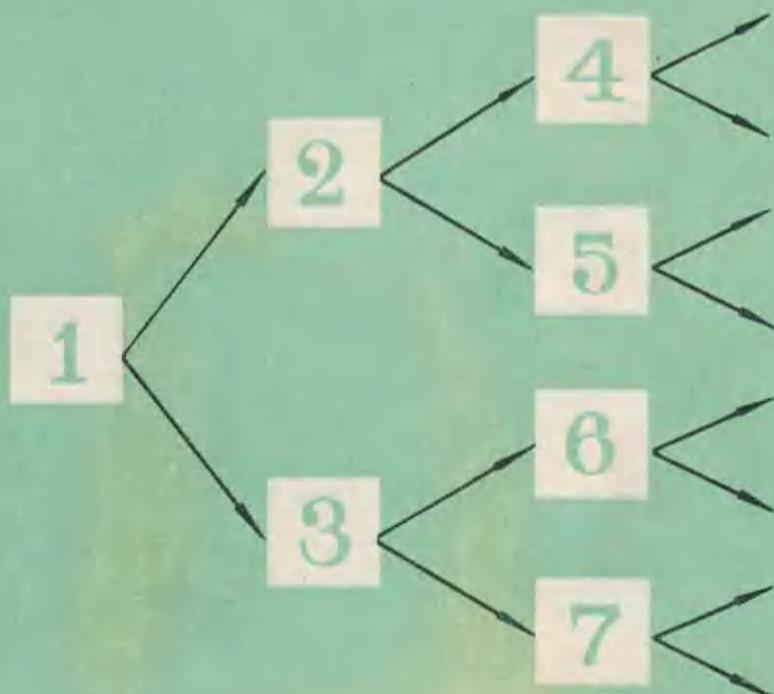
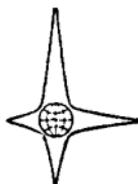


# ДИСКРЕТНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ





ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

# DISCRETE DYNAMIC PROGRAMMING

*An Introduction  
to the Optimization of  
Staged Processes*

---

RUTHERFORD ARIS

University of Minnesota

BLAISDELL PUBLISHING COMPANY

*New York • Toronto • London*

A DIVISION OF GINN AND COMPANY

1964

Р. АРИС

ДИСКРЕТНОЕ  
ДИНАМИЧЕСКОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ

*Введение  
в оптимизацию  
многошаговых процессов*

---

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Ю. П. Плотникова

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Б. Т. Поляка

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“

МОСКВА 1969

Книга посвящена методам оптимизации для задач динамического программирования. От других работ подобного типа она выгодно отличается компактностью, простотой и ясностью изложения, четким описанием основных принципов динамического программирования. Большое достоинство книги — множество примеров практических задач, доведенных до числовых результатов. Здесь рассматриваются модели оптимального управления экономикой, химическими процессами, задачи из теории связи и передачи информации, теория надежности, проблемы аппроксимации функций. В книге рассматриваются некоторые задачи, содержащие отклонения от классической схемы динамического программирования, например многошаговые процессы с обратными связями.

Книга может служить хорошим пособием для первоначального ознакомления с предметом. Она доступна читателям, имеющим математическое образование в объеме втуза, и в то же время представляет интерес для специалистов, занимающихся задачами оптимизации.

*Редакция литературы по математическим наукам*

## *К русскому изданию*

Книга Р. Ариса предназначена для читателей, начинающих знакомиться с методом динамического программирования. Ее особенностью является то, что изложению метода предшествуют наглядные примеры, после которых его идейная сторона предстает как очевидное следствие рассуждений, основанных на здравом смысле. В книге подробно рассматриваются все этапы решения задачи оптимизации с помощью динамического программирования, и важность каждого из них также иллюстрируется большим числом примеров.

Инициатором перевода этой книги на русский язык был И. В. Гирсанов, безвременно погибший в марте 1967 года. Его светлой памяти мы посвящаем свой перевод.

*Ю. П. ПЛОТНИКОВ  
Б. Т. ПОЛЯК*

## Предисловие

Цель этой небольшой книги — познакомить с методом оптимизации, известным под названием динамического программирования, в том его виде, в каком он применяется к дискретному процессу. Предполагается, что книга будет доступна студенту или интересующемуся оптимизацией неспециалисту и что она осветит основные идеи метода с максимальной простотой. По ряду причин принцип оптимальности, хотя он и является элементарным, для многих представляется таким же неуловимым, каким для Винни-Пуха было «ага» Кролика. («*Modo ei videbatur id, quod Lepus sentiret, optime exprope, modo minime vero.*»<sup>1)</sup>)

В начале первой главы сделана попытка дать краткий обзор некоторых распространенных методов оптимизации. Далее описывается типичный пример процесса, для которого наиболее подходит метод динамического программирования, и на основе этого примера вводятся общие понятия данного метода. Этот пример взят из области химической технологии, но в то же время он настолько прост, что не требует предварительных знаний ни по химии, ни по технологии. Решение этой задачи, опирающееся на здравый смысл, является основой для формулировки принципа оптимальности. В дальнейшем этот же основной пример используется для разъяснения значения графических методов и для введения множителей Лагранжа.

Чтобы показать плодотворность принципа оптимальности, в последующих главах приводится целый ряд примеров. Лейтмотивом гл. 6 являются вопросы уменьшения размерности — наиболее серьезного препятствия в применении динамического программирования. В конце этой главы дан перечень методов, которые по мере необходимости были ранее введены в ряде примеров. Я надеюсь, что специалист по экономике

---

<sup>1)</sup> Из «*Winnie ille Pu*», перевода на латынь книги А. А. Милн «*Winnie the Pooh*». («Иногда ему казалось, что мысль кролика он выражает абсолютно верно, а иногда казалось, что нет». См. также А. А. Милн, «Винни-Пух и все-все-все», Детгиз, 1960, гл., 7.). — *Прим. ред.*

простит мою очевидную наивность и некоторое легкомыслие, проявившееся в том, что я объединил эти примеры под названием экономических. Он легко разглядит действительные достоинства метода и будет оценивать его использование в свете своего понимания проблем экономической теории. В следующих двух главах описывается несколько примеров из самых различных областей, причем библиография в конце гл. 8 содержит ссылки на еще большее их число. Пятьдесят с лишним наименований работ и такое же число задач, содержащихся в разных частях книги, ни в коей мере не исчерпывают всех приложений динамического программирования. Было бы очень полезно, если бы кто-нибудь составил аннотированную библиографию по этому вопросу.

В последних главах подводятся некоторые итоги и обсуждается ряд проблем, наиболее типичных для исследований последних лет. Даже в этих проблемах почти все будет понятно читателю, знакомому лишь с элементарной алгеброй и дифференциальным исчислением. Одна из отличительных особенностей динамического программирования и состоит в том, что в то время, как связанные с ним основные понятия опираются лишь на здравый смысл, его применение к любой конкретной проблеме может потребовать обширных знаний и богатого воображения. Во время подготовки этой книги к печати гл. 10 была написана заново для того, чтобы включить в нее результаты Уайлда и Немхаузера. Я очень признателен последним за предоставление мне этого материала и за переписку с ними, в процессе которой рассеялись мои первоначальные заблуждения и прояснились некоторые еще не до конца исследованные проблемы.

Динамическое программирование, несмотря на его обширность, в основном является детищем Ричарда Беллмана. Как само рождение, так и дальнейший рост этого раздела математики происходили под влиянием идей и интересов Беллмана. Признание роли его и его коллег является всеобщим, им проникнуты, в частности, страницы этой книги.



## ГЛАВА 1

### *Что такое оптимизация?*

Хотя эта книга является введением в динамическое программирование, будет полезно начать ее обсуждением более общих вопросов оптимизации и связи динамического программирования с другими методами, которые используются в задачах оптимизации. На самом деле оптимизация — это некое искусство, работа, требующая квалифицированного и изобретательного использования самых разнообразных приемов; и хотя ее результаты служат вполне практическим целям, процесс ее выполнения дает простор как эстетическим, так и практическим склонностям.

Если верить легенде, первым и изобретательным оптимизатором была Дидона. Выторговав столько земли, сколько можно охватить шкурой быка, она разрешила шкуру на длинные тонкие полосы и уложила их по полуокружности, диаметром которой был берег моря. Таким способом она охватила наибольший участок земли, основала на нем город Карфаген и преуспевала до тех пор, пока не столкнулась с ситуацией, в которой даже математический гений оказывается бессильным. Правдива эта история или нет, проблема максимизации площади, ограниченной кривой данной длины, является одной из классических математических задач.

Оптимизация, вообще говоря, — это достижение наилучшего из возможного в данной ситуации, стремление общераспространенное. Играющие при этом большую роль опыт и интуиция, которые обычно приобретаются столь болезненным путем, могут быть развиты с помощью математических знаний; в настоящее время известно много методов и результатов, применимых для решения задачи оптимизации.

#### **1.1. Математическое моделирование**

Если в той или иной ситуации мы собираемся применить математические методы, то прежде всего эту ситуацию следует описать в математических терминах. Процесс описания сам по себе является искусством, и его мы можем только бегло коснуться. Оказывается, что даже простые явления в

экономике, технике, промышленности, военном деле (отметим лишь несколько областей, где достижение наилучшего является обязательным требованием) становятся чрезвычайно громоздкими, когда они подвергаются строгому математическому анализу. Поэтому в первую очередь этот анализ должен заключаться в разложении явления на простейшие элементы и затем в математическом описании как самих элементов, так и связей между ними. Далее необходимы квалифицированные соображения, как упростить получаемые уравнения и привести их к такому виду, при котором они не искажают основных характеристик явления и в то же время поддаются математическому исследованию.

Важным моментом является четкая формулировка предположений, которые делаются в процессе этого моделирования. Иногда, чтобы получить уравнения, которые удастся решить, приходится пренебрегать какой-то характеристикой, но такое пренебрежение, нежелательное само по себе, должно быть сознательным, а не случайным.

Нередко бывает, что, когда мы наконец получаем совокупность поддающихся решению уравнений, окончательная модель оказывается весьма далекой от описываемого реального процесса. Тем не менее если основные характеристики процесса сохранены, то исследование такой модели не бессмысленно, поскольку очень часто из количественного решения идеализированной модели можно получить качественное описание реальной проблемы.

По-видимому, Дидону вдохновляли женская интуиция и мистическое поклонение кругу, но если бы ей пришлось составлять математическую модель, то она, конечно, сделала бы некоторые упрощения. Так, вероятно, землю следовало бы рассматривать как плоскость, береговую линию — совершенно прямой, а полосу из шкуры — как плоскую кривую. Если бы один конец полосы был закреплен в данной точке берега, расположение полосы могло бы быть описано кратчайшим расстоянием между каждой ее точкой и берегом. Если это расстояние равнялось бы  $y$ , а ближайшая точка на береговой линии была бы на расстоянии  $x$  от закрепленного конца, то кривая представлялась бы непрерывной функцией  $y(x)$ , причем  $y(0) = 0$ . Чтобы выразить площадь, ограниченную полосой и береговой линией, и длину самой полосы, необходимы средства математического анализа. Площадь  $A$  выражалась бы формулой

$$A = \int_0^x y(x) dx,$$

а длина — формулой

$$L = \int_0^X \{1 + y'(x)^2\}^{1/2} dx,$$

где  $X$  есть расстояние между обоими концами полосы. На языке математики задача заключается в максимизации  $A$  при заданной  $L$ .

Перенесемся совсем в другую историческую эпоху и рассмотрим современную проблему наведения ракеты. Здесь конструктору интересно узнать, как управлять ракетой, чтобы обеспечить встречу со спутником с минимальным расходом топлива, или как распределить топливо между тремя ступенями ракеты, чтобы максимизировать конечную скорость. Процесс математического моделирования будет состоять в описании влияния горения топлива или системы управления на движение ракеты, и здесь нужны значительные упрощения. Математической моделью будет система дифференциальных уравнений для положения, скорости и угловых координат ракеты, а цель управления будет являться функцией положения или скорости.

Мы, естественно, не будем рассматривать примеры такой степени сложности, поскольку основные принципы наиболее ясно выявляются на элементарных примерах. Тем не менее мы будем пытаться строить модель достаточно тщательно, так что примеры, взятые из какой-либо одной области, будут понятны читателю или студенту, специализирующемуся по другим вопросам. Предполагаемые знания математики сводятся к основам математического анализа и обыкновенных дифференциальных уравнений.

Допуская, что явление и целевая функция, которую следует максимизировать, могут быть выражены математическими символами, необходимо знать, какие методы имеются для отыскания условий экстремума и какими методами удобно пользоваться для максимизации. Некоторые из этих методов будут рассмотрены далее, и, хотя мы будем говорить о них применительно к математическим моделям, некоторые из методов пригодны для использования в самой исходной задаче. Так, если для модели речь идет о прямом переборе, то в исходной задаче этому может соответствовать непосредственное варьирование управляющих переменных. Прямое использование модели заключается в том, что появляется возможность исследовать реальную систему в случае, когда непосредственное экспериментирование на ней либо невозможно, либо слишком дорого.

## 1.2. Прямой перебор

Математическая модель состоит из системы уравнений (алгебраических или дифференциальных), в которых одними переменными описывается состояние системы, а управления (или решения) — другими. В наиболее общем случае целевая функция, которую нужно максимизировать, зависит от всех этих переменных. Если как-либо выбрать управляющие переменные, то можно решить уравнения и вычислить целевую функцию. Затем делается другой выбор, и если он дает большее значение целевой функции, то ему и отдается предпочтение.

Бессистемный перебор такого сорта в случае многих переменных является крайне неэффективным, и даже для функции одной переменной желательна лучшая последовательность перебора. Последняя задача полностью решена для случая, когда в заданной области изменения одной переменной у функции имеется только один максимум. Существуют также методы организации последовательных вычислений, прототипом которых является нижеследующий.

## 1.3. Метод скорейшего подъема

Пусть имеются две управляющие переменные  $x$  и  $y$  и целевая функция, которая максимизируется соответствующим выбором  $x$  и  $y$ , аналогична представленной на рис. 1.1. Контурные линии — это линии постоянных значений целевой функции, и если конкретный выбор  $x$  и  $y$  соответствует точке  $A$ , то при перемещении в другую точку  $A'$  этого контура значение целевой функции не изменяется. Лучшим направлением движения является направление  $AB$  под прямым углом к контуру. Малые изменения  $x$  и  $y$  в этом направлении должны приводить к увеличению значения целевой функции, хотя в то же время слишком большие изменения (а именно до точки  $C$ ) могут увести в область меньших значений. Если поверхность можно описать функцией  $f(x, y)$ , то тангенс угла, образуемого направлением  $AB$  с осью  $x$ , равен  $(\partial f/\partial y)/(\partial f/\partial x)$ . Однако обычно функция  $f(x, y)$  неизвестна, в противном случае можно было бы воспользоваться дифференциальным исчислением, поэтому возникает задача численного определения производных. Если  $A$  есть точка  $(a, b)$  и  $\delta a, \delta b$  — малые величины, то приближенно

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{a, b} = \frac{f(a + \delta a, b) - f(a, b)}{\delta a},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{a, b} = \frac{f(a, b + \delta b) - f(a, b)}{\delta b}.$$

Таким образом, направление скорейшего подъема можно определить, вычислив значения целевой функции  $f$  в трех точках. Аналогичная совокупность вычислений в некоторой точке этого направления (например,  $D$ ) определяет новое направление быстреего подъема. Последовательность такого рода вычислений приводит к окрестности максимума  $M$  и нахождению значений  $x$  и  $y$ , при которых этот максимум достигается. В окрестности максимума для получения представления о его форме и проверки того, что он не является

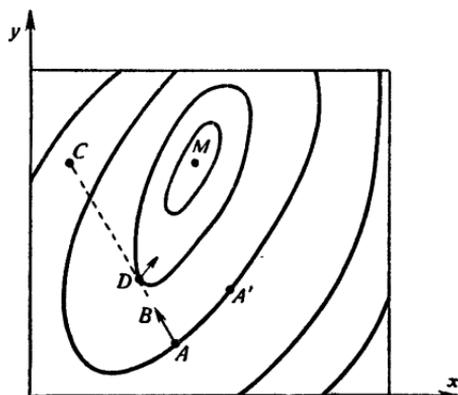


Рис. 1.1.

седловой точкой, следует использовать более сложный алгоритм вычислений. Данный метод первоначально нашел широкое применение в связи с планированием экспериментов, где значения целевой функции не вычисляются, а непосредственно измеряются в некоторой физической системе. Метод можно легко обобщить на случай большого числа измерений.

#### 1.4. Методы, не использующие градиента, и методы случайного поиска

Один недостаток метода скорейшего подъема состоит в его чувствительности к масштабным преобразованиям. Как это видно из рис. 1.1, начальное направление довольно далеко от нужного. Если масштаб по  $y$  изменить так, чтобы контур стал еще длиннее и уже, то прежний шаг может привести к худшей точке, например к  $C$ . Так как форма поверхности неизвестна, то нет и способа узнать, является ли выбранный нами шаг большим или малым по сравнению с естественным масштабом.

Уайлд предложил метод, свободный от этого недостатка. В нем вместо отыскания направления наиболее быстрого подъема строится касательная к линии уровня. Максимум, если он существует, лежит выше касательной, поэтому область, лежащую ниже ее, из дальнейшего рассмотрения можно исключить. Таким образом, начиная в той же точке  $A$  на рис. 1.1, следует провести прямую  $KAL$  (рис. 1.2) и отбросить площадь, расположенную ниже прямой. Далее производится другая попытка из некоторой точки, лежащей внутри

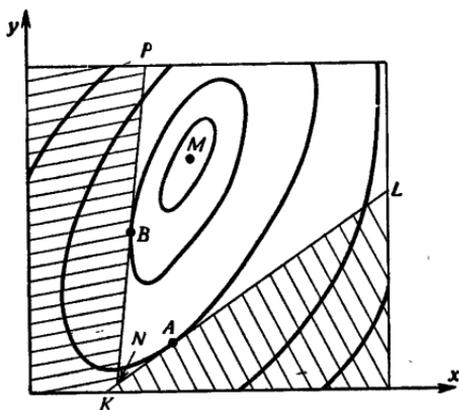


Рис. 1.2.

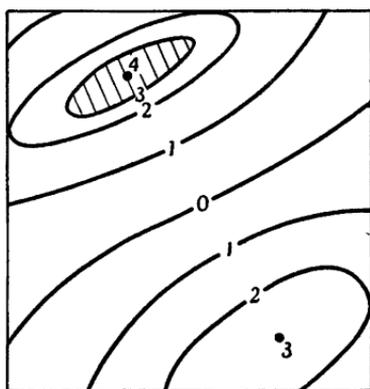


Рис. 1.3.

оставшейся области. Эту точку целесообразно выбирать где-то посередине области. Пусть  $B$  есть выбранная новая точка. Проведя прямую  $PBN$ , мы исключим область слева от нее. Ясно, что такой процесс постоянно сужает область поиска и что в какой-то момент его полезно объединить с методом скорейшего подъема.

Ясно также, что, когда в интересующей нас области имеется более чем один максимум, подобные методы могут привести к ошибке. Так, если метод скорейшего подъема начать в окрестности наинизшего максимума, то это привело бы к тому, что наивысший максимум не был бы обнаружен. Единственный способ, позволяющий избежать такой ситуации (к счастью, не слишком общей), связан с введением в поиск случайного элемента и состоит в переходе время от времени к новой случайной точке. Если окажется, что эта случайная точка предпочтительнее любой другой, ранее найденной, то уже в ее окрестности можно начать систематический поиск. Если ситуация подобна той, которая изображена на рис. 1.3, то вероятность отыскать из случайной точки наи-

высшую вершину равна отношению площади той окрестности этой вершины, в которой значения функции больше второго по величине максимума (на рисунке она заштрихована), к общей площади поиска. Однако все это трудно обобщить на случай большего числа переменных.

### 1.5. Дифференциальное исчисление

Хотя мы и поставили метод прямого перебора на первое место, у нас нет намерения пренебрегать классическими методами дифференциального исчисления. Дело в том, что по-

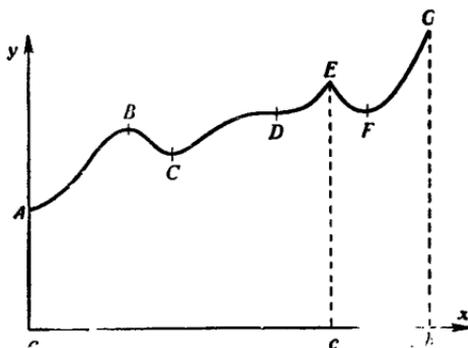


Рис. 1.4.

явление современной вычислительной техники как никогда прежде придало прямому перебору большое практическое значение; особенно это относится к сложным функциям, не допускающим аналитического исследования. Поскольку методы дифференциального исчисления известны достаточно хорошо, о них можно только кратко упомянуть и попытаться подчеркнуть лишь сопутствующие им трудности. Эти трудности связаны с тем обстоятельством, что часто требуется отыскать не локальный, а глобальный максимум или минимум.

Рассмотрим определенную на интервале  $(a, b)$  непрерывную функцию  $y=f(x)$ ; ее график представлен на рис. 1.4. Если ищется точка, в которой производная  $y$  по  $x$ ,  $f'(x)$ , равна нулю, то получаем значения  $x$ , соответствующие точкам  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $F$ . Проверка величины второй производной  $f''(x)$  покажет, что  $B$  есть точка локального максимума,  $C$  и  $F$  — точки локального минимума, а  $D$  — точка перегиба с горизонтальной касательной. По уравнению для  $f(x)$  можно заключить, что хотя функция определена на интервале  $(a, b)$ , в действи-

тельности она описывается двумя разными формулами на подинтервалах  $(a, c)$  и  $(c, b)$ , и при  $x=c$  функция  $f(x)$  не дифференцируема. Например, уравнение  $y=|x-c|$  означает, что когда  $x \geq c$ , то  $y=x-c$ , а когда  $x \leq c$ , то  $y=c-x$ . Чтобы найти наибольшие значения  $f(x)$  в интервале  $(a, b)$ , нам также нужно рассматривать граничные точки интервалов, внутри которых  $f(x)$  дифференцируема. Поэтому, чтобы убедиться в том, что наибольшее значение функции равно  $f(b)$ , следует сравнить величину локального максимума  $B$  со значениями  $f(x)$  в точках  $A, E$  и  $G$ .

Как видно, по сравнению с простым дифференцированием и приравниванием нулю производной программа действий получилась более внушительной. Однако встречаются случаи, где физическая природа функции дает гарантию того, что сама функция непрерывна и дифференцируема и в интересующем нас интервале имеет только один максимум или минимум. В таком случае наилучшим способом нахождения максимума часто является простое дифференцирование. Задача отыскания максимума усложняется, когда число переменных больше единицы. Здесь следует приравнять нулю первые производные и для каждой стационарной точки проверить знакоопределенность матрицы вторых производных; затем нужно исследовать границы каждой области дифференцируемости и сравнить их с точками внутреннего экстремума. При этом случается, что физическая интуиция помогает установить единственность внутреннего максимума функции, и тогда наилучшим способом его отыскания будет определение точки, где первые производные равны нулю.

## 1.6. Линейное программирование

Задача с линейной целевой функцией и линейными ограничениями является тем примером, для которого методы дифференциального исчисления не применимы. В этом случае известно, что максимум находится в вершине допустимой области. Рассмотрим простую задачу максимизации функции

$$f(x, y) = 2x + 3y,$$

когда на  $x$  и  $y$  наложены ограничения

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 1.$$

Эти ограничения выделяют изображенную на рис. 1.5 треугольную область, в которой должна находиться точка  $x, y$ . Прямые с наклоном  $-2/3$  являются линиями постоянных

значений  $f(x, y)$ . Это линии уровня плоскости, направление подъема которой указано стрелкой, и очевидно, что максимального значения функция достигает в точке, где треугольник касается линии уровня с наибольшим значением. Такой точкой будет вершина  $x=0, y=1$ . Простым рассуждением убеждаемся, что точка  $x=0, y=1$  дает максимум функции  $f=ax+by$ , когда  $b>a$  и  $b>0$ . Если  $a>b$  и  $a>0$ , то наибольшее значение достигается в вершине  $x=1, y=0$ , а если  $a$  и  $b$  отрицательны, то наилучшей будет вершина  $x=y=0$ .

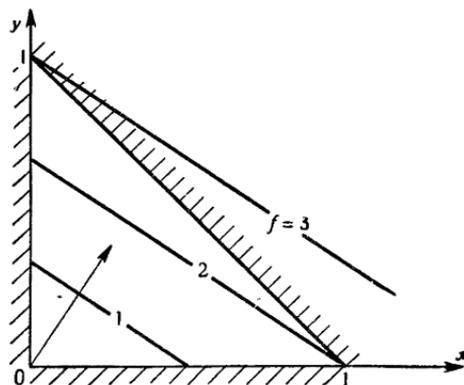


Рис. 1.5.

Рассмотренный пример является, конечно, простейшим. Более общей будет задача отыскания максимума функции

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

при ограничениях типа неравенств

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \leq c_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \dots + b_{mn}x_n \leq c_m.$$

В этом общем случае процедура поиска максимума не столь очевидна. Тем не менее для решения последней задачи развит способ, приводящий непосредственно к решению и известный под названием симплекс-метода. Этим стандартным методом широко пользуются экономисты, инженеры и исследователи операций.

## 1.7. Нелинейное программирование

Для решения задач с нелинейной целевой функцией и некоторыми типами нелинейных ограничений были разработаны модификации методов линейного программирования, однако

область нелинейных задач изучена менее полно. Достаточно подробно исследован только случай квадратичной целевой функции с линейными ограничениями. Линейное программирование можно представить как частный случай динамического программирования, но с вычислительной точки зрения такое представление обычно нецелесообразно. Так же легко сводятся к динамическому программированию и задачи нелинейного программирования, причем в этом случае новая формулировка иногда более полезна. Трактовку задачи на языке динамического программирования обесценивает не наличие большого числа переменных  $x_1, \dots, x_n$ , а скорее большое значение числа ограничений  $m$ .

### 1.8. Динамическое программирование

Динамическое программирование применяется главным образом в такой ситуации, когда для максимизации общего критерия качества системы нужно многократно выбирать управление, причем система такова, что в ней можно выделить отдельные этапы, а управления, действующие на последующих этапах, не оказывают влияния на величину показателя качества, достигнутую на предыдущих. Этот метод дает хорошие результаты, когда число возможных управлений на каждом шаге не слишком велико и, прежде всего, когда влияние этих управлений описывается только небольшим числом переменных. При этих условиях сложность решения задач данным методом ненамного возрастает даже при значительном увеличении числа шагов.

Поскольку вся остальная часть этой книги посвящена методу динамического программирования, мы не будем здесь задерживаться на деталях, отметим лишь, что непрерывный процесс можно рассматривать как предел бесконечного числа бесконечно малых этапов. Поэтому не удивительно, что динамическое программирование — это прекрасный способ решения задач, лежащих в сфере вариационного исчисления.

### 1.9. Вариационное исчисление

Проблема, с которой столкнулась Дидона, по существу была задачей вариационного исчисления. Обычно этот предмет начинают излагать с несколько более простой задачи — задачи отыскания такой функции  $y=y(x)$  между фиксированными точками  $(0, 0)$  и  $(X, Y)$ ,  $Y=y(X)$ , которая максимизирует интеграл

$$J = \int_0^X F[x, y(x), y'(x)] dx.$$

Стандартный способ решения состоит в том, что сначала предполагают, что максимизирующая функция  $y(x)$  уже найдена. Тогда любое отклонение от этой функции  $y(x)$  даст меньшее значение  $J$ . Далее, взяв любую функцию  $z(x)$ , которая обращается в нуль при  $x=0$  и  $x=X$ , и заменив  $y(x)$  на  $y(x) + \varepsilon z(x)$ , можно построить целое семейство отклонений (показанных, например, на рис. 1.6). Подставив эти функции

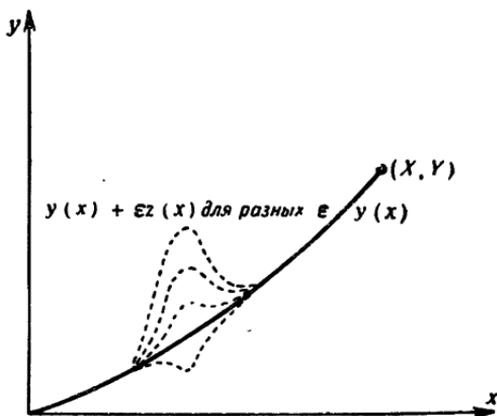


Рис. 1.6.

в интеграл, мы получим новый интеграл, который для каждой данной функции  $z(x)$  зависит только от  $\varepsilon$ ,

$$J(\varepsilon) = \int_0^X F(x, y + \varepsilon z, y' + \varepsilon z') dx.$$

Так как  $J(\varepsilon)$  достигает максимума при  $\varepsilon=0$ , то производная по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon=0$  должна обращаться в нуль. Но

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \int_0^X \left[ \frac{\partial F}{\partial y} z + \frac{\partial F}{\partial y'} z' \right] dx,$$

второе слагаемое можно проинтегрировать по частям и, поскольку  $z(0) = z(X) = 0$ , получить

$$\int_0^X \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] z(x) dx = 0.$$

Это равенство имеет место для любого  $z(x)$ , что возможно только тогда, когда выражение в квадратных скобках всюду

равно нулю, поскольку в противном случае можно было бы построить функцию  $z(x)$ , для которой последний интеграл был бы положительным. Условие

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = y'' \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \right) + y' \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

есть дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $y(x)$  с граничными условиями  $y(0) = 0$ ,  $y(X) = Y$ . Изложенные идеи достаточно просты, но здесь, как и в методах дифференциального исчисления, имеются скрытые трудности. Прежде всего решение нелинейных дифференциальных уравнений с двухточечными граничными условиями отнюдь не тривиально. Далее в задаче могут быть ограничения, что приведет к решениям с точками излома. Эта возможность может быть учтена в рамках классического вариационного исчисления, но если пытаться сделать решение понятным и для нематематика, то, несомненно, более предпочтительным является метод динамического программирования.

### БИБЛИОГРАФИЯ

- 1.3. Основная работа по приложению метода скорейшего подъема к планированию экспериментов:  
 Box G. E. P., Wilson K. B., On the Experimental Attainment of Optimum Conditions, *J. Roy. Statist. Soc.*, B13 (1951), 1.  
 Для этого метода имеются многочисленные описания и ряд обобщений; см., например, книгу Уайлда [1.4].
- 1.4. Прекрасное описание этих методов содержится в книге  
 Wilde D. J., Optimum-seeking Methods, New York, Prentice-Hall, 1964. (Русский перевод: Уайлд Д. Дж., Методы поиска экстремума, «Наука», М., 1967.)  
 См. также  
 Wilde D. J., Optimization by the Method of Contour Tangents, *Am. Inst. Chemical. Eng. J.*, 9 (1963), 186.
- 1.6. Основной работой является книга  
 G. B. Dantzig, Linear programming and Extensions, Princeton University Press, 1961. (Русский перевод: Данциг Дж. Б., Линейное программирование и его обобщения, М., 1966.)  
 Элементарными введениями могут служить книги:  
 Vajda S., Mathematical Programming, Reading, Addison-Wiley Publishing Co., 1961.  
 Vajda S., The Theory of Games and Linear Programming, London, Methuen & Co., 1956.  
 Интересное обсуждение экономических задач содержится в работах:  
 Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M., Linear Programming and Economic Analysis, New York, McGraw-Hill Book Co., 1958.  
 Charnes A., Cooper W. W., Henderson A., An Introduction to Linear Programming. New York, John. Wiley & Sons, 1953.

Williams J. D., *The Compleat Strategyst*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1957. (Русский перевод: Уильямс Дж. Д., Совершенный стратег, изд-во «Советское радио», М., 1960.)  
Последняя книга отличается прекрасным и увлекательным изложением материала.

1.7. В качестве введения см.

Vajda, S., *Mathematical Programming* [1.6].

Хороший обзор методов можно найти в статье

Dorn W. S., *Non-linear Programming — A Survey*, *Management Sci.*, 9(1963), 2.

1.8. Основные результаты содержатся в трех книгах Р. Беллмана:

R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1957. (Русский перевод: Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, М., 1960.)

R. Bellman, *Adaptive Control Processes, A Guided Tour*, Princeton, Princeton University Press, 1961. (Русский перевод: Беллман Р., Процессы регулирования с адаптацией, «Наука», М., 1964.)

R. Bellman, S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1962. (Русский перевод: Беллман Р., Дрейфус С., Прикладные задачи динамического программирования, «Наука», М., 1965.)

Вероятно, лучше всего их читать в порядке, обратном хронологическому.

1.9. По вариационному исчислению имеется много книг. Для многих целей прекрасным учебником может служить книга

Bolza O., *Lectures on the Calculus of Variations* (1904), New York, Dover Publications, 1961.

## ГЛАВА 2

### Дискретные детерминированные процессы управления

Мы начнем с довольно подробного исследования одного примера многошагового процесса. Пример взят из теории химических реакторов, но в силу своей простоты доступен для понимания без предварительного знания химической технологии. Его мы рассматриваем потому, что от него естественно перейти к более общему случаю дискретного, а затем непрерывного процесса. Пример будет использован для иллюстрации основных понятий дискретного процесса управления. Далее эти понятия будут определены более строго и разъяснены на ряде других примеров.

#### 2.1. Химическая реакция в смесителе

Химическая реакция предназначена для превращений какого-либо сырья в более ценные продукты и часто проводится в большой колонне-смесителе. В смеситель поступает сырье, а выводится готовый продукт, причем путем перемешивания содержимого его состав и температура поддерживаются постоянными. Предположим, что имеется только один вид сырья  $A$  и один готовый продукт  $B$ , и пусть  $a$  и  $b$  означают соответствующие концентрации. Скорость протекания реакции  $A \rightleftharpoons B$  равна

$$r = k_1 a - k_2 b. \quad (2.1)$$

Вообще говоря, постоянные  $k_1$  и  $k_2$  зависят от температуры, но в данном случае предполагается, что температура поддерживается постоянной. Скорость реакции есть скорость, с которой в единице объема расходуется сырье  $A$ , или, иначе говоря, это скорость, с которой в единице объема смеси возрастает количество продукта  $B$ . Начинают с высокой концентрации сырья  $A$ , при этом скорость реакции бывает большой, а по мере расходования сырья  $A$  (уменьшения  $a$ ) и образования  $B$  (увеличения  $b$ ) скорость реакции уменьшается до тех пор, пока не наступит равновесие, при котором  $k_1 a = k_2 b$ . Конечно, следует предположить, что температура была выбрана так, что значения  $k_1$  и  $k_2$  обеспечивают требуемый

выход продукта  $B$ . Поскольку всегда расходуемому  $A$  соответствует увеличение количества  $B$ , то сумма двух концентраций в смеси должна быть постоянной. Пусть эта сумма равна единице концентрации и

$$a = 1 - c, \quad b = c. \quad (2.2)$$

Здесь  $c$  есть просто другое обозначение концентрации  $b$  продукта  $B$ , а так как величина  $c$  указывает, насколько продвинулась реакция превращения  $A$  в  $B$ , то будем называть вели-

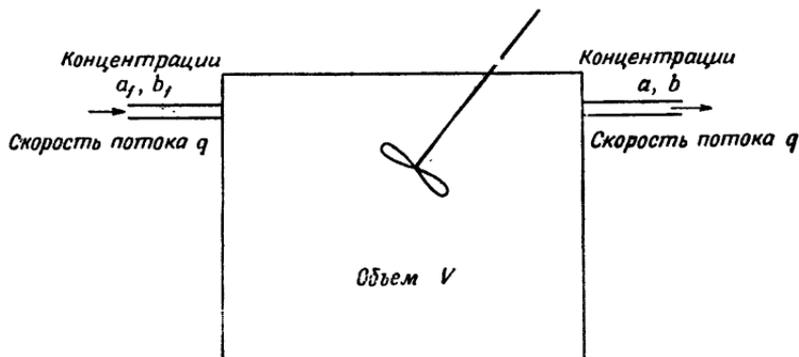


Рис. 2.1.

чину  $c$  выходом продукта реакции. Равновесный выход  $c_e$  есть значение  $c$ , соответствующее  $r = 0$ ,

$$c_e = k_1 / (k_1 + k_2). \quad (2.3)$$

Для скорости реакции можно записать два выражения:

$$r = k_1(1 - c) - k_2c = k_1 - (k_1 + k_2)c \quad (2.4)$$

и

$$r = (k_1 + k_2)(c_e - c). \quad (2.5)$$

Если в резервуаре (рис. 2.1) поддерживается постоянный объем смеси  $V$ , то скорость выхода продукта из резервуара должна равняться скорости поступления в него сырья. Пусть эта скорость равна  $q$ , концентрации  $A$  и  $B$  при их поступлении —  $a_f$  и  $b_f$ , а на выходе —  $a$  и  $b$  соответственно. Величина  $a_f + b_f$  была принята за единицу концентрации, так что если поступает чистое сырье  $A$ , то  $a_f = 1$ ,  $b_f = 0$ . Поскольку содержимое резервуара хорошо перемешивается, то можно считать, что в резервуаре концентрации  $A$  и  $B$  такие же, как и у готового продукта, т. е.  $a$  и  $b$ . Скорость, с которой в этой системе образуется продукт  $B$ , есть разность между

скоростью, с которой он выводится из резервуара, и скоростью его поступления в резервуар, иными словами, скорость образования в процессе реакции продукта  $B$  равна  $q(b - b_f)$ . Как отмечалось, скорость реакции равна скорости, с которой в единице объема увеличивается содержание продукта  $B$ , так что в объеме  $V$  готовый продукт  $B$  образуется со скоростью  $Vr$ . Итак, получено уравнение

$$q(b - b_f) = V(k_1a - k_2b). \quad (2.6)$$

Если определить время выдержки в резервуаре как

$$\theta = \frac{V}{q}, \quad (2.7)$$

что соответствует, очевидно, времени, за которое система меняет свое содержимое, то последнее уравнение можно немного упростить. Подставив (2.2), (2.4) и (2.7) в (2.6), получим

$$c - c_f = \theta \{k_1 - (k_1 + k_2)c\} \quad (2.8)$$

— уравнение выхода продукта реакции  $c$ , который является функцией концентрации  $c_f$  продукта на входе в резервуар и времени выдержки  $\theta$ . Уравнение можно записать в явной форме:

$$c = \frac{c_f + \theta k_1}{1 + \theta(k_1 + k_2)}. \quad (2.9)$$

Заметим, что величина  $c$  достигает своего равновесного значения  $c_e$  только тогда, когда время выдержки бесконечно велико. За конечное время  $\theta$  значение теоретического максимума  $c$  не достигается. Причина этого, естественно, в том, что протекание реакции определяется концентрациями участвующих в ней продуктов, так что скорость реакции замедляется при образовании продукта реакции, и потому достаточно полное завершение процесса требует большого времени выдержки. Но это приводит к задаче на оптимум. Пусть реакция проводится в двух колоннах, причем продукт  $c$  выхода первой поступает на вход второй, тогда поскольку концентрация продукта  $B$  в первой колонне была бы меньше, то это привело бы к увеличению скорости реакции в этой колонне по сравнению со второй. Следовательно, если разделить имеющийся объем  $V$  на две части, то можно было бы получить в конечном продукте большую концентрацию вещества  $B$ , или, иначе говоря, если разделить процесс на два этапа, то данный готовый продукт можно было бы получить с помощью реактора меньшего объема. Естественно, возникает вопрос: как следует выбирать объемы, чтобы результат реакции был наилучшим?

## 2.2. Химическая реакция в последовательности смесителей

Рассмотрим последовательность из  $N$  смесителей и для их компактного описания введем ряд обозначений. Смесители пронумеруем от конца к началу, так что  $N$ -й ступенью будет первый смеситель, куда поступает сырье, а в 1-й ступени будет образовываться конечный продукт (рис. 2.2).

Если промежуточной ступени присписать номер  $n$  ( $1 \leq n \leq N$ ), то через  $\theta_n$  можно обозначить время выдержки реакции в этой ступени и через  $c_n$  — выход продукта реакции в

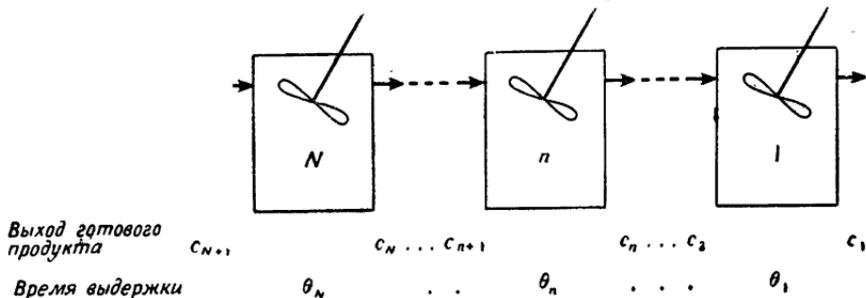


Рис. 2.2.

ней (а следовательно, и в отводимом из нее объеме смеси). Поскольку подводимый к ступени  $n$  продукт поступает из ступени  $(n+1)$ , то концентрация готового продукта в этой смеси равна  $c_{n+1}$ , и, несмотря на то что ступени  $(N+1)$  не существует, естественно обозначить концентрацию готового продукта в начале всего процесса через  $c_{N+1}$ . Для каждой ступени справедливо уравнение (2.9), а поэтому

$$c_n = \frac{c_{n+1} + \theta_n k_1}{1 + \theta_n (k_1 + k_2)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) можно использовать для последовательного определения  $c_N, c_{N-1}, \dots, c_1$ , т. е. для получения величины конечного продукта  $c_1$ , если заданы времена выдержки  $\theta_N, \dots, \theta_1$  в реакторах-смесителях и состав смеси в начале всего процесса, т. е.  $c_{N+1}$ .

Остановимся сейчас на конкретной задаче оптимизации и используем ее для того, чтобы неформально ввести понятия, которые мы впоследствии строго определим. Пусть концентрация вещества  $B$  в конечном продукте должна равняться  $\gamma$  (если такая концентрация вообще достижима);  $\gamma$  должна быть меньше  $c_e$ . Если  $\beta$  есть концентрация вещества  $B$  до начала процесса, то можно задать вопрос: какой набор  $\theta_1, \dots, \theta_N$  минимизирует общее время выдержки  $\theta_1 + \theta_2 + \dots$

$+\dots+\theta_N$ . Конечно, никакой проблемы не существует, если имеется только одна ступень, тогда  $c_1 = \gamma$ ,  $c_2 = \beta$  и из уравнения (2.10)

$$\theta_1 = \frac{\gamma - \beta}{k_1 - (k_1 + k_2)\gamma}.$$

Для двух ступеней уже следует решать, как выбрать  $\theta_2$  так, чтобы сумма  $\theta_1 + \theta_2$  была наименьшей. В общем случае для  $N$  ступеней нужно выбрать все значения  $\theta_N, \theta_{N-1}, \dots, \theta_2$ , при этом  $\theta_1$  определяется из условия  $c_1 = \gamma$ .

В этой задаче состояния процесса после ступени  $n$  описывается величиной выхода продукта реакции или концентрацией  $c_n$  вещества  $B$ ;  $c_n$  называют *фазовой переменной*. Управление, которое нужно выбрать для каждой ступени, заключается в определении времени выдержки  $\theta_n$ , и  $\theta_n$  называют *управляющей переменной*. Если известно состояние системы в начале этапа и выбрано управление этим этапом, то, зная *уравнение процесса*, описывающее данный этап, можно вычислить состояние в конце этого этапа. В рассматриваемом случае (2.10) задает уравнение процесса, при этом  $c_n$  явно зависит от  $c_{n+1}$  и  $\theta_n$ . Уравнение процесса содержит некоторые *параметры*, соответствующие данному этапу; таковыми здесь будут  $k_1$  и  $k_2$ . Обычно на переменные накладываются некоторые *ограничения*. Так, условие  $\theta_n \geq 0$  есть ограничение на управление. Это просто означает, что физически объем не может быть отрицательным. Конкретные условия задачи требуют, чтобы  $c_1 = \gamma$ , и, как мы видели, это означает, что  $\theta_1$  нельзя выбирать произвольным. Наконец, поскольку поставленная задача есть задача оптимизации, то нужно что-то оптимизировать. В данном случае минимизируется общее время выдержки  $\theta_1 + \dots + \theta_N$ . Величина, которую нужно минимизировать или максимизировать, называется *целевой функцией*. У нас эта функция зависит только от управляющих переменных, но в общем случае она является функцией и фазовых переменных.

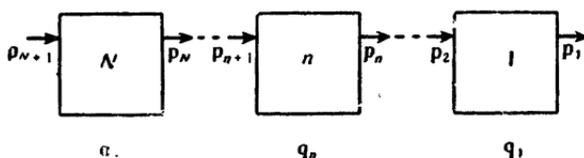
### 2.3. Определения для процесса общего вида

Схема процесса общего вида показана на рис. 2.3. Его можно рассматривать как обобщение уже изученного простого примера. Ниже вводятся и подробно обсуждаются понятия, связанные с этим процессом.

1. *Фазовые переменные*. Состояние продукта, который участвует в процессе, определяется совокупностью чисел, называемых *фазовыми переменными*. Для обозначения фазовых переменных на выходе ступени  $n$  используется индекс  $n$ . Если

всего таких переменных  $s$ , то их значение можно записать в виде последовательности  $(p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{ns})$ , или, короче, как вектор  $\mathbf{p}_n$ . Последний обычно называют *вектором состояния* или *вектором фазовых переменных*. В предыдущем примере  $s=1$ ,  $p_{n1}=c_n$ . Поскольку  $\mathbf{p}_{n+1}$  есть вектор состояния перед промежуточным этапом  $n$ , то в соответствии с введенным обозначением состояние в начале всего  $N$ -шагового процесса задается вектором  $\mathbf{p}_{N+1}$ .

2. *Управление*. *Управляющими переменными* являются величины, которые можно выбирать при проектировании или в процессе протекания любого этапа. Если число этих переменных  $q_{n1}, \dots, q_{nr}$  равно  $r$ , то их можно рассматривать как компоненты *вектора управления*  $\mathbf{q}_n$ . В рассмотренном



Р и с. 2.3.

примере  $r=1$ ,  $q_{n1}=\theta_n$ . Управление по своей природе иногда носит скорее качественный, чем количественный характер, например, это может быть выбор между двумя возможными способами преобразования состояния. Если это необходимо, такому управлению можно также придать количественный характер, достаточно для первого варианта преобразования положить  $q_n=0$ , а для второго  $q_n=1$ . Все это допускает обобщение на управления, которые сводятся к выбору из более чем двух вариантов, и в программе для вычислительной машины такое кодирование может легко быть расшифровано. Последовательность векторов  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$  называют *стратегией*.

3. *Уравнение процесса*. В зависимости от управления, которое было выбрано на очередном шаге, состояние в начале этапа по-разному преобразуется в конечное состояние. Симметрично это можно выразить соотношением

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad (2.11)$$

которое означает, что  $\mathbf{p}_n$  можно определить, если заданы  $\mathbf{p}_{n+1}$  и  $\mathbf{q}_n$ . Это вычисление может оказаться довольно простым, подобно расчету по формуле (2.10), или состоять из расчетов по многим формулам и представлять собой подпрограмму для вычислительной машины. В том случае когда процесс

еще недостаточно изучен, за  $F_n$  можно принять авторитетное суждение человека, обладающего наибольшим опытом относительно этого этапа.

4. *Ограничения.* В общем случае как на фазовые, так и на управляющие переменные накладываются ограничения типа равенств или неравенств. Эти ограничения в виде условий  $c_1 = \gamma$  и  $\theta_n > 0$  встречались в рассмотренном выше примере. Более общей ситуацией является такая, в которой обе группы переменных связаны общими ограничениями. Это можно записать как

$$S_m(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N) \geq 0, \quad m = 1, \dots, l. \quad (2.12)$$

В стандартной записи приведенные выше ограничения выглядят следующим образом (здесь  $l = N + 2$ ):

$$S_1 \equiv p_1 - \gamma \geq 0, \quad S_2 \equiv \gamma - p_1 \geq 0, \quad \dots, \quad S_{n+2} \equiv q_n \geq 0, \\ n = 1, \dots, N.$$

На практике во многих случаях на фазовые и управляющие переменные накладываются отдельные ограничения, и часто они имеют вид верхних и нижних границ, как, например,

$$q_* \leq q_n \leq q^*. \quad (2.13)$$

Выбор управлений, удовлетворяющих ограничениям, называют *допустимым* и в соответствии с этим говорят о *допустимой стратегии*.

5. *Целевая функция.* В задаче оптимизации должен быть показатель, по которому могут сравниваться различные допустимые стратегии. Его называют по-разному: функция выигрыша, критерий качества, целевая функция. Для показателя всего процесса мы будем пользоваться названием *целевая функция*, одновременно рассматривая его как сумму доходов от каждого этапа. Слово «доход» следует понимать в очень широком смысле, оно не ограничивается каким-либо конкретным экономическим содержанием. В одних случаях речь будет идти о максимизации некой «прибыли», в других — о минимизации «стоимости».

