

А. А. АНДРОНОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР



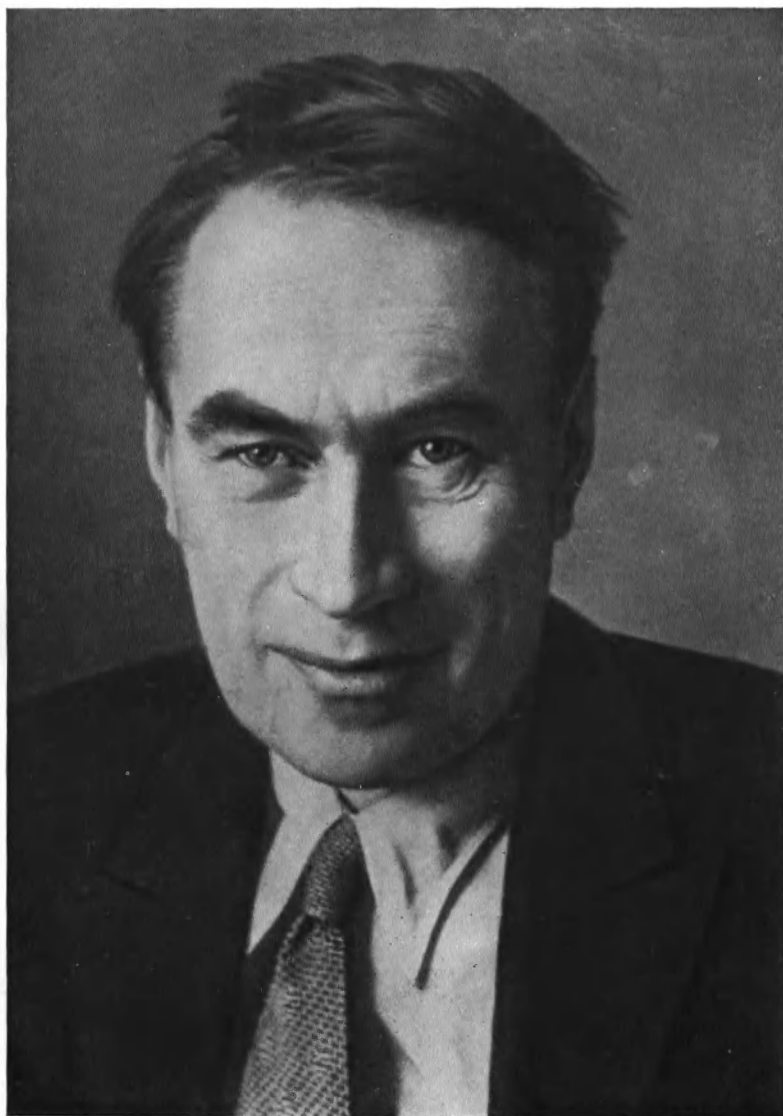
А.А. АНДРОНОВ

СОБРАНИЕ ТРУДОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1956



АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ
АНДРОНОВ
(1901—1952)

I

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

К ТЕОРИИ МОЛЕКУЛЯРНОГО РАССЕИВАНИЯ СВЕТА НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТЕЙ¹

Дается сравнительно простой метод расчета диффузионного отражения света на слабо шероховатых поверхностях. Результаты применяются к случаю рассеивания света, происходящего на поверхности жидкости в результате беспорядочного теплового движения.

Далее проводится сравнение теоретических результатов с наблюдениями С. Рамана и Л. Рамдаса.

Много лет назад Л. И. Мандельштам^[1] теоретически исследовал диффузионное отражение, которое наблюдается на поверхности жидкости вследствие беспорядочного теплового движения, и качественно наблюдал явление на поверхности раздела метилалкоголя и сероуглерода.

Оптическая часть работы ограничивалась случаем, когда направление наблюдения совпадает с плоскостью падения или близко к ней. В данном случае могут быть применены результаты Релея, который рассчитал диффузионное отражение на одномерной, т. е. лутрихообразно деформированной, поверхности раздела двух прозрачных сред.

Случай совершенно отражающей среды получался здесь в качестве частного случая, что было показано Релеем. Нужно только в окончательных формулах для показателя преломления положить $n = \infty$.

В упомянутой выше работе указано, что и общий случай произвольного азимута можно исследовать аналогичным образом.

Р. Ганс^[2] снова вернулся к этой задаче для ртути, заимствуя статистическую часть из цитированной работы. Он обобщил ее оптическую часть на случай произвольного азимута. Его метод расчета диффузионного отражения отличается от обобщенного метода Релея.

Окончательные результаты Р. Ганса, относящиеся к плоскости падения, совпадают с результатами Л. И. Мандельштама, если не считать несколько разных обозначений.

В 1925 г. в ряде работ С. Рамана и Л. Рамдаса^[3] диффузионное отражение было исследовано экспериментально и даже количественно, причем измерялись как интенсивность рассеянного света, так и его поляризационное состояние. Это дало возможность сравнивать теоретические результаты с экспериментальными.

¹ Совместно с М. А. Леонтовичем. Опубликовано на немец. языке в Z. Phys., 1926, Bd. 38, S. 485 под заглавием Zur Theorie der molekularen Lichtzerstreuung an Flüssigkeitsoberflächen. (Перевод ред.).

Поскольку речь идет о наблюдениях в плоскости падения, формулы, полученные Л. И. Мандельштамом, являются вполне удовлетворительными для всех неабсорбирующих сред. Для произвольных азимутов и сред с полным отражением (ртуть) применимы формулы Р. Ганса.

Для возможно более широкого сравнения теории с экспериментом следовало рассмотреть еще случай произвольного азимута для среды с произвольным показателем преломления. Проф. Л. И. Мандельштам предложил нам провести соответствующие вычисления по методу, указанному в его упомянутой выше работе¹. После того как эти вычисления были закончены, появилась следующая работа Р. Ганса [4], в которой содержались вычисления для названного выше случая. Данные им формулы, если не считать обозначений, совпадают с нашими. Сравнения с экспериментальными результатами в этой работе не проводилось.

Что касается способа вычисления, то нам кажется, что предлагаемый нами способ приводит к цели существенно более просто, чем способ, использованный Р. Гансом.

Поэтому мы считаем целесообразным в первой части настоящей работы подробно изложить соответствующие вычисления. Во второй части мы сравним теорию с экспериментальными данными С. Рамана и Л. Рамдаса.

Здесь следует, однако, заметить, что некоторые данные С. Рамана и Л. Рамдаса, особенно из числа тех, которые относятся к углам и длинам волн, не всегда достаточно точны². Поэтому сравнение не будет вполне свободным от некоторого произвола, главным образом в части истолкования диаграмм С. Рамана и Л. Рамдаса. Все же нам кажется, что даже при этом недостатке результаты сравнения заслуживают внимания и при этом как те, которые касаются абсолютной интенсивности, так и те, которые касаются поляризационного состояния.

§ 1. Рассеяние света на шероховатой поверхности раздела двух прозрачных тел

§ 1. Релей^[5] исследовал диффракцию плоской волны, падающей на шероховатую поверхность раздела двух прозрачных сред. Релей рассматривал одномерный случай.

Обозначая через ζ возвышенные точки граничной поверхности над плоскостью $z = 0$, положим

$$\zeta = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \zeta_p e^{iprx} \quad \left(p = \frac{2\pi}{a}\right),$$

¹ Как это будет показано в дальнейшем, указанный метод дает также решение общей проблемы. Замечание Р. Ганса о том, что ему все же не удалось найти окончательного решения проблемы, ока алось необоснованным.

² Ср., например, следующие данные С. Рамана и Л. Рамдаса: «вблизи значения критического угла», «в зеленой части солнечного спектра».

где a — основной период разложения. Коэффициенты $|\zeta_p|$ предполагаются малыми сравнительно с длиной волны падающего света, так что величинами порядка $(\zeta_p/\lambda)^2$ при решении можно пренебрегать.

В этом случае будет справедлив принцип суперпозиции и задача сводится к изучению диффракции на бесконечно протяженной синусоидальной решетке

$$\zeta = \zeta_p e^{iprx}$$

В предлагаемом сообщении мы проведем решение этой же задачи в том же приближении для случая двумерной «шероховатости» следующего вида:

$$\zeta = \sum_{p, \sigma = -\infty}^{+\infty} \zeta_{p\sigma} e^{ip(\rho x + \sigma y)}$$

Здесь также согласно принципу суперпозиции оказывается достаточным знать решение для случая $\zeta = \zeta_{p\sigma} e^{ip(\rho x + \sigma y)}$. Для сокращения в дальнейшем, когда поверхность имеет форму $\zeta = \zeta_{p\sigma} e^{ip(\rho x + \sigma y)}$, мы будем говорить о синусоидальной плоской решетке. Прежде чем перейти к вычислениям, сделаем следующие замечания относительно связи между диффракцией на бесконечной синусоидальной плоской решетке и интересующим нас явлением рассеивания на ограниченном участке поверхности раздела между двумя средами.

Если на данную бесконечную плоскую синусоидальную решетку, отвечающую индексу $p\sigma$, падает плоская волна, то эта решетка дает в верхней среде (как показывает дальнейшее исследование) один-единственный¹ отклоненный луч (плоская волна), направление которого дается уравнением (17). Здесь $k = 2\pi/\lambda$, Θ_0 — угол падения, Θ — полярный угол, φ — азимут, отсчитываемый от оси x .

Аналогичная решетка конечной величины при таких же обстоятельствах создает пучок лучей, т. е. преломляет свет во многих направлениях. Если, однако, решетка достаточно велика, то этот пучок очень узок; можно предполагать, что вся преломленная энергия $W_{p\sigma}$ будет лежать внутри очень малого телесного угла $d\omega$, направление оси которого $\varphi\Theta$ определяется тем же уравнением (17).

Рассмотрим теперь любой конечный деформированный участок с достаточно большой поверхностью S , на который падает плоская волна. Мы можем рассматривать деформацию как результат суперпозиции деформаций от всех синусоидальных решеток, каждая из которых создает свой собственный узкий пучок преломленного света.

Вычислим энергию, которая преломляется от этой поверхности S внутрь телесного угла $d\Omega$ (в направлении φ, Θ). Угол мы выбираем

¹ Следует отметить, что отдельный член разложения $\zeta_{p\sigma} e^{ip(\rho x + \sigma y)}$ не имеет никакого физического смысла; только сумма двух сопряженных членов представляет реальную решетку. Математически, однако, такое разложение безусловно допустимо и рекомендуется в целях упрощения.

настолько большим, что он практически содержит большое число пучков лучей, каждый из которых соответствует некоторой синусоидальной решетке; кроме того, следует предположить, что все пучки, падающие в $d\Omega$, имеют одинаковую энергию. При достаточно большом S такой выбор возможен во многих случаях и заведомо — в нашем случае. Следует заметить, что угол $d\omega$ будет малым углом по сравнению с выбранным таким образом углом $d\Omega$.

Мы получаем, далее, для энергии dW в телесном углу $d\Omega$

$$dW = I d\Omega = W_{\rho\sigma} \Delta\rho \Delta\sigma \quad (1)$$

где $\Delta\rho\Delta\sigma$ — количество пучков в $d\Omega$. Нужно определить временное среднее энергии. Отдельные пучки следует рассматривать как некогерентные между собой.

Если предположить, что поле на поверхности конечной решетки тождественно¹ с полем на поверхности такой же, но бесконечной решетки, то легко видеть, что полная энергия, диффрагирующая от конечной решетки по всем направлениям, равна той энергии, которая диффрагирует из части плоской волны в направлении Θ, φ , соответствующей поверхности S , при бесконечной диффрагирующей решетке. Следовательно,

$$W_{\rho\sigma} = J_{\rho\sigma} S \cos \Theta \quad (2)$$

где $J_{\rho\sigma}$ — интенсивность плоской волны, возникающей при диффракции на бесконечной решетке, отвечающей индексу $\rho\sigma$.

Из (1) и (2) следует

$$I d\Omega = J_{\rho\sigma} S \cos \Theta \Delta\rho \Delta\sigma$$

Если мы перейдем от переменных ρ, σ к переменным φ, Θ , которые определяют направление выбранного телесного угла, то согласно (17) легко получим

$$\Delta\rho \Delta\sigma = \left(\frac{k}{p}\right)^2 \cos \Theta d\Omega$$

Вследствие этого

$$I d\Omega = J_{\rho\sigma} \left(\frac{k}{p}\right)^2 S \cos^2 \Theta d\Omega \quad (3)$$

Если таким образом решение задачи для бесконечной решетки известно, то мы легко можем при сделанных предположениях указать интенсивность света, рассеянного на конечной достаточно большой области с произвольной шероховатостью.

В дальнейшем мы будем применять этот метод вычисления к вопросу рассеивания света молекулярной шероховатостью.

§ 2. Таким образом, задача свелась к определению интенсивности плоской волны, диффрагировавшей от бесконечной синусообразной решетки.

¹ Это предположение часто допускается в обычной теории решеток.

Пусть граничная поверхность двух диэлектриков, диэлектрические постоянные которых равны соответственно ε и ε' , имеет такой вид:

$$\zeta = \sum_{\rho, \sigma=-\infty}^{+\infty} e^{ip(\rho x + \sigma y)} \quad (4)$$

Пусть $|\zeta_{\rho\sigma}|$ будут малыми сравнительно с длиной волны падающего света. Электрический вектор в верхней среде должен удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0 \quad (5)$$

в нижней среде — уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{E}' + k'^2 \mathbf{E}' = 0, \quad \text{div } \mathbf{E}' = 0 \quad (5')$$

где

$$k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2, \quad k'^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda'}\right)^2$$

Не ограничивая общности, мы можем принять электрический вектор падающей волны равным

$$\mathbf{A} e^{ik[ct - (x\alpha_0 + z\gamma_0)]},$$

где $\alpha_0, 0, \gamma_0$ — направляющие косинусы нормали к фронту волны.

Естественно сделать следующее предположение о $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{A} e^{ik[ct - (x\alpha_0 + z\gamma_0)]} + \mathbf{A}_0 e^{ik[ct - (x\alpha_0 - z\gamma_0)]} + \sum_{\rho, \sigma=-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}_{\rho\sigma} e^{ik[ct - (x\alpha + y\beta + z\gamma)]} \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{B}_0 e^{ik'[ct - (x\alpha'_0 + z\gamma'_0)]} + \sum_{\rho, \sigma=-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}_{\rho\sigma} e^{ik'[ct - (x\alpha' + y\beta' + z\gamma')] } \end{aligned} \quad (6)$$

При этом α пишется вместо $\alpha_{\rho\sigma}$ и т. д.

Физически выражения (6) означают, что, кроме регулярно отражающихся и преломленных лучей, возникают еще и диффрагированные лучи.

При $z = \zeta$ имеют место граничные условия:

$$[\mathbf{E}\mathbf{n}] = [\mathbf{E}'\mathbf{n}] \quad (7)$$

$$\varepsilon(\mathbf{E}\mathbf{n}) = \varepsilon'(\mathbf{E}'\mathbf{n}) \quad (8)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' \quad (\text{принято } \mu = \mu' = 1) \quad (9)$$

$$\mathbf{n} = \frac{i \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + j \left(-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + k (+1)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2}}$$

Из равенства $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ следует согласно уравнениям Максвелла, что

$$\text{curl } \mathbf{E} = \text{curl } \mathbf{E}' \quad (9')$$

Выберем четыре независимых условия для компонент E и E' ; например, по (7) и (9):

$$E_y - E_{y'} + (E_z - E_{z'}) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad E_x - E_{x'} + (E_z - E_{z'}) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (E_y - E_{y'}) - \frac{\partial}{\partial y} (E_z - E_{z'}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (E_x - E_{x'}) - \frac{\partial}{\partial x} (E_z - E_{z'}) = 0$$

Подставляем величины, полученные из (6), в уравнение (10) и ограничиваемся членами первого порядка по $k\zeta$ и $p\zeta$. Отсюда видно, что граничные условия удовлетворяются, если

$$-k\alpha_0 + p\rho = -k'\alpha'_0 + p\rho = -k\alpha = -k'\alpha', \quad p\sigma = -k\beta = -k'\beta' \quad (11)$$

и при выполнении, кроме того, следующих соотношений:

$$A_y + A_{0y} - B_{0y} = 0, \quad A_x + A_{0x} - B_{0x} = 0$$

$$(A_y - A_{0y})k\gamma_0 - B_{0y}k'\gamma'_0 = 0$$

$$(A_x - A_{0x})k\gamma_0 - B_{0x}k'\gamma'_0 - (A_z + A_{0z})k\alpha_0 + B_{0z}k'\alpha'_0 = 0$$

$$A_{\rho\sigma x} - B_{\rho\sigma x} = i\zeta_{\rho\sigma} [(A_x - A_{0x})k\gamma_0 - B_{0x}k'\gamma'_0 - (A_z + A_{0z} - B_{0z})p\rho]$$

$$A_{\rho\sigma y} - B_{\rho\sigma y} = i\zeta_{\rho\sigma} [(A_y - A_{0y})k\gamma_0 - B_{0y}k'\gamma'_0 - (A_z + A_{0z} - B_{0z})p\sigma] \quad (12)$$

$$A_{\rho\sigma y}k\gamma - B_{\rho\sigma y}k'\gamma' - A_{\rho\sigma z}k\beta + B_{\rho\sigma z}k'\beta' = i\zeta_{\rho\sigma} [(A_y + A_{0y})k^2\gamma_0^2 - B_{0y}k'^2\gamma_0'^2]$$

$$\begin{aligned} & A_{\rho\sigma x}k\gamma - B_{\rho\sigma x}k'\gamma' - A_{\rho\sigma z}k\alpha + B_{\rho\sigma z}k'\alpha' = \\ & = i\zeta_{\rho\sigma} [(A_x + A_{0x})k^2\gamma_0^2 - (A_z - A_{0z})k^2\alpha_0\gamma_0 - B_{0x}k'^2\gamma_0'^2 + B_{0z}k'^2\alpha'_0\gamma_0'] \end{aligned}$$

Формулы (11) дают, как это следовало ожидать, закон преломления для регулярно преломляемого луча:

$$k\alpha_0 = k'\alpha'_0 \quad (13)$$

Если ввести в четыре первых уравнения (12) обычные обозначения

$$A_x = -F_0\gamma_0, \quad A_y = G_0, \quad A_z = F_0\alpha_0 \quad (14)$$

где F_0 и G_0 — параллельная и перпендикулярная к плоскости падения компоненты амплитуды электрического вектора падающего света, то получаем обычные френселевские формулы.

Кроме того, и это является для нас существенным, эти уравнения определяют направление диффрактированного луча и дают, если учесть условия поперечности:

$$A_{\rho\sigma x}\alpha + A_{\rho\sigma y}\beta + A_{\rho\sigma z}\gamma = 0, \quad B_{\rho\sigma x}\alpha' + B_{\rho\sigma y}\beta' + B_{\rho\sigma z}\gamma' = 0 \quad (15)$$

компоненты амплитуды диффрактированной волны.

Удобнее ввести вместо $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ углы Θ, φ и соответственно Θ' и φ' . Тогда имеем (фиг. 1):

$$\begin{aligned} \alpha &= \sin \Theta \cos \varphi, & \beta &= \sin \Theta \sin \varphi, & \gamma &= \cos \Theta \\ \alpha' &= \sin \Theta' \cos \varphi', & \beta' &= \sin \Theta' \sin \varphi', & \gamma' &= -\cos \Theta' \\ \alpha_0 &= -\sin \Theta_0, & \gamma_0 &= -\cos \Theta_0, & \alpha'_0 &= -\sin \Theta'_0, & \gamma'_0 &= -\cos \Theta'_0 \end{aligned} \quad (16)$$

Направления диффрагированных лучей определяются согласно (11) и (16) следующим образом:

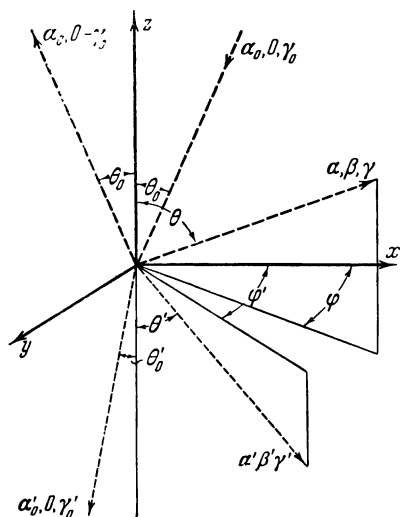
$$\begin{aligned}
 -\sin \Theta \cos \varphi &= \sin \Theta_0 + \frac{p\rho}{k} \\
 -\sin \Theta \sin \varphi &= \frac{p\rho}{k} \\
 -\sin \Theta' \cos \varphi' &= \sin \Theta_0' + \frac{p\rho}{k'} \\
 -\sin \Theta' \sin \varphi' &= \frac{p\rho}{k'}
 \end{aligned} \quad (17)$$

Следует иметь в виду, что для лучей диффрагирующих от одной и той же решетки в верхней или нижней среде имеет место одно соотношение, аналогичное обычному закону преломления:

$$\varphi = \varphi' \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta'} = \frac{k'}{k} = n$$

так как

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{k'}{k}$$



Фиг. 1.

