, что

$$b=\alpha_1 d_1; \quad a=\beta_1 d_1,$$

где d_1 — некоторый общий делитель чисел a и b. Тогда число $M=\alpha_1\beta_1 d_1$ будет общим кратным чисел a и b и, следовательно, будет делиться на число $m=a\alpha=b\beta$. Взяв M в виде $M=\alpha_1 a$, можем написать:

$$\alpha_1 a=ka\alpha,$$

или

$$\alpha_1=k\alpha. \tag{1}$$

Подставляя это значение α_1 в равенство $b=\alpha_1 d_1$, найдем

$$b=k\alpha d_1.$$

Так как, с другой стороны,

$$b=\alpha d,$$

то

$$d=kd_1,$$

т. е. всякий общий делитель d_1 чисел a и b есть делитель числа $d=ab:m$. При этом, очевидно, также и

$$\beta_1=k\beta. \tag{2}$$

Общий наибольший делитель чисел a и b мы будем обозначать знаком:

$$d=(a, b).$$

Одновременно с теоремой 4 мы доказали, как легко видеть следующее положение.

Теорема 5. *Число d является общим наибольшим делителем чисел a и b в том и только в том случае, когда частные от деления a и b на число d суть числа взаимно-простые между собой.*

Действительно, в приведенных выше формулах α и β взаимно-простые, между тем как по (1) и (2) числа α_1 и β_1 имеют общий делитель k.

Подчеркнем здесь, что для теории делимости существенна не наибольшая возможная *величина* числа d, а как раз только что доказанное свойство общего наибольшего делителя d делиться нацело на *всякий общий делитель* чисел a и b. Точно так же минимальное свойство числа m играет роль только в установлении существования наименьшего кратного; для теории делимости существенно лишь соответствующее свойство этого числа, выражаемое теоремой 1.

Существование *наибольшего по величине* общего делителя d двух чисел легко, конечно, установить независимо от рассмотрения наименьшего кратного. Однако непосредственное доказательство соответствующего теореме 1 предложения о делимости определенного *таким* путем числа d на всякий другой общий делитель чисел a и b значительно сложнее, нежели установление теоремы 1.

Отметим еще некоторые формальные свойства чисел m и d.

Теорема 6. $(ac, bc) = (a, b)c$; $[ac, bc] = [a, b]c$.

Доказательство. Полагая $(a, b) = d$ и $a = \beta d$, $b = \alpha d$, найдем

$$ac = \beta(dc) \quad \text{и} \quad bc = \alpha(dc),$$

где α и β — взаимно-простые. Стало быть,

$$(ac, bc) = dc.$$

Аналогично, полагая $m = [a, b]$ и $m = \beta\alpha d$; $M = mc = \beta\alpha dc$, найдем, что частные

$$M : ac = \alpha \quad \text{и} \quad M : bc = \beta$$

суть числа взаимно-простые, так что

$$M = mc = [ac, bc].$$

Теорема 7. *Если* $(\beta, \alpha) = 1$, *то* $(\gamma\beta, \alpha) = (\gamma, \alpha)$.

Доказательство. Если $\alpha \vdots d$ и $\gamma\beta \vdots d$, то, по теореме 3, $\gamma \vdots d$, так как d, будучи делителем α, не может иметь общих делителей с числом β, взаимно-простым с α, и, следовательно, $(d, \beta) = 1$.

Таким образом, всякий общий делитель $\gamma\beta$ и α есть общий делитель γ и α. Обратное очевидно. Поэтому

$$(\gamma\beta, \alpha) = (\gamma, \alpha).$$

Следствие. Если $(\beta, \alpha) = 1$ и $(\gamma, \alpha) = 1$, то $(\beta\gamma, \alpha) = 1$, т. е. *произведение чисел, взаимно-простых с данным числом* α, *есть число, взаимно-простое с* α.

§ 104. Обобщения. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное нескольких чисел.

1. Теория делимости, так же как и понятия об общем наибольшем делителе и наименьшем кратном, допускают распространение и на дробные рациональные числа.

При этом в области дробных чисел можно установить ряд предложений, значительно упрощающих формулировку зависимости между общим наибольшим делителем и наименьшим кратным нескольких чисел и позволяющих в полной мере выявить *двойственность* всех соответствующих соотношений, которую читатель мог заметить в тексте теорем предыдущего параграфа.

Теория делимости дробных чисел оказывается, таким образом, небесполезной и для изучения взаимоотношений между натуральными целыми числами.

Мы будем следовать той же схеме изложения, что и в § 103.

Лемма (о делении с остатком). *Если* $\frac{M}{N}$ и $\frac{m}{n}$ *две дроби, то всегда можно положить*

$$\frac{M}{N}=\frac{m}{n}q+\rho,$$

где q - *целое число, а*

$$0\leqslant\rho<\frac{m}{n}$$

Для доказательства достаточно разделить целое число Mn на Nm, т. е. положить

$$Mn=Nmq+r; \qquad 0\leqslant r<Nm.$$

Тогда найдем
$$\frac{M}{N}=\frac{m}{n}q+\frac{r}{Nn},$$

где

$$0\leqslant\frac{r}{Nn}<\frac{Nm}{Nn}=\frac{m}{n}$$

Если $\rho=\frac{r}{Nn}=0$, так что

$$\frac{M}{N}=\frac{m}{n}\cdot q,$$

где q *целое* число, то мы будем говорить, что дробь $\frac{M}{N}$ делится на дробь $\frac{m}{n}$, и писать

$$\frac{M}{N}\,\vdots\,\frac{m}{n} \quad \text{или} \quad \frac{m}{n}\Big/\frac{M}{N}.$$

Легко видеть, что свойства 1—5 соотношения делимости, указанные на странице 383, сохраняются и для дробных чисел.

Заметим теперь, что если r_1 и r_2 — рациональные числа и если $r_1 \vdots r_2$, так что $r_1=r_2q$, где q — целое, то

$$\frac{1}{r_2}=\frac{1}{r_1}q, \text{ так что } \frac{1}{r_1}\Big/\frac{1}{r_2}$$

Отношение делимости, таким образом, *меняет направление* при замене дробей r_1 и r_2 *обратными им*. Это очевидное предложение и лежит в основе упомянутой уже *двойственности* в свойствах наименьшего кратного и наибольшего делителя нескольких чисел.

2. Перейдем к установлению соответствующих определений, ограничиваясь, как и выше, *положительными* числами.

Наименьшим общим кратным $m=[r_1, r_2, \ldots, r_n]$ нескольких рациональных чисел $r_1=\frac{p_1}{q_1}, \ldots, r_n=\frac{p_n}{q_n}$ мы назовем наименьшее положительное число m, делящееся на каждое из этих чисел.

Существование такого числа m устанавливается аналогично тому, как это было сделано в § 103.

Действительно, число $Q=p_1p_2 \ldots p_n$ делится на каждую из дробей $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Достаточно, поэтому, среди *конечного* числа кратных

$$1r_1,\ 2r_1,\ 3r_1,\ \ldots,\ q_1p_2p_3 \ldots p_n \cdot r_1 = Q$$

дроби r_1 найти наименьшее число, делящееся на все остальные дроби $r_2, \ldots, r_n$. Это число и будет наименьшим общим кратным всех дробей $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Всякое другое общее кратное M этих чисел делится на их наименьшее кратное m. Доказательство проводится так же, как и на странице 384.

Общим наибольшим делителем $d=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ нескольких рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ мы назовем наибольшее положительное число d, делящее каждое из этих чисел.

Для доказательства существования такого числа рассмотрим наименьшее кратное μ чисел $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$, т. е. положим

$$\mu = \left[\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}\right].$$

Из соотношений

$$\mu : \frac{1}{r_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

будет вытекать

$$r_i : \frac{1}{\mu} \qquad (i=1, 2, \ldots n),$$

и наоборот. Так как при этом наименьшему возможному значению μ соответствует наибольшее возможное значение дроби $\frac{1}{\mu}$, делящей каждое из чисел r_i, то отсюда следует, что $\frac{1}{\mu}$ есть искомый *общий наибольший делитель* d чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Одновременно с существованием этого числа установлена таким образом

Теорема. *Обратная величина наименьшего кратного нескольких чисел равна общему наибольшему делителю обратных чисел и, наоборот, обратная величина общего наибольшего делителя равна наименьшему кратному обратных чисел,* т. е.

$$\text{если } d=(r_1, r_2, \ldots, r_n), \text{ то } \frac{1}{d}=\mu=\left[\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}\right]$$

$$\text{и если } m=[r_1, r_2, \ldots, r_n], \text{ то } \frac{1}{m}=\delta=\left(\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}\right).$$

Другими словами, при преобразовании $y=\frac{1}{x}$, переводящем все числа в обратные им, общий наибольший делитель преобразуется в наименьшее кратное, и наоборот.

3. Это позволяет установить полный параллелизм между свойствами наименьшего кратного и наибольшего делителя и получать одни из других, не проводя дважды соответствующих рассуждений. Так, из доказанного выше свойства всякого общего кратного нескольких чисел делиться на их наименьшее кратное, заключаем, что *всякий общий делитель нескольких чисел есть делитель их общего наибольшего делителя.*

Действительно, если $r_i : D$ при $i=1, 2, \ldots, n$, то $\frac{1}{D}$ $\frac{1}{r_i}$ и, следовательно, $\frac{1}{D} : \mu$ или $\frac{1}{\mu} : D$, т. е. $d : D$.

Имея в виду обобщение теорем 2 и 5 § 103, введем теперь следующее определение.

Целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются **взаимно-простыми в своей совокупности**, если они не имеют общего делителя, отличного от 1, т. е. если

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1.$$

Рассмотрим теперь частные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ от деления некоторого общего кратного M чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ на каждое из этих чисел, т. е. положим

$$M=r_1a_1=r_2a_2= \ldots =r_na_n.$$

Если допустить, что числа a_i имеют общий делитель, скажем, $\alpha>1$, то можно написать

$$a_i=\alpha\beta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

и

$$M=r_1\beta_1\alpha=r_2\beta_2\alpha= \ldots =r_n\beta_n\alpha.$$

Стало быть, $\frac{M}{\alpha}<M$ есть некоторое общее кратное чисел r_i и потому *M не есть наименьшее* кратное чисел r_i.

Обратно, если M не есть наименьшее кратное, то, полагая $M=\alpha m$, где m есть *наименьшее* кратное, и обозначая частные от деления m на $r_1, r_2, \ldots, r_n$ через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, мы придем к тем же формулам $a_i=\alpha\beta_i$, показывающим, что частные $a_i = M : r_i$ имеют общий делитель α, отличный от единицы.

Этим доказана

Теорема. *Для того чтобы число m было наименьшим кратным чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, необходимо и достаточно, чтобы частные $m : r_1=a_1, \ldots, m : r_n=a_n$ были целыми числами,* ***взаимно-простыми в своей совокупности.***

Так как из соотношений $\mu=\frac{1}{r_i}a_i$ следует $r_i=\frac{1}{\mu}a_i=da_i$, то отсюда непосредственно вытекает „двойственное" по отношению к предыдущему предложение: для того чтобы число d было общим наибольшим делителем чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, необходимо и достаточно, чтобы *частные $r_i : d=a_i$* были целыми числами, *взаимно-простыми в своей совокупности.*

Из этих двух предложений выводим следующие соотношения

$$[ar_1, ar_2, \ldots, ar_n] = a[r_1, r_2, \ldots, r_n]$$

и

$$(ar_1, ar_2, \ldots, ar_n) = a(r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

где a — *целое* число.

Пользуясь этим, найдем для системы *целых чисел*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

соотношения

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 : \left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right] =$$

$$= p : \left[\frac{p}{a_1}, \frac{p}{a_2}, \ldots \frac{p}{a_n}\right] = p : [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

где через p обозначено произведение $p = a_1 a_2 \ldots a_n$, а система „дополнительных“ к a_i чисел b_i определяется равенствами

$$b_1 = p : a_1 = a_2 a_3 \ldots a_n$$
$$b_2 = p : a_2 = a_1 a_3 \ldots a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_n = p : a_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.$$

Аналогично,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = p : (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Соотношения

$$(a_1, a_2, \ldots a_n)[b_1, b_2, \ldots, b_n] = p$$

и

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n]\ (b_1, b_2, \ldots, b_n) = p$$

представляют собой обобщение теоремы 4 § 103. В том частном случае, когда $n = 2$, мы имеем $b_1 = a_2$ и $b_2 = a_1$, так что системы чисел a_1, a_2 и b_1, b_2 совпадают. Если оставаться в области целых чисел, то переход от случая $n = 2$ к общему закону образования системы дополнительных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ представляется, поэтому, не совсем тривиальным.

Предлагаем читателю в качестве упражнения построить на этом основании теорию общего наибольшего делителя и наименьшего кратного нескольких чисел, не выходя из области *целых* чисел и не прибегая к индуктивным определениям.

Для случая целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обобщается также следствие страницы 385 § 103, притом следующим образом.

Условие $[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n = p$ требует, чтобы было $(b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1$. Легко видеть, что последнее равенство выражает требование, чтобы числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ были попарно взаимно-простыми, т. е. чтобы при всяких i и $j \neq i$ было

$$(a_i, a_j) = 1. \qquad (1)$$

Действительно, всякий общий делитель *двух* каких-либо из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ будет делить каждое из чисел b_i, так как всякое b_i не содержит лишь *одного* множителя a_i. Обратно, если условия (1) выполнены, то

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n \text{ и } (b_1, b_2, \ldots, b_n) = 1.$$

Доказательство проще всего провести индуктивно. Для $n=2$ это предложение было доказано [стр. 385 и теорема 5 стр. 386]. Допуская, что соотношение

$$[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = p_{n-1}$$

доказано для $n-1$ попарно взаимно-простых сомножителей, найдем

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n] = [p_{n-1}, a_n].$$

Так как (следствие из теоремы 7 § 103) из соотношений

$$(a_1, a_n) = 1, \ (a_2, a_n) = 1, \ \ldots, \ (a_{n-1}, a_n) = 1$$

вытекает, что $(p_{n-1}, a_n) = 1$, то, по сказанному выше относительно наименьшего кратного двух чисел, заключаем, далее, что

$$[p_{n-1}, a_n] = p_{n-1} a_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = p_n,$$

чем утверждение и оправдано.

Не следует смешивать понятий „взаимно-простые *в совокупности*" и „взаимно-простые *попарно*". Так, числа 6, 14, 21 — суть числа взаимно-простые в своей совокупности, но не взаимно-простые попарно; более того, в этой системе нет ни одной пары взаимно-простых чисел.

Нетрудно установить еще следующие формальные свойства скобок ( ) и [ ]:

$$(\alpha, \beta)\ (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\delta, \gamma\delta)$$

и

$$[\alpha, \beta]\ [\gamma, \delta] = [\alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\delta, \gamma\delta].$$

Формулы этого типа имеют место для любого числа аргументов в скобках; результат справа образуется по правилу, аналогичному умножению многочленов. Доказательство проводится последовательно, например, так

$$(\alpha, \beta)\ (\gamma, \delta) = (\alpha(\gamma, \delta), \ \beta(\gamma, \delta)) = ((\alpha\gamma, \alpha\delta), (\beta\gamma, \beta\delta)) = (\alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta).$$

Отметим еще, что для *несократимых* дробей [удовлетворяющих здесь условию $(a_i, c_i) = 1$ при $i = 1, 2, 3, \ldots, n$] имеем

$$\left(\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_2}{a_2}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right) = \frac{(c_1, c_2, \ldots, c_n)}{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}$$

и

$$\left[\frac{c_1}{a_1}, \frac{c_2}{a_2}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right] = \frac{[c_1, c_2, \ldots, c_n]}{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Для доказательства заметим, что, предполагая $(p, q) = 1$ и $(r, s) = 1$ $\left(\text{дроби } \frac{p}{q} \text{ и } \frac{r}{s} \text{ } \textit{несократимы}\right)$, найдем, что делимость $\frac{r}{s}$ на $\frac{p}{q}$, равносильная соотношению

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot n,$$

или

$$rq = sp \cdot n,$$

требует, по теореме 3 § 103, чтобы $r \vdots p$ и $q \vdots s$, так что r должно быть *кратным* p, а s — *делителем* q.

Ограничиваясь поэтому несократимыми дробями, из самого смысла символов $\left(\frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right)$ и $\left[\frac{c_1}{a_1}, \ldots, \frac{c_n}{a_n}\right]$ выводим написанные выше соотношения.

§ 105. Линейные зависимости между числами, связанные с величинами наименьшего кратного и общего наибольшего делителя нескольких чисел.

1. Установим сейчас одно чрезвычайно важное общее свойство чисел d и m, часто являющееся исходным пунктом построения теории делимости.

Теорема. *Общий наибольший делитель d* рациональных (целых или дробных) *чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ может быть* ***линейно выражен*** *через эти числа с* ***целыми*** (положительными или отрицательными) *коэфициентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так что*

$$d = (r_1, r_2, \ldots, r_n) = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n.$$

В силу доказанной выше связи между общим наибольшим делителем и наименьшим кратным отсюда будет следовать, что *обратная величина наименьшего кратного $m = [r_1, r_2, \ldots, r_n]$ линейно выражается через $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \ldots, \frac{1}{r_n}$, так что*

$$\frac{1}{m} = \frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \ldots + \frac{x_n}{r_n}.$$

Доказательство. Заметим предварительно, что всякое число вида

$$x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n \qquad (1)$$

есть, очевидно, *некоторое кратное* числа d.

Докажем, что и обратно, *все числа*, кратные d и только такие числа могут быть представлены в виде (1).

С этой целью рассмотрим *наименьшее* отличное от нуля положительное число δ, которое может быть получено из формулы (1) за счет выбора значений целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\delta = \bar{x}_1 r_1 + \bar{x}_2 r_2 + \ldots + \bar{x}_n r_n.$$

Мы намерены теперь обнаружить, что всякое другое число D того же типа (1)

$$D = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n$$

при *любых* значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ должно быть *кратным* числа δ.

Во исполнение этого намерения разделим D на δ и положим

$$D = \delta q + r, \text{ где } 0 \leqslant r < \delta.$$

Так как разность

$$r = D - \delta q$$

двух чисел D и δq вида (1) есть, очевидно, число того же типа, то r не может быть отлично от нуля, ибо тогда $\delta > r$ не было бы *наименьшим* положительным числом типа (1). Стало быть, $r=0$ и

$$D \vdots \delta.$$

Полагая теперь $x_1=1$, $x_2=x_3=\ldots=0$, далее, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\ldots=x_n=0$ и т. д., мы заключаем отсюда, что каждое из чисел

$$D_1=r_1,\ D_2=r_2,\ \ldots,\ D_n=r_n$$

делится на число δ, т. е. δ есть некоторый *общий делитель* чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, и так как, с другой стороны, $\delta=\bar{x}_1 r_1+\ldots+\bar{x}_n r_n$ делится на *всякий* общий делитель этих чисел, то отсюда следует, что δ и есть общий *наибольший* делитель $D=(r_1, r_2, \ldots, r_n)=\delta$ чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Этим, одновременно с установлением *существования числа*, обладающего свойствами общего наибольшего делителя d, доказано, что

1) *совокупность всех чисел типа* (1)

$$x_1 r_1+x_2 r_2+\ldots+x_n r_n$$

при переменных целых значениях $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *совпадает с совокупностью кратных общего наибольшего делителя* $d=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ положенных в основу чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

2) Число $d=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ *может быть линейно выражено через эти числа* в виде (1), так что

$$d=x_1 r_1+x_2 r_2+\ldots+x_n r_n$$

при некотором выборе $x=\bar{x}_1$, $x_2=\bar{x}_2$, $\ldots$, $x_n=\bar{x}_n$ целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Притом d есть *наименьшее* из всех положительных чисел, которые могут быть линейно выражены через числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$ указанным образом.

При этом очевидно, что фигурирующие в линейном представлении общего наибольшего делителя целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *взаимно-простые в своей совокупности.*

Если тем же свойством обладают и числа $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то соотношение для d обращается в

$$1=x_1 r_1+x_2 r_2+\ldots+x_n r_n,$$

характеризующее свойство системы чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, *взаимно-простых в совокупности.*

2. Доказанная теорема позволяет притти независимо от теорем 1 и 2 § 103 к доказательству основной теоремы о делимости произведения (теорема 3 § 103).

Действительно, пусть $ac \vdots b$ и $(a, b)=1$.

Тогда, по только что сказанному, мы сможем подобрать целые числа x и y так, что

$$xa+yb=1.$$

Умножая это равенство на c, найдем

$$xac + ybc = c.$$

Так как здесь $xac \vdots b$ и $ycb \vdots b$, то отсюда и следует, что

$$c \vdots b.$$

соответственно с текстом теоремы 3.

Отметим еще, что равенство $d = ax + by$ позволяет чисто формальным путем устанавливать и другие свойства общего наибольшего делителя.

Так, замечая, что в вытекающей из этого равенства формуле

$$kd = kax + kby$$

число kd будет, соответственно, наименьшим числом, линейно выражающимся через ka и kb, найдем

$$kd = (ka,\ kb), \text{ или } (ka,\ kb) = k(a,\ b).$$

Далее, если $(a,\ b) = 1$ и $(c,\ b) = 1$, то, перемножая равенства $ax + by = 1$ и $cu + bv = 1$, найдем

$$acz + bw = 1,$$

где z и w — целые числа. Таким образом,

$$(ac, b) = 1,$$

т. е. мы пришли к следствию теоремы 7 (стр. 387), доказанному ранее иным путем.

Так как в доказательстве теоремы настоящего параграфа удается одновременно установить *существование* числа δ, обладающего свойствами общего наибольшего делителя, то эту теорему можно, вообще, положить в основу построения теории делимости, опирающейся на понятие об общем наибольшем делителе двух чисел, а не на понятие о наименьшем кратном. Для той же цели может служить несколько иной метод, к изложению которого мы и переходим.

§ 106. Алгорифм Евклида.

Теорема предыдущего параграфа устанавливает существование общего наибольшего делителя нескольких чисел, оставляя в тени вопрос о методах нахождения этого числа. Мы рассмотрим сейчас классический алгорифм Евклида для нахождения общего наибольшего делителя двух *целых* чисел **методом последовательного деления.** При этом мы будем вести изложение так, чтобы одновременно установить *существование* числа, обладающего свойствами общего наибольшего делителя. Для этой цели рассмотрим следующие леммы.

Лемма 1. *Если α есть делимое, β — делитель и γ — остаток,* так что

$$\alpha = \beta q + \gamma.$$

то из делимости двух каких-либо из чисел α, β, γ на число δ вытекает делимость оставшегося третьего числа на то же число δ.

Доказательство очевидно.

Обозначая, вообще, через $\{a, b\}$ *совокупность* всех общих делителей чисел a и b, мы можем, таким образом, написать

$$\{\alpha, \beta\}=\{\beta, \gamma\}=\{\gamma, \alpha\}.$$

Лемма 2. *Если в условиях предыдущей леммы числа α и β выражаются линейно* ***с целыми коэфициентами*** *через какие-либо числа a и b, то в таком же виде можно представить и остаток γ.*

Для доказательства достаточно заменить в равенстве $\gamma=\alpha-\beta q$ числа α и β их линейными выражениями через a и b и сделать затем приведение подобных членов, выделяя коэфициенты при a и b.

Приступим теперь к нахождению общего наибольшего делителя натуральных чисел a и $b<a$ способом последовательного деления.

Разделив a на b и обозначая остаток через b_1, заключаем на основании леммы 1, что

$$\{a, b\}=\{b, b_1\}.$$

Деля вновь b на b_1 и обозначая остаток через b_2, найдем

$$\{b, b_1\}=\{b_1, b_2\}.$$

Продолжая так далее и замечая, что

$$b>b_1>b_2>\ldots 0,$$

заключаем, что после конечного числа делений мы должны притти к окончанию процесса, что может случиться только при появлении остатка, равного нулю.

Обозначая этот последний через b_{n+1}, мы будем, стало быть, иметь

$$b_{n-1}=b_nq_n+b_{n+1}=b_nq_n$$

и, значит,

$$\{b_{n-1}, b_n\}=\{b_n, 0\}.$$

Так как последняя совокупность есть не что иное, как совокупность всех делителей числа b_n, то из соотношений

$$\{a, b\}=\{b, b_1\}=\ldots=\{b_{n-1}, b_n\}=\{b_n, 0\} \tag{1}$$

вытекает, что совокупность всех общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью всех делителей числа b_n. Последний отличный от нуля остаток b_n является, таким образом, *наибольшим общим делителем чисел a* и b

$$b_n=(a, b),$$

причем одновременно доказано, что *всякий другой общий делитель a и b должен быть делителем числа (a, b).*

Кроме того, мы можем, очевидно, написать

$$(a,\ b)=(b,\ b_1)=\ldots=(b_{n-1},\ b_n)=b_n. \qquad (2)$$

Заметим, что доказательство следует вести, оперируя символом $\{a, b\}$, а не символом (a, b), так как иначе придется заново доказывать только что отмеченное основное свойство числа b_n — делиться на всякий общий делитель чисел a и b.