Так, в предыдущем примере нужно было минимизировать общее время выдержки. Ниже на ряде примеров мы познакомимся с различными типами целевых функций. В общем случае целевую функцию можно представить как  $O(p_1, \dots, p_{N+1}, q_1, \dots, q_N)$ . Но поскольку здесь значения  $p_1, \dots, p_N$  с помощью уравнений процесса можно выразить в виде функций от  $p_{N+1}$  и  $q_1, \dots, q_N$ , то в общем случае целевую функцию можно рассматривать как функцию

$$O(p_{N+1}; q_1, \dots, q_N). \quad (2.14)$$

Часто встречается целевая функция, которая представляется как сумма доходов отдельных этапов (впрочем, всякая целевая функция может быть приведена к такому виду). Можно считать, что эти доходы являются функциями  $p_{n+1}$ ,  $p_n$  и  $q_n$ , причем  $p_n$  можно выразить через  $p_{n+1}$  и  $q_n$ , поэтому

$$O = \sum_1^N P_n(p_{n+1}; q_n). \quad (2.15)$$

Например, если максимизируется величина  $p_{11} - \lambda(q_{11} + \dots + q_{N1})$ , где  $\lambda$  можно рассматривать как относительную стоимость управления, то можно положить

$$P_n = p_{n1} - p_{n+1, 1} - \lambda q_{n1}.$$

Правда, при этом сумма будет содержать дополнительный член  $-p_{N+1, 1}$ , но поскольку состояние в начале процесса задано, то этот член фиксирован, и максимум  $\sum P_n$  соответствует максимуму  $O$ .

В основном мы будем рассматривать задачи максимизации целевой функции и считать, что все сказанное о максимуме переносится и на случай задачи на минимум функции типа «стоимости». Для этого нам нужно лишь всегда выражения типа «стоимости» брать со знаком минус, и тогда их максимизация будет соответствовать минимизации абсолютного значения.

Допустимая стратегия  $\{q_n\}$ , которая максимизирует целевую функцию  $O$ , называется *оптимальной стратегией*.

6. *Параметры*. Фиксированные постоянные системы являются ее параметрами, при формулировке задачи их полезно перечислить. Так, в рассмотренном примере параметрами были  $k_1$  и  $k_2$ , однако если усложнить пример, то исходные параметры могут оказаться функциями новой переменной и новых параметров. В общем случае бывает удобным уменьшить число параметров, например, переходом к безразмерным переменным. В предыдущем примере можно было бы воспользоваться безразмерным временем выдержки  $(k + k_2)\theta_n$ , и тогда остался бы только один параметр  $k_1/k_2$  (или, что то же самое,  $c_e$ ). Если  $(c_n - c_e)$  принять за новую переменную, то и этот параметр можно было бы исключить, однако не следует злоупотреблять этим, так как перестает быть понятным физический смысл.

В формулировку задачи входит точное определение перечисленных шести составных частей; ясное понимание того, что должна включать каждая часть в конкретном случае, и составляет искусство постановки задач. Проиллюстрируем это,

сформулировав две задачи, связанные с предыдущим примером.

#### 2.4. Различные постановки задачи для последовательности реакторов-смесителей

Завершим изучение примера § 2.1, приводя его формулировку в том виде, о котором говорилось в предыдущем параграфе.

Задача Ia: определить время выдержки  $\theta_n$ ,  $n=1, \dots, N$ , для последовательности реакторов-смесителей так, чтобы за минимальное общее время выдержки получить заданную величину выхода продукта  $c_1 = \gamma$ .

1. Фазовые переменные:  $c_n$ , выход продукта реакции после ступени  $n$ .
2. Управление:  $\theta_n$ , время выдержки в ступени  $n$  (нужно выбрать  $N-1$  значений,  $\theta_1$  удовлетворяет условию  $c_1 = \gamma$ ).
3. Уравнение процесса:  $c_n = \{c_{n+1} + \theta_n k_1\} / \{1 + \theta_n (k_1 + k_n)\}$ .
4. Ограничения:  $\theta_n \geq 0$ ,  $c_1 = \gamma$ .
5. Целевая функция: минимизировать  $\sum_1^N \theta_n$  (или максимизировать —  $\sum_1^N \theta_n$ ).
6. Параметры:  $k_1, k_2, \gamma$  (или эквивалентные им  $(k_1 + k_2), c_e, \gamma$ ).

Как будет показано ниже, если не пытаться фиксировать конечное состояние  $c_1 = \gamma$ , а максимизировать разность между «выигрышем» от реакции и «стоимостью» времени выдержки, то приходим к задаче, эквивалентной предыдущей. Если подобрать единицы «стоимости» соответствующим образом, то изменение выхода продукта реакции можно считать «выигрышем» в ней.

Так, поскольку начальная концентрация для  $N$  этапов обозначена через  $c_{N+1}$ , а концентрация готового продукта через  $c_1$ , то  $c_1 - c_N$  равно чистому «выигрышу». Пусть в тех же единицах стоимости цена единицы времени выдержки равна  $\lambda$ , тогда  $\lambda \sum_1^N \theta_n$  есть стоимость всего времени выдержки.

Итак, целевая функция равна  $c_1 - c_{N+1} - \lambda \sum_1^N \theta_n$ , и ее можно записать в виде  $\sum_1^N \{c_n - c_{n+1} - \lambda \theta_n\}$ . Таким образом, получена

## Задача Ib.

1. Фазовые переменные:  $c_n$ .
2. Управление:  $\theta_n$  (здесь подлежат выбору все  $\theta_n$ ).
3. Уравнение процесса:  $c_n = \{c_{n+1} + \theta_n k_1\} / \{1 + \theta_n (k_1 + k_2)\}$ .
4. Ограничения:  $\theta_n \geq 0$ .
5. Целевая функция: максимизировать  $\sum_1^N \{c_n - c_{n+1} - \lambda \theta_n\}$ .
6. Параметры:  $k_1, k_2, \lambda$ .

В этой задаче предельный случай  $\lambda = 0$  не имеет физического смысла, поскольку тогда задача свелась бы к максимизации  $(c_1 - c_{N+1})$  без учета общего времени выдержки. Но беря  $\theta_1$  достаточно большим, можно с какой угодно степенью точности приблизить  $c_1$  к  $c_e$ , так что ответ можно найти, просто положив  $\theta_1 \rightarrow \infty$ , при этом значение целевой функции будет стремиться к  $c_e - c_{N+1}$ . Такой ситуации не возникает, если  $\lambda > 0$ , так как значение целевой функции при  $\theta_1 \rightarrow \infty$  обязательно будет отрицательным. Физический смысл задачи максимизации приращения выхода продукта  $(c_1 - c_{N+1})$  сохраняется, если потребовать, чтобы время выдержки имело определенное значение, например  $\Theta$ . Остаток имеющегося времени выдержки, поскольку здесь от него зависит приращение продукта в конце процесса, следует считать фазовой переменной.

Пусть  $\varphi_n = \Theta - \sum_n^N \theta_m$ ,  $\varphi_{N+1} = \Theta$ . Таким образом, получена

## Задача Ic.

1. Фазовые переменные:  $c_n, \varphi_n$ .
2. Управление:  $\theta_n$ .
3. Уравнение процесса:  $c_n = \{c_{n+1} + \theta_n k_1\} / \{1 + \theta_n (k_1 + k_2)\}$ ,  
 $\varphi_n = \varphi_{n+1} - \theta_n$ .
4. Ограничения:  $\varphi_n \geq 0, \theta_n \geq 0$ .
5. Целевая функция: максимизировать  $\sum_1^N (c_n - c_{n+1})$ .
6. Параметры:  $k_1, k_2, \Theta$ .

Выше отмечалось, что в действительности параметры  $k_1$  и  $k_2$  являются функциями температуры. Они имеют вид  $k_i(T) = k_i^* \exp(-E_i/RT)$ ,  $i=1, 2$ , где  $R$  есть постоянная. Предположим, что температуру  $T_n$  ступени  $n$  можно регулировать; тогда ее также можно рассматривать как управляющую переменную. Если допустимо пренебречь стоимостью такого регулирования, то сразу же получаем аналоги задач Ia, b и c, в

которых нужно выбирать большее число управляющих переменных. Итак,

Задача IIa.

1. Фазовые переменные:  $c_n$ .
2. Управление:  $\theta_n$ ,  $T_n$  (причем  $\theta_1$  определена ограничением  $c_1 = \gamma$ ).
3. Уравнение процесса:  

$$c_n = \{c_{n+1} + \theta_n k_1(T_n)\} / \{1 + \theta_n [k_1(T_n) + k_2(T_n)]\}.$$
4. Ограничения:  $\theta_n \geq 0$ ,  $T_* \leq T_n \leq T^*$ ,  $c_1 = \gamma$ .
5. Целевая функция: минимизировать  $\sum_1^N \theta_n$ .
6. Параметры:  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\gamma$ .

Аналогичные задачи IIb и IIc можно получить, если в постановках задач Ib и Ic изменить элементы п. 2, 4 и 6.

В постановки задач можно также внести дополнительные изменения, если попытаться учесть тот факт, что регулирование температуры связано с затратами. Например, если в процессе реакции возникает тепло, то его поток будет регулироваться рубашкой охлаждения или отводиться с определенной скоростью змеевиками. Скорость, с которой выделяется тепло, пропорциональна скорости реакции, причем коэффициент пропорциональности равен тепловой энергии реакции. Пусть  $C_p$  есть теплоемкость участвующей в реакции смеси и  $T_0$  — начальная температура, тогда поток материала, поступающего в реактор  $n$  с температурой  $T_{n+1}$ , приносит с собой тепло со скоростью  $qC_p(T_{n+1} - T_0)$ . Принесенная тепловая энергия плюс тепло, возникающее в процессе реакции, равны тепловой энергии, уносимой выходящим потоком  $qC_p(T_n - T_0)$ , плюс энергия  $Q_n^*$ , отводимая системой охлаждения. Итак,

$$Q_n^* = qC_p(T_{n+1} - T_n) + (-\Delta H) V_n \{k_1 - (k_1 + k_2)c_n\}.$$

Если положить  $J = -\Delta H/C_p$ ,  $Q_n = Q_n^*/qC_p$ , то

$$Q_n = T_{n+1} - T_n + JQ_n \{k_1(T_n) - [k_1(T_n) + k_2(T_n)]c_n\}. \quad (2.16)$$

Для заданных величин  $T_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  и управляющих переменных  $\theta_n$  и  $Q_n$  последнее уравнение можно рассматривать как уравнение процесса для температуры. При определении  $T_n$  и  $c_n$  это уравнение следует решать совместно с уравнением сохранения массы. Так как на отвод тепла будет оказывать влияние температура на входе, то ее следует рассматривать как фазовую переменную. Если «стоимость» отвода тепла

считать пропорциональной скорости его отвода, то имела бы смысл целевая функция  $c_1 - c_{N+1} - \lambda \sum \theta_n - \mu \sum Q_n$ , ее можно трактовать как «выигрыш» от реакции за вычетом общей стоимости времени выдержки и отвода тепла. Таким образом, формулируется

Задача III.

1. Фазовые переменные:  $c_n, T_n$ .

2. Управление:  $\theta_n, Q_n$ .

3. Уравнение процесса:  $c_{n+1} - c_n + \theta_n \{k_1 - (k_1 + k_2) c_n\} = 0$ ,  
 $T_{n+1} - T_n + J \theta_n \{k_1 - (k_1 + k_2) c_n\} - Q_n = 0$ .

4. Ограничения:  $\theta_n \geq 0, Q_n \geq 0, T_* \leq T_n \leq T^*$ .

5. Целевая функция: максимизировать  $\sum_1^N \{c_n - c_{n+1} - \lambda \theta_n - \mu Q_n\}$ .

6. Параметры:  $k_1^*, k_2^*, E_1, E_2, \lambda, \mu$ .

Тем самым мы привели исходную задачу к виду, сравнительно точно описывающему реальный процесс, попутно на разнообразных примерах мы ознакомились с искусством подобного приведения. Теперь воспользуемся этими примерами, чтобы проиллюстрировать основы метода динамического программирования, который впоследствии мы будем применять к решению самых различных задач.

## ГЛАВА 3

### *Принцип оптимальности*

Изложению принципа оптимальности Беллмана мы предположим основанное на здравом смысле решение нашей основной задачи. Затем, обсудив принцип оптимальности, мы подробно остановимся на том, как его применить к решению той же задачи и какие возможны способы получения и представления результатов решения.

#### **3.1. Основанное на здравом смысле решение задачи о реакторе-смесителе**

Требуется найти последовательность времен выдержки  $\theta_N, \dots, \theta_1$ , дающих изменение концентрации от начального состояния  $c_{N+1} = \beta$  до значения  $c_1 = \gamma$ . Прежде всего отметим, что в том случае, когда  $N = 1$ , никакой проблемы практически не существует, здесь время выдержки нужно взять таким, чтобы удовлетворялись граничные условия

$$\theta_1 = \frac{c_1 - c_2}{k_1 - (k_1 + k_2) c_1} = \frac{\gamma - \beta}{k_1 - (k_1 + k_2) \gamma}. \quad (3.1)$$

Таким образом, минимальное время выдержки для единственной ступени полностью определено, и при этом видно, что оно может быть функцией только  $c_2$  или  $\beta$  (так как  $\gamma$ , будучи параметром системы, является постоянной величиной). Возьмем некоторое  $c_2$  и, вместо того чтобы ограничиваться одним значением  $\beta$ , вспомним, что можно найти решение всех задач, у которых  $0 \leq c_2 \leq \gamma$ . В самом деле, пусть  $f_1(c_2)$  означает минимальное время выдержки при получении  $c_1 = \gamma$  за один этап, тогда

$$f_1(c_2) = \frac{\gamma - c_2}{k_1 - (k_1 + k_2) \gamma}. \quad (3.2)$$

Нас не должно смущать то обстоятельство, что фактически здесь отсутствовала возможность выбора;  $\theta_1$  принимает единственное значение, и поэтому оно является наименьшим из всех возможных.

В случае  $N=2$  имеется действительная задача оптимизации. Всякому выбранному нами значению  $\theta_2$  будет соответствовать некоторое  $c_2$ , значение же  $\theta_1$ , необходимое для завершения процесса, задается уравнением (3.1) или (3.2). Именно,

$$\theta_2 + \theta_1 = \frac{c_2 - c_3}{k_1 - (k_1 + k_2)c_2} + \frac{\gamma - c_2}{k_1 - (k_1 + k_2)\gamma}; \quad (3.3)$$

здесь  $c_3$  — заданный объем продукта реакции в начале второго этапа. Из уравнения (3.3) видно, что наиболее просто определить минимальное время, если принять  $c_2$  за управляющую переменную и выбирать ее в пределах  $c_3 \leq c_2 \leq \gamma$ . Поскольку в граничных точках  $c_2 = c_3$  или  $c_2 = \gamma$  значения времени одинаковы и равны  $f_1(c_3)$  (просто в этих случаях одна ступень отсутствует) и рассматриваемое выражение конечно, непрерывно и дифференцируемо, то очевидно, что внутри этих границ действительно существует значение  $c_2$ , которое дает минимум выражения  $(\theta_1 + \theta_2)$ . Таким образом, чтобы найти минимум данного выражения, нужно продифференцировать его по  $c_2$  и приравнять производную нулю:

$$\frac{d}{dc_2}(\theta_2 + \theta_1) = \frac{1}{k_1 - (k_1 + k_2)c_2} + \frac{(k_1 + k_2)(c_2 - c_3)}{\{k_1 - (k_1 + k_2)c_2\}^2} - \frac{1}{k_1 - (k_1 + k_2)\gamma} = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно  $c_2$ ; его можно решать следующим образом. Пусть  $c_e - c = x$ ,  $c_e - \gamma = \xi$ , тогда так как  $c_e = k_1 / (k_1 + k_2)$ , то

$$\frac{1}{x_2} + \frac{x_3 - x_2}{x_2^2} - \frac{1}{\xi} = 0$$

или

$$x_2^2 = x_3 \xi. \quad (3.4)$$

Итак,  $(c_e - c_2)$  должно быть средним геометрическим  $(c_e - c_3)$  и  $(c_e - \gamma)$ , и подстановка в исходное выражение даст

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{k_1 + k_2} \left[ \left( \frac{c_e - c_3}{c_e - \gamma} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.5)$$

Если определить, как и выше,  $f_2(c_3)$  как минимальное общее время выдержки для двух этапов, при котором выход продукта реакции увеличивается с  $c_3$  до  $\gamma$ , то

$$f_2(c_3) = \frac{2}{k_1 + k_2} \left[ \left( \frac{c_e - c_3}{c_e - \gamma} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (3.6)$$

Имея решение для случая двух ступеней, перейдем к трехшаговой задаче. Положим  $c_e = k_1/(k_1 + k_2)$  и сразу выпишем соответствующее уравнение

$$(k_1 + k_2)(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1) = \frac{c_3 - c_4}{c_e - c_3} + \frac{c_2 - c_3}{c_e - c_2} + \frac{\gamma - c_2}{c_e - \gamma}. \quad (3.7)$$

Здесь снова управляющими переменными удобно считать промежуточные выходы продукта  $c_2$  и  $c_3$ ; их оптимальные значения можно получить, если найти частные производные по этим двум переменным, приравнять их нулю и решить полученные уравнения. Если проделать это без каких-либо изменений, то можно прийти к сложным алгебраическим выкладкам<sup>1)</sup>, так что следует вернуться назад и более тщательно все проанализировать. Предположим, что каким-то образом  $c_3, c_4 \leq c_3 \leq \gamma$ , уже выбрана, тогда первое слагаемое в уравнении (3.7) известно, а во втором фиксировано значение  $c_3$ . Но для любого  $c_3$  мы умеем выбирать  $c_2$  так, чтобы сумма двух последних членов была минимальной, и ясно, что для заданного  $c_3$  эта величина  $c_2$  и будет оптимальной. Заменяя сумму двух последних слагаемых в соответствии с уравнением (3.6), получаем

$$(k_1 + k_2)(\theta_3 + \theta_2 + \theta_1) = \frac{c_3 - c_4}{c_e - c_3} + 2 \left( \frac{c_e - c_3}{c_e' - \gamma} \right)^{1/2} - 2,$$

и, чтобы минимизировать это выражение, осталось лишь выбрать единственную оставшуюся переменную  $c_3$ . Это удобно сделать, если перейти к переменным  $x$  и записать

$$\frac{d}{dx_3} \left\{ \frac{x_4}{x_3} - 1 + 2 \left( \frac{x_3}{\xi} \right)^{1/2} - 2 \right\} = 0$$

или

$$x_3^2 = x_4^2 \xi, \quad (3.8)$$

причем минимум равен

$$3 \left\{ \left( \frac{x_4}{\xi} \right)^{1/3} - 1 \right\}.$$

Итак,

$$\hat{f}_3(c_4) = \frac{3}{k_1 + k_2} \left[ \left( \frac{c_e - c_4}{c_e - \gamma} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad (3.9)$$

и

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3.$$

<sup>1)</sup> В данном примере в силу его простоты выкладки можно довести до конца, но стоит перейти к более сложному примеру, и трудности станут непреодолимыми.

Нетрудно догадаться, что закономерность уже найдена, и в общем случае

$$f_N(c_{N+1}) = \frac{N}{k_1 + k_2} \left[ \left( \frac{c_e - c_{N+1}}{c_e - \gamma} \right)^{1/N} - 1 \right]. \quad (3.10)$$

Это есть наименьшее общее время выдержки для  $N$  этапов, которое необходимо для получения конечной концентрации продукта, равной  $\gamma$ , при начальном его содержании  $c_{N+1}$ , и стратегия, которая позволяет уложиться в это время, должна заключаться в том, что на всех этапах время выдержки берется одинаковым.

Чтобы доказать это, воспользуемся методом индукции и предположим, что для  $N-1$  этапов при любом содержании поступающей в них смеси наилучшая стратегия известна. Можно написать

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)(\theta_N + \theta_{N-1} + \dots + \theta_1) = \\ = \left( \frac{c_N - c_{N+1}}{c_e - c_N} \right) + \left\{ \frac{c_{N-1} - c_N}{c_e - c_{N-1}} + \dots + \frac{\gamma - c_2}{c_e - \gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Если  $c_N$  каким-либо образом выбрана, то величина первого слагаемого фиксирована, и поскольку для  $N-1$  этапов стратегия известна, то известно и как минимизировать сумму оставшихся членов. Вследствие того, что для  $N-1$  этапов используется оптимальная стратегия, общее время выдержки будет равно

$$\frac{c_N - c_{N+1}}{c_e - c_N} + f_{N-1}(c_N),$$

и теперь задача свелась к отысканию такого  $c_N$ , которое сводило бы к минимуму последнюю сумму. В результате этой минимизации получается  $f_N(c_{N+1})$ , и поэтому

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Min} \left[ \frac{c_N - c_{N+1}}{c_e - c_N} + f_{N-1}(c_N) \right]. \quad (3.11)$$

Предоставляем читателю возможность убедиться в том, что выражение (3.10) удовлетворяет этому уравнению и что соответствующая стратегия заключается в выборе для всех этапов одинаковых времен выдержки. Обратим внимание лишь на то, что при решении задачи методом индукции вместо одновременного выбора всех  $N-1$  значений промежуточных концентраций продукта выбирается только одно из них.

### 3.2. Принцип оптимальности

Нередко кажущаяся очевидность какого-либо факта затрудняет оценку его значения. Так, принцип оптимальности, несомненно, использовался многими авторами для частных случаев, но только Беллман впервые сформулировал его в явном виде и показал, насколько этот принцип широко применим и как велики его возможности. В предыдущей задаче нам удалось свести проблему одновременного выбора  $N - 1$  управляющих переменных к последовательному решению одномерных задач оптимизации. Поскольку именно многомерность задачи вызывает наибольшие трудности, то в результате этого сведения достигается громадная экономия и становится возможным отыскание ответа в таких задачах, решение которых при ином подходе потребовало бы слишком много времени. Правда, нам пришлось заплатить за такое упрощение — мы строили функции  $f_n(c_{n+1})$  для всех  $c_{n+1}$  из отрезка  $[\beta, \gamma]$ , поскольку мы не знали, какое  $c_{n+1}$  являлось оптимальным, и лишь на последнем шаге положили  $c_{N+1} = \beta$ . Существуют задачи, в которых эта плата чересчур велика, и мы обсудим различные способы ее уменьшения.

Классическая формулировка принципа оптимальности приведена в первой из книг Беллмана «Динамическое программирование» [1.8], стр. 105.

*Принцип оптимальности. Оптимальное управление обладает тем свойством, что каково бы ни было начальное состояние и начальное управление, последующее управление должно быть оптимальным по отношению к состоянию, получающемуся в результате действия начального управления.*

Беллман называет этот принцип «интуитивным» и замечает, что доказательство от противного очевидно. Весьма нестрогая формулировка принципа явно является намеренной и указывает на то, что при его использовании следует внимательно подумать. Последнее требование, однако, не всегда выполняется, и, по-видимому, имеет смысл четко сформулировать подразумеваемые условия и привести доказательство, каким бы очевидным оно ни было. Мы будем рассматривать процессы управления, которые естественно назвать процессами без обратной связи, поскольку в общей задаче § 2.3 управление  $q_n$  влияет только на последующие состояния  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1$  и не оказывает влияния на предшествующие состояния. Назовем конфинальным подпроцессом  $N$ -шагового процесса  $n$ -шаговый процесс, состоящий из

шагов  $1, 2, \dots, n$  ( $n \leq N$ ), а состояние  $\mathbf{p}_{n+1}$  — исходным для этого подпроцесса. Принцип оптимальности заключается в следующем: для всякого процесса без обратной связи оптимальное управление таково, что оно же является оптимальным для любого конфинального подпроцесса по отношению к его исходному состоянию. Доказательство проводится от противного; если бы это было не так, например, для  $n$ -шагового подпроцесса, то можно было бы увеличить выигрыш от всего процесса, сделав управления  $\mathbf{q}_n, \dots, \mathbf{q}_1$  оптимальными, но тогда прежнее управление не являлось бы оптимальным. Это рассуждение справедливо, поскольку управление  $\mathbf{q}_n$  не влияет на состояния или выигрыш, соответствующие шагам  $n+1, n+2, \dots, N$ . Если имеется обратная связь, так что предыдущие состояния зависят от  $\mathbf{q}_n$ , то очевидно, что иногда управление, дающее выигрыш меньше максимального на шагах  $n, n-1, \dots, 1$ , сможет компенсировать эту разницу за счет шагов  $N, \dots, n+1$ . К процессам с обратной связью мы вернемся позже.

Возможно, мы изложили принцип оптимальности чересчур громоздко. но опыт показывает, что студент полностью уясняет его смысл только после ряда повторений. Принцип же попросту утверждает, что если вы не выбираете наилучшее решение в данный момент, то последствия этого нельзя исправить в будущем.

### 3.3. Решение задачи управления дискретным процессом методом динамического программирования

Для общего дискретного процесса, описанного в § 2.3, принцип оптимальности применяется по существу так же, как это делалось в задаче о реакторе-смесителе, которую мы решали, исходя лишь из соображений здравого смысла. Сначала рассматривается одношаговый процесс, в котором, выбирая управление  $\mathbf{q}_1$ , нужно перевести начальное состояние  $\mathbf{p}_2$  в состояние  $\mathbf{p}_1$  и максимизировать целевую функцию  $O(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1) = P_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1)$ . Пусть

$$f_1(\mathbf{p}_2) = \underset{\mathbf{q}_1}{\text{Max}} [P_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1)] \quad (3.12)$$

есть максимальный выигрыш за один шаг. Он получается при оптимальном выборе  $\mathbf{q}_1$ , зависящем от  $\mathbf{p}_2$ ; обозначим это управление через  $\mathbf{q}_1^0(\mathbf{p}_2)$ . Не останавливаясь на том, как фактически проделать этот выбор, мы отметим лишь, что он должен быть допустимым, т. е. удовлетворять всем наложенным

ограничениям. Далее, целевая функция для двух шагов имеет вид

$$P_2(\mathbf{p}_3; \mathbf{q}_2) + P_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1),$$

и для любого допустимого  $\mathbf{q}_2$  можно вычислить первое слагаемое. Вектор  $\mathbf{p}_2$  во втором слагаемом определяется уравнением процесса

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{p}_3; \mathbf{q}_2). \quad (3.13)$$

Но мы уже исследовали раньше, как максимизировать второе слагаемое, — нужно взять  $\mathbf{q}_1$  равным  $\mathbf{q}_1^0(\mathbf{p}_2)$ , и максимум будет равен  $f_1(\mathbf{p}_2)$ . Поэтому, меняя  $\mathbf{q}_2$ , мы сможем максимизировать сумму обоих слагаемых, т. е. целевую функцию двухшагового процесса. Если обозначить эту величину через  $f_2(\mathbf{p}_3)$ , то из наших рассуждений следует, что

$$f_2(\mathbf{p}_3) = \text{Max}_{\mathbf{q}_2} [P_2(\mathbf{p}_3; \mathbf{q}_2) + f_1(\mathbf{p}_2)], \quad (3.14)$$

где  $\mathbf{p}_2$  определяется уравнением (3.13). Управление  $\mathbf{q}_2$ , для которого достигается максимум, зависит от  $\mathbf{p}_3$ ; обозначим его  $\mathbf{q}_2^0(\mathbf{p}_3)$ . Тогда

$$f_2(\mathbf{p}_3) = P_2(\mathbf{p}_3; \mathbf{q}_2^0) + f_1(\mathbf{F}_2(\mathbf{p}_3; \mathbf{q}_2^0)). \quad (3.15)$$

Будем продолжать построение оптимального управления на каждом шаге, применяя принцип оптимальности. Обозначим через  $f_{n-1}(\mathbf{p}_n)$  максимум целевой функции для  $(n-1)$ -шагового подпроцесса, т. е.  $f_{n-1}(\mathbf{p}_n) = \text{Max} \sum_1^{n-1} P_r$ . Целевая функция для  $n$  шагов может быть записана в виде

$$P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) + \sum_1^{n-1} P_r(\mathbf{p}_{r+1}; \mathbf{q}_r),$$

причем при всяком выборе  $\mathbf{q}_n$  может быть вычислено первое слагаемое, а поскольку  $\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n)$ , то может быть найден максимум второго слагаемого (он равен  $f_{n-1}(\mathbf{p}_n)$ ). Теперь остается выбрать  $\mathbf{q}_n$ , чтобы максимизировать сумму двух слагаемых, и мы получим  $f_n(\mathbf{p}_{n+1})$ . Вся эта процедура (которая трудно описывается словами) кратко выражается в виде уравнения

$$f_n(\mathbf{p}_{n+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) + f_{n-1}(\mathbf{p}_n)], \quad (3.16)$$

где

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

По определению  $f_0(\mathbf{p}_1) = 0$ , поэтому уравнения (3.12) и (3.13) получаются из общего уравнения (3.16) при  $n=1$  и  $n=2$ . Оптимальное управление в уравнении (3.16) зависит от  $\mathbf{p}_{n+1}$ , обозначим его через  $\mathbf{q}_n^0(\mathbf{p}_{n+1})$ . Возможно, что  $\mathbf{q}_n^0$  не единственно (величина  $f_n(\mathbf{p}_{n+1})$ , разумеется, единственна), но так как максимальное значение достигнуто, то неважно, какое из возможных оптимальных управлений при этом используется; если же значение оптимального управления не безразлично, то это следует учесть при выборе целевой функции.

Перечислим этапы, которые имеют место при постановке и решении задачи методом динамического программирования.

Важность этапов С и D будет пояснена позже; оформленные результаты вычислений (этап F) составляет предмет следующего параграфа.

А. Проверяется, что задача соответствует общей схеме дискретного процесса, описанного в § 2.3. Если есть обратные связи, то необходимо дополнительное исследование.

В. Формулируется задача и дается ее описание по следующей схеме:

1. Фазовые переменные.
2. Управление.
3. Уравнение процесса.
4. Ограничения.
5. Целевая функция.
6. Параметры.

С. Проверяется, что фазовых координат достаточно и что максимум целевой функции есть функция только вектора  $\mathbf{p}_{N+1}$ . Определяется

$$f_N(\mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\{\mathbf{q}_n\}} \left[ \sum_1^N P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) \right].$$

D. Проверяется, что в качестве управляющих переменных выбраны такие, для которых величины  $P_n$  вычисляются наиболее просто.

E. Начиная с  $f_0=0$  для  $n=1, 2, \dots, N$  решается функциональное уравнение

$$f_n(\mathbf{p}_{n+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) + f_{n-1}(\mathbf{p}_n)],$$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n).$$

F. Результаты представляются в виде таблиц или графиков так, как это предлагается в следующем § 3.4.

### 3.4. Оформление результатов

В качестве примера оформления результатов приведем решение задачи § 3.1. Если  $k_1 = 0,8$ ,  $k_2 = 0,2$ , то  $c_e = 0,8$  и за  $\gamma$  можно взять любое число, меньшее  $c_e$ , например 0,7. Из уравнений (3.2), (3.4), (3.6), (3.8) и (3.9) имеем

$$f_1(c_2) = 7 - 10c_2, \quad (3.17)$$

$$f_2(c_3) = 2 \cdot [(8 - 10c_3)^{1/2} - 1], \quad c_2^0(c_3) = (0,1) \cdot [8 - (8 - 10c_3)^{1/2}], \quad (3.18)$$

$$f_3(c_4) = 3 \cdot [(8 - 10c_4)^{1/3} - 1], \quad c_3^0(c_4) = (0,1) \cdot [8 - (8 - 10c_4)^{2/3}]. \quad (3.19)$$

Результаты вычислений для аргументов  $c = 0(0,1)0,6$  приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

1	2	3	4	5	6
$c$	$f_3(c_4)$	$c_3^0(c_4)$	$f_2(c_3)$	$c_2^0(c_3)$	$f_1(c_2)$
0	3,000	0,400	3,657	0,517	7,000
0,1	2,739	0,434	3,292	0,535	6,000
0,2	2,454	0,470	2,899	0,555	5,000
0,3	2,130	0,508	2,472	0,576	4,000
0,4	1,761	0,548	2,000	0,600	3,000
0,5	1,326	0,592	1,464	0,627	2,000
0,6	0,780	0,641	0,828	0,659	1,000

В левом столбце этой таблицы  $c$  есть аргумент  $c_4$  для столбцов 2 и 3,  $c_3$  — для столбцов 4 и 5 и  $c_2$  — для 6-го столбца. Так как по условиям задачи  $c_1 = 0,7$ , то нет необходимости приводить столбец  $c_1^0(c_2)$ .

Пусть требуется найти трехшаговую стратегию для случая  $c_4 = 0$  (т. е. когда поступает чистое сырье  $A$ ). В столбце 2 находим, что минимальное общее время выдержки равно 3,0; если бы было заранее известно, что оптимальному случаю соответствуют резервуары равного объема, то это означало бы, что  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 1$ . Если этот факт не известен, то его легко можно установить с помощью таблицы. В столбце 3 находим, что  $c_3^0 = 0,4$ , и эта концентрация является начальной для последующих двух этапов. Так как на этих двух



В этой таблице в крайнем левом столбце не указана размерность  $s$  вектора фазовых переменных  $\mathbf{p}$ . Это сделано умышленно, так как записать один за другим  $s$  столбцов в принципе нетрудно, но при этом возникает проблема объема используемой таблицы. Если  $s = 1$ , то все очевидно — здесь нужен только один левый столбец с достаточно малым шагом по аргументу для приемлемо точной интерполяции. Если  $s = 2$ , то вектор  $\mathbf{p}$  имеет две координаты:  $p_1$  и  $p_2$ . И при этом для переменного  $p_1$  нужен уже не один столбец, а несколько — по числу требуемых значений  $p_2$ . Таким образом, вместо одного листка таблицы нужно было бы иметь несколько, причем число их должно быть достаточным для интерполяции. Но интерполяция по двум переменным требует больше точек, чем по одной. Для  $s = 3$  потребуется большой том таблиц, а для  $s = 4$  — целая библиотека. Если эти таблицы представляются не в печатном виде, то их нужно запоминать в вычислительной машине, и здесь снова все просто для  $s = 1$ , несколько громоздко для  $s = 2$ , иногда еще возможно для  $s = 3$  и совершенно безнадежно для  $s = 4$ . Это обуславливает стремление уменьшить размерность вектора фазовых переменных, и в следующей главе мы обсудим некоторые пути достижения этой цели.

### 3.5. Эффективность динамического программирования

Установив природу трудностей, которые возникают при увеличении размерности вектора фазовых переменных, рассмотрим кратко причину того, почему в вычислениях динамическое программирование дает такой выигрыш. Попутно мы определим типы задач, для которых применение этого метода наиболее целесообразно.

В  $N$ -шаговом процессе, когда на каждом шаге число допустимых значений управления равно  $r$ , всего имеется  $Nr$  вариантов выбора. Для простоты предположим, что, для того чтобы с приемлемой точностью судить об оптимуме, достаточно для каждой фазовой переменной рассматривать лишь 10 ее значений. Если проводить расчет для всех вариантов, то, прежде чем нашлась бы оптимальная комбинация, пришлось бы  $10^{Nr}$  раз вычислить значения целевой функции. Если было бы нужно знать оптимальную стратегию для всей совокупности начальных значений фазовых переменных и снова для каждой переменной можно было бы ограничиться десятью значениями, то оптимальная стратегия определялась

бы для  $10^8$  начальных значений фазовых переменных. Таким образом, способ полного перебора всех вариантов требует  $10^{Nr+s}$  вычислений. Если бы каждое вычисление занимало  $3 \cdot 10^{-6}$  сек машинного времени при довольно низкой цене — 100 долларов за час, то на все расчеты ушло бы  $10^{Nr+s-13}$  лет и стоило бы это  $10^{Nr+s-7}$  долларов. Так, для пятишагового процесса ( $N=5$ ) с одной фазовой переменной, когда на каждом шаге управление может принимать три значения ( $r=3$ ), решение заняло бы тысячелетие и стоило бы столько же, сколько программа космических исследований.

Если использовать метод динамического программирования, то на каждом шаге для каждого вектора фазовых переменных потребовалось бы  $10^r$  вычислений, что в сумме дает  $10^{r+s}$  вычислений за шаг. Поскольку все это повторяется от шага к шагу, то для  $N$ -шагового процесса нужно было бы провести только  $N \cdot 10^{r+s}$  расчетов. Тогда при той же цене (в смысле времени и денег) затраты составили бы  $N \cdot 10^{r+s-13}$  лет и  $N \cdot 10^{r+s-7}$  долларов. Для предыдущего случая ( $N=5$ ,  $r=3$ ,  $s=1$ ) это соответствует менее чем десятой доле секунды и приблизительно половине цента.

Конечно, сравнение чересчур утешительно, поскольку здесь вопиющая неразумность сравнивается с умеренной мудростью; в то же время было бы неправильным считать, что неразумность такого сорта невозможна.

Итак, поскольку в качестве характеристики обоих методов взяты числа  $N \cdot 10^{r+s}$  и  $10^{Nr+s}$ , то их отношение  $N \cdot 10^{-(N-1)r}$  может являться некоторой мерой выигрыша, получаемого при использовании метода динамического программирования. С ростом числа шагов выигрыш возрастает, так как с помощью показательной функции влияние множителя  $N$  уменьшается. Мы еще не рассмотрели трудности, связанные с увеличением  $s$ . В связи с этим полезно провести сравнение для случая одного начального значения фазовых переменных, а не всей их совокупности в  $10^s$  значений. Тогда метод динамического программирования требовал бы  $(N-1)10^{r+s}$  расчетов для первых  $N-1$  этапов и еще  $10^r$  для последнего, а всего  $\{(N-1)10^s + 1\}10^r$ . При полном переборе было бы нужно повторить расчеты  $10^{Nr}$  раз и отношение равнялось бы  $\{(N-1)10^s + 1\}10^{-(N-1)r}$ . Уже отсюда отчасти усматривается значимость величины  $s$ . Главные же затруднения, обусловленные большими значениями  $s$ , связаны с необходимым объемом памяти машины и сложностью интерполяции. Беллман назвал все это «проклятием размерности».

### 3.6. Другие постановки задачи для последовательности реакторов-смесителей

Для того чтобы проиллюстрировать вывод принципа оптимальности, мы использовали основную задачу Ia (стр. 30). Придавая большое значение этому методу решения, рассмотрим еще одну из задач, например Ic. Напомним, что в ее постановке при заданном общем времени выдержки  $\Theta$  максимизируется выход продукта  $c_1 - c_{N+1}$ . Рассмотрим задачу менее строго, чтобы начать исследование с этапов C и D и подчеркнуть их важность.

Этап A не вызывает затруднений, так как, без сомнения, структура задачи позволяет использовать метод динамического программирования. Пусть на этапе B мы немного поторопились и, как в предыдущем примере, предположили, что состояние системы полностью определяется выходом продукта реакции  $c_n$ . В этом случае выражение максимума целевой функции можно было бы представить как

$$h_N(c_{N+1}) = \text{Max} \sum_1^N (c_n - c_{n+1}).$$

Однако проверкой (этап C) убеждаемся, что этот максимум не будет функцией только фазовой переменной. Так, если задано только  $c_{N+1}$ , то максимальный выход продукта равен  $(c_e - c_{N+1})$ , где  $c_e$  есть равновесный выход продукта реакции. Он достигается за бесконечно большое время, при этом ограничение, наложенное на общее время выдержки, нарушается. Таким образом, для определения максимальной величины выхода одной фазовой переменной  $c_{N+1}$  недостаточно; это происходит потому, что величина максимума зависит еще и от  $\Theta$  — заданного общего времени выдержки. В связи с этим введем ранее не учтенную фазовую переменную  $\varphi_n$ . Поэтому правильным выражением для максимума целевой функции будет

$$h_N(c_{N+1}, \varphi_{N+1}) \quad \text{или} \quad h_N(c_{N+1}, \Theta) = \text{Max} [c_1 - c_{N+1}]. \quad (3.20)$$

Этап D состоит в том, что проверяется, обеспечивает ли выбор данных управляющих переменных наиболее простой процесс вычислений. Если считать управляющей переменной  $\theta_n$ , то приходится решать функциональное уравнение

$$h_N(c_{N+1}, \varphi_{N+1}) = \text{Max}_{\theta_N} [(c_N - c_{N+1}) + h_{N-1}(c_N, \varphi_N)]. \quad (3.21)$$

Переменная  $\varphi_N$  вычисляется просто, поскольку  $\varphi_N = \varphi_{N+1} - \theta_N$ , а  $c_N$  находится по формуле

$$c_N = \{c_{N+1} + k_1\theta_N\} / \{1 + \theta_N(k_1 + k_2)\}. \quad (3.22)$$

Если же в качестве управляющей переменной выбрать  $c_N$ , то  $\theta_N$  нужно определять из выражения

$$\theta_N = \{c_N - c_{N+1}\} / \{k_1 - (k_1 + k_2)c_N\}. \quad (3.23)$$

Здесь трудно предпочесть одну формулу другой с точки зрения сложности вычислений. Однако в более сложной задаче IIa, которая рассматривается в следующей главе, выбор переменной  $c_n$  в качестве управляющей будет давать определенное преимущество. Объясняется это тем, что уравнение процесса всегда линейно по  $\theta$ , в то время как по  $c$  оно может быть и нелинейным. Поэтому для заданного  $c$  его легко решить относительно  $\theta$ , однако обратное сделать значительно трудней.

### БИБЛИОГРАФИЯ

- 3.2. Ставшее классическим изложение принципа оптимальности можно найти в книге Беллмана «Динамическое программирование» [1.8] в гл. 3 «Структура процессов динамического программирования». Ранее эти результаты были приведены в отчете РЭНД Корпорейшн (1953).
- 3.6. Ряд задач по оптимальному проектированию химических реакторов содержится в книге  
 Aris, R., The Optimal Design of Chemical Reactors, New York, Academic Press, 1961.

### Задачи

1. Воспользовавшись формулами предшествующего параграфа 3.6, решить задачу Ic.

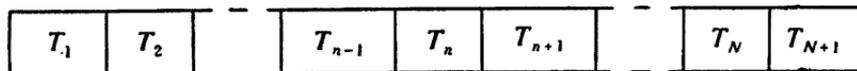
2. Показать, что получающаяся при этом стратегия совпадает со стратегией задачи Ia.

3. Энергия, необходимая для сжатия газа от давления  $p_1$  до давления  $p_{N+1}$  за  $N$  этапов, пропорциональна

$$E = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha + \left(\frac{p_3}{p_2}\right)^\alpha + \dots + \left(\frac{p_{N+1}}{p_N}\right)^\alpha - N.$$

Выбрать промежуточные давления  $p_2 \dots, p_N$  так, чтобы расход энергии был минимальным.

4. Ряд тепловых ванн того же типа, который рассматривается в элементарной термодинамике, разделен теплопроводящими стенками.



Температуры  $T_1$  и  $T_{N+1}$  ( $> T_1$ ) в крайних ваннах поддерживаются постоянными, и передающееся от ванны к ванне тепло равно  $Q_n = k_n(T_n - T_{n+1})$ . Сформулируйте задачу отыскания

значений промежуточных температур  $T_2, \dots, T_N$ , которые бы минимизировали скорость изменения энтропии, если на каждом шаге эта скорость равна отнесенному к температуре полному тепловому потоку  $(Q_{n+1} - Q_n)/T$ .

5. Решить задачу минимизации скорости изменения энтропии, если все  $k_n$  в задаче 4 равны между собой.

6. Несколько одинаковых сфер связаны легкими нерастяжимыми нитями равной длины. Число сфер равно  $2N + 2$ , крайние из них закреплены на одном уровне и находятся друг от друга на некотором расстоянии, отличном от  $(2N + 1)h$ , где  $h$  — расстояние между центрами соседних сфер. Установить положение сфер, исходя из принципа минимума потенциальной энергии.

7. Благотворительное учреждение настолько изучило характер поступающих к нему предложений и приобрело такой опыт в предсказании ожидаемых результатов, что ему известно, что  $x_n$  долларов, выделенные на  $n$ -е предложение, дадут «прибыль»  $f_n(x_n)$ . Сформулировать задачу о таком распределении всего бюджета  $X$  этого учреждения, чтобы в случае, когда поступило  $N$  предложений, суммарная «прибыль» была максимальной. Каким может быть вид функции  $f_n(x_n)$ ?

Изменилось бы решение задачи, если наложить ограничение на величину субсидии?

8. «Престиж» благотворительного учреждения равен сумме «впечатлений»  $g_n(x_n)$ , которое создает каждая субсидия. Функция  $g_n(x_n)$  является монотонно возрастающей. Сформулировать задачу максимизации дохода от субсидий при сохранении престижа постоянным.

9. В  $N$ -ступенчатой ракете вес  $n$ -й ступени является функцией приращения скорости  $v_n$ , которое происходит за время работы этой ступени, и веса  $w_n$  остальных  $n - 1$  ступеней. Обозначим эту функцию через  $W(v_n, w_n)$ . Пусть  $f_N(V)$  есть минимальный вес, требующийся для получения конечной скорости  $V$  с помощью  $N$  ступеней. Показать, что

$$f_N(V) = \min_{v_N} [W\{v_N, f_{N-1}(V - v_N)\} + f_{N-1}(V - v_N)].$$

Имеются ли здесь какие-либо дополнительные вычислительные трудности, с которыми мы не встречались ранее (см. Беллман, «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8], гл. 6)?

10. Несколько шариков находятся на одной прямой и связаны растяжимой нитью. Упругие свойства нити изменяются от участка к участку. Как расположить шарики так, чтобы энергия деформации была минимальной?

## *Графические методы*

### **4.1. Значение графических методов**

Графические методы всегда обладали для математика-прикладника большой привлекательностью. «Чистый» математик может развить способность к абстрактному мышлению до такой степени, что ему не нужны подобные вспомогательные средства, но, вероятно, чтобы достичь такого рода зрелости, он часто обращался к геометрическому истолкованию абстрактных понятий. Несомненно, что в пользу графического метода говорит его наглядность.

С вычислительной точки зрения к графическому методу нужно подходить осторожнее. Общеизвестна неточность графического дифференцирования, а в книге Джеффрисов обращается внимание на погрешности обычных графиков, из-за которых их точность становится ниже той, которая допустима при численном интегрировании<sup>1)</sup>.

С появлением быстродействующих вычислительных машин исчезла большая часть утомительных вычислений, а вместе с ними и некоторые преимущества в скорости и простоте, которые имел когда-то графический метод. Однако, несмотря на это, имеются веские причины, по которым графический метод продолжает быть полезным. Во-первых, его наглядность часто дает наилучшее представление о структуре задачи и ее решении. Во-вторых, эти методы, несмотря на их ограниченную точность, можно использовать для предварительных выкладок, например чтобы определить область, где следует искать решение более точными средствами. В-третьих, часто уже в одном графике содержится значительная информация, а при помощи нескольких графиков инженер или экономист может разобраться в сущности проблемы.

В этой главе мы попытаемся использовать и продемонстрировать некоторые из отмеченных достоинств при решении задачи IIa, в которой следует выбрать оптимальным образом как температуру, так и время выдержки.

---

<sup>1)</sup> Jeffreys H. S. and Jeffreys B. S., *Methods of Mathematical Physics*, 2-nd ed.; New York, Cambridge University Press, 1950.

## 4.2. Задача

Вкратце напомним формулировку задачи на стр. 32.

В этой задаче температура является управляющей переменной и скорость реакции, являясь функцией  $k_1(T)$  и  $k_2(T)$ , зависит от температуры. Уравнение процесса можно записать так:

$$c_n - c_{n+1} = \theta_n [k_1(T_n) - \{k_1(T_n) + k_2(T_n)\} c_n], \quad (4.1)$$

где

$$k_i(T) = k_i^* \exp \{-E_i/RT\}, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Задача заключается в минимизации суммарного времени выдержки в  $N$  смесителях, за которое можно достичь заданной концентрации  $\gamma$  конечного продукта. Как и ранее, это условие означает, что не все  $\theta_n$  выбираются независимо друг от друга, одно из них определяется условием  $c_1 = \gamma$ . Итак, нужно выбирать лишь  $N - 1$  из  $N$  величин  $\theta_n$ . При этом удобно считать управляющими переменными  $N - 1$  величин  $c_N, c_{N-1}, \dots, c_2$ , поскольку минимизируемая функция выражается только через  $\theta_n$ , а  $\theta_n$  легко определить из (4.1). Эти  $N - 1$  величин  $c_n$  вместе с  $N$  значениями температур образуют систему  $2N - 1$  управляющих переменных.