Компоненты амплитуды диффрагированной волны определяются из (11), (12) и (13):

$$\begin{aligned}
 A_{\rho\sigma x} &= -P [\sin^2 \Theta_0 \cos \Theta \sin \Theta \cos \varphi + \sin \Theta_0 \cos \Theta_0' \cos \Theta \cos \Theta' + \\
 &\quad + \cos \Theta_0' \sin \Theta_0' \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi] + Q [\sin \Theta_0' \sin^2 \Theta \cos \varphi \sin \varphi] \\
 A_{\rho\sigma y} &= P [\cos \Theta_0' \sin \Theta_0' \sin^2 \Theta \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \Theta_0 \cos \Theta \sin \Theta \sin \varphi] - \\
 &\quad - Q [\sin \Theta_0 \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta_0' \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi] \\
 A_{\rho\sigma z} &= P [\sin^2 \Theta_0 \sin^2 \Theta + \sin \Theta_0 \cos \Theta_0' \cos \Theta' \sin \Theta \cos \varphi] \\
 &\quad + Q [\sin \Theta_0 \cos \Theta' \sin \Theta \sin \varphi]
 \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2ik\zeta_{\rho\sigma}F_0 \operatorname{tg}(\Theta_0 - \Theta_0') \cos \Theta_0}{\sin \Theta_0 (\cos \Theta \sin \Theta_0 + \cos \Theta' \sin \Theta_0')} \\
 Q &= \frac{2ik\zeta_{\rho\sigma}G_0 \sin(\Theta_0 - \Theta_0') \cos \Theta_0}{\sin \Theta_0 (\cos \Theta \sin \Theta_0 + \cos \Theta' \sin \Theta_0')}
 \end{aligned}$$

Для нижней среды получаем аналогичные выражения. Пусть f_φ и f_Θ будут компоненты электрического вектора диффрагированной волны, параллельные соответственно меридиану и параллельному кругу. Тогда

$$\begin{aligned}
 f_\varphi &= -A_{\rho\sigma x} \sin \varphi + A_{\rho\sigma y} \cos \varphi \\
 f_\Theta &= A_{\rho\sigma x} \cos \Theta \cos \varphi + A_{\rho\sigma y} \cos \Theta \sin \varphi - A_{\rho\sigma z} \sin \Theta
 \end{aligned}$$

или согласно (18) для верхней среды

$$\begin{aligned} f_{\varphi} &= 2ik\zeta_{\rho\sigma} \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_0') \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \theta}{\sin(\theta + \theta')} [F_0 \sin \varphi \cos \theta_0' - G_0 \cos \varphi \cos(\theta_0 - \theta_0')] \\ f_{\theta} &= -2ik\zeta_{\rho\sigma} \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_0') \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} [F_0 (\sin \theta \sin \theta_0 + \cos \theta' \cos \theta_0' \cos \varphi) + \\ &\quad + G_0 \cos \theta' \cos(\theta_0 - \theta_0') \sin \varphi] \end{aligned} \quad (19)$$

или соответственно для нижней

$$\begin{aligned} f_{\varphi'}(\varphi'\theta') &= f_{\varphi}(\varphi\theta) \\ f_{\theta'} &= 2ik\zeta_{\rho\sigma} \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_0') \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \theta}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} [F_0 (\sin \theta \sin \theta_0' - \cos \theta \cos \theta_0' \cos \varphi) - \\ &\quad - G_0 \cos(\theta_0 - \theta_0') \cos \theta \sin \varphi] \end{aligned} \quad (20)$$

Если либо при $n > 1$, либо при $n < 1$ углы θ и θ_0 остаются меньше угла полного внутреннего отражения, выражения (19) и (20) дают непосредственно величины компонент амплитуд соответствующих волн. Если же, напротив, θ или θ_0 переходят это значение, выражения (19) становятся комплексными, f_{φ} и f_{θ} не совпадают по фазе и диффрагированный свет является эллиптически поляризованным.

§ 3. Теперь остается, применяя результаты § 1 и 2, вывести формулы интенсивности света, который рассеивается поверхностью жидкости в результате теплового движения молекул. Как показывают результаты § 1, поток энергии рассеянного света внутри пространственного угла $d\Omega$, от которого имеет направление (φ, θ) , равен:

$$Id\Omega = \left(\frac{k}{p}\right)^2 J_{\rho\sigma} S \cos^2 \theta d\Omega,$$

где S — освещенная поверхность и $J_{\rho\sigma}$ — интенсивность света, диффрагированного бесконечной диффракционной решеткой с индексом $\rho\sigma$.

Согласно же § 2 имеем

$$J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \frac{c V \bar{\varepsilon}}{4\pi} (|f_{\varphi}|^2 + |f_{\theta}|^2) \quad (21)$$

Черточка означает временное осреднение. Чтобы высчитать среднее по времени, необходимо знать величины $|\overline{\zeta_{\rho\sigma}}|^2$. Пользуясь флуктуационной теорией Эйнштейна, Л. И. Мандельштам вычислил эти величины; в наших обозначениях их можно записать следующим образом:

$$|\overline{\zeta_{\rho\sigma}}|^2 = \frac{c_1 (p/k)^2}{c_2 + \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \quad (22)$$

где

$$c_1 = \frac{\kappa T}{4\pi^2 \gamma}, \quad c_2 = \frac{g\delta}{k^2 \gamma}$$

при этом κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура, γ — капиллярная константа на поверхности раздела двух жидкостей, δ — разность плотностей между нижней и верхней жидкостями, g — ускорение силы тяжести.

Если мы внесем (19) и (22) в (21), то получим для естественного света, для которого

$$|\overline{F_0}|^2 = |\overline{G_0}|^2 = \frac{4\pi J_0}{c V \varepsilon}$$

если Θ и Θ_0 оба меньше, чем угол абсолютного отражения, следующие выражения:

$$Id\Omega = \frac{2c_1 k^2 J_0 d\Omega S \operatorname{tg}^2(\Theta_0 - \Theta_0') \operatorname{ctg}^2 \Theta_0 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}{(c_2 + \sin^2 \Theta_0 + \sin^2 \Theta + 2 \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \varphi) \sin^2(\Theta + \Theta')} \times \\ \times \{ \sin^2 \varphi \cos^2 \Theta_0' + \cos^2 \varphi \cos^2(\Theta_0 - \Theta_0') + \sec^2(\Theta - \Theta') [(\sin \Theta \sin \Theta_0 + \\ + \cos \Theta' \cos \Theta_0' \cos \varphi)^2 + \cos^2 \Theta' \cos^2(\Theta_0 - \Theta_0') \sin^2 \varphi] \} \quad (23)$$

В этом случае рассеянный свет будет частично поляризованным.

Если Θ_0 меньше, а Θ больше, чем угол абсолютного отражения, то

$$Id\Omega = \frac{2c_1 k^2 J_0 d\Omega S \operatorname{tg}^2(\Theta_0 - \Theta_0') \operatorname{ctg}^2 \Theta_0 \cos^2 \Theta}{(c_2 + \sin^2 \Theta_0 + \sin^2 \Theta + 2 \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \varphi) (n^2 - 1) (n^2 \sin^2 \Theta - \cos^2 \Theta)} \times \\ \times \{ \sin^2 \Theta_0 \sin^2 \Theta + \cos^2(\Theta_0 - \Theta_0') (n^2 \sin^2 \Theta + \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi - 1) + \\ + \cos^2 \Theta_0' (n^2 \sin^2 \Theta + \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi - 1) \} \quad (24)$$

Если падающий свет поляризован по прямой и его электрический вектор параллелен плоскости падения, то

$$|\overline{F_0}|^2 = \frac{8\pi J_0}{c V \varepsilon}, \quad G_0 = 0$$

и

$$Id\Omega = \frac{4c_1 k^2 J_0 d\Omega S \operatorname{tg}^2(\Theta_0 - \Theta_0') \operatorname{ctg}^2 \Theta_0 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}{(c_2 + \sin^2 \Theta_0 + \sin^2 \Theta + 2 \sin^2 \Theta_0 \sin \Theta \cos \varphi) \sin^2(\Theta + \Theta')} \times \\ \times \{ \sin^2 \varphi \cos^2 \Theta_0' + \sec^2(\Theta - \Theta') (\sin \Theta \sin \Theta_0 + \cos \Theta' \cos \Theta_0' \cos \varphi)^2 \} \quad (25)$$

В этом случае рассеянный свет также поляризован по прямой. Направление электрического вектора определяется следующим образом:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{f_\Theta}{f_\varphi} = - \frac{\sin \Theta \sin \Theta_0 + \cos \Theta' \cos \Theta_0' \cos \varphi}{\cos(\Theta - \Theta') \sin \varphi \cos \Theta_0'} \quad (25')$$

Если электрический вектор падающего света колеблется нормально к плоскости падения, то

$$F_0 = 0, \quad |\overline{G_0}|^2 = \frac{8\pi J_0}{c V \varepsilon}$$

$$Id\Omega = \frac{4c_1 k^2 J_0 d\Omega S \sin^2(\Theta_0 - \Theta_0') \operatorname{ctg}^2 \Theta_0 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta}{(c_2 + \sin^2 \Theta_0 + \sin^2 \Theta + 2 \sin \Theta_0 \sin \Theta \cos \varphi) \sin^2(\Theta + \Theta')} \times \\ \times \{ \cos^2 \varphi + \sec^2(\Theta - \Theta') \cos^2 \Theta' \sin^2 \varphi \} \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\cos \Theta' \operatorname{tg} \varphi}{\cos(\Theta - \Theta')} \quad (26')$$

Следует отметить, что, как показывают формулы (25') и (26'), положение плоскости поляризации диффрагированных лучей не зависит от величин $|\zeta_{\text{ср}}|^2$, т. е. от рода шероховатости поверхности. Оно зависит только от показателя преломления и от угла падения и угла наблюдения.

Легко получить аналогичные выражения и для нижней среды, исходя из (20).

Если рассеивающая поверхность обладает полным отражением, то в формулах (23), (25) и (26) следует положить $n = \infty$ и $\theta' = \theta'_0 = 0$. Тогда получаем для естественного падающего света

$$Id\Omega = \frac{2c_1 k^2 J_0 d\Omega S [\cos^2 \theta_0 \cos^2 \theta + (\sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi + 1)^2]}{c_2 + \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \quad (27)$$

для поляризованного падающего света с электрическим вектором, параллельным плоскости падения:

$$Id\Omega = \frac{4c_1 k^2 J_0 d\Omega S [\cos^2 \theta \sin^2 \varphi + (\sin \theta_0 \sin \theta + \cos \varphi)^2]}{c_2 + \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \quad (28)$$

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{\sin \theta \sin \theta_0 + \cos \varphi}{\cos \theta \sin \varphi} \quad (28')$$

Для падающего света с электрическим вектором, вертикальным к плоскости падения:

$$Id\Omega = \frac{4c_1 k^2 J_0 d\Omega S [1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi] \cos^2 \theta_0}{c_2 + \sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \theta} \quad (29')$$

2. Сравнение с результатами опытов С. Рамана и Л. Рамдаса

Сравним теперь теорию с экспериментальными данными С. Рамана и Л. Рамдаса. Мы ограничимся при этом рассеиванием в ртутном и метиловом спирте, так как только для этих двух жидкостей приводятся достаточно подробные измерения. Кроме того, данные С. Рамана и Л. Рамдаса, касающиеся остальных жидкостей, относятся к направлению регулярно отраженного света. Нам не вполне ясно, как следует объяснять эти данные.

Рассеивание света на поверхности ртути

а) Нормальное падение; естественный свет. На поверхности ртути проектировалось солнце. Интенсивность I света, рассеянного под углом 45° , сравнивалась с интенсивностью I_g света, рассеянного при тех же условиях на гипсе. Измерения проводились в зеленой части солнечного спектра. С. Раман и Л. Рамдас получили

$$\frac{I}{I_g} = 5.7 \times 10^{-7}$$

Если мы предположим, что гипс дает абсолютное рассеивание, и применим обычный закон Ламберта

$$I_g d\Omega = \frac{J_0 S \cos \theta d\Omega}{\pi}$$

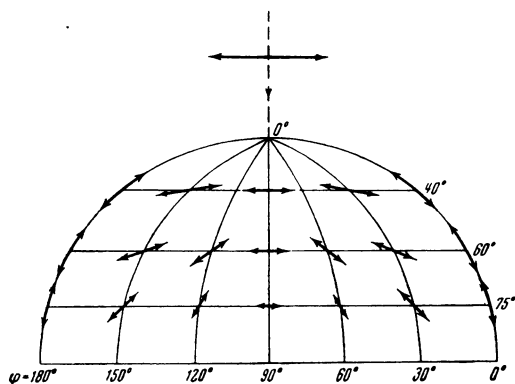
при $\lambda = 546$ мкм, $\gamma = 540$ дн/см, то получим из уравнения (27)¹

$$\frac{I}{I_g} = 6.71 \times 10^{-7}$$

¹ Следует заметить, что для данного, а также и для следующего случая, выражение, найденное Л. И. Мандельштамом в 1913 г., является совершенно удовлетворительным.

Если учесть, что поверхность ртути не абсолютно отражает и что наше предположение о рассеивании поверхности гипса недостаточно строго выполняется, то следует считать согласие между значениями, полученными путем вычисления и путем наблюдения, вполне удовлетворительным. Отметим при этом, что формула не содержит ни одной произвольной константы. Указания С. Рамана и Л. Рамдаса на то, что цвет света, рассеянного на поверхности ртути, голубоватый (bluish), но, быть может, не совсем такой голубой, как при внутреннем рассеивании в жидкости, согласуется с предсказаниями теории, согласно которой интенсивность поверхностного рассеивания пропорциональна λ^{-2} , а не λ^{-4} , как при объемном рассеивании.

b) Нормальное падение; поляризованный свет. С. Раман и Л. Рамдас не указали для этого случая никаких абсолютных цифр, они ограничились схематическим изображением (фиг. 2), которое дает представление об интен-



Фиг. 2. Нормальное падение. Эксперимент.

сивности и поляризации света, рассеянного в различных направлениях¹.

В рассматриваемом случае в теоретическом выражении (28) и (28') следует положить $\Theta_0 = 0$. Вычисленные таким образом значения величины I и μ приведены² в табл. 1 и 2.

Таблица 1
Значения I

$\theta \backslash \varphi$	0°	30°	60°	90°
0°	—	—	—	—
40°	2.4	2.2	1.7	1.4
60°	1.33	1.08	0.58	0.33
75°	1.07	0.81	0.31	0.08

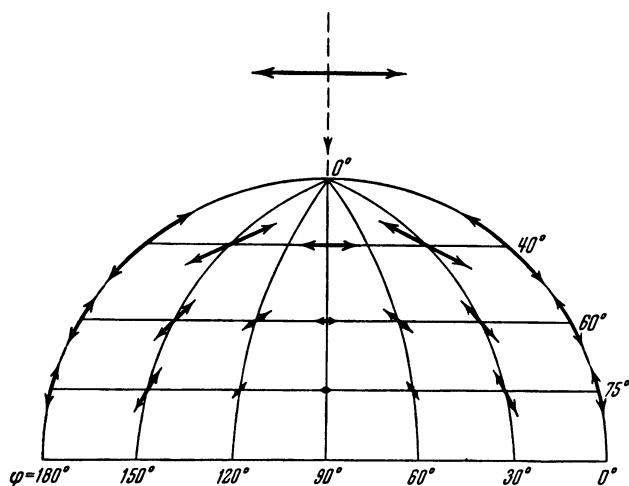
Таблица 2
Значения μ

$\theta \backslash \varphi$	0°	30°	60°	90°
0°	—	—	—	—
40°	-90°	-66°	-41°	0°
60°	-90	-74	-49	0
75°	-90	-81	-66	0

¹ В работе С. Рамана, как уже упоминалось в предисловии, не имеется никаких данных относительно построения диаграмм. Мы поступаем следующим образом: полученные нами значения угла отнесены к углу между параллельным кругом и меридианом и в таком виде помещены на чертеже.

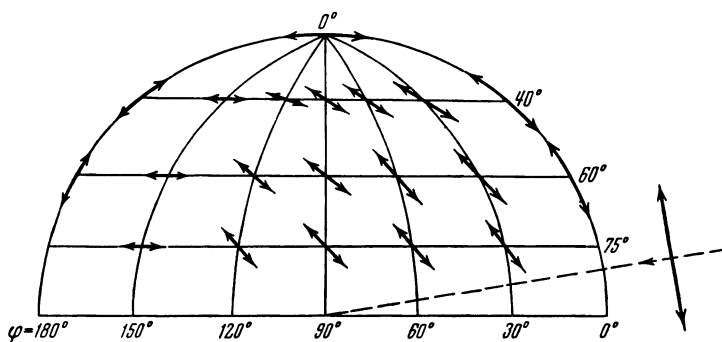
² В табл. 1 и 2 значения I даются в безразмерных единицах (принято $4 J_0 c_1 k^2 S = 1$).

Кроме того, чтобы облегчить сравнение, эти величины объединены в диаграмму, подобную диаграмме С. Рамана (фиг. 3).



Фиг. 3. Нормальное падение. Теория.

с) Свет поляризован в плоскости падения; угол падения $\theta_0 = 80^\circ$. Экспериментальные данные С. Рамана и Л. Рамдаса изображены на фиг. 4. Для вычислений в рассматриваемом случае следует положить в форму-



Фиг. 4. Угол падения $\theta = 80^\circ$. Эксперимент.

лах (28) $\theta_0 = 80^\circ$. Полученные результаты приведены¹ в табл. 3, 4 и на диаграмме (фиг. 5).

Таблица 3

Значения I

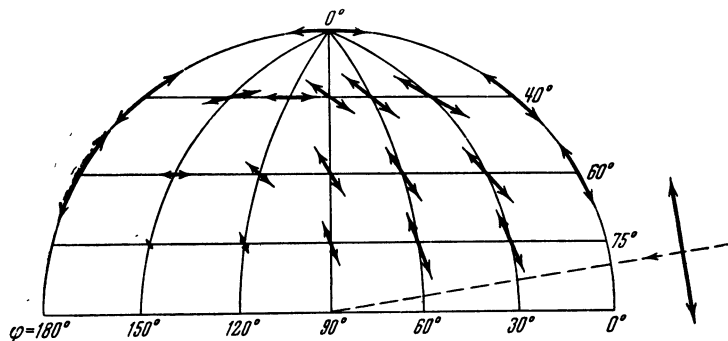
$\theta \backslash \varphi$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0°	1.03	—	—	—	—	—	—
40°	0.99	0.95	0.87	0.72	0,60	0.71	1.22
60°	0.99	0.93	0.78	0.67	0,36	0.25	1.85
75°	—	0.93	0.75	0.48	0.24	0.07	—

¹ См. последнюю сноску на предыдущей странице.

Таблица 4

Значения μ

$\theta \backslash \varphi$	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0°	—90°	—	—	—	—	—	—
40°	—90	—75°	—59°	—40°	0°	20°	90°
60°	—90	—82	—72	—60	—39	0	90
75°	—90	—86	—81	—75	—60	—49	90

Фиг. 5. Угол падения $\theta = 80^\circ$. Теория.

В обоих случаях б) и с) сравнение схем показывает качественное согласие теории и опыта.

Рассеивание света на поверхности метилового спирта

Освещение соответственным светом со стороны жидкости под углом полного отражения.

Экспериментальные данные С. Рамана и Л. Рамдаса для случая направления наблюдения вблизи угла полного отражения ($\theta = 49^\circ$) и при различных азимутах φ сведены в табл. 5 (последняя графа).

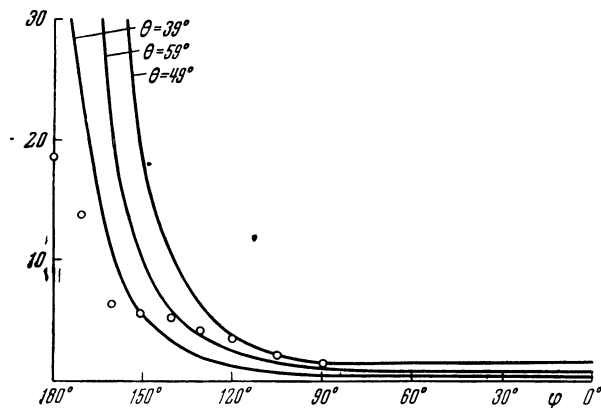
Таблица 5

Значения $10^6 I/I_g$

φ	Теоретическое			Экспериментальное
	$\theta = 39^\circ$	$\theta = 49^\circ$	$\theta = 59^\circ$	
0°	0.47	1.55	0.88	—
30	0.44	1.46	0.85	—
60	0.40	1.29	0.81	—
90	0.48	1.55	1.04	1.4
100	0.61	1.96	1.28	—
105	—	—	—	2.1
110	0.8	2.7	1.8	—
120	1.17	3.87	2.39	3.5
130	1.82	6.13	3.62	4.1
140	3.97	10.6	5.87	5.1
150	5.4	19.4	10.7	5.6
160	11.2	52.5	23	6.3
170	26.2	—	65	14.1
180	45.3	—	147	18.8

Интенсивность рассеянного света измерялась по сравнению с рассеиванием на поверхности гипса, как и в случае а) рассеивания на поверхности ртути.

Значения, полученные из формул (23), (24) (здесь $n = 1:1.328$, в метиловом спирте $\lambda = 420$ мкм, $\gamma = 23$ дн/см) сведены в графы 2, 3, 4 табл. 5. Соответствующее графическое представление дано на фиг. 6, где кружочками показаны опытные данные С. Рамана и Л. Рамдаса.



Фиг. 6.

Очевидно, что для азимутов наблюдения от 90° до 130° наблюдается хорошее соответствие теории с экспериментальными данными.

При приближении к плоскости падения или, что в рассматриваемом случае то же самое, к направлению регулярно отраженного луча, данные вычисления и наблюдения расходятся. Теория дает быстрое

возрастание интенсивности (обусловленное главным образом статистическим фактором). Экспериментальные данные такого возрастания не показывают. Во всем остальном остается справедливым замечание, сделанное в начале второй части.

Предлагаемая работа выполнялась по предложению и под руководством проф. Л. И. Мандельштама. Мы пользуемся возможностью выразить глубокую благодарность нашему учителю Л. И. Мандельштаму.

Москва, Физический институт И МГУ,
отделение теоретической физики

ЛИТЕРАТУРА

1. Mandelstam L. Über die Rauigkeit freier Flüssigkeitsoberflächen.— Ann. Physik, 4. Folge, 1913, Bd 41, № 8, S. 609—624.
2. Gans R. Die molekulare Rauigkeit einer ebenen Quecksilberoberfläche.— Ann. Physik, 4. Folge, 1924, Bd 74, № 11, S. 231—251.
3. Raman C. and Ramdas L. The scattering of light by liquid boundaries and its relation to surface-tension. Pt 1—3.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1925, vol. 108, № 748, p. 561—571; vol. 109, № 749, p. 150—157; № 750, p. 272—279.
4. Gans R. Lichtzerstreuung infolge der molekularen Rauigkeit der Trennungsfläche zweier durchsichtiger Medien.— Ann. Physik, 4. Folge, 1926, Bd 79, № 3, S. 204—226.
5. Rayleigh Lord. On the dynamical theory of gratings.— Proc. Roy. Soc., ser. A, 1907, vol. 79, № 532, p. 399—416.