Применяя последовательно лемму 2, убеждаемся, кроме того, что первый остаток b_1 *линейно выражается* через a и b, стало быть, второй остаток b_2 линейно выражается через те же числа, стало быть, и третий и т. д., вплоть до n-го остатка b_n. Вытекающая отсюда формула

$$d=xa+yb$$

для взаимно-простых чисел a и b превращающаяся в

$$1=xa+yb$$

и позволяет установить теорему 3 § 103 путем, указанным в конце § 105.

В элементарном изложении целесообразней не выделять леммы 1 и 2, а вести рассуждения непосредственно. Свойство общего наибольшего делителя (a, b) выражаться линейно через числа a и b следует все же включить и в элементарное изложение, так как в противном случае доказательство теоремы 3 § 103 приобретает искусственную и притом несколько громоздкую форму.

§ 107. Непрерывные дроби и их простейшие приложения. Решение неопределенных уравнений первой степени.

1. Как известно, алгорифм Евклида служит также и для нахождения *общей меры* двух отрезков a и b. Как в этом случае, так и в рассмотренной задаче нахождения общего наибольшего делителя чисел a и b с помощью этого алгорифма осуществляется *разложение отношения* $a:b$ *в непрерывную дробь.*

Остановимся на этом несколько подробнее, имея в виду сначала случай целых чисел a и b.

Деление a на b с остатком эквивалентно выделению целой части дроби $\frac{a}{b}$. Если $a=bq_0+b_1$, то мы можем написать

$$\frac{a}{b}=q_0+\frac{b_1}{b}.$$

Для того чтобы иметь возможность повторить операцию выделения целой части, перевернем дробь $\frac{b_1}{b}$ и, соответственно с равенством $b=b_1q_1+b_2$, напишем:

$$\frac{b}{b_1}=q_1+\frac{b_2}{b_1},$$

так что $$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{b_2}{b_1}}.$$

Продолжая так далее, найдем:

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Выражение в правой части и носит название **непрерывной** или **цепной** дроби (**Kettenbruch, fraction continue**). Числа q_1, q_2, ..., q_n называются **неполными частными**, а дроби

$$\frac{P_0}{Q_0}=q_0;\quad \frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1};\quad \frac{P_2}{Q_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\ \dots,$$

$$\frac{P_k}{Q_k}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{q_k}}},\ \dots$$

называются **подходящими дробями**.

Мы ограничиваемся здесь рассмотрением непрерывных дробей только указанного частного вида, получающихся из общей формы непрерывной дроби

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots}}$$

в том случае, когда все b_i равны 1, а все a_i — натуральные числа.

Нахождение чисел x и y, с помощью которых общий наибольший делитель (a, b) линейно выражается через a и b, чрезвычайно просто связано с вычислением подходящих дробей.

Для того чтобы установить эту связь, выведем предварительно несколько основных формул, относящихся к подходящим дробям.

При этом под P_k и Q_k мы будем разуметь числитель и знаменатель той дроби $\frac{P_k}{Q_k}$, которая получается путем формального процесса свертывания приведенного выше выражения, зависящего от $q_0, q_1, \dots, q_k$, без производства каких бы то ни было сокращений получаемых этим путем дробей. Мы полагаем, таким образом,

$$P_0=q_0,\quad Q_0=1;\quad P_1=q_0q_1+1.$$

Тогда

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = \frac{P_0 q_1 + 1}{q_1}.$$

Дробь $\frac{P_2}{Q_2}$ получается из $\frac{P_1}{Q_1}$ заменой q_1 на $q_1 + \frac{1}{q_2}$. Производя эту замену, найдем

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_0\left(q_1 + \frac{1}{q_2}\right) + 1}{q_1 + \frac{1}{q_2}} = \frac{(P_0 q_1 + 1) q_2 + P_0}{q_1 q_2 + 1} = \frac{P_1 q_2 + P_0}{Q_1 q_2 + Q_0}.$$

Предполагая, вообще, что

$$\frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k-1} q_k + P_{k-2}}{Q_{k-1} q_k + Q_{k-2}},$$

найдем, заменяя q_k на $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$, что

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + P_{k-2}}{Q_{k-1}\left(q_k + \frac{1}{q_{k+1}}\right) + Q_{k-2}} = \frac{P_k q_k + P_{k-1}}{Q_k q_k + Q_{k-1}},$$

чем и доказаны, начиная с $k = 1$, *формулы*

$$P_{k+1} = P_k q_k + P_{k-1}; \quad Q_{k+1} = Q_k q_k + Q_{k-1} \qquad (1)$$

для числителей и знаменателей подходящих дробей.

Исследуем теперь *разность между двумя смежными подходящими дробями*

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1}}{Q_k Q_{k+1}} =$$

$$= \frac{(P_k q_k + P_{k-1}) Q_k - P_k (Q_k q_k + P_{k-1})}{Q_k Q_{k+1}} = -\frac{P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k}{Q_k Q_{k+1}}.$$

Вытекающее отсюда соотношение

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = -(P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k)$$

показывает, что выражение

$$P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k,$$

не меняя абсолютной величины, меняет лишь знак при переходе от k к $k+1$.

Так как

$$P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = q_0 q_1 + 1 - q_0 q_1 = 1,$$

то отсюда следует, что

$$P_2 Q_1 - P_1 Q_2 = -1, \; P_3 Q_2 - P_2 Q_3 = 1$$

и т. д., *вообще*

$$P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k, \tag{2}$$

так что

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{3}$$

Формула (2) показывает, в частности, что P_k и Q_k — *взаимно-простые числа*, так что *все подходящие дроби несократимы*.

В случае, когда $(a, b) = 1$, из разложения

$$\frac{a}{b} = \frac{P_n}{Q_n}$$

следует, таким образом, $a = P_n$, $b = Q_n$ и тождество

$$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$$

превращается в

$$Q_{n-1} \cdot a - P_{n-1} \cdot b = (-1)^{n-1}.$$

Полагая

$$x = (-1)^{n-1}Q_{n-1}; \quad y = (-1)^nP_{n-1}, \tag{4}$$

мы и приходим, стало быть, к решению уравнения

$$xa + yb = 1.$$

Если $(a, b) = d$, то $a = \alpha d$; $b = \beta d$, где $(\alpha, \beta) = 1$. Из равенств

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{P_n}{Q_n}$$

будет следовать, таким образом,

$$\alpha = P_n \quad \text{и} \quad \beta = Q_n,$$

т. е. числитель и знаменатель последней подходящей дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ как раз и равны взаимно-простым между собой частным от деления a и b на их общего наибольшего делителя d.

Разложение дроби $\frac{a}{b}$ в непрерывную и последующее свертывание полученной дроби по формулам (1), дающее в результате несократимую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$, равную $\frac{a}{b}$, автоматически осуществляет, таким образом, полное *сокращение* первоначальной дроби $\frac{a}{b}$.

Для нахождения общего наибольшего делителя достаточно составить одно из частных $d = a : P_n$ или $d = b : Q_n$. Можно, впрочем, во время производства самого разложения $\frac{a}{b}$ в непрерывную дробь запомнить величину последнего делителя, на который деление совершается нацело. В силу совпадения хода выкладок с алгорифмом Евклида этот последний делитель и есть искомое число $d = (a, b)$.

Заменяя в тождестве

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}$$

числа P_n и Q_n соответственно через $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$, мы найдем, по умножении на d, что числа x и y, определенные по формулам (4), удовлетворяют уравнению

$$ax + by = d. \tag{5}$$

Таким образом, для нахождения пары чисел x и y, с помощью которых *общий наибольший делитель d чисел a и b линейно выражается через эти числа,* достаточно рассмотреть *предпоследнюю подходящую* дробь $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ в разложении дроби $\frac{a}{b}$ в непрерывную *и положить* $x = (-1)^{n-1} Q_{n-1}$; $y = (-1)^n P_{n-1}$.

Пример. Пусть $a = 1073$; $b = 629$.

$$\frac{1073}{629} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{629}{444}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{444}{185}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{185}{74}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{74}{37}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

Последний делитель 37 и есть, согласно сказанному, общий наибольший делитель 1073 и 629. Первые две подходящие дроби суть

$$\frac{1}{1} \text{ и } \frac{2}{1}.$$

Остальные находим по формулам (1).

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \frac{29}{17}.$$

Итак,

$$\frac{1073}{629} = \frac{29}{17}$$

и

$$1073 = 29 \cdot 37 \qquad 629 = 17 \cdot 37.$$

По формулам (4) для $n = 4$ находим

$$x = -7; \ y = 12.$$

Эти числа удовлетворяют уравнению

$$1073x + 629y = 37$$

или

$$29x + 17y = 1.$$

Действительно,

$$17 \cdot 12 - 7 \cdot 29 = 204 - 203 = 1.$$

Заметим еще, что, пользуясь наименьшими по абсолютной величине остатками и соответствующими отрицательными значениями неполных частных, можно иногда уменьшить число последовательных делений и число звеньев непрерывной дроби, сохраняя остальные характерные черты рассматриваемого алгорифма.

2. Как мы видели только что, рассмотрение предпоследней подходящей дроби $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ дает возможность непосредственно указать *одну пару* целых значений x и y, удовлетворяющих неопределенному уравнению:

$$ax+by=d, \quad \text{где} \quad d=(a, b).$$

К этому случаю можно свести общую задачу о решении в *целых* числах **неопределенного уравнения**

$$ax+by=c, \tag{6}$$

т. е. о нахождении *всех пар* целых чисел x и y, удовлетворяющих соотношению (6).

Покажем прежде всего, что для нахождения общего решения уравнения (6) достаточно найти *одну пару* значений x_1, y_1, удовлетворяющих этому уравнению, т. е. одно *частное* решение.

Действительно, если

$$ax_1+by_1=c, \tag{6'}$$

то, вычитая почленно (6') из (6), найдем

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0.$$

Полагая $(a, b)=d$ и подставляя значения $a=\alpha d$, $b=\beta d$ в только что полученное равенство, найдем, по сокращении на d,

$$\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)=0.$$

Так как $(\alpha, \beta)=1$, то, по теореме 3 § 103, мы должны иметь $y-y_1=s\alpha$ и $x-x_1=t\beta$, причем подстановка этих значений в исходное равенство дает $s+t=0$ или $s=-t$, так что

$$\left.\begin{aligned} y&=y_1-t\alpha, \\ x&=x_1+t\beta, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где t — любое целое число.

Формулы (7) и дают общее решение уравнения (6), если известна одна какая-либо пара значений x_1, y_1, удовлетворяющих этому уравнению.

Проведенные здесь рассуждения представляют собой, как легко видеть, не что иное, как доказательство того, что равенство двух дробей

$$\frac{m}{n}=\frac{\alpha}{\beta},$$

из которых вторая — *несократима*, возможно лишь при $m=t\alpha$ и $n=t\beta$, где $t=(m, n)$. В нашем случае $m=y_1-y$, $n=x-x_1$.

Возвращаясь к уравнению (6), перейдем к вопросу о нахождении *одной* пары значений x_1, y_1.

Заменяя вновь a через αd и b через βd, найдем

$$d(\alpha x+\beta y)=c.$$

Отсюда следует, что уравнение (6) может иметь решения только в том случае, когда *c делится на d*. Полагая $c=kd$ и сокращая на d, придем к равенству

$$\alpha x+\beta y=k,$$

где $(\alpha, \beta)=1$.

Задача свелась к разысканию пары чисел x и y, удовлетворяющих равенству

$$\alpha x+\beta y=1,$$

так как, полагая затем $x_1=kx$ и $y_1=ky$, мы удовлетворим уравнению (6).

Для нахождения требуемых значений x и y достаточно, как мы видели, разложить $\frac{\alpha}{\beta}$ в непрерывную дробь и воспользоваться формулами (4) стр. 400.

Можно избежать предварительного разыскания общего наибольшего делителя d чисел a и b, непосредственно *разлагая дробь $\frac{a}{b}$ в непрерывную*. Найдя по тем же формулам (4) пару значений x и y, удовлетворяющих уравнению

$$ax+by=d,$$

делим c на d. Если деление не совершается нацело, то предложенное уравнение *не имеет решений*. Если же $c=kd$, где k — целое, то, полагая $x_1=kx$ и $y_1=ky$, мы найдем одну пару решений уравнения (6), и формулы

$$\left.\begin{aligned} y&=k(-1)^n P_{n-1}-tP_n, \\ x&=k(-1)^n Q_{n-1}+tQ_n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где t — произвольное целое число, дадут нам ***общее решение уравнения*** (6).

Пример. Уравнение

$$1073x+629y=74,$$

согласно приведенным на странице 401 выкладкам, имеет ($k=74:37=2$) частное решение

$$x=-14; \qquad y=24$$

и, стало быть, общее решение есть

$$\begin{aligned} y&=24-29t, \\ x&=-14+17t. \end{aligned}$$

При $t=1$ мы получим $y=-5$; $x=3$. Обращая внимание читателя на связь с предпоследней подходящей дробью $\frac{5}{3}$, мы предоставляем ему, в качестве упражнения: 1) выяснить, насколько это обстоятельство случайно, 2) рассмотреть, в общем случае, *какие именно* частные решения уравнений $ax-by=d$

*

и $bx - ay = d$ получаются путем разложения дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ в непрерывную дробь (т. е. чем эти частные решения выделяются из всех остальных возможных решений).

Излагаемый иногда в элементарных руководствах способ решения неопределенных уравнений первой степени путем последовательной замены переменных совпадает, по существу, с только что изложенным. С другими методами решения того же вопроса мы познакомимся ниже (§ 106 и 107).

3. Помимо только что указанного элементарного применения, непрерывные дроби имеют целый ряд приложений, не ограничивающихся теоретико-числовыми вопросами.

Остановимся еще на разложении в непрерывную дробь положительного числа ω, необязательно рационального, и выясним характер приближений, получаемых при использовании подходящих дробей.

Процесс разложения можно вести в этом более общем случае совершенно так же, как мы это делали для дроби $a : b$.

Именно, представляя сначала ω в виде

$$\omega = q_0 + \theta_0, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \theta_0 < 1,$$

мы полагаем затем

$$\frac{1}{\theta_0} = \omega_1 = q_1 + \theta_1, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \theta_1 < 1,$$

так что

$$\omega = q_0 + \frac{1}{q_1 + \theta_1}.$$

Продолжая так далее, придем к равенству

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_n + \theta_n}}}, \tag{9}$$

где $q_0, q_1, \dots, q_n$ — целые числа, а $0 \leqslant \theta_n < 1$.

В том и только в том случае, когда ω рациональное число, мы придем при достаточно большом n к числу $\theta_n = 0$. Для иррациональных чисел ω процесс может быть неограниченно продолжен. Бесконечная последовательность **неполных частных**

$$q_0, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$$

однозначно определяет в этом случае разложение иррационального числа ω в **бесконечную непрерывную дробь** вида

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots}}. \tag{10}$$

Сходимость процесса мы сейчас установим.

Формулы (1), (2) и (3) для подходящих дробей остаются в силе и для рассматриваемого случая.

Далее, из самого вида правой части равенства (9) вытекает, что

$$\frac{P_0}{Q_0}=q_0\leqslant\omega;\quad \frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}\geq\omega$$

и вообще

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\leqslant\omega\leqslant\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}.$$

Так как, по доказанному, разность между двумя смежными подходящими дробями $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ по абсолютной величине равна $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$, то отсюда следует соотношение

$$\left|\omega-\frac{P_k}{Q_k}\right|\leqslant\frac{1}{Q_k Q_{k+1}},\qquad (11)$$

могущее служить для оценки степени приближения подходящих дробей к числу ω Из формул (1) следует, что дробь $\frac{1}{Q_k Q_{k+1}}$ при возрастании k становится сколь угодно малой (если ω иррационально), так что действительно

$$\lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{Q_k}=\omega.$$

Вообще, сходимость бесконечной непрерывной дроби вида (10) вытекает из самой формы задания предельного процесса при любых целых положительных значениях чисел $q_0, q_1, q_2, \ldots$, как легко может убедиться читатель, рассматривая подходящие дроби четных и нечетных порядков, образующие порознь *монотонные* последовательности (дроби с *четным* индексом *возрастают*, а дроби с *нечетным* индексом *убывают* с возрастанием индекса) и принимая во внимание соотношения (3) и (1).

Из формулы (11) вытекает следующая интересная характеристика степени приближения, достигаемой при применении разложения в непрерывную дробь.

Так как рациональная дробь

$$\frac{p}{q}$$

при

$$q\leqslant Q_k$$

отличается от дроби $\frac{P_k}{Q_k}$ по крайней мере на

$$\frac{1}{qQ_k}\geqslant\frac{1}{Q_k Q_{k+1}},$$

то никакая такая дробь не может лежать внутри интервала

$$\left(\frac{P_k}{Q_k},\ \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right),$$

заключающего число ω.

Так как, сверх того, при $\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ и при

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} \leqslant \frac{p}{q}$$

дробь $\frac{p}{q}$ отличается от $\frac{P_k}{Q_k}$ и, стало быть, от ω *не менее,* чем на $\frac{1}{q\,Q_{k+1}} \geqslant \frac{1}{Q_k\,Q_{k+1}}$, то отсюда следует, что при

$$q \leqslant Q_k$$

всякая дробь $\frac{p}{q}$, как меньшая $\frac{P_k}{Q_k}$, так и бо́льшая $\frac{P_k}{Q_k}$, доставляет *худшее приближение* числа ω, нежели *подходящая дробь* $\frac{P_k}{Q_k}$. То же имеет место и при $\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$.

Таким образом, *приближение* $\frac{P_k}{Q_k}$ *является наилучшим из всех рациональных приближений* $\frac{p}{q}$ числа ω *со знаменателями, не превышающими* Q_k.

Следует заметить, что числа Q_n принимают не все целые значения и при $N \neq Q_n$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ наилучшие приближения со знаменателями, не превышающими N, не совпадают, вообще говоря, с подходящими дробями, хотя и могут быть найдены с помощью этих последних.

Приведем здесь без доказательства значения первых неполных частных в разложении числа π. Эти значения суть $q_0 = 3$; $q_1 = 7$; $q_2 = 15$; $q_3 = 1$; $q_4 = 292$.

Подходящие дроби

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{22}{7};\quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{333}{106},\quad \frac{P_3}{Q_3} = \frac{355}{113}$$

дают известные приближения числа π.

Любопытно отметить, что в Японии, повидимому, еще в середине XVIII века были известны приближения числа π, равные $\frac{P_{11}}{Q_{11}}$ и $\frac{P_{24}}{Q_{24}}$. Так как знаменатель последней дроби есть число порядка 10^{15}, то трудно представить себе, чтобы эти приближения могли быть получены без пользования алгорифмом, эквивалентным разложению в непрерывную дробь.

4. Рассмотрим в заключение естественно возникающий вопрос о том, разложение каких иррациональных чисел приводит к **периодическим** непрерывным дробям.

Совсем нетрудно убедиться, что всякая такая непрерывная дробь представляет собой некоторую **квадратическую иррациональность** вида

$$\omega = \frac{A + \sqrt{D}}{B},$$

где A, B и D — целые числа.

Действительно, пусть мы имеем дело с *чистой периодической дробью* вида (10), у которой последовательность неполных частных представляет собой повторение одного и того же *периода* из n чисел

$$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}.$$

Тогда можно по (9) написать

$$\omega = \frac{P_n \omega + P_{n-1}}{Q_n \omega + Q_{n-1}},$$

так что

$$Q_n \omega^2 + (Q_{n-1} - P_n)\omega - P_{n-1} = 0 \qquad (12)$$

и, стало быть,

$$\omega = \frac{A \pm \sqrt{D}}{B} \qquad (13)$$

где

$$A = P_n - Q_{n-1}, \; B = 2Q_n, \text{ а } D = P_n^2 - 2P_n Q_{n-1} + Q_{n-1}^2 - 4P_{n-1} Q_n.$$

Так как ω действительное и, по доказанному выше, иррациональное число, то D есть положительное число, не являющееся точным квадратом. При этом у $\sqrt{D}$ в формуле (13) надо взять такой знак, чтобы получить для ω положительное число. Действительно, так как, по условию, $q_0 = q_n \geqslant 1$, а ω больше, чем q_0, то

$$\omega > 1.$$

С другой стороны, обозначая через $\bar{\omega}$ второй корень уравнения (12), получающийся из (13) изменением знака у $\sqrt{D}$, из соотношения $\omega\bar{\omega} = -\frac{P_{n-1}}{Q_n} < 0$ находим, что $\bar{\omega} < 0$, чем и оправдывается приведенное замечание о выборе знака при $\sqrt{D}$.

Для дальнейшего существенно заметить, что $|\bar{\omega}| < 1$, так что

$$-1 < \bar{\omega} < 0.$$

Действительно, при $x = 0$ выражение $f(x) = Q_n x^2 + (Q_{n-1} - P_n)x - P_{n-1}$ меньше нуля, а при $x = -1$ находим $f(-1) = Q_n - Q_{n-1} + P_n - P_{n-1} > 0$, а потому между -1 и 0 должен лежать корень уравнения $f(x) = 0$, совпадающий, согласно сказанному, с $\bar{\omega}$.

Перейдем теперь к случаю, когда дробь — *смешанная периодическая*. Обозначая через $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$ неполные частные, стоящие до периода, мы можем написать

$$\omega = \frac{P_k \omega_k + P_{k-1}}{Q_k \omega_k + Q_{k-1}},$$

где ω_k разлагается в чистую периодическую дробь и потому есть выражение типа (15), откуда непосредственно следует, что и ω может быть представлено в том же виде.

Однако установленное нами предложение само по себе не дает еще исчерпывающего ответа на вопрос о связи между периодическими непрерывными дробями и квадратическими иррациональностями, и существо дела заключается в том, что доказанное утверждение допускает *обращение*.

Именно, имеет место следующая основная теорема, играющая важную роль во многих вопросах теории чисел:

Всякая квадратическая иррациональность типа (13) *разлагается в периодическую непрерывную дробь* (смешанную или чистую).

Это предложение было впервые установлено Лагранжем (Lagrange) и носит его имя. Мы приведем здесь доказательство, сохраняющее основные черты доказательства Лагранжа и одновременно дающее ответ на вопрос, какие иррациональности разлагаются в чистые периодические, а какие — в смешанные периодические непрерывные дроби.

Заметим, прежде всего, что *необходимым* условием того, чтобы ω разлагалась в чистую периодическую дробь является выполнение неравенств

$$\omega > 1 \text{ и } -1 < \bar{\omega} < 0,$$

где $\bar{\omega}$ есть *сопряженная* с ω иррациональность, получающаяся изменением знака у $\sqrt{D}$.

Всякая квадратическая иррациональность ω, удовлетворяющая этим двум условиям, называется **приведенной**.

Иррациональность ω_1, получающаяся на первой стадии разложения приведенной иррациональности ω:

$$\omega = q_0 + \frac{1}{\omega_1}$$

в непрерывную дробь и зависящая от $\sqrt{D}$, также будет приведенной. Действительно, $0 < \frac{1}{\omega_1} < 1$ и, следовательно, $\omega_1 > 1$. Далее, $\bar{\omega} = q_0 + \frac{1}{\bar{\omega}_1}$ и условие $-1 < \bar{\omega} < 0$ требует, чтобы было $-1 < \bar{\omega}_1 < 0$.

Существенно отметить еще, что задание приведенной иррациональности ω_1 и требование, чтобы в формуле типа $\omega = a + \frac{1}{\omega_1}$ число a было *целым* и ω—*приведенной*, однозначно определяют как число a, так и иррациональность ω. Для доказательства допустим, что еще $\omega' = b + \frac{1}{\omega_1}$. Вычитая, найдем $\omega - \omega' = a - b$ и, переходя к сопряженным иррациональностям, получим $\bar{\omega} - \bar{\omega}' = a - b$, и так как по допущению $-1 < \bar{\omega} < 0$ и $0 < -\bar{\omega}' < 1$ то $|a-b| < 1$, что возможно только при $a = b$ и $\omega = \omega'$.

Заметим теперь следующее. Пусть

$$\omega=\frac{A+\sqrt{D}}{B}=q_0+\frac{1}{\omega_1}.$$

Определяя, какой вид имеет иррациональность ω_1, мы найдем

$$\omega-q_0=\frac{C+\sqrt{D}}{B}, \text{ где } C=A-Bq_0 \text{ и}$$

$$\omega_1=\frac{1}{\omega-q_0}=\frac{1}{C+\sqrt{D}}=\frac{B(C-\sqrt{D})}{C^2-D}.$$

Стало быть, при C^2-D не делящемся на B, или, что то же, при A^2-D *не делящемся* на B, вид ω_1 отличается от вида ω присутствием в первом множителя $-B$ при $\sqrt{D}$. Для дальнейшего важно это различие устранить, для чего положим $DB^2=$ $=D'$. Тогда

$$\omega=\frac{A'+\sqrt{D'}}{B'}, \text{ где } A'=AB,\ B'=B^2,$$

и

$$\omega_1=\frac{A_1+\sqrt{D'}}{B_1}, \text{ где } A_1=-CB,\ B_1=D-C^2.$$

Новый вид дроби ω характеризуется тем, что для нее

$$A'^2-D'=A^2B^2-B^2D=B^2(A^2-D)$$

уже делится на $B'=B^2$, вследствие чего дробь ω_1, построенная по приведенному выше правилу, будет того же вида, что и ω.