Обозначим правую часть уравнения (4.1) через  $\theta_n r(c_n, T_n)$ . Тогда задачу можно сформулировать так: выбрать переменные  $c_n, n = 1, 2, \dots, N$ , при условии, что  $c_{N+1} \leq c_N \leq \dots \leq c_2 \leq c_1$ , и значения температуры  $T_n, n = 1, 2, \dots, N$ , ( $T_* \leq T_n \leq T^*$ ) так, чтобы функция

$$\sum_1^N \left[ \frac{c_n - c_{n+1}}{r(c_n, T_n)} \right] \quad (4.3)$$

приняла наименьшее возможное значение. Минимум этой функции зависит только от числа шагов  $N$  и концентрации  $c_{N+1}$  продукта, поступающего в  $N$ -й смеситель. Именно,

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Min} \sum_1^N \left[ \frac{c_n - c_{n+1}}{r(c_n, T_n)} \right]. \quad (4.4)$$

Минимум берется по допустимым значениям  $c_N, \dots, c_2, T_N, \dots, T_1$ . В частном случае, когда  $N = 1$ ,

$$f_1(c_2) = \text{Min}_{T_1} \left[ \frac{\gamma - c_2}{r(\gamma, T_1)} \right]. \quad (4.5)$$

Здесь нужно выбрать только  $T_1$ , так как задано  $c_1 = \gamma$ . Используя принцип оптимальности, для  $N > 1$  получаем

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Min} \left[ \frac{c_N - c_{N+1}}{r(c_N, T_N)} + f_{N-1}(c_N) \right], \quad (4.6)$$

и здесь нужно выбирать только  $c_N$  и  $T_N$ . Заметим, что в уравнении (4.6)  $T_N$  входит только в первый член и только в его знаменатель. Ясно, что если  $c_N$  выбрано, то величину  $T_N$  нужно взять такой, чтобы скорость реакции  $r$  была максимальной. Далее

$$r(c, T) = k_1(T)(1 - c) - k_2(T)c, \quad (4.7)$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются выражением (4.2). Для фиксированного  $c$  выражение (4.7) является функцией вида  $\alpha A - \beta B$ , где  $A = 1 - c$ ,  $B = c$ ,  $\alpha = k_1$  и  $\beta = k_2$ . Максимум такой функции ищется в задаче 5 (см. конец гл. 4) при условии, что  $\alpha$  и  $\beta$  — монотонные функции нескольких переменных. В нашей задаче, кроме этого,  $\beta$  есть степенная функция от  $\alpha$ , так как, обращаясь к уравнению (4.2), мы видим, что

$$k_2 = k_2^* (k_1/k_1^*)^{E_2/E_1}$$

или

$$\beta = \rho \alpha^\sigma,$$

где

$$\sigma = E_2/E_1 \quad \text{и} \quad \rho = k_2^* k_1^{*-(E_2/E_1)}. \quad (4.8)$$

Из решения упомянутой задачи следует, что если  $\sigma > 1$ , то функция  $r(c, T)$  имеет максимум по  $T$ , равный

$$R(c) = (E_2 - E_1) \left[ \left\{ \frac{k_1^*(1-c)}{E_2} \right\}^{E_2} \cdot \left\{ \frac{k_2^*c}{E_1} \right\}^{-E_1} \right]^{1/(E_2-E_1)} \quad (4.9)$$

при

$$T_m(c) = (E_2 - E_1)/R \ln \{ E_2 k_2^* c / E_1 k_1^* (1 - c) \}. \quad (4.10)$$

Условие  $\sigma = E_2/E_1 > 1$  отвечает реакциям, в которых выделяется тепло. Они называются экзотермическими, и для них скорость реакции может достигать максимума при некоторой промежуточной температуре. Скорость реакций, поглощающих тепло, эндотермических, растет монотонно с температурой. Ограничимся рассмотрением экзотермического случая как более интересного. Поскольку  $r(c, T)$  имеет только один максимум, то если величина  $T_m(c)$ , определяемая выражением (4.10), находится вне интервала  $(T_*, T^*)$ , необходимо, как это видно из рис. 4.1, взять ближайшую граничную точку.

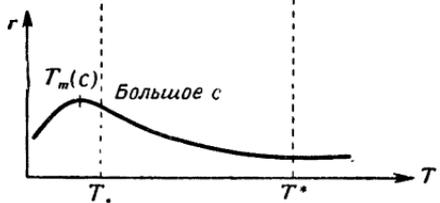
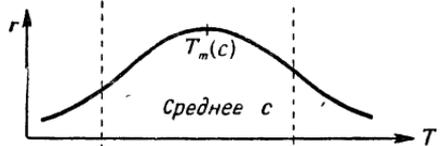
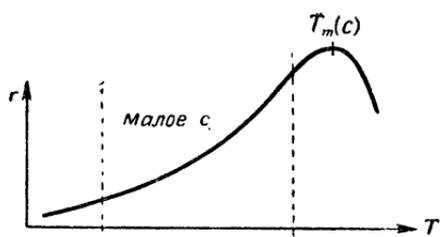


Рис. 4.1.

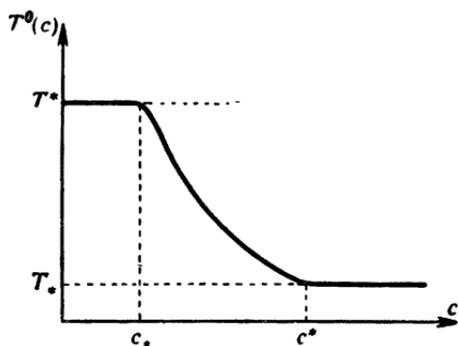


Рис. 4.2.

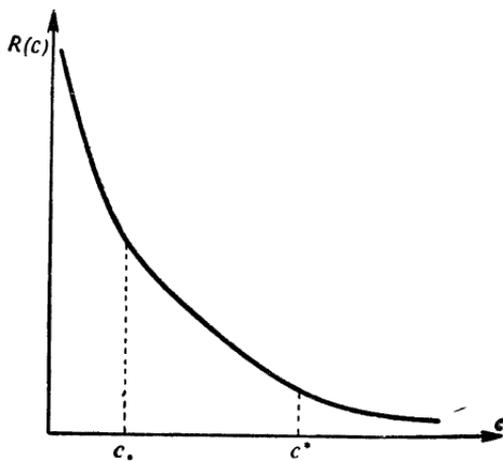


Рис. 4.3.

Если обозначить оптимальную допустимую температуру через  $T^0(c)$ , то типичная ее зависимость от  $c$  показана на рис. 4.2; при этом в каждом конкретном случае одна из границ может и не быть существенной. Вид зависимости максимальной скорости реакции от  $c$  представлен на рис. 4.3. В точках разрыва производной  $T^0(c)$  терпит разрыв кривизна кривой  $R(c)$ , но не ее производная.

Поскольку выбор  $T_N$  определяется выбором  $c_N$ , то, подставляя  $R(c)$  в уравнение (4.6), находим, что

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Min} \left[ \frac{c_N - c_{N+1}}{R(c_N)} + f_{N-1}(c_N) \right]. \quad (4.11)$$

Здесь  $c_N$  — единственный параметр, подлежащий выбору, а  $T_N = T^0(c_N)$ .

### 4.3. Геометрическая интерпретация решения

Решение первого уравнения этой последовательности было получено:  $T_1 = T^0(\gamma)$  и

$$f_1(c_2) = \frac{\gamma - c_2}{R(\gamma)}. \quad (4.12)$$

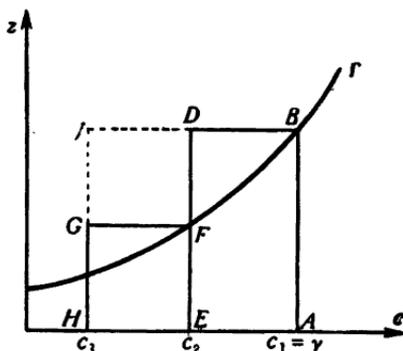
Геометрически величина  $f_1(c_2)$  равна площади прямоугольника с основанием  $\gamma - c_2$  и высотой  $1/R(\gamma)$ . Аналогично правую часть равенства

$$f_2(c_3) = \text{Min} \left[ \frac{c_2 - c_3}{R(c_2)} + \frac{\gamma - c_2}{R(\gamma)} \right] \quad (4.13)$$

можно интерпретировать как сумму площадей прямоугольников с основаниями  $(c_3, c_2)$  и  $(c_2, \gamma)$  и высотами  $1/R(c_2)$  и  $1/R(\gamma)$  соответственно.

Обратимся к рис. 4.4. Кривая  $\Gamma$  есть геометрическое место точек плоскости, у которых  $z = 1/R(c)$ . Форма этой кривой соответствует функции  $R(c)$ , представленной на рис. 4.3. Чтобы определить величину  $f_1(c_2)$  для любого  $c_2$ , нужно, задав абсциссу  $c = \gamma$ , восстановить перпендикуляр до пересечения с  $\Gamma$ , построить прямоугольник  $ABDE$  и найти его площадь. Для двухшагового процесса, когда  $c_3$  фиксировано (точка  $H$ , рис. 4.4) и  $c_2$  любое, правая часть уравнения (4.13) равна сумме площадей  $ABDE$  и  $EFGH$ . Геометрически очевидно, что для всякого  $c_3$  можно выбрать значение  $c_2$  ( $c_3 < c_2 < c_1 = \gamma$ ), которое минимизирует сумму этих площадей. Так, если  $c_2 = c_3$  или  $c_2 = c_1$ , то время выдержки максимально и равно площади  $ABJH$  (как в одношаговом процессе). Сумма же времен выдержки для двух шагов, когда  $c_3 < c_2 < c_1$ , меньше

максимальной на величину площади прямоугольника  $JDFG$ . Более строго: минимизируемая функция (правая часть уравнения (4.13)) является непрерывно дифференцируемой функцией  $c_2$  в интервале  $c_3 < c_2 < c_1 = \gamma$  и при  $c_2 = c_3$  и  $c_2 = c_1$  принимает одинаковые значения. Следовательно, по теореме Ролля внутри интервала  $(c_3, c_1)$  имеется точка  $c_2^0(c_3)$ , где производная функция обращается в нуль. Вследствие монотонности и отсутствия точек перегиба у кривой  $\Gamma$  точка  $c_2^0(c_3)$  есть



Р и с. 4.4.

точка единственного минимума. Функция  $c_2^0(c_3)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \left[ \frac{c_2 - c_3}{R(c_2)} + \frac{\gamma - c_2}{R(\gamma)} \right] = \left[ \frac{1}{R(c_2)} - \frac{R'(c_2)}{R(c_2)^2} \frac{c_2 - c_3}{R(c_2)} - \frac{1}{R(\gamma)} \right] = 0. \quad (4.14)$$

Решение уравнения (4.14) можно легко найти, преобразовав его к виду

$$c_3 = c_2 - \frac{R^2(c_2)}{R'(c_2)} \left[ \frac{1}{R(c_2)} - \frac{1}{R(\gamma)} \right]. \quad (4.15)$$

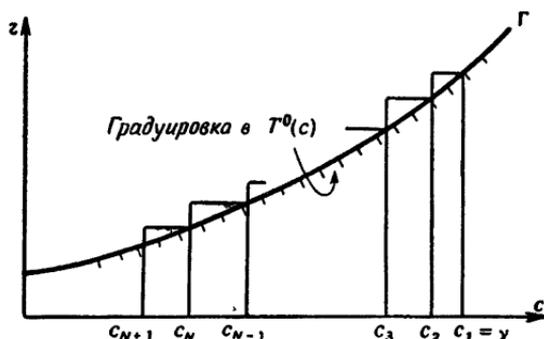
Здесь, вместо того чтобы находить  $c_2$ , оптимальное для некоторого  $c_3$ , по формуле (4.15) определяем  $c_3$ , для которого данное  $c_2$  будет оптимальным, и это можно сделать непосредственным вычислением. Не будем продолжать здесь решать это уравнение, а вернемся сначала к графическому представлению результатов.

$N$ -шаговый процесс может быть исследован подобно двухшаговому. Задача сводится к построению последовательности прямоугольников, у которых правые верхние углы лежат на кривой  $\Gamma$ , основания — на интервале  $(c_{N+1}, c_1)$ , а сумма площадей минимальна. Интуитивно кажется, что при увеличении  $N$  величина этой наименьшей площади убывает, стремясь

к площади фигуры, ограниченной кривой  $\Gamma$  (рис. 4.5). Сведение задачи к минимизации площади совокупности прямоугольников напоминает метод максимизации прямоугольников Денбая<sup>1)</sup>.

#### 4.4. Графическое представление результатов

Можно было бы подтвердить расчетами, что метод решения уравнений (4.11) не многим сложнее, чем в задаче, где температура реакции во всех смесителях постоянна. Решение



Р и с. 4.5.

такой задачи сведено в таблицу в § 3.4. Теперь мы представим результаты в графической форме.

Вначале напомним, что оптимальное значение температуры всегда связано с выбором концентрации соотношением

$$T_n = T^0(c_n). \quad (4.16)$$

Эту зависимость можно нанести на кривую  $\Gamma$  того же типа, что и ранее, разметив ее значениями  $T^0(c)$ , взятыми с графика рис. 4.2. Искомое значение температуры найдется в правом верхнем углу прямоугольника, соответствующего  $n$ -му шагу, как и на рис. 4.5.

Отметим, что решение в одношаговой задаче определяется сразу построением прямоугольника  $ABDE$ . Можно упростить и эту процедуру, если провести горизонтальную линию  $\Gamma_1$  до пересечения с кривой  $\Gamma$  в точке  $c = \gamma$  (рис. 4.6). Тогда для любого заданного  $c_2$  нахождение решения одношаговой задачи — построение упомянутого прямоугольника — сводится к

<sup>1)</sup> См. Denbigh K. G., Instantaneous and Overall Reaction Yields, *Chem. Eng. Sci.*, 14 (1961).

тому, чтобы восстановить перпендикуляр из точки  $c = c_2$  до пересечения с  $\Gamma_1$ .

В дальнейшем удобно нанести на  $\Gamma_1$  деления в единицах  $\theta_1 = f_1(c_2)$  с тем, чтобы левый верхний угол прямоугольника определял оптимальное  $\theta_1$ , а правый — температуру  $T_1$ .

Возвращаясь к рис. 4.4, рассмотрим двухшаговый случай, предположив, что для отмеченных на рис. 4.4 значений  $c_2$

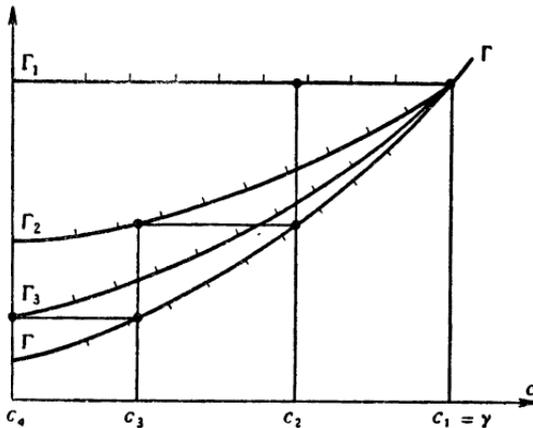


Рис. 4.6.

и  $c_3$  выполняется равенство  $c_2 = c_2^0(c_3)$ . Это значение  $c_2$  также можно определить, зная точку  $G$ . Нужно провести горизонтальную прямую из точки  $G$  до  $\Gamma$  и опустить перпендикуляр  $FE$ , его основание даст  $c_2^0(c_3)$ . Геометрическое место точек  $G$  можно построить, воспользовавшись уравнением (4.15). Для  $c_2 < \gamma$  это уравнение задает абсциссу точки  $G$ , ордината ее равна  $1/R(c_2)$ . На рис. 4.6 так построена кривая  $\Gamma_2$ ; ее параметрические уравнения:

$$\begin{aligned} c &= c_2 - \frac{R^2(c_2)}{R'(c_2)} \left\{ \frac{1}{R(c_2)} - \frac{1}{R(\gamma)} \right\}, \\ z &= \frac{1}{R(c_2)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $c_2$  — параметр. Если обозначить решение уравнения (4.14) через  $c_2^0(c_3)$ , то формула кривой  $\Gamma_2$  примет вид

$$z = 1/R[c_2^0(c)]. \quad (4.18)$$

Построение оптимального решения (т. е. двух прямоугольников) для двухшагового процесса свелось к следующему (см. рис. 4.6): из точки  $c = c_3$  проводим вертикальную линию

до пересечения с  $\Gamma_2$ , горизонтальную до  $\Gamma$ , затем вертикальную до  $\Gamma_1$ . Искомые прямоугольники построены. Если на  $\Gamma_2$  нанести шкалу в единицах  $f_2(c_3)$ , то верхние углы этих прямоугольников определяют: первый — величину  $f_2(c_3) = \theta_1 + \theta_2$ , второй —  $T_2^0 = T^0[c_2^0(c_3)]$ , третий —  $\theta_1 = f_1[c_2^0(c_3)]$  и последний —  $T_1^0$ . Время выдержки на втором шаге  $\theta_2^0 = f_2(c_3) - f_1[c_2^0(c_3)]$ .  
Для трехшагового процесса

$$f_3(c_4) = \text{Min} \left[ \frac{c_3 - c_4}{R(c_3)} + f_2(c_3) \right]. \quad (4.19)$$

Дифференцированием находится оптимальное значение  $c_3 = c_3^0(c_4)$  и получается уравнение, похожее на (4.14),

$$\frac{1}{R(c_3)} - \frac{R'(c_3)}{R(c_3)} \frac{c_3 - c_4}{R(c_3)} + f_2'(c_3) = 0. \quad (4.20)$$

Если его можно решить, то получим зависимость оптимального  $c_3$  от  $c_4$ ,  $c_3^0(c_4)$ . Зависимость используется для построения кривой  $\Gamma_3$  по уравнению

$$z = 1/R[c_3^0(c)]. \quad (4.21)$$

На  $\Gamma_3$  можно нанести шкалу в единицах  $f_3(c_4)$  (см. рис. 4.6). Тогда та же самая конструкция из вертикалей и горизонталей, что и выше, дает оптимальное решение трехшаговой задачи.

Сформулируем алгоритм решения многошаговой задачи. На каждом шаге из уравнения

$$\frac{1}{R(c_N)} - \frac{R'(c_N)}{R(c_N)} \frac{c_N - c_{N+1}}{R(c_N)} + f_{N-1}'(c_N) = 0 \quad (4.22)$$

находим  $c_N^0(c_{N+1})$  и строим кривую  $\Gamma_N$

$$z = 1/R[c_N^0(c)], \quad (4.23)$$

которую размечаем в единицах  $f_N(c_{N+1})$ . Оптимальное решение определяется совокупностью прямоугольников, которые строятся с помощью чередующихся вертикальных и горизонтальных прямых: от  $c = c_{N+1}$  до  $\Gamma_N$ , от  $\Gamma_N$  к  $\Gamma$ , от  $\Gamma$  до  $\Gamma_{N-1}$ , ..., от  $\Gamma_1$  к  $\Gamma$ , и оно характеризуется числами, стоящими в верхних углах каждого прямоугольника.

#### 4.5. Графическое решение

Как видно, единственным недостатком приведенного выше построения является то, что для каждого значения  $\gamma$  нужно строить свое семейство кривых  $\Gamma_n$ . Возникает вопрос, нельзя

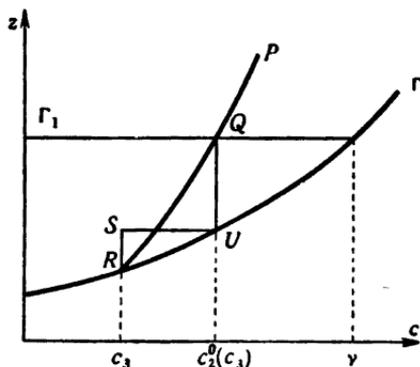
ли по  $\Gamma_1$ , которую провести легко — это горизонтальная прямая, определяемая величиной  $\gamma$ , — построить  $\Gamma_2$ . Представим уравнение для определения  $c_2^0(c_3)$  в виде

$$\frac{1}{R(c_2)} \left\{ 1 - \frac{c_2 R'(c_2)}{R(c_2)} \right\} + c_3 \frac{R'(c_2)}{R^2(c_2)} = \frac{1}{R(\gamma)}. \quad (4.24)$$

Задав какое-либо значение  $c_3$ , можно построить кривую

$$z = \frac{1}{R(c)} \left\{ 1 - \frac{c R'(c)}{R(c)} \right\} + c_3 \frac{R'(c)}{R^2(c)}. \quad (4.25)$$

На рис. 4.7 ей соответствует кривая  $PQR$ , которая пересекает кривую  $\Gamma$  в точке  $c = c_3$ . Точка  $Q$  пересечения кривой



Р и с. 4.7.

$PQR$  с  $\Gamma_1$  дает решение уравнения (4.24), так как здесь  $z = 1/R(\gamma)$ . Поэтому абсцисса точки  $Q$  равна  $c_2^0(c_3)$ . Отсюда следует, что если провести вертикальную прямую из точки  $Q$  до кривой  $\Gamma$  и через полученную точку пересечения провести горизонтальную прямую  $US$ , то точка  $S$ , лежащая на вертикальной прямой выше точки  $R$ , должна лежать на  $\Gamma_2$ . Но кривых типа  $PQR$ , соответствующих разным  $c_3$ , можно провести несколько, и описанным способом можно получить несколько точек, лежащих на кривой  $\Gamma_2$ .

Если через  $z = h(c; c')$  обозначить семейство кривых типа  $PQR$ , то можно записать, что

$$h(c; c') = \frac{1}{R(c)} \left\{ 1 - \frac{c R'(c)}{R(c)} \right\} + c' \left\{ \frac{R'(c)}{R^2(c)} \right\}, \quad (4.26)$$

и уравнение (4.24) примет вид

$$h(c_2; c_3) = 1/R(c_1).$$

Аналогично можно представить и уравнение (4.22)

$$h(c_N; c_{N+1}) = -f'_{N-1}(c_N). \quad (4.27)$$

В этом случае искомое решение найдется как точка пересечения кривой из  $h$ -семейства с кривой  $z = -f'_{N-1}(c)$ . Что из себя представляет последняя кривая? Для того чтобы установить это, вспомним, что

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Min} \left[ \frac{c_N - c_{N+1}}{R(c_N)} + \sum_1^{N-1} \frac{c_n - c_{n+1}}{R(c_n)} \right]. \quad (4.28)$$

Отсюда следует, что  $c_{N+1}$  явно входит только в первый член, хотя при этом и все другие  $c_n$  зависят от  $c_{N+1}$ ,  $c_N = c_N^0(c_{N+1})$  и т. д. Если правую часть уравнения обозначить через  $F$ , то

$$f'_N(c_{N+1}) = \frac{df_N}{dc_{N+1}} = \frac{\partial F}{\partial c_{N+1}} + \sum_{n=2}^N \frac{\partial F}{\partial c_n} \frac{dc_n}{dc_{N+1}}.$$

Заметим, что  $c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , были выбраны так, чтобы  $F$  достигала минимума, и этот минимум, как мы видели, является внутренней стационарной точкой, поэтому все частные производные  $\partial F / \partial c_n$  равны нулю. Но тогда

$$f'_N(c_{N+1}) = \frac{\partial F}{\partial c_{N+1}} = - \frac{1}{R(c_N)}, \quad (4.29)$$

причем значение  $c_N$  берется оптимальным,  $c_N = c_N^0(c_{N+1})$ .

Переходя от номера  $N$  к  $N-1$ , находим, что правая часть уравнения (4.27) есть

$$z = 1/R [c_{N-1}^0(c_N)]. \quad (4.30)$$

Но это уравнение кривой  $\Gamma_{N-1}$ , поэтому пересечение кривой из  $h$ -семейства, соответствующей  $c_{N+1}$ , с кривой  $\Gamma_{N-1}$  определяет величину  $c_N^0(c_{N+1})$ . Итак, таким же способом, как из кривой  $\Gamma_1$  была получена  $\Gamma_2$ , по кривой  $\Gamma_{N-1}$  можно построить кривую  $\Gamma_N$ , а так как  $\Gamma_1$  построить просто, то, начиная с нее, могут быть получены все остальные  $\Gamma_n$ . Вследствие того что кривые  $h$ -семейства пересекаются с  $\Gamma$  в точках  $c = c'$ , при  $N \rightarrow \infty$  кривые  $\Gamma_N$  стремятся к  $\Gamma$ .

Достигнутое нами преимущество состоит в том, что  $h$ -семейство не зависит от какого-либо заранее фиксированного значения конечной концентрации  $\gamma$ , и можно его построить, если известна кривая  $\Gamma$ . Для этого необходимо лишь затабулировать две функции —  $g_1(c) = 1/R(c)$  и ее производную

$g_2(c) = -R'(c)/R^2(c)$ . Тогда уравнение кривой  $\Gamma$  есть  $z = g_1(c)$ , а  $h$ -семейства —

$$z = g_1(c) + cg_2(c) - c'g_2(c)^1).$$

Отметим, что сначала графический метод рассматривался нами лишь как способ представления результатов. При этом подчеркивалось, что в одном графике может содержаться значительное количество информации. Однако затем с помощью этого метода была легко получена и конструкция решения, а также установлена стационарность минимума. В то же время недостатки использованного метода привели к необходимости дополнительного исследования уравнений. В следующем параграфе мы кратко рассмотрим значение графического метода при исследовании зависимости решения от параметров.

В заключение заметим, что в построениях мы пользовались только прямыми, параллельными осями координат. Поэтому можно изменять масштаб по осям  $z$  и  $c$  так, чтобы получить кривые достаточно простой формы.

#### 4.6. Зависимость от параметров

Выше мы видели, как для фиксированного набора параметров  $k_1^*$ ,  $k_2^*$ ,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $\gamma$  получить общее представление о конструкции решения и определить его численно. В действительности нам было трудно показать, как найти решение для любого значения  $\gamma$ . Возникает вопрос, каким должен быть алгоритм решения, чтобы он охватывал различные обратимые экзотермические реакции первого порядка. Первое, что нужно сделать, — это попытаться уменьшить число параметров, для этого можно привести все уравнения к безразмерному виду.

При выводе исходных уравнений на стр. 23 суммарная концентрация продуктов  $A$  и  $B$  была принята за единицу концентрации. Поэтому переменная, равная отношению концентрации продукта  $B$  к суммарной концентрации и соответствующая выходу продукта реакции, уже безразмерна. Однако температура и время выдержки все еще сохраняют размерность, и, чтобы выяснить, как поступить с ними, следует обратиться к имеющимся у нас выражениям. Уравнение (4.10) можно записать как

$$\frac{RT_m(c)}{E_2 - E_1} = \frac{1}{\ln c/(1-c) + \ln(E_2 k_2^*/E_1 k_1^*)}; \quad (4.31)$$

<sup>1)</sup> См. задачу 4 в конце этой главы, в которой устанавливается связь между кривой  $\Gamma$  и  $h$ -семейством.

отсюда сразу видно, что за безразмерную температуру следует взять переменную

$$t = RT/(E_2 - E_1). \quad (4.32)$$

Введем безразмерную величину

$$\frac{E_2 k_2^*}{E_1 k_1^*} = \kappa, \quad (4.33)$$

тогда

$$t_m(c) = 1/\{\ln c/(1-c) + \ln \kappa\}, \quad (4.34)$$

и соотношение между  $c$  и безразмерной оптимальной температурой включает только один параметр. На рис. 4.8  $t_m(c)$

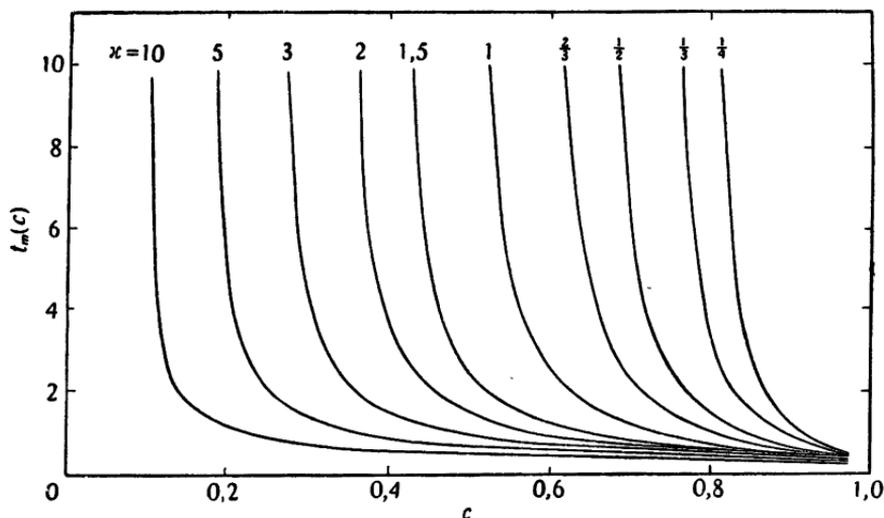


Рис. 4.8.

представлена как функция  $c$  при различных значениях  $\kappa$ . Можно показать, что  $t_m$  становится очень большой, когда  $c$  стремится к  $1/(1+\kappa)$  сверху. На самом деле можно достичь даже большей экономии, достаточно построить только зависимость  $1/t_m(c)$  от  $c$ . Тогда если имеется одна кривая для  $\kappa = 1$ , то сразу же можно начертить и кривые для различных  $\kappa$ ; они будут параллельными первой и отстоять друг от друга на расстоянии  $\ln \kappa$ .

Обращаясь к выражению (4.8) для скорости реакции и полагая  $\sigma = E_2/E_1$ , можно записать, что

$$P(c) = \left[ \left( \frac{k_2^*}{E_1} \right)^{E_1} \left( \frac{k_1^*}{E_2} \right)^{-E_2} \right]^{1/(E_2-E_1)} \frac{R(c)}{E_2-E_1} = \left[ \frac{(1-c)^\sigma}{c} \right]^{1/(\sigma-1)}; \quad (4.35)$$

здесь  $P(c)$  есть безразмерная скорость реакции

$$P(c) = R(c)/A \quad (4.36)$$

и

$$A = \left\{ \frac{k_1^{\sigma} (\sigma - 1)^{\sigma - 1}}{k_2^* \sigma^{\sigma}} \right\}^{1/(\sigma - 1)}. \quad (4.37)$$

Уравнение процесса

$$\theta_n = \frac{c_n - c_{n+1}}{R(c_n)}$$

можно записать как

$$\psi_n = A\theta_n = \frac{c_n - c_{n+1}}{P(c_n)}; \quad (4.38)$$

отсюда ясно, что  $\psi_n$  есть безразмерное время выдержки. Заметим, что

$$\psi_n = k_1^* \theta_n \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) \kappa^{-1/(\sigma - 1)}. \quad (4.39)$$

Безразмерная целевая функция равна теперь  $\sum_1^N \psi_n$ , и ее нужно минимизировать при условии  $c_1 = \gamma$ . Если

$$\varphi_N(c_{N+1}) = \text{Min} \sum_1^N \psi_n,$$

то

$$\varphi_N(c_{N+1}) = A f_N(c_{N+1}). \quad (4.40)$$

Для графического построения нужна кривая  $\Gamma$ , уравнение которой теперь приняло вид  $z = 1/P(c) = g(c)$ , и  $h$ -семейство  $z = g_1(c) + c g_2(c) - c' g_2(c)$ . В данном случае

$$g_1(c) = \{c/(1-c)^{\sigma}\}^{1/(\sigma-1)}, \quad (4.41)$$

$$g_2(c) = \frac{g_1(c)}{\sigma-1} \left[ \frac{1}{c} + \frac{\sigma}{1-c} \right]. \quad (4.42)$$

Вид функций  $g_1(c)$  и  $g_2(c)$  для различных  $\sigma$  представлен на рис. 4.9 и 4.10.

Интересно отметить, что из 4 исходных параметров образовалось лишь два безразмерных параметра —  $\kappa$  и  $\sigma$ . Еще более важно то, что последние разделены, так что параметр  $\kappa$  встречается только в выражении для оптимальной температуры, тогда как в выражении для  $g_1$  и  $g_2$  входит только  $\sigma$ . Это означает, что в двухпараметрическом семействе кривых нет необходимости и что, опираясь только на три рисунка — 4.8, 4.9 и 4.10, — можно провести полное параметрическое исследование.

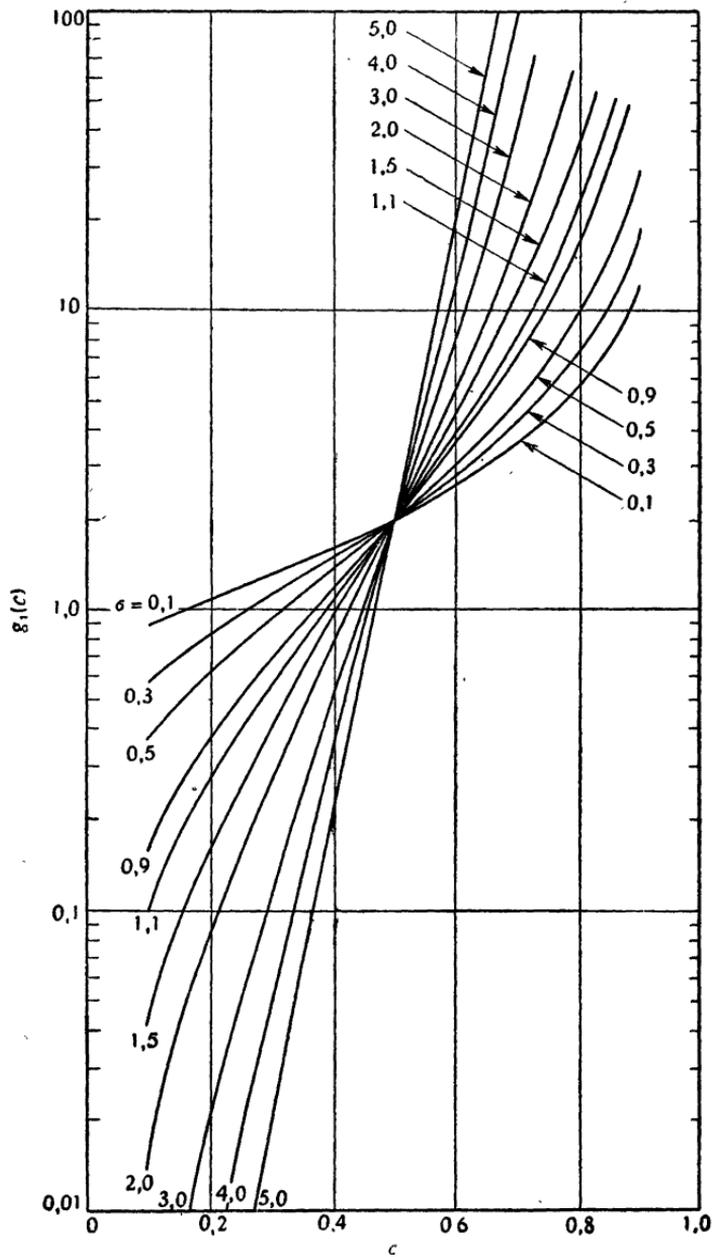


Рис. 4.9.

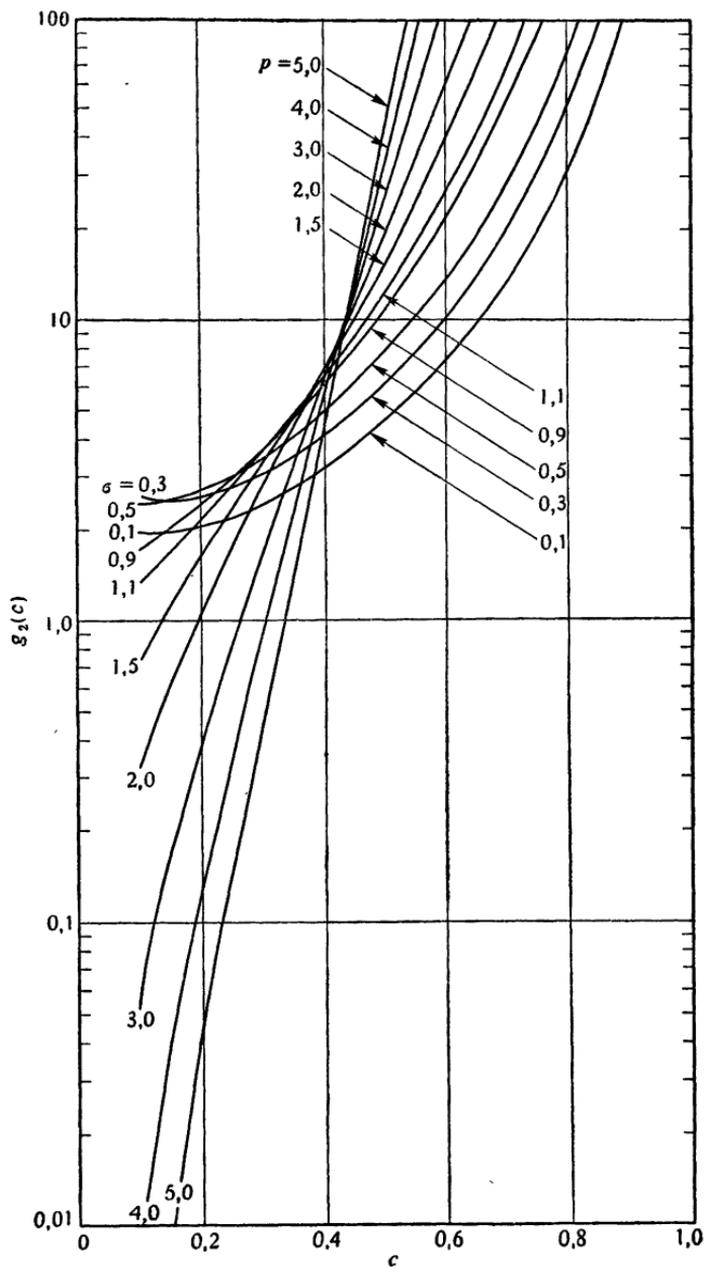


Рис. 4.10.

В проведенном анализе не был отмечен один важный факт, а именно что в список параметров следовало бы включить предельные значения  $T_*$  и  $T^*$ . Ясно, что величина  $T^*$  будет иметь существенное значение тогда, когда исходным является материал, близкий к чистому  $A$ . В этом случае, как видно из рис. 4.8,  $t_m$  стремится к бесконечности. Однако, когда  $T^*$  задано, графики на рис. 4.8 позволяют найти такое значение  $c$ , что для меньших  $c$  температуру следует поддерживать на ее верхней границе. Конечно, для этих значений функция  $R(c)$  не будет задаваться уравнением (4.35), однако ее с помощью того же параметра  $A$  можно привести к безразмерному виду. Подробности такого сведения предоставляются читателю в качестве упражнения.

### Задачи

1. Подробно провести приведение функции  $r(c, T^*)$  к безразмерному виду и получить для этого случая функции  $g_1$  и  $g_2$ .
2. Показать геометрически, что

$$f'_N(c_{N+1}) = -1/R[c_N^0(c_{N+1})].$$

3. Рассмотреть задачу с так называемой реакцией второго порядка, где

$$r(c, T) = k_1(a - c)(b - c) - k_2c^2.$$

4. Дать геометрическую интерпретацию  $h$ -семейства функций

$$z = g_1(c) + (c - c')g_2(c)$$

и показать, как, зная только одну функцию  $g_1(c)$  (т. е. кривую  $\Gamma$ ), можно построить это семейство. Дать оценку точности такого построения и целесообразности изменения масштаба, как предложено в конце § 4.5.

5. Показать, как отыскать максимум функции  $\alpha A - \beta B$ , где оба множителя  $\alpha$  и  $\beta$  являются монотонными функциями управляющей переменной. Установить, что в случае  $\beta = \rho\alpha^\sigma$  максимум достигается при  $\alpha^{\sigma-1} = (A/\rho\sigma B)$  и его значение равно

$$\left[ \frac{(\sigma-1)^{\sigma-1}}{\sigma^\sigma} \frac{A^\sigma}{\rho B} \right]^{1/(\sigma-1)}.$$

6. Положив  $\tau = 1/(\sigma-1)$ , показать, что выражение для максимума можно представить в виде

$$\left( \frac{A}{1+\tau} \right)^{1+\tau} / \left( \frac{\rho B}{\tau} \right)^\tau.$$

## ГЛАВА 5

### *Двойственные задачи и множители Лагранжа*

В этой главе для иллюстрации некоторых новых утверждений мы продолжаем использовать пример с последовательностью реакторов-смесителей.

#### 5.1. Двойственные задачи

В задачах о последовательности реакторов задача Ia (а также IIa) формулировалась следующим образом. Выбрать стратегию так, чтобы для заданного увеличения содержания продукта с  $c_{N+1}$  до  $c_1$  общее время выдержки  $\Theta = \sum \theta_n$  было минимальным. В соответствующей задаче Ic (или IIc) нужно было выбрать такую же стратегию, но при этом задавалось общее время выдержки  $\Theta = \sum \theta_n$  и требовалось максимизировать величину изменения содержания готового продукта. Эти две задачи являются иллюстрацией математического отношения двойственности; если одну задачу назвать *основной*, то другую следует назвать *двойственной*. Мы хотим показать, что решение одной задачи дает решение другой.

Предположим, что величины  $N$  и  $c_{N+1}$  считаются фиксированными и рассматривается задача Ia (или IIa). Если решить ее при различных значениях  $c_1$ , то можно построить зависимость искомого минимума  $\Theta$  от  $c_1$  и получить график, похожий на кривую рис. 5.1. Одновременно эта кривая является границей между возможными и невозможными рабочими режимами. Пусть задано конкретное  $c_1$ , например точка  $A$ , тогда точка  $B$  есть минимальное значение общего времени выдержки, и никакое из значений из отрезка  $AB$  при использовании допустимой стратегии не является достижимым. С другой стороны, существует много других, не оптимальных стратегий, для которых общее время выдержки больше минимального, и поэтому точки полупрямой  $BC$  соответствуют допустимым вариантам. Очевидно, что режимы, соответствующие точкам выше кривой, являются возможными, а те, что приводятся к точкам, лежащим ниже кривой, — невозможными. Теперь рассмотрим горизонтальную прямую  $DBE$ . Это

прямая постоянного общего времени выдержки  $\Theta$ , а изменения концентрации, приходящиеся на отрезок  $DB$ , являются достижимыми, поскольку они соответствуют возможным, хотя и не оптимальным реакциям. С другой стороны, изменения концентрации, соответствующие точкам отрезка  $BE$  при заданном  $\Theta$ , не достижимы; отсюда следует, что точка  $B$ , т. е. максимальное изменение концентрации, достижимое при данном  $\Theta$  (тем самым решение задачи Ic), расположена на кривой, определяемой решением задачи Ia. Поскольку для каждой точки на кривой, подобной  $B$ , существует определенная

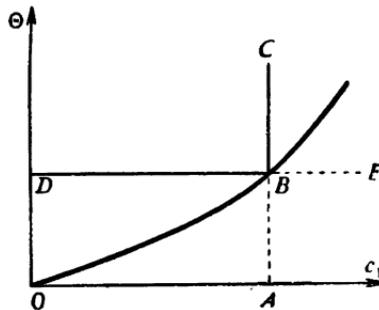


Рис. 5.1.

оптимальная стратегия, то эта оптимальная стратегия решает как основную, так и двойственную задачи. Граница между возможным и невозможным определяется однозначно.

## 5.2. Множитель Лагранжа

Рассмотрим теперь задачи Ib и Ib'. Здесь стратегия должна максимизировать величину  $(c_1 - c_{N+1}) - \lambda \sum \theta_n$ . Накладывать ограничения на  $\sum \theta_n = \Theta$  нет необходимости, поскольку, если  $\theta_n$  было бы сделано слишком большим, то целевая функция стала бы отрицательной. Как и ранее, считаем  $N$  и  $c_{N+1}$  фиксированными; мы утверждаем, что снова решению должно соответствовать точка граничной кривой  $OB$  рис. 5.1. Ясно, что решению не может соответствовать точка ниже кривой, так как отвечающие ей условия не являются достижимыми. Если решение задачи Ib (или Ib') соответствовало бы точке, находящейся выше кривой  $OB$ , например на отрезке  $DB$ , то, перейдя к точке  $B$ , можно было бы увеличить величину целевой функции (при этом  $c_1$  увеличивалось бы без изменения  $\Theta$ ), и исходное решение не было бы оптимальным.

Точка на границе, которая отвечает решению, конечно, будет зависеть от  $\lambda$ . Следует ожидать, что при увеличении  $\lambda$  эта точка будет перемещаться вниз по кривой к нулю. Число  $\lambda$  называется множителем Лагранжа, и аналогичным способом можно ввести его во многих задачах, чтобы перейти от задачи с ограничениями к задаче без ограничений. При этом нужно подобрать такое  $\lambda$ , чтобы решение последней задачи удовлетворяло ограничениям.

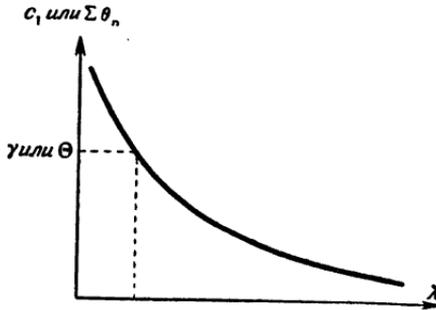


Рис. 5.2.

Чтобы с помощью задачи Ib (или IIb) находить решения двух других, следовало бы поступить таким образом. Пусть

$$g_{N, \lambda}(c_{N+1}) = \text{Max} \sum_1^N \{c_n - c_{n+1} - \lambda \theta_n\}, \quad (5.1)$$

тогда, согласно принципу оптимальности,

$$g_{N, \lambda}(c_{N+1}) = \{c_N - c_{N+1} - \lambda \theta_N + g_{N-1, \lambda}(c_N)\} \quad (5.2)$$

с обычным начальным условием  $g_{0, \lambda} = 0$ . Для любых значений  $\lambda$  эти уравнения могут быть решены, и тем самым можно определить полную  $N$ -шаговую стратегию как функцию  $c_{N+1}$ . Повторим решение для нескольких значений  $\lambda$ , тогда для заданной концентрации  $c_{N+1}$  в итоге получим значения  $c_1$ , достижимые при использовании оптимальной стратегии. Тем самым можно построить кривую, показанную на рис. 5.2. Решение задачи Ia (IIa) соответствует величине  $\lambda$ , для которой  $c_1 = \gamma$ . Последнее условие определяет величину множителя  $\lambda$ , и стратегия, полученная при решении задачи b с этим значением  $\lambda$ , является решением и задачи a для заданного  $\gamma$ . Точно так же, если при фиксированных  $c_{N+1}$  и  $N$  построить зависимость  $\sum \theta_n$  от  $\lambda$ , то получим кривую, похожую на уже имеющуюся. Тогда решение задачи Ic (или IIc) будет найдено, если определить значение  $\lambda$ , соответствующее величине

$\sum \theta_n = \Theta$ . Здесь уже видна экономия, даваемая такой процедурой, так как при первоначальной формулировке этой задачи нужно было пользоваться двумя фазовыми переменными, а это вызывает затруднения, связанные с размерностью. Поскольку задача *b* содержит только одну фазовую переменную, то даже при повторных решениях этой задачи для разных  $\lambda$  к памяти вычислительной машины предъявляются меньшие требования, чем при решении задачи *c*. Строгое изложение описанного метода решения задачи с применением множителей Лагранжа содержится в § 5.4.

### 5.3. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа

При построении целевой функции  $(c_1 - c_{N+1}) - \lambda \sum_1^N \theta_n$  нами использовалось, по существу, одно элементарное экономическое утверждение. Если за единицу стоимости принять

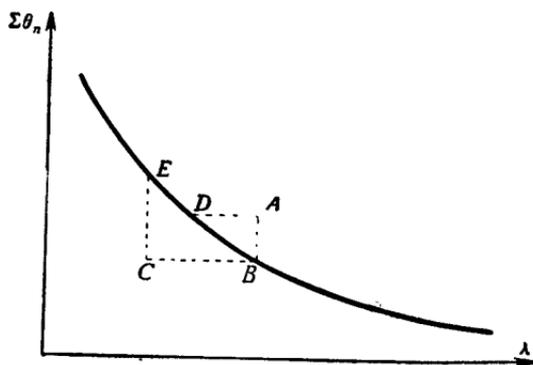


Рис. 5.3.