О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ ¹

В этой статье в связи с рядом задач теории колебаний исследуются свойства решений дифференциальных уравнений:

$$\ddot{y} + (1 + q \cos pt) y = 0, \quad \ddot{y} + 2f\dot{y} + (1 + q \cos pt) y = 0$$

§ 1. Вопрос, которому посвящена эта статья, представляет интерес для беспроволочной телеграфии и акустики. Еще Релей [1, 2, 3] указал на акустические задачи, приводящие к излагаемому здесь вопросу (колебание струны при периодически меняющемся натяжении); однако полученные им результаты в смысле математического решения вопроса неполны.

В связи с теорией модуляций в радиотелеграфии тем же вопросом занимался Дж. Р. Карсон [4], но многие его результаты неверны.

Проще всего формулировать нашу задачу для маятника. Рассмотрим маятник, колеблющийся в поле тяжести, меняющемся в зависимости от времени по закону

$$g = g_0(1 + q \cos pt)$$

Ограничиваясь случаем малых колебаний, будем иметь при подходящем выборе единиц времени для угла отклонения y уравнение движения вида

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (1 + q \cos pt) y = 0 \quad (1)$$

Для электрических колебаний рассматриваемый случай соответствует периодическому изменению емкости колебательного контура по закону

$$C = \frac{C_0}{1 + q \cos pt}$$

В случае, когда и емкость C и самоиндукция L периодически меняются со временем (с одинаковым периодом), обозначая через R сопротивление, мы имеем такое уравнение движения:

$$\frac{d}{dt} L(t) \frac{dy}{dt} + R \frac{dy}{dt} + \frac{1}{C(t)} y = 0$$

¹ Совместно с М. А. Леонтовичем. Опубликовано в Ж. Русс. физ.-хим. о-ва, ч. физическая. 1927, 59, в. 5-6, с. 429.

Здесь y обозначает заряд конденсатора в рассматриваемом контуре. Вводя новую независимую переменную

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{L(t)}$$

которая монотонно возрастает вместе с t , приведем это уравнение к следующему виду:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + R \frac{dy}{d\tau} + \frac{L}{C} y = 0$$

Отбрасывая член с сопротивлением (влияние затухания рассмотрено ниже, в § 5), имеем

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + g(\tau) y = 0 \quad (1')$$

Здесь $g(\tau) = L/C$, как легко показать, — периодическая функция τ с тем же периодом, что $L(t)$ и $C(t)$.

Механической задачей, соответствующей этому случаю, является движение качелей, раскачиваемых ритмическими движениями в вертикальном направлении качающегося на них человека. Здесь периодически изменяются момент инерции качелей (соответствует самоиндукции) и расстояние от оси вращения до центра тяжести (соответствует обратной величине емкости).

§ 2. Для исследования уравнения (1) вводим новое переменное:

$$x = \frac{pt}{2} = \frac{t}{\mu}$$

где

$$\mu = \frac{2}{p}$$

Уравнение движения (1) преобразуется в такое:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 (1 + q \cos 2x) y = 0 \quad (2)$$

Сделав такую же замену независимого переменного в уравнении (1') [в этом случае p — частота колебаний функции $g(\tau)$], преобразуем это уравнение:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 g(x) y = 0 \quad (2')$$

где $g(x)$ — положительная непрерывная периодическая функция с периодом π .

Дифференциальное уравнение (2) называется уравнением Матьё. Его рассматривали многие математики¹. Нам не известно, однако, полное исследование свойств его решений в применении к формулированным выше задачам теории колебаний. Поэтому в настоящей работе мы на основе известных результатов даем исследование решений этого диф-

¹ См. Пуанкаре [5], Уиттекер и Ватсон [6]; см. также книгу Гумберта [7], где приведена литература вопроса до 1926 г.

ференциального уравнения (2), а также отчасти и решений более общего уравнения (2'), так называемого уравнения Хилла¹.

Приведем основные свойства решений уравнения (2), ограничиваясь случаем, когда $|q| < 1$ (и, следовательно, $g = 1 + q \cos 2x > 0$) и μ — действительное число.

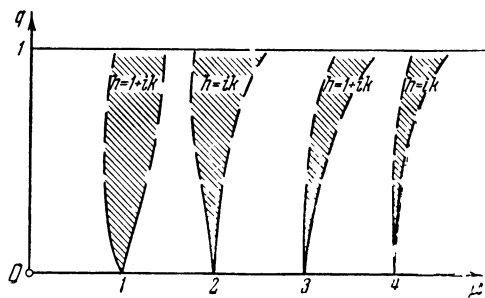
При любом q , удовлетворяющем этому условию, в зависимости от величины μ характер интегралов этого уравнения различный (фиг. 1).

1. Для одних значений параметров q и μ (которым на схематической фиг. 1 соответствуют незаштрихованные области) общее решение имеет вид:

$$y = \alpha e^{ihx} \varphi(x) + \beta e^{-ihx} \varphi(-x) \quad (3)$$

Его можно написать и так:

$$y = \cos hx \psi(x) + \sin hx \chi(x)$$



Фиг. 1.

Здесь h — действительное число (характеристический показатель); α, β — постоянные интегрирования; $\varphi(x), \psi(x), \chi(x)$ — периодические (с периодом π) функции. Для этих значений параметров решение представляет собой, вообще говоря, почти периодическую функцию², а для рациональных значений h — периодическую (с периодом $2\pi n$) функцию. Мы называем эти решения стабильными, а соответствующие значения параметра μ — стабильными значениями (считая q данным).

2. Для других значений параметров (соответствующих областям, заштрихованным на чертеже) решение имеет тот же вид, но h — число или чисто мнимое вида $h = ik$, или комплексное вида $h = 1 + ik$. Общее решение имеет вид:

$$y = \alpha e^{-kx} \varphi_1(x) + \beta e^{kx} \varphi_1(-x) \quad (3')$$

Здесь $\varphi_1(x)$ — периодическая (с периодом π или 2π) функция³. Амплитуда колебаний в этом случае возрастает, вообще говоря, безгранично [если только начальные значения не подчинены специальным условиям, имеющим вид однородного линейного соотношения между $y(0)$ и $y'(0)$, при которых $\beta = 0$]. Мы назовем эти решения и соответствующие им (при определенном q) значения параметра μ нестабильными.

3. Для значений параметров, отделяющих стабильную область от нестабильной, одно из решений периодическое (с периодом π или 2π), другое вида $xP(x) + Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — периодические (с периодом π или 2π) функции.

¹ Г. Хилл [8], стр. 1.

² В смысле определения Бора (Н. Bohr).

³ В первом случае $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ [при этом $\varphi(x)$ — функция, входящая в выражение (3)], во втором случае $\varphi_1(x) = e^{ix} \varphi(x)$.

Эти граничные значения μ образуют беспрерывно возрастающую последовательность.

Утверждения, сделанные в п. 1, 2 и 3, доказываются следующими рассуждениями.

Как известно из теории дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами¹, наше дифференциальное уравнение (2) всегда имеет один интеграл вида $e^{ihx}\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом π . Пусть² $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — такие два независимых интеграла этого уравнения, что

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1, & y_2(0) &= 0 \\ y_1'(0) &= 0, & y_2'(0) &= 1 \end{aligned}$$

Отсюда на основании свойств детерминанта Вронского имеем

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1$$

Указанное выше решение $y(x) = e^{ihx}\varphi(x)$ должно выражаться линейно через $y_1(x)$ и $y_2(x)$; следовательно,

$$y(x) = e^{ihx}\varphi(x) = y(0)y_1(x) + y'(0)y_2(x)$$

$$y'(x) = e^{ihx}(\varphi'(x) + ih\varphi(x)) = y(0)y_1'(x) + y'(0)y_2'(x)$$

Отсюда в силу периодичности функции $\varphi(x)$ имеем

$$y(\pi) = e^{ih\pi}y(0) = y(0)y_1(\pi) + y'(0)y_2(\pi)$$

$$y'(\pi) = e^{ih\pi}y'(0) = y(0)y_1'(\pi) + y'(0)y_2'(\pi)$$

Исключая $y(0)$ и $y'(0)$ и принимая во внимание равенство единице детерминанта Вронского, имеем

$$\cos \pi h = \frac{y_1(\pi, \mu) + y_2'(\pi, \mu)}{2} \quad (4)$$

Здесь мы явно обозначили зависимость решений от μ . Заметим, что если h — решение уравнения (4), то в силу четности функции косинуса $-h$ тоже является решением. Из всего бесконечного числа решений этого уравнения (получающихся из наименьшего по абсолютной величине прибавлением или вычитанием любого четного числа) нам нужно лишь это наименьшее (взятое со знаком $+$ или $-$).

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ принимают лишь действительные значения, поэтому решения (h) уравнения (4) могут быть следующих видов:

1) Если для некоторых значений μ правая часть уравнения (4) такова, что $-1 < \cos \pi h < +1$, то h действительно, и мы для этих μ имеем стабильные решения дифференциального уравнения.

2) Если $\cos \pi h > 1$, то h чисто мнимое, $h = ik$, если $\cos \pi h < -1$, то решение имеет вид $h = 1 + ik$. Для значений μ , при которых эти соотношения имеют место, решения нестабильные.

¹ См., например, Гурса [9].

² Пуанкаре [3].

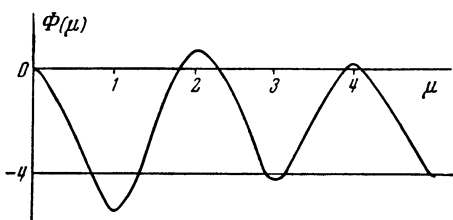
3) Для значений μ , отделяющих первую область от второй, мы имеем $\cos \pi h = \pm 1$, соответствующие значения h суть $h = 0$ и $h = +1$, первому из них соответствуют решения с периодом π , второму — с периодом 2π .

Вводя новые обозначения и несколько преобразовывая уравнение (4), определяющее характеристический показатель h , имеем

$$\Phi(\mu) \equiv y_1(\pi, \mu) + y_2'(\pi, \mu) - 2 = 2(\cos \pi h - 1)$$

Здесь $\Phi(\mu)$ — непрерывная функция μ (более того, на основании одной теоремы теории дифференциальных уравнений она является целой функцией μ). Значения μ , для которых дифференциальное уравнение имеет решения с периодом π , получаются из уравнения $\Phi(\mu) = 0$; значения μ , соответствующие решениям с периодом 2π , — из уравнения $\Phi(\mu) = -4$.

Стабильные решения дифференциального уравнения имеют место при $-4 < \Phi(\mu) < 0$, нестабильные — при $\Phi(\mu) > 0$ или $\Phi(\mu) < -4$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Можно показать, что для нашего дифференциального уравнения $\Phi(\mu) = 0$ и $\Phi(\mu) = -4$ не могут иметь кратных корней. Это следует из одной теоремы Боше^[10], который показал, что уравнение $\Phi(\mu) = 0$ при $q \neq 0$ имеет кратные корни тогда и только тогда, если для одного и того же μ существуют два линейно независимых периодических (с периодом π) решения. Но Е. Айнс^[11] показал¹, что это невозможно для уравнения Матьё при $q \neq 0$. Этот вывод непосредственно распространяется на корни уравнения $\Phi(\mu) = -4$.

Поэтому значения μ , обращающие $\Phi(\mu)$ в нуль [или являющиеся корнями уравнения $\Phi(\mu) = -4$], всегда являются границей интервала, где $\Phi(\mu) > 0$ или $\Phi(\mu) < -4$, и интервала значений μ , в котором $\Phi(\mu) < 0$ или $\Phi(\mu) > -4$. Первому из этих интервалов соответствуют нестабильные, второму — стабильные решения дифференциального уравнения. Квадраты корней (μ^2) уравнения $\Phi(\mu) = 0$ суть собственные числа задачи Штурма—Лиувилля для дифференциального уравнения (2) при условиях

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi)$$

Квадраты корней уравнения $\Phi(\mu) = -4$ суть собственные числа для того же дифференциального уравнения, но при условиях

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi)$$

Те и другие вместе представляют собой совокупность собственных чисел Штурма—Лиувилля для нашего дифференциального уравнения при пограничных условиях:

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

¹ См. также Гумберт^[7], I. с., стр. 29.

Отсюда на основании общих теорем теории Штурма—Лиувилля заключаем, что те и другие значения образуют безгранично возрастающую последовательность. Так как по предыдущему они не совпадают, то мы можем заключить, что уравнение (2) имеет «стабильные» и «нестабильные» значения μ , большие любого заданного числа.

Чтобы оправдать характер кривой $\Phi(\mu)$, схематически данный на фиг. 2, и расположение периодических решений, указанное на фиг. 1, заметим следующее. Пользуясь результатами Боше¹, мы можем утверждать, что корни уравнения $\Phi'(\mu) = 0$ обязательно лежат в области, где

$$\Phi(\mu) > 0 \quad \text{или} \quad \Phi(\mu) < -4$$

Отсюда сейчас же следует, что пары решений уравнения $\Phi(\mu) = 0$ чередуются с парами решений уравнений $\Phi(\mu) = -4$.

Нужно заметить, что указанное здесь распределение стабильных и нестабильных решений в зависимости от величины μ имеет место и для общего уравнения (2'), если только это уравнение ни при каком μ не допускает двух линейно независимых периодических решений с периодом π или 2π . Ход доказательства при этом не изменяется.

§ 3. Для многих вопросов (в частности, для теории адиабатических инвариантов) имеет большое значение изучение свойств решений нашей задачи при безгранично возрастающем μ , т. е. когда частота колебаний функции $g(\tau)$ в уравнении (1') безгранично уменьшается (эту частоту p будем для краткости называть частотой модуляции). Поэтому мы найдем асимптотические выражения для решений уравнения (2') в этом случае. Мы воспользуемся для этого методом Лиувилля².

Вводим новые переменные:

$$z = yg^{\frac{1}{4}}, \quad s = \int_0^x g^{\frac{1}{2}} dx$$

[для частного случая уравнения (2) $g = 1 + q \cos 2x$].

Новое независимое переменное s монотонно растет вместе с x .

В этих переменных уравнение (2) примет такую форму:

$$\frac{d^2 z}{ds^2} - rz + \mu^2 z = 0$$

где r — непрерывная функция s .

Рассматривая в этом уравнении rz как правую часть и написав по известной формуле решение, имеем

$$z(s) = c \cos(\mu s + b) + \frac{1}{\mu} \int_0^s r(\sigma) z(\sigma) \sin \mu(s - \sigma) d\sigma \quad (A)$$

¹ Боше [10], I. с., § 18, стр. 87.

² См., например, Курант и Гильберт [12], гл. IV, § 2, стр. 335 и след. (в русск. перев. т. I, гл. V, § 3, стр. 275 и след.). Заметим, что приведенные в этом параграфе асимптотические выражения решений (как это следует из вывода) справедливы и в том случае, когда функция $g(x)$ в уравнении (2') непериодическая.

Здесь c и b — произвольные постоянные. Это соотношение представляет собой интегральное уравнение типа уравнения Вольтерра с ядром

$$K(s, \sigma) = \frac{r(\sigma) \sin \mu(s - \sigma)}{\mu}$$

Составляя для него ряд Неймана, имеем [обозначая для сокращения $c \cos(\mu s + b)$ через $v(s)$]:

$$z(s) = v(s) + \int_0^s v(\sigma_1) K(s, \sigma_1) d\sigma_1 + \int_0^s v(\sigma_1) K(s, \sigma_1) K(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1 + \\ + \dots + \int_0^s \int_0^{\sigma_1} \dots \int_0^{\sigma_{n-1}} v(\sigma_1) K(s, \sigma_1) \dots K(\sigma_{n-1}, \sigma_n) d\sigma_1 \dots d\sigma_{n-1}, d\sigma_n + \dots$$

мы имеем

$$|K(s, \sigma)| = \left| \frac{r \sin \mu(s - \sigma)}{\mu} \right| < \frac{R}{\mu}$$

где $R = \max |r|$. Принимая это во внимание, мы найдем, что n -ый член ряда Неймана по абсолютной величине меньше, чем

$$c \left(\frac{R}{\mu} \right)^n \frac{s^n}{n!}$$

Отсюда, суммируя, легко найдем

$$|z(s) - c \cos(\mu s + b)| < c \left[\exp \frac{Rs}{\mu} - 1 \right]$$

Мы видим, что для s , взятого в любом заданном интервале $(0, S)$, всегда можно найти столь большое μ , чтобы $z(s)$ как угодно мало отличалось от $c \cos(\mu s + b)$. Функция $c \cos(\mu s + b)$ представляет собой асимптотическое (при $\mu \rightarrow \infty$) выражение для решения $z(s)$ нашего дифференциального уравнения.

Переходя к прежним переменным, имеем асимптотически¹

$$y(x) = c g^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} dx + b \right) + O \left(\frac{1}{\mu} \right) \quad (5)$$

Дифференцируя интегральное уравнение (А) аналогичным предыдущему способом, легко найти, что асимптотическим выражением производной по времени

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\mu} y'(x)$$

является следующее выражение:

$$\frac{y'(x)}{\mu} = -c g^{\frac{1}{4}} \sin \left(\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} dx + b \right) + O \left(\frac{1}{\mu} \right) \quad (5')$$

¹ Как обычно, обозначаем символом $O[f(\xi)]$ такую функцию ξ , что при безгранично возрастающем ξ $|O[f(\xi)]/f(\xi)|$ остается ограниченным.

Для любого интервала $(0, X)$ значений x , т. е. для любого числа периодов функции $g(x)$ (для любого числа колебаний поля), мы всегда можем найти столь большое μ (такую малую частоту колебаний поля), что в этом интервале эти асимптотические выражения как угодно точно аппроксимируют наше решение. Мы не можем, однако, утверждать, что они аппроксимируют наше решение равномерно для всех x от 0 до ∞ .

Пользуясь этими асимптотическими выражениями, можно показать, что для малой «частоты модуляций» p (для большого μ) величина $\omega = g^{1/2}$ может быть названа частотой (циклической) колебаний в данный момент. С этой целью мы докажем, что при $\mu \rightarrow \infty$ разность Δ между двумя последовательными корнями функции $y(x)$ стремится к $\pi / \mu g^{1/2}$ (а разность двух соответствующих значений t , следовательно, стремится к π / ω). Пусть один корень равен x_n , следующий $x_n + \Delta$. Тогда величина Δ определится из уравнения

$$\int_{x_n}^{x_n + \Delta} g^{1/2} dx = \frac{\pi}{\mu}$$

Отсюда видно, что при $\mu \rightarrow \infty$ $\Delta \rightarrow 0$ и, следовательно, при достаточно большом μ интеграл будет как угодно мало отличаться от $g^{1/2} \Delta$, и Δ от $g^{-1/2} \pi / \mu$. Вообще пусть мы имеем функцию $\cos [\mu f(x)]$. При большом μ малому изменению x соответствует большое число ее колебаний. Разлагая $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ и ограничиваясь первыми членами, получим выражение $\cos \mu [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$, в течение многих колебаний изображающее нашу функцию. Из этого выражения видно, что $\mu f'(x)$ представляет собой частоту этих колебаний (для соответствующего x).

Воспользуемся полученным асимптотическим выражением (5) для выяснения асимптотического поведения характеристического показателя h в случае дифференциального уравнения (2).

Мы имеем на основании (5)

$$y_1(x, \mu) = y_2'(x, \mu) = \left(\frac{1+q}{1+q \cos 2x} \right)^{1/4} \cos \left[\mu \int_0^x (1 + \cos 2x)^{1/2} dx \right] + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

и, в частности, для $x = \pi$

$$y_1(\pi, \mu) = y_2'(\pi, \mu) = \cos \mu L + O\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

где

$$L = \int_0^\pi (1 + q \cos 2x)^{1/2} dx$$

Вставляем эти выражения в уравнение (4). Тогда это уравнение, определяющее h , принимает такой вид:

$$\cos \pi h = \cos \mu L + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (6)$$

Отсюда получаем такое асимптотическое выражение для характеристического показателя:

$$h = \frac{\mu L}{\pi} - n + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (7)$$

Здесь n — целая часть $\mu L / \pi$. Величина $O(\mu^{-1})$ может иметь в этом равенстве и комплексные значения (для нестабильных значений μ). Из соотношений (6) и (7) легко вывести, что при безгранично увеличивающемся μ интервалы нестабильных значений μ безгранично сужаются и оба ограничивающих их значения μ (которым соответствует решение с периодом π или 2π) имеют асимптотические значения

$$\mu = \frac{n\pi}{L} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

где n — целое число.

Для нестабильных решений имеем $h = ik$ или $h = 1 + ik$ и $|\cos \pi h| = = \operatorname{ch} \pi k$:

$$\operatorname{ch} \pi k = \left| \cos \mu L + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right| \leq 1 + \left| O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right|$$

т. е.

$$\operatorname{ch} \pi k - 1 \leq \left| O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right|$$

Отсюда заключаем, что $\lim k = 0$ при $\mu \rightarrow \infty$; это вытекает также непосредственно из (7)¹.

§ 4. Применим полученные выводы к поставленной вначале задаче о малых колебаниях маятника в периодически меняющемся поле тяжести. Из предыдущего мы видим, что существуют такие — нестабильные — значения частоты изменения поля p (частоты модуляций), для которых амплитуда колебаний растет по экспоненциальному закону. Для этих нестабильных значений частоты p имеет место своеобразный «параметрический» резонанс (если здесь по аналогии с обычным резонансом можно употребить этот термин). Существенным отличием от обычного резонанса

¹ Укажем еще на одно особое интегральное уравнение, связанное с разбираемой нами математической задачей. Стабильное решение дифференциального уравнения

$$y'' - a^2 y + \lambda (1 + Q \cos 2x) y = 0 \quad (a > 0) \quad (\alpha)$$

удовлетворяет такому интегральному уравнению [полагаем $\varphi(x) = y(x)(1 + Q \cos 2x)^{1/2}$]:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) K(x, \xi) d\xi$$

$$K(x, \xi) = (1 + Q \cos 2x)^{\frac{1}{2}} (1 + Q \cos 2\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-a(x-\xi)}}{2a}$$

Наоборот, решения этого интегрального уравнения дают все стабильные решения дифференциального уравнения (α) . Как следует из изложенного выше, относительно распределения стабильных решений дифференциального уравнения (2) [эти выводы легко переносятся на дифференциальное уравнение (α)] — это интегральное уравнение имеет «полосатый спектр». При $Q = 0$ оно обращается в известное интегральное уравнение Вейля.