Записанная в форме

$$\frac{A_1+\sqrt{D'}}{B_1}$$

дробь ω_1 обладает тем же свойством делимости A_1^2-D' на B_1.

Действительно,

$$A_1^2-D'=C^2B^2-B^2D=B^2(C^2-D)$$

делится на $B_1=D-C^2$.

Полагая $\omega_1=q_1+\frac{1}{\omega_2}$ и т. д., будем и дальше получать дроби ω_2, ω_3, ..., обладающие теми же свойствами.

Теперь мы можем полученные результаты резюмировать так. При разложении приведенной иррациональности вида

$$\omega=\frac{A'+\sqrt{D'}}{B'}$$

в непрерывную дробь все получаемые по формулам

$$\omega=q_0+\frac{1}{\omega_1},$$
$$\omega_1=q_1+\frac{1}{\omega_2},$$
$$\omega_2=q_2+\frac{1}{\omega_3}, \ldots$$

иррациональности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ **(полные частные)** будут *приведенными иррациональностями того же вида* и каждая из них однозначно определяет все разложение (см. стр. 408).

Докажем теперь—это и является центральным пунктом рассуждений — что среди иррациональностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$ может быть ***лишь конечное число различных.***

Полагая

$$\omega_n=\frac{A+\sqrt{D'}}{B},$$

из условий приведенности получим при $B>0$

$$A+\sqrt{D'}>B,$$
$$-B<A-\sqrt{D'}<0,$$

откуда получим

$$|A|<|\sqrt{D'}|$$

и, следовательно, целое число A, а потому по предыдущим неравенствам и B могут иметь лишь конечное число значений. То же заключение вытекает при $B<0$ из неравенств

$$A+\sqrt{D'}<B,$$
$$-B>A-\sqrt{D'}>0 \text{ или } B<\sqrt{D'}-A<0.$$

Отсюда и следует, что различных приведенных иррациональностей рассматриваемого типа может быть лишь конечное число, а потому в бесконечной последовательности иррациональностей

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$$

мы неизбежно должны встретить повторения.

Так как, по сказанному выше, каждая из иррациональностей ω_n однозначно определяет не только последующую, но и предыдущую, то при $\omega_n=\omega_m$ мы будем иметь также $\omega_{n-1}=\omega_{m-1}$ и, следовательно, *первое повторение* будет иметь место при $\omega_k=\omega$. Отсюда будет вытекать, что $\omega_{k+1}=\omega_1, \omega_{k+2}=\omega_2, \ldots$ и разложение приведенной иррациональности ω в непрерывную дробь будет определяться последовательностью неполных частных

$$q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}, q_k=q_0, q_{k+1}=q_1, \ldots$$

с периодом из чисел $q_0, q_1, \ldots, q_{k-1}$.

Теорема Лагранжа этим доказана для любых *приведенных* иррациональностей.

Нетрудно теперь доказать, что в разложении *любой* квадратической иррациональности мы неизбежно встретим в ряду полных частных $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ приведенную иррациональность ω_s. С этого момента и начнется (при наименьшем значении s), по только что доказанному, периодическое повторение неполных частных.

Для доказательства высказанного утверждения заметим, что все ω_n больше 1, так что остается лишь вопрос о втором условии приведенности $-1<\bar{\omega}_n<0$. Пользуясь легко проверяемыми соотношениями $\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$ и $\overline{\alpha:\beta}=\bar{\alpha}:\bar{\beta}$, найдем:

$$\bar{\omega}=\frac{P_n\bar{\omega}_n+P_{n-1}}{Q_n\bar{\omega}_n+Q_{n-1}},$$

откуда

$$\bar{\omega}_n=-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\,\frac{\bar{\omega}-\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}{\bar{\omega}-\dfrac{P_n}{Q_n}}.$$

При $n\to\infty$ пределы числителя и знаменателя последней дроби равны между собой и равны числу $\bar{\omega}-\omega$. Стало быть, при достаточно большом n [зная разность $\bar{\omega}-\omega$ и пользуясь формулой (11) (стр. 405), легко оценить, начиная с какого n, это будет обеспечено] будем иметь

$$\bar{\omega}_n<0.$$

Кроме того, простые преобразования с использованием соотношения $P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}=(-1)^n$ дают:

$$\bar{\omega}_n+1=\frac{1}{Q_n}\left(Q_n-Q_{n-1}-\frac{(-1)^n}{Q_n(Q_n\bar{\omega}-P_n)}\right),$$

и потому, замечая, что $Q_n>Q_{n-1}$, а последняя дробь в скобках стремится к нулю при $n\to\infty$, найдем, что при достаточно большом n (для которого также легко дать оценку) должно быть

$$\bar{\omega}_n+1>0 \text{ или } -1<\bar{\omega}_n.$$

Наше утверждение, а с ним и теорема Лагранжа доказаны, таким образом, полностью.

Приведем в качестве примера разложение иррациональности $\frac{20-\sqrt{2}}{8}$. Найдем неполные частные 2, 3, 10, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, ... Период 10, 1, 1, 1 соответствует приведенной иррациональности $\omega_3=5+4\sqrt{2}$. Здесь $\bar{\omega}_3=5-4\sqrt{2}>-1$ и <0.

В простейших случаях, когда длина периода мала, значение непрерывной дроби легко находится приемом, который можно пояснить на следующем примере.

Пусть

$$\omega=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

Можно написать

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}}\right),$$

так что

$$\omega=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\omega}},$$

или

$$3\omega^2-6\omega-2=0,$$

откуда

$$\omega=\frac{3+\sqrt{15}}{3}.$$

Идя обратным путем, легко иногда получить выражение для одного из корней заданного квадратного уравнения в виде непрерывной дроби.

Так, например, переписывая уравнение

$$\tau^2-\tau-1=0$$

в виде

$$\tau=1+\frac{1}{\tau}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\tau}}=\ldots,$$

мы придем, производя процесс *итерации* (см. стр. 191, § 57, п° 2), к разложению

$$\tau=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Проверкой убеждаемся, как и выше, что найденная дробь действительно выражает число $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Числители и знаменатели подходящих дробей образуют здесь так называемый ряд Фибоначчи (Fibonacci)

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots,$$

в котором каждый член в соответствии с формулами (1) (стр. 399) есть *сумма двух предыдущих*. Подходящие дроби

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \ldots$$

представляют наилучшие последовательные приближения к числу $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и могут быть использованы для приближенного осуществления „*золотого сечения*“ (деления в отношении $\tau:1$)

§ 108. Разложение на первоначальные множители.

Перейдем теперь к вопросу о разложении натуральных чисел на простые множители.

Число p называется **простым** (иногда „абсолютно простым“ или „первоначальным“) числом, если оно имеет *два и только два различных делителя* — самого себя и единицу.

Число 1, таким образом, не причисляется к категории простых чисел.

В силу приведенного определения простое число будет взаимно-простым со всяким не делящимся на него числом.

Из теоремы 3 § 103 следует, поэтому

Теорема 1. *Если произведение ab делится на простое число p и один из сомножителей, например a, на p не делится, то другой сомножитель, b, должен делиться на p.*

Рассмотрим теперь какое-либо целое число n. Возможны два случая: либо n есть простое число, либо n — **составное**, т. е. имеет отличный от 1 и n делитель n_1, так что

$$n=n_1\cdot n_2, \tag{1}$$

причем

$$1<n_1<n \text{ и } 1<n_2<n. \tag{2}$$

Так как такая же альтернатива имеет место по отношению к числам n_1 и n_2, то, продолжая так далее и замечая, что в силу неравенств (2) процесс не может продолжаться неограниченно, мы придем таким путем к разложению числа n на простые множители

$$n=p_1p_2\ldots p_k, \tag{3}$$

где все числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа, причем некоторые из них могут оказаться равными между собой.

Для того чтобы в вопросах мультипликативной природы числа n можно было опираться на разложение (3) как на исчерпывающую характеристику структуры числа n, нужно еще доказать *однозначность* разложения числа n на простые множители.

Это предложение играет в вопросах мультипликативной структуры натуральных чисел фундаментальную роль. Доказательство его основано на теореме 3 § 103.

Теорема 2. *Всякое натуральное число однозначно может быть представлено в виде произведения степеней простых чисел.*

Другими словами, утверждается, что равенство

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_s^{k_s}=q_1^{l_1}q_2^{l_2}\ldots q_r^{l_r},$$

где p_i и q_i — простые числа, причем в каждой из систем чисел p_i и q_i нет равных между собой чисел ($p_i\neq p_j$ при $i\neq j$, $q_i\neq q_j$ при $i\neq j$) возможно только в том случае, когда

$$s=r$$

и система чисел $q_1^{l_1}, q_2^{l_2}, \ldots, q_r^{l_r}$ отличается от системы чисел $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \ldots, p_s^{k_s}$ разве только *порядком*, так что для всякого p_i найдется равное ему q_j, причем $k_i=l_j$ и, обратно, для всякого q_j найдется равное ему p_i, входящее в разложение с тем же показателем степени.

Для доказательства предположим, не вводя показателей степеней, но зато допуская равные среди чисел p_i и q_j, что

$$n=p_1p_2\ldots p_k=q_1q_2\ldots q_l, \tag{4}$$

где p_i и q_j — простые числа.

По следствию из теоремы 7 § 103 (стр. 387) произведение чисел, взаимно-простых с данным числом p_1, есть число, взаимно-простое с p_1. Стало быть, по теореме 1 настоящего параграфа, если бы ни одно из чисел q_j не было равно простому числу p_1, то произведение $q_1q_2\ldots q_l$ не делилось бы, вопреки равенству (4), на p_1. Изменяя нумерацию чисел q_i, что существенной роли не играет, положим, что

$$p_1=q_1.$$

Тогда из (4) следует

$$p_2p_3\ldots p_k=q_2q_3\ldots q_l.$$

Применяя вновь то же рассуждение и полагая

$$p_2=q_2,$$

найдем

$$p_3p_4\ldots p_k=q_3q_4\ldots q_l.$$

Когда мы дойдем таким образом до числа p_k, одновременно должно оказаться исчерпанным и произведение $q_1q_2\ldots q_l$. Стало быть,

$$l=k$$

и произведения $p_1p_2\ldots p_k$ и $q_1q_2\ldots q_l$ отличаются лишь порядком сомножителей.

Практически задача о разложении чисел на множители в простейших случаях решается с помощью применения признаков делимости (см. ниже) и последовательных испытаний делимости числа n на простые числа, не превышающие $\sqrt{n}$. Для больших значений n задача представляет значительные практические трудности. Для чисел в пределах первых девяти миллионов существуют таблицы простых чисел и делителей составных [Бурхардт (Burckhardt), Глэзер (Glaisher) и Дазе (Dase)], весьма упрощающие задачу, трудность которой заключается в отыскании делителей, а не в производстве самого действия. Исследования Эйлера, Гаусса, Чебышева и др. позволяют значительно сокращать число необходимых испытаний путем применения теорем, устанавливающих те или иные ограничения, налагающиеся на возможные делители данного числа. Числа, не удовлетворяющие этим ограничениям, таким образом, исключаются из испытания. Однако и с этими упрощениями нахождение делителей большого числа или установление того, что данное число есть простое, может потребовать значительных вычислений.

Из доказанной теоремы обычным путем выводятся следствия, относящиеся к составу общего наибольшего делителя и наименьшего кратного двух или нескольких чисел. Вообще, все вопросы, относящиеся лишь к *мультипликативной* структуре чисел, вытекают из формул, однозначно представляющих каждое число в виде произведения степеней простых чисел.

Иначе обстоит дело, если мы будем рассматривать вопросы, затрагивающие *одновременно мультипликативную и аддитивную* сторону дела. Так, например, знание того, как разлагается на множители каждое слагаемое суммы, в общем случае позволяет сделать лишь весьма скудные заключения о разложении на множители самой суммы. Вообще, простейшие вопросы такого комплексного типа принадлежат к числу труднейших проблем теории чисел (ср. стр. 381).

В § 110 мы займемся некоторыми следствиями из теоремы 2, задержавшись еще некоторое время на рассмотрении *простых чисел.*

§ 109. О простых числах.

1. Теорема. *Простые числа образуют бесконечное множество.*

Приведем доказательство этого предложения, принадлежащее Евклиду.

Рассмотрим множество первых n простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и составим произведение

$$P = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Число

$$P + 1 = p_1 p_2 \ldots p_n + 1,$$

очевидно, не может делиться ни на одно из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Стало быть, $P+1$ либо *простое число*, либо делится на простое число, *отличное* от каждого из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Так как $P+1$ также больше каждого из этих чисел, то отсюда вытекает, что при любом n среди чисел

$$p_n+1,\ p_n+2,\ \ldots,\ P+1$$

наверно встретится *по крайней мере одно* простое число p, *отличное от* $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Множество простых чисел, таким образом, бесконечно.

В интервале $(p_n+1,\ P+1)$ фактически будет заключаться при большом n не одно, а много простых чисел, в том числе и следующее за p_n простое число p_{n+1}. Верхний предел

$$p_1 p_2 \ldots p_n+1$$

для числа p_{n+1} оказывается при этом взятым с большим запасом. Для имевшейся в виду цели это роли не играет, снижение же указанного предела требует применения уже значительно более тонкого анализа.

Выделение простых чисел в натуральном ряду

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

осуществляется с помощью следующего регулярного процесса вычеркивания составных чисел, известного под названием **решета (cribrum) Эратосфена.**

Единица, по определению (см. стр. 413), не есть простое число и потому вычеркивается.

Первое следующее за единицей в натуральном ряду число 2 не может иметь делителей, отличных от 1 и 2, и потому есть простое число.

Будем теперь вычеркивать в ряду натуральных чисел, больших двойки, каждое второе число. Этим будут, очевидно, вычеркнуты все составные числа, имеющие делитель 2. Следовательно, первое невычеркнутое число, 3, не может иметь делителей, отличных от 1 и самого себя, и потому есть простое число.

Таким образом, найдены первые два простых числа 2 и 3.

Вычеркнем теперь в ряду натуральных чисел, бо́льших, чем 3, каждое третье число (считая при этом *все* натуральные числа, бо́льшие 3, включая и вычеркнутые раньше). Оставшиеся после обоих вычеркиваний числа не могут иметь делителей 2 и 3, и потому *первое из невычеркнутых еще чисел* (равное, как оказывается, пяти) должно быть простым. При этом, в соответствии с установленным выше верхним пределом $p_1 p_2 \ldots p_n+1$ для числа p_{n+1}, оба процесса вычеркивания достаточно было довести до числа $2 \cdot 3+1=7$.

Продолжая этот процесс далее, можно получить последовательно одно за другим все простые числа в их натуральном порядке

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \ldots$$

Метод „решета Эратосфена" для получения $(n+1)$-го простого числа p_{n+1}, после того, как уже найдены $2, 3, \ldots, p_n$, состоит, таким образом, в следующем.

Вычеркивают в ряду натуральных чисел, начиная с числа p_n+1 и кончая числом $p_1 p_2 \ldots p_n+1$ каждое p_n-е натуральное число и ищут затем первое число, оставшееся нетронутым как при последнем вычеркивании, так и при всех предыдущих, также доведенных до числа $p_1 p_2 \ldots p_n+1$. Это число s не может, будучи вычеркнутым. иметь делителей, равных $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Оно не может также делиться и ни на одно из предшествующих ему вычеркнутых чисел, так как тогда оно делилось бы и на одно из чисел p_i, при $i \leqslant n$. Стало быть, s есть *простое число* и притом, по построению, *первое* из числа следующих за p_n, так что можно положить

$$s = p_{n+1}.$$

Доказательство теоремы в n°1 настоящего параграфа обеспечивает при этом утверждение о том, что число $s=p_{n+1}$ действительно найдется в указанных пределах (от p_n+1 до $p_1 p_2 \ldots p_n+1$).

Если вместо непосредственного вычеркивания построить, (следуя Шредеру) таблицу с двойным входом, в которой наличие у числа n, нумерующего столбец, делителя d отмечается точкой на пересечении n-го столбца и d-й строки, то мы получим графическое изображение всех соотношений делимости одного целого числа на другое, в котором простые числа соответствуют столбцам, отмеченным лишь двумя точками. Начальную часть такой таблицы мы здесь воспроизводим (черт. 47).

В такой таблице алгебраическим тождествам, осуществляющимся в системе целых чисел, соответствуют повторяющиеся геометрические конфигурации точек. Так, тождеству

$$n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$$

соответствуют треугольники, вершины которых отвечают делителям $n+1$ и $n-1$ числа n^2-1 и делителю n числа n^2.

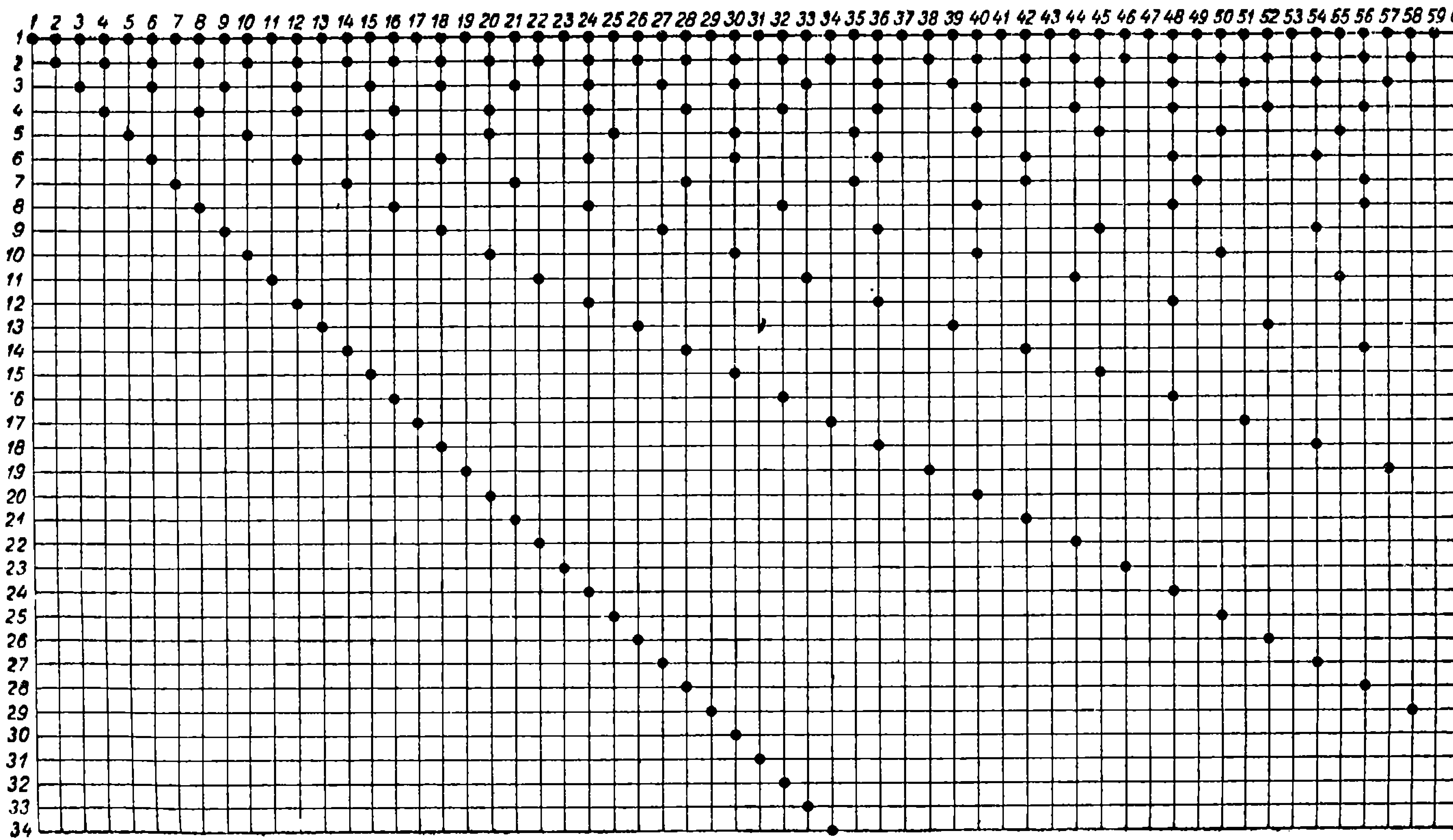
2. Непосредственное определение того, является ли данное число простым или составным, сводится к испытанию делимости числа n на числа, не превышающие $\sqrt{n}$. Признаки делимости и ряд теорем теории чисел значительно сокращают число испытаний, которое все же для больших чисел, как мы уже отмечали выше, требует значительных вычислений.

Приведем здесь в виде примера следующее предложение.

Теорема. *Нечетное число n является простым в том и только в том случае, если оно только одним способом может быть представлено в виде разности квадратов двух неотрицательных чисел.*

Действительно, формула

$$n = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$



Черт. 47.

требует, чтобы $x+y$ и $x-y$ были делителями числа n. Если n простое, то это возможно лишь для

$$x+y=n;\quad x-y=1,$$

так что

$$x=\frac{n+1}{2};\quad y=\frac{n-1}{2}.$$

Если же n есть составное число, так что $n=a\cdot b$, где $a>b$, то можно положить еще $x+y=a$, $x-y=b$ и

$$x=\frac{a+b}{2};\qquad y=\frac{a-b}{2}.$$

На основании этой теоремы можно вместо испытания делителей числа n воспользоваться таблицей квадратов и, прибавляя последовательно к числу n квадраты y^2 целых чисел, по той же таблице проверять, получится ли в сумме при $y<\frac{n-1}{2}$ квадрат или нет.

Мы предоставляем читателю доказать, исходя из тождества

$$(Aa^2+B\beta^2)(A\alpha^2+Bb^2)=(Aa\alpha\pm Bb\beta)^2+AB(a\beta\mp b\alpha)^2,$$

аналогичную более общую теорему, принадлежащую Эйлеру, о том, что простое число p не может допускать *двух различных* разложений

$$p=Aa^2+Bb^2 \text{ и } p=A\alpha^2+B\beta^2$$

с одними и теми же положительными целыми *коэфициентами* A и B при квадратах целых чисел a, b и α, β.

В тех случаях, когда быстро удается найти два различных разложения указанного типа, вопрос этим разрешается непосредственно.

Так, тождество

$$p^4+4=(p^2)^2+2^2=(p^2-2)^2+(2p)^2$$

доказывает, что все числа вида p^4+4, кроме 5, суть числа составные [теорема Софии Жермен (Sophie Germain)]. Тот же результат вытекает, впрочем, из алгебраического разложения:

$$p^4+4=(p^2+2p+2)(p^2-2p+2).$$

Иногда подобного рода алгебраические приемы быстро приводят к цели в случаях, представляющих для чисто арифметических методов значительные трудности. Так, например, с большим трудом добытое разложение

$$2^{58}+1=5\cdot 107367629\cdot 536903681$$

оказалось впоследствии частным случаем простого алгебраического тождества

$$2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1).$$

Множитель 5 здесь выделяется, очевидно, сразу.

3. На естественно возникающий вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду нет возможности дать с помощью элементарных средств такой ответ, который позволил бы решать хотя бы даже самые простые относящиеся сюда проблемы теории чисел.

В частности, все попытки зафиксировать закон распределения простых чисел с помощью элементарных функций оканчивались неудачей, и на этом пути вряд ли можно рассчитывать на успех в деле решения задач, связанных с простыми числами. Более того, потерпели неудачу и попытки Ферма и других математиков строить выражения, зависящие от целого числа n и дающие при всяком значении n хоть и не все под ряд, но зато исключительно лишь простые числа.

Так, совсем уже нетрудно показать, следуя Эйлеру, что *никакая целая функция*

$$f(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_n$$

не может принимать значения, равные простым числам при всех без исключения значениях целого числа n.

Для доказательства допустим, что $f(n_1) > 1$ и положим $n = n_1 + h$. Мы найдем

$$f(n) = f(n_1) + hA,$$

где A — целое число, представленное здесь в форме полинома относительно h, не обращающегося тождественно в нуль. За счет выбора целого коэфициента k можно, следовательно, полагая

$$h = kf(n_1),$$

добиться того, чтобы было

$$f(n) = f(n_1)(1 + hA)$$

и

$$|1 + hA| \neq 1.$$

Число $f(n)$, разлагающееся на два множителя, отличные от 1, окажется, следовательно, не простым, а составным числом.

Так, например, для полиномов, указанных в поисках общей формулы Эйлером, именно $n^2 + n + 17$, $2n^2 + 29$, $n^2 + n + 41$, сразу ясно, что они могут соответственно давать простые числа под ряд не более чем при 17, 29 и 41 значениях n.