стоимость изменения концентрации  $c$  на единицу, то  $\lambda$  можно рассматривать как цену единицы  $\theta$  в выбранной шкале стоимости. Отсюда следует, что целевая функция является чистым доходом или разностью между стоимостью готового продукта и ценой времени выдержки. По мере того как увеличивается цена времени выдержки  $\lambda$ , следует ожидать уменьшения экономически выгодного суммарного времени выдержки, и если имеется как оценка для величины  $\lambda$ , полученная, например, из экономических соображений, так и ограничение на общее время выдержки, то диаграмма допускает дальнейшую интерпретацию. На рис. 5.3 оптимальное  $\sum \theta_n$  построено как функция  $\lambda$ . Предположим, что оценка для  $\lambda$  и ограничение по  $\Theta$  соответствуют точке *A*. Ясно, что если имелось бы только

ограничение по  $\Theta$ , то для того, чтобы получить решение задачи, следовало бы взять значение  $\lambda$ , отвечающее точке  $D$ , несколько меньшее по величине, чем в точке  $A$ . Это означает, что в этом случае ограничение по времени выдержки можно не учитывать. Оно становится существенным тогда, когда цена времени выдержки  $\lambda$  становится высокой. При такой цене времени выдержки нельзя использовать все имеющееся время, здесь следует работать в точке  $B$ , которой соответствует наибольшее время выдержки из всех тех, которые экономически выгодно использовать. С другой стороны, если оценки как  $\lambda$ , так и  $\Theta$  соответствуют точке  $C$ , то ограничение на время выдержки является существенным, поскольку при этой стоимости экономичнее использовать большее время (точка  $E$ ). В то же время из-за наличия ограничения приходится работать в точке  $B$ , причем здесь время выдержки приобретает цену  $\lambda$ , большую, чем в случае, когда ограничения нет.

#### 5.4. Формальное применение множителя Лагранжа

В следующем примере показан способ решения для случая, когда на фазовые переменные наложены ограничения. Предположим, что мы хотим максимизировать сумму  $N$  функций  $\sum_1^N g_n(x_n)$  от  $N$  положительных аргументов  $x_1, \dots, x_N$ , причем на выбор переменных  $x_n$  наложен ряд условий, например, таких:

$$\sum_{p=1}^N h_{mp}(x_p) \leq k_m, \quad m = 1, \dots, M; \quad (5.3)$$

тогда, очевидно, искомый максимум будет зависеть от совокупности величин  $k_m$ , и можно записать

$$\text{Max} \sum_1^N g_n(x_n) = f_N(k_1, \dots, k_M). \quad (5.4)$$

Предположим, что мы выбрали величину  $x_N$ , тогда оставшиеся переменные  $x_{N-1}, \dots, x_1$  должны удовлетворять условию

$$\sum_{p=1}^{N-1} h_{mp}(x_p) \leq k_m - h_{mN}(x_N). \quad (5.5)$$

Максимум  $\sum_1^{N-1} g_n(x_n)$  при наличии этих ограничений равен

$$f_{N-1}[k_1 - h_{1N}(x_N), \dots, k_M - h_{MN}(x_N)].$$

Таким образом, записав  $\sum_1^N g_n(x_n)$  в виде  $g_N(x_N) + \sum_1^{N-1} g_n(x_n)$  и применив принцип оптимальности, получим

$$f_N(k_1, \dots, k_M) = \text{Max}_{x_N} [g_N(x_N) + f_{N-1}\{k_1 - h_{1N}(x_N), \dots, k_M - h_{MN}(x_N)\}]. \quad (5.6)$$

Получена типичная задача динамического программирования, но ее размерность равна  $M$ , а требования к памяти машины зависят, как мы видели, экспоненциально от  $M$ . Если теперь привести целевую функцию к виду

$$\sum_1^N g_n(x_n) - \lambda_M \sum_1^N h_{Mn}(x_n), \quad (5.7)$$

то для фиксированного  $\lambda_M$  эту проблему можно решить, рассматривая только первые  $M - 1$  из ограничений (5.3). Поэтому можно записать

$$f_N(k_1, \dots, k_{M-1}; \lambda_M) = \text{Max} \sum_1^N \{g_n(x_n) - \lambda_M h_{Mn}(x_n)\}, \quad (5.8)$$

и размерность этого соотношения равна уже  $M - 1$ . Когда его решение будет получено, нам нужно найти значение  $\lambda_M$ , при котором удовлетворяется последнее из условий (5.3).

В общем случае можно избавиться от  $M - L$  ограничений, перейдя к множителям Лагранжа и записав

$$f_N(k_1, \dots, k_L; \lambda_{L+1}, \dots, \lambda_M) = \text{Max} \sum_1^N \left\{ g_n(x_n) - \sum_{L+1}^M \lambda_m h_{mn}(x_n) \right\}. \quad (5.9)$$

Тем самым мы приходим к задаче размерности  $L$ , но при этом нужно искать совокупность  $M - L$  множителей Лагранжа, которые удовлетворяют последним  $M - L$  ограничениям. Фактически здесь сокращение требований к памяти вычислительной машины достигается за счет увеличения времени решения.

## 5.5. Линейное программирование

Если функции  $g$  и  $h$  предыдущего примера являются линейными, то мы приходим к стандартной задаче линейного программирования.

Здесь ищется максимум  $\sum_{n=1}^N c_n x_n$ , где

$$\sum_{p=1}^N a_{mp} x_p \leq b_m, \quad m = 1, \dots, M, \quad (5.10)$$

и

$$\dot{x}_p \geq 0, \quad p = 1, \dots, N. \quad (5.11)$$

Этот максимум будет функцией  $b$ , и можно записать

$$f_N(b_1, \dots, b_M) = \text{Max} \sum_1^N c_n x_n. \quad (5.12)$$

Применение принципа оптимальности в данном случае дает

$$f_N(b_1, \dots, b_M) = \text{Max} \{c_N x_N + f_{N-1}(b_1 - a_{1N} x_N, \dots, b_M - a_{MN} x_N)\} \quad (5.13)$$

при условии, что  $x_N \geq 0$ .

Если  $a_{mn}$ ,  $b_m$  и  $c_n$  положительны, то

$$f_1(b_1, \dots, b_M) = c_1 \text{Max}_m (b_m / a_{m1}).$$

Максимум соответствует точке, где по крайней мере одно из неравенств (5.10) является равенством. Из уравнения (5.13) далее следует, что

$$f_2(b_1, \dots, b_M) = \text{Max}_{x_2} [c_2 x_2 + c_1 \text{Max}_m (b_m - a_{m2} x_2) / a_{m1}], \quad (5.14)$$

и снова выбор  $x_2$  должен приходиться на границу области, где по крайней мере одно из неравенств является равенством. Таким путем можно решать задачу линейного программирования. Однако с вычислительной точки зрения этот способ много хуже симплекс-метода.

Если, прибегнув к множителям Лагранжа, положить  $L = M$ , то из уравнения (5.9) следует, что

$$f_N(\lambda, \dots, \lambda_M) = \text{Max} \sum_{n=1}^N \left\{ c_n - \sum_{m=1}^M \lambda_m a_{mn} \right\} x_n. \quad (5.15)$$

В данном случае, если коэффициенты в линейной комбинации  $x_n$  положительны, то максимум соответствует такому выбору  $\lambda_m$ , при котором отрицательная часть выражения (5.15) становится наименьшей, т. е. выбору  $\lambda_m$ , который минимизирует  $\sum_1^M \lambda_m b_m$  при условии  $\sum_1^M \lambda_m a_{mn} \leq c_n$ . Это двойственная задача линейного программирования, она свидетельствует об интересной связи между множителями Лагранжа и двойственностью.

### БИБЛИОГРАФИЯ

Уменьшение размерности с помощью множителя Лагранжа подробно обсуждается в книге Беллмана и Дрейфуса «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8]; в частности, см. гл. 2 этой книги.

5.4. Раздел, посвященный формальному применению множителей, взят из работы

Bellman R., Dynamic Programming and Lagrange Multipliers, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 42 (1956), 767.

5.5. Относительно связи с линейным программированием см. также

Vajda S., *Mathematical Programming* [1.6].

Задача 2 взята из статьи

Zener C., *Mathematical Aid in Optimizing Engineering Designs*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 47 (1961), 537.

Обсуждение проблемы двойственности в математическом программировании см. в упомянутой выше книге Беллмана и Дрейфуса [1.8].

### Задачи

1. Рассмотреть задачу максимизации среднего геометрического  $N$  величин с заданным средним арифметическим, а также двойственную ей задачу типа задач а, б и с.

2. Если

$$C(x_1, \dots, x_N) = \sum_1^{N+1} T_i,$$

где

$$T_i = a_i \prod_{j=1}^N x_j^{b_{ij}},$$

то показать, что минимальное значение  $C$  равно  $K \prod_1^{N-1} \alpha_i^{-\alpha_i}$ , где

$\alpha_i, i = 1, \dots, N-1$ , есть совокупность чисел, для которых

$\prod_{i=1}^{N-1} T_i^{\alpha_i}$  является постоянной  $K$ , не зависящей от  $x$ .

3. Чтобы хорошо усвоить понятия линейного программирования, рассмотрите следующую задачу и её двойственную. Найти максимум  $4x_1 + 3x_2$  при условии  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + 2x_2 \leq 4, 6x_1 + x_2 \leq 6$ .

## ГЛАВА 6

### *Несколько задач из экономики*

Появление многих ранних работ по динамическому программированию было вызвано необходимостью решать экономические задачи. Но поскольку математические модели в экономике более сложны, чем в технике, то мы сочли экономические задачи неподходящей темой для первого знакомства с методом. В этой главе мы довольно кратко обсудим одну-две задачи о размещении и управлении. При этом мы не собираемся излагать экономическую теорию, а лишь хотим показать, как можно использовать метод динамического программирования. Подобного рода задачи довольно подробно разобраны в ряде опубликованных работ, и мы попытаемся вначале познакомиться с их проблематикой. В связи с этим представится возможность изложить ряд способов преодоления трудностей, общих для многих задач. Следует подчеркнуть, что в понятие «экономика» мы вкладываем довольно широкий смысл и надеемся, что отсутствие строгости в формулировках ряда задач не вызовет недовольства серьезного читателя и не будет служить препятствием более широкому применению методов.

#### **6.1. Задачи на узкие места**

Это название Беллман связывал с ситуациями, которые содержат некоторые ограничения, причем оптимальная стратегия предусматривает преодоление этого ограничения за счет отказа от достижения «сиюминутных» выгод. Рассмотрим задачу, в которой для производства товара  $A$  требуется сырье  $B$ . Запасы этого сырья поддерживаются процессом воспроизводства его в системе  $C$ . Производительность системы  $C$  ограничена, и для увеличения производительности нужно расходовать сырье  $B$ . Это и есть узкое место, так что если мы хотим максимизировать производство товара  $A$  за период в  $N$  лет, то, может быть, лучше не начинать сразу с выпуска товара  $A$ , а направить все запасы  $B$  на воспроизводство сырья и преодоление узкого места. Для преуспевающего об-

щества особенно естествен пример, где за товар  $A$  принимается автомобиль, а за  $B$  — сталь, однако здесь мы пожертвуем наглядностью и будем рассматривать общий случай. С существованием такой стадии, в которой процесс подготавливается для будущего роста, часто сталкиваются и в областях, далеких от экономики. Так, ряд работ посвящен исследованию влияния этой стадии в задачах роста бактерий.

Для вывода системы уравнений зададим период, в течение которого следует максимизировать выпуск  $A$ , и разделим этот период на  $N$  интервалов, нумеруя их, как обычно, от конца к началу (см. табл. 6.1). Пусть  $x_{n+1}$  есть количество сырья  $B$ , имеющееся к началу интервала  $n$ ,  $y_{n+1}$  — количество

Таблица 6.1

	$N$	$\dots$	$n+1$	$n$	$n-1$	$\dots$	$2$	$1$
Количество сырья $x_{N+1}$ $B$	$x_N$	$\dots$	$\dots$	$x_{n+1}$	$x_n$	$\dots$	$\dots$	$x_2$ $x_1$
Часть сырья, выделяемая на воспроизводство $y_{N+1}$	$y_N$			$y_{n+1}$	$y_n$			$y_2$
Часть сырья, выделяемая на увеличение мощности $z_{N+1}$	$z_N$			$z_{n+1}$	$z_n$			$z_2$

$B$ , используемое для воспроизводства, и  $z_{n+1}$  — часть сырья  $B$ , отводимая в интервале  $n$  на преодоление узкого места. Это узкое место задается тем условием, что  $y_{n+1}$  не может превосходить имеющейся производственной мощности  $c_{n+1}$ ,

$$y_{n+1} \leq c_{n+1}. \quad (6.1)$$

Узкое место преодолевается благодаря тому, что если выделяется количество сырья  $z_{n+1}$ , то мощность  $c_{n+1}$  увеличивается на величину  $\beta z_{n+1}$ . Таким образом, в конце интервала  $n$  мощность  $c_n$  равна

$$c_n = c_{n+1} + \beta z_{n+1}. \quad (6.2)$$

Процесс воспроизводства  $B$  можно представить уравнением, в котором количество сырья, имеющегося к концу периода  $n$ , равно произведению  $1 + \alpha$  на ассигнование  $y_{n+1}$  ( $\alpha > 0$ )

$$x_n = (1 + \alpha) y_{n+1}. \quad (6.3)$$

Предполагается, что все сырье  $B$ , которое не предназначено для воспроизводства или для увеличения производственной мощности, используется для производства товара  $A$ . Поэтому суммарный выпуск  $A$  равен

$$O = \sum_1^N (x_{n+1} - y_{n+1} - z_{n+1}), \quad (6.4)$$

и эту величину нужно максимизировать.

Формулируя задачу в стандартной записи гл. 2, получаем:

1. Фазовые переменные:  $x_n, c_n$ .

2. Управление:  $y_n, z_n$ .

3. Уравнение процесса:  $x_n = (1 + \alpha) y_{n+1}$ ,

$$c_n = c_{n+1} + \beta z_{n+1}.$$

4. Ограничения:  $y_n \geq 0, z_n \geq 0, y_n + z_n \leq x_n, y_{n+1} \leq c_{n+1}$ .

5. Целевая функция: максимизировать  $\sum_1^N (x_{n+1} - y_{n+1} - z_{n+1})$ .

6. Параметры:  $\alpha, \beta$ .

Количество  $B$ , имеющееся в начале процесса, равно  $x_{N+1}$ , а начальная мощность —  $c_{N+1}$ ; максимум целевой функции зависит от этих переменных. Поэтому

$$f_N(x_{N+1}, c_{N+1}) = \text{Max} \sum_1^N (x_{n+1} - y_{n+1} - z_{n+1}). \quad (6.5)$$

Согласно принципу оптимальности, за выбором начального управления  $(y_{N+1}, z_{N+1})$  должна следовать стратегия, которая для оставшихся  $N - 1$  этапов оптимальна по отношению к полученному состоянию  $(x_N, c_N)$ . Поэтому

$$f_N(x_{N+1}, c_{N+1}) = \text{Max} [x_{N+1} - y_{N+1} - z_{N+1} + f_{N-1}(x_N, c_N)], \quad (6.6)$$

причем максимум берется по  $y_{N+1}$  и  $z_{N+1}$ , а процесс задается уравнениями (6.1) — (6.3).

Решение этих уравнений начинается с очевидного утверждения о том, что  $f_0 \equiv 0$ , и поэтому

$$f_1(x_2, c_2) = x_2, \quad (6.7)$$

причем управляющие переменные — это  $y_2 = z_2 = 0$ . Последнее просто означает, что в конце периода все имеющиеся запасы  $B$  следует использовать для выпуска товара  $A$ . На предпоследнем интервале имеем

$$f_2(x_3, c_3) = \text{Max} [x_3 - y_3 - z_3 + x_2]. \quad (6.8)$$

В силу уравнения (6.3) выражение, которое нужно максимизировать, равно

$$x_3 + \alpha y_3 - z_3. \quad (6.9)$$

Отсюда видно, что  $y_3$  следует брать как можно большим и  $z_3$  полагать равным нулю. Когда  $z_3 = 0$ , то ограничения на  $y_3$  сводятся к таким:

$$y_3 \leq c_3, \quad y_3 \leq x_3.$$

Итак, если  $x_3 \leq c_3$ ,  $y_3 = x_3$ , то  $f_2(x_3, c_3) = (1 + \alpha)x_3$ , и если  $x_3 \geq c_3$ ,  $y_3 = c_3$ , то  $f_2(x_3, c_3) = x_3 + \alpha c_3$ , иными словами,

$$f_2(x_3, c_3) = x_3 + \alpha \text{Min}(x_3, c_3). \quad (6.10)$$

Мы можем продолжать аналогичное построение по формулам все большей и большей сложности, однако с этим лучше не спешить и сначала попытаться отметить некоторые особенности. Прежде всего заметим, что полученные формулы линейны по  $x_{N+1}$  и  $c_{N+1}$ , и поскольку все уравнения процесса линейны, то линейность формул должна сохраняться. Во-вторых, в силу линейности оптимальное управление всегда выбирается среди граничных. Чтобы установить причину этого, рассмотрим на рис. 6.1 плоскость управляющих переменных с координатами  $y$  и  $z$  (на время индекс  $n$  можно опустить). Условие положительности  $y$  и  $z$  означает, что точка, соответствующая выбранному управлению, принадлежит первому квадранту. Одновременно с этим должна быть неотрицательна величина  $x - y - z$ , так что точка  $(y, z)$  лежит внутри треугольника  $OPQ$ , у которого стороны  $OP$  и  $OQ$  равны  $x$ . Если  $c \leq x$ , то ограничение по мощности  $y \leq c$  соответствует вертикальной прямой  $RS$ , и область допустимых управлений сужается до трапеции  $ORSQ$ . Если  $c > x$ , то точка  $R'$  и прямая  $y = c$  лежат вне треугольника, и ограничение по мощности в действительности не является ограничением. Управление, отвечающее точкам прямой  $PQ$ , означает, что для производства товара  $A$  сырье  $B$  не выделяется. Как мы уже обнаружили, величина, которую нужно максимизировать, должна быть линейной, так как мы начинаем с линейной функции и все уравнения являются линейными. Поэтому, если бы мы представили эту функцию в виде поверхности с координатами  $y$  и  $z$ , то получилась бы плоскость с каким-то направлением подъема. Поэтому, чтобы найти ее максимум, нужно, пока это возможно, двигаться в направлении подъема; при этом обязательно мы придем в вершину области допустимых управлений. Например, на рис. 6.2. пунктиром показаны линии уровня максимизируемой функции (6.9), а направление скорейшего подъема указано стрелкой. В случае

когда  $c < x$ , достижимому максимуму соответствует точка  $R$  (т. е.  $y = c, z = 0$ ), а в случае когда  $c \geq x$ , — точка  $P$ . Можно установить простые правила отыскания максимума линейного выражения  $Lx + My + Nz$ . Они приведены в табл. 6.2. Управление, соответствующее точке  $Q$ , неприемлемо, так как при

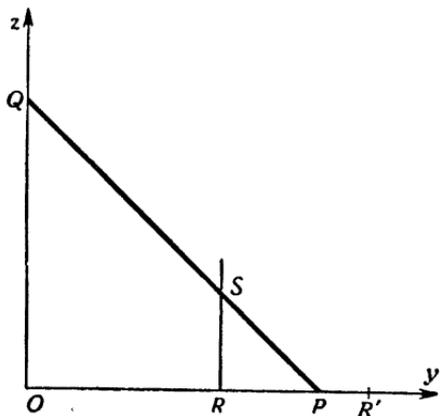


Рис. 6.1.

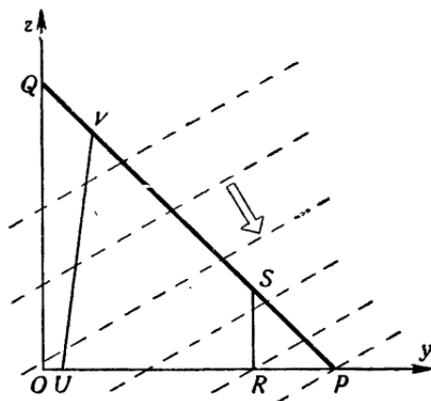


Рис. 6.2.

нем весь запас  $B$  пошел бы на увеличение мощности в системе  $C$ , что привело бы к остановке процесса. Важно понять, что невыгодно увеличивать мощность сверх части  $B$ , отведенной для воспроизводства в конце интервала, и что поэтому должно быть  $c + \beta z \leq (1 + \alpha)y$ . Условие  $(1 + \alpha)y - \beta z \geq c$

Таблица 6.2

$M$	$N$	$M/N$	Управление
отрицательное	отрицательное	—	$O : y = z = 0$
положительное	отрицательное	—	$R : y = c, z = 0$ , если $c < x$
			$P : y = x, z = 0$ , если $x < c$
положительное	положительное	$> 1$	$S : y = c, z = x - c$ , если $c < x$
			$P : y = x, z = 0$ , если $x < c$

в виде прямой  $UV$  отделяет окрестность оси  $OQ$  от области допустимых управлений, и благодаря этому предполагаемое оптимальное управление не приводит к прерыванию процесса. Другое условие, содержащееся в этой задаче, состоит в том, что для производства товара  $A$  следует использовать не более определенной части запаса  $B$ , это условие ограничивает

допустимую область в окрестности начала координат прямой  $y + z = (1 - \varepsilon)x$ . Таким образом происходит исключение управления  $y = z = 0$ , прерывающего процесс, из числа допустимых и, кроме того, становится невозможным такое окончание процесса, при котором весь запас сырья используется на последнем этапе; однако это условие мы не будем здесь рассматривать. Итак, линейность задачи облегчает поиск максимума, поскольку здесь требуется исследовать лишь конечное число вершин. Одновременно появляется возможность значительного уменьшения размерности, и к исследованию этой возможности мы сейчас и приступаем.

## 6.2. Уменьшение размерности

Поскольку уравнение линейно, а максимум целевой функции есть линейное и однородное по  $x_{N+1}$  и  $c_{N+1}$  выражение, то можно перейти к отношениям величин. Поэтому, положив

$$\gamma_n = c_n/x_n, \quad (6.11)$$

$$f_N(x_{N+1}, c_{N+1}) = x_{N+1}\Phi_N(\gamma_{N+1}) \quad (6.12)$$

и

$$\xi_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad \eta_n = \frac{y_n}{x_n}, \quad \zeta_n = \frac{z_n}{x_n}, \quad (6.13)$$

уравнения предыдущего параграфа можно переписать в ином виде. Неравенство (6.1) переходит в

$$\eta_{n+1} \leq \gamma_{n+1}, \quad (6.14)$$

уравнение (6.2) процесса воспроизводства сырья  $B$  — в уравнение

$$\xi_n = (1 + \alpha)\eta_{n+1}, \quad (6.15)$$

и уравнение прироста мощности есть

$$\gamma_n = (\gamma_{n+1} + \beta\xi_{n+1})/\xi_n = (\gamma_{n+1} + \beta\xi_{n+1})/(1 + \alpha)\eta_{n+1}. \quad (6.16)$$

Ограничения по-прежнему означают, что

$$\eta_n \geq 0, \quad \zeta_n \geq 0, \quad \eta_n + \zeta_n \leq 1. \quad (6.17)$$

Поделив уравнение (6.6) на  $x_{N+1}$ , с помощью соотношения (6.12) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_N(\gamma_{N+1}) &= \text{Max} [1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + \xi_N \Phi_{N-1}(\gamma_N)] = \\ &= \text{Max} [1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + (1 + \alpha)\eta_{N+1}\Phi_{N-1}(\gamma_N)]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Помимо уменьшения числа фазовых переменных, нами достигнуто и некоторое упрощение в пространстве управлений.

На графиках, приведенных на рис. 6.1 и 6.2, обе границы  $PQ$  и  $RS$  от шага к шагу изменялись, но вследствие уменьшения размерности граница  $PQ$  на рис. 6.3, задаваемая уравнением  $\eta + \zeta = 1$ , становится неподвижной, а переменной остается только граница  $RS$ , для которой  $\eta = \gamma$ .

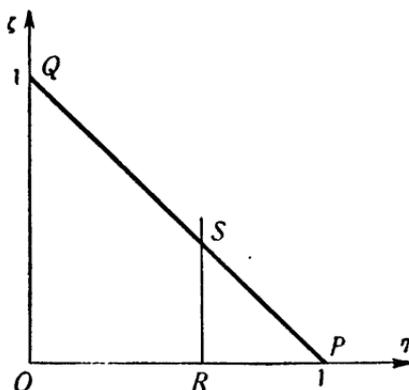


Рис. 6.3.

Так как известно, что функция  $\varphi_N$  будет линейной, положим

$$\varphi_N(\gamma_{N+1}) = A_N + B_N \gamma_{N+1}; \quad (6.19)$$

тогда подстановкой в уравнение (6.18) получаем:

$$\begin{aligned} A_N + B_N \gamma_{N+1} &= \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + \xi_N (A_{N-1} + B_{N-1} \gamma_N)] = \\ &= \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + A_{N-1}(1 + \alpha)\eta_{N+1} + B_{N-1}(\gamma_{N+1} + \beta\zeta_{N+1})] = \\ &= \text{Max}[(1 + B_{N-1}\gamma_{N+1}) + \{(1 + \alpha)A_{N-1} - 1\}\eta_{N+1} + \\ &\quad + \{\beta B_{N-1} - 1\}\zeta_{N+1}]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Это позволяет выписать в табл. 6.3 все возможности, которые могут встретиться для оптимальной стратегии и уравнений для  $A_n$  и  $B_n$  на одном шаге. Проверим их для нескольких первых этапов. Из формулы (6.7) следует, что

$$\varphi_1(\gamma_2) = 1, \quad A_1 = 1, \quad B_1 = 0. \quad (6.21)$$

Поэтому  $(1 + \alpha)A_1 - 1 > 0$ , а  $\beta B_1 - 1 < 0$ , что соответствует случаю (2) или (3). При этом  $A_2 = 1$ ,  $B_2 = \alpha$  для  $\gamma_3 < 1$  и  $A_2 = (1 + \alpha)$ ,  $B_2 = 0$  для  $\gamma_3 > 1$ , так что

$$\varphi_2(\gamma_3) = \begin{cases} 1 + \alpha\gamma_3, & 0 \leq \gamma_3 \leq 1, \\ (1 + \alpha), & 1 \leq \gamma_3. \end{cases} \quad (6.22)$$

Таблица 6.3

		Условия			
		$(1 + \alpha) A_{N-1} - 1$	$\beta B_{N-1} - 1$	$\gamma_{N+1} - 1$	
(1)	отрицательное		отрицательное		
(2)	положительное		отрицательное	отрицательное	
(3)	положительное		отрицательное	положительное	
(4)	положительное		положительное	отрицательное	
(5)	положительное		положительное	положительное	
		Управление		Уравнение процесса	
			$\eta_{N+1}$	$\xi_{N+1}$	$A_N$
(1)	O	0	0	1	
(2)	R	$\gamma_{N+1}$	0	1	$(1 + \alpha) A_{N-1} + B_{N-1} - 1$
(3)	P	1	0	$(1 + \alpha) A_{N-1}$	$B_{N-1}$
(4)	S	$\gamma_{N+1}$	$1 - \gamma_{N+1}$	$\beta B_{N-1}$	$(1 + \alpha) A_{N-1} + (1 - \beta) B_{N-1}$
(5)	P	1	0	$(1 + \alpha) A_{N-1}$	$B_{N-1}$

Для третьего этапа имеется несколько возможностей. В первую очередь нужно проверить, как изменились условия. Теперь выражение  $(1 + \alpha)A_2 - 1$  равно либо  $\alpha$ , либо  $(1 + \alpha)^2 - 1$  и, следовательно, остается положительным. Если  $\gamma_3 < 1$ , то  $\beta B_2 - 1 = \alpha\beta - 1$  и может быть положительным, если же  $\gamma_3 > 1$ , то  $\beta B_2 - 1$  остается отрицательным. Предположим для определенности, что  $\alpha\beta < 1$ , тогда сохраняются случаи (2) и (3). Возможные варианты приведены в табл. 6.4. На рис. 6.4 для соответствующих управлений показаны функции  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ .

Таблица 6.4

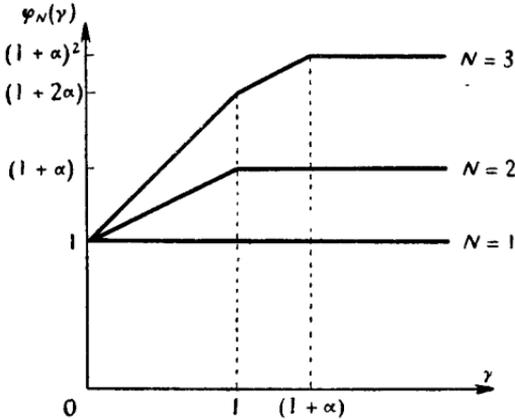
	$\eta_4$	$\xi_4$	$\gamma_4$	$A_3$	$B_3$	$(1 + \alpha)A_3 - 1$	$\beta B_3 - 1$
$\gamma_4 \leq 1$	$\gamma_4$	0	$(1 + \alpha)^{-1}$	1	$2\alpha$	$\alpha$	$2\alpha\beta - 1$
$1 \leq \gamma_4 \leq 1 + \alpha$	1	0	$\gamma_4 / (1 + \alpha) \leq 1$	$1 + \alpha$	$\alpha$	$(1 + \alpha)^2 - 1$	$\alpha\beta - 1$
$1 + \alpha \leq \gamma_4$	1	0	$\gamma_4 / (1 + \alpha) \geq 1$	$(1 + \alpha)^2$	0	$(1 + \alpha)^3 - 1$	-1

Итак, характер зависимости установлен, и он изменится только при изменении условия  $\beta B_N < 1$ . Это впервые случится при  $\gamma_{N+1} \leq 1$ , т. е. когда впервые  $N$  станет больше, чем

$1/\alpha\beta$ . Чтобы представить, что произойдет при этом, рассмотрим конкретный случай с  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 1,5$ , так что  $2\alpha\beta > 1 > \alpha\beta$ . Уравнение (6.16) примет вид

$$\gamma_4 = \left( \gamma_5 + \frac{3}{2} \zeta_5 \right) / \frac{3}{2} \eta_5,$$

и трем областям плоскости  $\eta_5$ ,  $\zeta_5$  соответствуют три важные



Р и с. 6.4.

области изменения  $\gamma_4$ , именно  $\gamma_4 \leq 1$ ,  $1 \leq \gamma_4 \leq 1 + \alpha$ ,  $1 + \alpha \leq \gamma_4$ . Итак,

область,	ограниченная прямыми, $\eta = 0$	соответствует:
<i>L</i>	$\zeta = \frac{3}{2} \eta - \frac{2}{3} \gamma_5$	$\frac{3}{2} \leq \gamma_4$
<i>M</i>	$\zeta = \eta - \frac{2}{3} \gamma_5$	$1 \leq \gamma_4 \leq \frac{3}{2}$
<i>N</i>	$\zeta = 0$	$\gamma_4 \leq 1$

Беря значения  $A_3$  и  $B_3$  из табл. 6.4, в каждой из этих областей для выбора  $(\eta_5, \zeta_5)$  можно записать уравнение (6.20):

$$L: \quad A_4 + B_4 \gamma_5 = \text{Max} \left[ 1 + \frac{19}{8} \eta_5 - \zeta_5 \right],$$

$$M: \quad A_4 + B_4 \gamma_5 = \text{Max} \left[ \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma_5 \right) + \frac{5}{4} \eta_5 - \frac{1}{4} \zeta_5 \right],$$

$$N: \quad A_4 + B_4 \gamma_5 = \text{Max} \left[ (1 + \gamma_5) + \frac{1}{2} \eta_5 + \frac{1}{2} \zeta_5 \right].$$

На рис. 6.5 показаны линии уровня максимизируемого выражения, и очевидно, что максимум для области  $L$  находится в вершине  $l$ , максимум для области  $M$  — в  $m$ , а для  $N$  вся прямая  $mn$  состоит из максимумов из-за того, что случайно  $\alpha = 2\alpha\beta - 1$ . Поэтому нужно только сравнить между собой эти вершины. Снова возьмем конкретный пример: пусть  $\gamma_5 = 9/10$ , тогда для  $l$ ,  $m$  и прямой  $mn$  получаем значения 2,16, 2,4 и 2,4 соответственно; отсюда следует, что любая точка отрезка  $mn$  соответствует оптимальной стратегии. Для определенности можно взять точку  $n$ , здесь  $\eta_5 = \gamma_5$  и  $\zeta_5 = 1 - \gamma_5$ . Максимизируемая функция показана на рис. 6.6. Мы видим, что при выбранном управлении запас сырья  $B$  не используется для производства товара  $A$  и что наступает период, когда весь запас сырья направляется на подготовку к будущему производству.

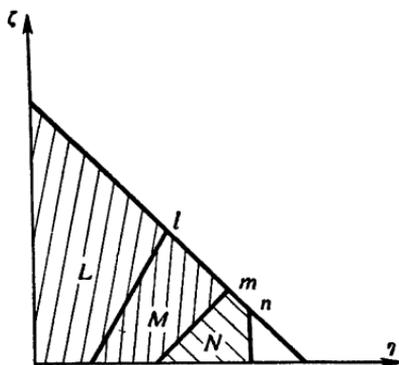


Рис. 6.5.

Сейчас уже достаточно ясно, что, хотя задача и является кусочно-линейной, геометрические выкладки становятся слишком сложными и следует переходить к численному решению. Уменьшение размерности с двух переменных  $x$  и  $c$  до одной уже дало нам преимущество с вычислительной точки зрения, а геометрический анализ привел к установлению кусочной линейности и необходимости перебора только конечного числа вершин. Однако при этом обнаружился также ряд трудностей. Первая из них (она будет преодолена в следующем параграфе) состоит в том, что пробное управление с малым значением  $\gamma_{n+1}$  может потребовать при вычислении  $\varphi_{n+1}(\gamma_n)$  очень больших значений  $\gamma_n$ . На графике для малых  $n$  функция  $\varphi_n$  при достаточно большом  $\gamma$  была постоянной, и это не приводило к затруднениям, но непосредственно численный подход мог бы и не установить этого постоянства.

Другая трудность, которая обнаружилась при геометрическом подходе, заключается в том, что во всей области возможных управлений максимизируемая функция не задается одной формулой, а определяется уравнениями нескольких плоскостей. Такой *кусочно-линейный* характер означает, что нужно исследовать вершины каждой подобласти (таких, как

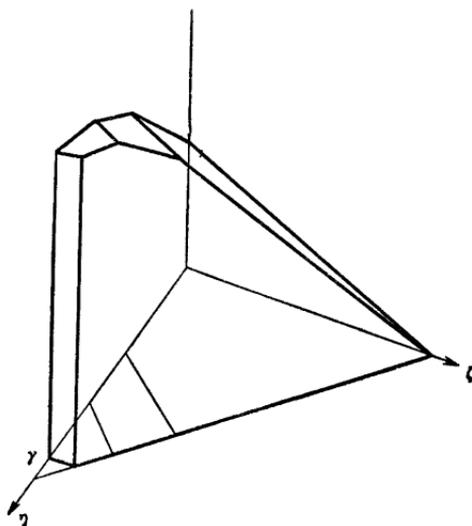


Рис. 6.6.

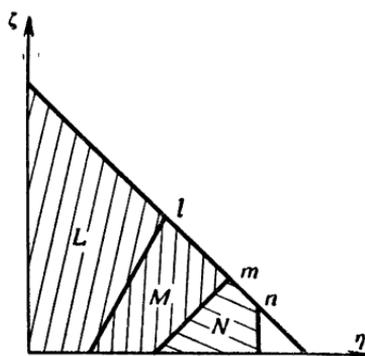


Рис. 6.7.

$L$ ,  $M$ ,  $N$  на рис. 6.5), а не только (как в случае области  $ORSQ$  на рис. 6.3) вершины всей области.

Вместо того чтобы выяснить характер вершин этих подобластей, вероятно, лучше исследовать всю границу области допустимых управлений. При этом будет обнаружена линейность максимизируемой функции, и ею можно будет воспользоваться. Важность этого, которая иногда не учитывается, стала бы очевидной в предыдущем примере, если бы  $\beta$  было выбрано немного большим, чем  $3/2$ , а  $\alpha$  по-прежнему равнялось  $1/2$ . Тогда, поскольку  $2\alpha\beta - 1$  было бы больше, чем  $\alpha$ , линии уровня в областях  $M$  и  $N$  были бы такими, какими они показаны на рис. 6.7 и точка  $m$  соответствовала бы оптимальному управлению.

### 6.3. Угроза расширения сетки

Эти трудности, на которые впервые указал Беллман и которым он дал столь красочное название, появляются тогда, когда среднее значение  $\gamma_{n+1}$  приводит к большим значениям  $\gamma_n$ . Затруднения объясняются тем, что для вычисления

$\varphi_n(\gamma_{n+1})$  нужно вычислить и запомнить значения  $\varphi_{n-1}(\gamma_n)$ ; и если  $\gamma_n$  изменяется в широких пределах, то запоминание и интерполирование требует сетки с большим числом узлов. Беллман предложил столь же простое, сколь и эффективное, решение, именно: рассмотрим не только  $\gamma$ , но также и обратную ей величину  $\delta = 1/\gamma = x/c$ . В том случае, когда  $\gamma$  больше 1,  $\delta$  меньше 1, и  $\delta$  можно взять в качестве переменной. Так как  $0 \leq \delta \leq 1$ , то, как и для  $\gamma$  из отрезка  $[0, 1]$ , запоминание и интерполирование не составляет проблемы. Чтобы проверить это на практике, определим в случае  $\delta_{N+1} \leq 1$  новые функции следующим образом:

$$\delta_{N+1} = x_{N+1}/c_{N+1}, \quad (6.23)$$

$$f_N(x_{N+1}, c_{N+1}) = c_{N+1}\psi_N(\delta_{N+1}), \quad (6.24)$$

а для  $\delta_{N+1} \geq 1$ , т. е.  $\gamma_{N+1} \leq 1$ , сохраним определения (6.11) и (6.12). Теперь уравнения  $\gamma_n = (\gamma_{n+1} + \beta\zeta_{n+1})/(1 + \alpha)\eta_{n+1}$  можно заменить четырьмя способами:

$$\gamma_n = \frac{\gamma_{n+1} + \beta\zeta_{n+1}}{(1 + \alpha)\eta_{n+1}} = \frac{1 + \beta\delta_{n+1}\zeta_{n+1}}{(1 + \alpha)\eta_{n+1}\delta_{n+1}}, \quad (6.25)$$

$$\delta_n = \frac{(1 + \alpha)\eta_{n+1}}{\gamma_{n+1} + \beta\zeta_{n+1}} = \frac{(1 + \alpha)\eta_{n+1}\delta_{n+1}}{1 + \beta\delta_{n+1}\zeta_{n+1}}, \quad (6.26)$$

причем выбирается та форма, для которой рассматриваемые значения  $\gamma$  или  $\delta$  меньше или равны 1. Подобным же образом поделим основное функциональное уравнение (6.6) на  $x_{N+1}$  или на  $c_{N+1}$ . Деление на  $x_{N+1}$  дает

$$\varphi_N(\gamma_{N+1}) = \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + f_{N-1}(x_N, c_N)/x_{N+1}].$$

Если записать  $f_{N-1}(x_N, c_N)$  в виде  $x_N\varphi_{N-1}(\gamma_N)$ , то приходим к уравнению (6.18) предыдущего параграфа, но теперь, если

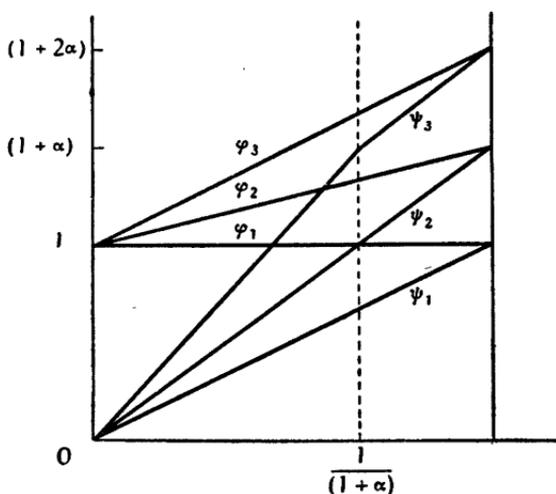
Таблица 6.5

$\gamma_{N+1} < 1$	$\gamma_N < 1$	$\varphi_N(\gamma_{N+1}) = \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + (1 + \alpha)\eta_{N+1}\varphi_{N-1}(\gamma_N)]$
$\gamma_{N+1} < 1$	$\delta_N < 1$	$\varphi_N(\gamma_{N+1}) = \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + (1 + \beta\delta_{N+1}\zeta_{N+1})\psi_{N-1}(\delta_N)/\delta_{N+1}]$
$\delta_{N+1} < 1$	$\gamma_N < 1$	$\varphi_N(\delta_{N+1}) = \text{Max}[(1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1})\delta_{N+1} + (1 + \alpha)\eta_{N+1}\delta_{N+1}\varphi_{N-1}(\gamma_N)]$
$\delta_{N+1} < 1$	$\delta_N < 1$	$\varphi_N(\delta_{N+1}) = \text{Max}[(1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1})\delta_{N+1} + (1 + \beta\delta_{N+1}\zeta_{N+1})\psi_{N-1}(\delta_N)]$

$\gamma_N$  больше 1, то оно не используется. В то же время, если записать  $f_{N-1}(x_N, c_N)/x_{N+1}$  как  $(c_N/x_{N+1})\varphi_{N-1}(\delta_N)$ , то

$$\begin{aligned} \varphi_N(\gamma_{N+1}) &= \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + (1 + \alpha)\eta_{N+1}\psi_{N+1}(\delta_N)/\delta_N] = \\ &= \text{Max}[1 - \eta_{N+1} - \zeta_{N+1} + (1 + \beta\delta_{N+1}\zeta_{N+1})\psi_{N-1}(\delta_N)/\delta_{N+1}]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Продолжая выкладки, получаем совокупность четырех уравнений (табл. 6.5), которыми пользуются в зависимости



или  $\delta$

Р и с. 6.8.

от оговоренных условий. Программу выбора на вычислительной машине нужного уравнения и тем самым вычисления функций  $\varphi_n(\gamma)$  и  $\psi_n(\delta)$  составить довольно просто. Используя соотношения  $\psi(\delta) = \delta\varphi(1/\delta)$  и  $\varphi(\gamma) = \gamma\psi(1/\gamma)$ , результаты определения оптимального управления можно представить в виде графика с одинаковыми пределами изменения переменных  $\gamma$  или  $\delta$ . При этом преобразовании сохраняется кусочная линейность. Например, рис. 6.4 переходит в рис. 6.8.

#### 6.4. Управление экономическим процессом

Простейшая модель динамики национального дохода может быть построена следующим образом<sup>1)</sup>. Обозначим через  $Y_t$  весь национальный доход, полученный в году  $t$ . Он скла-

<sup>1)</sup> Эти рассуждения основаны на применяющейся в США методологии исчисления национального дохода, см., например, книгу В. М. Кудрова «Статистика национального дохода в США», М., 1966. — Прим. ред.

дывается из расходов индивидуальных потребителей  $C_t$ , стимулированных частных капиталовложений  $I_t$  и государственных расходов  $G_t$ :

$$Y_t = G_t + I_t + C_t. \quad (6.28)$$

Расходы индивидуальных потребителей зависят от национального дохода предыдущего  $t - 1$  года:

$$C_t = \alpha Y_{t-1}; \quad (6.29)$$

$\alpha$  называется предельной склонностью к потреблению. Частные капиталовложения в году  $t$  зависят от превышения затрат на потребление данного года над затратами предыдущего,

$$I_t = \beta (C_t - C_{t-1}) = \alpha\beta (Y_{t-1} - Y_{t-2}). \quad (6.30)$$

Итак,

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \alpha\beta (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G_t. \quad (6.31)$$

Это разностное уравнение второго порядка относительно  $Y_t$ , и его можно решить следующим способом. Сначала рассмотрим однородное уравнение с  $G_t = 0$  и запишем его в виде

$$Y_t - \alpha(1 + \beta)Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} = 0. \quad (6.32)$$

Предположим, что решение имеет вид  $Y_t = m^t$ , тогда подстановкой в (6.32) убеждаемся, что  $m$  должна удовлетворять

$$m^2 - \alpha(1 + \beta)m + \alpha\beta = 0. \quad (6.33)$$

При этом получаем два значения  $m_1$  и  $m_2$  и путем подстановки проверяем, что для произвольных постоянных  $A_1$  и  $A_2$

$$Y_t = A_1 m_1^t + A_2 m_2^t \quad (6.34)$$

также должно быть решением. Если бы государственные расходы были постоянными (например,  $G_t = 1$ , поскольку всегда можно принять их в качестве денежной единицы), то частным решением неоднородного уравнения с  $G_t = 1$  было бы значение  $Y_t \doteq 1/(1 - \alpha)$ .

Итак, полное решение в случае постоянных государственных расходов таково<sup>1)</sup>:

$$Y_t = A_1 m_1^t + A_2 m_2^t + 1/(1 - \alpha), \quad (6.35)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  нужно выбрать так, чтобы решение соответствовало национальному доходу первых двух лет. Теперь, если  $|m_1|$  и  $|m_2|$  оба меньше единицы, то при увеличении  $t$   $m_1^t$  и  $m_2^t$  будут стремиться к нулю, и национальный доход будет приближаться к произведению  $1/(1 - \alpha)$  на величину государ-

<sup>1)</sup> Эти и аналогичные формулы в дальнейшем верны лишь в предположении, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней (т. е. в данном случае  $m_1 \neq m_2$ ). — *Прим. ред.*

ственных расходов. Однако если  $|m_1|$  или  $|m_2|$ , или обе эти величины будут больше единицы, то национальный доход будет либо возрастать, либо уменьшаться, либо сильно колебаться. Если  $m_1$  и  $m_2$  есть комплексные числа, модуль которых равен единице, то национальный доход будет совершать постоянные колебания около своего среднего значения.

В связи с этим возникает ряд задач на оптимум. Как следует выбирать величину  $G_t$ , чтобы в заведомо неустойчивой ситуации управлять колебаниями в экономике? Какими должны быть расходы, чтобы в некоторый момент будущего обеспечить максимальную или заданную величину национального дохода либо максимальную или заданную скорость его роста? Без сомнения, константы  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от  $G_t$ , поскольку величина  $G_t$  образуется из налогов, которые в свою очередь влияют на тенденции потребления и вложений. Тем не менее, поскольку мы не очень интересуемся, насколько модель адекватна реальной экономике, предположим, что  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны, и заметим только, что более сложная задача, где  $\alpha = \alpha(G)$  и  $\beta = \beta(G)$ , может быть столь же быстро решена с помощью динамического программирования.

Чтобы рассмотреть еще один тип целевой функции, исследуем задачу стабилизации, где попытаемся максимизировать минимальную величину национального дохода в течение следующих  $N$  лет при том условии, что государственные расходы не превосходят заданной величины.

Чтобы привести задачу к привычной форме, принимаем конечный год (например, срок следующих выборов) за год 1, а первый год  $N$ -летнего периода за год  $N$ . Тогда, обозначая через  $Y_n$  национальный доход в году  $n$  и через  $G_n$  — государственные расходы, можно записать уравнение (6.31) в виде

$$Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha\beta (Y_{n+1} - Y_{n+2}) + G_n. \quad (6.36)$$

Состояние системы должно быть определено заданием национального дохода для двух соседних лет, или, что то же, заданием национального дохода и его роста или уменьшения за предыдущий год.

Положим

$$Z_n = Y_n - Y_{n+1}, \quad (6.37)$$

тогда

$$Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha\beta Z_{n+1} + G_n. \quad (6.38)$$

и

$$Z_n = (\alpha - 1) Y_{n+1} + \alpha\beta Z_{n+1} + G_n. \quad (6.39)$$

Поскольку на сумму государственных расходов  $\sum_1^N G_n$  наложено ограничение, то в качестве фазовой переменной следует

также взять величину средств, остающихся на будущие расходы, т. е.

$$H_n = \sum_1^{n-1} G_r = G - \sum_n^N G_r, \quad (6.40)$$

где  $G$  — заданная величина.

Процесс изменения переменной  $H_n$  описывается уравнением

$$H_n = H_{n+1} - G_n. \quad (6.41)$$

Теперь можно представить задачу в стандартной форме.

1. Фазовые переменные:  $Y_n, Z_n, H_n$ .

2. Управление:  $G_n$ .

3. Уравнение процесса:  $Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + G_n$ ,

$$Z_n = (\alpha - 1) Y_{n+1} + \alpha \beta Z_{n+1} + G_n,$$

$$H_n = H_{n+1} - G_n.$$

4. Ограничения:  $0 \leq G_n \leq H_{n+1} \leq G$ .

5. Целевая функция: максимизировать  $[\text{Min}\{Y_1, \dots, Y_N\}]$ .

6. Параметры:  $\alpha, \beta$ .

Здесь  $\text{Min}\{Y_1, \dots, Y_N\}$  означает наименьшую среди величин  $Y_n, n = 1, 2, \dots, N$ , и мы хотим, чтобы наименьшая среди этих величин была как можно больше. Пусть

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}, H_{N+1}) = \text{Max}[\text{Min}(Y_1, \dots, Y_N)]; \quad (6.42)$$

здесь максимизация осуществляется соответствующим выбором  $G_1, \dots, G_N$ . Тогда, применяя принцип оптимальности,  $G_N$  нужно выбирать так, чтобы максимизировалась меньшая из двух величин  $Y_N$  и  $\text{Min}\{Y_1, \dots, Y_{N-1}\}$ . Таким образом приходим к уравнению

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}, H_{N+1}) = \text{Max}[\text{Min}\{Y_N, f_{N-1}(Y_N, Z_N, H_N)\}], \quad (6.43)$$

где максимизация происходит путем выбора  $G_N$ , а величины в правой части равенства находятся из уравнений (6.38), (6.39) и (6.41).