является здесь, во-первых, то, что эти нестабильные значения не дискретны, а заполняют непрерывно целые интервалы, и, во-вторых, то, что они близки (везде, кроме первых двух интервалов нестабильности) к «унтертонам» собственной частоты системы; как известно, обычный резонанс сплошных сред связан с дискретными «обертонами», а резонанс простого квазиупругого движения — с одной основной частотой. Явление нестабильного движения может иметь место (при отсутствии трения) при как угодно малой частоте модуляций p . Для прочих значений частоты модуляций движение имеет (вообще говоря) почти периодический характер.

В применении к указанному выше примеру с качелями наши выводы показывают, что раскачивание будет происходить в том случае, когда частоте ритмических движений качающегося человека будет соответствовать нестабильное решение дифференциального уравнения (1').

Тот же процесс раскачивания, постепенного нарастания электрических колебаний, должен иметь место при тех же условиях в контуре без электродвижущих сил, если мы будем периодически менять его емкость или самоиндукцию ¹.

§ 5. В заключение рассмотрим колебания нашего маятника в сопро- тивляющейся среде и посмотрим, какие изменения в предыдущие выводы вносит наличие трения. Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2f \frac{dy}{dt} + (1 + q \cos pt) y = 0 \quad (8)$$

Вводя, как и прежде, $x = \frac{pt}{2} = \frac{t}{\mu}$, $\mu = \frac{2}{p}$, имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2f\mu \frac{dy}{dx} + \mu^2 (1 + q \cos 2x) y = 0 \quad (9)$$

Делая замену переменного $y = e^{-f\mu x} z$, имеем

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \mu^2 (1 - f^2 + q \cos 2x) z = 0$$

Обозначая $\mu^2 (1 - f^2) = \mu'^2$ и $\mu \frac{q}{1 - f^2} = q'$, получаем

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \mu'^2 (1 + q' \cos 2x) z = 0 \quad (10)$$

Считаем, что q и f таковы, что $q' < 1$; тогда уравнение (10) для z совершенно совпадает по виду с уравнением (2). Для стабильных решений этого уравнения (10) решения уравнения (9) или, что все равно, решения уравнения (8) будут иметь характер затухающих колебаний. Пусть при определенном μ уравнение (10) имеет нестабильное решение

¹ Мы всегда можем предположить, что в начальный момент у нас имеется в конденсаторе какой-то заряд, сколь угодно малый, хотя бы флуктуационного происхождения; этот заряд будет расти, если у нас будет режим, соответствующий нестабильному решению.

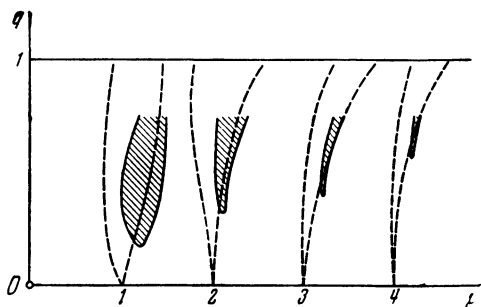
вида $z = e^{kx}\varphi(x)$ (где $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом π или 2π). Тогда для этого μ уравнение (9) имеет решение

$$y = e^{(k-f\mu)x}\varphi(x)$$

Если $k - f\mu > 0$, — то решение нестабильное, колебания происходят с возрастающей амплитудой; если $k - f\mu = 0$, то решение периодическое¹; если $k - f\mu < 0$, решение затухающее. Другое решение, которому соответствует характеристический показатель $-k$, всегда затухающее.

На основании доказанного выше (в § 3) $\lim k = 0$ при $\mu \rightarrow \infty$; поэтому, начиная с некоторого μ , всегда $k - f\mu < 0$ и, следовательно, число интервалов нестабильных значений μ для уравнения (9) конечно. В частности, при достаточно большом трении может не быть ни одного такого интервала. Заметим еще, что, как это следует из предыдущих рассуждений, интервалы нестабильности сужаются при увеличении трения.

На фиг. 3 схематически показана зависимость характера решения дифференциального уравнения (9) от параметров q или μ . Для значений параметров,



Фиг. 3.

соответствующих заштрихованным областям, дифференциальное уравнение (9) имеет нестабильное решение. Для незаштрихованной области общее решение затухающее. Для пограничных значений одно из решений периодическое. Кроме того, на фиг. 3 показаны границы стабильных и нестабильных областей, которые были бы при отсутствии трения.

§ 6. Вычисление положения и величины интервалов нестабильных значений μ может быть выполнено для случая малых q при помощи метода, данного Релеем^[2]. Этот метод может быть применен не только к вычислению двух наименьших значений μ , которым соответствуют периодические решения с периодом π , как это было сделано Релеем (т. е. границ первого интервала нестабильности), но также и к вычислению μ , определяющих положение любого следующего интервала. При отсутствии трения эти значения μ могут быть также получены из известных выражений для собственных чисел задачи Матьё².

¹ Амплитуда получающихся в этом случае незатухающих колебаний зависит от начальных условий. Незатухающие колебания с амплитудой, не зависящей от начальных условий, могут получаться в результате нестабильного движения, если для достаточно больших размахов уравнения движения перестают быть линейными. Ср. Релей^[2], т. I, § 68 b, стр. 85.

² Собственные числа задачи Матьё — это значения λ , для которых дифференциальное уравнение

$$y'' + (\lambda + 16q_1 \cos 2x)y = 0$$

имеет периодические решения с периодом 2π (или π). См. Уиттекер и Ватсон^[6].

Для уравнения (2) (без трения) получаются с точностью до величин порядка выше q^2 следующие значения.

Границы первого интервала неустойчивости

$$\mu^2 = 1 \pm \frac{1}{2} q + \frac{15}{64} q^2$$

Границы второго интервала неустойчивости

$$\mu^2 = 4 - \frac{1}{3} q^2, \quad \mu^2 = 4 + \frac{5}{3} q^2$$

Ширина n -го интервала неустойчивости — величина порядка q^n . Значение μ^2 , соответствующее n -му интервалу

$$\mu^2 = n^2 + \frac{n^4 q^2}{2(n^2 - 1)}$$

Для случая с трением [для уравнения (9)] для границ первого интервала неустойчивости приводим значения, данные Релеем:

$$\mu^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} q^2 - 4f^2}$$

Неустойчивые решения будут иметь место при условии

$$q > 4f$$

Для второго интервала мы получили с точностью до членов порядка q^4 и f^2 :

$$\mu^2 = 4 + \frac{2}{3} q^2 \pm \sqrt{q^4 - 64f^2}$$

Отсюда вытекает такое условие существования неустойчивых решений: $q^2 > 8f$. Для существования следующих интервалов неустойчивости должны быть выполнены условия, еще более ограничивающие величину декремента затухания f .

Сделаем примерный подсчет для указанного в конце § 4 случая электрического контура. Примем логарифмический декремент $f = 0.005$ и $q = 0.1$ (т. е. изменение самоиндукции или емкости составляет 0.1 их средней величины). В этом случае условие существования первого интервала неустойчивости выполнено; ширина его в частотах

$$\frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta p}{p} = 0.049$$

Второго (а также и следующих) интервалов неустойчивости нет. При $f = 0.001$ и $q = 0.1$ мы имели бы уже два интервала неустойчивости.

Примечание при корректуре. В самое последнее время нам стал известен ряд работ¹, посвященных вопросам, близким к тем, которые рассматриваются в настоящей статье. В этих работах имеется часть полученных нами результатов и, кроме того, по некоторым пунктам проведено дальнейшее исследование.

¹ Мейснер [13,14], Дрейфус [15], Хамель [16], Хаунт [17].

Особенно интересной представляется работа О. Хаупта, посвященная уравнению Хилла (2'). Хаупт доказывает такую теорему: «Если для какой-нибудь функции $g(x)$ в уравнении (2') число нестабильных областей оказывается конечным, то всегда можно найти такую функцию $g(x) + m(x)$, для которой число нестабильных областей бесконечно, и притом такую, что $[m(x)] < \varepsilon$, где ε сколь угодно мало».

В следующей статье будет дано приложение изложенных здесь результатов к теории адиабатических инвариантов.

Мы выражаем глубокую благодарность проф. Л. И. Мандельштаму, по предложению и под руководством которого выполнена эта работа, и И. Е. Тамму за ценные указания.

Москва, Физический институт I МГУ,
отделение теоретической физики

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh Lord. On maintained vibrations.—Philos. Mag., Ser. 5, 1889, № 94, p. 229—235.
2. Rayleigh Lord. Theory of sound. Vol. I., 2 ed. London, Macmillan, 1922, § 68.
3. Rayleigh Lord. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure.—Philos. Mag., Ser. 5, 1887, vol. 24, № 147, p. 145—159.
4. Carson J. R. Notes on the theory of modulations.—Proc. I. R. E., 1922, vol. 10, № 1, p. 57—64.
5. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. 2. Paris, 1893, Ch. 17. Cas des équations linéaires, p. 229—280.
6. Whittaker E. and Watson G. Course of modern analysis. 3 ed., London, Cambridge Univ. Press, 1920, Ch. 19.
7. Humbert P. Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu.—Mem. sci. math., 1926, Fasc. 10, p. 1—58.
8. Hill G. On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon.—Acta math., 1886, vol. 8, p. 1—36.
9. Гурса Э. Курс математического анализа. Перев. с франц., т. 2. М., 1923, § 42 б.
10. Bôcher M. Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes. Paris. 1917, § 18.
11. Ince E. A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions.—Proc. Cambridge Philos. Soc., 1922, vol. 21, pt 2, p. 117—120.
12. Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik. 2. verb. Aufl., Berlin, Springer, 1931, XIV + 469 S. Русск. перев. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, Т. I. Перев. с 2-го нем. изд. М., ГТТИ, 1933, XVI + 525 с.
13. Meissner E., Über Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität.—Schweiz. Bauzeitung, 1918, Bd 72, N 11, S. 95—98.
14. Meissner E. Zur Schwingungslehre.—Schweiz. Bauzeitung, 1924, Bd 84, N 23, S. 273—276; N 24, S. 283—285.
15. Dreifus L. Festschrift für August Föppl. Berlin, 1914.
16. Hamel G. Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten.—Math. Ann., 1913, Bd 73, S. 371—412.
17. Haupt O. Lineare homog. Differenzialgleichungen 2. Ordnung mit period. Koeffizienten. Math. Ann., 1918, Bd 79, S. 278.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПУАНКАРЕ И ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ¹

Существует ряд устройств, могущих генерировать незатухающие колебания за счет неперiodических источников энергии. Однако до сих пор нет достаточно строгой и общей теории таких автоколебаний. Между тем имеется адекватная математическая конструкция, созданная вне всякой связи с теорией колебаний, позволяющая установить общую точку зрения на все подобные процессы для случая одной степени свободы. Эта конструкция — теория «пределных циклов» Пуанкаре.

Уравнение движения рассматриваемой системы, имеющей одну степень свободы и не имеющей связей, зависящих явно от времени, является нелинейным уравнением вида:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \quad (1)$$

Полагая

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = y \frac{dy}{dx}$$

приведем это уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{y} \quad (2)$$

Переменные x и y будем считать действительными и будем исследовать поведение интегральных кривых этого уравнения на плоскости xy .

Нетрудно видеть, что периодическим решениям уравнения (1) соответствуют замкнутые интегральные кривые на плоскости xy .

При некоторых ограничениях, наложенных на $F(x, dx/dt)$, эти замкнутые решения уравнения (2) могут быть только двух типов: или это так называемые «центральные» решения, или это «пределные циклы».

«Центральные» решения соответствуют идеальным движениям, например консервативным движениям, изучаемым классической механикой. Если же уравнение (2) имеет предельный цикл, т. е. если все кривые, находящиеся в некоторой области, стремятся при $t \rightarrow \pm \infty$ к предель-

¹ Краткое содержание доклада. Опубликовано в кн. IV съезда русских физиков (5—16 авг. 1928 г.). Перечень докладов, представленных на съезд. М.—Л. Гос. изд-во, 1928, с. 23.

ному циклу, то это значит, что соответствующие решения уравнения (1) стремятся к периодическому решению, амплитуда и период которого не зависят от начальных условий. Стационарные движения, которые устанавливаются в приборах, способных к автоколебаниям, всегда соответствуют некоторым предельным циклам.

Соображения, связанные с поведением интегральных кривых на плоскости xu , позволяют дать качественную теорию рассматриваемых процессов и позволяют высказывать относительно конкретных физических проблем некоторые общие заключения. С этой точки зрения рассмотрены вопросы «самовозбуждения», «срыва» и «устойчивости» автоколебаний. В качестве реальных примеров рассмотрен катодный генератор и некоторые другие устройства.

В заключение рассматриваются приближенные методы количественного решения задачи об автоколебаниях и устанавливается связь с работами других авторов, исследовавших частные случаи этих колебаний.

К ТЕОРИИ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ ¹

Настоящая работа посвящена выяснению некоторых вопросов теории адиабатических инвариантов. Понятие адиабатического инварианта мы трактуем здесь в рамках классической механики и не касаемся его применений к статистической механике и теории атома.

В определении адиабатического инварианта в следующем пункте, как нам кажется, нет полной ясности. Определяя понятие адиабатического воздействия, Борн, например, требует²: «Wir betrachten als adiabatische Änderung des Systems eine solche, die erstens keine Beziehung zu der Periode des ungestörten Systems hat, und...»³.

Другие авторы формулируют соответствующее требование несколько иначе. Зоммерфельд^[2] пишет: «die unsystematische, gegenüber den Bewegungsphasen ungeordnete Art der Einwirkung». Крутков^[3] рассматривает скорость изменения параметра постоянной. Кнезер не ограничивает вида зависимости параметра от времени, но установленное им определение инвариантности, как станет видно из дальнейшего, требует известного уточнения.

Это несколько неопределенное ограничение должно, между прочим, исключить случай такого воздействия, когда имеет место нечто вроде резонанса. Для случая движения маятника в периодически меняющемся поле тяжести, рассмотренном с этой точки зрения Андроновым и Леонтовичем^[5], возможен как раз такой «параметрический резонанс» (нестабильное движение). Нам представлялось поэтому интересным для выяснения этого вопроса рассмотрение этого случая с точки зрения теории адиабатических инвариантов. Чтобы разобраться в этом вопросе, оказалось необходимым детализировать понятие адиабатического инварианта. В § 1 мы даем (для системы с одной степенью свободы) определение адиабатического инварианта в таком несколько детализованном виде. В дальнейшем оно поясняется примерами. Мы думаем, что при

¹ Совместно с М. А. Леонтовичем и Л. И. Мандельштамом. Опубликовано в Ж. русс. физ.-хим. о-ва, ч. физич. 1928, 60, в. 5, с. 413.

² «Мы рассматриваем как адиабатическое такое изменение системы, которое, во-первых, не находится ни в каком отношении с периодом невозмущенной системы, и...».

³ «бессистемный, неупорядоченный по отношению к фазам движения вид воздействия».

таком более строгом рассмотрении этого вопроса исчезают многие неясности в теории адиабатических инвариантов.

§ 1. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, определяемую функцией Лагранжа

$$L[y, \dot{y}, a],$$

где y — координата, определяющая положение системы, a — параметр.

Рассматривая реопараметрическое движение, примем, что параметр a определенным образом зависит от времени.

Вводя для удобного перехода к пределу новый параметр μ , имеем

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right)$$

Мы предполагаем, что $a\left(\frac{t}{\mu}\right)$ непрерывная, дифференцируемая функция.

Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x$$

имеем

$$a = a(x)$$

$$\dot{a} = \frac{1}{\mu} \frac{da}{dx}$$

при $\mu \rightarrow \infty$

$$\dot{a} \rightarrow 0$$

Смысл введения переменной x заключается в том, что, фиксируя x , мы тем самым фиксируем значение параметра

$$a = a\left(\frac{t}{\mu}\right) = a(x)$$

независимо от величины μ , характеризующей скорость его изменения¹.

Пусть некоторая величина A является функцией a , y , $\dot{y}$ и не зависит явно от t

$$A(x) = A\left[a(x), y(x), \frac{1}{\mu} \frac{dy}{dx}\right]$$

Мы назовем величину A адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения, если для любого заданного ε ($\varepsilon > 0$) можно найти такое M , что для всякого $\mu > M$ и x в интервале от 0 до X имеет место неравенство²

$$|A(x) - A(0)| \leq \varepsilon$$

Если M можно выбрать так, чтобы оно не зависело от X , то величину A мы назовем «стационарным» (или «равномерным») адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения.

¹ Заметим, что при таком способе рассмотрения автоматически исключаются случаи изменения параметра, подобные изменению его в известном примере, когда длина маятника изменяется рывком в крайнем его положении.

² Или в более общем случае в каком-нибудь интервале от α до β .

Если M нельзя выбрать независимым от x , то величину A назовем «временным» (или «неравномерным») адиабатическим инвариантом данного реопараметрического движения. В обоих случаях мы требуем, чтобы

$$|A(x) - A(0)| \rightarrow 0$$

при $\mu \rightarrow 0$, т. е. при $\dot{a} \rightarrow 0$, но в случае стационарности мы требуем, чтобы это выполнялось равномерно относительно x от $x=0$ до $x=\infty$.

Для данной $L[y, \dot{y}, a]$ может существовать функция

$$I[y, \dot{y}, a]$$

которая является «временным» адиабатическим инвариантом для всех $a(x)$, т. е. для всевозможных реопараметрических движений, отвечающих данной зависимости функции Лагранжа от $a, y, \dot{y}$.

Кнезер доказал^[4], что $\int p dq$ (для случая системы с одной степенью свободы) является адиабатическим инвариантом именно в смысле временной адиабатической инвариантности.

§ 2. Рассмотрим движение, определяемое функцией

$$L = \frac{1}{2} l^2 \dot{y}^2 - \frac{1}{2} g l y^2 \quad (1)$$

где

$$l = l\left(\frac{t}{\mu}\right) \text{ и } g = g\left(\frac{t}{\mu}\right)$$

Физически это движение можно интерпретировать как случай малых колебаний маятника переменной длины l в переменном поле силы тяжести g . Полагая

$$\frac{t}{\mu} = x$$

находим уравнение движения в виде

$$\frac{d}{dx} \left(l^2 \frac{dy}{dx} \right) + \mu^2 g l y = 0 \quad (2)$$

Легко¹ найти асимптотическое выражение решения этого уравнения в случае больших M

$$\begin{aligned} y(x) &= C l^{-\frac{3}{4}} g^{-\frac{1}{4}} \cos \left[\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} dx + b \right] \\ \frac{y'(x)}{\mu} = \dot{y}(x) &= -C l^{-\frac{5}{4}} g^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\mu \int_0^x g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} dx + b \right] \end{aligned} \quad (3)$$

где C и b — постоянные интегрирования.

Мы не можем в рассматриваемом общем случае утверждать, что правые части аппроксимируют решение равномерно во всем интервале

¹ Наша работа [5].

x от 0 до ∞ . Однако для любого x мы всегда можем выбрать столь большое μ , чтобы погрешность была сколь угодно мала.

Составляем выражение фазового интеграла для изопараметрического движения:

$$I = \int p dq = \frac{E}{\nu} = \frac{l^2 y^2 + g l y^2}{2g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}}}$$

(При изопараметрическом движении E — энергия нашей системы).

В случае l и g переменных, пользуясь соотношениями (3) имеем¹

$$I(x) = \frac{l^2 \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + g l y^2}{2g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}}} \rightarrow \frac{C^2}{2} = \text{const} \quad (4)$$

Таким образом, мы нашли, что $I(x)$ во всяком случае, т. е. для всяких $l \left(\frac{t}{\mu} \right)$, $g \left(\frac{t}{\mu} \right)$, является «временным» адиабатическим инвариантом. Это обстоятельство можно было предвидеть заранее — оно вытекает из результатов работы Кнезера^[4], и мы его приводим лишь для целей последующего изложения.

Если же правые части^[6] равномерно аппроксимируют решение, то $I(x)$ является «стационарным» адиабатическим инвариантом.

1. Рассмотрим теперь два частных случая:

$$l = 1 + \alpha t, \quad g = 1$$

Полагая

$$\alpha = \frac{1}{\mu} \text{ и } \frac{t}{\mu} = x$$

имеем уравнение движения в таком виде:

$$\frac{d}{dx} \left[(1+x)^2 \frac{dy}{dx} \right] + \mu^2 (1+x) y = 0$$

Решение этого уравнения имеет вид (3):

$$y = (1+x)^{-\frac{1}{2}} Z_1 \left[2\mu (1+x)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5)$$

где $Z_1[]$ — знак цилиндрической функции.

На основании известного асимптотического представления цилиндрической функции для больших значений аргумента мы можем написать:

$$y(x) \sim C (1+x)^{-\frac{3}{4}} \cos \left[2\mu (1+x)^{\frac{1}{2}} + b \right] \quad (6)$$

Это выражение равномерно аппроксимирует y для всех x от 0 до ∞ . Действительно, если правая часть аппроксимирует наше решение для

¹ Заметим, что, пользуясь асимптотическим выражением (3), мы можем истолковать $I(x)$ как E/ν , если только будем считать за полупериод расстояние между корнями (ср. нашу статью^[5], стр. 436).

некоторого μ_0 и $x=0$, то она еще лучше аппроксимирует его для $x > 0$ и $\mu > \mu_0$. Из (6) сразу вытекает, что $I(x)$ не изменяется и, следовательно, является стационарным адиабатическим инвариантом.

Физически это значит, что можно указать столь малую скорость изменения длины (столь малое α), что изменение $I(x) = E/\nu$ будет сколь угодно мало для сколь угодно большого изменения длины¹.