Но и для функций, содержащих n в показателе, не удается исключить возможность появления составных чисел.

Так, предположение Ферма о том, что все числа вида

$$2^{2^n} + 1$$

суть простые числа, опровергается примером Эйлера, который показал, что число

$$2^{2^5} + 1 = 4\,296\,961\,297$$

делится на 641, давая в частном 6 700 417 (простое число).

До сих пор остается недоказанным даже и более слабое весьма вероятное предположение Эйзенштейна (Eisenstein) о том, что выражение $2^{2^n}+1$ дает бесчисленное количество простых чисел, так же как и высказанное в форме поправки к ложному утверждению Ферма предположение о том, что все числа ряда

$$2+1,\ 2^2+1,\ 2^{2^2}+1,\ 2^{2^{2^2}}+1, \ldots$$

суть числа простые.

4. Остаются неразрешенными и упомянутые (см. стр. 382) проблема „близнецов“ и проблема Гольдбаха, несмотря на то, что изучение таблиц и целый ряд других соображений почти не оставляют сомнений в том, что ответ должен быть утвердительным.

Подобного рода обстоятельства привели к поискам иных средств выяснить характер распределения простых чисел в натуральном ряду. Рассматривают сначала вопрос в известном смысле со статистической точки зрения, т. е., оценивают число простых чисел и иные, связанные с теоретико-числовыми проблемами функции для больших начальных отрезков натурального ряда от 1 до n с тем, чтобы эта оценка становилась бы (в процентном отношении) все точнее и точнее с возрастанием числа n. Для установления подобного рода *асимптотических формул* в этом отделе так называемой **аналитической теории чисел** широко пользуются наиболее мощными средствами современного анализа.

На этом пути давно уже (в строгой постановке вопроса впервые русским математиком Чебышевым) была установлена связь функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел в интервале от 0 до x, с функцией $\frac{x}{\ln x}$ и с так называемым интегральным логарифмом или отличающейся от последнего постоянным слагаемым функцией

$$\int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

В последнее время усилия направлены на уточнение оценки погрешности в соответствующих асимптотических формулах

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$$

и

$$\pi(x) \approx \int_2^x \frac{du}{\ln u},$$

точный смысл которых заключается в том, что

$$\lim_{x \to \infty} \left(\pi(x) : \frac{x}{\ln x}\right) = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\pi(x) : \int_2^x \frac{du}{\ln u}\right) = 1.$$

Один из последних результатов в этом направлении, добытый советским математиком Н. Г. Чудаковым, гласит, что разность между $\pi(x)$ и $\int\limits_2^x \frac{du}{\ln u}$ есть величина порядка

$$x e^{-\alpha(\ln x)^{\rho}},$$

где α — положительное число, а $\rho > \frac{1}{2}$.

Читателя, интересующегося подробностями, касающимися методов и результатов аналитической теории чисел, мы отсылаем к книжке Ингама (Ingham) „Распределение простых чисел".

5. Отметим здесь еще несколько теорем, доказательство которых представляло в свое время значительные трудности и было также достигнуто с помощью аналитических средств.

I. *Во всякой арифметической прогрессии, первый член и разность которой взаимно-простые числа, заключено бесчисленное множество простых чисел.*

Для простейших случаев эта теорема, высказанная и доказанная впервые Дирихле (Dirichlet), допускает элементарное доказательство (см. Радемахер и Теплиц, „Числа и фигуры").

II. *Между a и $a \cdot k$ при всяком фиксированном $k > 1$, начиная с достаточно больших значений a, наверное заключается простое число.*

Частный случай этого предложения, а именно утверждение о том, что между a и $2a-2$ при $a>3$ заключается по крайней мере одно простое число, первоначально получил название „*постулата* Бертрана (Bertrand)". Доказательство впервые было дано Чебышевым сравнительно элементарным методом.

III. *Всякое нечетное натуральное число, начиная с некоторого, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел.*

Эта теорема, доказанная в 1937 г. академиком И. М. Виноградовым, решает проблему, поставленную в 1742 году Гольдбахом (Goldbach) для нечетных чисел, а для четных устанавливает возможность разложения их на сумму четырех простых чисел.

6. Приведем в заключение для более конкретной иллюстрации привлечения аналитических средств к задачам теории чисел один совершенно элементарный пример, в котором мы зато сможем провести все рассуждения до конца.

Напомним сначала, что ряд

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots$$

сходится при $s>1$ и расходится при $s=1$, обращаясь в этом случае в расходящийся гармонический ряд

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Утверждение о сходимости ряда обратных величин квадратов целых чисел

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

можно рассматривать как некоторую суммарную характеристику распределения полных квадратов в ряду натуральных чисел. Позволяя себе выражаться несколько вольно, можно сказать, что ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ сходится *потому*, что квадраты встречаются сравнительно редко в натуральном ряду.

Попытаемся выяснить, что можно сказать в этом смысле о суммарной характеристике частоты распределения простых чисел в натуральном ряду, т. е., что можно сказать о *сходимости* ряда обратных величин простых чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots$$

Предположим, что этот ряд сходится (включая сюда гипотетически и тот случай, когда он содержит лишь конечное число членов). Так как остаток сходящегося ряда стремится к нулю, то в указанном предположении можно будет указать такой индекс m, что остаток

$$q=\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{p_{m+1}}+\frac{1}{p_{m+2}}+\ldots$$

будет представлять собой число, *меньшее единицы*.

Примем это число за знаменатель сходящейся (бесконечно убывающей) геометрической прогрессии с суммой

$$s=\sum_{k=0}^{\infty}q^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_{m+1}}+\frac{1}{p_{m+2}}+\ldots\right)^k.$$

Всякое число N, взаимно-простое с произведением $P=p_1p_2\ldots p_m$, разлагается (§ 108) на простые множители, содержащиеся в знаменателях дробей, образующих сумму q. Полагая

$$N=p_i^{\alpha_i}p_j^{\alpha_j}\ldots p_r^{\alpha_r},$$

где сумма показателей

$$\alpha_i+\alpha_j+\ldots+\alpha_r=\nu,$$

найдем, что в развернутом выражении слагаемого q^ν суммы s

$$\left(\frac{1}{p_{m+1}}+\frac{1}{p_{m+2}}+\ldots\right)^\nu$$

во всяком случае встретится и число

$$\frac{1}{p_i^{a_i} p_j^{a_j} \ldots p_r^{a_r}} = \frac{1}{N}.$$

Стало быть, сумма s содержит обратные величины всех чисел N, взаимно-простых с числом P, а потому, в частности, содержит все числа типа $\frac{1}{nP-1}$, где $n=1, 2, 3, \ldots$, так как разность $nP-1$ будет взаимно-простой с P при любом n. Поэтому

$$s > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nP-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nP} = \frac{1}{P} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Так как, однако, гармонический ряд расходится (стр. 279), то полученное неравенство противоречит утверждению о конечности суммы s и, стало быть, *ряд обратных величин простых чисел*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

есть ряд расходящийся.

Попутно этим доказана и *бесконечность числа* простых чисел.

В указанном выше смысле слова мы можем сказать, что суммарная частота простых чисел в натуральном ряду выше, нежели полных квадратов.

Отметим здесь еще без доказательства, что ряд обратных величин близнецов

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \quad \frac{1}{19} + \frac{1}{29} \quad \frac{1}{31} \quad \cdots$$

сходится. Это значит, что близнецов либо конечное число, либо они расположены сравнительно редко (в том же суммарном смысле слова).

Заметим, что приведенное выше косвенное доказательство бесконечности числа простых чисел не дает возможности непосредственно оценить верхний предел следующего за p_n простого числа, как это имеет место для доказательства Евклида (стр. 416).

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, позволяют установить тождество

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

где бесконечное произведение слева распространяется на все *простые* числа, а суммирование справа производится по всем *натуральным* числам.

Это тождество, впервые рассматривавшееся Эйлером, является основным в аналитической теории чисел, главная задача которой — исследование распределения простых чисел - казывается, таким образом, тесно связанной с изучением введенной Риманом (Riemann) функции комплексного переменного $\zeta(s)$, выражаемой рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ при тех значениях s, для которых он сходится.

§ 110. Следствия теоремы о разложении на простые множители Числовые функции $[x]$ и $\varphi(x)$.

1. Выведем несколько элементарных следствий из формулы

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_m^{k_m}.$$

Замечая, что все делители числа n исчерпываются числами вида

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m},$$

где $0\leqslant\alpha_1\leqslant k_1\dots,\ 0\leqslant\alpha_m\leqslant k_m$, мы заключаем, что по раскрытии скобок каждое слагаемое выражения

$$(1+p_1+\dots+p_1^{k_1})(1+p_2+\dots p_2^{k_2})\dots(1+p_m+\dots p_m^{k_m})$$

будет делителем числа n, причем, обратно, каждый делитель будет представлен одним и только одним слагаемым указанной суммы.

Отсюда следует, что **сумма** $s(n)$ **делителей числа** n равна

$$s(n)=\frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{k_2+1}-1}{p_2-1}\dots\frac{p_m^{k_m+1}-1}{p_m-1},$$

а **число** $\nu(n)$ различных **делителей** (включая 1 и само число n) равно

$$\nu(n)=(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_m+1).$$

Выражения $s(n)$ и $\nu(n)$ представляют простейший пример *числовых функций.*

Числовые функции характеризуются тем, что их аргумент или значение самой функции или и то и другое пробегают — по самому определению — лишь *целые значения.*

Отметим еще числовые функции $[x]$ или $E(x)$ - „антье“ (entier) от x или „целая часть x“ и связанную с ней функцию $\{x\}$ (дробная часть x). Согласно определению, мы полагаем

$$[x]=n,$$

если целое число n выбрано так, что

$$n\leqslant x<n+1$$

и

$$\{x\}=x-[x],$$

так что всегда

$$x=[x]+\{x\}.$$

Функция $E(x)=[x]$ принимает лишь целые значения и разрывна в каждой целочисленной точке.

В приложениях иногда приходится пользоваться верным для всяких трех натуральных чисел n, a и b тождеством

$$\left[\left[\frac{n}{a}\right]:b\right]=\left[\frac{n}{ab}\right].$$

Для доказательства достаточно заметить, что из формулы

$$n=\left[\frac{n}{ab}\right]ab+\gamma, \text{ где } 0\leqslant\gamma<ab,$$

по самому определению функции [ ], следует

$$\left[\frac{n}{a}\right]=\left[\frac{n}{ab}\right]b+\left[\frac{\gamma}{a}\right]$$

и, далее,

$$\left[\left[\frac{n}{a}\right]:b\right]=\left[\frac{n}{ab}\right]+\left[\left[\frac{\gamma}{a}\right]:b\right].$$

Но так как

$$\left[\frac{\gamma}{a}\right]<\frac{ab}{a}=b,$$

то

$$\left[\left[\frac{\gamma}{a}\right]:b\right]=0,$$

так что, действительно

$$\left[\left[\frac{n}{a}\right]:b\right]=\left[\frac{n}{ab}\right].$$

В качестве примера применения функции $[x]$ найдем выражение для показателя степени, с которым простое число p входит в разложение на простые множители числа

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\ldots n.$$

Числа, делящиеся на p в ряду 1, 2, ..., n, суть, очевидно,

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{p}\right]\cdot p.$$

При этом

$$p\cdot 2p\cdot 3p\ldots\left[\frac{n}{p}\right]p=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\left[\frac{n}{p}\right].$$

Остается, таким образом, определить показатель степени, с которым числом p входит в произведение

$$\left[\frac{n}{p}\right]!=1\cdot 2\cdot 3\ldots\left[\frac{n}{p}\right].$$

Используя доказанное только что свойство символа [ ], найдем, что число сомножителей, делящихся на p, в этом произведении равно

$$\left[\left[\frac{n}{p}\right]:p\right]=\left[\frac{n}{p^2}\right].$$

Продолжая так далее до тех пор, пока не придем к соотношению

$$\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]=0,$$

мы найдем, что искомый показатель степени равен

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

На практике вычисление лучше вести по формулам $\left[\frac{n}{p^k}\right]=$ $=\left[\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]:p\right]$ с помощью последовательных делений на p.

В виде упражнения предоставляем читателю, основываясь на полученном результате, доказать арифметическим путем делимость числа $m!$ на произведение $\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_k!$ где $\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_k=m$. Частное, как известно, есть коэфициент в разложении $(x_1+x_2+$ $+\ldots+x_m)^m$ по степеням x-ов, т. е., должно быть целым числом.

2. Рассмотрим еще один важный для дальнейшего пример приложения функции $[x]$.

Обозначим через

$$\varphi(x, n)$$

общее число натуральных чисел, взаимно простых с

$$n=p_1\,p_2\,\ldots\,p_m \quad (p_i\neq p_j \text{ при } i\neq j)$$

и заключающихся в интервале

$$(0,\ x).$$

Попытаемся установить зависимость числа $\varphi(x, n)$ от $p_1,\ p_2,\ldots,p_m$ и x.

С этой целью, следуя схеме эратосфенова решета, вычеркнем в ряду чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ [x]$$

все числа, делящиеся на p_i. Таких чисел будет, очевидно,

$$\left[\frac{x}{p_i}\right].$$

Произведя это вычеркивание для $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m$, мы могли бы считать, что число чисел взаимно-простых с n есть

$$[x]-\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{x}{p_i}\right],$$

если бы системы чисел, вычеркнутых при различных значениях индекса i, не имели бы общих элементов. Но такие общие элементы имеются — это числа, делящиеся одновременно на p_i и p_j

при $i \neq j$. Все такие числа вычеркнуты *не по одному разу*, и потому приведенный выше подсчет нуждается в соответствующей поправке.

Составляя все произведения чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ по два, соответственно сочетаниям

$$p_1p_2,\ p_1p_3,\ \ldots,\ p_{m-1}p_m, \tag{1}$$

мы найдем, что чисел, делящихся на *два* какие-либо из простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$, т. е. *делящихся на одно из произведений* (1) в том же ряду 1, 2, 3, .., $[x]$, должно было бы быть

$$\sum_{i,j}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right],$$

если бы при этом в этой системе подсчета мы не учитывали несколько раз чисел, делящихся одновременно на *три* какихлибо числа p_i, p_j, p_k.

Таким образом, в выражении

$$[x]-\sum_{i}\left[\frac{x}{p_i}\right]+\sum_{i,j}\left[\frac{x}{p_ip_j}\right]$$

правильно учтены лишь числа, делящиеся на одно и только одно и делящиеся на два и только на два из этих простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Продолжая рассуждение далее, легко обнаружить, что искомое число $\varphi(x, n)$ равно

$$[x]-\sum\left[\frac{x}{p_i}\right]+\sum\left[\frac{x}{p_ip_j}\right]-\sum\left[\frac{x}{p_ip_jp_k}\right]+\ldots+(-1)^m\left[\frac{x}{p_1p_2\ldots p_m}\right], \tag{2}$$

где суммы распространены на все сочетания чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$ по одному, по два и т. д.

Действительно, всякое число, делящееся ровно на k какихлибо из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_m$, будет учтено в рассматриваемом выражении

$$1-C_k^1+C_k^2-C_k^3+\ldots+(-1)^kC_k^k=(1-1)^k=0$$

раз, т. е. будет *вычеркнуто* из системы чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ [x].$$

Числа же взаимно-простые с n учитываются по одному разу в первом слагаемом $[x]$, не участвуя никак в образовании остальных. Обозначая через d переменное число, пробегающее совокупность всех делителей числа $n=p_1p_2\ldots p_m$, и полагая еще $\varepsilon_d=+1$, если d содержит четное и $\varepsilon_d=-1$, если d содержит нечетное число простых множителей ($\varepsilon_1 = +1$), мы можем найденную формулу записать кратко так

$$\varphi(x, n) = \sum_{d/n} \varepsilon_d \left[\frac{x}{d}\right], \tag{3}$$

где сумма распространяется на все делители числа n.

В том случае, если n есть число вида

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$$

рассуждение не меняется и то же выражение (2) можно записать так

$$\varphi(x, n) = \sum_{d/n} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right], \tag{4}$$

где $\mu(d)$ есть так называемая функция Мёбиуса (Möbius), имеющая значение нуль, если d делится на квадрат какого-нибудь простого числа, и, если это не имеет места, значение $+1$, если разлагается на четное, и -1, если на нечетное число простых множителей. $\mu(1)$ также полагается равным $+1$.

3. Для частного случая, когда x совпадает с целым числом $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ мы приходим к функции $\varphi(n, n)$, обозначаемой, согласно Гауссу, знаком

$$\varphi(n)$$

и выражающей **число чисел, не превышающих n и взаимно-простых с n.**

Для этой чрезвычайно важной числовой функции, введенной Эйлером и называемой иногда *индикатором* числа n (indicateur), мы получаем, замечая, что в случае делимости a на b символ $\left[\frac{a}{b}\right]$ означает то же, что и $\frac{a}{b}$, следующее простое выражение

$$\varphi(n) = n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i,j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i,j,k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \ldots + (-1)^m \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_m} =$$

$$= n\left(1 - \sum \frac{1}{p_i} + \sum \frac{1}{p_i p_j} - \sum \frac{1}{p_i p_j p_k} + \ldots + (-1)^m \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_m}\right) =$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) = n \cdot \prod_{p/n}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

где произведение распространяется на все простые делители n.

Можно также написать

$$\varphi(n) = p_1^{k_1 - 1}(p_1 - 1) \cdot p_2^{k_2 - 1}(p_2 - 1) \ldots p_m^{k_m - 1}(p_m - 1).$$

Для $n = 1$ на основании определения получим

$$\varphi(1) = 1$$

Отметим, в частности, вытекающие из предыдущих формул часто применяемые соотношения

$$1)\ \varphi(p) = p - 1,$$
$$2)\ \varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1),$$

если p — простое число, и

$$3)\ \varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b),$$

если a и b — *взаимно-простые числа.*

Значения рассмотренных нами числовых функций $s(n)$, $\nu(n)$ и $\varphi(n)$, как мы видим, очень просто определяются, если известно разложение числа n на простые множители. В противоположность этому, таблица значений этих функций, расположенных в порядке натурального следования аргументов от n к $n+1$ представляет, как легко может убедиться читатель, весьма хаотическую картину.

Приведем, в качестве примера, начальную часть таблицы значений функции $\varphi(n)$. Десятки числа n указаны в левом столбце, единицы — в верхней строке. В соответствующих клетках помещены значения $\varphi(n)$.

Таблица значений функции $\varphi(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60
100	40	100	32	102	48	48	52	106	36	108

4. Докажем здесь еще два важных свойства функции $\varphi(n)$, которыми нам придется пользоваться в дальнейшем (§ 119).

Теорема 1. *Число чисел, не превышающих n и имеющих с n общий наибольший делитель δ, равно $\varphi\left(\frac{n}{\delta}\right)$ или $\varphi(d)$, где d есть дополнительный к δ делитель числа n, так что $n = \delta d$.*

В самом деле, число x будет иметь с n общим наибольшим делителем δ тогда и только тогда, когда

$$x = \delta x_1,$$
$$n = \delta d,$$

где x_1 и d — взаимно-простые числа.

Замечая, что условие $x \leqslant n$ требует, чтобы $x_1 \leqslant d$, заключаем, что число различных x, не превышающих n, равно числу чисел x, не превышающих d и взаимно-простых с ним, т. е. равно

$$\varphi(d) \text{ или } \varphi\left(\frac{n}{\delta}\right).$$

Теорема 2. *Сумма*

$$\sum_{d/n} \varphi(d) = \varphi(1) + \varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \ldots + \varphi(n),$$

где суммирование производится по всем делителям числа n, равна числу n, т. е.

$$\sum_{d/n} \varphi(d) = n.$$

Для доказательства достаточно заметить, что все числа совокупности

$$1, 2, 3, \ldots, n$$

можно разбить на $\nu(n)$ групп A_i по $\varphi\left(\frac{n}{\delta_i}\right)$ чисел в каждой, объединяя в одну группу A_i все числа, имеющие с n общий наибольший делитель δ_i. Эти группы не имеют, по построению, общих элементов.

Если δ_i пробегает всю совокупность делителей числа n, то дополнительный делитель

$$d_i = \frac{n}{\delta_i}$$

также пробегает все эти значения (в другом порядке) и потому общая численность элементов всех групп A_i вместе, равная, с одной стороны, числу n, должна, с другой стороны, равняться сумме

$$\sum_{i=1}^{\nu} \varphi(d_i),$$

о которой и идет речь в теореме.

Примечание. Вообще, если для некоторой числовой функции $\psi(n)$, распространяя суммирование по всем делителям d числа n, положить $\sum_{d/n}\psi(d) = f(n)$ то можно, обратно, получить для $\psi(n)$ выражение $\psi(n) = \sum_{d/n}\mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$, аналогичное формуле (4) стр. 429. На этого рода формальных преобразованиях общего характера мы здесь останавливаться не будем, отсылая читателя к курсам теории чисел Егорова, Граве и Виноградова.

Покажем в заключение, как можно с помощью формулы (3) определить *число* простых чисел в интервале от 1 до x, не вычисляя явно *всех* этих простых чисел, а предполагая известными только простые числа

$$p_1, p_2, \ldots, p_\nu,$$

не превышающие числа $\sqrt{x}$.

Так как всякое число, заключенное между $\sqrt{x}$ и x, либо абсолютно простое, либо делится на одно из простых чисел, меньших, нежели $\sqrt{x}$, то, очевидно, числа ряда 1, 2, 3, ..., $[x]$, взаимно-простые с произведением $n = p_1 p_2 \ldots p_\nu$, суть, кроме 1, абсолютно простые числа, заключенные между $\sqrt{x}$ и x, и только эти числа. Число этих простых чисел есть, стало быть, как раз

$$\varphi(x, n) - 1.$$

Общее число $\pi(x)$ простых чисел в ряду 1, 2, 3, ..., $[x]$ равно таким образом

$$\pi(x) = \nu - 1 + \varphi(x, n) = \nu - 1 + \sum_{d/n} \varepsilon_d \left[\frac{x}{d}\right].$$

Заменяя в правой части целые числа $\left[\frac{x}{d}\right]$ отличающимися от них на правильную дробь числами $\frac{x}{d}$, мы придем, повторяя выкладки страницы 429, к следующему *приближенному* равенству

$$\pi(x) \approx \nu - 1 + x \sum_{d/n} \frac{\varepsilon_d}{d} = \nu - 1 + x \prod_{i=1}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \nu - 1 + x \cdot \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Для грубой оценки погрешности в этой формуле достаточно подсчитать, не обращая внимания на знаки, число слагаемых в сумме (2), выражающей $\varphi(x, n)$. Это число слагаемых равно

$$1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m.$$

Так как ошибка в каждом слагаемом не больше 1, то общая погрешность не превышает для $\pi(x)$ числа 2^ν в ту или иную сторону. Вследствие имеющей место компенсации положительных и отрицательных ошибок фактическая погрешность значительно меньше.

Пример.

Для $x = 120$ найдем $[\sqrt{120}] = 10$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ и $\nu = 4$. По приближенной формуле

$$\pi(120) \approx 3 + 120 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \approx 30{,}4.$$

На самом же деле, делители d числа $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ суть

1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210,

а соответствующие значения чисел $\left[\frac{120}{d}\right]$

120, 60, 40, 24, 17, 20, 12, 8, 8, 5, 3, 4, 2, 1, 1, 0.

Взяв нужные знаки, получим

$$\pi(120) = 3 + 120 - (60 + 40 + 24 + 17) + (20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3) - \\ - (4 + 2 + 1 + 1) = 30,$$

что легко проверить непосредственно.

Предоставляем читателю в виде упражнения доказать с помощью приведенных здесь формул, что число $2 \cdot 3 \cdot 5$ есть наибольшее число, обладающее тем свойством, что все числа, меньшие его и взаимно-простые с ним, суть числа абсолютно простые.

ГЛАВА XIV.

ТЕОРИЯ СРАВНЕНИЙ.

§ 111. Понятие о сравнении. Классы равноостаточных чисел по данному модулю.

1. В вопросах элементарной теории чисел, связанных с понятием о делимости одного числа на другое, значительная роль принадлежит введенному Гауссом понятию о *сравнении* (kongruenz) и о классах, сравнимых между собой по данному модулю чисел.

К установлению этих понятий и основных свойств соотношения сравнения мы и переходим.

Обычно, производя деление одного числа на другое с остатком, мы больше интересуемся *частным,* нежели остатком. В целом ряде вопросов, однако же, в том числе и в вопросах теории делимости, существенным является именно *остаток* от деления, между тем как величина частного имеет второстепенное значение. Таковы некоторые задачи, связанные с *периодическими* процессами. Элементарные примеры: „в котором часу произошло событие, случившееся через n часов после k-го часа пополуночи?" Ответом является остаток от деления числа $n+k$ на 24; сюда же относятся аналогичные задачи о *приведении* дуг к дугам первой четверти, требующие определения остатка при делении на 360 и 90 и т. п.