Чтобы представить себе, как происходит решение задачи, рассмотрим простой пример и решим его без привлечения каких-либо упрощений, связанных с уменьшением размерности. При  $\alpha = 0,5, \beta = 1, Y_4 = 1, Z_4 = 0,5$  мы сталкиваемся с потенциально опасной ситуацией, поскольку при полном отсутствии государственных расходов национальный доход катастрофически бы падал:  $Y_3 = 0,75, Y_2 = 0,25, Y_1 = -0,125$ . Посмотрим сейчас, как при общей сумме государственных

затрат  $H_4 = 1$  распределить их на три года так, чтобы максимизировать минимальный национальный доход и предотвратить катастрофу.

Для одного года уравнение (6.43) тривиально, ибо

$$f_1(Y_2, Z_2, H_2) = \text{Max } Y_1 = \text{Max} \left[ \frac{1}{2} (Y_2 + Z_2) + G_2 \right] = \\ = \frac{1}{2} (Y_2 + Z_2) + H_2, \quad (6.44)$$

и стратегия состоит в том, чтобы израсходовать все, что имеется:

$$G_1 = H_2. \quad (6.45)$$

Для случая двух лет имеем

$$f_2(Y_3, Z_3, H_3) = \text{Max}_{G_2} [\text{Min} \{Y_2, f_1(Y_2, Z_2, H_2)\}] = \\ = \text{Max} \left[ \text{Min} \left\{ \frac{1}{2} (Y_3 + Z_3) + G_2, \frac{1}{2} (Y_2 + Z_2) + H_2 \right\} \right]. \quad (6.46)$$

Однако с учетом уравнения процесса

$$\frac{1}{2} (Y_2 + Z_2) + H_2 = \frac{1}{2} Z_3 + H_3,$$

и это выражение не зависит от  $G_2$ . Построив графики обоих выражений, сравниваемых в уравнении (6.46), видим, что возможны три случая. На рис. 6.9 построены графики обоих сравниваемых выражений как функций  $G_2$ . Конечно, второе выражение  $\frac{1}{2}Z_3 + H_3$  есть постоянная, и график первого  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + G_2$  может либо лежать целиком ниже второго, либо пересекать его, либо располагаться над ним. В первом случае (прямая  $AB$ ) верхний конец  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + H_3$  меньше, чем  $\frac{1}{2}Z_3 + H_3$ , т. е.  $Y_3 < 0$ , первый член  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + G_2$  всегда меньше второго, так что следует выбирать  $G_2$  как можно большим. Поэтому  $G_2 = H_3$  и  $f_2 = \frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + H_3$ . Во втором случае (прямая  $CD$ ) нижний конец прямой, т. е.  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3)$ , меньше чем  $\frac{1}{2}Z_3 + H_3$ , а верхний,  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + H_3$ , больше чем  $\frac{1}{2}Z_3 + H_3$ ; таким образом,  $0 \leq Y_3 \leq 2H_3$ . Тогда слева от точки пересечения  $K$   $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + G_2$  является наименьшим из двух членов, в то время как справа меньшим будет член  $\frac{1}{2}Z_3 + H_3$ . Следовательно, если расход  $G_2$  выбран так, что величина его соответствует точке  $K$ , то меньший из двух членов будет максимально возможным. При этом получаем  $G_2 = H_3 - \frac{1}{2}Y_3$  и  $f_2 = \frac{1}{2}Z_3 + H_3$ . Далее, если прямая  $\frac{1}{2}(Y_3 + Z_3) + G_2$  расположена, подобно  $EF$ , целиком выше

прямой  $JKL$ , то  $f_2 = 1/2 Z_3 + H_3$  и  $G_2 = 0$ . Итак,

$$Y_3 \leq 0, \quad f_2(Y_3, Z_3, H_3) = \frac{1}{2} Y_3 + \frac{1}{2} Z_3 + H_3, \quad G_2 = H_3,$$

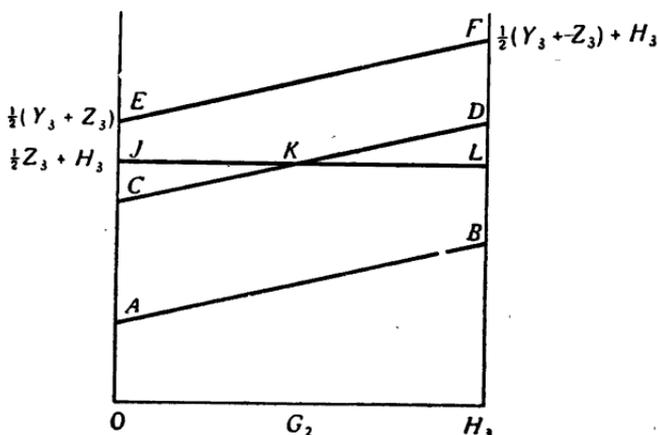
$$0 \leq Y_3 \leq 2H_3, \quad f_2(Y_3, Z_3, H_3) = \frac{1}{2} Z_3 + H_3, \quad G_2 = H_3 - \frac{1}{2} Y_3,$$

$$2H_3 \leq Y_3, \quad f_2(Y_3, Z_3, H_3) = \frac{1}{2} Z_3 + H_3, \quad G_2 = 0.$$

Теперь можно рассмотреть трехлетний вариант, приняв  $Y_4 = 1$ ,  $Z_4 = 0,5$  и  $H_4 = 1$ . Величины  $Y_3$ ,  $Z_3$  и  $H_3$  задаются так:

$$Y_3 = 0,75 + G_3, \quad Z_3 = 0,25 + G_3, \quad H_3 = 1 - G_3.$$

Поскольку  $G_3$  есть положительная величина, то  $Y_3$  не может быть меньше нуля, причем  $Y_3 \leq 2H_3$ , если  $G_3 < 5/12$ . Однако



Р и с. 6.9.

при этом форма функции  $f_2$  не изменяется (изменяется только управление  $G_2$ ), и поэтому  $f_2 = 1/2 Z_3 + H_3 = 1,125 - 1/2 G_3$ . На рис. 6.10 показаны две величины  $Y_3$  и  $f_2$ . Прямые пересекаются при  $G_3 = 0,25$ , и это значение  $G_3$  доставляет максимум наименьшей из величин  $f_2$  и  $Y_3$ . Для  $G_3 = 0,25$ ,  $Y_3 = 1$ ,  $Z_3 = 0,5$ ,  $H_3 = 0,75$  и  $f_3(1, 0,5, 1) = 1$ . Так как  $G_3 < 5/12$ , то  $Y_3 \leq 2H_3$ , и наименьшей величиной управления для года 2 будет  $G_2 = H_3 - 1/2 Y_3 = 0,25$ . Тогда  $Y_2 = 1$ ,  $Z_2 = 0$ ,  $H_2 = 0,5$ , и в последний год  $G_1 = H_2 = 0,5$  и  $Y_1 = 1$ . Таким образом, при правильном распределении государственных расходов национальный доход был сохранен на уровне 1. Если бы эти

расходы поделить поровну на каждый из трех лет,  $G_1 = G_2 = G_3 = 0,333$ , то национальный доход был бы равен  $Y_3 = 1,416$ ,  $Y_2 = 0,916$  и  $Y_1 = 0,541$ . Таким образом оказывается, что правильным программированием можно достичь ощутимого стабилизирующего эффекта.

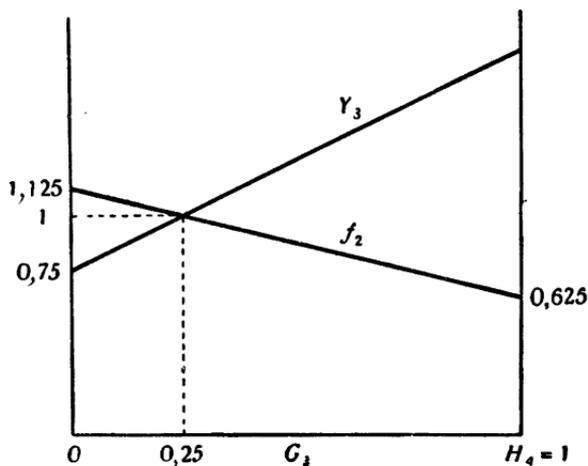


Рис. 6.10.

### 6.5. Еще один прием уменьшения размерности

В предыдущем параграфе мы не пытались уменьшить число независимых переменных функций  $f_N$ , хотя, как и ранее, могли воспользоваться линейностью задачи. Сейчас на примере задачи с нелинейной целевой функцией мы хотим продемонстрировать более тонкое использование линейности основного разностного уравнения. Рассмотрим ту же модель динамики национального дохода и предположим, что государственные расходы направлены на максимизацию величины  $Y_1$  (год 1 — год следующих выборов). Однако увеличение национального дохода будет встречено без энтузиазма, если оно достигается за счет крови налогоплательщиков, и поэтому пропагандистскую значимость величины  $Y_1$  нужно уменьшить

на  $\lambda \sum_1^N G_n^2$ . Психологическая мотивировка, связанная с выбо-

ром выражения  $G_n^2$ , сводится к тому, что имеется определенный уровень расходов  $G_n = 1$ , которые представляются или допускаются как неизбежные. Значения  $G_n$ , большие 1, оцениваются в умах людей в большей, чем пропорциональной, мере ( $G_n^2 > G_n$ ), значения же, меньшие единицы, более прият-

ны и поэтому кажутся еще меньшими ( $G_n^2 < G_n$ ). Таким образом, целевая функция имеет вид  $Y_1 - \lambda \sum_1^N G_n^2$ . Напоминаем серьезному читателю, что мы не обсуждаем обоснованности модели, а ищем лишь способ, которым данную модель можно оптимизировать. Теперь задачу можно представить в стандартной форме:

1. Фазовые координаты:  $Y_n, Z_n$ .

2. Управление:  $G_n$ .

3. Уравнение процесса:  $Y_n = \alpha Y_{n+1} + \alpha\beta Z_{n+1} + G_n$ ,  
 $Z_n = (\alpha - 1) Y_{n+1} + \alpha\beta Z_{n+1} + G_n$ .

4. Ограничения:  $G_n \geq 0$ .

5. Целевая функция: максимизировать  $Y_1 - \lambda \sum_1^N G_n^2$ .

6. Параметры:  $\alpha, \beta, \lambda$ .

Непосредственное применение принципа оптимальности приводит к выражению

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}) = \text{Max} \left[ Y_1 - \lambda \sum_1^N G_n^2 \right], \quad (6.47)$$

тогда

$$f_N(Y_{N+1}, Z_{N+1}) = \text{Max} [f_{N-1}(Y_N, Z_N) - \lambda G_N^2], \quad (6.48)$$

где при максимизации второго выражения нужно выбирать лишь  $G_N$ . Здесь мы имеем дело с функциями двух фазовых переменных  $Y$  и  $Z$ . Переход к одной переменной оказывается возможным вследствие знания решения линейного разностного уравнения и совершенно аналогичен открытому Беллманом методу для линейных дифференциальных уравнений. С помощью этого метода совершается переход к одной переменной, и, хотя в данном случае упрощения не слишком существенны, тот же метод справедлив и для линейного разностного уравнения  $M$ -го порядка, где  $M$  переменных заменяются всего лишь одной. В случае дифференциальных уравнений  $M$ -го порядка все остается без изменений, тогда как в дифференциально-разностных уравнениях уже вся функция (т. е. континуум переменных) заменяется одной переменной. Вообще говоря, такие упрощения являются довольно редкими.

Решение уравнения

$$Y_n - \alpha(1 + \beta) Y_{n+1} + \alpha\beta Y_{n+2} = G_n \quad (6.49)$$

при  $N \geq n \geq 1$  и заданных  $Y_{N+1}$  и  $Z_{N+1} = (Y_{N+1} - Y_{N+2})$  имеет вид

$$Y_n = \frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2} \left[ \left\{ Z_{N+1} - \left( \frac{m_2 - 1}{m_2} \right) Y_{N+1} \right\} m_1^{N+1-n} - \right. \\ \left. - \left\{ Z_{N+1} - \frac{m_1 - 1}{m_1} Y_{N+1} \right\} m_2^{N+1-n} \right] + \\ + \frac{1}{m_1 - m_2} \sum_{r=n}^N [m_1^{r+1-n} - m_2^{r+1-n}] G_r, \quad (6.50)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  — корни многочлена

$$m^2 - \alpha(1 + \beta)m + \alpha\beta = 0. \quad (6.51)$$

Как видно, решение состоит из двух частей: первая часть есть решение однородного уравнения с  $G_n \equiv 0$ , оно представляет собой значение  $Y_n$ , обусловленное наличием  $Y_{N+1}$  и  $Z_{N+1}$  в том случае, когда управление  $G_n$  отсутствует. Вторая часть равна сумме влияний на шаге  $n$  всех значений  $G_n$  из предыдущих шагов. В частности, для  $n = 1$  можно записать

$$Y_1 = X_{N+1} + \sum_1^N W_r G_r, \quad (6.52)$$

где

$$W_r = (m_1^r - m_2^r) / (m_1 - m_2), \quad (6.53)$$

$$X_{N+1} = m_1 m_2 (Z_{N+1} - Y_{N+1}) W_N + Y_{N+1} W_{N+1}. \quad (6.54)$$

Здесь  $X_{N+1}$  совпадает с тем  $Y_1$ , которое соответствует данным  $Y_{N+1}$ ,  $Z_{N+1}$  в случае, когда управление отсутствует, и мы утверждаем, что в этой задаче  $X_{N+1}$  можно использовать в качестве единственной фазовой переменной. Говоря другими словами, в данной задаче все значения фазовых переменных  $Y_{N+1}$ ,  $Z_{N+1}$ , приводящие при отсутствии управления к одному и тому же  $Y_1$ , являются эквивалентными.

Для обоснования метода покажем сначала, как происходит преобразование  $X_{N+1}$  в  $X_N$ . Если управление имелось бы только на этапе  $N$ , а все  $G_n$ ,  $n = N-1, \dots, 2, 1$ , были бы нулевыми, то величина  $Y_1$  равнялась бы  $X_{N+1} + W_N G_N$ , и ее тогда можно рассматривать как значение  $Y_1$ , которое при отсутствии управления могло бы быть достигнуто из состояния  $X_N$ . Поэтому

$$X_N = X_{N+1} + W_N G_N. \quad (6.55)$$

Пусть теперь

$$\varphi_N(X_{N+1}) = \text{Max} \left[ Y_1 - \lambda \sum_1^N G_n^2 \right], \quad (6.56)$$

т. е. равно максимальному значению  $Y_1 - \lambda \sum G_n^2$ , которое можно было бы получить при оптимальном выборе  $G_1, \dots, G_N$ , если бы значение  $Y_1$  при отсутствии управления равнялось бы  $X_{N+1}$ . В этом случае использование принципа оптимальности дает

$$\varphi_N(X_{N+1}) = \text{Max}_{G_N} [\varphi_{N-1}(X_N) - \lambda G_N^2], \quad (6.57)$$

ибо для оставшихся этапов нужно пользоваться оптимальной стратегией, а  $\lambda G_N^2$  есть стоимость выбранного значения  $G_N$  для этапа  $N$ .

Эта задача имеет чрезвычайно простое решение; его либо можно получить, пользуясь индукцией, либо проверить прямой подстановкой. Именно,

$$\varphi_N(X_{N+1}) = X_{N+1} + \sum_1^N W_n^2/4\lambda, \quad (6.58)$$

а управление

$$G_n = W_n/2\lambda. \quad (6.59)$$

Из того, что  $\varphi_N$  есть максимум  $Y_1 - \lambda \sum_1^N G_n^2$ , следует, что максимальное достижимое значение  $Y_1$  равно  $X_{N+1} + \sum_1^N W_n^2/2\lambda$ . Это значит, что последнее превышает величину  $Y_1$ , получающуюся при отсутствии управления, на  $\sum_1^N W_n^2/2\lambda$ .

Полное решение разностного уравнения  $M$ -го порядка

$$Y_n + \alpha_1 Y_{n+1} + \alpha_2 Y_{n+2} + \dots + \alpha_M Y_{n+M} = G_n \quad (6.60)$$

предполагает задание  $M$  величин  $Y_{N+1}, Y_{N+2}, \dots, Y_{N+M}$  (или соответствующих им разностей) и имеет прежнюю форму

$$Y_n = \sum_{j=1}^N A_j m_j^{N+1-n} + \sum_n^N W_r G_r, \quad (6.61)$$

где  $A_j$  выбраны так, чтобы удовлетворить заданным условиям, а  $m_j$  есть корни уравнения

$$m^M + \alpha_1 m^{M-1} + \dots + \alpha_M = 0. \quad (6.62)$$

При  $n = 1$  первый член снова представляет собой величину  $Y_1$ , когда управление отсутствует, и его можно принять за фазовую переменную  $X_{N+1}$ . Это приводит к уменьшению числа переменных с  $M$  до 1.

### 6.6. Управление процессами с конкуренцией

Рассмотрим возможность оптимизации рекламной кампании при наличии конкуренции. Мыловаренной промышленностью некоторой страны управляет триумвират компаний, известных на Мэдисон-авеню как компании  $L$ ,  $B$  и  $W$ . Создатели препарата «Beauty Bath» (и других созвучных средств) — компания  $B$  — находятся в привилегированном положении, потому что оказывается, что когда для поклонников «Lovely Lave» и «Wonder Wash» наступает пора мучительной переоценки достоинств моющих средств, которыми они пользовались, то всегда они обращаются сначала к «Beauty Bath». Компания  $B$  старается воспользоваться этой ситуацией и, чтобы привлечь в свои магазины столько потребителей, сколько это возможно, проводит рекламную кампанию умелым сочетанием распространения акций, завлекательных объявлений и просто обмана и лести. Сотрудники фирмы  $B$  установили, что когда интенсивность рекламы равна  $T$ , то в единицу времени произойдет переманивание части  $\lambda$  потребителей компании  $L$  и части  $\mu$  потребителей компании  $W$ . К сожалению, будут освобождаться от иллюзий также некоторые из их собственных потребителей, из которых  $l$ -я часть перейдет к  $L$  и  $m$ -я к  $W$ . Величины  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $l$  и  $m$  являются функциями  $T$ , и, для того чтобы облегчить директорам принятие решений, были составлены только два плана кампании с интенсивностями  $T_{(1)}$  и  $T_{(2)}$  и соответствующими им значениями  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $l_1$ ,  $m_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ ,  $l_2$ ,  $m_2$ . Как, задавшись определенным периодом в  $N$  единиц времени, следует директорам развертывать рекламную кампанию?

Пронумеруем, как обычно, временные интервалы от конца к началу, и пусть  $x_n$ ,  $y_n$  и  $z_n$  означают части населения, становящиеся потребителями компаний  $L$ ,  $B$  и  $W$  в конце периода  $n$ . Заданы  $x_{N+1}$ ,  $y_{N+1}$  и  $z_{N+1}$ , и мы хотим выбрать последовательность интенсивностей  $T_N, T_{N-1}, \dots, T_1$  (где  $T_n$  — это либо  $T_{(1)}$ , либо  $T_{(2)}$ ) так, чтобы максимизировать  $y_1$ . Используя все, что было сказано о результатах рекламирования, можно составить уравнения процесса. Например, изменение величины  $y$  за  $n$ -й интервал  $y_n - y_{n+1}$  является результатом добавления  $\lambda x_{n+1}$  и  $\mu z_{n+1}$  потребителей за счет лагерей противника и потери  $(l + m)y_{n+1}$ , что дает  $y_n = \lambda x_{n+1} + (1 - l - m)y_{n+1} + \mu z_{n+1}$ . Таким образом,

$$x_n = (1 - \lambda)x_{n+1} + ly_{n+1}, \quad (6.63)$$

$$y_n = \lambda x_{n+1} + (1 - l - m)y_{n+1} + \mu z_{n+1}, \quad (6.64)$$

$$z_n = my_{n+1} + (1 - \mu)z_{n+1} \quad (6.65)$$

при условии постоянства суммы

$$x_n + y_n + z_n = 1. \quad (6.66)$$

Поскольку мы предполагаем неизменной общую численность населения, так что  $x$ ,  $y$  и  $z$  есть величины с постоянной суммой, то в действительности имеются только две переменные, и для того чтобы выразить любую из трех через две другие, можно использовать уравнение (6.66). Тем не менее мы оставим все три переменные, так как при этом сохраняется однородность выражений.

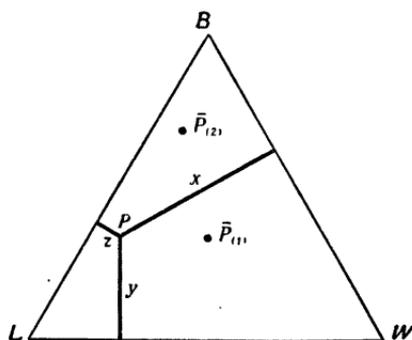


Рис. 6.11.

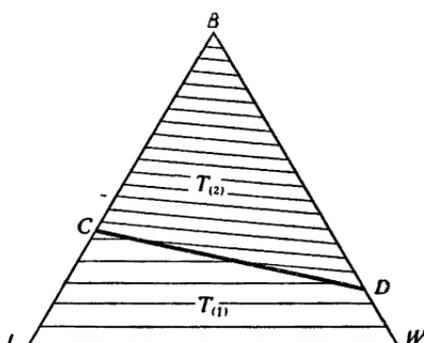


Рис. 6.12.

Для определенности перечислим теперь значения констант для  $T_{(1)}$  и  $T_{(2)}$ .

Интенсивность	$\lambda$	$l$	$m$	$\mu$	$1-l-m$
$T_{(1)}$	0,20	0,20	0,20	0,20	0,60
$T_{(2)}$	0,04	0,01	0,01	0,12	0,98

Отсюда видно, что, неся с собой большие изменения,  $T_{(1)}$  значительно более действенна, чем  $T_{(2)}$ . Однако для компании В предпочтительной является более умеренная интенсивность  $T_{(2)}$ , поскольку двухпроцентные потери компании восполняются 4- и 12-процентным приростом за счет L и W. Оказывается, что уравнения (6.63), (6.64) и (6.65) имеют равновесное решение

$$\frac{\bar{x}}{l/\lambda} = \bar{y} = \frac{\bar{z}}{m/\mu} = \frac{1}{1 + l/\lambda + m/\mu}, \quad (6.67)$$

т. е. если  $x_{n+1} = \bar{x}$  и т. д., то  $x_n = \bar{x}$ . Равновесным решением для  $T_{(1)}$  является  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = \bar{z}_1 = 1/3$ , но оно менее желательно, чем решение, соответствующее  $T_{(2)}$ , при котором

$$\bar{x}_2 = \frac{3}{16}, \quad \bar{y}_2 = \frac{3}{4}, \quad \bar{z}_2 = \frac{1}{16}.$$

Состояние общества потребителей в любой момент времени можно представить точкой  $P(x, y, z)$  треугольной диаграммы рис. 6.11. На этом рисунке  $x$  есть перпендикуляр, опущенный из точки  $P$  на сторону  $BW$ ,  $y$  — на сторону  $LW$ ,  $z$  — на сторону  $LB$ . Из элементарной геометрии следует, что сумма длин этих перпендикуляров всегда постоянна и точки  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$  являются вершинами. На рис. 6.11 отмечены две точки равновесия  $\bar{P}_{(1)}$  и  $\bar{P}_{(2)}$ , и если бы использовалась только одна стратегия (например,  $T_{(1)}$ ), то последовательность состояний  $(x_n, y_n, z_n)$ ,  $n = N + 1, N, \dots, 2, 1$ , можно было бы представить последовательностью точек  $P_{N+1}, P_N, \dots, P_1$ , которая, как можно показать, сходилась бы к  $\bar{P}_{(1)}$ . Из диаграммы следует, что цель заключается в том, чтобы заставить точку  $P_1$  находиться как можно выше.

Теперь можно сформулировать задачу обычным образом.

1. Фазовые переменные:  $x_n, y_n, z_n$ .

2. Управление:  $T_n$ .

3. Уравнение процесса:  $x_n = (1 - \lambda)x_{n+1} + ly_{n+1}$ ,

$$y_n = \lambda x_{n+1} + (1 - l - m)y_{n+1} + \mu z_{n+1},$$

$$z_n = my_{n+1} + (1 - \mu)z_{n+1},$$

где  $\lambda, l, m$  и  $\mu$  есть функции  $T_n$ .

4. Ограничения:  $x_n + y_n + z_n = 1$ ,  $x_n \geq 0$ ,  $y_n \geq 0$ ,  $z_n \geq 0$ ,  $T_n = T_{(1)}$  или  $T_n = T_{(2)}$ .

5. Целевая функция:  $y_1$ .

6. Параметры:  $\lambda_i = \lambda(T_{(i)})$  и т. д. заданы таблицей.

Пусть

$$f_N(x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1}) = \text{Max } y_1, \quad (6.68)$$

который достигается выбором соответствующей последовательности  $T_N, \dots, T_1$ . Тогда по принципу оптимальности

$$f_N(x_{N+1}, y_{N+1}, z_{N+1}) = \text{Max } [f_{N-1}(x_N, y_N, z_N)], \quad (6.69)$$

и здесь следует выбрать только одно  $T_N$ . Как обычно, начиная с одношагового случая, имеем

$$f_1(x_2, y_2, z_2) = \text{Max } [\lambda x_2 + (1 - l - m)y_2 + \mu z_2], \quad (6.70)$$

и максимизация проводится соответствующим выбором совокупности коэффициентов  $\lambda, l, m, \mu$ . Для приведенных выше значений постоянных двумя возможными значениями целевой функции будут  $(0,2x_2 + 0,6y_2 + 0,2z_2)$  и  $(0,04x_2 + 0,98y_2 + 0,12z_2)$ . Ясно, что когда  $y_2$  больше, чем  $x_2$  и  $z_2$ , второе значение лучше, и оба дают одно  $y_1$ , когда  $0,16x_2 - 0,38y_2 + 0,08z_2 = 0$ .

Последнее соответствует прямой  $CD$  на рис. 6.12, и если состояние рынка представляется точкой  $P$  выше этой прямой, то  $T_{(2)}$  лучше, чем  $T_{(1)}$ . Для получения линий уровня  $y_1 = \text{const}$  при использовании оптимальной стратегии напомним, что  $x_2 + y_2 + z_2 = 1$ , и запишем, что для  $T_{(1)}$

$$0,2x_2 + 0,6y_2 + 0,2z_2 = y_1(x_2 + y_2 + z_2),$$

так что постоянная  $y_1$  определяется выражением

$$(0,2 - y_1)x_2 + (0,6 - y_1)y_2 + (0,2 - y_1)z_2 = 0.$$

Отсюда видно, что  $y_1$  не меньше 0,2 и в точке  $C$  возрастает до 0,32. Линиями уровня в верхней части треугольника являются прямые

$$(0,04 - y_1)x_2 + (0,98 - y_1)y_2 + (0,12 - y_1)z_2 = 0,$$

поэтому значения  $y_1$  возрастают от 0,27 в точке  $D$  до 0,98 в точке  $B$ .

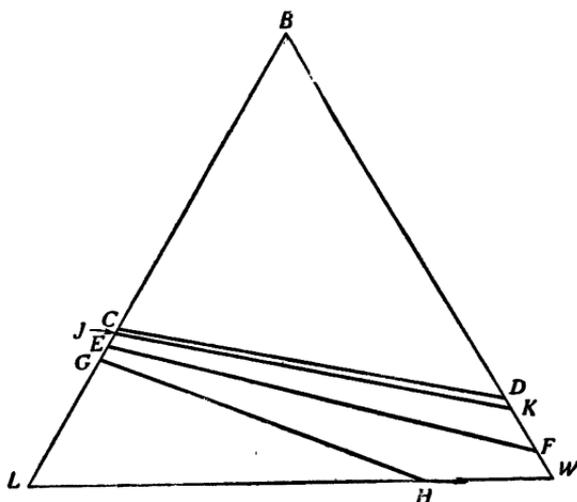


Рис. 6.13.

При построении двухшаговой стратегии нужно определить, в какую из этих частей треугольника с помощью двух возможных преобразований второго этапа переходит состояние  $(x_3, y_3, z_3)$ . Поскольку все соотношения линейны, нужно только рассмотреть преобразование граничной прямой  $CD$ . Оказывается, что при использовании управления  $T_{(1)}$  прямая  $GH$  на рис. 6.13 переходит в  $CD$ , ее уравнением является

$$0,054x_3 - 0,180y_3 - 0,012z_3 = 0.$$

Следовательно, если  $T_2 = T_{(1)}$ , любая точка, расположенная ниже этой прямой, переходит в точку, лежащую ниже прямой  $CD$ . С другой стороны, с помощью преобразования  $T_{(2)}$   $CD$  переходит в прямую  $EF$  и ее уравнение

$$0,138x_3 - 0,380y_3 + 0,025z_3 = 0.$$

Рассмотрим точку в области  $LGH$ ; интенсивность  $T_{(1)}$ , так же как и интенсивность  $T_{(2)}$ , преобразует точку  $(x_3, y_3, z_3)$  в точку  $(x_2, y_2, z_2)$ , расположенную ниже прямой  $CD$ . Поэтому, каким бы ни было  $T_2$ ,  $T_1$  обязательно будет равно  $T_{(1)}$ , и, следовательно, нам нужно, чтобы  $f_1$  было как можно больше. Но линии уровня  $f_1$  являются линиями постоянства  $y_2$ , а мы уже видели, что в этой области  $T_{(1)}$  после процесса преобразования дает наибольшие значения  $y$ . Поэтому для точки  $(x_3, y_3, z_3)$  из области  $LGH$  имеет место  $T_2 = T_{(1)}$ ,  $T_1 = T_{(1)}$ , и соответствующие линии уровня показаны на рисунке.

В точке  $P_3(x_3, y_3, z_3)$  из области  $CHWFE$  нужно вести себя более внимательно, поскольку  $T_2 = T_{(1)}$  дает точку  $P_2$  выше  $CD$ , в то время как  $T_2 = T_{(2)}$  приводит к точке  $P_2$ , лежащей ниже  $CD$ . Итак, при выборе  $T_2 = T_{(1)}$  имеем

$$y_1 = 0,416x_3 + 0,620y_3 + 0,298z_3,$$

а выбор  $T_2 = T_{(2)}$  дает

$$y_1 = 0,216x_3 + 0,592y_3 + 0,248z_3.$$

Обе эти интенсивности приводят к одинаковому значению  $y_1$  вдоль прямой

$$0,200x_3 + 0,028y_3 + 0,050z_3 = 0.$$

Поскольку эта прямая совсем не пересекает треугольника, то это говорит о том, что лучшим управлением во всей области  $GHWFE$  является  $T_2 = T_{(1)}$ , а после него должно следовать  $T_1 = T_{(2)}$ .

Точку  $P_3$  из области  $EFB$  как  $T_{(1)}$ , так и  $T_{(2)}$  переводят в точку  $P_2$  области  $CDB$ , причем для  $T_2 = T_{(1)}$

$$y_1 = 0,228x_3 + 0,620y_3 + 0,292z_3,$$

в то время как  $T_2 = T_{(2)}$  дает

$$y_1 = 0,078x_3 + 0,962y_3 + 0,223z_3.$$

Обе интенсивности вдоль прямой  $JK$  дают

$$0,150x_3 - 0,342y_3 + 0,069z_3 = 0,$$

показанной на рис. 6.13 (где она не слишком отличается от  $CD$ ), приводят к одинаковому значению  $y_1$ . Отсюда следует, что теперь все пространство разделено на три области:

1.  $LGH: f_2 = 0,180x_3 + 0,440y_3 + 0,180z_3: T_2 = T_1 = T_{(1)}$ ;
2.  $GHKJ: f_2 = 0,228x_3 + 0,620y_3 + 0,292z_3: T_2 = T_{(1)}, T_1 = T_{(2)}$ ;
- $JKB: f_2 = 0,078x_3 + 0,962y_3 + 0,223z_3: T_2 = T_1 = T_{(2)}$ .

На рис. 6.14 показана оптимальная двухшаговая стратегия с линиями уровня  $f_2$ . Уже ясно, что в общем случае для циф-

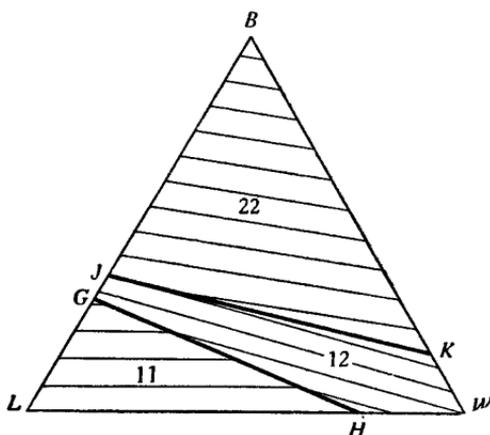


Рис. 6.14.

ровой машины может быть запрограммирован аналогичный метод, причем он приводит к диаграмме, разделенной на  $(N + 1)$  областей, соответствующих оптимальным  $N$ -шаговым стратегиям с

$$T_n = \left\{ \begin{array}{l} T_{(1)} \\ T_{(2)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} N \geq n \geq r + 1 \\ r \geq n \geq 1 \end{array} \right\} r = 0, 1, \dots, N.$$

Общую задачу более аккуратно можно исследовать с помощью матричных методов, но мы ради простоты ограничились средствами элементарной алгебры.

## 6.7. Обзор методов уменьшения размерности

Теперь естественно сопоставить различные способы, которые мы применяли ранее для уменьшения размерности, поскольку значение такого уменьшения трудно переоценить. Основной метод, составляющий содержание гл. 5, заключается

в использовании множителей Лагранжа. Он позволяет задачу с ограничениями (в которой некоторую функцию фазовых переменных, на которую наложены ограничения, приходится рассматривать как дополнительную фазовую переменную) исследовать как задачи без ограничений с меньшим числом фазовых переменных.

Методы настоящей главы основаны на тех преимуществах, которые дает линейность уравнений. В том случае, когда уравнения однородны и линейны, вместо самих переменных можно использовать их отношения. Трудность, которая здесь возникает, состоит в том, что эти отношения становятся очень большими при стремлении к нулю знаменателя. Ее можно преодолеть, если пользоваться как отношениями, так и обратными им величинами. Второе преимущество, которое можно извлечь из линейного вида уравнений, состоит в том, что для линейного разностного уравнения существует решение в замкнутой форме. Оно состоит из двух членов, первый из которых представляет решение уравнения при отсутствии какого-либо управления; оно зависит от начальных фазовых переменных, и иногда его можно принять за единственную переменную, которой достаточно для описания состояния.

Иной способ, предложенный недавно Беллманом, пригоден для класса задач, где можно ввести понятие относительного состояния. Если можно ввести исходное состояние  $\tilde{p}$ , так что разность  $p - \tilde{p}$  между состоянием  $p$  и этим исходным содержит относительно малое число переменных, принимающих большие значения, то это малое количество можно принять за фазовые переменные относительного состояния и представить функциональное уравнение как их функцию. Пока еще не имеется конкретных примеров, где бы использовался этот прием.

Другой способ, не сформулированный еще в окончательной форме и недостаточно проверенный на практике, заключается в применении полиномиальной аппроксимации. Если имеется функция четырех или пяти переменных, то даже для сравнительно крупной сетки, например 10 значений на каждую переменную, вычисление, запоминание и интерполирование составляют большую проблему. Однако для того же числа переменных аппроксимирующий полином степени  $k$  имеет значительно меньше коэффициентов. Например, сетка для пяти переменных потребовала бы  $10^5$  узлов, а аппроксимирующий кубический многочлен имеет только 56 коэффициентов.

Беллман и Дрейфус [1.8] (стр. 322—326) приводят пример полиномиальной аппроксимации для случая одной пере-

менной. Создается впечатление, что применение ортогональных полиномов и гауссовых квадратур явится наилучшим способом использования средств аппроксимации. Например, если аргумент  $x$  функции  $f(x)$  лежит в интервале  $(-1, 1)$ , то можно использовать полиномы Лежандра  $P_n(x)$ . Для большого класса функций

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n P_n(x),$$

где

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Вычисленная таким образом величина  $a_n$  дает наилучшее (в смысле метода наименьших квадратов) значение для приближений с помощью отрезков рядов  $\sum_0^k a_n P_n(x)$ . При вычислении коэффициентов  $a_n$  нежелательно обращаться к частой сетке — той самой, которой мы пытались избежать, и поэтому целесообразно перейти к гауссовым квадратурам. При этом интеграл заменяют взвешенной суммой  $R$  значений подинтегрального выражения, взятых в определенных узлах. Веса  $\mu_r$  и узлы  $x_r$  можно определить так, что для полиномов степени не выше  $(2R - 1)$  формула является точной. Тогда

$$a_n = \sum_{r=1}^R \mu_r P_n(x_r) f(x_r),$$

и при заданном  $k < 2R - 1$  весовые множители  $\mu_r P_n(x_r)$ ,  $n = 1, \dots, k$ , можно вычислить и запомнить для оперативного использования. Практически для получения значений последовательности  $P_n(x_r)$  в узлах  $x_r$  можно пользоваться рекуррентным соотношением для полиномов Лежандра. Обобщение на случай большего числа переменных отнюдь не тривиально, но необходимые основные идеи остаются теми же.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- 6.1. Ряд подобных проблем был рассмотрен ранее. Сведения о них, а также и о большом числе других экономических задач можно найти в книгах Беллмана [1.8]. В частности, следует упомянуть гл. 6 и 7 книги «Динамическое программирование» и гл. 7 из книги «Прикладные задачи динамического программирования».
- 6.4. Элементарная модель динамики национального дохода взята из книги Goldberg S., Introduction to Difference Equations, New York, John Wiley & Sons, 1961, где она заимствована из работы

Samuelson P. A., Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, *Rev. Econ. Statist.*, 21 (1939), 75;

см. также

Samuelson P. A., *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Harvard University Press, 1948.

Karlin S., *Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics*, London, Pergamon Press, and Reading: Addison — Wesley Publishing Co., 1959. (Русский перевод: Карлин С., Математические методы в теории игр, программировании и экономике, «Мир», М., 1964.)

Schwartz J. T., *Lectures on the Mathematical Methods in Analytical Economics*, New York, Gordon and Breach Science Publ., 1961.

Howard R. A., *Dynamic Programming and Markov Processes* New York, John Wiley & Sons, 1960. (Русский перевод: Ховард Р. А., Динамическое программирование и марковские процессы, изд-во «Сов. радио», М., 1964.)

6.5. Изложенное здесь является приложением к разностным уравнениям метода, полученного в статье

Bellman R., Kalaba R., Reduction of Dimensionality, Dynamic Programming and Control Processes, *J. Basic Eng.*, 83 (1961), 82.

6.6. Возникающую при этом матричную задачу см. в книге

Bellman R., *Introduction to Matrix Analysis*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1960, 155. (Русский перевод: Беллман Р., Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969.)

6.7. См. работы

Bellman R., On the Reduction of Dimensionality for Classes of Dynamic Programming Processes. *J. Math. Anal. Appl.*, 3, (1961), 358.

Bellman R., Dreyfus S. E., «Functional Approximation and Dynamic Programming», *Math. Tables and Aids to Computation*, 13 (1959), 247.

См. также гл. 12 книги Беллмана и Дрейфуса «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8].

## Задачи

1. Показать, что схема, исследовавшаяся в § 6.2, для случая  $N\alpha\beta < 1$  принимает вид

Пределы изменения	$\gamma_{N+1}$	$\eta_{N+1}$	$\xi_{N+1}$	$A_N$	$B_N$
0,	1	$\gamma_{N+1}$	0	1	$(N-1)\alpha$
1,	$1+\alpha$	1	0	$1+\alpha$	$(N-2)\alpha$
$1+\alpha,$	$(1+\alpha)^2$	1	0	$(1+\alpha)^2$	$(N-3)\alpha$
$(1+\alpha)^{N-1},$	$\infty$	1	0	$(1+\alpha)^{N-1}$	0

2. Сформулируйте несколько других задач оптимального управления, о которых упоминалось в § 6.4.

3. Предлагается модель национального дохода, в которой из-за влияния налогов коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от государственных расходов.

Сформулируйте для этой модели задачи управления.

4. Придайте более серьезную формулировку примеру § 6.6, показав для этого, что он эквивалентен задаче выбора одной из возможных температур в последовательности реакторов-смесителей, в которых происходят обратимые реакции первого порядка

$$A \rightleftharpoons B \rightleftharpoons C$$

5. Обобщите эту модель на случай, когда температуру можно выбирать в пределах  $T_* \leq T \leq T^*$ , и покажите, что линии уровня  $f(x_2, y_2, z_2)$  огибают кривую, на которой в качестве параметра можно выбрать оптимальную температуру  $T^0$ .

6. Сформулируйте задачу оптимизации, аналогичную рассматриваемой в § 6.6, в том случае, когда численность населения изменяется известным образом.

7. Пусть  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  — две заданные матрицы, и вектор  $x_0$  преобразуется в  $x_N$  так:  $x_N = A_N A_{N-1} \dots A_1 x_0$ , где  $A_n$  — либо  $A^{(1)}$ , либо  $A^{(2)}$ . Предложите алгоритм отыскания максимума  $c' \cdot x$  ( $c$  — заданный вектор).

8. В некоторой модели производственного цикла продукция  $a(t)$  и запас  $b(t)$  в «день»  $t$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} a(t) &= \gamma \cdot a(t-1) - b(t-1) + h, \\ b(t) &= \varepsilon \cdot a(t-1) - b(t-1) - e, \end{aligned}$$

где  $\gamma$  и  $\varepsilon$  — постоянные, а  $h$  и  $e$  связаны с излишками основных запасов и воспроизводством. Предложите целевую функцию, зависящую от значений  $a$  и  $b$  в некоторый заданный конечный момент, и постройте алгоритм ее оптимизации, считая, что переменные управления  $e$  и  $h$  изменяются в определенных пределах.

9. Для фиксированных  $e$  и  $h$  эти уравнения имеют устойчивое состояние (точка Кейнса), в котором величины продукции и ее запасов находятся в равновесии. Если имеется возможность в определенных пределах изменять  $e$  и  $h$  в окрестности значений, соответствующих устойчивому состоянию, то как следовало бы их изменять, чтобы как можно быстрее привести систему в ее точку Кейнса?

10. Лавочник пополняет свои запасы товаров, заказывая вечером определенное их число у оптовых торговцев. Стоимость  $r$  товаров равна  $c(r)$ , но если их заказывать днем, чтобы удовлетворить дополнительный спрос, то их цена доходит до  $p(r)$ . Ежедневный спрос изменяется, но имеет заданное

распределение вероятностей, причем вероятность того, что потребуется  $r$  товаров, равна  $d(r)$ . Если начальный запас равен  $s_{N+1}$ , то положим, что  $f_N(s_{N+1})$  есть минимум математического ожидания общей стоимости удовлетворения спроса за следующие  $N$  дней. Показать, что

$$f_1(s_2) = \text{Min}_{s_1 \geq s_2} \left[ c(s_1 - s_2) + \sum_{s_1}^{\infty} d(r) p(r - s_1) \right]$$

и

$$f_N(s_{N+1}) = \text{Min}_{s_N \geq s_{N+1}} \left[ c(s_N - s_{N+1}) + \sum_{s_N}^{\infty} d(r) p(r - s_N) + f_{N-1}(0) \sum_{s_N}^{\infty} d(r) + \sum_0^{s_N} f_N(s_N - r) d(r) \right].$$

11. Если  $N \rightarrow \infty$ , то для того чтобы предел не был бесконечным, нужно ввести поправочный коэффициент  $a$ ,  $0 < a < 1$ , такой, что товары, оплаченные  $n$  днями позже, стоят только  $a^n$ -ю часть их номинальной стоимости. Найдите рекуррентное уравнение в случае неограниченного времени.

12. Как следует изменить уравнения, если доставка товара, заказанного предыдущим вечером, занимает 36 часов (вместо 12). (Многие задачи такого сорта сформулированы и решены в книге Р. Беллмана «Динамическое программирование» [1.8], гл. 5.)

## ГЛАВА 7

### *Несколько задач из теории связи и теории информации*

В этой главе мы рассмотрим одну-две задачи, связанные с теорией передачи сообщений. Разумеется, они предназначены для иллюстрации широкой применимости методов динамического программирования, а не для глубокого изучения проблем теории связи.

#### **7.1. Игрок и испорченная телефонная линия**

Игрок получает предварительную информацию об исходе независимых спортивных состязаний, и на основе этого он делает ставки. Единственным неприятным моментом в этой счастливой цепи событий является то, что линия связи неисправна, так что имеется только вероятность  $p (< 1)$  того, что он узнает правильный исход. Шум в линии связи вносит некоторые искажения, так что имеется вероятность  $q = 1 - p$  того, что услышанное игроком сообщение будет неверным. [В иной интерпретации, можно также сказать, что игрок слышит правильный результат с вероятностью  $p'$ , а в остальных случаях шум искажает сообщение и игрок должен принять решение. Если априорная информация отсутствует, то вероятность принятия правильного решения будет  $\frac{1}{2}(1 - p')$ , так что общая вероятность того, что выбор правильный, есть  $p = \frac{1}{2}(1 + p')$ , а вероятность того что он ошибочен, есть  $q = \frac{1}{2}(1 - p')$ .] Если игрок начинает с капиталом  $x$ , то как ему следует делать ставки, чтобы после  $N$  игр его капитал был максимальным? Ясно, что представляет интерес только вариант с  $p > \frac{1}{2}$ , ибо в ином случае игроку нужно ставить на команду, которая, согласно сообщению, проигрывает. Если речь идет об одном состязании и игрок делает ставку  $y$ , то ожидаемый им доход равен

$$p(x + y) + q(x - y) = x + (p - q)y.$$

Если  $p > q$ , то средний доход максимален, если ставить на весь имеющийся капитал, и величина этого максимума есть

$$f_1(x) = 2px,$$

причем имеется вероятность  $(1 - p)$  потерять все состояние. В случае двух состязаний, если на первом делается ставка  $y$ , то имеется вероятность  $p$  того, что капитал увеличится до  $(x + y)$ , и тогда на последнем состязании он может увеличиться до  $2p(x + y)$ . Но существует также вероятность  $q$  уменьшения капитала до величины  $(x - y)$ , а конечного математического ожидания до  $2p(x - y)$ . Таким образом,  $y$  следует выбрать так, чтобы максимизировать

$$p \cdot 2p \cdot (x + y) + q \cdot 2p(x - y) = 2p\{x + (p - q)y\},$$

и снова оптимальная стратегия заключается в том, чтобы ставить на весь капитал. Итак,

$$f_2(x) = (2p)^2 x,$$

при этом вероятность разорения игрока равна  $(1 - p^2)$ . В общем случае для  $N$  состязаний

$$f_N(x) = (2p)^N x,$$

а вероятность разорения равна  $(1 - p^N)$ ; поскольку  $p < 1$ , то  $p^N$  быстро уменьшается, и вероятность разорения быстро становится достоверностью. В качестве мерила ценности канала связи такой игрок не очень подходит, поскольку он либо выигрывает слишком много, либо быстро разоряется. Лучше для оценки качества канала выбрать кого-либо, более осторожно делающего ставки и всегда оставляющего некоторый капитал. Таким будет игрок, который стремится максимизировать логарифм своего капитала. После того как ставка на сумму  $y$  сделана, математическое ожидание логарифма капитала равно

$$p \log(x + y) + q \log(x - y), \quad (7.1)$$

и максимум этого выражения достигается, когда

$$\frac{p}{x + y} = \frac{q}{x - y}$$

или

$$y = (p - q)x. \quad (7.2)$$

При этом  $x + y = 2px$  и  $x - y = 2qx$ , и математическое ожидание дохода есть

$$f_1(x) = \log x + (p \log p + q \log q + \log 2). \quad (7.3)$$

Следует отметить, что логарифм капитала возрастает на постоянную, зависящую только от  $p$ , т. е. сам капитал умножается на постоянный множитель, больший 1, который стремится к 2, когда  $p$  приближается к 1.