2. Маятник в периодически меняющемся поле силы тяжести:

$$l = 1, \quad g = 1 + q \cos pt$$

Полагаем

$$\frac{2}{p} = \mu, \quad pt = 2x$$

В этом случае μ равно периоду изменений поля, деленному на π . С точностью до множителя πx представляет собой время, измеренное в периодах изменения поля. Уравнение движения имеет следующий вид (2):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \mu^2 (1 + q \cos 2x) y = 0$$

Сколь большое M мы ни взяли бы, всегда найдутся большие его значения μ (для которых это дифференциальное уравнение имеет неустойчивые решения)². Поэтому можно (для этих μ), взяв достаточно большое x , сделать $y(x)$ как угодно большим; следовательно,

$$I(x) = \frac{E}{\frac{1}{g^2}}$$

может быть сделано сколь угодно велико, так как $g^{\frac{1}{2}}$ остается конечным, а E возрастает вместе с $y(x)$. Отсюда следует, что неравенство

$$|I(x) - I(0)| = |Eg^{-\frac{1}{2}} - (Eg^{-\frac{1}{2}})_0| < \varepsilon$$

не может иметь места для всех $\mu > M$ и для всех x в интервале от 0 до ∞ ни при каком³ M . В этом случае $I(x)$, являясь временным адиабатическим инвариантом, не является стационарным адиабатическим инвариантом. Выражение (3) в этом случае (по крайней мере для неустойчивых μ) не аппроксимирует равномерно решение⁴.

¹ Точно так же легко доказать, что для маятника в поле тяжести, меняющейся по закону $g=l$, $I(x)$ обладает тем же свойством.

² На основании теоремы Гаупта, цитированной в примечаниях к указанной нашей работе, этот пример может быть обобщен на другие формы периодического изменения силы тяжести.

³ Заметим, что в этом случае все же можно указать такие последовательности стабильных значений $\mu_1, \mu_2 \rightarrow \mu_3 \rightarrow \infty$, для которых $I(x) - I(0) \rightarrow 0$ равномерно для всех x от 0 до ∞ (например, последовательность значений μ , которым соответствуют периодические решения с одним и тем же периодом $2\pi l$).

⁴ Независимо от асимптотических выражений можно доказать, что частота, определенная через расстояние между корнями функции $y(t)$, лежит в некоторых

Полученный вывод можно формулировать так. Увеличивая период изменения поля тяжести, можно всегда достигнуть того, что величина I как угодно мало изменится за любое наперед заданное число периодов изменения поля. Но, с другой стороны, каким бы большим мы ни взяли период изменения поля, всегда существуют еще более медленные изменения поля, для которых для достаточно большого числа периодов величина I изменится как угодно сильно.

Формулировку допустимого адиабатического воздействия, данную у М. Борна, о которой говорилось вначале, едва ли можно рассматривать как запрещающую изложенный выше пример.

Дело в том, что значения μ , которым соответствуют нестабильные решения, расположены не отдельными дискретными точками, а целыми интервалами. Поэтому вряд ли можно говорить, что эти нестабильные значения периода изменения поля находятся в определенном соотношении с периодом системы.

§ 3. При применении теории адиабатических инвариантов к физическим проблемам должен быть поставлен вопрос, какого рода адиабатическая инвариантность существенна для данной физической задачи: временная или стационарная.

Так, например, Джинс^[7] рассмотрел проблему об изменении орбит двойных звезд под влиянием излучения ими массы и применил к ней теорию адиабатических инвариантов. В этом случае существенно, что встречающийся в этой задаче адиабатический инвариант является стационарным.

Этот же вопрос представляет интерес в связи с той фундаментальной ролью, которую играет адиабатная гипотеза в теории квантов. Повидимому, многие исследователи, применяя теорию адиабатических инвариантов, подразумевали исключительно стационарную адиабатическую инвариантность, не говоря об этом в достаточно ясной форме.

конечных границах. Действительно, на основании известной теоремы о корнях решений уравнения

$$y'' + p(x)y = 0$$

можно утверждать, что корни решений уравнения

$$y'' + \mu^2(1 + q \cos 2x)y = 0$$

лежат между соответствующими корнями уравнений

$$y'' + \mu^2(1 + q)y = 0 \text{ и } y'' + \mu^2(1 - q)y = 0$$

Отсюда для расстояния Δ между последовательными корнями нашего уравнения имеем

$$\frac{\pi}{\mu(1+q)^{\frac{1}{2}}} < \Delta < \frac{\pi}{\mu(1-q)^{\frac{1}{2}}},$$

а для частоты колебаний ν , определенной через это расстояние между корнями:

$$(1-q)^{\frac{1}{2}} < \nu < (1+q)^{\frac{1}{2}}$$

Естественно поставить вопрос, какому условию должна удовлетворять функция $a(t/\mu)$, чтобы фазовый интеграл был стационарным адиабатическим инвариантом; решение этой задачи выделило бы класс «допустимых» адиабатических воздействий.

Москва. Физический институт I МГУ
Отделение теоретической физики

ЛИТЕРАТУРА

1. Born M. Vorlesungen über Atommechanik. Bd. I. Berlin, 1925, S. 64.
2. Sommerfeld A. Atombau und Spektrallinien. 3. umgearb. Aufl., Braunschweig, 1922, S. 376.
3. К р у т к о в Г. — Ж. Русс. физ.-хим. об-ва, 1921, т. 50, с. 114.
4. Kneser H. Die adiabatische Invarianz des Phasenintegrals bei einem Freiheitsgrad. — Matr. Ann., 1924, Bd 91, S. 155—160.
5. Андронов А. и Леонтович М. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами. — Ж. Русс. физ.-хим. об-ва, 1927, т. 59, вып. 5—6, с. 429—442 (см. стр. 33 настоящего изд.)
6. Krutkow G. und Fock V. Über das Rayleighsche Pendel. — Z. Physik, 1923, Bd. 13, № 3, S. 195—202.
7. Jeans J. H. Cosmogonic problems associated with a secular decrease of mass. — Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1924, vol. 85, Nov., p. 2—11.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПУАНКАРЕ И ТЕОРИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ¹

§ 1. В последние годы автоколебания вызывают все больший интерес в ряде отраслей естествознания. Эти колебания отображаются дифференциальными уравнениями, отличными от тех, которые исследуются в математической физике и классической механике. Системы, в которых происходят эти колебания, не консервативны, и колебания поддерживаются в них за счет неперiodических источников.

В качестве примеров укажем для случая уравнений в частных производных задачу (уже давно возникшую) о струне, возбуждаемой смычком, а также задачу о Цефеидах в трактовке Эддингтона [1]; для случая обыкновенных дифференциальных уравнений: в механике — маятник Фруда [2], в физике — ламповый генератор (например, [3]), в химии — периодические реакции (например, [4]); аналогичные задачи возникают в биологии [5].

§ 2. Рассмотрим простейший случай автоколебаний, соответствующий в механике и физике системе с одной степенью свободы, в химии — реакции между двумя веществами, в биологии — двум соответствующим видам. Эти системы могут быть отображены двумя совокупными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (1)$$

Известно, что стационарные решения такой системы уравнений могут быть двоякого рода: это либо постоянные, либо периодические функции t . Потребуем, основываясь на исследовании наблюдаемых в действительности движений рассматриваемого типа, чтобы рассматриваемые периодические движения были устойчивы по отношению к достаточно малым изменениям: 1) начальных условий²; 2) правых частей уравнений (1)³.

Легко показать, что периодическим движениям, удовлетворяющим этим условиям, соответствуют на плоскости xu изолированные замкну-

¹ Опубликована на франц. языке: Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenués. C. r. Acad. Sci. Paris, 1929, t. 18^a № 15, p. 559. (Перев. ред.)

² См. Ляпунов [6].

³ См. Бибербах [7].

тые кривые, к которым изнутри и снаружи приближаются (при возрастании t) спирали, соответствующие соседним решениям. Отсюда следует, что автоколебаниям, возникающим в системах, описываемых уравнениями типа (1), соответствуют математически устойчивые предельные циклы Пуанкаре [8].

Ясно таким образом, что период и амплитуда стационарных колебаний не зависят от начальных условий. Исследование дифференциальных уравнений, относящихся к реальным случаям, показывает, что они действительно обладают предельными циклами, определяющими стационарные движения.

§ 3. Общая теория [8, 9] интегральных кривых уравнений типа (1) позволяет во многих случаях качественно изучать эти уравнения и выводить заключения относительно существования, числа и устойчивости предельных циклов.

Количественное решение задачи, в котором x и y выражены как функции времени, может быть легко получено только в случае малых значений параметра [10].

Рассмотрим в качестве примера¹ частный случай уравнений (1):

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu f(x, y; \mu), \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu g(x, y; \mu) \quad (2)$$

где μ — действительный параметр, который может быть выбран достаточно малым. Когда $\mu = 0$, уравнения (2) имеют решение $x = R \cos t$, $y = -R \sin t$; интегральные кривые образуют на плоскости xu семейство окружностей.

Пользуясь методами Пуанкаре, мы видим, что в случае достаточно малого $\mu \neq 0$ на плоскости xu остаются, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к окружностям, радиусы которых определяются уравнениями

$$\int_0^{2\pi} [f(R \cos \xi, -R \sin \xi; 0) \cos \xi - g(R \cos \xi, -R \sin \xi; 0) \sin \xi] d\xi = 0 \quad (3)$$

Эти замкнутые кривые соответствуют устойчивым стационарным движениям в том случае, когда выполняется соотношение

$$\int_0^{2\pi} [f'_x(R \cos \xi, -R \sin \xi; 0) + g'_y(R \cos \xi, -R \sin \xi; 0)] d\xi < 0 \quad (4)$$

Поправка к исходному периоду 2π и выражения для x и y получаются в виде рядов по степеням μ , сходящихся для достаточно малых значений μ .

¹ Этот случай представляет большой физический интерес; к нему приводятся автоколебания, близкие к синусоидальным, в системах с одной степенью свободы: ламповый генератор и т. п.

§ 4. Таким образом теория автоколебаний, где до сих пор пользовались почти исключительно нестрогими методами, получает — по крайней мере для простейшего случая — прочную математическую основу.

Электрические автоколебания наиболее доступны экспериментальному исследованию. Несомненно, ряд явлений, характерных для этих автоколебаний¹, должен встретиться также в механических и химических автоколебательных системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eddington A. S. The internal constitution of the stars. London, Cambridge Univ. Press, 1926, p. 200.
2. Rayleigh Lord. Theory of sound. Vol. I. London, 1894, p. 212.
3. Van der Pol B. On «Relaxation-Oscillations». — Philos. Mag., Ser. 7, 1926, vol. 2, № 11, p. 978—992.
4. Kremann R. K. Die periodischen Erscheinungen in der Chemie. Stuttgart, Enke, 1913, S. 124.
5. Lotka A. T Elements of physical biology. Baltimore, Williams-Wilkins, 1925, p. 88.
6. Liapounow A. Le problème général de la stabilité du mouvement. Traduit du russe. — Ann. Fac. sci. univ. Toulouse, ser. 2, 1907, vol. 9, p. 209.
7. Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. 2. neubearb. Aufl., Berlin, Springer, 1926, S. 68.
8. Poincaré H. Oeuvres. T. I. Ch. 6. Théorie des cycles limites. Paris, 1928, p. 53—65.
9. Bendixson J. Courbes définies par des équations différentielles. — Acta math., 1901, т. 24, p. 1—88.
10. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I. Paris, 1892, Cas où les temps n'entre pas explicitement dans les équations, p. 89—95.
11. Barkhausen H. Elektronen-Röhren. Bd 3. Empfänger. Leipzig, Hirzel, 1929, S. 32.

¹ Например, явление затягивания (см. Баркхаузен [11]).

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ¹

Стационарные движения автоколебательных систем² являются рекуррентными движениями по Биркгофу^[2].

В случае двух степеней свободы они могут быть периодическими, или квазипериодическими, или даже иметь еще более общий характер.

Мы ограничимся в этой заметке исследованием периодических решений системы дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = \mu / (\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}; \mu), \quad \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta = \mu g(\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}; \mu) \quad (1)$$

где μ — параметр, который может быть выбран достаточно малым, и

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt}, \quad \ddot{\xi} = \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Такая система получается, например, в случае лампового генератора, содержащего два колебательных контура, если пользоваться нормальными координатами и рассматривать только колебания, мало отличающиеся по своей форме от синусоидальных.

§ 1. В случае $\mu = 0$ уравнения (1) имеют периодическое решение:

$$\xi = R \cos \omega_1 t, \quad \eta = 0 \quad (2)$$

Согласно Пуанкаре^[3] легко получить периодическое решение для достаточно малого μ в виде рядов, расположенных по степеням μ и сходящихся при достаточно малом μ :

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(t, \mu) = R \cos \omega_1 t + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \dots \\ \eta &= \psi(t, \mu) = 0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Коэффициенты этих рядов, являющиеся функциями времени, могут быть легко получены, так как исходные уравнения линейны.

¹ Совместно с А. А. Виттом. Опубликовано на франц. языке: Sur la théorie mathématique des autooscillations. C. r. Acad. Sci. Paris, 1930, t. 190, № 4, p. 256.

² Относительно определения автоколебаний в случае одной степени свободы см. А. Андронов^[1].

Новый период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} + \tau$$

также может быть вычислен в виде ряда по μ , сходящегося для достаточно малых μ . Исследование показывает, что условием, необходимым для существования периодических решений вида (3), является

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} f(R \cos \omega_1 q, -\omega_1 R \sin \omega_1 q; 0, 0; 0) \sin \omega_1 q dq = 0 \quad (4)$$

Это условие определяет амплитуды тех решений вида (2), к которым близки искомые периодические решения в случае, когда μ достаточно мало.

§ 2. Физические соображения приводят к требованию, чтобы автоколебательное движение обладало устойчивостью по Ляпунову [4]. Составляя обычным способом *équations aux variations*¹ (уравнения первого приближения), соответствующие решению (3), мы получаем для определения характеристических показателей α_i уравнение

$$\rho^4 + a\rho^3 + b\rho^2 + c\rho + d = 0$$

где $\rho = 1 - e^{\alpha T}$, а a, b, c, d — ряды по степеням μ .

В этом уравнении $d = 0$, так как одно из α_i равно нулю в силу того, что уравнения (1) явно не содержат времени. Полагая [5]

$$\rho = \frac{2}{1-z}$$

и применяя к преобразованному уравнению критерий Раута-Гурвица [6,7], получаем условие того, чтобы остальные три характеристических показателя имели отрицательные действительные части²:

$$-8 < c < 0; (b+c)^2 + a(b+c) - c < 0; 8 + 4a + 2bc + c > 0 \quad (5)$$

Для достаточно малых μ условие (5) сводится к двум условиям:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} f_{\xi}'(R \cos \omega_1 q, -\omega_1 R \sin \omega_1 q; 0, 0; 0) dq < 0 \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} g_{\eta}'(R \cos \omega_1 q, -\omega_1 R \sin \omega_1 q; 0, 0; 0) dq < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

¹ Пуанкаре, [3], I. с., стр. 162.

² Для системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_i, \dots, x_n),$$

где x_i не зависит явно от времени, достаточное условие устойчивости по Ляпунову периодического решения $x_i = \varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) состоит в том, чтобы $n-1$ характеристических показателей имели отрицательные действительные части.

причем R имеет в этих выражениях значение, определяемое условием (4). Случай, когда $\omega_2 = n\omega_1$ (где n — целое), требует особого рассмотрения.

§ 3. Уравнения (4) и (6) содержат математическую теорию ряда явлений, происходящих при автоколебаниях в связанных системах, в частности так называемого явления затягивания [8,9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Andronow A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues.—C. r. Acad. sci., Paris, 1929, t. 189, № 15, p. 559—561 (см. стр. 55 настоящего изд.).
2. Birkhoff G. D. Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques.—Bull. Soc. math. France, 1912, т. 40, p. 305—323.
3. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I. Paris, 1892, p. 89.
4. Liapounow A. Le problème général de la stabilité du mouvement. Traduit du russe.—Ann. Fac. sci. univ. Toulouse, ser. 2, 1907, t. 9, p. 208.
5. Mises R. von. Dynamische Probleme der Maschinenlehre. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Lpz., 1911, Bd 4, Heft 2, S. 153—355.
6. Hurwitz A. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.—Math. Ann., 1895, Bd 46, S. 273—284.
7. Routh E. Stability of motion. London (1877).
8. Möller H. G. Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen. 2. vollst. umgearb. Aufl., Braunschweig, 1922, S. 122.
9. Pol van der B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom.—Philos. Mag. ser. 6, 1922, vol. 43, № 256, p. 700—719.

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ¹

В этой заметке указываются некоторые теоремы о квазипериодических движениях, представляющих интерес для теории автоколебаний [1—2]. Первые две теоремы известны математикам [3—4], однако, насколько мы знаем, они еще не были ясно сформулированы и физики с ними мало знакомы. Теорема III является новой; она имеет существенное значение для теории действия внешней периодической силы на автоколебательную систему.

В работе Фрэнклина [5] (теорема II, следствия 2 и 3) имеются некоторые более общие теоремы, относящиеся к почти периодическим движениям; однако они не исчерпывают содержание теорем, приводимых здесь.

§ 1. Теорема I. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

где X_i являются действительными, однозначными, непрерывными функциями, удовлетворяющими условиям Липшица в области рассматриваемых решений. Если эта система допускает решение в виде квазипериодических функций Боля [6,7,8] с k независимыми периодами

$$x_i = \varphi_i\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \dots, \frac{t}{\alpha_k}\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2)$$

то функции

$$x_i = \varphi_i\left(\frac{t}{\alpha_1} + C_1, \frac{t}{\alpha_2} + C_2, \dots, \frac{t}{\alpha_k} + C_k\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_k$ — произвольные постоянные, также являются решениями. Другими словами, решения вида (2) не встречаются изолированно, а составляют семейство, зависящее от k параметров.

Доказательство. Если (2) есть решение системы (1), то по определению

$$x_i = \varphi_i\left(\frac{t}{\alpha_1} + \tau_1, \frac{t}{\alpha_2} + \tau_2, \dots, \frac{t}{\alpha_k} + \tau_k\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

¹ Совместно с А. А. Виттом. Опубликовано на франц. языке: Sur les mouvements quasi-périodiques. Ж. прикл. физики, 1930, 6, в. 1, с. 119.

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ — произвольные целые числа, также являются решением. Уравнения (1) не меняются при замене t на $t + C$; следовательно,

$$x_i = \varphi_i \left(\frac{t}{\alpha_1} + \frac{C}{\alpha_1} + \tau_1, \frac{t}{\alpha_2} + \frac{C}{\alpha_2} + \tau_2, \dots, \frac{t}{\alpha_k} + \frac{C}{\alpha_k} + \tau_k \right) \\ (i = 1, \dots, n)$$

также является решением. Но согласно теореме Кронекера всегда можно выбрать константу C и целые числа $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ таким образом, чтобы величины

$$s_1 = \frac{C_1}{\alpha_1} + \tau_1, \quad s_2 = \frac{C_2}{\alpha_2} + \tau_2, \quad \dots, \quad s_k = \frac{C_k}{\alpha_k} + \tau_k$$

сколь угодно мало отличались от произвольных k заданных чисел $C_1, C_2, \dots, C_k$. Таким образом, функции

$$\frac{d}{dt} \left\{ \varphi_i \left(\frac{t}{\alpha_1} + s_1, \frac{t}{\alpha_2} + s_2, \dots, \frac{t}{\alpha_k} + s_k \right) \right\} - X_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k)$$

непрерывные по отношению к переменным $s_1, s_2, \dots, s_k$ (при фиксированном t) равны нулю на множестве, плотном во всем пространстве переменных $s_1, s_2, \dots, s_k$. Следовательно, эти функции равны нулю для всех значений: $s_1, s_2, \dots, s_k$.

Следовательно,

$$k \leq n$$

Теорема II

$$k \leq n - 1 \quad (3)^1$$

Доказательство. Пусть система (1) допускает квазипериодическое решение:

$$x_i = \varphi_i \left(\frac{t}{\alpha_1} + C_1, \frac{t}{\alpha_2} + C_2, \dots, \frac{t}{\alpha_n} + C_n \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Значения функции x_i для $t = \text{const}$ и произвольных $C_1, C_2, \dots, C_n$ образуют в этом случае в n -мерном пространстве действительных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ ограниченную и замкнутую область². В пространстве $x_1, x_2, \dots, x_n$ значения x_i заполняют «трубку», простирающуюся от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Всякая траектория находится либо целиком внутри трубки, либо целиком вне трубки, и ни одна не может находиться на ее поверхности. Рассмотрим некоторую траекторию S , проходящую через точку P этой поверхности. Через конечный промежуток времени точка, движущаяся по этой траектории, войдет внутрь

¹ Ср. Эренфест [9], стр. 242.

² Функциональный детерминант

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(C_1, C_2, \dots, C_n)} \neq 0$$

В противном случае существует бесчисленное множество решений для одних и тех же начальных значений величин $x_1, x_2, \dots, x_n$. См. также Ватагин [10].

трубки. Ни одна бесконечно близкая траектория, внешняя по отношению к трубке, не проникнет внутрь трубки. Следовательно, не существует вблизи точки P внешней траектории, остающейся после заданного промежутка времени сколь угодно близкой к S . Согласно известной теореме это противоречит предположению, что функции X_i удовлетворяют указанным условиям.

§ 2. Теорема III. Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i\left(x_1, x_2, \dots, x_n; \frac{t}{\beta}\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

где X_i являются действительными, однозначными, непрерывными функциями, удовлетворяющими условиям Липшица в области рассматриваемых решений, периодичными по t с периодом β . Если эта система допускает решение в виде функции Боля, имеющей $k+1$ независимых периодов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r; \beta$:

$$x_i = \psi_i\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \dots, \frac{t}{\alpha_r}, \frac{t}{\beta}\right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (5)$$

то функции

$$x_i = \psi_i\left(\frac{t}{\alpha_1} + C_1, \frac{t}{\alpha_2} + C_2, \dots, \frac{t}{\alpha_r} + C_r, \frac{t}{\beta}\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_r$ — произвольные постоянные, также являются решениями¹.