В вопросах делимости на данное число m можно во многих случаях заменять одно другим числа, дающие при делении на m *один и тот же остаток.*

Так, например, в вопросе о том, делится ли сумма двух чисел a и b, скажем, на число 3, ответ будет таков: оба числа должны быть *вида* $3n$, либо одно из них *вида* $3n+1$, а другое — *вида* $3n+2$. Здесь числа a и b, дающие при делении на 3 один и тот же остаток, играют одну и ту же роль, независимо от своей величины. Для исчерпывающего решения поставленного только что вопроса о делимости нет необходимости рассматривать *все* числа: достаточно лишь пересмотреть конечное число комбинаций, образуемых возможными остатками 0, 1 и 2 или, что то же, рассмотреть все возможные предположения относительно того, какой из трех возможных видов

$$3n, 3n+1 \text{ или } 3n+2$$

имеют числа a и b

Для общего случая, когда речь идет о делимости на число n (отличное от нуля), аналогичные соображения приводят к мысли объединить все числа, дающие один и тот же остаток при делении на число m, в *один класс* и рассматривать, таким образом, все целые числа с точки зрения их *принадлежности к одному из m классов чисел*

$$km,\ km+1,\ km+2,\ km+3, \ldots, km+m-1,$$

называемых **классами равноостаточных чисел по модулю** m. Значение целого числа k в приведенных только что общих выражениях произвольно; m — зафиксированное число („*модуль*").

Принадлежность двух каких-либо чисел a и b к одному и тому же классу по модулю m характеризуется тем, что эти два числа дают при делении на m один и тот же остаток (*равноостаточны*), так что $a=k_1m+r_1$ и $b=k_2m+r_2$, где $0\leqslant r_1<m$, $0\leqslant r_2<m$ и

$$r_1=r_2.$$

Это равносильно соотношению

$$a-b \vdots m,$$

выражающему делимость разности $a-b$ на модуль m. Поэтому иногда говорят, что a есть **вычет** b (и b есть вычет a) по модулю m.

Наоборот, числа a и b принадлежат различным классам по модулю m, если $r_1\neq r_2$ или, что то же, если разность $a-b$ не делится на число m.

В отношении целого ряда вопросов числа одного и того же класса могут, как было указано выше, замещать друг друга. Связь между числами a и b, выражающаяся в их принадлежности одному и тому же классу, напоминает, поэтому, отношение *равенства* между числами и обладает целым рядом свойств, аналогичных свойствам равенства.

В силу этого оказывается полезным выражать принадлежность чисел a и b одному и тому же классу по модулю m с помощью следующей записи

$$a\equiv b \pmod{m}.$$

Написанное соотношение носит название **„сравнения по модулю m"** и читается так: a сравнимо с b по модулю m. Это сравнение выражает, таким образом, *равноостаточность* чисел a и b по модулю m или, что то же, *делимость разности $a-b$ на число m*. В силу этого, всякое сравнение $a\equiv b \pmod{m}$ может быть заменено равносильным ему *равенством*

$$a=b+km,$$

где целое число k (частное от деления $a-b$ на m) остается *неопределенным*, в полном соответствии с тем, что, имея в виду принадлежность чисел a и b к одному и тому же классу по модулю m мы высказываем утверждение об остатках от деления a и b на m, совершенно отвлекаясь от величины соответствующих частных.

2. Отношение сравнимости чисел есть, таким образом, некоторый род равенства, именно *„равенство с точностью до кратных модуля“*, или „равенство в отношении остатков от деления на число m“. Для того чтобы оправдать такое словоупотребление, достаточно убедиться в том, что отношение „$\equiv$“ удовлетворяет постулатам скалярного расположения (§ 25, глава III), которым должно удовлетворять всякое отношение между объектами какой-либо системы, рассматриваемое нами как род равенства. Отношение „$\equiv$“ удовлетворяет этим требованиям:

1) Всякое число a сравнимо само с собой по любому модулю

$$a \equiv a \pmod{m}$$

(свойство рефлективности). Действительно, равная нулю разность $a - a$ делится на всякое число m.

2) Если $a \equiv b \pmod{m}$, то и $b \equiv a \pmod{m}$ (свойство обратимости). Действительно, если $a - b \vdots m$, то и $b - a \vdots m$.

3) Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то и $a \equiv c \pmod{m}$ (свойство транзитивности). Действительно, если $a - b \vdots m$ и $b - c \vdots m$, то и $a - c = (a - b) + (b - c) \vdots m$.

Мы могли бы, впрочем, обойтись здесь и без этой формальной поверки, замечая, что распределение чисел на классы по модулю m осуществляется однозначно, понятие же о „принадлежности к одному и тому же классу“, очевидно, вообще обладает указанными свойствами отношения равенства, независимо от того, о каких классах идет речь. Обратно, всякое отношение типа равенства, т. е. удовлетворяющее перечисленным требованиям 1)—3), может быть положено в основу распределения изучаемых объектов на классы, „равных между собой в рассматриваемом отношении“, т. е. распределения, в котором объекты считаются различными лишь постольку, поскольку они принадлежат различным классам.

Так, например, соотношение $a + b = \pi$, выражающее, что a и b — смежные углы, не может быть положено в основание распределения всех углов на классы, „смежных между собой“, так как соотношение „смежности“ нерефлективно и нетранзитивно (один только класс прямых углов есть класс смежных между собой углов). Напротив, соотношение подобия треугольников $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ может быть положено в основу разбиения всех треугольников на классы *подобных между собой* треугольников: для характеристики всех возможных *форм* треугольников достаточно тогда рассмотреть по одному представителю каждого класса.

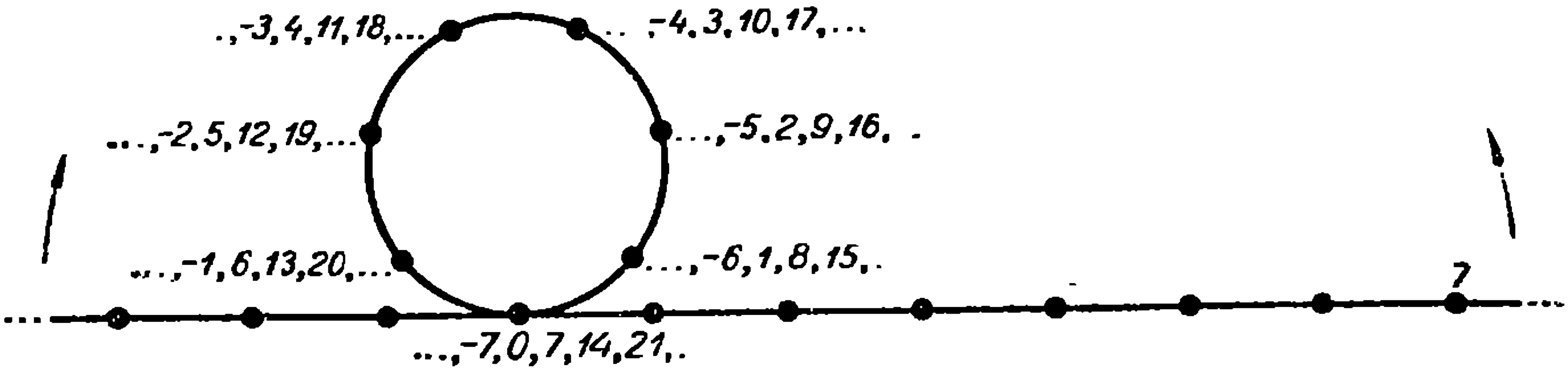
В частности, используя соотношение сравнения „$\equiv$“, мы могли бы, отправляясь от свойств 1), 2) и 3) отношения $a - b \vdots m$, притти к послужившему для нас исходным пунктом распределению чисел на классы по данному модулю.

Такому истолкованию отношения $a \equiv b \pmod{m}$, при котором сравнимые между собой числа считаются в известном смысле равными, не отличными друг от друга, можно дать наглядную интерпретацию, используя *периодичность* (с периодом m), которая свойственна распределению сравнимых между собой чисел в натуральном ряду.

Именно, представим себе, полагая для определенности модуль m равным числу 7, что числовая прямая целых чисел навернута на окружность длины 7 так, что числа 7, 14, 21 и т. д. попадают в нулевую точку, числа 1, 8, 15, ... , а также -6, 13, -20, ... совмещаются со следующей „целочисленной" точкой окружности и т. д. (черт. 48).

В этой схеме сравнимые между собой по модулю 7 числа попадают в одну и ту же из 7 различных точек окружности, несравнимые числа — в различные точки окружности.

m точек окружности, построенной аналогично для модуля m, так же как и соответствующие классы, одинаково хорошо характеризуются любым числом, являющимся представителем соответствующего класса равноостаточных чисел по модулю m.



Черт. 48.

3. В согласии с этим, всякую систему m чисел

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ d,$$

в которой представлены *все классы* по модулю m, называют **полной системой представителей классов или полной системой вычетов** по модулю m.

Числа

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ m-1$$

носят название *наименьших положительных вычетов* по модулю m.

Числа

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1$$

образуют, очевидно, полную систему (наименьших) вычетов по модулю m.

Можно также, используя отрицательные числа, рассматривать *абсолютно малые вычеты* по модулю m, именно, целые числа, лежащие в интервале от $-\left[\frac{m}{2}\right]$ до $+\left[\frac{m}{2}\right]$. Так, например, по модулю 3 можно рассмотреть полную систему вычетов 1, 0, $+1$, распределяя натуральные числа на классы чисел вида $3n-1$, $3n$ и $3n+1$. При этом, очевидно, класс чисел вида $3n-1$ тождественен с классом чисел вида $3n+2$.

Абсолютно малый вычет числа N по модулю m равен остатку от деления N на m, т. е. числу

$$n_1 = N - \left[\frac{N}{m}\right] m,$$

если это число не превышает половины делителя m, т. е. $N - \left[\frac{N}{m}\right] m \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]$. В противном случае следует положить

$$n_2 = N - \left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) m,$$

т. е. взять отрицательный остаток *от деления N на m с избытком*. Так как $n_1 - n_2 = m$, то из двух целых положительных чисел n_1 и $-n_2$ одно, по крайней мере, не превышает числа $\left[\frac{m}{2}\right]$.

Как мы увидим ниже, операции над числами, поскольку речь идет о сравнениях по модулю m, сводятся к операциям над какой-либо системой вычетов и могут быть истолкованы с помощью перехода от одних точек построенной, как указано выше, для модуля m окружности к другим точкам той же окружности так же, как операции с учетом обычного отношения равенства истолковываются в системе целочисленных точек бесконечной числовой прямой. В этом смысле можно сказать, что в сравнениях каждое число фигурирует не само по себе, а лишь *как представитель своего класса* по данному модулю.

§ 112. Основные свойства сравнений. Операции сложения и умножения по данному модулю. Признаки делимости чисел.

1. Теорема 1. *Сравнения по одному и тому же модулю можно почленно складывать, вычитать и перемножать,* т. е. если

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ и } c \equiv d \pmod{m},$$

то

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m} \text{ и } ac \equiv bd \pmod{m}.$$

Доказательство. Из $a - b \vdots m$ и $c - d \vdots m$ следует $a \pm c - (b \pm d) = a - b \pm (c - d) \vdots m$, а также $ac - bd = ac - bc + bc - bd = (a - b) c + (c - d) b \vdots m$.

Следствие 1. *Обе части сравнения можно возвысить в одну и ту же целую положительную степень* т. е. если

$$a \equiv b \pmod{m},$$

то и

$$a^n \equiv b^n \pmod{m}.$$

Следствие 2. *Если* $a \equiv b + c \pmod{m}$, то $a - c \equiv b \pmod{m}$ (правило изменения знака при перенесении членов из одной части сравнения в другую). Как и для равенств это можно доказать, складывая почленно сравнения $a \equiv b + c$ и сравнение $-c \equiv -c$.

Следствие 3. *При замене в сумме и произведении чисел слагаемых или сомножителей числами, сравнимыми с первоначальными, полученный новый результат будет числом, сравнимым с первоначальным результатом по тому же модулю.*

Это есть лишь иная формулировка теоремы 1. Действительно, утверждение, что $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ и $ac \equiv bd \pmod{m}$, коль скоро $a \equiv b$ и $c \equiv d$ по тому же модулю, как раз и составляет содержание теоремы 1. Отсюда вытекает, далее,

Следствие 4. Если $f(x)$ есть полином относительно x с целыми коэфициентами, то *из соотношения*

$$x \equiv x' \pmod{m}$$

следует

$$f(x) \equiv f(x') \pmod{m}.$$

Рассмотрим некоторые элементарные применения последнего предложения к установлению *признаков делимости* в десятичной системе счисления.

Замечая, что

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \pmod{3},$$

и полагая

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

найдем для числа N, имеющего в десятичной системе счисления цифровое обозначение

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

сравнение

$$N = f(10) \equiv f(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0 \pmod{9} \pmod{3},$$

которое и выражает обычный признак делимости на 9 и на 3, основанный на рассмотрении *суммы цифр* числа N.

Аналогично, исходя из сравнения

$$10 \equiv -1 \pmod{11},$$

приходим к сравнению

$$N = f(10) \equiv f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \pmod{11},$$

выражающему признак делимости на 11.

Подобным образом можно поступать и в других случаях. Так, например, замечая, что $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, так что

$$10^3 \equiv -1 \pmod{7} \pmod{13},$$

найдем в системе счисления с основанием 10^3, в которой трехзначные числа $A_0, A_1, \ldots$, соответствующие последовательным разрядам в обычном цифровом обозначении числа N, играют роль цифр

$$N = A_0 + A_1 10^3 + A_2 10^6 + \ldots + A_n 10^{3n} \equiv A_0 - A_1 + A_2 - \ldots + (-1)^n A_n \pmod{7} \pmod{13}.$$

Это приводит к известным признакам делимости на 7 и 13, использующим *группы цифр по три* в десятичном цифровом обозначении числа.

Можно, однако, поступить и иначе, составив небольшую таблицу (по модулю 7).

$$10 \equiv 3,\ 10^2 \equiv 3^2 \equiv 2;\ 10^3 \equiv 2\cdot 3 \equiv -1;\ 10^4 \equiv -3;$$
$$10^5 \equiv -2;\ 10^6 \equiv 1;\ 10^7 \equiv 3, \ldots$$

Начиная с 10^6, мы придем, очевидно, к периодическому повторению. Попутно мы установили одним из простейших путей факт делимости числа 1001 на 7. Из полученных соотношений находим, далее,

$$\begin{aligned} N &= a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + a_3\cdot 10^3 + a_4\cdot 10^4 + \ldots \\ &\equiv a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 \ldots \pmod 7. \end{aligned} \qquad (*)$$

При вычислении суммы в правой части можно отбрасывать (ведь речь идет о сравнениях) кратные семи. Результат дает не только ответ на вопрос о делимости, но и величину остатка в случае, если число не делится на 7.

Так, например, отмечая множители 1, 3, 2 и т. д. (последовательные вычеты степеней 10) под соответствующими цифрами числа́, а произведения, входящие в формулу (*), взятые по модулю 7, в третьей строке, найдем, что для числа

$N=2$	3	7	5	4	4	2	0	1	7	2	5	1
1	$-\bar{2}$	3	-1	2	3	1	-2	3	1	$\bar{2}$	3	1
2	1	0	2	1	-2	2	0	-3	0	4	1	1

сумма чисел в нижней строке сравнима с 2 по модулю 7, так, что и

$$N \equiv 2 \pmod 7.$$

Аналогичный метод может быть применен и для других модулей (ср. ниже § 121). Вычисления при этом можно вести с числами, абсолютная величина которых не превышает половины модуля (абсолютно малыми вычетами).

Впрочем, для небольших чисел и взаимно-простых с 10 делителей вопрос о делимости (без определения остатка) довольно быстро может быть разрешен с помощью приема, сводящегося к последовательному прибавлению или вычитанию кратных испытываемого делителя с таким расчетом, чтобы сводить каждый раз к нулю последнюю значащую цифру числа. От фактического производства деления этот прием, не имеющий, впрочем, серьезного значения, отличается сравнительной свободой действий, связанных с отсутствием необходимости находить частное и остаток.

Приведем пример, обозначая здесь знаком эквивалентности „$(m)\, a \sim b$" *одновременную делимость или неделимость чисел a и b на число m.* Пусть требуется разложить на множители число 31331. Испытываем делители (3) $31331 \sim 2$;

(7) $31331 \sim 31331 - 21 \sim 3131 \sim 3131 - 21 \sim 311 \sim 311 - 21 \sim 29$, (11) $31331 \sim 7 - 4 = 3$; (13) $31331 \sim 31331 + 39 \sim 3137 \sim 3007 \sim 3007 + 13 \sim 302 = 2 \cdot 151 \sim 21$; (17) $31331 \sim 31331 - 51 \sim 3128 = 2 \cdot 782$, $\sim 782 - 102 \sim 68 = 4 \cdot 17$; $31331 = 17 \cdot 1843$; (17) $1843 \sim 1843 + 17$, $\sim 186 \sim 16$; (19) $1843 \sim 1900 - 1843 \sim 57 = 3 \cdot 19$; стало быть, $31331 = 17 \cdot 19 \cdot 97$. Другой пример. $N = 1949$. Здесь (3) $1949 \sim 5$; (7) $1949 \sim 19$; (11) $1949 \sim 13$; (13) $1949 \sim 1949 - 39 \sim 191 + 39 \sim 23$; (17) $1949 + 51 \sim 2000 \sim 2$; (19) $1949 \sim 49$; (23) $1949 - 69 \sim 188 \sim 96$; (29) $1949 - 29 \sim 192 \sim 97$; (31) $1949 + 31 \sim 198$, ~ 99; (37) $1949 + 37 \cdot 3 \sim 206 \sim 103 \sim 14$; (41) $1949 + 41 \sim 199$, ~ 24; (43) $1949 - 3 \cdot 43 \sim 182 \sim 91$. Так как уже $45^2 = 2025 > 1949$, то 1949 — простое число.

2. Из изложенных выше теорем следует, что с точки зрения сравнений таблицы сложения и умножения натуральных чисел по данному модулю m содержат всего m строк и столбцов, соответственно числу *классов* несравнимых между собой чисел по модулю m. Такие таблицы, которые мы приводим ниже для модулей $m = 6$ и $m = 7$, позволяют все вычисления по модулю m вести с помощью чисел системы наименьших вычетов по модулю

$$0, 1, 2, 3, \ldots, m - 1,$$

не превышающих числа m.

Таблицы сложения и умножения по модулю m, составленные для этой системы вычетов, дают, согласно предыдущим теоремам, исчерпывающий ответ на вопрос о том, как комбинируются между собой *классы* чисел по модулю m при производстве этих действий над их элементами. Формулировка следствия (3) (стр. 438) показывает, что по существу здесь речь идет как раз о комбинировании классов, так как *класс результата* зависит лишь от *классов* слагаемых и сомножителей, а не от того, какие именно представители этих классов были выбраны при производстве действия. Приводимые ниже таблицы в связи с только что отмеченным их смыслом весьма наглядно интерпретируются *циклической схемой* расположения чисел различных классов, приведенной на странице 436 для модуля $m = 7$.

Модуль $m = 6$.

Таблица сложения

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Таблица умножения

	0	1	2	3	4	
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
[illegible]	0	5	[illegible]	3	2	1

Модуль $m=7$.

Таблица сложения

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Таблица умножения

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

§ 113. Операция деления. Делители нуля. Приведенная система вычетов.

1. Возможность почленно делить равенства на одно и то же отличное от нуля число основана на известной теореме о том, что из равенства нулю произведения вытекает равенство нулю по крайней мере одного из сомножителей. В силу этой теоремы из соотношения $ac=bc$ или $ac-bc=(a-b)c=0$ вытекает при $c\neq 0$ равенство $a=b$.

Для сравнений по *составному* модулю аналогичная теорема не имеет места и потому в общем случае деление обеих частей сравнения на одно и то же число может привести к нарушению сравнения. Так, внутренние нули только что приведенной таблицы умножения по модулю 6 соответствуют сравнениям

$$2\cdot 3\equiv 0 \pmod 6 \text{ и } 4\cdot 3\equiv 0 \pmod 6,$$

которые имеют место, несмотря на то, что

$$2\not\equiv 0,\ 3\not\equiv 0 \text{ и } 4\not\equiv 0 \pmod 6.$$

Вследствие этого мы могли бы, например, притти к ложному заключению $2\equiv 4 \pmod 6$, если позволили бы себе сократить обе части сравнения $2\cdot 3\equiv 4\cdot 3 \pmod 6$ на общий множитель 3.

Замечая, что сравнение

$$ab\equiv 0 \pmod m$$

равносильно соотношению $ab\,\vdots\, m$, мы можем сказать, что условия $b\not\equiv 0 \pmod m$ или b не $\vdots\, m$ недостаточно, чтобы иметь право утверждать, что $a\,\vdots\, m$ или $a\equiv 0 \pmod m$.

Согласно теореме 3 § 103 мы можем, однако, утверждать, что из условия $ab\equiv 0 \pmod m$ вытекает сравнение $a\equiv 0 \pmod m$ при любом a, если b есть число *взаимно-простое с модулем* m.

Действительно, в этом случае из делимости произведения ab на число m вытекает делимость на m сомножителя a.

Обратно, если $b\not\equiv 0 \pmod m$ *не есть* число, *взаимно-простое* с модулем, так что $(b, m)=d>1$ и $b=db_1$, $m=dm_1$, то сравнение $ab\equiv 0 \pmod m$ наверное может быть удовлетворено при значениях a, *несравнимых с нулем* по модулю m, например при $a=m_1$.

В силу этого свойства, числа, не взаимно-простые с модулем, носят название **делителей нуля** по данному модулю. Так, например, 2, 3 и 4 суть делители нуля по модулю 6.

Таким образом, в рассматриваемом отношении алгебра сравнений отличается от обычной наличием делителей нуля, отличных от самого нуля. В силу сказанного выше известное запрещение делить на *нуль* распространяется для сравнений по составному модулю на всех делителей нуля, т. е. на числа, не взаимно-простые с модулем.

Так как для сравнений *по простому модулю* всякое число, не взаимно-простое с модулем, должно делиться на модуль, т. е. быть сравнимым с нулем, то для простого модуля делителей нуля, отличных от нуля, не существует. Поэтому для сравнений по простому модулю сохраняются все обычные законы действий, в силу чего эти сравнения играют в рассматриваемой теории исключительно важную роль.

Для *составного* модуля мы можем сохранить указанное выше свойство произведения, лишь ограничиваясь рассмотрением вычетов, *взаимно-простых с модулем*. Система этих вычетов

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ d$$

называется **приведенной системой вычетов по модулю** m и содержит, как мы знаем (§ 110),

$$\varphi(m)$$

элементов или представителей $\varphi(m)$ классов (например, при $m=6$ приведенная система вычетов состоит из двух чисел 1 и 5). Таблица умножения для приведенной системы вычетов уже не содержит нулей. Одновременное рассмотрение операций сложения и умножения неизбежно выводит за пределы приведенной системы вычетов, так что только для простого модуля p, для которого приведенная система

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1$$

отличается от полной отсутствием одного лишь вычета нуль, возможно сохранение аналогии сравнений с равенствами при одновременном рассмотрении всех рациональных операций.

2. Резюмируем теперь основные свойства сравнений в отношении операции деления обеих частей сравнения на одно и то же число.

Теорема 1. *Сравнения можно почленно делить на одно и то же число, взаимно-простое с модулем.* В частности, обе части сравнения по простому модулю можно сократить на всякое число, несравнимое с нулем по этому модулю.

Действительно, если

$$(c,\ m)=1,$$

то сравнение

$$ac\equiv bc \pmod m$$

равносильное соотношению $(a-b)c \vdots m$ влечет за собой, по теореме 3 § 103, соотношение $a-b \vdots m$ или, что то же, сравнение

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Теорема 2. *Если обе части сравнения и модуль делятся на одно и то же число, то на это число можно разделить одновременно обе части сравнения и модуль.*

Другими словами, из сравнения

$$Ad \equiv Bd \pmod{dm_1}$$

вытекает сравнение

$$A \equiv B \pmod{m_1}.$$

Доказательство. Из соотношения $Ad - Bd = kdm_1$ вытекает $A - B = km_1$.

Отметим как частный случай теоремы 2, что сравнение

$$a \equiv b \pmod{m}$$

можно переписать в виде

$$\frac{a}{m} \equiv \frac{b}{m} \pmod{1}.$$

Эта форма записи означает, что разность

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$$

есть целое число.

В силу теоремы 2 можно в случае, когда

$$(c, m) = d > 1,$$

полагая $c = dc_1$ и $m = dm_1$, от сравнения

$$ac \equiv bc \pmod{m}$$

перейти к сравнению

$$ac_1 \equiv bc_1 \pmod{m_1},$$

где уже $(c_1, m_1) = 1$, так что, по теореме 1,

$$a \equiv b \pmod{m_1}.$$

Таким образом, можно и в этом случае освободиться от общего множителя обеих частей сравнения, однако, лишь за счет *изменения модуля.*

Примечание. *Сравнение, одна из частей которого не делится на общий множитель модуля и другой части,* очевидно, *невозможно.*

Предоставляем читателю выяснить, при каких условиях возможно почленное деление одного сравнения на другое сравнение по тому же самому модулю.