Чтобы сформулировать  $N$ -шаговую стратегию, определим  $f_N(x)$  как максимум математического ожидания логарифма капитала после  $N$  операций, если начинают с капитала  $x$ . Как обычно, будет удобно пронумеровать ставки от конца к началу, так что для  $N$ -шагового процесса первым будет шаг  $N$ , а последним — шаг 1. Тогда по принципу оптимальности, если на первом шаге делается ставка на сумму  $y$ , то за ней должна следовать оптимальная  $(N-1)$ -шаговая стратегия. Если первая попытка является успешной, то средний доход в конце будет равен  $f_{N-1}(x+y)$ , а если неудачной, то  $f_{N-1}(x-y)$ . Поэтому получаем, что

$$f_N(x) = \underset{y}{\text{Max}} \{pf_{N-1}(x+y) + qf_{N-1}(x-y)\}. \quad (7.4)$$

Из выражения для  $f_1$  следует, что

$$f_2(x) = \underset{y}{\text{Max}} \{p \log(x+y) + q \log(x-y) + p \log p + q \log q + \log 2\}$$

и что переменная часть этого выражения в точности та же, что и в уравнении (7.1), и тогда она максимизируется для получения  $f_1(x)$ . Отсюда следует, что максимум снова достигается при  $y = (p-q)x$  и

$$f_2(x) = \log x + 2 \{p \log p + q \log q + \log 2\}.$$

Это означает, что в общем случае

$$f_N(x) = \log x + N \{p \log p + q \log q + \log 2\}. \quad (7.5)$$

Справедливость последнего равенства доказывается подстановкой в уравнение (7.4). Оставляем это читателю в качестве упражнения.

Величина  $\{p \log p + q \log q + \log 2\}$  или  $\log 2p^p q^q$  является в некотором смысле мерой полезности канала связи, так как  $2p^p q^q$  есть наибольший возможный множитель, на который на каждом шаге игрок может умножить свой капитал. В теории информации величина  $-(p \log p + q \log q)$  известна под названием энтропии сообщения, таким образом наше выражение с точностью до константы есть отрицательная энтропия передаваемой информации.

## 7.2. Неустойчивый канал связи

Мы предполагали, что  $p$  была некоторой заданной вероятностью и не изменялась от одного соревнования к другому. В противоположность этому неустойчивым каналом называется такой, для которого от соревнования к соревнованию вероятность  $p$  изменяется. Рассмотрим задачу максимизации

логарифма капитала за  $N$  шагов, когда  $p$  принимает значения  $p_N, p_{N-1}, \dots, p_1$ ;  $p_1$  снова есть вероятность передачи правильного сообщения о последнем из  $N$  соревнований. Тогда

$$f_1(x) = \underset{y}{\text{Max}} \{p_1 \log(x+y) + q_1 \log(x-y)\}$$

и, как прежде,  $y = (p_1 - q_1)x$  и

$$f_1(x) = \log x + p_1 \log p_1 + q_1 \log q_1 + \log 2.$$

При вычислении  $f_2(x)$  нужно вспомнить, что для первого из двух соревнований вероятность правильного сообщения равна  $p_2$ , и если игрок выигрывает, то максимальный капитал будет равен  $f_1(x+y)$ . Аналогично, если игрок проигрывает, а вероятность этого равна  $q_2$ , то можно ожидать, что его капитал станет равным  $f_1(x-y)$ . Итак,

$$f_2(x) = \underset{y}{\text{Max}} \{p_2 f_1(x+y) + q_2 f_1(x-y)\} = \\ = \text{Max} \{p_2 \log(x+y) + q_2 \log(x-y) + I_1\},$$

где

$$I_n = p_n \log p_n + q_n \log q_n + \log 2.$$

Снова только первые два члена являются переменными и, как мы уже видели, их максимум равен  $\log x + I_2$ . Таким образом,

$$f_2(x) = \log x + I_2 + I_1.$$

В общем случае принцип оптимальности дает

$$f_N(x) = \underset{y}{\text{Max}} \{p_N f_{N-1}(x+y) + q_N f_{N-1}(x-y)\}.$$

Решение этого уравнения можно очень просто получить по индукции, и оно равно

$$f_N(x) = \log x + \sum_1^N I_n.$$

Мы рассмотрели только первое из нескольких обобщений, которые можно здесь сделать, им мы и ограничимся. Возможные обобщения обсуждаются в гл. 17 книги Беллмана «Процессы регулирования с адаптацией» [1.8].

### 7.3. Передача сообщений в сетях

Обратимся к классу задач об оптимальном выборе пути по сетям. Здесь мы рассмотрим сеть линий связи между  $N$  точками или узлами, показанную, например, на рис. 7.1. Будет обнаружено, что цепной характер обычной задачи динамиче-

ского программирования здесь отсутствует, поэтому не будет удивительным отсутствие рекуррентного способа решения уравнений. Связь в сети определяется заданием времени  $t_{ij}$ , необходимого для передачи сообщения от узла  $i$  к узлу  $j$ . Если связь между узлами  $i$  и  $j$  отсутствует, то можно положить  $t_{ij} = \infty$ . Задача состоит в выборе последовательности узлов между узлами 1 и  $N$ , которая обеспечит минимум времени прохождения сообщения. Эту же задачу можно сформулировать не для времени, а для расстояний.

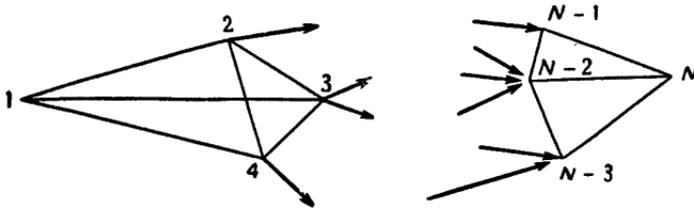


Рис. 7.1.

Пусть  $T_i$  есть определенное с помощью соответствующей последовательности узлов  $i, j, k, \dots, N$  минимальное общее время перехода от узла  $i$  к узлу  $N$ . Тогда какой бы выбор ни был сделан для узла  $j$ , следующего за  $i$ , за ним должен следовать оптимальный путь от  $j$  до  $N$ . Следовательно,

$$T_i = \text{Min}_{j \neq i} \{t_{ij} + T_j\}, \quad (7.6)$$

и из постановки задачи вытекает, что

$$T_N = 0. \quad (7.7)$$

Здесь, однако, не имеется той последовательности уравнений, которую можно рекуррентно решать, так как для вычисления  $T_i$  слева нужно знать все величины  $T_j$  в правой части уравнения.

Вместо этого мы используем способ последовательных аппроксимаций, который фактически сводит задачу к последовательному процессу. Пусть

$$f_k(i) = \text{минимум времени перехода от } i \text{ к } N, \text{ если при этом} \quad (7.8)$$

проходится менее чем  $k$  промежуточных узлов.

Тогда для  $k = 1$  от  $i$  к  $N$  переходим сразу и

$$f_1(i) = t_{iN}. \quad (7.9)$$

Согласно принципу оптимальности, получаем

$$f_k(i) = \text{Min} \{t_{ij} + f_{k-1}(j)\}, \quad (7.10)$$

где минимизация проводится соответствующим выбором  $j$ . При этом возможен случай  $j = i$ , ибо оптимальный путь из  $i$  в  $N$  с числом промежуточных узлов, меньшим  $k$ , в действительности может быть таким же, каков оптимальный путь с числом узлов, меньшим  $(k - 1)$ . Когда это происходит для  $i = 1$  в первый раз, мы получаем решение задачи.

Можно по-иному взглянуть на это решение, если рассматривать его как итерационную процедуру решения уравнения (7.6). Если  $f_k(i)$  есть  $k$ -я итерация, определяемая уравнениями (7.9) или (7.10), то  $f_k(i)$  является убывающей последовательностью, стремящейся к нижней границе  $T_i$ , которая фактически достигается за конечное число итераций. Ряд других методов решения предложен в работе Калабы [7.3], приведенной в списке литературы в конце главы.

#### 7.4. Стратегии, следующие за оптимальной

Иногда бывает важным определить наилучшую замену для оптимальной стратегии, имея в виду, что если нарушится какое-либо соединение из оптимального пути, то связь можно сохранить только переключением на запасной вариант, и этот вариант должен быть наилучшим среди оставшихся (назовем его следующим за оптимальным).

Пусть  $\text{Min}_1(\ )$  означает наименьшее значение величины в скобках, и  $\text{Min}_2(\ )$  — значение, следующее за наименьшим.

Пусть  $S_i$  есть время перехода от узла  $i$  к узлу  $N$ , следующее за наименьшим. Оно может достигаться либо на пути до наиболее подходящего узла  $j$  и затем пути, следующего за оптимальным, либо на пути до узла, следующего за подходящим, и оптимального для него пути. Та из этих двух возможностей, которая дает меньшее время, и является следующим за оптимальным путем. Записывая это в виде функционального уравнения, получаем

$$S_i = \text{Min} \{ \text{Min}_1 (t_{ij} + S_j), \text{Min}_2 (t_{ij} + T_j) \}. \quad (7.11)$$

Решение этих уравнений зависит от того, известны ли оптимальные значения времени  $T_j$ , и мы снова приходим к системе одновременно решаемых и нерекуррентных уравнений.

Как и ранее, можно считать  $g_k(i)$  путем, следующим за кратчайшим, с числом промежуточных узлов, меньшим  $k$ . Тогда уравнение

$$g_k(i) = \text{Min} \{ \text{Min}_1 [t_{ij} + g_{k-1}(j)], \text{Min}_2 [t_{ij} + f_{k-1}(j)] \} \quad (7.12)$$

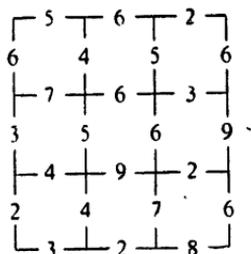
дает рекуррентный способ получения решения.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- 7.1. Обширная библиография имеется в книге Р. Беллмана «Процессы управления с адаптацией» [1.8] в гл. 17.
- 7.3. Хороший обзор задач для сетей дан в работе Kalaba R., On Some Communication Network Problems, *Proc. Symp. Appl. Math.* (Amer. Math Soc.) **10**, (1960).  
См. также библиографию к гл. 6 книги Р. Беллмана и С. Дрейфуса «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8]. Приложение сетевой задачи к управлению имеется в статье Roberts S. M., Mahoney J. D., Dynamic programming Control of a Batch Reactor., *Chem. Eng. Prog.*, **58** (1962), 1, Symp. Ser. **37**.
- 7.4. Для более глубокого изучения этого вопроса см. статью Bellman R., Kalaba R., On  $k^{\text{th}}$  Best Policies, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **8** (1960), 582.

## Задачи

1. Используйте алгоритм § 7.3 для отыскания кратчайшего пути из левого нижнего в правый верхний угол следующей сети:



2. Найти следующий кратчайший путь.

3. Пусть  $a_{ij}$  есть положительное число и  $ij$ -й элемент матрицы порядка  $N \times N$ . Рассмотрим сумму произведений  $a_{1i}a_{2j} \dots a_{Nk}$ , где  $i, j, \dots, k$  — перестановки чисел  $1, 2, \dots, N$ . Покажите, как найти наибольший член этой суммы. Указание: определите  $f_m(n_1, \dots, n_{N-m})$  как наибольшее произведение  $a_{1i}a_{2j} \dots a_{mk}$ , где ни одно из чисел  $i, j, \dots, k$  не совпадает с числами  $n_1, \dots, n_{N-m}$ .

4. На первый взгляд в алгоритме предыдущей задачи нужно начинать с функции  $N-1$  переменных. Покажите, что ее можно рассматривать как  $N$ -значную функцию одной переменной. Сколько значений имеет функция, соответствующая  $f_m$ ?

5. Измените этот алгоритм так, чтобы можно было упорядочить члены упоминавшейся там суммы по убыванию.

## ГЛАВА 8

### Разные задачи

В этой главе собраны вместе несколько задач из довольно разных областей, и мы их рассмотрим менее подробно, чем предыдущие. Читатель должен быть уже хорошо знаком с принципом оптимальности и с тем, как им пользоваться; данный обзор предназначен главным образом для того, чтобы показать разнообразие проблем, которые могут быть сформулированы на языке динамического программирования.

#### 8.1. Аппроксимация кривой отрезками прямых

При вычислении на аналоговых машинах обычная функция аппроксимируется с помощью кусочно-линейной, и интересно знать, как нужно выбрать последнюю, чтобы получить в каком-то смысле наилучшее приближение. Мы пользуемся наиболее распространенным критерием, при котором минимизируется интеграл квадрата отклонения от кривой.

Пусть кривая задана уравнением  $y = f(x)$ , и мы ограничиваемся областью  $a \leq x \leq b$ . Если бы аппроксимировать кривую с помощью только одного сегмента  $y = mx + c$ , то отклонение прямой от кривой равнялось бы  $f(x) - mx - c$ . Поэтому наклон прямой и ее точку пересечения с осью абсцисс нужно выбрать так, чтобы минимизировать

$$F(m, c) = \int_a^b (f(x) - mx - c)^2 dx. \quad (8.1)$$

Поскольку интеграл является непрерывной функцией  $m$  и  $c$  и на эти переменные не наложено ограничений, то минимум найти легко, именно он имеет место тогда, когда частные производные равны нулю

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial m} = \int_a^b x(f(x) - mx - c) dx = 0, \quad (8.2)$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial c} = \int_a^b (f(x) - mx - c) dx = 0. \quad (8.3)$$

Введем обозначения:

$$I_0(a, b) = \int_a^b f(x) dx; \quad I_1(a, b) = \int_a^b xf(x) dx; \quad (8.4)$$

$$I_2(a, b) = \int_a^b [f(x)]^2 dx;$$

$$J_1 = b - a, \quad J_2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \quad J_3 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3), \quad (8.5)$$

$$J_4 = J_1 J_3 - J_2^2 = \frac{1}{12}(b - a)^4.$$

Тогда уравнения (8.2) и (8.3) запишутся в виде

$$mJ_3 + cJ_2 = I_1, \quad (8.6)$$

$$mJ_2 + cJ_1 = I_0 \quad (8.7)$$

и их решениями будут

$$m = (J_1 I_1 - J_2 I_0) / J_4, \quad (8.8)$$

$$c = (J_3 I_0 - J_2 I_1) / J_4. \quad (8.9)$$

Найденный минимум функции  $F(m, c)$  равен

$$L_1(a, b) = I_2 + m^2 J_3 + c^2 J_1 + 2mcJ_2 - 2mI_1 - 2cI_0 =$$

$$= I_2 - (I_1^2 J_1 - 2I_0 I_1 J_2 + I_0^2 J_3) / J_4. \quad (8.10)$$

Если аппроксимировать кривую с помощью нескольких отрезков прямых, то мы должны определить координаты концов этих отрезков и их наклон. Пусть  $x_n, n = 0, 1, \dots, N$  — точки разбиения, причем  $a = x_{N+1} \leq x_N \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 = b$ . Тогда мы хотим найти

$$L_N(a, b) = L_N(x_{N+1}, x_1) = \text{Min} \sum_1^N \int_{x_{n+1}}^{x_n} [f(x) - m_n x - c_n]^2 dx, \quad (8.11)$$

причем минимум ищется соответствующим выбором  $3N - 1$  величин  $m_n, c_n, n = 1, \dots, N, x_n, n = 2, \dots, N$ .

По принципу оптимальности

$$L_N(x_{N+1}, x_1) = \text{Min} \{L_1(x_{N+1}, x_N) + L_{N-1}(x_N, x_1)\}, \quad (8.12)$$

где минимизация производится только выбором  $x_N$ . Величины  $m_n$  и  $c_n$  определяются из уравнений (8.8) и (8.9), причем интеграл вычисляется в пределах от  $x_{n+1}$  до  $x_n$  вместо  $a$  и  $b$ .

При этом обнаруживается интересное свойство оптимальной последовательности отрезков. Если считать, что точка  $x_1$  фиксирована, то

$$\frac{dL_{N-1}}{dx_N} = \frac{\partial L_{N-1}}{\partial x_N} + \sum_1^{N-1} \frac{\partial L_{N-1}}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_N} + \sum_1^{N-1} \frac{\partial L_{N-1}}{\partial m_n} \frac{\partial m_n}{\partial x_N} + \sum_1^{N-1} \frac{\partial L_{N-1}}{\partial c_n} \frac{\partial c_n}{\partial x_N},$$

и поскольку  $x_n$ ,  $m_n$  и  $c_n$  были выбраны так, чтобы соответствующие производные  $L_{N-1}$  обращались в нуль, то все слагае-

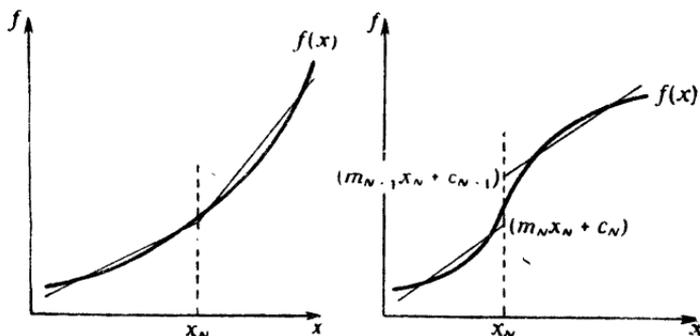


Рис. 8.1.

мые за исключением первого равны нулю. По этой же причине  $dL_1/dx_N = \partial L_1/\partial x_N$  при фиксированном  $x_{N+1}$ , так что при дифференцировании выражения в правой части уравнения (8.12) имеем

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_N} + \frac{\partial L_{N-1}}{\partial x_N} = [f(x_N) - m_N x_N - c_N]^2 - [f(x_N) - m_{N-1} x_N - c_{N-1}]^2 = 0.$$

Отсюда либо

$$m_N x_N + c_N = m_{N-1} x_N + c_{N-1}, \quad (8.13)$$

либо

$$f(x_N) = \frac{1}{2} \{m_N x_N + c_N + m_{N-1} x_N + c_{N-1}\}. \quad (8.14)$$

Первое уравнение означает, что в точке разбиения ординаты прямых одинаковы, из второго следует, что в том случае, когда ломаная из отрезков прямых не непрерывна, концы этих отрезков находятся на одинаковых расстояниях от значения  $f(x)$  в точке разрыва. Легко обнаружить, напри-

мер, с помощью рис. 8.1, что второй случай, как правило, имеет место вблизи точки перегиба. Для удобства результаты вычислений можно представить в виде нескольких таблиц. Можно начать с  $L_1(a, b)$  и положить

$$y_*(a, b) = ta + c,$$

и

$$y^*(a, b) = tb + c,$$

где  $t$  и  $c$  вычислены по формулам (8.8) и (8.9).

Здесь

$$y_*(a, b) = 6 \left\{ \frac{1}{3} (a + 2b) I_0 - I_1 \right\} / (b - a)^2, \quad (8.15)$$

$$y^*(a, b) = 6 \left\{ I_1 - \frac{1}{3} (2a + b) I_0 \right\} / (b - a)^2. \quad (8.16)$$

Для приближения двумя отрезками нужно выбрать точку разбиения  $x_1(a, b)$ , в которой либо

$$y^*(a, x_1) = y_*(x_1, b),$$

либо

$$\frac{1}{2} \{y^*(a, x_1) + y_*(x_1, b)\} = f(x_1).$$

Затем можно составить таблицу для  $L_2(a, b)$ . Для аппроксимации тремя отрезками достаточно иметь таблицу значений  $x_2(a, b)$ , в которой

$$y^*(a, x_2) = y_*[x_2, x_1(x_2, b)]$$

или

$$\frac{1}{2} \{y^*(a, x_2) + y_*[x_2, x_1(x_2, b)]\} = f(x_2).$$

С помощью таблиц для  $L_n(a, b)$ ,  $x_n(a, b)$ ,  $y_*(a, b)$ ,  $y^*(a, b)$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $N$ -кусочная аппроксимация может быть определена следующим образом. Задаются точки  $a, b$  и выбирается число  $N$  так, чтобы  $L_N(a, b)$  было достаточно малым. Для пары  $(a, b)$  в таблице для  $x_{N-1}(a, b)$  отыскивается значение  $x_{N-1}$  и с помощью ординат граничных точек  $y_*(a, x_{N-1})$  и  $y^*(a, x_{N-1})$  задается отрезок прямой. Для пары  $(x_{N-1}, b)$  по таблице  $x_{N-1}$  находится следующая точка разбиения, и ординатами концов отрезка будут  $y_*(x_{N-1}, x_{N-2})$ ,  $y^*(x_{N-1}, x_{N-2})$ . Сразу же проверяется, что

$$y_*(x_{N-1}, x_{N-2}) = y^*(a, x_{N-1})$$

или

$$f(x_{N-1}) = \frac{1}{2} \{y^*(a, x_{N-1}) + y_*(x_{N-1}, x_{N-2})\}.$$

Таким образом мы переходим от отрезка к отрезку. В конце проверяется, что  $L_N(a, b) = \sum_1^N L_1(x_{n+1}, x_n)$ .

Аналогичный метод используется и тогда, когда приближаемая функция задается совокупностью табличных значений. Однако в этом случае интегралы вычисляются только приближенно. Точно таким же образом можно рассмотреть другие задачи аппроксимации, например когда минимизируется максимальное отклонение кривой от прямой или когда кривая на каждом участке приближается полиномами.

## 8.2. Некоторые вопросы теории надежности

С помощью динамического программирования можно решать многие вопросы теории надежности сложных систем. Так, некоторые примеры из химической технологии были рассмотрены Раддом, Беллман нашел интерпретацию своих примеров в электронике, а задача конструирования Калабы соответствует проблемам космического века. Чтобы расширить круг затронутых проблем, рассмотрим пример Калабы о проектировании конструкции минимального веса с заданной надежностью. Конструкция состоит из  $N$  элементов, и для  $n$ -го из них может быть задана площадь поперечного сечения  $A_n$ . Вероятность того, что этот элемент *не* разрушится, равна  $p_n(A_n)$ , причем вид функции вероятностей зависит от его формы и места в конструкции (при некоторых допущениях формулы для этих вероятностей приводились Хилтоном и Фейдженом; см. библиографию в конце главы). Если поломка любого элемента приводит к разрушению всей конструкции и эти поломки не зависят одна от другой, то вероятность того, что вся конструкция *не* разрушится, равна

$$P_N = \prod_1^N p_n(A_n). \quad (8.17)$$

Если  $\omega_n$  есть отнесенный к площади вес  $n$ -го элемента, так что вес последнего равен  $\omega_n A_n$ , то желательно минимизировать общий вес  $\sum_1^N \omega_n A_n$  и не дать вероятности  $P_N$  опуститься ниже определенного значения.

Мы сможем это сделать, если будем добавлять элементы по одному и определим

$$f_N(p) = \text{Min} \sum_1^N \omega_n A_n, \quad (8.18)$$

где  $P_N \geq p$ . Для одного элемента  $N = 1$

$$f_1(p) = w_1 A_1, \quad (8.19)$$

где  $A_1$  определяется из уравнения

$$P_1 = p_1(A_1) = p. \quad (8.20)$$

Ее можно найти, если  $p_n(A_n)$  — монотонно возрастающая функция  $A_n$ , что естественно предположить. Для комбинации из двух элементов мы можем выбрать любое значение для  $A_2$  и вычислить вероятность  $p_2(A_2)$  того, что этот элемент не сломаётся. При этом выборе  $A_2$  вероятность того, что первый элемент не разрушится, равна  $p_1 = p/p_2$ , и потому минимальный вес элемента равен  $f_1(p/p_2)$ . Таким образом,

$$f_2(p) = \underset{A_2}{\text{Min}} \{w_2 A_2 + f_1[p/p_2(A_2)]\}. \quad (8.21)$$

В общем случае

$$f_N(p) = \underset{A_N}{\text{Min}} \{w_N A_N + f_{N-1}[p/p_N(A_N)]\}. \quad (8.22)$$

Если пытаться максимизировать надежность при определенных ограничениях, например по весу и стоимости, то приходим к несколько иной форме задачи. Предположим, что  $W_{N+1}$  есть общий полезный вес  $N$  элементов конструкции, так что если  $A_N$  выбрана, то  $W_N$ , остающийся полезный вес, равен  $W_{N+1} - w_N A_N$ . Таким же образом, если  $c_n(A_n)$  есть стоимость  $n$ -го элемента, а  $C_{N+1}$  — общая сумма затрат на  $N$  элементов, то  $C_N = C_{N+1} - c_N(A_N)$ .

Задачу можно сформулировать в обычной форме следующим образом:

1. Фазовые переменные:  $W_n, C_n$ .
2. Управление:  $A_n$ .
3. Уравнение процесса:  $W_n = W_{n+1} - w_n A_n, C_n = C_{n+1} - c_n(A_n)$ .
4. Ограничения:  $A_n \geq 0, 0 \leq W_n \leq W, 0 \leq C_n \leq C$ .
5. Целевая функция: максимизировать  $\prod_1^N p_n(A_n)$ .
6. Параметры:  $w_n$  и параметры в функциональной зависимости  $c_n(A_n)$ .

Тогда, если

$$f_N(W_{N+1}, C_{N+1}) = \text{Max} \prod_1^N p_n(A_n), \quad (8.23)$$

то по принципу оптимальности

$$f_N(W_{N+1}, C_{N+1}) = \underset{A_N}{\text{Max}} p_N(A_N) f_{N-1}(W_N, C_N). \quad (8.24)$$

Чтобы не рассматривать функций двух переменных, можно ввести множитель Лагранжа и пользоваться только одной фазовой переменной, например  $C_n$ . При этом, если

$$g_N(C_{N+1}) = \text{Max} \prod_1^N [p_n(A_n) \exp(-\lambda \omega_n A_n)], \quad (8.25)$$

то

$$g_N(C_{N+1}) = \text{Max} \{p_N(A_N) e^{-\lambda \omega_N A_N} g_{N-1}(C_N)\}. \quad (8.26)$$

Беллман и Радд рассмотрели задачу оптимального дублирования компонентов или операций на каждом этапе, в которой минимизируется вероятность разрушения при определенных ограничениях по весу и стоимости.

### 8.3. Процессы размножения и гибели

Недавно были созданы модели роста бактерий и модели конкурентной борьбы, и исследование этих моделей обещает быть интересным. Они имеют кое-что общее с ранее упомянутой задачей на узкое место, но решение их представляет гораздо большие трудности. Об одной из них будет вкратце рассказано, как о примере, где время (т. е. число остающихся этапов) может и не быть наиболее подходящей переменной.

Два вида организмов  $Y$  и  $Z$  для сохранения жизнеспособности нуждаются в питательной среде  $X$ . Вид  $Y$  не способен к воспроизводству, а  $Z$  обладает такой способностью, кроме того,  $Y$  переходит в  $Z$ , и этот процесс описывается уравнением первого порядка. Кроме самовоспроизводства,  $Z$  может расходоваться на образование продукта  $P$ , причем этот продукт усиливает процесс воспроизводства. Если маленькая буква соответствует концентрации или количеству организмов вида, обозначенного большой буквой, и индекс  $n$  указывает значения любой величины в конце временного интервала  $n\Delta t, (n-1)\Delta t$  (причем время, как обычно, отсчитывается от конца процесса), то уравнения таковы:

1) самопроизвольный переход  $Y$  в  $Z$ :

$$\Delta y = -k_1 y_n \Delta t, \quad (8.27)$$

2) образование  $Z$  из  $Y$ , воспроизводство части  $1 - \lambda_n$  организмов  $Z$  и использование оставшейся части  $\lambda_n$  на образование  $P$ :

$$\Delta z = k_1 y_n \Delta t + (1 - \lambda_n) m_n z_n \Delta t - \lambda_n k_2 z_n \Delta t, \quad (8.28)$$

3) образование  $P$  и его использование для воздействия на константу воспроизводства  $m_n$ :

$$\Delta p = \lambda_n k_2 z_n \Delta t - k_3 p_n \Delta t, \quad (8.29)$$

4) влияние на константу воспроизводства:

$$\Delta m = k_2 p_n \Delta t, \quad (8.30)$$

5) использование питательной среды  $X$  для поддержания жизни  $Y$  и  $Z$ :

$$\Delta x = - (k_4 y_n + k_5 z_n) \Delta t. \quad (8.31)$$

Здесь  $k_1, \dots, k_5$  — совокупность постоянных, а  $\Delta$  означает изменение за некоторый промежуток времени, например  $\Delta x = x_{n-1} - x_n$ .

Цель заключается в том, чтобы установить, как следует выбирать  $\lambda_n$ , чтобы максимизировать конечную концентрацию  $Z$ . Ясно, что эти величины тесно связаны, ибо если  $\lambda$  мало, то константа воспроизводства  $m$  остается малой, но если  $\lambda$  очень велико, то тогда слишком большое усилие направляется на убыстрение процесса воспроизводства и слишком малое количество  $Z$  остается на само воспроизводство. Однако здесь нужно заметить, что концом процесса следует считать истощение запасов питательной среды, поскольку маловероятно, чтобы биологический процесс имел какую-либо иную заложенную в нем причину остановки. Поэтому более естественно использовать интервалы концентрации питательной среды, а не времени.

Пусть  $r$  указывает на значение соответствующей переменной, когда остается  $r - 1$  единиц среды  $X$ . Перепишем уравнения, поделив каждое из них на последнее и положив  $\Delta x = -1$ . Тогда

$$y_{r-1} = y_r - k_1 y_r / (k_4 y_r + k_5 z_r), \quad (8.32)$$

$$z_{r-1} = z_r + (k_1 y_r - (1 - \lambda_r) m_r + \lambda_r k_2 z_r) / (k_4 y_r + k_5 z_r), \quad (8.33)$$

$$p_{r-1} = p_r + (\lambda_r k_2 z_r - k_3 p_r) / (k_4 y_r + k_5 z_r), \quad (8.34)$$

$$m_{r-1} = m_r + k_3 p_r / (k_4 y_r + k_5 z_r). \quad (8.35)$$

Теперь задачу можно сформулировать в следующем виде:

1. Фазовые переменные:  $y_r, z_r, p_r, m_r$ .
2. Управление:  $\lambda_r$ .
3. Уравнение процесса: уравнения (8.32) — (8.35).
4. Ограничения:  $0 \leq \lambda_r \leq 1$ ,  $y_r, z_r, p_r, m_r$ , все  $\geq 0$ .
5. Целевая функция: максимизировать  $z_1$ .
6. Параметры: любые четыре независимых параметра из  $k_1, \dots, k_5$ .

Если

$$f_R(y_{R+1}, z_{R+1}, p_{R+1}, m_{R+1}) = \text{Max}_{\{\lambda_r\}} [z_1], \quad (8.36)$$

то

$$f_R(y_{R+1}, z_{R+1}, p_{R+1}, m_{R+1}) = \text{Max}_{\lambda_R} [f_{R-1}(y_R, z_R, p_R, m_R)], \quad (8.37)$$

где во втором случае нужно выбрать только  $\lambda_R$ . Все количество питательных веществ в начале процесса равно  $R$  единицам, и в связи с истощением запасов процесс оканчивается за конечное время. Ясно, что непосредственно решение этой задачи затруднительно, так как размерность слишком велика, и следует искать иные способы, использующие специфику задачи.

Стоит упомянуть задачу регулирования численности популяции более простого вида. Ее рассматривали Беллман и Калаба. Популяция существ  $X$  охотиться за популяцией  $Y$ , и обе они нежелательны. Химические средства эффективны против  $X$ , но не против  $Y$ , и перед нами встает проблема достаточно осторожного использования химикатов с тем, чтобы при уменьшении числа хищников популяция  $Y$  не вышла из-под контроля. Если  $x_{n+1}$  есть число существ  $X$  за  $n$  интервалов времени до конца обработки (химикатами) и  $y_{n+1}$  — число представителей популяции  $Y$ , то процесс роста и пожирания можно представить как

$$x_n - x_{n+1} = \alpha x_{n+1}, \quad (8.38)$$

$$y_n - y_{n+1} = -\beta x_{n+1} + \gamma y_{n+1}. \quad (8.39)$$

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  являются функциями дозы  $z_n$  химиката. В частности, для достаточно больших  $z$   $\alpha(z)$  становится отрицательной и  $\beta(z)$  уменьшается в такой степени, что влияние яда может привести к уменьшению процесса пожирания. Если на  $Y$  яд действительно не оказывает воздействия, то  $\gamma$  должна быть постоянной, впрочем для простоты ее можно также считать функцией  $z_n$ . В качестве целевой функции можно взять линейную комбинацию двух популяций  $ax_1 + by_1$ , причем весовые коэффициенты  $a$  и  $b$  являются мерой нежелательности  $X$  и  $Y$ . В этом случае имеем:

1. Фазовые переменные:  $x_n, y_n$ .
2. Управление:  $z_n$ .
3. Уравнение процесса:  $x_n = \{1 + \alpha(z_n)\}x_{n+1};$   
 $y_n = -\beta(z_n)x_{n+1} + \{1 + \gamma(z_n)\}y_{n+1}.$
4. Ограничения: положительность  $x_n, y_n, z_n$ .
5. Целевая функция: минимизировать  $[ax_1 + by_1]$ .

6. Параметры:  $a$ ,  $b$ , а также те, которые встречаются в функциональных зависимостях  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .

Если

$$f_N(x_{N+1}, y_{N+1}) = \text{Min}(ax_1 + by_1) \quad (8.40)$$

достигается оптимальным выбором  $z_N, z_{N-1}, \dots, z_1$ , то

$$f_N(x_{N+1}, y_{N+1}) = \text{Min}[f_{N-1}(x_N, y_N)], \quad (8.41)$$

где теперь нужно выбрать только  $z_N$ . Заметим, что линейность уравнений можно использовать для уменьшения размерности.

К интересному варианту этой задачи приходим в случае, когда управление может осуществляться периодами. При этом выбор  $z_n$  производится только для  $n=1, 2, \dots, k, L, L+1, \dots, L+k-1, 2L, 2L+1, \dots$ , где  $k$  есть число интервалов в периоде, а  $L$  — промежуток между началами двух последовательных периодов. Здесь можно построить регулярный цикл, который является в некотором смысле оптимальным.

#### 8.4. Якобиевы матрицы

Чтобы продемонстрировать применимость метода к чисто математическим задачам, рассмотрим следующий пример Беллмана из теории матриц. Якобиевой называется матрица, у которой отличны от нуля только диагональные элементы и элементы двух прилежащих диагоналей.

То есть

$$A: a_{ij} = 0, \text{ если } |i - j| > 1. \quad (8.42)$$

Квадратичная форма  $x'Ax$ , связанная с положительно определенной симметричной матрицей Якоби порядка  $N$ , такова:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{N-1, N-1}x_{N-1}^2 + \\ + 2a_{N-1, N}x_{N-1}x_N + a_{NN}x_N^2. \quad (8.43)$$

Если мы составим неоднородное квадратичное выражение

$$Q = x'Ax - c'x \quad (8.44)$$

и будем искать его минимум, то непосредственным дифференцированием получим, что минимум имеет место, когда  $x$  удовлетворяет уравнению

$$Ax = c. \quad (8.45)$$

Отсюда следует, что если удастся тем или иным способом найти минимум, то совокупность значений  $x_n$ , доставляющих минимум, и есть решение последнего уравнения. Оказывается, что для матриц Якоби это можно сделать очень просто.

Запишем квадратичную форму  $Q_N$  от  $N$  переменных, сгруппировав их следующим образом:

$$Q_N = \{a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots \\ \dots + 2a_{N-2, N-1}x_{N-2}x_{N-1} + a_{N-1, N-1}x_{N-1}^2 - \\ - 2(c_1x_1 + \dots + c_{N-2}x_{N-2})\} - \{2(c_{N-1} - a_{N-1, N}x_N)x_{N-1}\} + \\ + \{a_{NN}x_N^2 - 2c_Nx_N\}. \quad (8.46)$$

Члены в первой скобке есть члены формы  $Q_{N-1}$ ; отсутствует лишь  $-2c_{N-1}x_{N-1}$ , который объединен с единственным другим членом, содержащим  $x_{N-1}$ . Последняя скобка состоит только из членов, содержащих  $x_N$ . Очевидно, что вторая скобка осуществляет связь между  $Q_N$  и  $Q_{N-1}$ , и можно записать

$$Q_{N-1}(\mathbf{x}; z) = Q_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1}; z) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots \\ \dots + a_{N-1, N-1}x_{N-1}^2 - 2c_1x_1 - \dots - 2c_{N-2}x_{N-2} - 2zx_{N-1}.$$

Тогда  $Q_{N-1} = Q_{N-1}(\mathbf{x}; c_{N-1})$  и из уравнения (8.46) следует (при  $c_N = z$ ):

$$Q_N(\mathbf{x}; z) = Q_{N-1}(\mathbf{x}; c_{N-1} - a_{N-1, N}x_N) + a_{NN}x_N^2 - 2zx_N. \quad (8.47)$$

Смысл такой записи заключается в том, что сейчас все переменные  $x_1, \dots, x_{N-1}$  содержатся только в первом выражении.

Пусть теперь

$$f_N(z) = \text{Min } Q_N(\mathbf{x}; z), \quad (8.48)$$

где минимизация заключается в выборе  $x_1, \dots, x_N$ . Из уравнения (8.47) и принципа оптимальности имеем

$$f_N(z) = \text{Min } \{a_{NN}x_N^2 - 2zx_N + f_{N-1}(c_{N-1} - a_{N-1, N}x_N)\}, \quad (8.49)$$

где следует выбирать лишь  $x_N$ . В частности,

$$f_1(z) = \text{Min } (a_{11}x_1^2 - 2zx_1) = -\frac{z^2}{a_{11}}, \quad (8.50)$$

и минимум достигается, когда

$$x_1 = z/a_{11}, \quad (8.51)$$

Подставляя в уравнение (8.49), при  $N=2$  получаем

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \text{Min} [a_{22}x_2^2 - 2zx_2 - (c_1 - a_{12}x_2)^2/a_{11}] = \\ &= \text{Min} \left[ \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 - 2(z - a_{12}c_1/a_{11}) x_2 - c_1^2/a_{11} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_2 = (a_{11}z - a_{12}c_1)/(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad (8.52)$$

и

$$f_2(z) = - \{a_{11}z^2 - 2c_1a_{12}z + c_1^2a_{22}\} / \{a_{11}a_{22} - a_{12}^2\}. \quad (8.53)$$

Мы замечаем, что  $f_2$  есть квадратичная форма по  $z$ ; тогда, сразу записав  $f_N$  в виде квадратичной формы и приравняв коэффициенты в уравнении (8.49), приходим к следующим рекуррентным соотношениям:

$$f_N(z) = -\alpha_N z^2 + 2\beta_N z - \gamma_N, \quad (8.54)$$

где

$$\Delta_N = a_{NN} - \alpha_{N-1} a_{N-1, N}^2, \quad (8.55)$$

$$\alpha_N = 1/\Delta_N, \quad (8.56)$$

$$\beta_N = \{\alpha_{N-1} c_{N-1} - \beta_{N-1}\} / \Delta_N, \quad (8.57)$$

$$\begin{aligned} \gamma_N &= \{a_{NN}(\alpha_{N-1} c_{N-1}^2 - 2\beta_{N-1} c_{N-1} + \gamma_{N-1}) + \\ &\quad + a_{N-1, N}^2(\beta_{N-1}^2 - \alpha_{N-1} \gamma_{N-1})\} / \Delta_N \end{aligned} \quad (8.58)$$

и

$$x_N = \{z - (\alpha_{N-1} c_{N-1} - \beta_{N-1})\} / \Delta_N. \quad (8.59)$$

Эти рекуррентные соотношения не слишком изящны, однако с вычислительной точки зрения они полностью решают задачу.

## БИБЛИОГРАФИЯ

### 8.1. См. также

Bellman R., On the Approximation of Curves by Line Segments Using Dynamic Programming, *Comm. of the Assoc. for Comp. Mach.* 4 (1961), 294.

Bellman R., Kotkin B., On the Approximation of Curves by Line Segments Using Dynamic Programming, RAND Corporation Memo RM-2978-PR, The RAND Corporation, February, 1962.

Р. Беллман и С. Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования [1.8], стр. 428.

Fryer W. D., Best Approximation in the Chebyshev Sense of  $N$  Line Segments to a Curve by Means of Dynamic Programming, Paper presented at an annual meeting of SIAM, 1962.

### 8.2. Bellman R., Dreyfus S., Dynamic Programming and the Reliability Theory of Multicomponent Devices, *Operations Res.*, 6 (1958), 200.

Р. Беллман и С. Дрейфус, Прикладные задачи динамического программирования [1.8], стр. 59—61, 98—103.

Rudd D. F., Reliability Theory in Chemical System Design, *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, 1 (1962), 138.

Kalaba R., Design of Minimal Weight Structures for Given Reliability and Cost., *J. Aerospace Sci.*, 29 (1962), 355.

Hilton H., Feigen M., Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability, *J. Aerospace Sci.* 27 (1960), 641.

8.3. Bellman R., Kalaba R., Some Mathematical Aspects of Optimal Predation in Ecology and Boviculture, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 46 (1960), 718.

8.4. Bellman R., Introduction to Matrix Analysis, New York, McGraw-Hill Book Co, 1960, гл. 9. (Русский перевод: Беллман Р., Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969.)

Ниже перечисляются некоторые работы, посвященные разнообразным приложениям динамического программирования. Этот перечень не претендует на полноту. (См. предисловие.)

Распределение водных ресурсов

Hall W. A., Bugas N., The Dynamic Programming Approach to Water Resources Development, *J. Geophys. Res.*, 66 (1961), 517.

Некоторые классические комбинаторные задачи

Bellman R., Dynamic Programming and Difficult Crossing Puzzles, *Math. Mag.*, 35 (1962).

См. также книгу Р. Беллмана и С. Дрейфуса [1.8], гл. 2.

Межпланетный полет

Bellman R., Dreyfus S., An Application of Dynamic Programming to the Determination of Optimal Satellite Trajectories, *J. Brit. Interplanet. Soc.*, 17 (1959), 78.

Ten-Dyke R. P., Computation of Rocket Step Weights to Minimize Initial Gross Weight. *Jet. Propulsion*, 28 (1958), 338.

См. также работу Р. Беллмана и Р. Калабы в книге

Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems. Edited by G. Leitmann. New York, Academic Press, 1962. (Русский перевод: Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета, под ред. Дж. Лейтмана, «Наука», М., 1965.)

Задачи химической технологии

Rudd D., On Design Policies for the Optimal Use of Limited Resources, *Chem. Eng. Sci.*, 17 (1962), 609.

Grütter W. E., Messikomer B. H., Dynamische Programmierung in der chemischen Technik. Die Optimierung chemischer Reaktionsausbeuten, *Helv. Chim. Acta*, 43 (1960), 2182.

Robert S. M., Dynamic Programming Formulation of the Catalyst Replacement Problem, *Chem. Eng. Prog.*, 56 (1960), 103, Symp. Ser. 31.

Westbrook G. T., Use This Method to Size Each Stage for Best Operation, *Petrol. Refiner.*, 40 (1961), 201.

Aris R., Bellman R., Kalaba R., Some Optimization Problems in Chemical Engineering. *Chem. Eng. Prog.*, 56 (1960), 95, Symp. Ser. 31.

Лесоводство

Arimizu T., Working Group Matrix in Dynamic Model of Forest Management, *J. Japan. Forestry Soc.*, 40 (1958), 185.

Ядерная техника

Ash M., Bellman R., Kalaba R., On Control of Reactor Shut-

down Involving Minimal Xenon Poisoning, *Nucl. Sci. Eng.*, 6 (1959), 152.

Класс оптимальных процессов с адаптацией

Bellman R., Kalaba R., *Dynamic Programming and Adaptive Control Processes*, Mathematical Foundations, *IRE Trans. Auto. Control* AC-5 (1960), 5.

### Задачи

1. Если  $f(x) = x^2$ , то покажите, что

$$L_1(a, b) = \text{Min}_{m, c} \int_a^b (x^2 - mx - c)^2 dx = (b - a)^5 L_1(0, 1).$$

Указание: используйте замену переменных  $x = a + (b - a)y$ .

2. Докажите, что  $L_N(a, b) = (b - a)^5 L_N(0, 1)$ , а поэтому

$$L_{2N}(a, b) = (b - a)^5 L_N(0, 1)/16.$$

3. Используя те же рассуждения, покажите, что для функции  $f(x) = e^{-cx}$

$$L_N(a, b) = e^{-ac} L_N(0, b - a),$$

откуда

$$L_{2N}(0, b) = \text{Min}_z [L_N(0, z) + e^{-cz} L_N(0, b - z)].$$

4. Химический продукт  $P$  производится из сырья  $R$  в три этапа:  $R + A \rightarrow B$ ,  $B + C \rightarrow D$ ,  $D + E \rightarrow P$ . Из всех компонент  $R$  самая дешевая, а стоимость реагентов  $A$ ,  $C$  и  $E$  соответственно равна 5, 5 и 1 долларам за одну партию; стоимость партии готового продукта равна 50 долларам. К сожалению, процесс получения реагентов ненадежен, и вероятность того, что получится реагент требуемого качества, равна соответственно  $3/4$ ,  $1/2$  и  $1/3$ . Покажите, что для максимизации средней прибыли нужно получить 7 партий реагента  $A$ , 3 партии  $C$  и 2 партии  $E$ .

## *Взаимосвязи между непрерывным и дискретным*

Эта книга посвящена в основном дискретному динамическому программированию, где процессы описываются разностными уравнениями и нужно выбирать управление на каждом шаге. Существует интересная и обширная область, которую тоже можно исследовать с помощью динамического программирования; в ней процессы являются непрерывными и значения управляющих переменных нужно определять непрерывно. Вначале эта область, о которой мы упоминали в гл. 1, исследовалась методами вариационного исчисления, и до сих пор она вызывает живейший интерес. Различные подходы дополняют друг друга, и все же остаются весьма тонкие проблемы, которые еще ждут своего решения. Большая часть из них находится вне нашей проблематики, но нам кажется важным изучить некоторые связи между непрерывным и дискретным. В частности, если в непрерывном процессе можно изменять управление лишь в отдельные моменты времени, то этот вид управления непрерывными системами можно исследовать дискретными методами. Однако сначала рассмотрим предел процесса с большим числом маленьких шагов.

### **9.1. Непрерывное как предел дискретного**

В качестве простейшего примера перехода к непрерывному пределу рассмотрим подробно описанную в начале гл. 2 непрерывную систему для реактора-смесителя. На этот раз положим, что время выдержки  $\theta_n$  на каждой ступени одинаково, например  $\theta$ , и требуется определить последовательность температур  $T_n$ , которая максимизирует выход продукта реакции в конце. Уравнения процесса возьмем в виде (4.1)

$$c_n = c_{n+1} + \theta \{k_1(T_n)(1 - c_n) - k_2(T_n)c_n\}, \quad (9.1)$$

где  $k_1(T)$  и  $k_2(T)$  — обычные функции Аррениуса.

Задачу можно сформулировать следующим образом:

1. Фазовые переменные:  $c_n$ .

2. Управление:  $T_n$ .
3. Уравнение процесса:  $c_n = \{c_{n+1} + \theta k_1(T_n)\} / \{k_1(T_n) + k_2(T_n)\}$ .
4. Ограничения:  $T_* \leq T_n \leq T^*$ ,  $c_n \geq 0$ .
5. Целевая функция: максимизировать  $c_1 - c_{N+1} = \sum_1^N (c_{n+1} - c_n)$ .
6. Параметры:  $\theta$ .

Если положить

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Max} \sum_1^N (c_{n+1} - c_n), \quad (9.2)$$

то

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Max} \{(c_{N+1} - c_N) + f_{N-1}(c_N)\}, \quad (9.3)$$

где теперь нужно выбрать только  $T_N$ . Однако, как мы убедились раньше,  $T_N$  всегда выбирается так, чтобы максимизировать скорость реакции, ибо производная выражения в скобках равна  $- [1 - f'_{N-1}(c_N)] \partial(c_N - c_{N+1}) / \partial T_N$ , причем она обращается в нуль, когда  $T_N = T^0(c_N)$  (см. стр. 59).

Пусть  $t = N\theta$  будет общим временем выдержки в последовательности реакторов, и пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow 0$ , а  $t$  остается неизменным. Уравнение (9.1) можно записать так:

$$\frac{c_{n+1} - c_n}{\theta} = - \{k_1(T_n)(1 - c_n) - k_2(T_n)c_n\}.$$

Если  $\tau = n\theta$  есть текущее время, то  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $c_n = c(\tau)$  и  $c_{n+1} = c(\tau + \theta)$ . Поэтому  $(c_{n+1} - c_n) / \theta = \{c(\tau + \theta) - c(\tau)\} / \theta$ , и в пределе это равно  $dc/d\tau$ . Таким образом, обозначая  $c(\tau)$  через  $c$  и  $T(\tau)$  через  $T$ , получаем

$$\frac{dc}{d\tau} = - \{k_1(T)(1 - c) - k_2(T)c\}. \quad (9.4)$$

Это дифференциальное уравнение заменяет разностное уравнение (9.1). Аналогично можно записать целевую функцию (9.2):

$$f[c(t)] = \text{Max} \{c(0) - c(t)\} = \text{Max} \int_0^t \{k_1(\tau)(1 - c) - k_2(\tau)c\} d\tau, \quad (9.5)$$

и это выражение есть предел при  $\theta \rightarrow 0$  для

$$f_N(c_{N+1}) = \text{Max} [c_1 - c_{N+1}] = \text{Max} \sum_1^N \{k_1(T_n)(1 - c_n) - k_2(T_n)c_n\} \theta.$$

Итак, задачу в непрерывном случае следует формулировать следующим образом: для заданного дифференциального уравнения (9.4), описывающего изменение фазовой переменной  $c$  как функции  $\tau$ , промежутка времени до момента окончания процесса, определить управляющие переменные  $T(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , так, чтобы при заданном  $c(t)$  максимизировать величину  $c(0) - c(t)$ .