Доказательство. Если (5) есть решение системы (4), то по определению

$$x_i = \psi_i\left(\frac{t}{\alpha_1} + \tau_1, \frac{t}{\alpha_2} + \tau_2, \dots, \frac{t}{\alpha_r} + \tau_r; \frac{t}{\beta}\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ — произвольные целые числа, также является решением. Уравнения (4) не меняются при замене t на $t + \tau\beta$, где τ — произвольное целое число; следовательно,

$$x_i = \psi_i\left(\frac{t}{\alpha_1} + \tau \frac{\beta}{\alpha_1} + \tau_1, \frac{t}{\alpha_2} + \tau \frac{\beta}{\alpha_2} + \tau_2, \dots, \frac{t}{\alpha_r} + \tau \frac{\beta}{\alpha_r} + \tau_r; \frac{t}{\beta} + \tau\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

также является решением. Согласно известной теореме² целые числа $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ всегда могут быть выбраны таким образом, чтобы величины

$$s_1 = \tau \frac{\beta}{\alpha_1} + \tau_1, \quad s_2 = \tau \frac{\beta}{\alpha_2} + \tau_2, \quad \dots, \quad s_r = \tau \frac{\beta}{\alpha_r} + \tau_r$$

¹ Аналогично обстоит дело в случае квазипериодических решений «второго рода»:

$$x_i = \psi_i\left(\frac{t}{\alpha_1}, \frac{t}{\alpha_2}, \dots, \frac{t}{\alpha_r}; \frac{t}{\tau_0\beta}\right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

где τ_0 — произвольное целое число.

² См., например, Боля^[6], стр. 4.

сколь угодно мало отличались от произвольных заданных чисел $C_1, C_2, \dots, C_r$. Далее достаточно повторить рассуждение теоремы I. Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы II, показывают, что

$$r \leq n - 1$$

§ 3. Следует отметить, что квазипериодические движения не являются единственно возможными почти периодическими решениями системы (1). Биркгоф [11] и Бор [12] уже обратили внимание на то, что решения таких систем могут быть представлены «предельно-периодическими функциями». Предыдущие соображения нисколько не противоречат возможному существованию более общих почти периодических решений, которые следовало бы назвать по аналогии предельно-квазипериодическими решениями¹.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andronow A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. C. r. Acad. sci. Paris, 1929, т. 189, № 15, p. 559—561 (см. стр. 55 настоящего изд.).
2. Andronow A. et Witt A. Sur théorie mathématique des auto-oscillations.— C. r. Acad. sci. Paris, 1930, т. 190, № 4, p. 256—258. (см. стр. 58 настоящего изд.).
3. Poincaré H. Leçons de mécanique céleste. T. I. Paris, Gauthier-Villars, 1905, p. 170.
4. Birkhoff G. D. Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques.—Bull. Soc. math. France, 1912, т. 40, p. 317.
5. Franklin P. Almost periodic recurrent motions.—Math. Z., 1929, Bd 30, S. 325.
6. Bohl P. Über die Darstellung von Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variabeln proportionalen Argumenten. Diss., Jurjew (Dorpat), 1893. 31 S.
7. Esclangon E. Les fonctions quasi-périodiques. Paris. Gauthier-Villars, 1904, 281 p.
8. Esclangon E. Nouvelles recherches sur les fonctions quasi-périodiques.—Ann. Observ. Bordeaux, 1919, т. 16, p. 53.
9. Ehrenfest P. Kann die Bewegung eines Systems von S Freiheitsgraden mehr als $(2S-1)$ -fach periodisch sein? —Z. Physik, 1923, Bd 19, № 4, S. 242—245.
10. Wataghin G. Über einige Periodizitätseigenschaften von mechanischen Systemen and Quantentheorie.—Ann. Physik, 4. Folge, 1925, Bd 76, № 1, S. 46.
11. Birkhoff G. D. Dynamical Systems. New York, Amer. Math. Soc., 1927, p. 219.
12. Bohr H. Grenzperiodische Funktionen. —Acta math., 1928, Bd 52, S. 127—133.

¹ Эти решения являются почти периодическими функциями, у которых все показатели являются однородными линейными комбинациями с рациональными коэффициентами конечного числа линейнонезависимых величин (базовых элементов).

К ТЕОРИИ ЗАХВАТЫВАНИЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ¹

Введение. — § 1. Составление дифференциального уравнения. — § 2. Математические основы. — § 3. Исследование уравнения Ван дер Поля. — Результаты.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, Ван дер Поля предложил приближенную теорию явления захватывания в регенеративном приемнике^[1]. При этом он приходит к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, исчерпывающее рассмотрение которых должно ответить на вопрос о том, как ведут себя такие системы вблизи резонанса. Он находит некоторые частные интегралы этих уравнений, соответствующие периодическим решениям (вынужденным колебаниям), и исследует их устойчивость. Как при этом (вблизи резонанса) обстоит дело с другими, например с квазипериодическими, решениями (с биениями), Ван дер Поля не рассматривает. Квазипериодические решения рассматриваются им при помощи другого метода, но только для случая, далекого от резонанса. Как ясно указывает Ван дер Поля, этот последний метод отказывает вблизи резонанса (для малых амплитуд внешней э. д. с.); Ван дер Поля подчеркивает, что получить правильные решения в этой области можно лишь путем исчерпывающего рассмотрения упомянутых выше уравнений.

Случай малых амплитуд, лишенный практического значения, рассматривался Оллендорфом^[2], который пришел к заключению, что при достаточно малых амплитудах внешней силы захватывание вообще не имеет места². Другими словами, в случае малых амплитуд существуют (по Оллендорфу) одновременно наряду с периодическими и квазипериодические решения. Указываемый Оллендорфом порог захватывания имеет заметную величину.

¹ Совместно с А. А. Виттом. Опубликовано на немец. языке: Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol. Archiv für Elektrotechnik. 1930, Bd. XXIV, S. 99.

² «Отсюда видно, что захватывание наступает только при

$$\varepsilon^2 \geq 2\omega^2 (\mu - \delta)^2 \frac{\mu - \delta}{\mu}$$

(Оллендорф^[2], стр. 286). В обозначениях § 2 настоящей работы это неравенство может быть записано так:

$$A^2 \geq \frac{1}{8}$$

Для колебательного контура с

$$\gamma = \frac{\omega}{2\pi} = 2 \cdot 10^5 \text{ гц}, \quad \delta = \frac{R}{2L} = 1.2 \cdot 10^4 \text{ ом/гн}, \quad \mu = \frac{MS}{2LC} = 1.2 \delta, \quad K = 5 \text{ в}$$

значение внешней э. д. с., ниже которого, по Оллендорфу, не должно иметь место захватывание, равно $P_0 = 5,5 \cdot 10^{-3}$ в. Легко вычислить, по Ван дер Полю, область захватывания; она соответствует $\Delta\gamma = 135$ гц.

В настоящей работе вопрос рассматривается с точки зрения приближенного метода Ван дер Поля. Исследуя его уравнения методами Пуанкаре, можно получить ответ на поставленный выше и, как отмечено, остающийся открытым вопрос. Конечно, здесь мы не будем входить в строгое обоснование приближенного подхода Ван дер Поля, который представляется нам весьма понятным.

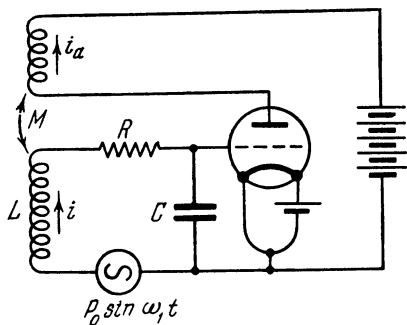
В теории Пуанкаре мы имеем адекватный математический метод для рассмотрения нелинейных колебательных задач, который во многих случаях наглядно и быстро разъясняет рассматриваемые вопросы. Эта теория уже была применена одним из авторов для рассмотрения автоколебаний с одной степенью свободы [3,4]. Следует отметить, что теория Пуанкаре оказывается также очень полезной и удобной при рассмотрении релаксационных явлений [5]. Поэтому мы считаем нелишним кратко сформулировать основные положения этой теории.

1. Составление дифференциального уравнения

Рассмотрим ламповый генератор с включенным между сеткой и катодом колебательным контуром, на который действует внешняя э. д. с. $E = P_0 \sin \omega_1 t$ (фиг. 1).

Уравнение колебаний нашей системы имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt - M \frac{di_a}{dt} = P_0 \sin \omega_1 t \quad (a)$$



Фиг. 1. Возбудитель колебаний.

Предполагая, что анодный ток зависит только от сеточного напряжения и что характеристика является кубической параболой, получим

$$i_a = f(v_g) = S v_g \left(1 - \frac{v_g^2}{3K^2} \right) \quad (б)$$

где S — крутизна, K — напряжение насыщения.

Для простоты пренебрегаем сеточным током. При помощи (б) уравнение (а) может быть приведено к виду:

$$\ddot{v} - a\dot{v} + \gamma \frac{dv^3}{dt} + \omega_0^2 v = B\omega_0^2 \sin \omega_1 t \quad (1)$$

где

$$v = \frac{v_g}{K} = \frac{1}{CK} \int_0^t i dt, \quad a = \frac{MS}{LC} - \frac{R}{L}, \quad \gamma = \frac{1}{3} \frac{MS}{LC}, \quad B = \frac{P_0}{K}$$

Чтобы получить решение этого уравнения в области резонанса, Ван дер Поля полагает

$$v = b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t \quad (2)$$

где b_1 и b_2 — медленно меняющиеся функции времени, и получает в первом приближении следующие дифференциальные уравнения:

$$2\dot{b}_1 + zb_2 - \alpha b_1 \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = 0, \quad 2\dot{b}_2 - zb_1 - \alpha b_2 \left(1 - \frac{b^2}{a_0^2}\right) = -B\omega_0 \quad (3)$$

где

$$z = 2(\omega_0 - \omega_1) \text{ (расстройка)}$$

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad a_0^2 = \frac{\alpha}{3/4\gamma} \quad (\text{энергия автоколебаний})$$

Уравнения (3) решают вопрос о существовании и устойчивости стационарных решений уравнения (1) в области резонанса — это и есть упомянутые выше уравнения Ван дер Поля.

§ 2. Математические основы

В настоящей работе мы даем качественное рассмотрение уравнений (3), вполне достаточное для того, чтобы определить характер решения и ответить на вопрос о существовании порога захватывания.

Теория качественного исследования дифференциальных уравнений была развита Пуанкаре^[6] и уже применялась для изучения автоколебаний¹.

После введения обозначений

$$x = \frac{b_1}{a_0}, \quad y = \frac{b_2}{a_0}, \quad a = \frac{z}{\alpha}, \quad A = -\frac{B\omega_0}{a_0\alpha}, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad \tau = \frac{t\alpha}{2} \quad (3')$$

уравнения (3) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -ay + x(1 - r^2) \\ \frac{dy}{d\tau} &= A + ax + y(1 - r^2) \end{aligned} \quad (4)$$

После деления получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A + ax + y(1 - r^2)}{-ay + x(1 - r^2)} \quad (5)$$

Переменные x и y являются действительными, и нужно рассмотреть ход интегральных прямых в плоскости xy .

¹ А. А. Андронов^[1]. См. также А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний^[7]. — *Ред.*

Основными элементами, определяющими поведение интегральных кривых дифференциального уравнения первого порядка, являются, по Пуанкаре, особые точки и предельные циклы.

Через каждую точку плоскости xy проходит в общем случае одна и только одна интегральная кривая; исключения составляют только особые точки.

Для дифференциальных уравнений, правые части которых — регулярные функции x, y

$$\frac{dx}{d\tau} = P(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = Q(x, y) \quad (6)$$

особые точки определяются как точки пересечения кривых

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (6')$$

Чтобы рассмотреть характер особой точки, удобно перенести начало координат в эту точку (x_0, y_0) ; поэтому полагаем

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta$$

Наши уравнения могут теперь быть написаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= P_1(\xi, \eta) = a\xi + b\eta + \dots \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= Q_1(\xi, \eta) = c\xi + d\eta + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

(в их правых частях постоянные члены отсутствуют).

Характер особой точки зависит от корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - cb) = 0 \quad (8)$$

Эти корни называются также характеристическими показателями рассматриваемой особой точки¹.

Если оба корня λ_1 и λ_2 имеют отрицательную действительную часть, то особая точка устойчива, в противном случае она не устойчива².

Пуанкаре различает три типа особых точек.

1. Узел, в котором пересекается бесконечное множество интегральных кривых; λ_1 и λ_2 действительны и имеют одинаковые знаки; узел может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, является ли λ отрицательным или положительным.

2. Седло, в котором пересекаются только две интегральные кривые. Ход интегральных кривых вблизи седла аналогичен семейству гипербол

$$xy = \text{const};$$

λ_1 и λ_2 действительны, их знаки противоположны; седло всегда неустойчиво.

¹ Коэффициенты a, b, c, d — функции координат x_0, y_0 особой точки.

² Случай чисто мнимых корней здесь не рассматривается.

3. Фокус, на который интегральные кривые асимптотически наворачиваются. Интегральные кривые аналогичны логарифмическим спиральям¹. λ_1 и λ_2 комплексные сопряженные; фокус устойчив или неустойчив в зависимости от знака действительной части λ .

Знания характера и распределения только особых точек недостаточно для определения качественного поведения интегральных кривых во всей плоскости xu ; необходимо знать еще число, характер и распределение других элементов — предельных циклов.

По Пуанкаре, предельным циклом называется замкнутая интегральная кривая, обладающая тем свойством, что все другие достаточно близкие к ней интегральные кривые асимптотически на нее наворачиваются. Если это имеет место при $t \rightarrow +\infty$, то цикл устойчив, в противном случае он неустойчив.

Для нахождения предельных циклов Пуанкаре предложил метод «кривой контактов».

Идея этого метода состоит в следующем. Рассмотрим семейство кривых

$$F(\xi, \eta) = C \quad (9)$$

и предположим, что $F(\xi, \eta)$ обращается в нуль только при $\xi=0$, $\eta=0$ (ξ, η — система координат, начало которой лежит в особой точке x_0, y_0), для всех остальных значений ξ и η , F положительно и конечно; и F может обращаться в бесконечность только тогда, когда ξ (или η) обращается в бесконечность. Кроме того, пусть F'_ξ и F'_η обращаются в нуль одновременно только при $\xi = \eta = 0$.

Тогда кривые рассматриваемого семейства образуют систему замкнутых кривых, лежащих одна внутри другой и содержащих внутри начало координат — так называемую топографическую систему.

Через каждую точку ξ, η плоскости проходит только одна кривая топографической системы. Касательная к ней в этой точке определяется уравнением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta} \quad (10)$$

Геометрическое место точек, где кривые топографической системы касаются интегральных кривых дифференциального уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{Q_1(\xi, \eta)}{P_1(\xi, \eta)} \quad (11)$$

называется кривой контактов.

Уравнение кривой контактов, следовательно, имеет такой вид:

$$P_1 F'_\xi + Q_1 F'_\eta = 0 \quad (12)$$

Если нам удалось выбрать топографическую систему, так что кривая контактов не имеет ветвей, уходящих в бесконечность, и начало

¹ Направление касательных к интегральным кривым в особой точке определяется уравнением

$$bk^2 + k(a-d) - c = 0$$

координат является изолированной точкой кривой контактов, то тогда мы будем обладать инструментом для «улавливания» предельных циклов.

Мы должны только среди кривых топографической системы, касающихся кривой контактов, выбрать внешнюю и внутреннюю.

Элементарные геометрические соображения показывают, что предельные циклы (если таковые существуют) могут лежать только между этими двумя кривыми топографической системы.

Следует также заметить, что в том случае, когда кривая контактов не имеет действительных ветвей, предельные циклы вообще не могут существовать.

Не вдаваясь глубже в теорию предельных циклов (см Пуанкаре^[6]), следует привести здесь следующие существенные для нас результаты, принадлежащие Пуанкаре и частично Бендиксону^[8].

1. Внутри предельного цикла может содержаться только нечетное число особых точек.

2. Если это число равно единице, то соответствующая особая точка может быть узлом или фокусом, но не седлом.

3. Если это число равно трем, то одна точка должна быть седлом; две другие являются: или обе узлами, или обе фокусами, либо одна — узел, другая — фокус.

Мы не намерены приводить здесь условия одновременного существования более чем трех особых точек; мы увидим, что интересующее нас уравнение имеет самое большее три особые точки.

Наконец, следует отметить, что знание некоторых изоклин (например, главных изоклин $dy/dx = 0$ и $dy/dx = \infty$) существенно облегчает решение вопроса о существовании предельных циклов.

Одна из основных теорем^[9] теории дифференциальных уравнений вида (6) гласит¹, что всякая (незамкнутая) интегральная кривая, которая не стремится ни к бесконечности, ни к особой точке, непременно навертывается на предельный цикл.

В заключение рассмотрим еще временной ход интегральных кривых.

Используя только что приведенную теорему, можно сформулировать следующие положения.

1. Стационарные решения уравнения (6) соответствуют или особым точкам, или предельным циклам².

2. Все другие решения либо стремятся к стационарным решениям, либо уходят в бесконечность.

3. Стационарные решения, которые соответствуют особым точкам, являются постоянными:

$$x = x_0, \quad y = y_0 \quad (13)$$

¹ См. также А. А. Андронов и С. Э. Хайкин^[7] — *Ред.*

² Как мы уже упоминали, случай чисто мнимых характеристических показателей здесь не рассматривается. В этом случае может существовать континуум замкнутых интегральных кривых.

Стационарные решения, которые соответствуют предельным циклам, являются периодическими функциями¹ «времени»: ²:

$$x = \varphi(\tau + C), \quad y = \varphi(\tau + C) \quad (14)$$

с периодом

$$\tau_0 = \oint \frac{ds}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (15)$$

где интегрирование ведется по предельному циклу. После этого краткого резюме наиболее важных свойств интересующего нас типа дифференциальных уравнений обратимся к нашей конкретной задаче.

§ 3. Исследование уравнения Ван дер Поля

Сначала мы установим, что в нашей физической задаче соответствует стационарным решениям уравнения (5).

Особой точки уравнения (5) соответствует по (2), (3) и (13) решение:

$$\frac{v}{a_0} = x_0 \sin \omega_1 t + y_0 \cos \omega_1 t = r_0 \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \quad (16)$$

т. е. чистопериодическое решение с периодом, равным периоду внешней силы (вынужденным колебаниям).

Предельному циклу этого уравнения соответствуют по (2), (3) и (14) решения вида:

$$\frac{v}{a_0} = \varphi\left(\frac{t\alpha}{2} + C\right) \sin \omega_1 t + \psi\left(\frac{t\alpha}{2} + C\right) \cos \omega_1 t \quad (17)$$

т. е. квазипериодические решения с двумя периодами³:

$$T_2 = \frac{2\tau_0}{\alpha}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (\text{биения})$$

Решениям уравнений (4), стремящимся к особым точкам или навертывающимся на предельные циклы, соответствуют решения, асимптотически приближающиеся к периодическим или квазипериодическим решениям, или асимптотически удаляющиеся, в зависимости от устойчивости или неустойчивости стационарных решений.

После этих кратких замечаний мы применим результаты предыдущих параграфов непосредственно к нашей задаче.

Согласно (4) и (6') координаты особой точки

$$x_0 = -\frac{a\rho}{A}, \quad y_0 = -\frac{\rho(1-\rho)}{A} \quad (18)$$

где $\rho = r_0^2$ определяется уравнением

$$a^2\rho + \rho(1-\rho)^2 = A^2 \quad (19)$$

¹ Предполагаем, что предельные циклы не проходят через особые точки.

² Наши решения зависят от некоторой произвольной фазы, так как уравнения (4) не содержат явно времени.

³ Т. е. континуум квазипериодических решений с одинаковой средней энергией; см. А. А. Андронов и А. А. Витт^[10].

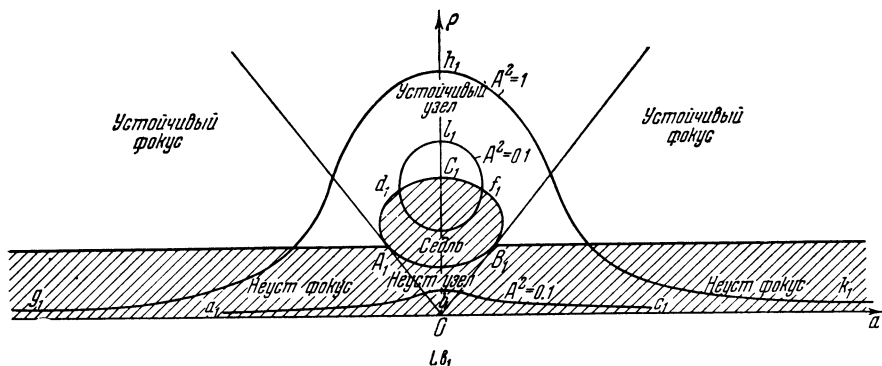
Если A фиксировано, то получаем в плоскости ρa кривую третьего порядка, которая определяет «амплитуды» $r_0 = \sqrt{\rho}$ особой точки для любых расстройек a и заданного A .

Если затем изменять A , то в плоскости ρa получается целое семейство таких кривых, соответствующих различным значениям A . Каждая точка этой плоскости соответствует особой точке уравнения (4) при соответствующем выборе A и a . Как уже указывалось, характер особой точки зависит от корней характеристического уравнения (8).

После соответствующих преобразований с учетом (18) характеристическое уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\lambda^2 - 2(1 - 2\rho)\lambda + (1 - \rho)(1 - 3\rho) + a^2 = 0 \quad (20)$$

При помощи этого уравнения и приведенной выше классификации особых точек можно в плоскости ρa указать области, соответствующие



Фиг. 2. Зависимость характера особых точек от параметров дифференциальных уравнений.

различным типам особых точек. Эти области совместно с семейством кривых (19) дают полное представление о зависимости числа, характера и «амплитуд» особых точек в плоскости ρa от параметров дифференциального уравнения.

На фиг. 2 сопоставлены наши результаты и результаты, полученные Ван дер Полем. Состоящая из двух ветвей кривая $a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 / 1$ — это типичная резонансная кривая для случая

$$0 < A_2 < \frac{4}{27}$$

Кривая $g_1 h_1 k_1$ типична для $A^2 > \frac{4}{27}$. Выше прямой $A_1 B_1$ и вне эллипса $A_1 C_1 B_1$ лежит область устойчивости периодических решений (область устойчивых особых точек); остальная часть области соответствует неустойчивым решениям.

Внутри эллипса устойчивости расположены седла, вне угла $A_1 O B_1$ — фокусы и, наконец, внутри угла $A_1 O B_1$, исключая эллипс $A_1 C_1 B_1$, — узлы.

Как уже указывалось во введении, нас интересует главным образом область малых амплитуд внешней силы, т. е. область очень малых A .