§ 114. Решение сравнений первой степени.

Рассмотрим теперь в общем виде действие деления по данному модулю на число, не являющееся делителем нуля по этому модулю.

Следуя аналогии между сравнениями и равенствами, мы можем сказать, что речь идет о решении **сравнения первой степени**

$$ax \equiv b \pmod{m},$$

где

$$(a, m) = 1.$$

Докажем, что при выполнении последнего условия это сравнение имеет *одно и только одно решение* в том смысле, что *класс* чисел x, ему удовлетворяющих, вполне определяется заданием классов, которым принадлежат числа a и b.

Доказательство основано на следующем вспомогательном предложении.

Лемма. *Если числа*

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

представляют собой полную систему вычетов по модулю m то система чисел

$$ax_1, ax_2, \ldots, ax_m,$$

где a есть любое число, взаимно-простое с модулем m, также будет представлять собою полную систему вычетов по модулю m.

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно обнаружить, что среди m чисел $ax_1, ax_2, \ldots, ax_m$ нет ни одной пары сравнимых между собой по модулю m. Но, ведь, если a число взаимно-простое с модулем m, то из сравнения

$$ax_i \equiv ax_j \pmod{m}$$

вытекало бы, по сокращении на a, что

$$x_i \equiv x_j \pmod{m}$$

вопреки предложению, что $x_1, x_2, \ldots, x_m$ представляют собой полную систему вычетов по модулю m.

Таким образом, среди m чисел ax_i должны быть, по необходимости, представлены *все классы* по модулю m, притом каждый только один раз.

Отсюда и вытекает, что, каков бы ни был класс числа b, среди чисел ax_i найдется представитель этого класса, скажем ax_k, так что

$$ax_k \equiv b \pmod{m}.$$

Стало быть, *все* числа x, принадлежащие тому же классу, что и число x_k,

$$x \equiv x_k \pmod{m}$$

и *только* эти числа (ведь $ax_i \not\equiv ax_k \equiv b$ при $i \neq k$) удовлетворяют сравнению

$$ax \equiv b \pmod{m}.$$

Этим доказана

Теорема 3. *Всякое сравнение первой степени* $ax \equiv b \pmod m$, *где* a *не есть делитель нуля по модулю* m, *имеет одно и, в смысле класса числа* x *по модулю* m, *только одно решение.*

Это решение может быть найдено путем конечного числа испытаний представителей различных классов по модулю m, при котором воспроизводится соответствующая числу a строка таблицы умножения по модулю m.

Решение сравнения $ax \equiv b \pmod m$ приводит, в силу эквивалентного соотношения

$$ax - b = m(-y),$$

где y — целое число, к системе решений неопределенного уравнения

$$ax + my = b$$

в целых числах x и y. Обратно, всякая пара целых значений x и y, удовлетворяющих последнему уравнению, дает решение сравнения $ax \equiv b \pmod m$.

Поэтому, мы можем

1) применить только что указанный прием конечных испытаний вычетов $x_1, x_2, \ldots, x_m$ по модулю m к решению неопределенного уравнения $ax + my = b$ и

2) воспользоваться, наоборот, данным в § 97 методом нахождения решений неопределенного уравнения $ax + my = b$ для решения сравнения $ax \equiv b \pmod m$.

Ниже мы укажем еще два приема решения сравнения первой степени, в иных случаях быстрее приводящих к цели.

Если a есть *делитель нуля* по модулю m, то сравнение $ax \equiv b \pmod m$ *либо не имеет решений, либо имеет несколько решений*, принадлежащих различным классам по модулю m.

Положим, чтобы убедиться в этом, $a = da_1$ и $m = dm_1$, где $d = (a, m)$; $(a_1, m_1) = 1$. Сравнение

$$da_1x \equiv b \pmod{dm_1},$$

эквивалентное соотношению $b = da_1x + kdm_1$, может, таким образом, иметь решения *только* в том случае, *когда и* $b \vdots d$. Полагая в этом случае $b = db_1$, придем к сравнению

$$ax_1 \equiv b_1 \pmod{m_1},$$

общее решение которого может быть представлено в виде

$$x = \alpha + km_1,$$

где α есть одно из чисел $0, 1, 2, \ldots m_1 - 1$, а k — любое целое число.

Два числа этого вида $x_1 = \alpha + k_1m_1$ и $x_2 = \alpha + k_2m_1$ будут сравнимы по модулю $m = m_1d$ в том и только в том случае, когда $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)m_1 \vdots m_1d$ или $k_1 - k_2 \vdots d$, т. е.

$$k_1 \equiv k_2 \pmod d.$$

Придавая, поэтому, числу k несравнимые между собой по модулю d значения $0, 1, \ldots, d-1$, мы получим d *различных классов*

$$x \equiv \alpha, \quad x \equiv \alpha + m_1, \ \ldots, \ x \equiv \alpha + (d-1) m_1 \pmod{m},$$

перечисление которых и отвечает исчерпывающим образом на вопрос о решении сравнения

$$ax \equiv b \pmod{m}.$$

Таким образом, в случае, когда b не делится на $d=(a, m)$, это сравнение *не имеет решений*, в случае же, когда $b \vdots d$, решение *неоднозначно*.

§ 115. Дроби по простому модулю.

1. Ограничиваясь теперь случаем простого модуля, введем, в полной аналогии с обычным определением, знак

$$\frac{b}{a}$$

(дроби по модулю) для обозначения единственного решения сравнения

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

при $a \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема 3 может в этой связи рассматриваться как утверждение о *выполнимости и однозначности в системе классов по простому модулю операции*

$$x \equiv \frac{b}{a} \pmod{p}$$

деления по модулю p на число, не сравнимое с нулем.

Частное, в отличие от обычных свойств системы рациональных чисел, *всегда* может быть представлено здесь с помощью *целого* числа, причем можно, как и для остальных операций, ограничиться системой наименьших вычетов $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$. Для того чтобы вполне примириться с этим обстоятельством, следует иметь в виду определение частного $\frac{b}{a}$ как числа, которое, будучи умножено на a, дает число, *сравнимое с b* по модулю p. Требуемое число при $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, по доказанному, всегда может быть найдено в системе чисел $0, 1, 2, \ldots, p-1$ при любом p.

Основные операции над дробями по модулю могут быть производимы по тем же правилам, что и в обычной алгебре.

В этом нетрудно убедиться, замечая, что формальные свойства операции деления выводятся в обоих случаях на основании одного и того же определения и одних и тех же формальных свойств операции умножения.

Так, например, верна теорема:

$$\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{p} \tag{1}$$

в том и только в том случае, если

$$ad \equiv bc \pmod{p}. \tag{2}$$

Действительно, $x \equiv \frac{a}{b}$ и $y \equiv \frac{c}{d}$ определены как решения сравнений $bx \equiv a \pmod{p}$ и $dy \equiv c \pmod{p}$. Умножая первое на c второе на a и вычитая, найдем

$$bcx \equiv ady \pmod{p}. \tag{3}$$

Если $x \equiv y$, то отсюда будет следовать $bcx \equiv adx \pmod{p}$ или

$$(bc - ad)x \equiv 0 \pmod{p}.$$

Если $a \not\equiv 0$, то и $x \not\equiv 0$ и, стало быть, условие (2) имеет место. Если же $a \equiv 0$, то в силу $x \equiv y$ должно быть и $c \equiv 0$ и условие (2) выполняется тождественно.

Обратно, если имеет место (2), то из сравнения (3) вытекает $ad(x-y) \equiv 0 \pmod{p}$ и $x \equiv y$, если только $a \not\equiv 0$. Если же $a \equiv 0$ то при (2) также и $c \equiv 0$ и потому вновь $x \equiv y$.

Аналогично докажется, что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \equiv \frac{ac}{bd} \pmod{p}.$$

Действительно, если $bx \equiv a \pmod{p}$ и $dy \equiv c \pmod{p}$, то

$$bdxy \equiv ac \pmod{p},$$

а это, по определению, означает, что

$$xy \equiv \frac{ac}{bd} \pmod{p}.$$

При этом x есть, по определению, дробь $\frac{a}{b}$, а y дробь $\frac{c}{d}$ по модулю p.

Точно так же

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \equiv \frac{ad + bc}{bd} \pmod{p},$$

ибо, умножая сравнения, определяющие x и y, соответственно на a и на b и складывая, найдем

$$bd(x+y) \equiv ad + cb \pmod{p},$$

а это и означает, что

$$x + y \equiv \frac{ad + cb}{bd} \pmod{p}.$$

В частности, определив значение дроби

$$\frac{1}{a} \equiv a' \pmod{p},$$

мы можем представить решение сравнения $ax \equiv b \pmod{p}$ в виде

$$x \equiv \frac{b}{a} \equiv b \cdot \frac{1}{a} \equiv ba' \pmod{p}.$$

Знание числа a' сводит вопрос к *умножению* по модулю p.

Так, например, замечая, что $3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$, можно решение сравнения $19x \equiv 27 \pmod{7}$ или, что то же, решение сравнения

$$5x \equiv 6 \pmod{7}$$

представить в виде

$$x \equiv \frac{6}{5} \equiv 6 \cdot \frac{1}{5} \equiv 6 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{7}.$$

Определение и основные свойства дробей по модулю сохраняются и для *составного* модуля при условии не рассматривать делителей нуля в знаменателях.

Приведем таблицу дробей по модулю 7:

$$\frac{1}{2} \equiv 4; \quad \frac{1}{3} \equiv 5; \quad \frac{1}{4} \equiv 2; \quad \frac{1}{5} \equiv 3; \quad \frac{1}{6} \equiv 6.$$

Отсюда будет следовать (сократимые дроби мы опускаем)

$$\frac{2}{3} \equiv 3; \quad \frac{2}{5} \equiv 6; \quad \frac{3}{2} \equiv 5; \quad \frac{3}{4} \equiv 6; \quad \frac{3}{5} \equiv 2;$$

$$\frac{4}{3} \equiv 6; \quad \frac{4}{5} \equiv 5; \quad \frac{5}{2} \equiv 6; \quad \frac{5}{3} \equiv 4; \quad \frac{5}{4} \equiv 3; \quad \frac{5}{6} \equiv 2.$$

2. Операции над дробями по модулю приводят к некоторым *признакам делимости* типа страницы 440, т. е. не дающим непосредственно величины остатка.

Так, можно утверждать, что для делимости числа $N = 10a + b$ на не менее, чем двузначное, простое число $p = 10c + d$ необходимо и достаточно, чтобы числа десятков и единиц у N и p были *пропорциональны по модулю* p, т. е. чтобы

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d} \pmod{p},$$

или

$$ad - bc \,\vdots\, p.$$

Действительно, избавляясь от дробей, или, для изящества, составляя „производную пропорцию"

$$\frac{10a + b}{10c + d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{p},$$

найдем, что в силу $10c + d \equiv 0$ и $d \not\equiv 0 \pmod{p}$ должно быть также $N = 10a + b \equiv 0 \pmod{p}$. Если делимое невелико, а p —

/ивузначно, то этот признак делимости (который можно применять и повторно) довольно быстро приводит к цели.

Деля почленно на 10 сравнение

$$10a + b \equiv 0 \pmod{p},$$

мы получим

$$a + \frac{1}{10} b \equiv 0 \pmod{p}$$

Заменяя здесь $\frac{1}{10}$ соответствующим наименьшим абсолютным вычетом k по модулю p, мы придем к сравнению

$$a \pm kb \equiv 0 \pmod{p},$$

равносильному с исходным.

В обозначениях страницы 439 это приводит к признаку делимости

$$(p) \quad 10a + b \sim a \pm kb.$$

Для простых чисел в пределах первых четырех десятков число k имеет сравнительно небольшие значения, и повторное применение этого признака „справа налево" не представляет затруднений. Для определения числа k при небольших p проще всего непосредственно найти кратное p, отличающееся от степени 10 на ± 1, или подбирать k, применяя этот признак к самому числу p. Так, например, для числа $p = 19$ находим сразу $2 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{19}$, с контролем $1 + 2 \cdot 9 = 19$; стало быть, $k = 2$ и

$$(19) \quad 10a + b \sim a + 2b.$$

Численный пример: (19) $286754 \sim 28683 \sim 2874 \sim 295 \sim 39 \sim 31 \sim 4$; 286754 на 19 не делится.

3. Заметим, что теория делимости дробных чисел, о которой мы говорили в § 104, позволяет рассматривать также и *сравнения по дробному модулю* наравне с обычными.

Предоставляем читателю установить деление на классы, форму систем вычетов и общие свойства сравнений по дробному модулю, проведя параллель с теоремами § 111—114.

4. Рассмотренные выше свойства сравнений по простому модулю показывают, что классы вычетов по *простому модулю* образуют **конечное числовое поле** (ср. § 41), отличающееся от обычной области рациональных чисел:

1) конечностью числа различных (несравнимых между собой) элементов поля и

2) невозможностью установить скалярное расположение элементов так, чтобы сохранялась обычная связь операций и скалярного расположения чисел.

Все остальные свойства поля — выполнимость и однозначность рациональных операций — здесь имеют место.

Можно показать, что всякие другие *конечные поля* без делителей нуля по существу не отличаются от полей вычетов по простому модулю (могут быть приведены во взаимно-однозначное соответствие с этими последними так, чтобы результаты основных операций над соответствующими элементами также соответствовали друг другу или, как говорят, были *изоморфны* полям вычетов по простому модулю).

В отношении операции *сложения* вычеты по модулю m образуют *конечную группу* (см. стр. 130) *порядка* m (с числом элементов, равным m) как в случае простого, так и в случае составного модуля. В отношении же операции *умножения* вычеты, отличные от нуля (несравнимые с нулем), образуют *группу* лишь для случая *простого* модуля.

В случае же составного модуля числа, несравнимые с нулем, все еще *не образуют группы* в отношении операции умножения. Действительно, произведение двух таких чисел может дать число, не принадлежащее этой системе, — сравнимое с нулем; обратный элемент $a' \equiv \frac{1}{a}$ для делителей нуля также — в нарушение одного из основных свойств группы — не существует (стр. 446). Для того чтобы иметь дело с *группой относительно умножения*, приходится, как мы видели выше, ограничиться для составного модуля рассмотрением *приведенной системы вычетов*.

Теоремы § 116, так же как и ряд теорем, следующих ниже § 119 и 121, представляют собой не что иное, как применение к рассматриваемому частному случаю общих теорем теории конечных групп. Отсылаем по этому вопросу, на котором мы здесь не можем останавливаться подробнее, к книгам Граве „Элементарный курс теории чисел“ и *Hecke* „Theorie der algebraischen Zahlen“.

§ 116. Теоремы Ферма и Эйлера. Приложения к решению сравнений первой степени.

1. Докажем теперь несколько замечательных теорем, вытекающих из доказанных выше свойств системы вычетов по простому и составному модулю.

Теорема [теорема Ферма (Fermat)]. *Для всякого числа a имеет место сравнение*

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

по любому простому модулю p.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда a не делится на p и, следовательно, есть число, взаимно простое с p.

Согласно лемме § 114 (стр. 444), умножая на число a числа

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$$

полной системы несравнимых с нулем вычетов по модулю p, мы вновь придем к полной системе

$$ax_1, ax_2, \ldots, ax_{p-1}$$

несравнимых с нулем вычетов по модулю p.

Это означает, что будут иметь место сравнения

$$ax_1 \equiv x_1'; \ ax_2 \equiv x_2', \ \ldots, \ ax_{p-1} \equiv x'_{p-1} \pmod{p},$$

где за $x_1', x_2', \ldots, x'_{p-1}$ можно принять *те же числа*

$$x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$$

в соответствующем (быть может, отличном от первоначального) порядке.

Перемножая все полученные сравнения и сокращая сравнение

$$a^{p-1}x_1'x_2' \ldots x'_{p-1} \equiv x_1x_2 \ldots x_{p-1} \pmod{p}$$

на число

$$x_1'x_2' \ldots x'_{p-1} \equiv x_1x_2 \ldots x_{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

придем к сравнению

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

выражающему делимость числа

$$a^{p-1} - 1$$

на простое число p при условии, что a не делится на p. Умножив выражение $a^{p-1} - 1$ на a, найдем, что произведение $a^p - a$ во всех случаях будет делиться на p, так что сравнение

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

имеет место *тождественно*, при всяких a и p.

В случае, когда модуль — *составное число*, это доказательство не может быть проведено для полной системы вычетов, так как произведение $x_1x_2 \ldots x_{m-1}$ отличных от нуля вычетов, ввиду присутствия дополнительных друг к другу делителей нуля, очевидно, даст число, сравнимое с нулем, и проведенное выше сокращение недопустимо.

Если, однако, ограничиться системой *приведенных вычетов*

$$x_1, x_2, \ldots, x_{\varphi(m)}$$

[в количестве $\varphi(m)$ чисел], то, ввиду отсутствия делителей нуля в произведении $x_1x_2 \ldots x_{\varphi(m)}$, в случае $(a, m) = 1$ можно рассуждать точно так же, как и в случае простого модуля.

Эти рассуждения приводят к сравнению

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m},$$

выражающему делимость числа $a^{\varphi(m)} - 1$ на m при единственном условии, что a есть число, взаимно простое с модулем. Умножение на a здесь не приведет к общему результату, так как из условия $(a, m) > 1$ не следует еще делимость числа a на число m.

Мы пришли, таким образом, к следующему обобщению теоремы Ферма.

Теорема Эйлера. *Для всякого числа a, взаимно-простого с модулем m* (простым или составным), *имеет место сравнение*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Так, например, для $p=2$ получим по теореме Ферма $n^2 - n \vdots 2$ или $n(n-1) \vdots 2$, что очевидно. Для $m=4$ находим $\varphi(4)=2$ и, следовательно, $a^2 \equiv 1 \pmod 4$, т. е. всякий нечетный квадрат имеет вид $4n+1$. Для $m=10$ найдем $\varphi(10)=4$ и, стало быть,

$$a^4 \equiv 1 \pmod{10},$$

так что четвертая степень чисел, оканчивающихся на 1, 3, 7 и 9, оканчивается на 1, утверждение, которое легко проверить непосредственно. Для $p=5$ найдем $a^5 \equiv a \pmod 5$. Так как при этом числа a и $5+a$ разной четности, то из последнего сравнения вытекает, что пятая степень всякого числа оканчивается той же цифрой, что и само число, что также легко проверить.

2. Теорема Ферма-Эйлера позволяет написать общее выражение для решения

$$x = a' = \frac{1}{a}$$

сравнения

$$ax \equiv 1 \pmod{p}$$

по простому модулю p, а также и решение сравнения

$$ax \equiv 1 \pmod{m}$$

при

$$(a, m) = 1$$

для случая составного модуля m.

Именно, мы можем положить, решая последнее сравнение

$$x \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod{m},$$

так как, действительно, в этом предположении

$$ax \equiv a \cdot a^{\varphi(m)-1} = a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Это можно записать так

$$a' \equiv \frac{1}{a} \equiv a^{\varphi(m)-1} \pmod{m}$$

и, в частности,

$$\frac{1}{a} \equiv a^{p-2} \pmod{p}$$

для простого модуля.

В соответствии с этим, решение сравнения

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

представится для $(a, m)=1$ в виде

$$x \equiv \frac{b}{a} \equiv b \cdot \frac{1}{a} \equiv ba' \equiv ba^{\varphi(m)-1} \pmod{m},$$

что можно, конечно, получить, и не вводя понятия о дроби по модулю. В этом случае вместо непосредственной поверки лучше умножить обе части решаемого сравнения на $a^{\varphi(m)-1}$ и заменить затем множитель $a^{\varphi(m)-1}$ сравнимой с ним единицей.

Для простого модуля при $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ решение сравнения

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

дается, в частности, формулой

$$x \equiv ba^{p-2} \pmod{p}.$$

Так, например, для решения неопределенного уравнения

$$34x + 25y = 3$$

мы можем, переписав условие задачи в виде

$$34x \equiv 3 \pmod{25}$$

и замечая, что $\varphi(25) = 25\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 20$, найти нужное частное значение x так

$$x \equiv \frac{3}{34} \equiv 3 \cdot 34^{19} \equiv 3 \cdot 9^{19} \pmod{25}.$$

Далее, найдем по модулю 25

$$9^2 \equiv 6; \quad 9^3 \equiv 54 \equiv 4; \quad 9^4 \equiv 36 \equiv 11; \quad 9^8 \equiv 21 \equiv -4;$$
$$9^{16} \equiv 16; \quad 9^{19} \equiv 4 \cdot 16 \equiv 14.$$

Таким образом,

$$x \equiv 3 \cdot 14 \equiv -8 \pmod{25}.$$

Действительно, $-8 \cdot 34 - 3 = -272 - 3 = -275$ делится на 25, давая в частном -11. Мы можем, стало быть, положив $x = -8$, $y = 11$, представить общее решение исходного неопределенного уравнения (ср. стр. 403, § 107) в виде

$$x = 25t - 8; \quad y = 11 - 34t,$$

где t — произвольное целое число.

§ 117. Теорема Вильсона.

Рассмотрим теперь несколько подробнее распределение чисел a и $a' = \frac{1}{a}$ в системе положительных вычетов по *простому* модулю.

Как вытекает из предыдущего, каждому вычету α_i из системы чисел

$$1, 2, 3, \ldots, p-1$$

соответствует вычет $\alpha_i' \equiv \frac{1}{\alpha_i} \pmod{p}$ той же системы, удовлетворяющий сравнению

$$\alpha_i \alpha_i' \equiv 1 \pmod{p}.$$

При этом несравнимым между собой вычетам α_i соответствуют и различные обратные по отношению к ним вычеты α_i', так как условие $\alpha_i' \equiv \alpha_j'$ влечет за собою $(\alpha_i - \alpha_j)\alpha_i \equiv 0 \pmod p$, что возможно лишь при $\alpha_i \equiv \alpha_j \pmod p$.

Выясним, в каких случаях обратная величина α_i' вычета α_i совпадает с самим вычетом α_i, так что $\frac{1}{\alpha_i} \equiv \alpha_i$ или

$$\alpha_i^2 \equiv 1 \pmod p.$$

Соотношение

$$\alpha_i^2 - 1 = (\alpha_i - 1)(\alpha_i + 1) \vdots p$$

может выполняться в двух случаях:

1) либо когда $\alpha_i - 1 \vdots p$ и, стало быть, $\alpha_i = 1$, либо когда
2) $\alpha_i + 1 \vdots p$ и, стало быть, $\alpha_i = p - 1$.

В этих и *только в этих двух* случаях, соответствующих сравнениям

$$1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod p$$

и

$$(p-1)^2 = p^2 - 2p + 1 \equiv 1 \pmod p,$$

числа α_i и α_i' совпадают. Так как $p - 1 \equiv -1 \pmod p$, то оба эти случая соответствуют обычным числовым тождествам

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{-1} = -1.$$

Оставляя пока в стороне вычеты 1 и $p-1$, мы можем, таким образом, утверждать, что при $p > 3$ остальные $p - 3$ вычета

$$2, 3, 4, \ldots, p-2,$$

имеющиеся в *четном* числе, могут быть сгруппированы в

$$\mu = \frac{p-3}{2}$$

пар взаимно-обратных вычетов так, что в системе этих пар

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_1', \quad \alpha_2 \text{ и } \alpha_2', \ \ldots, \ \alpha_\mu \text{ и } \alpha_\mu'$$

каждое из чисел 2, 3, 4, ... $p-2$ представлено один и только один раз. Поэтому, перемножая соответствующие сравнения по модулю p

$$\alpha_1\alpha_1' \equiv 1; \quad \alpha_2\alpha_2' \equiv 1; \quad \ldots; \quad \alpha_\mu\alpha_\mu' \equiv 1,$$

мы найдем, что сравнение

$$\alpha_1\alpha_1'\alpha_2\alpha_2' \ldots \alpha_\mu\alpha_\mu' \equiv 1 \pmod p$$

можно записать в виде

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-2) \equiv 1 \pmod p.$$

Перемножая почленно это сравнение и сравнение

$$p - 1 \equiv -1 \pmod p,$$

мы найдем

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (p-2)(p-1) \equiv -1 \pmod{p},$$

т. е.

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Это сравнение, утверждающее, таким образом, делимость суммы $(p-1)!+1$ на p при p простом, и составляет содержание так называемой теоремы Вильсона (Wilson), замечательной тем, что утверждение ее обратимо.

Действительно, если n число составное, равное, скажем, произведению $p_1 n_1$, где $p_1 < n-1$ простое число, то первое слагаемое $(n-1)!$ суммы $(n-1)!+1$ должно делиться на p_1, откуда вытекает, что сумма $(n-1)!+1$ на p_1, а, стало быть, и подавно, на $n=p_1 n_1$ делиться не может. Этим доказана

Теорема. *Число n есть число простое в том и только в том случае, когда $(n-1)!+1$ делится на n.*

§ 118. О числе решений сравнений высших степеней.