Переходя к дискретному процессу общего вида из § 2.3, можно получить следующую схему (чисто формального) перехода к непрерывному процессу. Вектор состояния  $\mathbf{p}_n$  заменяется на вектор-функцию  $\mathbf{p} = [p_1(\tau), \dots, p_s(\tau)]$ , где  $\tau = n\Delta t$ , а вектор управления  $\mathbf{q}$  — на  $\mathbf{q}(\tau) = [q_1(\tau), \dots, q_r(\tau)]$ . Уравнение процесса  $\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n)$  можно записать так:

$$\frac{\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n}{\Delta \tau} = - \frac{\mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) - \mathbf{p}_{n+1}}{\Delta \tau}.$$

В пределе получаем

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = - \mathbf{U}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau), \quad (9.6)$$

где  $\mathbf{U}$  есть предел правой части. Аналогично  $P_n$  — предельно возможный доход на  $n$ -м этапе — можно заменить функцией  $P(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau)\Delta\tau$ . Множитель  $\Delta\tau$  необходим, так как мы полагаем  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , а предельно возможный доход должен быть пропорциональным величине шага. Таким образом, если  $t = N\Delta\tau$ , то целевая функция равна

$$O = - \int_0^t P(\mathbf{p}(\tau); \mathbf{q}(\tau); \tau) d\tau. \quad (9.7)$$

Вид ограничений остается таким же, как и в дискретном случае:

$$S_m(\mathbf{p}(\tau); \mathbf{q}(\tau); \tau) \geq 0. \quad (9.8)$$

Стоит записать эту задачу в той же форме, которая была стандартной для дискретного случая:

1. Фазовые переменные:  $\mathbf{p}(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .
2. Управление:  $\mathbf{q}(t)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ .
3. Уравнение процесса:  $d\mathbf{p}/d\tau = -\mathbf{U}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau)$ .
4. Ограничения:  $S_m(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau) \geq 0$ ,  $m = 1, \dots, l$ .
5. Целевая функция:  $O = \int_0^t P(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau) d\tau$ .
6. Параметры.

## 9.2. Дискретное как результат аппроксимации непрерывного

Подойдем к вопросу с другой стороны и рассмотрим, как можно дискретно наблюдать за непрерывной системой. Как обычно, начинаем с конца процесса, что соответствует моменту времени  $\tau=0$ , и этим объясняется присутствие в уравнениях отрицательного знака (несмотря на кажущуюся искусственность, этот прием полезен при анализе непрерывных систем). Пусть уравнения таковы:

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\mathbf{U}(\mathbf{p}; \mathbf{q}; \tau); \quad (9.9)$$

разумеется, для интегрирования нужно задать начальные условия. Граничные условия

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{N+1} \quad (9.10)$$

являются естественными физическими условиями, и коль скоро выбран вектор управления  $\mathbf{q}(\tau)$ , уравнения можно интегрировать от  $\tau=t$  до  $\tau=0$ . Предположим, что интервал  $0 \leq \tau \leq t$  разделен на  $N$  (не обязательно равных) частей последовательностью чисел  $0 = \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N \leq \tau_{N+1} = t$ ; тогда  $\mathbf{p}(\tau_n)$  можно обозначить через  $\mathbf{p}_n$ . Аналогично, если  $\mathbf{q}_n$  означает  $\mathbf{q}(\tau)$ , выбранное для  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_{n+1}$  (оно может и не быть постоянным), то уравнения можно интегрировать от шага к шагу. Итак, в результате интегрирования уравнений (9.9) от  $\tau_{N+1}$  до  $\tau_N$  получаем

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{N+1}; \mathbf{q}_N) \quad (9.11)$$

и в общем случае для интервала  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_{n+1}$

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n). \quad (9.12)$$

Так как в общем случае уравнения (9.9) зависят от  $\tau$ , то у функции  $\mathbf{F}$  нужно ставить индекс  $n$ . Для автономных систем, где  $\mathbf{U}$  есть функция только  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{F}$  может не зависеть от  $n$ . Решение дифференциального уравнения обладает полугрупповым свойством, заключающимся в том, что решение не изменится от того, что мы разобьем интервал на два подинтервала и будем конечные значения первого шага брать как начальные для второго. Поэтому  $\mathbf{p}_1$ , полученное при последовательном применении преобразования (9.12), совпадает с решением, которое можно бы было получить, интегрируя уравнения на всем интервале.

Подобным же образом, т. е. путем деления всего интервала, можно придать дискретную форму целевой функции типа (9.7):

$$\begin{aligned} O &= \int_0^t P(p; q; \tau) d\tau = \sum_1^N \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} P(p; q; \tau) d\tau = \\ &= \sum_1^N P_n(p_{n+1}; q_n), \end{aligned} \quad (9.13)$$

поскольку с помощью интегрирования уравнений (9.9) значения интеграла для каждого шага можно вычислять как функции  $p_{n+1}$  и  $q_n$ .

Для иллюстрации рассмотрим уравнение для реактора-смесителя, в котором происходит реакция первого порядка  $A \rightleftharpoons B$ . Фактически это уравнение совпадает с (9.4), поскольку является пределом большого числа маленьких шагов

$$\frac{dc}{d\tau} = -\{k_1(T)(1-c) - k_2(T)c\}. \quad (9.14)$$

На интервале  $\tau_n \leq \tau \leq \tau_{n+1}$  будем поддерживать температуру  $T$  постоянной и обозначим ее значение через  $T_n$ . Тогда интегрирование уравнения (9.14) дает

$$\begin{aligned} c_n &= c_{n+1} \exp[-(k_{1n} + k_{2n})(\tau_{n+1} - \tau_n)] + \\ &\quad + k_{1n} \{1 - \exp[-(k_{1n} + k_{2n})(\tau_{n+1} - \tau_n)]\} / (k_{1n} + k_{2n}), \end{aligned}$$

где  $k_i(T_n) = k_{in}$ . Отметим, что эти уравнения не совпадают с уравнениями для конечной последовательности реакторов-смесителей, ибо сейчас на конечном интервале рассматривается изменение другой системы. Тем не менее если  $\tau_{n+1} - \tau_n = \theta$  очень мало, так что можно пренебречь  $\theta^2$  и большими степенями, то, разлагая экспоненты в ряд, приходим к уравнениям (9.1). Если бы цель заключалась в максимизации  $c(0) - c(t)$ , то можно было бы сразу записать ее в виде

$\sum_1^N P_n$ , где  $P_n = c_n - c_{n+1}$ . Итак, если управление должно быть таким, чтобы на каждом интервале температура  $T$  была постоянна, то получим задачу дискретного динамического программирования.

### 9.3. Программное управление температурой реактора-смесителя

Проиллюстрируем более подробно процесс дискретизации на примере, очень похожем на тот, который рассматривался

в гл. 4. Как для данного реактора-смесителя, описываемого уравнениями предыдущего параграфа, выбрать последовательность  $N$  значений температуры  $T_n$  и величины соответствующих им интервалов ( $\tau_n, \tau_{n+1}$ ) с тем, чтобы за минимальное время получить прирост продукта на выходе  $c_1 = \gamma$ ? Здесь целевой функцией является суммарное время

$$O = \sum_1^N (\tau_{n+1} - \tau_n). \quad (9.15)$$

Теперь уравнение (9.14) можно записать так:

$$\begin{aligned} \tau_{n+1} - \tau_n &= \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} d\tau = \int_{c_{n+1}}^{c_n} dc / \{k_{1n} - (k_{1n} + k_{2n})c\} = \\ &= \frac{1}{(k_{1n} + k_{2n})} \ln \frac{k_{1n} - (k_{1n} + k_{2n})c_{n+1}}{k_{1n} - (k_{1n} + k_{2n})c_n}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

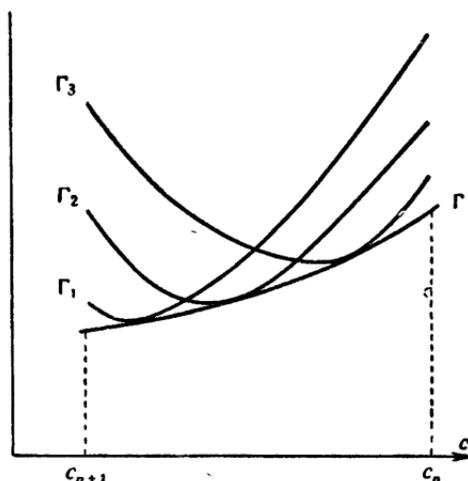
Если бы этот прирост получался за один этап, т. е. при  $T_n = T_1$ , то необходимое для этого время равнялось бы

$$t_2 = \tau_2 - \tau_1 = \frac{1}{k_{11} + k_{21}} \ln \frac{k_{11} - (k_{11} + k_{21})c_2}{k_{11} - (k_{11} + k_{21})c_1}. \quad (9.17)$$

Минимальное значение этого времени будет достигнуто при некоторой температуре  $T_1^0$ , которая является функцией  $c_2$  и  $c_1 = \gamma$ . В двухшаговой задаче нужно выбрать  $T_2, T_1, \tau_3$  и  $\tau_2$ , но, поскольку необходимо, чтобы выполнялось условие  $c_1 = \gamma$ , фактически следует выбирать лишь три величины. И снова, вследствие того что имеются замкнутые формулы для  $\tau$  как функции  $c$ , желательно в качестве  $N - 1$  управляющих переменных взять величины выходов продуктов реакции на промежуточных этапах  $c_N, \dots, c_2$ .

Значение температуры, минимизирующее правую часть уравнения (9.16), можно обозначить через  $T^0(c_n, c_{n+1})$ , а через  $\Delta\tau_n^0$  — соответствующее минимальное значение  $\tau_{n+1} - \tau_n$ ;  $T^0(c_n, c_{n+1})$  не связана с температурой  $T^0(c)$ , которая максимизирует скорость реакции. На рис. 9.1 кривая  $\Gamma$  та же, что и в гл. 4, где она соответствует величине, обратной скорости реакции как функции температуры; напомним, что она градуировалась в единицах  $T^0(c)$ ; кривые  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  — три типичные кривые, определяющие для трех пробных температур величины, обратные скорости реакции. Согласно уравнению (9.16), площадь под одной из этих кривых равна  $\tau_{n+1} - \tau_n$ , и поскольку эта площадь обязательно будет больше площади под кривой  $\Gamma$ , то для одной из этих кривых  $\Gamma_p$  значение площади будет минимальным. В точке, где эта кривая касается

$\Gamma$ , значение  $T^0(c)$  равняется  $T^0(c_n, c_{n+1})$ . Таким образом,  $T^0(c_n, c_{n+1}) = T^0(c'_n)$ , где  $c_{n+1} \leq c'_n \leq c_{n+1}$ , и оптимальная температура соответствует той, которая максимизирует скорость реакции для некоторой промежуточной величины продукта выхода. Функцию  $T^0(c_n, c_{n+1})$ , а следовательно, и  $\Delta\tau^0(c_n, c_{n+1})$ ,



Р и с. 9.1.

можно вычислить заранее; тогда задача сводится к отысканию таких  $c_N, \dots, c_2$ , чтобы  $\sum_1^N \Delta\tau^0(c_n, c_{n+1})$  была минимальной. В итоге ответ получается в виде программы управления температурой  $T(\tau) = T_n, \tau_n \leq \tau \leq \tau_{n+1}$ , задающей как температуру, так и моменты переключения. Окончательный результат можно представить в графической форме, как и в гл. 4, подробные выкладки предлагается сделать читателю.

#### 9.4. Линеаризация

Иногда при дискретизации непрерывной системы полезным приемом является локальная линеаризация. С помощью этого приема за счет уменьшения точности решения избегают численного интегрирования нелинейного автономного уравнения. Покажем, как от дифференциального уравнения можно перейти к матричной форме уравнения процесса  $F_n$ .

Векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{d\tau} = -U(p; q) \quad (9.18)$$

есть сокращенная запись системы уравнений

$$\frac{dp_k}{d\tau} = -U_k(p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_r) \quad (k = 1, \dots, s). \quad (9.19)$$

Если заданы величины  $p_k(\tau_{n+1})$  и разности  $\tau_{n+1} - \tau_n$  невелики, то можно ожидать, что значения  $p_k(\tau)$  не слишком сильно отличаются от  $p_{n+1, k} = p_k(\tau_{n+1})$ . В этом случае приближенное выражение правой части уравнения (9.19) определяется ее разложением в ряд как функции разности  $\pi_k(\tau) = p_k(\tau) - p_{n+1, k}$ . В частности, по формуле Тейлора

$$U_k(p_1, \dots, p_s; \mathbf{q}) = U_k(p_{n+1, 1}, \dots, p_{n+1, s}; \mathbf{q}) + \\ + \sum_{j=1}^s \frac{\partial U_k}{\partial p_j}(p_{n+1, 1}, \dots, p_{n+1, s}; \mathbf{q}) \pi_j(\tau),$$

где опущены члены с квадратами и произведениями  $\pi_j$ . Как только выбран вектор управления  $\mathbf{q}$ , по известным  $p_{n+1} = (p_{n+1, 1}, \dots, p_{n+1, s})$  можно подсчитать величины в правых частях последнего уравнения. Пусть

$$b_k^{(n)} = U_k(p_{n+1, 1}, \dots, p_{n+1, s}; \mathbf{q}_n), \\ a_{kj}^{(n)} = \frac{\partial U_k}{\partial p_j}(p_{n+1, 1}, \dots, p_{n+1, s}; \mathbf{q}_n). \quad (9.20)$$

Тогда уравнения (9.19) записываются как

$$\frac{d\pi_k}{d\tau} = -b_k^{(n)} - \sum_{j=1}^n a_{kj}^{(n)} \pi_j \quad (9.21)$$

или в векторной форме

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}}{d\tau} = -\mathbf{b}^{(n)} - \mathbf{A}^{(n)}\boldsymbol{\pi}, \quad (9.22)$$

где  $\mathbf{A}^{(n)}$  — матрица с элементами  $a_{kj}^{(n)}$ . Эти элементы вычислены по известному начальному вектору  $p_{n+1}$  и вектору управления  $\mathbf{q}_n$ . Далее, напомним общий вид решения линейного дифференциального уравнения, начав с одномерного случая. Решение уравнения

$$\frac{d\pi}{d\tau} = -b - A\pi, \quad (9.23)$$

где  $b$  и  $A$  — постоянные и  $\pi(\tau)$  — единственная переменная, при  $\pi(0) = 0$  равно

$$\pi(\tau) = -A^{-1}(1 - e^{-A\tau})b. \quad (9.24)$$

Экспоненциальную функцию можно представить в виде ряда

$$e^{-A\tau} = 1 - A\tau + \frac{1}{2!} A^2\tau^2 - \frac{1}{3!} A^3\tau^3 + \dots$$

По аналогии в многомерном случае экспоненциальная функция для матрицы определяется как ряд

$$\exp(-A\tau) = \sum_0^{\infty} \frac{\tau^p}{p!} A^p, \quad (9.25)$$

где  $A^0$  — единичная матрица  $I$  и  $A^n$  — произведение  $n$  матриц  $A$ . Оказывается, что уравнению (9.22) удовлетворяет вектор

$$\pi(\tau) = -[A^{(n)}]^{-1} [I - \exp(-A^{(n)}\tau)] b^{(n)}. \quad (9.26)$$

Поэтому, когда  $\tau = \tau_n - \tau_{n+1}$ , так что  $\pi(\tau) = p_n - p_{n+1}$ , получаем, что

$$p_n = p_{n+1} + [A^{(n)}]^{-1} \{ \exp(A^{(n)}(\tau_{n+1} - \tau_n)) - I \} b^{(n)}. \quad (9.27)$$

Так как  $A^{(n)}$  и  $b^{(n)}$  есть известные функции  $p_{n+1}$  и  $q_n$ , то имеем явное выражение вида  $p_n = F_n(p_{n+1}; q_n)$ .

### БИБЛИОГРАФИЯ

Подробное объяснение значения дискретизации в задачах химической техники содержится в статье

Lapidus L., Kalman R. E., Shapiro E., Computer Control of Processes, *Chem. Eng. Prog.*, 56 (1960), 55.

Прекрасное изложение теории линейных матричных уравнений см. в книге

Bellman R., *Introduction to Matrix Analysis* [8.4].

Нетривиальное исследование кусочной линеаризации приведено в работе

Man R. S., Michaelson S., Sargent R. W. H., Dynamic Behavior of Multi-Component Multi-Stage Systems. Numerical Methods for the Solution, *Chem. Eng. Sci.*, 17 (1962), 619.

### Задачи

1. Упрощенная форма уравнений движения самолета такова:

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta,$$

$$\frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = \frac{T - D}{W} - \sin \theta,$$

где  $H$  — высота,  $V$  — скорость,  $T$  — тяга,  $D$  — сопротивление,  $W$  — вес и  $\theta$  — угол наклона траектории;  $T$  и  $D$  являются функциями  $H$  и  $V$ .

Определите минимальное время подъема  $f(H, V)$  с помощью оптимального управления  $\theta$  с высоты  $H$  и скорости  $V$  до некоторых заданных конечных значений высоты и скорости. Дискретизируйте задачу, беря значения  $H$  равными  $0, h, \dots, Nh$  ( $Nh$  равно конечной высоте), и выведите рекуррентные уравнения. (Подробное исследование содержится в книге Беллмана «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8], гл. 6.)

2. Рассмотрите задачу охлаждения реактора-смесителя путем введения в заданные моменты времени охлажденного сырья. Чтобы получить дискретную задачу, внесите необходимые изменения в уравнения § 9.3.

3. Рассмотрите растяжение упругой нити с непрерывно меняющимися упругими свойствами как непрерывный предел (задача 10, гл. 3).

4. Рассмотрите переход к пределу в задаче 9, гл. 3.

### *Некоторые обобщения и ограничения*

В гл. 3 мы стремились ограничиться приложением динамического программирования лишь к цепным процессам без обратной связи. В этой главе мы хотим начать исследовать возможность применения наших методов к системам с обратной связью или системам с противотоком. Чтобы подчеркнуть, насколько внимательным следует при этом быть, рассмотрим сначала простейший пример, который показывает, что, вообще говоря, к системам с обратной связью принцип оптимальности в его простейшей форме неприменим.

#### 10.1. Контрпример для случая системы с обратной связью

Рассмотрим двухступенчатую систему, представленную на рис. 10.1, в которой управление  $q_1$  этапа 1 влияет также на уравнение этапа 2. Возьмем очень простые уравнения процесса:

$$p_1 = 2q_1 p_2 - q_1^2, \quad (10.1)$$

$$p_2 = 2q_2(p_3 - \lambda q_1) - q_2^2, \quad (10.2)$$

причем цель состоит в максимизации  $p_1$ .

Очевидно, если  $\lambda=0$ , обратная связь отсутствует, и в этом случае оптимальная стратегия сводится к  $q_1=p_2$  и  $q_2=p_3$ . Но поскольку из уравнения (10.2)  $p_2 = p_3^2$ , то в итоге максимум  $p_1$  равнялся бы  $f_2(p_3) = p_3^4$ . Если имеется обратная связь и  $\lambda \neq 0$ , то подстановкой получаем

$$p_1 = 4q_1 q_2 (p_3 - \lambda q_1) - 2q_1 q_2^2 - q_1^2. \quad (10.3)$$

Отсюда следует, что  $q_1$  и  $q_2$  нужно выбрать так, чтобы соблюдались равенства

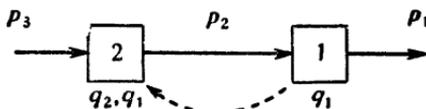
$$\begin{aligned} 2q_2 p_3 - q_2^2 - q_1(1 + 4\lambda q_2) &= 0, \\ q_1(p_3 - \lambda q_1) - q_1 q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Принцип оптимальности будет нарушен, если  $q_1$  не будет равно  $p_2$ , поскольку, если  $p_2$  задано, то именно это значение

$q_1$  максимизирует  $p_1$ . Чтобы показать, что это не так, нам нужно только подставить в уравнение (10.2)  $p_2=q_1$  и, перегруппировав члены, прийти к выражению

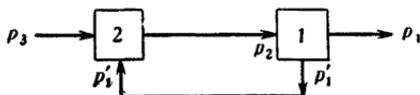
$$2q_2p_3 - q_2^2 - q_1(1 + 2\lambda q_2) = 0, \quad (10.5)$$

которое, очевидно, несовместимо с уравнением (10.4), если только  $\lambda$  не равно 0, т. е. если не отсутствует обратная связь.



Р и с. 10.1.

Уместно вспомнить, что из самой формулировки принципа оптимальности следует, что он неприменим в этом случае. Напомним (стр. 38), что речь шла о «состоянии, получающемся в результате действия первого управления», а в данном случае  $p_2$  не является таким состоянием, поскольку оно



Р и с. 10.2.

зависит как от первого, так и от второго управления. Разумеется, обратная связь по фазовой переменной в общем случае ничуть не лучше обратной связи по управляющим переменным, ибо если  $F_2$  есть функция  $p_1$ , то она является также функцией  $q_1$ .

В качестве другого примера рассмотрим двухступенчатый процесс, в котором ступень 1 имеет два выхода, один из которых воздействует на ступень 2. Система показана на рис. 10.2 и описывается уравнениями

$$p_2 = F_2(p_3, p'_1; q_2), \quad (10.6)$$

$$p_1 = F_1(p_2; q_1), \quad (10.7)$$

$$p'_1 = F'_1(p_2; q_1); \quad (10.8)$$

и снова нужно максимизировать  $p_1$ .

Здесь

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial F'_1}{\partial q_1}, \quad (10.9)$$

и приравнивание этого выражения нулю, вообще говоря, не равнозначно использованию принципа оптимальности в той форме, когда при заданном  $p_2$  нужно выбирать  $q_1$  так, чтобы максимизировать  $p_1$ , ибо это было бы эквивалентно условию  $\partial F_1/\partial q_1=0$ . Эти выражения различны, как как в общем случае первый член не равен нулю. Чтобы вычислить этот первый член, продифференцируем по  $q_1$  уравнения (10.6) и (10.8), считая постоянными  $q_2$  и  $p_3$ . При этом

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial p'_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \left( \frac{\partial F'_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial F'_1}{\partial q} \right),$$

или

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_1} = \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial F'_1}{\partial q_1} \left/ \left[ 1 - \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial F'_1}{\partial p_2} \right] \right.,$$

и, подставляя в (10.9), получаем, что

$$\frac{dp_1}{dq_1} = \left[ \frac{\partial F_1}{\partial q_1} + \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial (F_1, F'_1)}{\partial (p_2, p_1)} \right] \left/ \left[ 1 - \frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial F'_1}{\partial p_2} \right] \right. \quad (10.10)$$

Если предположить, что знаменатель не равен нулю, то равенство нулю  $dp_1/dq_1$  означает обращение в нуль  $\partial F_1/\partial q_1$  только в том случае, когда либо

$$\frac{\partial (F_1, F'_1)}{\partial (p_2, q_1)} = 0, \quad (10.11)$$

либо

$$\frac{\partial F_2}{\partial p'_1} \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \frac{\partial F'_1}{\partial q_1} = 0.$$

Вторая возможность соответствует тривиальному случаю, поскольку она означает, что либо отсутствует действительная обратная связь ( $\partial F_2/\partial p' = 0$  или  $\partial F'_1/\partial q_1 = 0$ ), либо первая ступень стационарна ( $\partial F_1/\partial p_2 = 0$ ). Более интересно уравнение (10.11), так как оно не сводится к тривиальному случаю, если  $F'_1$  является функцией  $F_1$ , т. е.  $F'_1 = \Phi(F_1)$ .

Чтобы не сложилось представление, что это единственно возможный случай, рассмотрим следующий пример Джексона. Пусть

$$p_2 = \frac{1}{4} p_3 + \frac{3}{4} p'_1, \quad (10.12)$$

$$p_1 = p'_1 = 2p_2 - q_1^2. \quad (10.13)$$

Тогда

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_1} = -2q_1, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} = -2,$$

так что значение  $q_1=0$  доставляет максимум  $p_1$  при постоянном  $p_2$ . В действительности этот максимум равен  $p_1=2p_2$ , так что, подставляя это в первое из уравнений, получаем

$$p_2 = \frac{1}{4} p_3 + \frac{3}{2} p_2$$

или

$$p_2 = -\frac{1}{2} p_3,$$

и, следовательно,

$$p_{1\max} = -p_3.$$

В то же время подстановка (10.12) в (10.13) дает

$$p_1 = -p_3 + 2q_1^2,$$

откуда видно, что  $q_1=0$  соответствует минимуму, а не максимуму.

Немного более общий пример (тоже Джексона) еще яснее вскрывает природу трудностей. Пусть

$$p_2 = (1 - \lambda) p_3 + \lambda p_1', \quad (10.14)$$

$$p_1 = p_1' = F_1(p_2; q_1) \quad (10.15)$$

и целью является максимизация  $p_1$ . Предположим, что при постоянном  $p_2$  функция  $F_1$  имеет единственный максимум по  $q_1$ ; он достигается, когда  $q_1 = q_1^*(p_2)$ , т. е. при значении  $q_1$ , для которого  $\partial F_1 / \partial q_1 = 0$  и  $\partial^2 F_1 / \partial q_1^2 < 0$ . Из уравнения (10.10)

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_1} = \frac{\partial F_1}{\partial q_1} / \left\{ 1 - \lambda \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right\},$$

и при  $q_1 = q_1^*(p_2)$  эта производная равна нулю. Далее,

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_1^2} / \left\{ 1 - \lambda \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right\} + \lambda \frac{\partial F_1}{\partial q_1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial p_2 \partial q_1} / \left\{ 1 - \lambda \frac{\partial F_1}{\partial p_2} \right\}^2,$$

и в точке экстремума второй член равен нулю.

Следовательно, хотя  $\partial p_1 / \partial q_1 = 0$ , но если  $\lambda \partial F_1 / \partial p_2$  больше единицы, то  $\partial^2 p_1 / \partial q_1^2$  становится положительным, и максимум  $p_1$  при постоянном  $p_2$  превращается в минимум, если поддерживать постоянной переменную  $p_3$ . Итак, если  $\lambda < 1 / (\partial F_1 / \partial p_2)$ , то можно непосредственно использовать принцип оптимальности. В этом случае можно также сказать, что здесь имеется предел допустимой величины обратной связи.

На самом деле имеется интересная физическая интерпретация такой необходимости в слабой обратной связи. Можно сказать, что  $\partial F_2 / \partial p_1'$  определяет влияние на величину  $p_2$

малых изменений  $p'_1$ , и  $\partial F'_1/\partial p_2$  оценивает влияние на  $p'_1$  малых изменений  $p_2$ . Произведение частных производных характеризует влияние на  $p'_1$  (или  $p_2$ ) малого изменения их самих после того, как это изменение подействовало на  $p_2$  (или  $p'_1$ ). Если это произведение больше 1, то процесс с обратной связью неустойчив, и одним из неприятных результатов этого является изменение типа экстремума.

Предположим теперь, что имеется более общее выражение для целевой функции и нужно максимизировать

$$O = P(p_1, q_1, q_2), \quad (10.16)$$

когда процесс описывается уравнениями (10.6), (10.7) и (10.8). Если, каковы бы ни были  $p_3$  и  $q_2$ , на стадии 1 использовалось значение  $q_1$ , которое для заданного  $p_2$  максимизирует  $P$ , то  $q_1$  должно было бы удовлетворять выражению

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0. \quad (10.17)$$

Однако из-за наличия обратной связи истинным необходимым условием будет

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P}{\partial q_1} = 0, \quad (10.18)$$

где  $\partial p_1/\partial q_1$  определяется по формуле (10.10). Уравнения (10.17) и (10.18) могут совпасть лишь в тривиальном случае, когда обратная связь фактически отсутствует, т. е. когда  $\partial F_2/\partial p'_1 = 0$ ; и здесь для применимости принципа оптимальности недостаточно даже функциональной зависимости  $F'_1$  от  $F_1$ .

Подведем итог:

1. В нескольких специальных случаях, когда обратная связь достаточно слаба, допустимо применять принцип оптимальности.

2. Даже в этих случаях усиление обратной связи может привести к тому, что экстремум, найденный с помощью динамического программирования, будет противоположным тому, который имеется на самом деле.

3. Небольшое усложнение целевой функции или увеличение размерности способно даже при слабой обратной связи привести к неприменимости принципа.

Отсюда следует, что, когда делается обобщение на любую систему, отличную от прямой последовательности ступеней, необходимо очень серьезное исследование. Гарантия от таких поспешных обобщений фактически уже имеется в беллмановской формулировке принципа оптимальности, надо

лишь дать точную интерпретацию слов «состояние, являющееся результатом применения первого управления». Не забывая об этом, приступим к изучению некоторых обобщений, которые обычно удается получить ценой увеличения размерности вектора фазовых переменных.

## 10.2. Некоторые обобщения

### 1. Прямой поток

Рассмотрим систему, показанную на рис. 10.3, в которой состояние на входе системы воздействует не только на этап

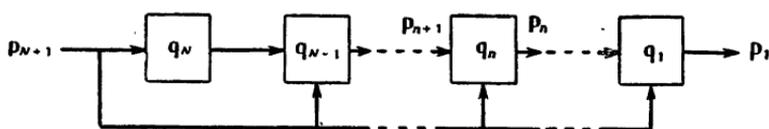


Рис. 10.3.

$N$ , но также на все последующие этапы. Уравнение процесса на этапе  $n$  можно записать как

$$p_n = F_n(p_{n+1}, p_{N+1}; q_n), \quad (10.19)$$

и одной из компонент вектора управлений  $q_n$  является та часть  $p_{N+1}$ , которая должна участвовать в преобразовании  $p_{n+1}$  в  $p_n$ . Если

$$O = \sum_1^N P_n(p_{n+1}, p_{N+1}; q_n) \quad (10.20)$$

и если взять

$$f_n(p_{n+1}; p_{N+1}) = \text{Max}_{q_n, \dots, q_1} \left[ \sum_1^n P_r \right] = \quad (10.21)$$

$$= \text{Max}_{q_n} [P_n + f_{n-1}(p_n; p_{N+1})], \quad (10.22)$$

то непосредственно применим алгоритм динамического программирования.

Тогда для всего процесса

$$f_N(p_{N+1}) = f_N(p_{N+1}; p_{N+1}). \quad (10.23)$$

Здесь необходимо увеличить размерность вектора фазовых переменных, поскольку имеем  $f_N(p_{n+1}; p_{N+1})$ . Однако во многих случаях  $p_{N+1}$  можно рассматривать как фиксированную

совокупность параметров или считать его началом координат пространства фазовых переменных, и в этом случае трудности, связанные с размерностью, не больше, чем в предыдущих задачах.

## 2. Каскадный прямой поток

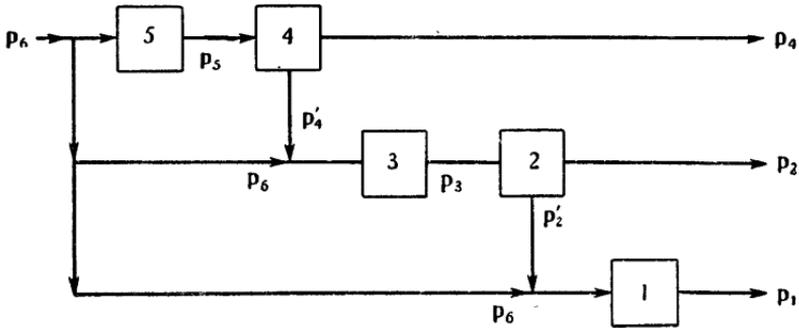


Рис. 10.4.

Робертс рассматривал процессы вида, представленного на рис. 10.4 для случая пяти ступеней. Уравнения процесса таковы:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= F_1(p'_2, p_6; q_1), \\
 p_2 &= F_2(p_3; q_2), \\
 p'_2 &= F'_2(p_3; q_2), \\
 p_3 &= F_3(p'_4, p_6; q_3), \\
 p_4 &= F_4(p_5; q_4), \\
 p'_4 &= F'_4(p_5; q_4), \\
 p_5 &= F_5(p_6; q_5).
 \end{aligned} \tag{10.24}$$

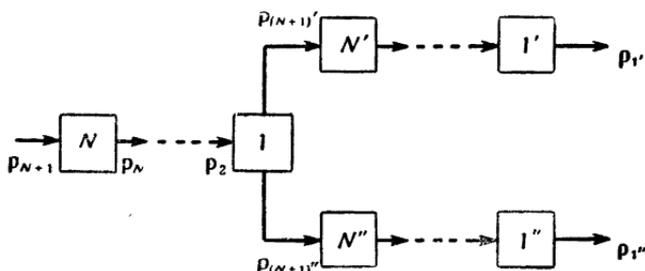
Оптимизация может проводиться поэтапно следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_1(p'_2, p_6) &= \text{Max}_{q_1} \{P_1(p'_2, p_6; q_1)\}, \\
 f_2(p_3, p_6) &= \text{Max}_{q_2} \{P_2(p_3; q_2) + f_1(p'_2, p_6)\}, \\
 &\dots \dots \dots \\
 f_5(p_6) &= \text{Max}_{q_5} \{P_5(p_6; q_5) + f_4(p_5, p_6)\}.
 \end{aligned} \tag{10.25}$$

Увеличение размерности может снова не быть столь серьезным, как это кажется сначала.

### 3. Ветвящиеся процессы

Ветвящиеся процессы типа, представленного на рис. 10.5, исследовались Миттеном и Немхаузером. Две ветви, очевидно, можно рассматривать отдельно и получить  $f_{N'}(\mathbf{p}_{(N+1)'})$  и  $f_{N''}(\mathbf{p}_{(N+1)''})$  — максимальные доходы от разных ветвей. На этапе 1 создаются два продукта, векторы фазовых перемен-



Р и с. 10.5.

ных которых определяются выражениями:

$$\mathbf{p}_{(N+1)'} = \mathbf{F}'_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1), \quad \mathbf{p}_{(N+1)''} = \mathbf{F}''_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1). \quad (10.26)$$

Тогда

$$\hat{f}_1(\mathbf{p}_2) = \text{Max}_{\mathbf{q}_1} [P_1(\mathbf{p}_2; \mathbf{q}_1) + \hat{f}_{N'}(\mathbf{p}_{(N+1)'}) + \hat{f}_{N''}(\mathbf{p}_{(N+1)''})] \quad (10.27)$$

и

$$\hat{f}_n(\mathbf{p}_{n+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) + \hat{f}_{n-1}(\mathbf{p}_n)], \quad n = 2, \dots, N. \quad (10.28)$$

### 4. Прямой поток в контуре

Миттен и Немхаузер также рассматривали случай, когда ветви снова замыкаются, как это показано на рис. 10.6.

Здесь можно обычным образом начать оптимизацию конечной прямой цепи:

$$\hat{f}_n(\mathbf{p}_{n+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) + \hat{f}_{n-1}(\mathbf{p}_n)], \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (10.29)$$

Но уже для этапа  $N$  нужно принять во внимание наличие двух различных состояний на входе:

$$\hat{f}_N(\mathbf{p}_{1'}; \mathbf{p}_{1''}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_N} [P_N(\mathbf{p}_{1'}; \mathbf{p}_{1''}; \mathbf{q}_N) + \hat{f}_{N-1}(\mathbf{p}_N)]. \quad (10.30)$$

Теперь, считая  $\mathbf{p}_{1^n}$  параметром, можно двигаться по верхней ветви назад и

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n'}(\mathbf{p}_{(n+1)^{n'}}, \mathbf{p}_{1^{n'}}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{n'}} [P_{n'}(\mathbf{p}_{(n+1)^{n'}}; \mathbf{q}_{n'}) + \hat{f}_{(n-1)^{n'}}(\mathbf{p}_{n'}, \mathbf{p}_{1^{n'}})], \\ n' = 1', \dots, N', \end{aligned} \quad (10.31)$$

причем

$$\hat{f}_{0'}(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{p}_{1^{n'}}) = \hat{f}_N(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{p}_{1^{n'}}). \quad (10.32)$$

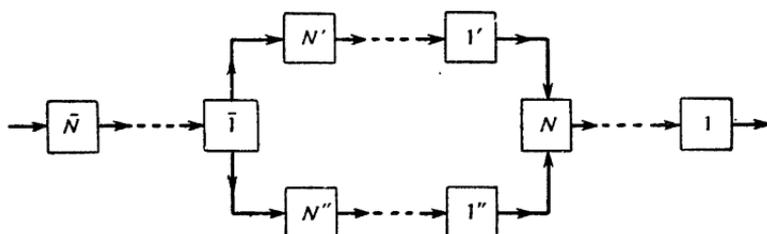


Рис. 10.6.

Приняв теперь  $\mathbf{p}_{(N+1)^{n''}}$  за параметр, для нижней ветви можно получить

$$\begin{aligned} \hat{f}_{n''}(\mathbf{p}_{(N+1)^{n''}}, \mathbf{p}_{(n+1)^{n''}}) = \\ = \text{Max}_{\mathbf{q}_{n''}} [P_{n''}(\mathbf{p}_{(n+1)^{n''}}; \mathbf{q}_{n''}) + \hat{f}_{(n-1)^{n''}}(\mathbf{p}_{(N+1)^{n''}}, \mathbf{p}_{n''})], \quad n'' = 1'', \dots, N'', \end{aligned} \quad (10.33)$$

и

$$\hat{f}_{0''}(\mathbf{p}_{(N+1)^{n''}}, \mathbf{p}_{1^{n''}}) = \hat{f}_{N'}(\mathbf{p}_{(N+1)^{n''}}, \mathbf{p}_{1^{n''}}). \quad (10.34)$$

Для узлового этапа 1

$$\hat{f}_{\bar{1}}(\mathbf{p}_{\bar{2}}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{\bar{1}}} [P_{\bar{1}}(\mathbf{p}_{\bar{2}}, \mathbf{q}_{\bar{1}}) + \hat{f}_{N'}(\mathbf{p}_{(N+1)^{n'}}, \mathbf{p}_{(N+1)^{n'}})] \quad (10.35)$$

и, начиная с него,

$$\hat{f}_{\bar{n}}(\mathbf{p}_{\bar{n}+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{\bar{n}}} [P_{\bar{n}}(\mathbf{p}_{\bar{n}+1}; \mathbf{q}_{\bar{n}}) + \hat{f}_{\bar{n}-1}(\mathbf{p}_{\bar{n}})], \quad \bar{n} = \bar{2}, \dots, \bar{N}. \quad (10.36)$$

### 5. Каскад экспоненциального типа

Каскад экспоненциального типа, в котором каждый узел создает  $\rho$  разных потоков продукта, на  $\sigma$ -й стадии имеет  $\rho^{\sigma-1}$  узлов. На рис. 10.7 представлен случай  $\rho = 2$ ; здесь первая стадия состоит из одного узла, продукты которого поступают на два узла второй стадии, и так далее. Основной особен-

ностью экспоненциального каскада является отсутствие слияния потоков.

Чтобы избежать громоздких обозначений, проиллюстрируем только представленный на рисунке случай  $\rho = 2$  и  $\sigma = 3$ . Обозначим через  $p'_n$  верхний поток продукта, идущего из узла  $n$  к узлу  $2n$ , и через  $p''_n$  — нижний, где движение происходит от узла  $n$  к узлу  $(2n + 1)$ . Если узлы 4—7 не одинаковы,

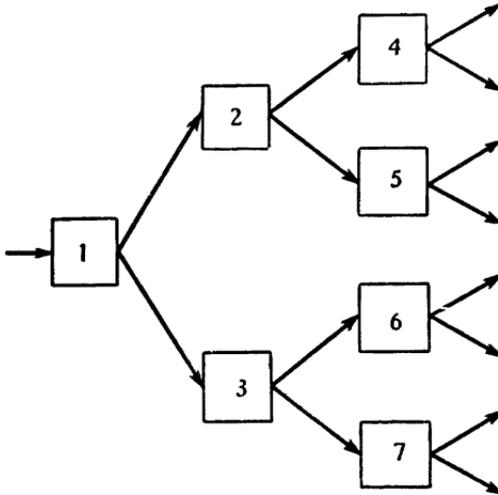


Рис. 10.7.

то сначала нужно определить оптимальный доход на каждом узле:

$$f_1^{(n)}(p) = \text{Max}_{q_1} [P_n(p, q_n)], \quad n = 4, \dots, 7. \quad (10.37)$$

Тогда для двух стадий

$$f_2^{(2)}(p'_1) = \text{Max}_{q_2} [P_2(p'_1, q_2) + f_1^{(4)}(p'_2) + f_1^{(5)}(p''_2)] \quad (10.38)$$

и

$$f_2^{(3)}(p''_1) = \text{Max}_{q_3} [P_3(p''_1, q_3) + f_1^{(6)}(p'_3) + f_1^{(7)}(p''_3)]. \quad (10.39)$$

Окончательно

$$f_3(p_0) = \text{Max}_{q_1} [P_1(p_0, q_1) + f_2^{(2)}(p'_1) + f_2^{(3)}(p''_1)]. \quad (10.40)$$

### 6. Треугольный каскад

Если отличительная особенность экспоненциального каскада, состоящая в том, что никакие два потока не объединяются вместе, отсутствует, то динамическое программирование

можно применять только ценой увеличения размерности вектора фазовых переменных. Рассмотрим представленный на рис. 10.8 простейший случай треугольного каскада.

Здесь на 5-й узел поступает  $p_2''$  и  $p_3'$ , и поэтому его максимальный доход является функцией их обоих:

$$f_1^{(5)}(p_2'', p_3') = \text{Max}_{q_5} [P_5(p_2'', p_3', q_5)]. \quad (10.41)$$

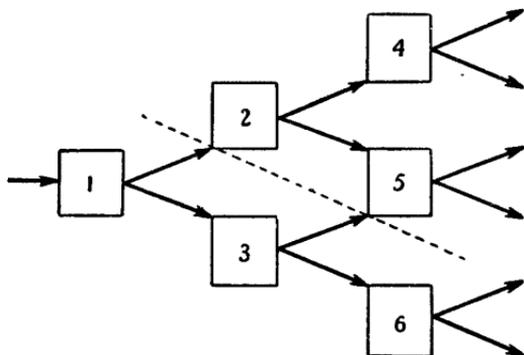


Рис. 10.8.

Для 4 и 6-го узлов имеет место обычный оптимум, как для случая одной ступени,

$$f_1^{(4)}(p_2') = \text{Max}_{q_4} [P_4(p_2', q_4)], \quad f_1^{(6)}(p_3'') = \text{Max}_{q_6} [P_6(p_3'', q_6)]. \quad (10.42)$$

Чтобы получить стратегию для двух шагов, нужно провести сечение, показанное пунктирной линией. Если  $f_2(p_1', p_3')$  есть максимальный доход от 2, 4 и 5-го узлов, то

$$f_2^{(2)}(p_1', p_3') = \text{Max} [P_2(p_1', q_2) + f_1^{(4)}(p_2') + f_1^{(5)}(p_2'', p_3')]. \quad (10.43)$$

Теперь можно добавить узел 3 и получить

$$f_2^{(3)}(p_1', p_1'') = \text{Max}_{q_3} [P_3(p_1''; q_3) + f_2^{(2)}(p_1', p_3') + f_1^{(6)}(p_3'')] \quad (10.44)$$

и в конце концов

$$f_3(p_0) = \text{Max}_{q_1} [P_1(p_0, q_1) + f_2^{(3)}(p_1', p_1'')]. \quad (10.45)$$

Видно, что в этом случае оптимизация проводится за счет удвоения числа фазовых переменных. В общем случае треугольного каскада с  $\sigma$  стадиями требуется увеличение числа этих переменных в  $(\sigma - 1)$  раз.

### 10.3. Контур с обратной связью, I (обращение направления)

Сейчас должно быть ясно, что попытка расширить границы применения принципа оптимальности наталкивается на трудности, обусловленные увеличением размерности.

Если примириться с этим неизбежным эффектом, то на успех можно надеяться в случае, где размерность не слишком велика, и, в частности, когда предусматриваются меры против увеличения этой размерности без необходимости. Вся проблема еще не обрела окончательной завершенности и формы, но уже можно наметить некоторые пути исследования. В этом параграфе контур обратной связи будет изучен с помощью метода Миттена и Немхаузера. В следующем параграфе будет использован метод объединения ветвей Уайлда. Для контура с обратной связью эти методы лучше, чем описываемый ниже «примитивный» принцип оптимальности. Однако последний все же находит применение в оптимизации систем с противотоком.

Суть метода Миттена и Немхаузера заключается в возможности обращения направления оптимизации. Ясно, что во многих случаях преобразование, осуществляемое на каждом этапе, можно обратить и вместо уравнения

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_n), \quad (10.46)$$

определяющего состояние на выходе как функцию состояния на входе и управления, взять уравнение

$$\mathbf{p}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_n(\mathbf{p}_n, \mathbf{q}_n), \quad (10.47)$$

которое дает ответ на вопрос, каково состояние на входе, для которого на этапе  $n$ , когда переменные управления равны  $\mathbf{q}_n$ , получается выход  $\mathbf{p}_n$ . Однако ранее мы утверждали, что оптимизация прямой цепи должна производиться в направлении, обратном потоку, т. е. сначала мы получаем  $f_1(\mathbf{p}_2)$ , затем  $f_2(\mathbf{p}_3)$  и так далее (см. рис. 2.3). Напомним, что  $f_N(\mathbf{p}_{N+1})$  означает максимальную величину целевой функции

$\sum_1^N P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n)$ , когда состояние на входе есть  $\mathbf{p}_{N+1}$ , т. е. когда состояние на входе задано, а конечное состояние  $\mathbf{p}_1$  свободно и должно быть выбрано оптимальным. Можно, однако, рассмотреть обратную задачу, если считать, что состояние на входе не задано, с тем чтобы выбрать его оптимальным, тогда как результирующее состояние  $\mathbf{p}_1$  предполагается фиксированным.

Запишем первую функцию  $f_N(\mathbf{p}_{N+1} | \mathbf{p}_1)$ , причем фазовые переменные справа от черты являются свободными, а слева —

заданными. Тогда, если  $\mathbf{p}_1$  задано, а  $\mathbf{p}_{N+1}$  свободно, оптимум равен  $f_N(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_{N+1})$ . Напомним также, что мы занимались задачами, где были заданы как  $\mathbf{p}_1$ , так и  $\mathbf{p}_{N+1}$  (например, задача Ia § 2.4); для них можно писать  $f_N(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1} | )$ . С другой стороны, найдя  $f_N(\mathbf{p}_{N+1} | \mathbf{p}_1)$ , можно было бы поинтересоваться, каким должен быть наивыгоднейший вектор  $\mathbf{p}_{N+1}$ , и в ответе получили бы  $f_N(| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1})$ .