Небольшой расчет показывает, что при $0 < A^2 < \frac{4}{27}$ топологическое поведение кривых (19) остается неизменным: при $0 < a^2 < a_1^2$, где a_1 — абсцисса точки пересечения кривой с эллипсом $a^2 + (1 - \rho)(1 - 3\rho) = 0$, наше уравнение имеет три особые точки, из которых одна устойчива; при $a_1^2 < a^2 < +\infty$ дифференциальное уравнение имеет только одну особую точку; эта точка оказывается неустойчивой.

Для выяснения расположения особых точек в плоскости и зависимости этого расположения от параметров уравнения удобно записать уравнение (5) в полярных координатах:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \frac{Ay + r^2(1 - r^2)}{Ax + ar^2}$$

Точки пересечения изоклин $dr/d\varphi = 0$

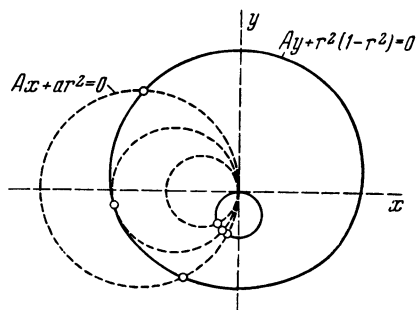
$$Ay + r^2(1 - r^2) = 0 \quad (21)$$

и изоклин $dr/d\varphi = \infty$

$$Ax + ar^2 = 0 \quad (22)$$

являются по определению искомыми особыми точками¹. Кривая (21) легко может быть построена. При $0 < A^2 < \frac{4}{27}$ она остается топологически неизменной; она состоит из двух замкнутых ветвей, одна ветвь охватывает другую (фиг. 3).

Кривая (22) — это окружность радиуса $A/2a$, касающаяся оси y в начале координат. При заданном A мы получаем одну кривую (21); если a пробегает различные значения, то мы получаем семейство окружностей. Зависимость точек пересечения этих кривых от параметра a воспроизводит зависимость положения особых точек от параметра a при заданном



Фиг. 3. Зависимость положения особых точек от параметров дифференциальных уравнений.

A . При $a = 0$ соответствующая окружность (22) вырождается в ось y ; все особые точки лежат на оси y . Если a увеличивается, то точки пересечения внешней ветви кривой с нашей окружностью стремятся навстречу друг другу и затем при $a = a_1$ сливаются и исчезают. Верхняя точка пересечения — устойчивый узел; нижняя — седло. Одновременно третья точка пересечения перемещается вдоль внутренней ветви кривой (21) по направлению к началу координат; это или неустойчивый узел, или неустойчивый фокус.

После того, как мы выяснили зависимость числа, характера и положения особых точек нашего уравнения от его параметров, проведем подобное же рассмотрение для предельных циклов.

¹ Следует заметить, что наши кривые пересекаются еще в начале координат, которые не являются особой точкой.

Из уравнений (4) можно легко сделать вывод, что при достаточно большом r^2 все интегральные кривые направлены внутрь по радиусам.

Отсюда непосредственно следует на основании теоремы, приведенной в конце предыдущего параграфа, что если наше уравнение допускает только одну особую точку и эта особая точка неустойчива, то существует по меньшей мере один устойчивый предельный цикл. Следовательно, при $a^2 > a_1^2$ всегда существует по меньшей мере одно устойчивое квазипериодическое решение (биение). Для ответа на вопрос, существует ли предельный цикл также и при $a^2 < a_1^2$, применим только что рассмотренный метод кривых контактов.

В качестве топографической системы выбираем семейство окружностей

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const} \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \text{const}$$

Уравнение кривой контактов (12) в полярных координатах R, ψ с началом координат в точке x_0, y_0 имеет вид:

$$R^2 + 3R(x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi) + 2(x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi)^2 + r_0^2 - 1 = 0$$

Полагая

$$x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi = \sigma \quad (23)$$

получим, решая уравнение,

$$R = -\frac{3}{2}\sigma \pm \sqrt{\frac{1}{4}\sigma^2 - r_0^2 + 1}$$

Нас интересует не столько сама кривая контактов, сколько внешняя и внутренняя из окружностей нашей топографической системы, касающихся кривой контактов. Радиусы этих окружностей легко вычислить, они задаются условием $dR/d\psi = 0$. В рассматриваемом случае

$$\frac{dR}{d\psi} = -\frac{3R + 4\sigma}{2R + 3\sigma} \frac{d\sigma}{d\psi}$$

Следовательно, искомые радиусы удовлетворяют одному из уравнений

$$3R + 4\sigma = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\psi} = 0$$

Первое соотношение дает

$$R^2 = 8(r_0^2 - 1) \quad (24)$$

второе —

$$R = \left| \frac{3}{2}r_0 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}r_0^2} \right| \quad (25)$$

Обозначим большее из выражений (24) и (25) через $R_{\max}$, меньшее через $R_{\min}$. Теперь мы можем утверждать следующее: если существует предельный цикл, то он во всяком случае заключен в кольцевой области между окружностями радиусов $R_{\max}$ и $R_{\min}$. Наши выводы верны только в том случае, если кривая контактов не проходит через соответствующую особую точку.

В том случае, когда кривая контактов проходит через особую точку, что всегда имеет место в случае седла, можно утверждать только то,

что предельный цикл, если он существует, должен лежать внутри окружности радиуса $R_{\max}$. Следует заметить, что это построение может быть проведено отдельно для каждой особой точки.

Применим теперь наше рассуждение к интересующей нас области трех одновременно существующих особых точек

$$(0 < A^2 < \frac{4}{27}, 0 < a^2 < a_1^2)$$

Оказывается достаточно рассмотреть только те две кривые контактов, которые соответствуют узлам и фокусам. Для устойчивого узла или фокуса $r_0^2 = r_{10}^2 < 1$ и, следовательно,

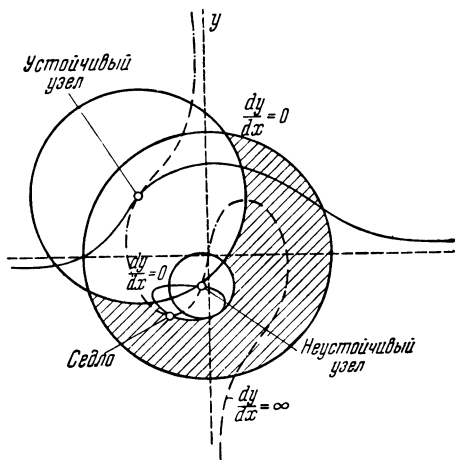
$$R_{1\max} = \left| \frac{3}{2} r_{10} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} r_{10}^2} \right|$$

$$R_{1\min} = \left| \frac{3}{2} r_{10} - \sqrt{1 - \frac{3}{4} r_{10}^2} \right|$$

Для устойчивого узла и для области, расположенной достаточно близко к точному резонансу, $r_0^2 = r_{20}^2 > 1$ и, следовательно,

$$R_{2\max} = \left| \frac{3}{2} r_{20} + \sqrt{1 - \frac{3}{4} r_{20}^2} \right|, \quad R_{2\min} = \sqrt{8(r_{20}^2 - 1)}$$

Если построить для этих двух особых точек кольцевую область, о которой речь шла выше, то оказывается, что общая часть этих областей является односвязной областью, содержащей только одну особую точку — седло. Согласно приведенной в § 2 теореме такая область не может содержать предельных циклов; следовательно, в рассматриваемом случае вообще не существует предельных циклов. Кольцевые области такого рода представлены на фиг. 4, их общая часть заштрихована¹. Следует заметить, что при достаточном удалении от точного резонанса, когда особые точки близки к слиянию, наступает момент, начиная с которого наши построения отказываются.



Фиг. 4. Внешняя и внутренняя из окружностей топографической системы, касающихся кривой контактов.

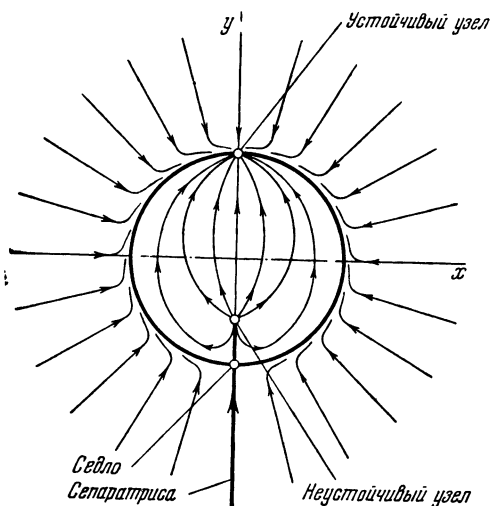
В этом случае наша простая качественная теория ответа не дает.

Все же и в этом случае легко убедиться в том, что предельные циклы не существуют, если наряду с кривыми контактов принять во внимание и изоклины $dy/dx = 0$ и $dy/dx = \infty$. Последнее необходимо, например, если мы хотим провести рассмотрение вблизи момента слияния особых точек. Сказанное выше относится к случаю, когда в области резонанса

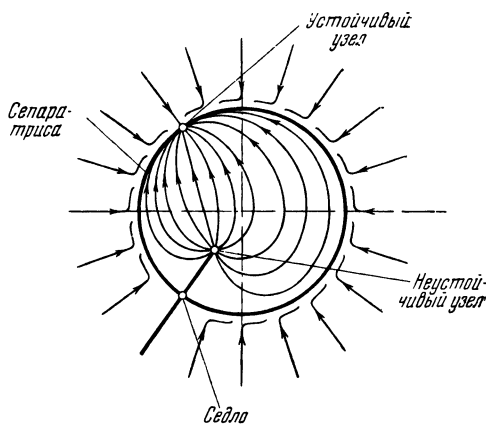
¹ Внешняя окружность топографической системы для устойчивого узла, касающаяся кривой контактов, не помещена на фиг. 4 из-за своей величины.

существуют три особые точки; как уже раньше указывалось, это соответствует случаю $A^2 < \frac{4}{27}$.

Покажем теперь, что при $A^2 > \frac{4}{27}$ вблизи резонанса всегда существует область, в которой имеет место захватывание. В этом легко можно



Фиг. 5. Периодическое движение. Точный резонанс.



Фиг. 6. Периодическое движение. Неустойчивый узел.

убедиться. Действительно, при $A^2 > \frac{4}{27}$ и $a = 0$ наибольший из корней уравнения (19)

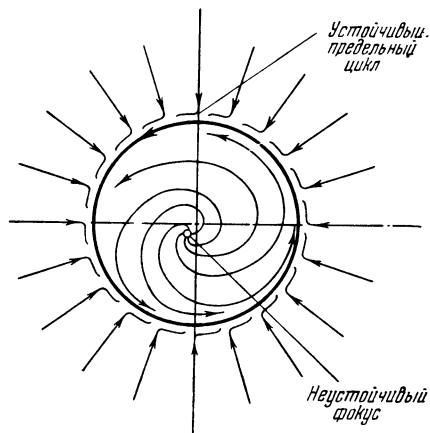
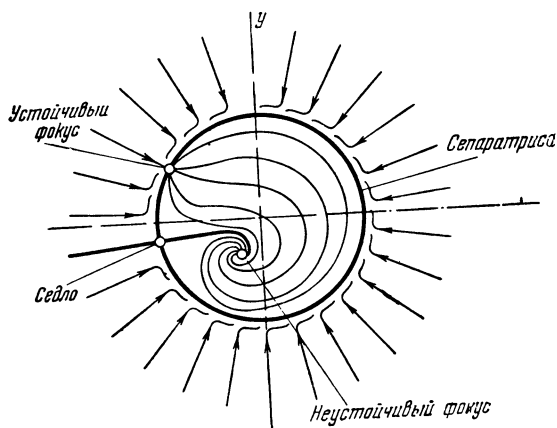
$$\rho = r_0^2 > \frac{4}{3}$$

с другой стороны, при $r_0^2 > \frac{4}{3}$ кривая контактов не имеет действительных ветвей; как указывалось в § 2, отсюда непосредственно следует, что предельные циклы не могут существовать и, следовательно, в некоторой области вблизи резонанса имеет место захватывание.

На фиг. 5—8 схематически представлены результаты для случая трех особых точек и $A^2 < \frac{4}{27}$; тонкие кривые соответствуют простым нестационарным интегральным кривым, жирные кривые обозначают предельные циклы и сепаратрисы — интегральные кривые, пересекающие седло и продолженные до особых точек, или до предельных циклов (к которым они стремятся), или в бесконечность. Сепаратрисы образуют, так сказать, водоразделы; они играют поэтому роль, аналогичную предельным циклам. Знание сепаратрис во многих случаях облегчает рассмотрение топографической картины. Следует заметить, что в общем случае каждому седлу соответствует четыре сепаратрисы (их может быть меньше, если они возвращаются в то же седло). Две сепаратрисы выходят из седла, а две другие входят в седло. При $a = 0$ сепаратрисы легко найти [уравнение (5)]. В этом случае двумя из сепаратрис является ось y между неустойчивым узлом и седлом и бесконечная часть оси y , входящая в седло. Нетрудно видеть, что две другие сепаратрисы должны входить в устой-

чивый узел. Все другие интегральные кривые «обтекают» сепаратрисы и входят в устойчивый узел (фиг. 5)¹.

При небольшой расстройке симметрия пропадает, но топологическое поведение сепаратрис остается неизменным (фиг. 6). Если расстройку увеличивать, то неустойчивый узел превращается в неустойчивый фокус (фиг. 7). Наконец, при некотором (достаточно большом) значении рас-



Фиг. 7. Периодическое движение.

Фиг. 8. Квазипериодическое движение.

стройки седло и устойчивый узел сливаются. При больших значениях расстройки они исчезают и сепаратрисы превращаются в предельный цикл (фиг. 8). Особый интерес представляет предельный случай, когда две особые точки сливаются. Физически это связано с вопросом о том, существует ли затягивание на границе захватывания. Этот случай рассматривался нами при помощи изложенного выше метода, и мы смогли установить, что момент появления предельного цикла совпадает с моментом исчезновения особых точек, и следовательно, затягивание не имеет места.

Результаты

1. Всегда существует область захватывания, как бы ни была мала амплитуда внешней периодической силы. Другими словами, не существует порога захватывания.

В области захватывания единственным устойчивым решением является устойчивое, чисто периодическое решение с периодом, равным периоду внешней силы. При достаточно малых амплитудах внешней э. д. с. эта область соответствует одновременному существованию трех особых точек уравнения (4); из этих трех точек устойчива только одна.

2. Вне этой области уравнения (4) имеют только одну (неустойчивую) особую точку. Существует предельный цикл, т. е. существует континуум устойчивых квазипериодических решений равной средней энергии.

¹ Эти фигуры дают только топологическое поведение интегральных кривых, но ни в коем случае не дают их количественных характеристик.

3. Момент исчезновения устойчивого периодического решения точно совпадает с появлением устойчивых квазипериодических решений, т. е. на границе захватывания не существует затягивания¹.

В заключение мы хотели бы еще подчеркнуть следующее. Теория Ван дер Поля исходит из некоторого приближенного подхода, который также лежит в основе приведенных выше рассмотрений. Ответ на вопрос о том, является ли этот подход оправданным и до какой степени, может дать только строгое решение первоначальных дифференциальных уравнений.

Такое же замечание можно сделать и по отношению к другим проблемам автоколебаний, например по отношению к затягиванию и тому подобным проблемам, при решении которых до сих пор, насколько нам известно, довольствуются лишь приближенными методами^[1]. Строгие методы в применении к рассмотренным здесь вопросам могут быть развиты на основании теории Пуанкаре и Ляпунова. К этим вопросам мы вернемся^[12].

Мы приносим глубокую благодарность Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси, побудивших нас начать это исследование.

Москва. Институт теоретической физики

ЛИТЕРАТУРА

1. Van der Pol B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. — *Philos. Mag.*, ser. 7, 1927, vol. 3, № 13, p. 65—80.
2. Ollendorff F. Erzwungene Schwingungen in angefachten Systemen. *Arch. Elektrotechnik*, 1926, Bd 16, S. 280.
3. Андронов А. Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний. В кн.: IV съезд русских физиков. М., 1928, с. 23—24.
4. Андронов А. (Andronow A). Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1929, vol. 189, № 15, p. 559—561 (см. стр. 55 настоящего изд.).
5. Андронов А. и Витт А. Разрывные периодические решения и теория мультивибратора Абрагама и Блоха. — *Докл. АН СССР*, сер. А, 1930, № 8, с. 189—192 (см. стр. 79 настоящего изд.).
6. Poincaré H. Sur les courbes définies par une équation différentielle. — *Oeuvres*. T. 1. Paris, 1928, p. 1—158.
7. Андронов А. А. и Хайкин С. Э. Теория колебаний. Ч. 1. С пред. акад. Л. И. Мандельштама. М. — Л., ОНТИ. Глав. ред. техн.-теорет. лит-ры, 1937, XII + 519 с., с илл.
8. Bendixson J. Sur les courbes définies par les équations différentielles. — *Acta Math.*, 1904, vol. 21, p. 80.
9. Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. 2. neubearb. Aufl. Berlin, Springer, 1926, S. 2.
10. Andronow A. A. et Witt A. Sur les mouvements quasiperiodiques — *Журн. прикл. физики*, 1930, т. 6, вып. 1, с. 119—122 (см. стр. 61 настоящего изд.).
11. Andronow A. et Witt A. Sur la théorie mathématique des auto-oscillations. — *C. r. Acad. sci. Paris*, 1930, vol. 190, p. 256 (см. стр. 58 настоящего изд.).
12. Андронов А. и Витт А. К математической теории захватывания. — *Журн. прикл. физики*, 1930, т. 6, вып. 4, с. 3 (см. стр. 84 настоящего изд.).

¹ Приведенные результаты действительны только при значениях $A^2 < 4/27$. При значениях $1/4 < A^2 < 9/27$ существует одновременно два устойчивых периодических решения. При каких условиях вступает в силу то или другое, мы здесь не рассматриваем.

РАЗРЫВНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ТЕОРИЯ МУЛЬТИВИБРАТОРА АБРАГАМА И БЛОХА¹

§ 1. В настоящем сообщении ставится вопрос о разрывных периодических решениях системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P(x, y)}{R(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{Q(x, y)}{R(x, y)} \quad (1)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и $R(x, y)$ — регулярные (аналитические. — *Ред.*) функции действительных переменных x и y .

Точкам кривой $R(x, y) = 0$ (кривой Γ) соответствуют, вообще говоря, бесконечно большие значения компонент скорости. Чтобы сделать поставленную задачу однозначной, необходимо добавить еще определенные условия непрерывности; можно потребовать, например, непрерывности

$$\int_0^t x dt \quad \text{и} \quad \int_0^t y dt$$

Эти условия определяют кривую Γ_1 , на которую перепрыгивает изображающая точка, достигнув точки кривой Γ . Заменой переменного

$$du = \frac{dt}{R(x, y)}$$

уравнения (1) приводятся к регулярной форме; полученные таким образом уравнения могут быть исследованы методами Пуанкаре^[1] и характер их интегральных кривых может быть определен на всей плоскости x, y . Чтобы проследить движение вдоль этих интегральных кривых, нужно возвратиться снова к переменному t и принять во внимание условия непрерывности².

¹ Совместно с А. А. Виттом. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1930, № 8, с. 189. Представлено акад. Л. И. Мандельштамом 31 I 1930.

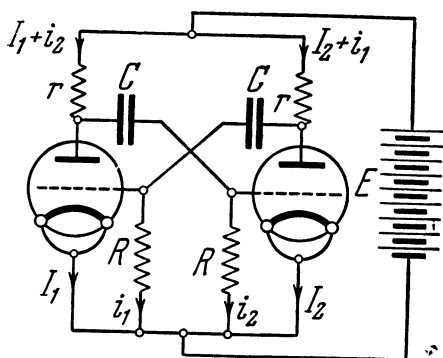
² Таким образом, вводится следующая «гипотеза скачка»: изображающая точка, придя по непрерывной фазовой траектории системы уравнения (1) на кривую $R(x, y) = 0$ (на кривую Γ), совершает мгновенный скачок в точку кривой Γ_1 , определяемую по начальной точке скачка (по точке кривой Γ) постулированными условиями непрерывности двух величин. Заметим, что эти условия непрерывности («закон скачка») не являются следствием уравнений (1) и постулируются на основании дополнительных (физических) соображений. После скачка изображающая точка снова двигается по фазовой траектории уравнений (1) [*Ред.*]

К уравнениям вида (1) приводят некоторые задачи теории электрических колебательных систем. Нам представляется, что такие задачи не лишены определенного математического интереса, так как разрывные периодические решения могут рассматриваться как некоторое обобщение предельных циклов Пуанкаре¹.

§ 2. В качестве примера мы рассмотрим симметричный мультивибратор Абрагама и Блоха² — систему, не содержащую заметных индуктивностей.

На фиг. 1 дана схема мультивибратора. Пренебрегая сеточными точками, мы получим следующие уравнения:

$$(I_1 + i_2)r + \int_0^t \frac{i_2 dt}{C} + i_2 R = E, \quad (I_2 + i_1)r + \int_0^t \frac{i_1 dt}{C} + i_1 R = E \quad (2)$$



Фиг. 1.

Мы примем, что анодный ток зависит только от сеточного напряжения:

$$I_1 = \varphi(Ri_1), \quad I_2 = \varphi(Ri_2)$$

где $\varphi(\xi)$ — так называемая характеристика лампы.

Обозначив

$$x = Ri_1, \quad y = Ri_2,$$

$$\tau = \frac{t}{RrC}, \quad a = \frac{r+R}{Rr}$$

мы после дифференцирования и разрешения (относительно производных [Ред.]) получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{P}{R} = \frac{ax - y\varphi'(y)}{\varphi'(x)\varphi'(y) - a^2}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{Q}{R} = \frac{ay - x\varphi'(x)}{\varphi'(x)\varphi'(y) - a^2} \quad (3)$$

после приведения к регулярной форме:

$$\frac{dx}{du} = P = ax - y\varphi'(y), \quad \frac{dy}{du} = Q = ay - x\varphi'(x) \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) не допускают никаких непрерывных периодических решений, какова бы ни была функция $\varphi(\xi)$, так как кривая

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

не имеет действительных ветвей³.