1. Докажем две нужные для дальнейшего теоремы, относящиеся к сравнениям высших степеней вида

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{p} \qquad (1)$$

по простому модулю, решением которых мы здесь заниматься не будем.

Теорема 1. *Всякое сравнение типа $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ можно заменить эквивалентным ему сравнением не выше $p-1$ степени по тому же модулю.*

Доказательство. Согласно теореме Ферма для всякого значения x имеют место сравнения по модулю p

$$x^p \equiv x; \quad x^{p+1} \equiv x^2; \quad x^{p+2} \equiv x^3; \ldots$$

и вообще

$$x^n = x^{k(p-1)+r} \equiv x^r \pmod{p},$$

где r есть остаток от деления числа n на число $p-1$.

Произведя в сравнении (1) соответствующую замену степеней x, высших нежели $(p-1)$-я степень, сравнимыми с ними низшими степенями, придем к сравнению типа

$$a_0 x^{p-1} + a_1 x^{p-2} + \ldots + a_p \equiv 0 \pmod{p},$$

равносильному с исходным.

Теорема 2. *Сравнение n-й степени* (можно теперь ограничиться случаем $n \leqslant p-1$) *вида*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod{p},$$

в котором, следовательно, коэфициент

$$a_n \not\equiv 0 \pmod{p},$$

может иметь не больше n несравнимых между собой (по модулю p) *решений.*

Это было нами доказано выше (§ 93) для случая $n=1$. Предполагая, что утверждение теоремы оправдано для сравнений степени $n-1$, рассмотрим сравнение n-й степени (1) и допустим, что оно имеет частное решение $x=x_1$. Вычитая почленно из сравнения (1) получающееся из него при $x=x_1$ сравнение

$$a_0x_1^n+a_1x_1^{n-1}+\ldots+a_n\equiv 0 \pmod{p},$$

найдем, по сокращении на

$$x-x_1 \ [\text{при } x-x_1\not\equiv 0 \pmod{p}],$$

что всякое решение x сравнения (1), несравнимое с x_1, должно удовлетворять сравнению $(n-1)$-й степени

$$a_0(x^{n-1}+x^{n-2}x_1+\ldots+x_1^{n-1})+a_1(x^{n-2}+\\+x^{n-3}x_1+\ldots+x_1^{n-2})+\ldots+a_{n-1}\equiv 0 \pmod{p},$$

которое, по допущению, имеет не более $n-1$ различных (по модулю p) решений.

Стало быть, сравнение (1) имеет не более n таких решений и теорема доказана по методу полной математической индукции.

Доказанную теорему можно формулировать и так: *сравнение n-й степени может иметь более n несравнимых между собой решений в том и только в том случае, если все коэфициенты при различных степенях x сравнимы с нулем по модулю p* (ср. аналогичную и так же доказывающуюся теорему для алгебраических уравнений).

2. С помощью теорем 1 и 2 можно получить простое, но несколько искусственное доказательство теоремы Вильсона, рассматривая сравнение

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-(p-1))\equiv 0 \pmod{p}. \qquad (2)$$

После замены здесь старшей степени x^p первой степенью x^1 сравнение (2) можно рассматривать как сравнение не выше $(p-1)$-й степени с коэфициентом при x, равным

$$(p-1)!+1.$$

С другой стороны, сравнение (2) в первоначальном, а следовательно, и в преобразованном виде удовлетворяется при $x=0, 1, 2, 3, \ldots p-1$, и, стало быть, число *различных решений* (равное p), *больше степени* сравнения, равной $p-1$. Это возможно лишь, по теореме 2, если в преобразованном сравнении все коэфициенты, в том числе и коэфициент при x, сравнимы с нулем по модулю p, так что

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p}.$$

Рассуждение это, в частности, показывает, что путь, аналогичный обычному алгебраическому приему составления уравнения, имеющего заданные корни, не может привести к нетождественному сравнению, имеющему решениями полную систему вычетов 0, 1, 2, ... (p 1) по модулю p. Читатель, отчетливо усвоивший понятие о сравнении, должен уже в самой этой формулировке почувствовать противоречие: сравнение типа (1) по модулю p, удовлетворяющееся для элементов *полной системы вычетов* в силу следствия 3 § 112, уже тем самым *удовлетворяется при всех значениях x* и есть, в *этом* смысле, *тождественное* сравнение. Рассуждения, проведенные выше при доказательстве теорем 1 и 2, показывают, что такие „тождественные" сравнения равносильны сравнению Ферма $x^p - x \equiv 0 \pmod p$, т. е. *по использовании этого последнего* должны обратиться в *тождественные сравнения* уже *и в другом смысле слова:* все их коэфициенты должны быть *нулями* по модулю p, в соответствии с теоремой 2. Как раз это обстоятельство мы и использовали здесь для доказательства теоремы Вильсона.

§ 119. Степенные вычеты. Первообразные корни простого модуля.

1. Перейдем теперь к изучению операции возвышения в степень с точки зрения сравнений, ограничиваясь здесь исключительно тем случаем, когда модуль есть простое число.

Рассмотрим систему последовательных степеней некоторого числа a, взаимно-простого с модулем p

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^n,\ \ldots$$

Так как несравнимых между собой по модулю p и не делящихся на p чисел может быть не более $p-1$, то в систем степеней a должны быть сравнимые между собой числа. Исследуем, каково их расположение в приведенной последовательности.

Пусть первое повторение, считая от начала последовательности встретилось при

$$a^s \equiv a^t \pmod p, \text{ где } s = t + k > t.$$

Тогда

$$a^k \equiv a^{s-t} \equiv 1 \pmod p$$

и повторение будет *первым*, если $t = 1$, $s = 1 + k$, так что

$$a^{k+1} \equiv a \pmod p.$$

Производя деление любого показателя n на найденное число k и полагая $n = qk + r$, где $0 \leqslant r < k$, получим

$$a^n \equiv a^{qk} a^r \equiv a^r \pmod p.$$

Таким образом, среди первых k степеней

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^r,\ \ldots,\ a^k \equiv 1$$

нет сравнимых между собой по модулю p, начиная же с показателя $n = k + 1$, начинается *периодическое повторение* тех же вычетов с *периодом из k последовательных степеней a*, так что

$$a^{k+1}\equiv a,\ a^{k+2}\equiv a^2,\ \ldots,\ a^{2k}\equiv 1,$$
$$a^{2k+1}\equiv a,\ a^{2k+2}\equiv a^2,\ \ldots,\ a^{3k}\equiv 1 \text{ и т. д.}$$

(по модулю p).

В частности, $a^n\equiv 1 \pmod p$ тогда и *только тогда*, когда $n=qk$; если же $n=qk+r$, где $r>0$, то $a^n\equiv a^r\not\equiv 1 \pmod p$.

Так как, с другой стороны, по теореме Ферма

$$a^{p-1}\equiv 1 \pmod p,$$

то из только что сказанного следует, что должно быть $p-1=$ $=qk$, так что *длина периода k есть делитель числа $p-1$*.

Число k, являющееся *наименьшим положительным показателем*, для которого при данном a выполняется соотношение

$$a^k\equiv 1 \pmod p,$$

носит название **показателя, к которому принадлежит число a по модулю p**.

Особый интерес представляет случай, когда этот показатель совпадает с числом $p-1$, так что среди $p-1$ несравнимых по модулю p чисел

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots\ \ a^k=a^{p-1}\equiv 1$$

представлены *все классы* приведенной системы вычетов по модулю p.

Числа a, обладающие этим свойством, т. е. принадлежащие к показателю $p-1$ по модулю p, носят название **первообразных корней** простого числа p.

2. Докажем существование первообразных корней для всякого простого модуля.

Предварительно попытаемся выяснить, к каким показателям принадлежат числа периода

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{k-1},\ a^k\equiv 1,$$

порождаемого числом a, принадлежащим к показателю k по модулю p.

Так как сравнение $(a^r)^n=a^{rn}\equiv 1 \pmod p$, согласно сказанному выше, возможно лишь при

$$rn\equiv 0 \pmod k,$$

то для $\varphi(k)$ значений r, *взаимно-простых* с показателем k, мы получаем для n сравнение

$$n\equiv 0 \pmod k$$

с наименьшим положительным решением $n=k$.

Отсюда следует, что степени числа a

$$a^{r_1},\ a^{r_2},\ \ldots,\ a^{r_{\varphi(k)}},$$

получаемые при значениях r, входящих в приведенную систему вычетов по модулю k

$$r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(k)},$$

будут принадлежать *тому же показателю* k по модулю p, что и само число a.

Если же r есть делитель нуля по модулю k, то сравнению

$$rn \equiv 0 \pmod k$$

можно, как мы видели на странице 441, удовлетворить значениями n, меньшими k, положив, например, $n = k:(r, k)$. Соответствующие степени a^r числа a будут, стало быть, принадлежать по модулю p *к показателям, меньшим* k и являющимся делителями k.

Замечая, с другой стороны, что каждое из k несравнимых между собой по модулю p чисел

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{k-1}, a^k \equiv 1$$

удовлетворяет, во всяком случае, сравнению k-й степени

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod p,$$

по теореме 2 § 118 заключаем, что *никакие другие числа* полной приведенной системы вычетов $1, 2, 3, \ldots p-1$ по модулю p не могут уже удовлетворять тому же самому сравнению и, стало быть, среди них не приходится уже искать чисел, принадлежащих к показателю k по модулю p.

Из изложенного вытекает следующее положение, которое мы немедленно используем:

Лемма. *Если k есть какой-либо делитель числа $p-1$, то либо нет ни одного числа, принадлежащего к показателю k по модулю p, либо (если хоть одно такое число a есть) существует ровно $\varphi(k)$ несравнимых между собой чисел, принадлежащих к показателю k по модулю p.*

Отсюда уже непосредственно будет следовать

Теорема. *Для всякого простого числа p существует ровно $\varphi(p-1)$ первообразных корней, несравнимых между собой по модулю p.*

Для доказательства распределим все $p-1$ чисел

$$1, 2, 3, \ldots, p-1$$

по показателям, к которым они принадлежат по модулю p. Все эти показатели суть делители числа $p-1$. Представим себе, что все эти делители d_i выписаны в строку и под каждым из них отмечено число чисел системы $1, 2, 3, \ldots p-1$, принадлежащих к соответствующему показателю d_i. Это число чисел, согласно лемме, может быть *либо нулем, либо* $\varphi(d_i)$. Мы получим таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & d_1, & \ldots, & d_i, & \ldots, & p-1 \\ \varphi(1) & \varphi(d_1) & \ldots & \varphi(d_i) & \ldots & \varphi(p-1) \\ \text{или} & \text{или} & & \text{или} & & \text{или} \\ 0 & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Если предположить, что в этой таблице каждому делителю соответствует число $\varphi(d_i)$, так что нули ни разу не встречаются, то общее число распределенных по показателям чисел будет равно

$$\varphi(1)+\varphi(d_1)+\ldots+\varphi(d_i)+\ldots\ \varphi(p-1),$$

т. е. по теореме 2 § 110 (стр. 431) как раз равно числу

$$\sum_{d/p-1}\varphi(d)=p-1$$

распределяемых чисел $1, 2, 3, \ldots, p-1$.

Если же допустить, что *хоть в одном столбце* таблицы вместо числа $\varphi(d_i)$ находится *нуль*, то общее число распределенных чисел неминуемо окажется меньше числа $p-1$, что, очевидно, невозможно, так как каждое число системы $1, 2, \ldots, p-1$ должно ведь принадлежать какому-нибудь показателю.

Отсюда следует, что нулей в таблице встретится не может, так что *число несравнимых между собой чисел, принадлежащих показателю $d_i/p-1$ по модулю p, равно* $\varphi(d_i)$, а в частности — число первообразных корней модуля p равно $\varphi(p-1)$.

Предоставляем читателю убедиться непосредственным вычислением, что первообразные корни числа 5 суть 2 и 3, числа 7 — 3 и 5, числа 11 — 2, 6, 7, 8.

3. Изложенная теория частично может быть обобщена на случай составного модуля m, для которого число $p-1$ в соответствии с теоремой Эйлера следует заменить на $\varphi(m)$. Теорема о существовании первообразных корней в общем случае для составного модуля, однако, неверна.

Заметим еще, что основные теоремы теории степенных вычетов, доказанные нами в начале настоящего параграфа, представляют собой не что иное, как применение простейших общих предложений теории конечных групп к частному случаю конечной группы, которую образуют приведенные вычеты по простому модулю относительно операции умножения. Выделенные нами периоды $a, a^2, \ldots, a^k$ 1 представляют собой соответствующие *циклические подгруппы* порядка k указанной группы порядка $p-1$. Соотношение $k/p-1$ есть частный случай теоремы о том, что порядок подгруппы есть делитель порядка группы.

§ 120. Теория индексов и ее приложения.

1. Если α — первообразный корень числа p, то, как было сказано выше, среди степеней

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \ldots,\ \alpha^{p-1}\quad 1 \tag{1}$$

числа α представлены *все классы* приведенной системы вычетов по модулю p.

В силу этого при производстве операций над числами по модулю p можно пользоваться системой (1) представителей классов по модулю p наравне с системой представителей $1, 2, 3, \ldots, p-1$.

В отношении действий умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корня это дает преимущества, аналогичные тем, которые в обычной числовой системе получаются при переходе к представлению чисел в показательной форме, т. е. при пользовании логарифмами.

С этой целью и здесь можно построить таблицу, позволяющую для данного простого числа p и выбранного первообразного корня α находить для каждого класса чисел по модулю p, *заданного своим наименьшим положительным вычетом* β, соответствующий *показатель степени* r, для которого число α^r принадлежит тому же классу, что и β, так что

$$\beta \equiv \alpha^r \pmod{p}.$$

Это число r, определенное, в соответствии с периодической повторяемостью классов в системе степеней числа α, с точностью до кратного $p-1$ (иными словами, по модулю $p-1$), называется **индексом числа β при основании α по модулю p** и обозначается знаком:

$$r = \mathrm{Ind}_\alpha \beta$$

или просто

$$r = \mathrm{Ind}\,\beta.$$

Из соотношений

$$\beta \equiv \alpha^r \pmod{p}, \qquad \gamma \equiv \alpha^s \pmod{p}$$

легко выводятся следующие теоремы, аналогичные основным теоремам теории логарифмов. Так

$$\mathrm{Ind}(\beta\gamma) \equiv \mathrm{Ind}\,\beta + \mathrm{Ind}\,\gamma \pmod{(p-1)}.$$

Действительно, перемножая написанные выше сравнения, найдем:

$$\beta\gamma \equiv \alpha^{r+s} \pmod{p},$$

откуда, полагая

$$\beta\gamma \equiv \alpha^t \pmod{p},$$

находим:

$$\alpha^t \equiv \alpha^{r+s} \pmod{p},$$

что возможно, как мы знаем, лишь при $t = r + s + n(p-1)$ или

$$t \equiv r + s \pmod{(p-1)}.$$

А это и есть написанное выше соотношение между индексами.

Аналогично доказывается

$$\mathrm{Ind}\,\frac{\beta}{\gamma} \equiv \mathrm{Ind}\,\beta - \mathrm{Ind}\,\gamma \pmod{(p-1)}$$

и

$$\mathrm{Ind}(\beta^m) \equiv m\,\mathrm{Ind}\,\beta \pmod{(p-1)}.$$

Для перехода от одного основания индексов α к другому β достаточно заметить, что при

$$\beta \equiv \alpha^k \pmod{p} \text{ и } \gamma \equiv \beta^r \pmod{p}, \quad \gamma \equiv \alpha^s \pmod{p}$$

будем иметь:

$$\alpha^s \quad \alpha^{kr} \pmod{p},$$

так что

$$s \equiv kr \pmod{(p-1)}$$

или

$$\mathrm{Ind}_\alpha\gamma \equiv \mathrm{Ind}_\alpha\beta \cdot \mathrm{Ind}_\beta\gamma \pmod{(p-1)}.$$

2. Для нахождения индексов по данному вычету и, обратно, вычета по данному индексу построены таблицы для простых модулей, не превышающих 2000. В сочинении Якоби (Jacobi) Canon Arithmeticus (1839) таблицы даны для простых чисел до 1000. Извлечения из этих таблиц читатель может найти в книгах Граве „Элементарная теория чисел" и Чебышева „Теория сравнений".

В силу перечисленных свойств, таблицы индексов позволяют без труда находить решения сравнений первой степени, а также решать двучленные сравнения (по простому модулю) более высоких степеней (доказывать отсутствие решений или находить их, если они есть).

Так, для решения сравнения

$$ax \equiv b \pmod{p}$$

достаточно найти $\mathrm{Ind}\,x$ из соотношения

$$\mathrm{Ind}\,x = \mathrm{Ind}\,\frac{b}{a} \equiv \mathrm{Ind}\,b - \mathrm{Ind}\,a \pmod{(p-1)}$$

и затем с помощью тех же таблиц по $\mathrm{Ind}\,x$ найти x.

Аналогично, для решения сравнения

$$ax^n \equiv b \pmod{p}$$

составляем сравнение

$$n\,\mathrm{Ind}\,x \equiv \mathrm{Ind}\,b - \mathrm{Ind}\,a \pmod{(p-1)}.$$

Так как здесь модуль $p-1$ число составное, то это сравнение может и не иметь решений, а может иметь их и несколько. Соответственно этим случаям найдем по таблицам одно или несколько значений x или убедимся в том, что предложенное сравнение решений не имеет.

Приведем в качестве примера таблицу индексов для модуля 11 при основании 2.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{Ind}\,N$	0	1	8	2	4	9	7	3	6	3

Смысл ее, стало быть, таков. По модулю 11:

$$1 \equiv 2^{10};\ 2 \equiv 2^1;\ 3 \equiv 2^8;\ 5 \equiv 2^4 \text{ и т. д.}$$

1) Произведем умножение по модулю 11 с помощью этой таблицы.

$$\mathrm{Ind}\,(6 \cdot 7) \equiv \mathrm{Ind}\,6 + \mathrm{Ind}\,7 \equiv 9 + 7 \equiv 6 \pmod{10},$$

так что $6 \cdot 7 \equiv 9 \pmod{11}$.

2) Определим показатель, к которому принадлежит 9 по модулю 11. Сравнение

$$9^k \equiv 1 \pmod{11}$$

приводит к

$$k \operatorname{Ind} 9 \equiv 0 \pmod{10}$$

или

$$k \cdot 6 \equiv 0 \pmod{10}.$$

Отсюда заключаем, что $3k \equiv 0 \pmod 5$ или $k \equiv 0 \pmod 5$, так что наименьшее значение k есть 5, и 9 принадлежит к показателю 5 по модулю 11.

3) Решим сравнение

$$7x \equiv 6 \pmod{11}.$$

Находим:

$$\operatorname{Ind} x \equiv \operatorname{Ind} 5 - \operatorname{Ind} 7 \equiv 4 - 9 \equiv -5 \equiv 5 \pmod{10},$$

так что

$$x \equiv 10 \pmod{11}.$$

4) Решая сравнение

$$x^2 \equiv 3 \pmod{11},$$

получим

$$2 \operatorname{Ind} x \equiv \operatorname{Ind} 3 \equiv 8 \pmod{10},$$

откуда

$$\operatorname{Ind} x \equiv 4 \pmod 5.$$

Это дает для $\operatorname{Ind} x$ значения 4 и 9, соответственно которым и получим два решения исходного сравнения

$$x \equiv 5 \pmod{11} \text{ и } x \equiv 6 \pmod{11}$$

(квадратные корни из 3 по модулю 11).

5) Сравнение

$$x^2 \equiv 8 \pmod{11}$$

решений не имеет, так как для $\operatorname{Ind} x$ получаем сравнение

$$2 \operatorname{Ind} x \equiv \operatorname{Ind} 8 \equiv 3 \pmod{10},$$

не имеющее решений вследствие того, что 3 не делится на общий делитель модуля левой части, равный 2. Стало быть никакой квадрат не есть число вида $11n+8$.

3. В заключение настоящего параграфа отметим следующие предложения, вытекающие из совместного рассмотрения теории индексов и теоремы Ферма для *нечетного простого модуля* p

Применяя к $a \not\equiv 0 \pmod p$ теорему Ферма в форме

$$a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) \equiv 0 \pmod p,$$

заключаем, что для каждого числа a, не делящегося на p, имеет место одно и (в силу $p > 2$) только одно из двух сравнений

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$$

либо

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Для *первообразного корня* α в силу неравенства $\frac{p-1}{2} < p-1$ сравнение $\alpha^{\frac{p-1}{2}} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ не имеет места и, стало быть,

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

так что для всякого первообразного корня α простого числа p

$$\mathrm{Ind}_\alpha(-1) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{(p-1)}.$$

Из этого соотношения вытекает как простое следствие уже дважды доказанная нами теорема Вильсона. В самом деле, при $p > 2$

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots (p-1) \equiv \alpha \cdot \alpha^2 \cdot \ldots \alpha^{p-1} \equiv \alpha^{\frac{(p-1)p}{2}} \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod{p}.$$

Пусть теперь α опять означает *любой* элемент приведенной системы вычетов по простому модулю $p > 2$.

Если $\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, то

$$\frac{p-1}{2} \mathrm{Ind}\, \alpha \equiv p-1 \pmod{(p-1)}$$

или $\frac{1}{2} \mathrm{Ind}\, \alpha \equiv 1 \pmod{1}$, так что $\mathrm{Ind}\, \alpha$ — число *четное*.

Если же $\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, то

$$\frac{p-1}{2} \mathrm{Ind}\, \alpha \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{(p-1)}$$

или $\mathrm{Ind}\, \alpha \equiv 1 \pmod{2}$, так что $\mathrm{Ind}\, \alpha$ — число *нечетное*.

В силу этого критерий

$$\alpha^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p} \qquad (*)$$

может служить для отличения случаев, когда сравнение

$$x^2 \equiv \alpha \pmod{p}$$

имеет решения [*верхний* знак в сравнении (*), *четный* индекс α], от тех, когда оно не имеет решений [*нижний* знак в сравнении (*), *нечетный* индекс α]. В первом случае число α называется **квадратичным вычетом** модуля p, во втором — **квадратичным невычетом.**

Определение того, является ли данное число вычетом или невычетом, упрощается при пользовании двучленным символом $\left(\frac{a}{p}\right)$, носящим название **символа Лежандра** (Legendre) и имеющим значения $+1$ или -1 в соответствии со знаком правой части сравнения (*).

Подробности здесь интересны, хотя и не заслуживают, быть может, отводимого им по традиции места в *элементарных* курсах теории чисел (ср. учебник Егорова и др.).

§ 121. Приложения теории степенных вычетов к вопросам элементарной арифметики.

Рассмотрим в заключение два вопроса, связанных с элементарным курсом арифметики, в которых находит свое приложение теория степенных вычетов.

1. Для установления признака делимости числа N, заданного в десятичной системе счисления, на число m достаточно, как мы видели выше, составить таблицу вычетов последовательных степеней числа 10 по модулю m. Эта таблица будет периодической с периодом, охватывающим k последовательных степеней, где k есть показатель, к которому принадлежит 10 по модулю m.

Если $m=p$ есть простое, отличное от 2 и 5 число, то, как было только что показано,

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}, \tag{1}$$

причем в том случае, когда 10 есть первообразный корень числа p, имеет место (стр. 464) *нижний* знак:

Отсюда вытекает, что, разбивая число N на грани по $\frac{p-1}{2}$ цифр в каждой грани, т. е. переходя к системе счисления с основанием $10^{\frac{p-1}{2}}$, мы придем к признаку делимости, аналогичному признаку делимости на 9 или на 11 в зависимости от того, какой знак имеет место в сравнении (1).

В рассмотренном нами в § 112 примере $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$ и лишь $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$, так что 10 есть первообразный корень по модулю 7. Период состоит из 6 цифр, однако, при $r_1 = 3 + r$ мы получаем $10^{r_1} \equiv -10^r$ и, разбивая, соответственно с соотношением $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$, число N на грани по $3 = \frac{7-1}{2}$ цифры в каждой, мы и приходим к признаку делимости на 7, аналогичному признаку делимости на 11.

Если же 10 не есть первообразный корень числа p, а принадлежит по модулю p к показателю k, то мы будем иметь для четного k

$$10^{\frac{k}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

и, соответственно, признаки делимости указанных видов для системы счисления с основанием $10^{\frac{k}{2}}$. Это как раз имеет место для самого числа 11 при $k=2$.

Отсюда непосредственно следует, между прочим, что признак делимости, аналогичный признаку делимости на 11, может всегда быть заменен признаком, аналогичным признаку делимости на 9, если удвоить число цифр в основании $10^{\frac{k}{2}}$, т. е. перейти к основанию 10^k.

В частности, можно и признак делимости на 11 формулировать так: остаток от деления числа N на 11 равен остатку от деления на 11 суммы двузначных чисел, образованных соответствующими гранями числа N при разбиении от правой руки к левой. Этот признак, основанный на соотношении $10^2 \equiv 1 \pmod{11}$, обычно выпадает из элементарного изложения, несмотря на то, что установление и применение его довольно просто.