Эти различные оптимумы связаны следующим образом:

$$f_N(\mathbf{p}_{N+1} | \mathbf{p}_1) = \text{Max}_{\mathbf{p}_1} f_N(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1} | ), \quad (10.48)$$

$$f_N(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{p}_{N+1}} f_N(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1} | ), \quad (10.49)$$

$$f_N(| \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{p}_1} f_N(\mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{p}_{N+1}} f_N(\mathbf{p}_{N+1} | \mathbf{p}_1). \quad (10.50)$$

Оптимум с фиксированным  $\mathbf{p}_1$  и свободным  $\mathbf{p}_{N+1}$  не столь неестествен, как это может показаться с первого взгляда. Более того, его можно получить последовательно, переходя от ступени  $N$  к ступени 1. Доход от единственной ступени (в этом случае ступени  $N$ ), когда задано состояние на ее выходе, равен  $f_1(\mathbf{p}_N | \mathbf{p}_{N+1})$ . Используя обратное преобразование, доход  $P_N(\mathbf{p}_{N+1}, \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N)$  можно записать как

$$\bar{P}_N(\mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N) = P_N(\bar{\mathbf{F}}_N(\mathbf{p}_N; \mathbf{q}_N), \mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N). \quad (10.51)$$

Таким образом,

$$f_1(\mathbf{p}_N | \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_N} \bar{P}_N(\mathbf{p}_N, \mathbf{q}_N). \quad (10.52)$$

Но для построения оптимальных стратегий, когда задано конечное состояние, можно сам принцип оптимальности обратить и утверждать, что, каким бы ни было конечное состояние и управление, предшествующие управления должны образовывать оптимальную стратегию по отношению к состоянию, являющемуся их результатом. Для ступеней  $N$  и  $N-1$  имеем

$$f_2(\mathbf{p}_{N-1} | \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{N-1}} [\bar{P}_{N-1}(\mathbf{p}_{N-1}, \mathbf{q}_{N-1}) + f_1(\mathbf{p}_N | \mathbf{p}_{N+1})], \quad (10.53)$$

и в общем случае

$$f_{r+1}(\mathbf{p}_{N-r} | \mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{N-r}} [\bar{P}_{N-r}(\mathbf{p}_{N-r}, \mathbf{q}_{N-r}) + f_r(\mathbf{p}_{N-r+1} | \mathbf{p}_{N+1})],$$

$$r = 0, 1, \dots, N-1. \quad (10.54)$$

Более привычную задачу отыскания  $f_N(\mathbf{p}_{N+1} | \mathbf{p}_1)$  можно решить косвенным путем: можно найти сначала  $f_N(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{N+1} | )$ ,

а затем воспользоваться уравнением (10.48). Чтобы сделать это, нужно учесть, что если заданы и  $p_{N+1}$  и  $p_N$ , то на допустимое управление  $q_N$  имеются ограничения. В некоторых случаях (см. задачу Ia § 2.4)  $q_N$  может быть полностью определено, в других же  $p_N$  и  $p_{N+1}$  могут накладывать друг на друга ограничения. Тем не менее можно записать:

$$f_1(p_N, p_{N+1} |) = \underset{q_N}{\text{Max}} P(p_N, q_N), \quad (10.55)$$

не забывая о том, что у нас может и не быть возможности выбирать  $q_N$ , так что сохранение символа Max в этом случае является искусственным. После этого применяется уравнение

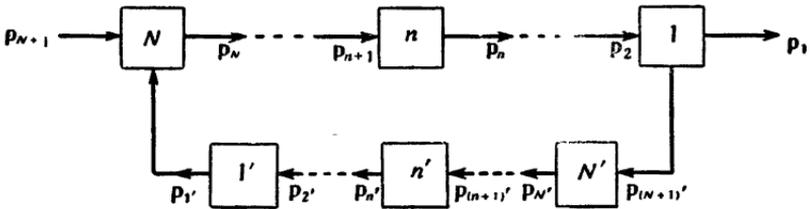


Рис. 10.9.

(10.54), в котором черта в скобках находится справа от обоих аргументов. Это эквивалентно рассмотренному ниже примитивному принципу максимума, однако здесь нужно отметить тот факт, что, даже когда задано состояние на входе, возможна оптимизация в направлении движения потока.

Рассмотрим теперь показанный на рис. 10.9 контур с обратной связью. Ни одна из ступеней, за исключением ступеней  $N$  и  $1$ , не имеет более чем одного входа или выхода. Для них уравнение процесса, происходящего в ступени, записывается так:

$$p_N = F_N(p_{N+1}, p_1'; q_N), \quad (10.56)$$

$$p_1 = F_1(p_2; q_1), \quad (10.57)$$

$$p_{(N+1)'} = F_1'(p_2; q_1). \quad (10.58)$$

По методу Миттена и Немхаузера сначала следует оптимизировать ступень  $1$  при условии, что  $p_{(N+1)'}$  задано. Пусть

$$g_1(p_2, p_{(N+1)'}) = \underset{q_1}{\text{Max}} P_1(p_2, q_1) \quad (10.59)$$

при условии, что

$$F_1'(p_2, q_1) = p_{(N+1)'}. \quad (10.60)$$

Тогда, сохраняя  $\mathbf{p}_{(N+1)'}$  как параметр, обычным образом можно двигаться вдоль главной ветви. Таким образом, для  $n = 1, 2, \dots, N-1$

$$g_n(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{p}_{(N+1)'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{q}_n) + g_{n-1}(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{(N+1)'})]. \quad (10.61)$$

Будем теперь считать постоянным  $\mathbf{p}_N$  и проведем оптимизацию в направлении потока в цепи обратной связи. Положим

$$h_1(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{N'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{N'}} [\bar{P}_{N'}(\mathbf{p}_{N'}, \mathbf{q}_{N'}) + g_{N-1}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{(N+1)'})], \quad (10.62)$$

где черта означает, что с помощью обратного преобразования

$$\mathbf{p}_{(N+1)'} = \bar{\mathbf{F}}_{N'}(\mathbf{p}_{N'}, \mathbf{q}_{N'}) \quad (10.63)$$

$P_{N'}$  представлена как функция  $\mathbf{p}_{N'}$ , это же преобразование используется для получения второго аргумента функции  $g_{N-1}$ . Поэтому можно записать, что

$$h_{N'-n+1}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{n'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{n'}} [\bar{P}_{n'}(\mathbf{p}_{n'}, \mathbf{q}_{n'}) + h_{N'-n'}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{n'+1})], \quad (10.64)$$

$n' = N' - 1, N' - 2, \dots, 1'$ . Отметим, что индекс при  $h$  равен числу ступеней в цепи обратной связи, которые уже были рассмотрены, так что  $h_{N'}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_1)$  есть максимальный доход от всех ступеней, исключая ступень  $N$ , при условии, что  $\mathbf{p}_N$  и  $\mathbf{p}_{1'}$  заданы. Теперь можно ввести в рассмотрение ступень  $N$ , если положить

$$f_{N+N'}(\mathbf{p}_{N+1}) = \text{Max}_{\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{q}_N} [P_N(\mathbf{p}_{N+1}, \mathbf{p}_{1'}, \mathbf{q}_N) + h_{N'}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{1'})], \quad (10.65)$$

где мы уже не считаем вектор  $\mathbf{p}_{1'}$  фиксированным, а должны иметь возможность найти его оптимальное значение.

Ясно, что метод столь же успешно можно применить для случаев, когда либо на одном, либо на обоих концах имеются ветви. Если  $\mathbf{p}_1$  подается на вход ветви на левом конце, то можно сложить максимальный доход в этой ветви, который является функцией  $\mathbf{p}_1$ , с  $P_1$  из уравнения (10.59). Если  $\mathbf{p}_{N+1}$  есть результат процесса в последовательности предшествующих ступеней, то всю систему ступеней, представленную на рис. 10.9, можно рассматривать как дополнительную ступень, доход от которой равен  $f_{N+N'}(\mathbf{p}_{N+1})$ .

Оптимизация контура с обратной связью вызывает увеличение размерности, связанное с введением в функции  $g_n$  и  $h_{n'}$  векторов  $\mathbf{p}_{(N+1)'}$  и  $\mathbf{p}_N$  в качестве параметров.

### 10.4. Контур с обратной связью, II (объединение ветвей)

Суть подхода Уайлда к задаче с обратной связью заключается в том, что между ступенью  $N$  рис. 10.9 и всеми другими ступенями, включая ступень 1, проводится различие. Ступень 1, как и все другие, кроме ступени  $N$ , имеет только один независимый вектор фазовых переменных на входе. Тот факт, что при этом на выходе имеются два различных вектора фазовых переменных  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_{(N+1)'}$ , не является существенным, и в этом смысле наличие  $\mathbf{p}_{(N+1)'}$  не вносит существенной разницы. Даже в том случае, когда  $\mathbf{p}_1$  являлся бы, как это предполагалось в конце последнего параграфа, входом прямой цепи, например из  $M$  ступеней, то, проведя их оптимизацию в первую очередь, можно было бы получить выражение максимального дохода от этих ступеней в виде функции от  $\mathbf{p}_1$ , скажем  $F_M(\mathbf{p}_1)$ . Далее, заменив  $P_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1)$  на

$$\tilde{P}_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1) = P_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1) + F_M[\mathbf{F}_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1)], \quad (10.66)$$

рассматриваемую ветвь можно объединить со ступенью 1.

Ступень  $N$  отличается от других ступеней наличием двух векторов фазовых переменных на входе  $\mathbf{p}_{N+1}$  и  $\mathbf{p}_1'$ . При этом менее очевидно, что в ступень  $N$  можно включить цепочку, предшествующую  $\mathbf{p}_{N+1}$ , однако этого можно достичь, если провести оптимизацию в направлении потока. Так, когда имеются  $R$  ступеней, на выходе которых вектор состояния равен  $\mathbf{p}_{N+1}$ , а оптимальный доход от них как функция  $\mathbf{p}_{N+1}$  есть  $G_R(\mathbf{p}_{N+1})$ , то можно рассмотреть

$$\tilde{P}_N(\mathbf{p}_1', \mathbf{q}_N) = \text{Max}_{\mathbf{p}_{N+1}} [P_N(\mathbf{p}_{N+1}, \mathbf{p}_1', \mathbf{q}_N) + G_R(\mathbf{p}_{N+1})]. \quad (10.67)$$

Оптимизация проводится по фазовой переменной  $\mathbf{p}_{N+1}$ , и достигаемое при этом максимальное значение есть функция  $\mathbf{p}_1'$  и  $\mathbf{q}_N$ . Здесь происходит частичное увеличение размерности, но в то же время получается явное выражение дохода для ступени, которая, по сути, заменяет всю предшествующую ей цепочку. Таким образом, мы снова приходим к ступени, подобной той, что представлена на рис. 10.9, с тем лишь отличием, что доходы ступеней 1 и  $N$  равны  $\tilde{P}_1$  и  $\tilde{P}_N$ ; в дальнейшем нет необходимости рассматривать  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_{N+1}$ . Если, кроме заданного вектора  $\mathbf{p}_{N+1}$ , больше нет ветвей, подходящих к ступени  $N$ , то в выражениях для  $P_N$  и  $F_N$  этот вектор можно рассматривать как постоянный, и тем самым задача сведена к уже рассмотренной.

Казалось бы на первый взгляд, полученная структура замкнутого на самого себя контура бесполезна, однако его

можно оптимизировать, затрачивая такое же количество труда, какое требовалось в методе Немхаузера. Разорвем контур в любой точке, например между ступенями  $1'$  и  $N$ , и зафиксируем  $\mathbf{p}'_1$ . Далее цепь ступеней  $1', \dots, N', 1, \dots, N$  можно оптимизировать последовательно. Ниже приведены типичные уравнения. Для ступени  $1'$

$$\hat{f}_1(\mathbf{p}_{2'}, \mathbf{p}_{1'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_{1'}} P_{1'}(\mathbf{p}_{2'}, \mathbf{q}_{1'}) \quad (10.68)$$

при условии, что

$$\mathbf{F}_{1'}(\mathbf{p}_{2'}, \mathbf{q}_{1'}) = \mathbf{p}_{1'}. \quad (10.69)$$

Для ступеней  $2', \dots, N'$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{r'}(\mathbf{p}_{(r+1)'}, \mathbf{p}_{r'}) &= \text{Max}_{\mathbf{q}_{r'}} [P_{r'}(\mathbf{p}_{(r+1)'}, \mathbf{q}_{r'}) + \hat{f}_{(r-1)' }(\mathbf{p}_{r'}, \mathbf{p}_{r'})], \\ r' &= 2', 3', \dots, N'. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Для ступени 1

$$\hat{f}_{N'+1}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_{1'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_1} [P_1(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1) + \hat{f}_{N'}(\mathbf{p}_{(N+1)'}, \mathbf{p}_{1'})]. \quad (10.71)$$

Для ступеней 2, ...,  $N-1$

$$\begin{aligned} \hat{f}_{N'+n}(\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{p}_{1'}) &= \text{Max}_{\mathbf{q}_n} [P_n(\mathbf{p}_{n+1}) + \hat{f}_{N'+n-1}(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_{1'})], \\ n &= 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Представив влияние остальной цепи через  $P_N$  и положив

$$\hat{f}_{N'+N}(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{p}_{1'}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_N} [P_N(\mathbf{p}_{1'}, \mathbf{q}_N) + \hat{f}_{N'+N-1}(\mathbf{p}_N, \mathbf{p}_{1'})], \quad (10.73)$$

отождествим для ступени  $N$  вектор  $\mathbf{p}_{1'}$  с вектором фазовых переменных на входе.

Теперь вспомним, что мы не вправе фиксировать  $\mathbf{p}_{1'}$ , а должны выбрать его оптимальным. Таким образом, окончательное выражение оптимума таково:

$$\text{Max}_{\mathbf{p}'_1} [\hat{f}_{N'+N'}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_1)]. \quad (10.74)$$

## 10.5. Примитивный принцип оптимальности

Оптимизация систем (типа рассмотренных выше), у которых задано состояние как на входе, так и на выходе, проводится с помощью принципа оптимальности. Этот принцип настолько очевиден, что мы будем называть его «примитивным», чтобы отличить его от общего понятия, введенного Беллманом.

ном. Он утверждает, что любая совокупность ступеней, преобразующая друг в друга два заданных состояния, должна совершать это преобразование оптимальным образом. Поэтому для прямой цепи с учетом наших стандартных обозначений и черты, введенной в § 10.3,

$$f_1(p_1, p_2 |) = \text{Max}_{q_1} [P_1(p_2, q_1)], \quad (10.75)$$

где

$$F_1(p_2, q_1) = p_1.$$

Мы видим, что это ограничение несколько уменьшает свободу выбора  $q_1$ , что иногда приводит к общим ограничениям для  $p_2$  и  $p_1$ . Прimitивный принцип оптимальности утверждает, что

$$\begin{aligned} f_n(p_1, p_{n+1} |) &= \text{Max}_{q_n} [P_n(p_{n+1}, q_n) + f_{n-1}(p_1, p_n |)] = \\ &= \text{Max}_{q_1} [P_1(p_2, q_1) + f_{n-1}(p_2, p_{n+1} |)], \quad (10.76) \end{aligned}$$

что соответствует динамическому программированию как в прямом, так и в обратном направлениях. Однако он также утверждает, что

$$f_n(p_1, p_{n+1} |) = \text{Max}_{p_{r+1}} [f_r(p_1, p_{r+1} |) + f_{n-r}(p_{r+1}, p_{n+1} |)]. \quad (10.77)$$

Иными словами, если считать, что промежуточное состояние  $p_{r+1}$  можно не фиксировать, и при этом имеется возможность соответствующим образом найти его, то цепь можно разорвать в любой точке и оптимизировать две части по отдельности. Нетрудно видеть, что по существу именно этот факт и использовался в методе Немхаузера при оптимизации вдоль цепи или в методе Уайлда при исследовании замкнутого контура.

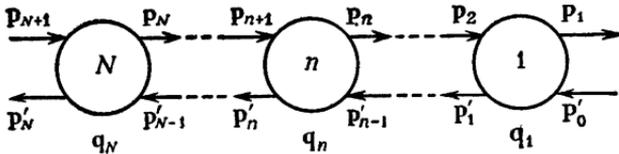
Плата состоит в увеличении числа фазовых координат, которые нужно учитывать. Принцип можно применить для цепи с обратной связью, но поскольку мы уже описали два метода решения этой задачи, то вместо этого рассмотрим пример процесса с противотоком.

## 10.6. Системы с противотоком

Применение примитивного принципа к противоточной системе довольно интересным образом связано с принципом Беллмана для расширенного понятия состояния.

Рассматриваемая система и условные обозначения для нее приведены на рис. 10.10. Поскольку движение происходит в обоих направлениях, то порядок нумерации безразличен,

однако условимся, что состояние на выходе ступени  $n$  имеет индекс  $n$ , а два направления движения различаются векторами фазовых переменных (со штрихами и без них). Как обычно, уравнение, описывающее этап, выражает состояние



Р и с. 10.10.

в конце этапа как функцию начальных состояний и управления

$$p_n = F_n(p_{n+1}, p'_{n-1}; q_n), \quad (10.78)$$

$$p'_n = F'_n(p_{n+1}, p'_{n-1}; q_n). \quad (10.79)$$

В этом случае, как и ранее, доход от  $n$ -й ступени, который должен быть функцией всех четырех векторов состояния и управления, можно выразить как

$$P_n(p_{n+1}, p'_{n-1}; q_n). \quad (10.80)$$

Однако часто удается разрешить уравнения и использовать их для вычисления  $p_n$  и  $p'_{n-1}$  через  $p_{n+1}$  и  $p'_n$  в виде

$$p_n = R_n(p_{n+1}, p'_n; q_n), \quad (10.81)$$

$$p'_{n-1} = R'_n(p_{n+1}, p'_n; q_n). \quad (10.82)$$

Через эти переменные можно также выразить доход  $P_n$ .

Рассмотрим ступень 1; она связывает состояния  $p'_0$ ,  $p_1$ ,  $p'_1$ ,  $p_2$ . В общем случае не все из этих векторов фазовых переменных можно задавать произвольно, поскольку некоторые состояния  $p_1$ ,  $p'_1$  будут недостижимы из состояний  $p'_0$ ,  $p_2$  при допустимых управлениях  $q_1$ . Если  $q_1$  можно выбирать, то эту свободу выбора нужно использовать для максимизации  $P_1$ . В действительности задание  $p_1$  несущественно, поскольку оно не влияет на остальную часть процесса, а  $p'_0$  задано для всего процесса и может рассматриваться как параметр. Таким образом, можно записать

$$f_1(p_2, p'_1; p'_0) = \underset{q_1}{\text{Max}} P_1(p_2, p'_1; q_1) \quad (10.83)$$

при условии, что  $p'_0$  задается уравнением (10.82) при  $n = 1$ . Это условие накладывает ограничение на управляющие пере-

менные, фактически же оно налагает ограничение и на фазовые переменные. Если бы имелся только один этап с состояниями на входе  $p'_0$  и  $p_2$ , то далее необходимо было бы выбрать  $p_1$  так, чтобы максимизировать  $f_1$ . Поэтому в итоге для одношагового процесса получаем

$$g_1(p_2, p'_0) = \underset{p_1}{\text{Max}} [f_1(p_2, p'_1; p'_0)]. \quad (10.84)$$

Для двухшагового случая уравнения процесса возьмем в виде (10.81) и (10.82). Если рассматривать вектор  $p'_0$  как заданный и выбирать  $q_2$ , то  $p_2$  и  $p'_1$  можно вычислить, а ступень 1 должна связать эти состояния. Это нужно сделать с максимальным доходом, поэтому

$$f_2(p_3, p'_2; p'_0) = \underset{q_2}{\text{Max}} [P_2(p_3, p'_2; q_2) + f_1(p_2, p'_1; p'_0)]. \quad (10.85)$$

Если бы имелось только две ступени, то в итоге нужно было бы оптимальным образом выбрать  $p'_2$ , чтобы получить

$$g_2(p_3, p'_0) = \underset{p'_2}{\text{Max}} [f_2(p_3, p'_2; p'_0)]. \quad (10.86)$$

В общем случае

$$f_n(p_{n+1}, p'_n; p'_0) = \underset{q_n}{\text{Max}} [P_n(p_{n+1}, p'_n; q_n) + f_{n-1}(p_n, p'_{n-1}; p'_0)] \quad (10.87)$$

и

$$g_n(p_{n+1}, p'_0) = \underset{p'_n}{\text{Max}} [f_n(p_{n+1}, p'_n; p'_0)], \quad n = 2, \dots, N. \quad (10.88)$$

Здесь отчетливо видны осложнения, связанные с увеличением размерности, и любая попытка путем отыскания рекуррентной связи между  $g_n$  избежать этого, обречена на неудачу. Интересно также отметить, что в уравнении (10.87) используется принцип оптимальности Беллмана с расширенной интерпретацией понятия «состояния, получающегося при действии начального управления».

Ввиду того что уравнения можно записать в форме (10.81) и (10.82), пара векторов фазовых переменных  $(p_n, p'_{n-1})$  может рассматриваться как состояние, получающееся при действии управления  $q_n$  на вектора  $(p_{n+1}, p'_n)$ . Это согласуется с математической записью уравнений, но не с физической

ситуацией, в которой состояния могут задаваться на входе, а не на выходе.

В соответствии с этим мы не фиксируем  $p'_N$ , а выбираем его оптимальное значение.

### БИБЛИОГРАФИЯ

- 10.1. Контрпример, приведенный на стр. 138, взят из статьи Jackson R., Comments on the Paper «Optimum Cross-Current Extraction with Product Recycle by D. E. Rudd and E. D. Blum», *Chem. Eng. Sci.*, 18 (1963), 215.
- 10.2. Ряд примеров на прямоточную систему химических реакторов приведен в книге Aris R., *The Optimal design of chemical reactors*, New York, Academic Press, 1961.
- Каскад, показанный на рис. 10.4, рассматривался С. М. Робертсом в докладе на конференции Американского института химической технологии в Нью-Йорке в декабре 1961 г. (См. доклад № 82 в трудах этой конференции.) Много интересных примеров содержится в его книге Roberts S. M., *Dynamic Programming in Chemical Engineering and Process Control*, New York, Academic Press, 1964. (Русский перевод: Робертс С., *Динамическое программирование в процессах химической технологии и методы управления*, «Мир», М., 1965.)
- Примеры ветвящихся и прямоточных процессов (так же, как и прекрасное введение в динамическое программирование с подробными примерами) можно найти в работе Mitten L., Nemhauser G., *Multistage Optimization*, *Chem. Eng. Prog.*, 59 (1963), 52.
- 10.3. Приведенное в этом параграфе рассмотрение контура с обратной связью следует вышеупомянутой работе Миттена и Немхаузера. На содержание этого и следующего параграфов большое влияние оказала переписка автора с Уайлдом и Немхаузером, и некоторые идеи, развиваемые в этих параграфах, ранее нигде не публиковались.
- 10.6. Dranoff J. S., Mitten L. G., Stevens, W. F., Wanninger L. A., Application of Dynamic Programming to Countercurrent Flow Processes, *Operations Res.*, 9 (1961), 338.
- В статье рассматривается функциональное уравнение для функций  $g_n$  § 10.5, которое следует исправить в свете их последней работы в *Operations Res.*, 10 (1962), однако в последней работе не оговаривается оптимизация по промежуточному состоянию.

## Некоторые смежные математические вопросы

Мы бегло коснемся двух математических понятий, которые по существу очень близки к рассматриваемым проблемам. Они, однако, несколько глубже тех, о которых говорились ранее, и хотя нам кажется, что эти понятия будут разъяснены достаточно подробно, все же мы не станем иллюстрировать их большим числом примеров, поскольку это затруднило бы некоторых читателей.

### 11.1. Дискретная форма принципа максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина и его приложения к непрерывным системам широко известны. Он эквивалентен принципу оптимальности и может привести к той же системе уравнений. Менее известен дискретный вариант этого принципа, который был получен Чангом и Кацем и который мы, пользуясь нашими стандартными обозначениями, изложим ниже.

Вернемся к основному дискретному процессу гл. 2, в котором переход от ступени  $n + 1$  к ступени  $n$  описывается уравнением

$$p_n = F(p_{n+1}; q_n) \quad (11.1)$$

или

$$p_{ni} = F_i(p_{n-1}; q_n), \quad i = 1, \dots, s, \quad (11.2)$$

где  $p_n = (p_{n1}, \dots, p_{ns})$ , и цель состоит в максимизации  $p_{11}$ . Позже мы увидим, как с помощью введения дополнительных фазовых переменных можно более общий процесс, для которого  $F$  изменяется от этапа к этапу, а целевая функция равна  $\sum P_n$ , свести к этому случаю. Уравнение процесса позволяет переходить шаг за шагом от этапа  $N$  к этапу 1 и в итоге для заданных  $p_{N+1}$  и  $q_N, \dots, q_1$  вычислить  $p_1$ .

Кац вводит совокупность векторов  $z_n = (z_{n1}, \dots, z_{ns})$ , сопряженных фазовому вектору, которые вычисляются в обратном порядке с помощью системы уравнений

$$z_{n+1, j} = \sum_{i=1}^s z_{ni} \frac{\partial F_i(p_{n+1}; q_n)}{\partial p_{n+1, j}}. \quad (11.3)$$

Поскольку величина  $p_{11}$  максимизируется, полагаем

$$\begin{aligned} z_{11} &= 1, \\ z_{1j} &= 0, \quad j = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Тогда принцип максимума утверждает, что на каждом шаге  $q_n$  нужно выбирать так (учитывая, конечно, заданные ограничения на  $q$ ), чтобы выражение

$$H_n = \sum_{i=1}^s z_{ni} F_i(p_{n+1}; q_n) \quad (11.5)$$

являлось максимальным<sup>1)</sup>.

Для случая единственной ступени это утверждение очевидно, так как  $p_2$  задано и  $z_{11} = 1$ , поэтому

$$H_1 = F_1(p_2; q_1), \quad (11.6)$$

и максимизация этого выражения соответствует максимизации  $p_{11}$ , что и требуется.

Пусть теперь из уравнений (11.3) можно вычислить  $z_{2j}$  и

$$z_{2j} = \frac{\partial F_1(p_2; q_1)}{\partial p_{2j}}. \quad (11.7)$$

Но  $q_1$  уже было выбрано в (11.6) при максимизации  $F_1$ , так что, если обозначить этот максимум через

$$f_1(p_2) = \text{Max}_{q_1} [p_{11}], \quad (11.8)$$

то

$$z_{2j} = \frac{\partial f_1}{\partial p_{2j}}. \quad (11.9)$$

Кроме того,

$$H_2 = \sum_{i=1}^s F_i(p_3; q_2) (\partial f_1 / \partial p_{2i}), \quad (11.10)$$

и если мы хотим максимизировать это выражение по  $q_2$ , то нужно либо сделать так, чтобы удовлетворялись условия  $\partial H_2 / \partial q_{2n} = 0$ , либо найти точку на границе допустимой области, в которой эти производные положительны. Но

$$\frac{\partial H_2}{\partial q_{2k}} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial q_{2k}} \frac{\partial f_1}{\partial p_{2i}} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial p_{2i}}{\partial q_{2k}} \frac{\partial f_1}{\partial p_{2i}}, \quad (11.11)$$

<sup>1)</sup> Принцип максимума для дискретных задач оптимального управления, вообще говоря, не верен. Поэтому дальнейшие рассуждения автора не совсем точны. Правильную формулировку условий экстремума можно найти, например, в статье А. И. Пропося «Условия оптимальности для дискретных процессов», приложение к книге Фань Лянь-цзень и Вань Чу-сен «Дискретный принцип максимума», М., Мир, 1967. — *Прим. ред.*

так что фактически мы имеем

$$\text{Max}_{\mathbf{q}_2} [f_1(\mathbf{p}_2)], \quad (11.12)$$

что в точности соответствует процедуре динамического программирования. Если этот максимум обозначить  $f_2(\mathbf{p}_3)$ , то из уравнения (11.3) получаем, что

$$z_{3j} = \partial f_2 / \partial p_{3j}. \quad (11.13)$$

Отсюда следует, что определение максимума  $H_n$  на каждом шаге будет в точности соответствовать процедуре

$$f_n(\mathbf{p}_{n+1}) = \text{Max}_{\mathbf{q}_m} [f_{n-1}(\mathbf{p}_n)], \quad (11.14)$$

с которой мы уже знакомы.

## 11.2. Родственные задачи и их формулировки

Более общая задача, в которой

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) \quad (11.15)$$

и целевая функция есть

$$O = \sum_1^N P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad (11.16)$$

может быть сведена к предыдущей с помощью следующих преобразований. Определим новый вектор состояния как

$$p'_{ni} = \sum_n^N P_r(\mathbf{p}_{r+1}; \mathbf{q}_r), \quad (11.17)$$

$$p'_{n,i+1} = p_{n,i} \quad i = 1, \dots, s, \quad (11.18)$$

$$p'_{n,s+2} = n - 1. \quad (11.19)$$

Тогда получим следующие уравнения процесса:

$$p'_{ni} = p'_{n+1,i} + P_n(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad (11.20)$$

$$p'_{n,i+1} = F_{n,i}(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad i = 1, \dots, s, \quad (11.21)$$

$$p'_{n,s+2} = p'_{n+1,s+2} - 1; \quad (11.22)$$

и  $F_{n,i}(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n)$  можно рассматривать как  $F_i(\mathbf{p}_{n+1}, n; \mathbf{q}_n) = F_i(p'_{n+1}; \mathbf{q}_n)$ , и очевидно, что цель состоит в максимизации  $p_{11}$ .

Иногда метод формулируется в той форме, которую называют гамильтоновой. Если, как и выше, определить гамильтониан как

$$H_n = H_n(\mathbf{z}_n, \mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) = \sum_{i=1}^s z_{ni} F_i(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n) = \mathbf{z}_n \cdot \mathbf{F}(\mathbf{p}_{n+1}; \mathbf{q}_n), \quad (11.23)$$

то уравнения можно записать так:

$$p_{ni} = \frac{\partial H_n}{\partial z_{ni}} \quad \text{или} \quad \mathbf{p}_n = \nabla_{\mathbf{z}} H_n, \quad (11.24)$$

$$z_{n+1,i} = \frac{\partial H_n}{\partial p_{n+1,i}} \quad \text{или} \quad \mathbf{z}_{n+1} = \nabla_{\mathbf{p}} H_n. \quad (11.25)$$

Здесь заданы  $\mathbf{p}_{n+1}$  и  $\mathbf{z}_1$ , а  $\mathbf{q}_n$  всегда выбирается так, чтобы максимизировать гамильтониан.

Наша цель заключалась в том, чтобы установить связь между данным методом и динамическим программированием, а не в том, чтобы изложить данный метод независимо. Доказательство Каца справедливости дискретного принципа максимума основано на совершенно ином подходе.

### 11.3. Соображения по поводу вычислений

Подобно тому как в динамическом программировании мы вынуждены были вычислять больше того, что было действительно необходимо для любого  $\mathbf{p}_{N+1}$  (нам приходилось запоминать значения  $f_n(\mathbf{p}_{n+1})$  для  $\mathbf{p}_{n+1}$  от  $n = 1$  до  $N - 1$ ), в методе Понтрягина мы также сталкиваемся с необходимостью решать системы уравнений, у которых одна половина граничных условий задана на одном конце, а вторая на другом. Если бы только имелась возможность узнать, какое конечное состояние  $\mathbf{p}_1$  соответствует заданному  $\mathbf{p}_{n+1}$  и оптимальной стратегии, то можно было бы воспользоваться алгоритмом Каца и решать задачу в обратном направлении, начиная с заданных  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{z}_1$ . Если бы поступать таким образом в общем случае, то было бы мало надежды на то, что мы попадем в заданное  $\mathbf{p}_{N+1}$ , а бессистемный перебор значений  $\mathbf{p}_1$  может быть обременительным. Если требуется охватить целую область начальных значений, то предпочтительней будет процедура динамического программирования.

Однако, оказывается, имеется способ организации нахождения решения уравнений Каца по методу проб и ошибок. Он основан на том, что  $z_{ni}$ , согласно § 1 этой главы, есть  $\partial p_1 / \partial p_{ni}$ . Предположим, что при решении более общей задачи § 2 имеются некоторые соображения по поводу того, какое конеч-

ное состояние  $(p'_{12}, \dots, p'_{1, s+1}) = (p_{11}, \dots, p_{1s})$  соответствует начальному состоянию  $\mathbf{p}_{N+1}$ , которое нужно достичь. Сопряженные переменные основной задачи, конечно, будут удовлетворять граничным условиям  $z'_{11} = 1$ ,  $z'_{1i} = 0$ ,  $i = 2, \dots, s+2$  и  $z'_{ni}$  будет равно  $\partial f_{n-1} / \partial p_{ni}$ . Далее, дополнительно к основной задаче нужно одновременно вычислять  $s$  решений для сопряженных переменных  $z_n^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, s$ . Конечные значения  $z_1^{(k)}$  есть

$$z_{1, k+1}^{(k)} = 1, \quad z_{1j}^{(k)} = 0, \quad j \neq k+1. \quad (11.26)$$

Это соответствует тому, как будто бы мы хотели решить  $s$  различных задач максимизации  $p_{11}, \dots, p_{1s}$  поочередно. При этом во всех случаях  $\mathbf{q}_n$  выбирается так, чтобы максимизировать гамильтониан  $H_n$ , образованный с помощью сопряженного вектора  $\mathbf{z}'_n$ , т. е. в конце концов мы находим оптимальную стратегию. Отсюда следует, что

$$z_{nj}^{(k)} = \frac{\partial p_{1k}}{\partial p_{nj}}, \quad (11.27)$$

причем  $p_1$  связано с  $p_n$  уравнениями процесса, в которых содержится искомая оптимальная стратегия. Таким образом,

$$z_{N+1, j}^{(k)} = \frac{\partial p_{1k}}{\partial p_{N+1, j}} \quad (11.28)$$

есть элемент якобиана — матрицы производных конечных состояний по соответствующим начальным. Если наши пробные начальные значения  $\mathbf{p}_1$  привели бы к таким  $\mathbf{p}_{N+1}$ , которые отличаются от требуемых  $\mathbf{p}_{N+1}$ , то тогда

$$p_{1k} = \bar{p}_{1k} + \sum_{j=1}^s (p_{N+1, j} - \bar{p}_{N+1, j}) z_{N+1, j}^{(k)} \quad (11.29)$$

должны были бы быть лучшим вариантом начальных условий.

При решении конкретных задач данный метод представляется полезным при преодолении трудностей, связанных с размерностью.

#### 11.4. Преобразование максимума

Недавно Беллман и Каруш предложили очень интересный способ решения некоторых задач на оптимум. Здесь мы сможем дать читателю лишь общее представление об этом методе, поскольку все его возможности и достоинства еще не

раскрыты. Точно так же, как с помощью преобразований Фурье дифференциальные уравнения можно преобразовать в алгебраические, так и с помощью преобразования максимума можно преобразовать в алгебраические некоторые функциональные уравнения, содержащие операцию максимизации. Алгебраические уравнения решаются много легче дифференциальных, и когда решение первых найдено, то с помощью обратного преобразования возвращаются к исходной задаче.

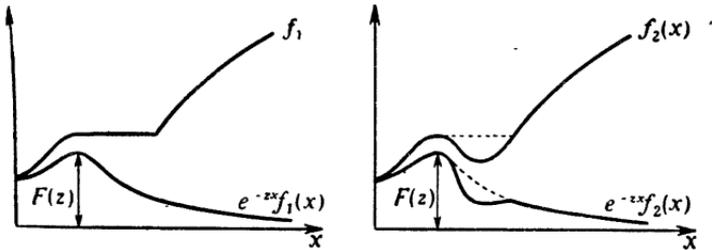


Рис. 11.1.

Для всякой функции  $f(x)$ ,  $x \geq 0$  определим соответствующую ей функцию

$$F(z) = \text{Max}_{x \geq 0} [e^{-xz} f(x)]. \quad (11.30)$$

Естественно, это преобразование существует только для определенного класса функций, причем можно легко установить, что максимум существует, если  $f(x)$  непрерывна и всюду ограничена некоторой степенью  $x$  (иными словами,  $f(x)/x^c$  остается ограниченной для некоторого  $c$  при  $x \rightarrow \infty$ ). Преобраз  $f(x)$  для данного  $F(z)$  может быть не единственным. Например, на рис. 11.1 показаны две функции вместе с произведениями  $e^{-xz}f(x)$ . Понятно, что максимум функции  $e^{-xz}f(x)$  достигается в тех точках, где  $f'(x)$  положительна, поэтому эти две функции, которые отличаются только там, где  $f_2(x)$  убывает, имеют одинаковые преобразования  $F(z)$ . Вследствие этого можно ограничиться монотонными неубывающими функциями  $f(x)$ . В частности, если

$$f(x) = ax^b, \quad (11.31)$$

то

$$F(z) = \text{Max}_{x \geq 0} [e^{-xz} ax^b] = ae^{-b} (b/z)^b. \quad (11.32)$$

Обратное преобразование для функции  $f(x)$ , которая является почти всюду дифференцируемой, положительной, непрерывной и неубывающей, задается соотношением

$$f(x) = \text{Min}_{z \geq 0} [e^{xz} F(z)]. \quad (11.33)$$

Из уравнения (11.30) следует, что

$$F(z) > e^{-xz} f(x)$$

за исключением одной точки  $x = x^0(z)$ , где  $F(z) = e^{-xz} f(x)$ . Из того, что  $F(z) > e^{-xz} f(x)$ , следует, что  $f(x) < e^{xz} F(z)$ . Здесь

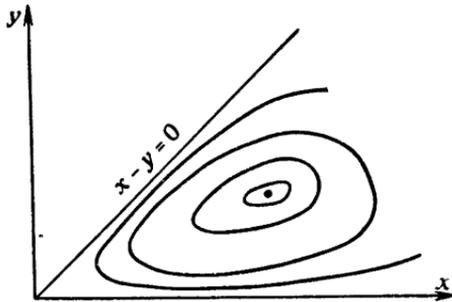


Рис. 11.2.

снова имеет место строгое неравенство, за исключением точки  $z = z^0(x)$ ; здесь  $z^0$  — обратная функция для  $x^0$ . Обратная функция существует, если  $(ff' - f'^2)$  не меняет знака. Но отсюда вытекает существование обратного преобразования (11.33). Перечень условий существования обращения и точное определение класса функций, к которым применимо преобразование максимума, еще является предметом исследования.

## 11.5. Свойство свертки

Важное свойство преобразования максимума связано со следующей проблемой.

Если даны две положительные неубывающие функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , а третья определена уравнением

$$h(x) = \text{Max}_{0 \leq y \leq x} [f(y) g(x-y)], \quad (11.34)$$

то какая связь имеется между преобразованиями максимума этих функций? По определению,

$$H(z) = \text{Max}_{x \geq 0} [e^{-xz} h(x)] = \\ = \text{Max}_{x \geq 0} \left[ e^{-xz} \text{Max}_{0 \leq y \leq x} f(y) g(x-y) \right]. \quad (11.35)$$

Это значит, что для данного  $z$  максимум функции  $\varphi(x, y) = e^{-xz} f(y) g(x-y)$  ищется в треугольной области, показанной на рис. 11.2. Но  $\varphi(x, y) = [e^{-yz} f(y)] [e^{-(x-y)z} g(x-y)]$ , и если сделать замену переменных  $x$  и  $y$  на  $w = x - y$  и  $y$ , то последняя функция примет вид  $e^{-yz} f(y) e^{-wz} g(w)$ . Область, в которой ищется максимум, теперь есть  $y \geq 0$ ,  $w \geq 0$ , и поэтому можно записать:

$$H(z) = \text{Max}_{y \geq 0} \text{Max}_{w \geq 0} [e^{-yz} f(y) e^{-wz} g(w)] = F(z) \cdot G(z). \quad (11.36)$$

Этот результат можно распространить на произведение нескольких функций. Если  $f(x)$  и  $f_i(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , есть допустимые функции, преобразования которых обозначаются большими буквами, и

$$x = x_1 + \dots + x_N, \quad (11.37)$$

тогда

$$f(\bar{x}) = \text{Max} [f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_N(x_N)] \quad (11.38)$$

соответствует

$$F(z) = F_1(z) F_2(z) \dots F_N(z). \quad (11.39)$$

Следовательно, обратное преобразование дает

$$f(x) = \text{Min}_{z \geq 0} [e^{xz} F_1(z) \dots F_N(z)]. \quad (11.40)$$

## 11.6. Применение преобразования максимума

Примером элементарного приложения преобразования максимума является задача Ис § 2.4. Чтобы пользоваться обозначениями предыдущего параграфа, положим

$$x = (k_1 + k_2)\Theta, \quad x_n = (k_1 + k_2)\theta_n. \quad (11.41)$$

Тогда условие  $\sum_1^n \theta_n = \Theta$  эквивалентно равенству (11.37).

Уравнение процесса (2.10) можно записать как

$$\frac{c_e - c_{n+1}}{c_e - c_n} = 1 + x_n. \quad (11.42)$$

Если положить

$$\hat{f}_n(x_n) = 1 + x_n, \quad (11.43)$$

то

$$f(x) = \text{Max} \prod_1^N \hat{f}_n(x_n) = \text{Max} \left[ \frac{c_e - c_{N+1}}{c_e - c_1} \right]; \quad (11.44)$$

и это то, что нам нужно.

Теперь

$$F_n(z) = \text{Max}_{x_n \geq 0} [e^{-zx_n}(1 + x_n)] = e^{z-1}/z. \quad (11.45)$$

Отсюда следует, что преобразование максимума решения задается уравнением

$$F(z) = e^N(z-1)/z^N, \quad (11.46)$$

а само решение

$$f(x) = \text{Min}_{z \geq 0} [e^{zx+N(z-1)}/z^N] = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N. \quad (11.47)$$

Итак, наибольшая величина прироста, которую можно достичь за заданное общее время выдержки  $\Theta$ , равна

$$c_1 = c_e - (c_e - c_{N+1}) \{1 + (k_1 + k_2)\Theta/N\}^{-N}. \quad (11.48)$$

Преобразование максимума пока еще является мало исследованной областью, но есть надежда, что оно окажется весьма полезным.

## БИБЛИОГРАФИЯ

- 11.1. Chang S. S. L., Digitized Maximum Principle, *Proc. IRE*, 48 (1960), 2030.
- Katz S., A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle, *J. Electron. Control*, 13 (1962), 179.
- 11.3. Denn M. M., Aris R., An Iterative Method of Overcoming Difficulties of Dimensionality in Fixed Time Optimization Problems, *Chem. Eng. Sci.*, 1964.
- 11.4. Bellman R., Karush W., On a New Functional Transform in Analysis, The Maximum Transform, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961), 501.

См. также приложение 4 в книге Р. Беллмана и С. Дрейфуса «Прикладные задачи динамического программирования» [1.8] и приведенную там библиографию.

### Задачи

1. Если

$$G(z) = \text{Max}_{x \geq 0} [g(x) - xz],$$

покажите, что

$$g(x) = \text{Min}_{z \geq 0} [G(z) + xz],$$

а если

$$h(x) = \text{Max}_{x_1 + x_2 = x} [g_1(x_1) + g_2(x_2)],$$

то

$$H(z) = G_1(z) + G_2(z).$$

Это другая форма преобразования максимума.

2. Если через  $G(z) = M[g]$  обозначить преобразование предыдущей задачи, то покажите, что  $M[ag] = aG(z/a)$ ,  $a > 0$ .

3. Если  $h(x)$  есть монотонно убывающая функция, положим

$$H(z) = \text{Min}_{x \geq 0} [h(x) + xz].$$

Найти обратное преобразование и свойства свертки для этого преобразования.

4. Используя формулировку задачи 3 гл. 3, решить двойственную ей задачу максимизации конечного давления после  $N$ -ступенчатого сжатия, когда общий расход энергии равен  $E$ .

5. Придумать преобразования минимума в задаче, для которой вышеприведенная является двойственной.

6. Сделайте то же самое для задач 4 и 5 гл. 3.

7. Покажите с помощью преобразования максимума, что в задаче 3 гл. 6 минимум потенциальной энергии пропорционален

$\sum_1^N n^2 / (n^2 + \mu^2)^{1/2}$ , где  $\mu$  равен корню квадратному из

$$\sum_1^N \mu / (n^2 + \mu^2)^{1/2} = M.$$

8. Если

$$\Lambda_N(p) = \text{Min}_{b \geq 0} [-L_N(0, b) + bp]$$

и

$$\Lambda'_N(p) = \text{Min}_{b \geq 0} [e^{-bc} L_N(0, b) + bp],$$

где  $L_N$  взята из задачи 3 гл. 8, показать, что

$$L_{2N}(0, b) = \text{Max}_{b \geq 0} [bp - \Lambda_N(p) - e^{-bc} \Lambda'_N(pe^{bc})].$$

## Оглавление

К русскому изданию . . . . .	5
Предисловие . . . . .	6
<b>ГЛАВА 1. Что такое оптимизация?</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1. Математическое моделирование . . . . .	9
1.2. Прямой перебор . . . . .	12
1.3. Метод скорейшего подъема . . . . .	12
1.4. Методы, не использующие градиента, и методы случайного поиска . . . . .	13
1.5. Дифференциальное исчисление . . . . .	15
1.6. Линейное программирование . . . . .	16
1.7. Нелинейное программирование . . . . .	17
1.8. Динамическое программирование . . . . .	18
1.9. Вариационное исчисление . . . . .	18
Библиография . . . . .	20
<b>ГЛАВА 2. Дискретные детерминированные процессы управления</b> . . . . .	<b>22</b>
2.1. Химическая реакция в смесителе . . . . .	22
2.2. Химическая реакция в последовательности смесителей . . . . .	25
2.3. Определения для процесса общего вида . . . . .	26
2.4. Различные постановки задачи для последовательности реакторов-смесителей . . . . .	30
<b>ГЛАВА 3. Принцип оптимальности</b> . . . . .	<b>34</b>
3.1. Основанное на здравом смысле решение задачи о реакторе-смесителе . . . . .	34
3.2. Принцип оптимальности . . . . .	38
3.3. Решение задачи управления дискретным процессом методом динамического программирования . . . . .	39
3.4. Оформление результатов . . . . .	42
3.5. Эффективность динамического программирования . . . . .	44
3.6. Другие постановки задачи для последовательности реакторов-смесителей . . . . .	46
Библиография . . . . .	47
Задачи . . . . .	47
<b>ГЛАВА 4. Графические методы</b> . . . . .	<b>49</b>
4.1. Значение графических методов . . . . .	49
4.2. Задача . . . . .	50
4.3. Геометрическая интерпретация решения . . . . .	53
4.4. Графическое представление результатов . . . . .	55

4.5. Графическое решение . . . . .	57
4.6. Зависимость от параметров . . . . .	60
Задачи . . . . .	65
<b>Г Л А В А 5. Двойственные задачи и множители Лагранжа . . . . .</b>	<b>66</b>
5.1. Двойственные задачи . . . . .	66
5.2. Множитель Лагранжа . . . . .	67
5.3. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа . . . . .	69
5.4. Формальное применение множителя Лагранжа . . . . .	70
5.5. Линейное программирование . . . . .	71
Библиография . . . . .	73
Задачи . . . . .	73
<b>Г Л А В А 6. Несколько задач из экономики . . . . .</b>	<b>74</b>
6.1. Задачи на узкие места . . . . .	74
6.2. Уменьшение размерности . . . . .	79
6.3. Угроза расширения сетки . . . . .	84
6.4. Управление экономическим процессом . . . . .	86
6.5. Еще один прием уменьшения размерности . . . . .	92
6.6. Управление процессами с конкуренцией . . . . .	96
6.7. Обзор методов уменьшения размерности . . . . .	101
Библиография . . . . .	103
Задачи . . . . .	104
<b>Г Л А В А 7. Несколько задач из теории связи и теории информации . . . . .</b>	<b>107</b>
7.1. Игрок и испорченная телефонная линия . . . . .	107
7.2. Неустойчивый канал связи . . . . .	109
7.3. Передача сообщений в сетях . . . . .	110
7.4. Стратегии, следующие за оптимальной . . . . .	112
Библиография . . . . .	113
Задачи . . . . .	113
<b>Г Л А В А 8. Разные задачи . . . . .</b>	<b>114</b>
8.1. Аппроксимация кривой отрезками прямых . . . . .	114
8.2. Некоторые вопросы теории надежности . . . . .	118
8.3. Процессы размножения и гибели . . . . .	120
8.4. Якобиевы матрицы . . . . .	123
Библиография . . . . .	125
Задачи . . . . .	127
<b>Г Л А В А 9. Взаимосвязи между непрерывным и дискретным . . . . .</b>	<b>128</b>
9.1. Непрерывное как предел дискретного . . . . .	128
9.2. Дискретное как результат аппроксимации непрерывного . . . . .	131
9.3. Программное управление температурой реактора-смесителя . . . . .	132
9.4. Линеаризация . . . . .	134
Библиография . . . . .	136
Задачи . . . . .	136
<b>Г Л А В А 10. Некоторые обобщения и ограничения . . . . .</b>	<b>138</b>
10.1. Контрпример для случая системы с обратной связью . . . . .	138
10.2. Некоторые обобщения . . . . .	143
10.3. Контур с обратной связью, I (обращение направления) . . . . .	149

---

10.4	Контур с обратной связью, II (объединение ветвей) . . .	153
10.5	Примитивный принцип оптимальности . . . . .	154
10.6	Системы с противотоком . . . . .	155
	Библиография . . . . .	158
ГЛАВА 11. <b>Некоторые смежные математические вопросы</b> . . . . . 159		
11.1.	Дискретная форма принципа максимума Понтрягина . . .	159
11.2.	Родственные задачи и их формулировки . . . . .	161
11.3.	Соображения по поводу вычислений . . . . .	162
11.4.	Преобразование максимума . . . . .	163
11.5.	Свойство свертки . . . . .	165
11.6.	Применение преобразования максимума . . . . .	166
	Библиография . . . . .	167
	Задачи . . . . .	168

**Р. А р и с**

**ДИСКРЕТНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ  
ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Редактор *Г. М. Цукерман*  
Художник *К. П. Сиротов*  
Художественный редактор  
*В. И. Шаповалов*  
Технический редактор  
*Л. М. Харьковская*

Сдано в производство 5/V 1969 г.  
Подписано к печати 25/XI 1969 г.  
Бумага тип. № 3 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>=5,38 бум. л.  
10,75 усл. печ. л.  
Уч.-изд. л. 8,63. Изд. № 1/4952  
Цена 60 коп. Заказ № 172

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой  
Главполиграфпрома  
Комитета по печати  
при Совете Министров СССР  
Измайловский проспект, 29