Наконец, если показатель k, к которому принадлежит 10 по модулю p, нечетный, то сравнение $10^s \equiv -1 \pmod{p}$ невозможно ни при каком s, так как из него следовало бы $10^{2s} \equiv 1 \pmod{p}$, откуда $2s \vdots k$ и $s \vdots k$, так что $10^s \equiv +1$, а не с -1 по модулю p. В этом случае признака, аналогичного признаку делимости на 11, установить нельзя. Это и имеет как раз место для $p=3$, так как здесь уже $10^1 \equiv 1 \pmod 3$. Точно так же для $p=37$ найдем $10^2 \equiv -11$ и $10^3 \equiv +1 \pmod{37}$, так что $k=3$.

Для числа 37 можно, стало быть, установить известный признак делимости, основанный на суммировании граней числа, по 3 цифры в каждой грани, и аналогичный признаку делимости на 9.

Рассматривая не только сравнение $10^k \equiv 1 \pmod{p}$, а и предшествующие ему сравнения

$$10 \equiv \alpha_1,\ 10^2 \equiv \alpha_2,\ \ldots,\ 10^{k-1} \equiv \alpha_{k-1} \pmod{p},$$

всегда можно формулировать признак делимости числа N на число p, взаимно простое с 10, требующий оперирования лишь с цифрами $a_0, a_1, a_2, \ldots$ числа

$$N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_k \cdot 10^k + \\ + a_{k+1} \cdot 10^{k+1} + \ldots$$

по закону, соответствующему сравнению

$$N \equiv a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_{k-1} a_{k-1} + \\ + a_k + \alpha_1 a_{k+1} + \alpha_2 a_{k+2} + \ldots + \alpha_{k-1} a_{2k-1} + \ldots \pmod{p},$$

или, что то же, сравнению

$$N \equiv (a_0 + a_k + a_{2k} + \ldots) + \\ + \alpha_1 (a_1 + a_{k+1} + a_{2k+1} + \ldots) + \ldots + \alpha_{k-1} (a_{k-1} + a_{2k-1} + \ldots) \pmod{p}.$$

Множители $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ можно выбрать при этом, если вводить отрицательные числа, так, чтобы абсолютная величина их не превышала числа $\frac{p-1}{2}$. Пример был нами указан в § 112 для $p=7$. Для числа $p=37$ можно, аналогично, установить такой признак делимости: из суммы цифр числа N, стоящих на нечетных местах, следует вычесть сумму цифр, стоящих на четных местах, умноженную на 11. Результат в силу сравнения $10^2 \equiv -11 \pmod{37}$ будет число, сравнимое с N по модулю 37.

2. Совершенно аналогично тому, как это было проведено для десятичной системы счисления, можно установить общие предложения, характеризующие признаки делимости в любой системе счисления с основанием q.

Представляя всякое натуральное число N в виде

$$N=a_0+a_1q+a_2q^2+\ldots+a_lq^l,$$

где $0 \leqslant a_i < q$ при $i=1, 2, \ldots, l$, замечаем, прежде всего, что признаки делимости числа N на простые числа, делящие основание q, аналогичны признакам делимости на 2 и 5 в десятичной системе счисления. Именно, при $p \vdots q$ мы будем иметь $N \equiv a_0 \pmod{p}$ и, стало быть, вопрос решается первой цифрой a_0 числа N.

Если же p не есть делитель q, то в том случае, когда q принадлежит к показателю k по модулю m, так что

$$q^k \equiv 1 \pmod{m},$$

мы можем составить таблицу вычетов

$$q \equiv \alpha_1, \quad q^2 \equiv \alpha_2, \quad \ldots, \quad q^{k-1} \equiv \alpha_{k-1}$$

последовательных степеней q по модулю m и написать

$$N \equiv a_0+\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_{k-1}a_{k-1}+ \\ +a_k+\alpha_1a_{k+1}+\alpha_2a_{k+2}+\ldots+\alpha_{k-1}a_{2k-1}+\ldots \pmod{m}.$$

Это сравнение выражает в системе счисления с основанием q признак делимости на число m в довольно общей форме. В частности, для делителей m числа $q-1$ имеет место сравнение

$$q \equiv 1 \pmod{m},$$

и мы приходим к признаку делимости, аналогичному признаку делимости на 9 в десятичной системе счисления, именно

$$N \equiv a_0+a_1+a_2 \ldots \pmod{(q-1)}.$$

Для делителей числа $m=q+1$, для которых $q \equiv -1 \pmod{m}$, мы придем к признаку, аналогичному признаку делимости на 11 в десятичной системе счисления, именно

$$N \equiv a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+\ldots \pmod{(q+1)}.$$

Если показатель k, к которому принадлежит q по модулю p, — четный, то мы будем иметь:

$$q^{\frac{k}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

и потому, переходя к системе счисления с основанием $q^{\frac{k}{2}}$ (что соответствует рассмотрению граней по $\frac{k}{2}$ цифр при первоначальном основании q), мы получим признак делимости на p, аналогичный признаку делимости на 7 в десятичной системе счисления при $\frac{k}{2}=3$.

В системе же счисления с основанием q^k, в силу сравнения

$$q^k \equiv 1 \pmod{p},$$

будет иметь место признак делимости на p, основанный на суммировании цифр (в исходной системе счисления суммирование чисел, образованных гранями по k цифр числа N).

3. Перейдем теперь к вопросу о разложении рациональных дробей в периодические систематические дроби, тесно связанному с теорией степенных вычетов. Мы будем иметь в виду основание системы счисления, равное 10, хотя рассуждения остаются в силе для общего случая.

Рассмотрим сначала обращение в десятичную дробь дроби $\frac{1}{p}$ и дробей типа $\frac{m}{p}$, где m есть один из приведенных вычетов по модулю p, а p простое число, отличное от 2 и 5. Совокупность дробей $\frac{m}{p}$ этого типа есть, как нетрудно видеть, не что иное, как приведенная система вычетов по модулю $\frac{1}{p}$

Если 10 принадлежит к показателю k по модулю p, так что

$$10^k \equiv 1 \pmod{p},$$

то $\frac{10^k-1}{p}=P$, где P целое число (содержащее не более k цифр), откуда следует

$$\frac{1}{p}=\frac{P}{10^k}+\frac{1}{10^k}\frac{1}{p}.$$

Заменяя здесь вновь $\frac{1}{p}$ его выражением через P, найдем

$$\frac{1}{p}=\frac{P}{10^k}+\frac{P}{10^{2k}}+\frac{1}{10^{2k}}\cdot\frac{1}{p}.$$

Продолжая так далее, мы придем к разложению $\frac{1}{p}$ в периодическую десятичную дробь

$$\frac{1}{p}=\frac{P}{10^k}+\frac{P}{10^{2k}}+\frac{P}{10^{3k}}+\ldots,$$

период которой содержит k цифр, совпадающих с цифровым обозначением числа P, в случае надобности дополненным слева нулями до полного числа цифр в периоде, равного k.

Это утверждение равносильно тому, что при делении единицы с нулями на число p, путем которого осуществляется известный процесс обращения дроби $\frac{1}{p}$ в десятичную, мы получаем отличные друг от друга остатки вплоть до того момента, когда впервые встретится остаток 1, что и случится при приписывании k нулей к исходной единице в делимом. Начиная с этого места, остатки периодически повторяются с длиной периода k.

В случае, если 10 есть первообразный корень модуля p, число цифр в периоде равно $p-1$, а последовательные остатки пробегают полную приведенную систему вычетов по модулю p.

Если m есть один из таких приведенных вычетов, то можно поэтому найти такой показатель $k_1 \leqslant p-1$, что

$$10^{k_1} \equiv m \pmod{q},$$

или

$$\frac{10^{k_1}}{p} \equiv \frac{m}{p} \pmod{1},$$

так что разность

$$\frac{m}{p} - 10^{k_1} \cdot \frac{1}{p}$$

будет целым числом.

А это означает, что цифры периода дроби $\frac{m}{p}$ получаются из цифр периода дроби $\frac{1}{p}$ путем кругового смещения на

$$k_1 = \mathrm{Ind}_{10} m$$

знаков вправо.

Это как раз и соответствует тому, что в процессе обращения дроби $\frac{m}{p}$ в десятичную мы будем получать те же остатки, а стало быть, и те же цифры в разложении, которые получались при разложении дроби $\frac{1}{p}$, начиная с того места, когда остаток от деления единицы с приписанными k_1 нулями оказался равным числу m.

Так, например,

$$\frac{1}{7} = 0,\ (142857) \qquad \frac{4}{7} = 0,\ (571428)$$

$$\frac{2}{7} = 0,\ (285714) \qquad \frac{5}{7} = 0,\ (714285)$$

$$\frac{3}{7} = 0,\ (428571) \qquad \frac{6}{7} = 0,\ (857142).$$

Здесь $10^2 \equiv 2$; $10^1 \equiv 3$; $10^4 \equiv 4$; $10^5 \equiv 5$ и $10^3 \equiv 6 \pmod{7}$.

Если же 10 не есть первообразный корень числа p, так что

$$10^k \equiv 1 \pmod{p} \text{ при } k < p-1,$$

то возможные остатки

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \tag{1}$$

от деления степеней 10 на p не исчерпывают всех вычетов по модулю p и потому лишь для дробей

$$\frac{r_1}{p}, \frac{r_2}{p}, \ldots, \frac{r_k}{p} \tag{1'}$$

в периоде получаются круговые перестановки цифр периода дроби $\frac{1}{p}$.

Действительно, если s несравнимо с 10^r ни при каком r, то разность

$$\frac{s}{p} - \frac{10^r}{p} = \frac{s - 10^r}{p}$$

не может быть целым числом ни при каком значении r и, стало быть, периоды дробей $\frac{s}{p}$ и $\frac{1}{p}$ не могут быть получены один из другого круговой перестановкой.

Встречающиеся для такого значения s при обращении дроби $\frac{s}{p}$ в десятичную остатки суть вычеты

$$s_1, s_2, \ldots, s_k \tag{2}$$

по модулю p чисел

$$s \cdot 10,\ s \cdot 10^2,\ \ldots,\ s \cdot 10^k.$$

Все эти числа несравнимы между собой и несравнимы с ранее рассмотренными $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Действительно, $s \cdot 10^{k_1} \not\equiv s \cdot 10^{k_2}$, ибо $10^{k_1} \not\equiv 10^{k_2}$, когда k_1 и k_2 меньше $p-1$ и $s \cdot 10^{k_i} \not\equiv 10^{k_j}$, ибо s, по условию, несравнимо по модулю p ни с какой степенью 10-ти.

Так как из сравнения

$$s \cdot 10^{k_i} \equiv s_i \pmod{p}$$

или

$$\frac{s \cdot 10^{k_i}}{p} \equiv \frac{s_i}{p} \pmod{1}$$

вытекает, что разность

$$\frac{s_i}{p} - 10^{k_i} \cdot \frac{s}{p}$$

есть число целое, то при обращении в десятичную дробь мы получим для всех дробей системы

$$\frac{s_1}{p}, \frac{s_2}{p}, \ldots, \frac{s_k}{p} = \frac{s}{p} \tag{2'}$$

в периоде круговую перестановку одних и тех же цифр (и одну и ту же систему остатков $s_1, s_2, \ldots, s_k$ в промежуточных вычислениях). Период, как было показано выше при рассмотрении дроби $\frac{s}{p}$, не может быть получен из числа P круговой перестановкой.

Если $2k = p - 1$, так что совокупность остатков (1) и (2) исчерпывает уже всю приведенную систему вычетов по модулю p, то исследование закончено и две системы дробей (1′) и (2′), представляя полную систему вычетов по модулю $\frac{1}{p}$, дают исчерпывающий ответ на вопрос о цифрах периода всякой рациональной дроби типа $\frac{m}{p}$, так как всякая такая дробь, по выделении целого числа, приведется к одной из дробей вида (1′) или (2′).

Если же полная система вычетов по модулю p еще не исчерпывается числами r_i и s_i, то, взяв вычет, несравнимый ни с одним из этих чисел, мы можем продолжать процесс далее. В результате мы придем к распределению всех несравнимых между собой по модулю $\frac{1}{p}$ дробей на $(p-1):k$ систем

$$
\begin{array}{l}
\frac{r_1}{p}, \frac{r_2}{p}, \ldots, \frac{r_k}{p}, \\
\frac{s_1}{p}, \frac{s_2}{p}, \ldots, \frac{s_k}{p}, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\frac{w_1}{p}, \frac{w_2}{p}, \ldots, \frac{w_k}{p}.
\end{array}
$$

Здесь в числителях представлены уже все $p-1$ отличных от нуля вычетов по модулю p. В пределах одной системы (строки) периоды разложения дробей в десятичные состоят из круговых перестановок одних и тех же цифр. Периоды в разных строчках не могут быть получены друг из друга этим путем.

Приведем пример

$$
\begin{array}{lll}
\frac{1}{11} = 0,\ (09); & \frac{10}{11} = 0,\ (90); & 10^2 \equiv 1 \pmod{11}; \\
\frac{2}{11} = 0,\ (18); & \frac{9}{11} = 0,\ (81); & 2 \cdot 10 \equiv 9 \pmod{11}; \\
\frac{3}{11} = 0,\ (27); & \frac{8}{11} = 0,\ (72); & 3 \cdot 10 \equiv 8 \pmod{11}; \\
\frac{4}{11} = 0,\ (36); & \frac{7}{11} = 0,\ (63); & 4 \cdot 10 \equiv 7 \pmod{11}; \\
\frac{5}{11} = 0,\ (45); & \frac{6}{11} = 0,\ (54). & 5 \cdot 10 \equiv 6 \pmod{11}.
\end{array}
$$

4. С точки зрения теории конечных групп проведенное выше общее построение представляет собой не что иное, как выделение в мультипликативной группе вычетов по модулю p **смежных систем** по отношению к циклической подгруппе степеней числа 10. Вытекающая из построения делимость числа $p-1$ на число k доставляет при этом независимое от предыдущего доказательство теорем Ферма и Эйлера.

Заметим попутно следующее. Если удастся найти вычет $t \neq r_i$, принадлежащий к показателю $(p-1):k$ по модулю p, то строчки смежных систем

$$\begin{array}{l} r_1, r_2, \ldots, r_k, \\ s_1, s_2, \ldots, s_k, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_1, w_2, \ldots, w_k \end{array}$$

можно будет охарактеризовать с помощью степеней t, так что для любого вычета α приведенной системы найдем

$$\alpha \equiv t^l 10^k \pmod{p}.$$

Пара чисел l, k играет здесь роль комплексного индекса по *двум основаниям* t и 10, не являющимися первообразными корнями модуля p. В общем случае аналогичное рассуждение приводит к построению индексных систем по нескольким основаниям и для случая составного модуля.

5. Картина, аналогичная рассмотренной выше, имеет место и для дробей типа

$$\frac{m}{p^\alpha},$$

где p — простое число, отличное от 2 и 5. Период может здесь, соответственно с теоремой Эйлера, для случая, когда 10 есть первообразный корень модуля p^α, содержать

$$\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$$

цифр или, в противном случае, k цифр, где $k/\varphi(p^\alpha)$ есть показатель степени, к которому принадлежит 10 по модулю p^α. Здесь $p^{\alpha-1}(p-1)$ дробей полной системы вычетов по модулю $\frac{1}{p^\alpha}$ распадаются на $\varphi(p^\alpha):k$ систем по k дробей с циклическим перемещением одного и того же периода из k цифр в каждой системе.

Для решения вопроса в общем случае (дробь $\frac{m}{N}$ — какая угодно) можно воспользоваться **разложением арифметических дробей на простейшие дроби** типа

$$\frac{b}{p^k},$$

где p — простое число, а $0 \leqslant b < p$.

Для того чтобы притти к такому разложению, представим сначала дробь

$$\frac{m}{N}$$

со знаменателем

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

в виде суммы целого числа и правильных дробей со знаменателями, равными степеням простых чисел;

$$\frac{m}{N} = \frac{m_1}{p_1^{\alpha_1}} + \frac{m_2}{p_2^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{m_n}{p_n^{\alpha_n}} + M.$$

Здесь $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, меньшие $p_i^{\alpha_i}$, но, вообще говоря, *еще не* меньшие p_i.

Для доказательства возможности только что написанного разложения достаточно заметить, что так как числа

$$a_1 = p_1^{\alpha_1}, \quad a_2 = p_2^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad a_n = p_n^{\alpha_n}$$

попарно взаимно простые, то (§ 104, стр. 391—392) их наименьшее кратное $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ совпадает с их произведением $N = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Согласно теореме § 105 (стр. 393—394) мы можем поэтому найти целые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} = \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \ldots + \frac{x_n}{a_n}.$$

Умножая обе части этого равенства на m и выделяя целую часть в каждой из дробей, мы и придем к равенству требуемого типа.

Замечая, что при $m < p^\alpha$ можно положить

$$m = b_1 + b_2 p + b_3 p^2 + \ldots + b_{\alpha-1} p^{\alpha-1},$$

где $0 \leqslant b_i < p$ (p-адическое разложение числа m), мы можем, далее, заменить каждую дробь типа $\frac{m}{p^\alpha}$ суммой *несократимых простейших дробей*

$$\frac{b_1}{p^\alpha}, \quad \frac{b_2}{p^{\alpha-1}}, \quad \ldots \quad \frac{b_{\alpha-1}}{p}.$$

Предоставляем читателю в виде упражнения доказать *однозначность* получаемого таким образом окончательного разложения на простейшие дроби

$$\frac{m}{N} = M + \sum_{i,k} \frac{b_k^{(i)}}{p_i^{\alpha_k}} \qquad (0 \leqslant b_k^{(i)} < p_i),$$

во многом аналогичного применяемому в интегральном исчислении разложению алгебраических рациональных дробей.

Применяя указанное разложение числовой дроби на простейшие, мы сведем вопрос о характере результата, получаемого при обращении дроби $\frac{m}{N}$ *в десятичную дробь*, к рассмотренным выше случаям, когда знаменатель есть степень простого числа, отличного от 2 и 5, и известным элементарным представлениям дробей со знаменателями, равными степеням чисел 2 и 5.

Если при этом знаменатель N не содержит множителей 2 и 5, то мы придем к чистой периодической дроби, причем число цифр в периоде суммы $\frac{m}{N}$ определится, очевидно, как *наименьшее общее кратное* числа цифр в периодах каждого из слагаемых типа $\frac{b}{p^{\alpha}}$.

Если в разложении числа N на простые множители числа 2 и 5 входят соответственно в степенях m_1 и m_2, то, умножая дробь $\frac{m}{N}$ на степень 10 с показателем μ, равным *наибольшему из двух чисел* m_1 и m_2, мы избавимся от множителей 2 и 5 в знаменателе и придем, следовательно, к предыдущему случаю. Дробь $\frac{10^{\mu}m}{N}$ представится, таким образом, в виде суммы целого числа и чистой периодической дроби. Число цифр в периоде определится как наименьшее кратное K показателей, к которым принадлежит 10 по модулям, равным входящим в разложение знаменателя N простым числам p_1, p_2, ..., отличным от 2 и 5, и их степеням p_1^2, p_2^2, ... до $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, ... включительно.

Возвращаясь к первоначальной дроби $\frac{m}{N}$, мы вынуждены будем перенести запятую на μ знаков налево и придем, таким образом, к десятичной дроби, содержащей μ цифр до периода и K цифр в периоде.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

Общие руководства по теоретической арифметике.

Grassmann H., Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861.
Hankel H., Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.
Schröder E., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1874.
Stolz O., Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885.
Stolz O. und Gmeiner J. A., Theoretische Arithmetik, Leipzig 1902 u. 1911.
Васильев А. В., Введение в анализ, вып. 1, изд. 4, Казань 1913 и вып. 2, изд. 2, Казань 1910.
Вебер Г. и Вельштейн В., Энциклопедия элементарной математики, т. I, Элементарная алгебра и анализ, изд. 3, М. — Л. 1927.
Волков, Эволюция понятия о числе, 1899.
Фербер, Теоретическая арифметика.
Комаров В. И., Теоретические основы арифметики и алгебры.

Книги и статьи методологического содержания.

Dedekind R., Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschweig 1888.
Frege G., Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884.
Гельмгольц Г., Счет и измерение, Казань 1893.
Кронекер Л., Понятие о числе (см. книгу Гельмгольца „Счет и измерение").
Husserl E. G., Philosophie der Arithmetik, Leipzig 1891.
Hölder O., Die Arithmetik im Strenger Begründung, Leipzig 1914.
Peano G., Formulaire Mathematique, Torino 1895—1908.
Whitehead A. N. and Russel B., Principia mathematica, vls I—III, Cambridge 1910—1913.
Russel B., Introduction to mathematical philosophy, London — New-York 1924.
Couturat L., Les principes des mathématiques, Paris 1905 (русск. перев. Кутюра Л., Философские принципы математики, СПБ. 1912).
Natorp P., Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften, Leipzig 1910.
Пуанкарэ А., Наука и гипотеза, Москва 1924.
Пуанкарэ А., Наука и метод, СПБ. 1910.
Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, М. — Л. 1933.
Выгодский М. Я., Понятие числа в его развитии, журн. „Естествознание и марксизм" № 2, Москва 1929.
Хинчин А. Я., Идеи интуиционизма и борьба за предмет в современной математике, „Вестник Комакадемии", кн. 16, Москва 1926.
Сборник статей по философии математики под ред. С. А. Яновской, Учпедгиз, Москва 1936.
Вейль Г., О философии математики (сборник работ), ГТТИ, М. — Л. 1934.
Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики, М. — Л. 1936.
Gentzen G., Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Annal., 112 (1936).
Тимченко И., Основания теории аналитических функций, „Записки математического отделения Новоросс. о-ва естествоиспытателей", тт. XII, XVI, XIX, Одесса 1892—1899.

Литература по операторной теории.

Hamilton W. R., Lectures on quaternions, Dublin 1853.
Hamilton W. R., Elements of quaternions, Dublin 1866.
Клиффорд В., Здравый смысл точных наук, изд. 2, Петроград 1922.
Шапиро Г. М., Высшая алгебра, Учпедгиз, М. 1935.

Литература по отдельным вопросам учения о числе.

Бэр Р., Теория разрывных функций (перев. с франц. под. ред. Хинчина А. Я.), М.—Л. 1932.
Хаусдорф Ф., Теория множеств, ГТТИ 1937.
Окунев Л. Я., Высшая алгебра, М. 1936.
Ван-дер-Варден Б. Л., Современная алгебра, т. 1, 2, М. 1935—1936.
Dedekind R., Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872 (на русск. яз., Дедекинд Р., Непрерывность и иррациональные числа, перев. Шатуновского С. О., изд. 4, Одесса 1923).
Шатуновский С. О., Введение в анализ, Одесса 1923.
Радемахер Г. и Теплиц О., Числа и фигуры, М. 1935.
Abel N. H., Recherche des fonctions de deux quantites variables independantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriete que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symetrique de z, x, et y. Crelles Journal Bd. I, Brl. 1826 (см. также Abel, Oeuvres complètes, t. I, Christiania 1881).
Чезаро Э., Элементарный учебник алгебраического анализа, т. I, изд. 2, М.—Л. 1936.
Диксон Л. Е., Линейные алгебры, ОНТИ, Харьков 1935.
Hoüel L. I., Theorie elementaire des quantites complexes, Paris 1874.
Понтрягин Л. С., О непрерывных алгебраических телах, Annals of Mathematics, 33, 163—172, 1932.

Основные пособия по теории чисел.

Граве Д., Элементарный курс теории чисел, изд. 2, Киев 1913.
Чебышев П. Л., Теория сравнений, СПБ. 1879.
Васильев А. В., Целое число, Петроград 1922.
Виноградов И. М., Основы теории чисел, ОНТИ, М.—Л. 1936.
Лежен-Дирихле П. Г., Лекции по теории чисел, ОНТИ, М.—Л. 1936.
Егоров Д. Ф., Элементы теории чисел, Гиз, М.—П. 1923.
Хинчин А. Я., Цепные дроби, ОНТИ, М.—Л. 1935.
Ингам А. Е., Распределение простых чисел, ГТТИ 1935.
Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I—III, Leipzig 1927.
Hecke E., Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1923

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Следует читать*	*По чьей вине*
62	23 сверху	*левый*	Таким образом доказан *левый*	редакции
117	14 снизу	лишь ложные	ложные	автора
158	1 снизу	$[\beta_1\alpha] = \alpha \log \eta\beta.$	$[\beta_1\alpha] = \alpha^{\log \eta\beta}$	типографии
252	16 „	$10^{0,434295}$	$10^{0,43425}$	редакции
417	9 сверху	вычеркнутым	невычеркнутым	редакции
462	7 снизу	0182497363	0182497365	автора
463	12 сверху	$7x \equiv 6$	$6x \equiv 5$	автора
463	14 „	Ind 7	Ind 6	автора

Арнольд „Теоретическая арифметика"—1747.