¹ В небесной механике имеется обширная литература, посвященная вопросу приведения уравнений к регулярной форме, где исследуются движения с ударами. В этих работах, насколько нам известно, вопрос о стационарных (рекуррентных) движениях, сопровождаемых соударениями, не затрагивался; кроме того, все исследование ограничивались консервативными системами.

² Абрагам и Блох^[2]. Развиваемая здесь теория мультивибратора существенно отличается от теории Ван дер Поля^[3].

³ См. Бендиксон^[4].

Пусть характеристика $\varphi(\xi)$ обладает следующими свойствами: 1) $\varphi(\xi) = -\varphi(-\xi)$; 2) при $\xi > 0$ $\varphi(\xi)$ возрастает монотонно и стремится к конечному предельному значению (к току насыщения); 3) $\xi = 0$ является единственной точкой перегиба. Легко показать в этом случае, что кривая разрывности Γ или не имеет действительных ветвей, или же является простой замкнутой кривой, охватывающей начало координат.

Далее будет принято, что напряжения на конденсаторах

$$V_1 = \int_0^t \frac{i_1 dt}{C} \text{ и } V_2 = \int_0^t \frac{i_2 dt}{C}$$

непрерывны¹. Это и есть указанные выше условия непрерывности.

Рассмотрим точку x_0, y_0 кривой Γ ; соответствующая ей точка кривой Γ_1 определяется согласно (2) (и постулированным условиям непрерывности напряжений на конденсаторах [Ред.] уравнениями

$$ax + \varphi(y) = ax_0 + \varphi(y_0), \quad ay + \varphi(x) = ay_0 + \varphi(x_0)$$

Легко может быть показано, что в рассматриваемом случае кривая Γ_1 охватывает кривую Γ ; обе кривые соприкасаются в точках диагонали $x = y$; при этом имеется однозначное соответствие между точками обеих кривых; обе точки соприкосновения являются особыми точками дифференциальных уравнений (4); соответствующие скорости являются неопределенными².

§ 3. Рассмотрим теперь поведение интегральных кривых и движение изображающей точки. Здесь следует различать два случая.

I. Кривая Γ не имеет действительных ветвей; это получается при $a > \varphi'(0) = S$ (S — крутизна характеристики). Начало координат в этом случае — единственная особая точка уравнений (3) и притом устойчивый узел; все интегральные кривые в бесконечности направлены радиально внутрь; при любых начальных условиях система стремится к началу координат. Мультивибратор не совершает никаких колебаний.

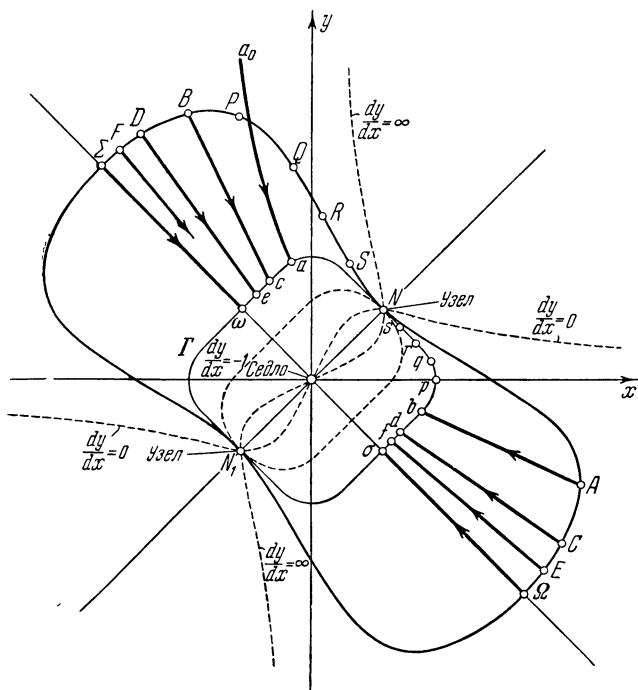
II. Кривая Γ имеет действительную ветвь; это получается при $a < \varphi'(0) = S$; система имеет равновесное состояние, $x = 0, y = 0$, однако мы имеем дело с седлом и, следовательно, с неустойчивым равновесным состоянием; интегральные кривые в бесконечности здесь также направлены по радиусам внутрь. Обе диагонали $x = y$ и $x = -y$ являются интегральными кривыми; на диагонали $x = -y$ нет особых точек (кроме $x = 0, y = 0$). Легко показать, что уравнения (3), не имеющие непрерывных периодических решений, допускают разрывные периодические решения указанного вида. Рассмотрим изображающую точку,

¹ Рассмотрение задачи о мультивибраторе в данной здесь форме было предложено нам проф. Л. Мандельштамом и проф. Н. Папалекси. О разрывных колебаниях см. также Фридлендер [5].

² Между прочим, стоит заметить, что в окрестности таких точек уравнений (2) недостаточно, чтобы правильно описать физические процессы.

которая движется по диагонали $x = -y$ в промежутке между кривыми Γ и Γ_1 . Через конечный интервал времени изображающая точка достигнет кривой Γ и перепрыгнет в соответствующую точку кривой Γ_1 на той же диагонали, но по другую сторону от начала координат; отсюда она снова движется к кривой Γ и т. д. Мы действительно имеем дело с разрывным периодическим движением. Период и форму колебаний можно определить посредством квадратуры.

§ 4. Исследование общего характера движения без специализации формы характеристики представляет известные трудности. Ограничимся



Фиг. 2.

поэтому случаем $\varphi(\xi) = \operatorname{arctg} \xi^1$. В этом случае дифференциальные уравнения (3) запишутся так:

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{ax - \frac{y}{1+y^2}}{\frac{1}{(1+x^2)} - a^2}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{ay - \frac{x}{1+x^2}}{\frac{1}{(1+y^2)} - a^2}$$

¹ Эта характеристика, с одной стороны, обладает всеми свойствами, которые требовались от функции $\varphi(\xi)$ и, с другой, может служить достаточно хорошей аппроксимацией реальных характеристик. См. [6]. Чтобы упростить вычисления, ток насыщения принят равным $\pi/2$, а (максимальная — *Ред.*) крутизна — 1.

Соответствующие уравнения, приведенные к регулярной форме, имеют на плоскости x, y только три особые точки: седло $x = 0, y = 0$ (предполагается, что $a < 1$) и два узла

$$x = y = \pm \sqrt{\frac{1-a}{a}}$$

Единственным периодическим движением является описанное выше; оно определено однозначно с точностью до постоянной фазы. В это периодическое движение переходят в конце концов все остальные движения, какие бы начальные условия ни были. Однако из таких движений представлено, например, на фиг. 2 разрывной кривой¹

$$a_0 a A b B c C d D e E f F \dots \rightarrow \omega \Omega \pm \Sigma \dots \omega \Omega \pm \Sigma$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Oeuvres. T. 1. Paris, 1928, p. 3.
2. Abraham et Bloch. — Ann. phys., Ser. 9, 1921, vol. 12, p. 237.
3. Van der Pol B. Über «Relaxationschwingungen». — Z. Hochfrequenztechnik, 1926, Bd 28, № 6, S. 178—184.
4. Bendixson J. Sur les courbes définies par des équations différentielles. — Acta math., 1901, vol. 24, p. 78.
5. Friedländer E. Über Kippschwingungen insbesondere bei Elektronenröhren — Arch. Elektrotechnik, 1926, Bd 16, H. 4, S. 273—279.
6. Joos G. Theorie des Elektronenröhrengenerators. — Ann. Physik, 1922, Bd 69, № 23—24, S. 505—547.
7. Железцов Н. А. и Родыгин Л. В. К теории симметричного мультивибратора. — Докл. АН СССР, 1951, т. 81, № 3, с. 391—397.

¹ В более поздней работе, выполненной под руководством А. А. Андропова (Н. А. Железцов, Л. В. Родыгин, ДАН СССР, 81, 1951, 391), показано, что изображающая точка должна совершить скачки не только с кривой Γ , но и из всех точек внутри этой кривой. В соответствии с этим уточнением «гипотезы скачка» фиг. 2 несколько изменена: отрезок фазовой траектории $a_0 a$ перенесен из области внутри кривой Γ в область вне ее. — *Ред.*

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЗАХВАТЫВАНИЯ¹

Введение и краткое резюме. — § 1. Отыскание периодического решения в случае достаточно сильной расстройки. — § 2. Исследование устойчивости периодического решения. — § 3. Отыскание периодического решения в области резонанса. — § 4. Исследование устойчивости периодических решений в области резонанса. — § 5. Применение общих формул, полученных в предыдущих параграфах, к теории захватывания в регенеративном приемнике для случая, когда характеристика — кубическая парабола.

ВВЕДЕНИЕ И КРАТКОЕ РЕЗЮМЕ

Настоящая работа посвящена исследованию движений автоколебательной системы с одной степенью свободы под действием внешней периодической силы. Такие движения представляют интерес для радиотелеграфии (например, к исследованию таких движений сводится теория регенеративного приемника). Особенно замечательно здесь явление так называемого «захватывания» (иначе «увлечения» или «Mitnehmen»). Это явление заключается в том, что, когда период внешней силы достаточно близок к периоду автоколебаний системы, биения пропадают; внешняя сила как бы «захватывает» автоколебания. Колебания системы начинают совершаться с периодом внешнего сигнала, хотя их амплитуда весьма сильно зависит от амплитуды «исчезнувших» автоколебаний. Интервал захватывания зависит от интенсивности приходящего сигнала и от автоколебательной системы.

Теоретически этот вопрос разбирался^[1-4], однако методами, математически недостаточно строгими; кроме того, бралась характеристика весьма частного вида — кубическая парабола. Поэтому нам казалось интересным дать строгую математическую теорию захватывания для произвольного вида характеристики в случае колебаний, близких к синусоидальным.

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением периодических решений с периодом, равным периоду внешней силы (Zwang-Lösung), и их устойчивости при малых отклонениях (Stabilität im Kleinen). Мы оставим в стороне другие стационарные движения, возможные в исследуемой системе, например периодические решения с периодом, кратным периоду внешней силы^{[6]2}, или квазипериодические решения (Schwebung-Lösung)³. Точно так же мы оставим в стороне весьма важный

¹ Совместно с А. А. Виттом. Опубликовано в Ж. прикл. физики, 1930, 7., в. 4, с. 3.

² Заметим, что подобные движения, как показали Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси^[5], существуют и в не самовозбужденных системах.

³ Рассмотрение квазипериодических решений и их устойчивости мы рассчитываем сделать в отдельной статье. О некоторых общих свойствах квазипериодических решений см. ^[7].

вопрос об устойчивости при больших отклонениях (*Stabilität im Grossen* «устойчивость в большом»).

Для отыскания периодических решений мы воспользуемся методами Пуанкаре^[8], которые позволяют быстро решить задачу для случая колебаний, достаточно близких к синусоидальным. С этой целью мы введем в наше уравнение параметр μ таким образом, чтобы при $\mu = 0$ наше уравнение превращалось в линейное и колебания делались синусоидальными. Этот параметр μ , который мы будем предполагать достаточно малым, может иметь различный смысл в зависимости от выбора системы¹.

Для решения вопроса об устойчивости найденного решения при малых отклонениях мы воспользуемся методами Ляпунова^[9] (см. также^[8], стр. 162), требуя, чтобы искомые решения обладали «устойчивостью по Ляпунову».

В настоящей работе мы не будем вычислять радиусы сходимости тех рядов, с которыми нам придется иметь дело; грубая оценка может быть сделана по Пуанкаре².

В § 1 и 2 рассматривается область достаточно сильной расстройки; § 3 и 4 посвящены рассмотрению области резонанса; в § 5 показывается, как общие формулы для амплитуд и для устойчивости, полученные в § 1—4, могут быть применены в конкретных случаях, причем в качестве примера рассматривается случай Ван дер Поля. Результаты применения общих формул совпадают с теми, которые получил нестрогим путем Ван дер Поля.

§ 1. Отыскание периодического решения в случае достаточно сильной расстройки

Дифференциальное уравнение, исследование которого нас интересует, имеет в этом случае следующий вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin t + \mu f(x, \dot{x}) \quad (1)$$

где член $\mu f(x, \dot{x})$ в случае регенеративного приемника зависит от характеристики лампы и от величин, характеризующих контур; μ — параметр, о котором уже шла речь и относительно которого мы предполагаем, что он может быть выбран достаточно малым.

При $\mu = 0$ это уравнение имеет единственное периодическое решение:

$$x = \varphi(t) = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin t \quad (2)$$

Следуя Пуанкаре, мы можем предположить, что периодическое решение для достаточно малых μ имеет такой вид:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + F_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \\ \dot{x} &= \dot{\varphi}(t) + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + F_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \end{aligned} \quad (3)$$

где $A, B, C, \dots$ — функции времени, β_1 и β_2 — начальные условия, определяемые уравнениями

$$x(0) = \varphi(0) + \beta_1, \quad \dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) + \beta_2 \quad (4)$$

¹ В § 5 этой работы на конкретном примере показано, как может быть сделан выбор такого параметра.

² Пуанкаре^[8], стр. 60.

и F_2 — степенной ряд по β_1, β_2, μ , начинающийся с членов второго порядка¹. Подставляя (3) в (1), сравнивая коэффициенты у одинаковых степеней β_1, β_2, μ и воспользовавшись условиями (4), найдем, что A, B, C определяются такими уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{A} + \omega^2 A &= 0, \quad A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0 \\ \ddot{B} + \omega^2 B &= 0, \quad B(0) = 0, \quad \dot{B}(0) = 1 \\ \ddot{C} + \omega^2 C &= f(\varphi, \dot{\varphi}), \quad C(0) = 0, \quad \dot{C}(0) = 0\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}A &= \cos \omega t, \quad \dot{A} = -\omega \sin \omega t \\ B &= \frac{1}{\omega} \sin \omega t, \quad \dot{B} = \cos \omega t \\ C &= \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\varphi, \dot{\varphi}) \sin \omega(t - \xi) d\xi; \quad \dot{C} = \int_0^t f(\varphi, \dot{\varphi}) \cos \omega(t - \xi) d\xi\end{aligned}\tag{5}$$

Для того чтобы разложения (3) представляли периодическое движение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi_1 = x(2\pi) - x(0) = 0, \quad \psi_2 = \dot{x}(2\pi) - \dot{x}(0) = 0\tag{6}$$

Обозначая

$$[A] = A(2\pi) - A(0), \quad [\dot{A}] = \dot{A}(2\pi) - \dot{A}(0) \text{ и т. д.}$$

мы можем написать уравнения (6) в таком виде:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= [A]\beta_1 + [B]\beta_2 + [C]\mu + [F_2] = 0 \\ \psi_2 &= [\dot{A}]\beta_1 + [\dot{B}]\beta_2 + [\dot{C}]\mu + [\dot{F}_2] = 0\end{aligned}\tag{7}$$

Если эти уравнения можно разрешить относительно β_1 и β_2 , т. е. выразить β_1 и β_2 в функции μ , и если при этом β_1 и β_2 исчезают вместе с μ , то это значит, что наше уравнение имеет периодическое решение и при $\mu \neq 0$, близкое к исходному решению (2).

Достаточным условием существования периодического решения для достаточно малых μ служит неравенство нулю якобиана

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} \end{vmatrix} \neq 0$$

В нашем случае этот якобиан имеет такой вид:

$$\begin{vmatrix} [A] & [B] \\ [\dot{A}] & [\dot{B}] \end{vmatrix} = 2(1 - \cos 2\pi\omega)$$

¹ Заметим, что в разных уравнениях $F_i(\beta_1, \beta_2, \mu)$ может обозначать разные функции, являющиеся, однако, степенными рядами, начинающимися с членов i -го порядка по β_1, β_2, μ .

Следовательно, вообще говоря, мы всегда имеем периодические решения для достаточно малых μ , какова бы ни была функция $f(x, \dot{x})$.

Случай, когда ω равняется целому числу, требует специального рассмотрения¹. Искомое периодическое решение может быть найдено в виде степенного ряда по μ , так как β_1 и β_2 — функции μ :

$$\Phi(t) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) + \mu^2\varphi_2(t) + \dots \quad (8)$$

Мы не будем, однако, заниматься вычислением $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$...², так как они нам не понадобятся для решения вопроса об устойчивости, если только мы ограничимся случаем достаточно малых μ .

§ 2. Исследование устойчивости периодического решения

Мы получили искомое периодическое решение в виде степенного ряда по μ , сходящегося, как показал Пуанкаре, для достаточно малого μ . Теперь нашей задачей будет найти те условия, при которых это решение будет устойчивым по Ляпунову³.

С этой целью мы составим так называемое «уравнение первого приближения» (équation aux variations), порождаемое решением (8). Для этого мы введем в уравнение (1) вместо x новое зависимое переменное ξ , определив его соотношением

$$x = \Phi(t) + \xi \quad (9)$$

и отбросив члены, содержащие квадраты и высшие степени ξ и $\dot{\xi}$.

Получившееся уравнение первого приближения:

$$\dot{\xi} + \omega^2\xi = \mu \{f'_x(\Phi, \dot{\Phi})\xi + f'_{\dot{x}}(\Phi, \dot{\Phi})\dot{\xi}\} \quad (10)$$

является линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Его решение мы можем предположить в виде

$$\xi = \overline{A}\overline{p}_1 + \overline{B}\overline{p}_2$$

¹ Если ω очень близко к целому числу, но не равняется ему в точности, то всегда можно выбрать μ настолько малым, чтобы теория была применима. Если же μ хотя и выбрано достаточно малым, но зафиксировано, то всегда найдутся такие значения для ω , лежащие достаточно близко к целым числам, для которых рассматриваемые ряды расходятся (неравномерная сходимость относительно ω); так как для приложений интересен тот случай, когда μ зафиксировано, то необходимо отдельно рассмотреть случай близости к целым числам; для случая резонанса это рассмотрено в § 3 и 4.

² Эти функции легко вычислить одну за другой; заметим, что ряд (8) может быть легко перегруппирован в ряд Фурье.

³ Если движение обладает «устойчивостью по Ляпунову», то это значит, что достаточно малое возмущение всегда останется малым. Или, точнее, задавшись сколь угодно малым ε , мы всегда в этом случае сможем найти такое $\delta(\varepsilon)$, что если $|x(t_0) - \Phi(t_0)| < \delta$, $|\dot{x}(t_0) - \dot{\Phi}(t_0)| < \delta$, то $|x(t) - \Phi(t)| < \varepsilon$, $|\dot{x}(t) - \dot{\Phi}(t)| < \varepsilon$ для всяких значений $t_0 < t < +\infty$. При проектировании физических и технических приборов следует требовать, чтобы стационарные движения были устойчивы по Ляпунову.

где $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — функции времени, $\bar{\beta}_1 = \xi(0)$, $\bar{\beta}_2 = \dot{\xi}(0)$, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ определяются такими же дифференциальными уравнениями, как и ξ , и следующими начальными условиями:

$$\bar{A}(0) = 1, \quad \dot{\bar{A}}(0) = 0; \quad \bar{B}(0) = 0, \quad \dot{\bar{B}}(0) = 1 \quad (11)$$

Правая часть уравнения (10) может быть представлена в виде степенного ряда по μ , так как

$$f_x'(\Phi, \dot{\Phi}) = f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) + \mu \{ f_{xx}''(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \varphi_1 + f_{x\dot{x}}''(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \dot{\varphi}_1 \} + \mu^2 \{ \} + \dots$$

$$f_{\dot{x}}'(\Phi, \dot{\Phi}) = f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) + \mu \{ f_{x\dot{x}}''(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \varphi_1 + f_{\dot{x}\dot{x}}''(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \dot{\varphi}_1 \} + \mu^2 \{ \} + \dots$$

Будем искать $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также в виде рядов, расположенных по степеням μ :

$$\bar{A} = A_0 + \mu A_1 + \mu A_2 + \dots, \quad \bar{B} = B_0 + \mu B_1 + \mu B_2 + \dots \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10) и приравнявая коэффициенты у одинаковых степеней μ , нетрудно получить систему линейных дифференциальных уравнений, последовательно определяющих $A_0, B_0; A_1, B_1; A_2, B_2$ и т. д.

$$\ddot{A}_0 + \omega^2 A_0 = 0, \quad \ddot{B}_0 + \omega^2 B_0 = 0$$

$$\ddot{A}_1 + \omega^2 A_1 = \{ f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) A_0 + f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \dot{A}_0 \}$$

$$\ddot{B}_1 + \omega^2 B_1 = \{ f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) B_0 + f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \dot{B}_0 \} \quad (13)$$

$$\ddot{A}_2 + \omega^2 A_2 = \{ f_x' A_1 + f_{\dot{x}}' \dot{A}_1 \} + \{ f_{xx}'' \dot{\varphi}_1 + f_{x\dot{x}}'' \dot{\varphi}_1 \} A_0 + \{ f_{xx}'' \varphi_1 + f_{x\dot{x}}'' \dot{\varphi}_1 \} \dot{A}_0$$

.....

Произвольные постоянные в интегралах уравнений (13) следует определять так, чтобы были выполнены начальные условия (11):

$$A_0(0) = 1, \quad \dot{A}_0(0) = 0; \quad B_0(0) = 0, \quad \dot{B}_0(0) = 1$$

$$A_i(0) = \dot{A}_i(0) = B_i(0) = \dot{B}_i(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

Решения уравнений (13) легко найдутся при помощи квадратур:

$$A_1 = \frac{1}{\omega} \int_0^t \{ f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \cos \omega \xi - f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \omega \sin \omega \xi \} \sin \omega(t - \xi) d\xi$$

$$B_1 = \frac{1}{\omega} \int_0^t \left\{ f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \frac{1}{\omega} \sin \omega \xi + f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \cos \omega \xi \right\} \sin \omega(t - \xi) d\xi \quad (15)$$

Как известно из общей теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, общее решение уравнения (10) имеет вид¹:

$$\xi = S_1(t) e^{\alpha_1 t} + S_2(t) e^{\alpha_2 t}$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — периодические функции времени, имеющие тот же период, как и $\Phi(t)$, а α_1 и α_2 — так называемые характеристические

¹ Случай вырождения, когда t входит множителем, нас не интересует.

показатели (exposants caractéristiques). Если все α имеют отрицательные действительные части, т. е. если все $|e^{\alpha}| < 1$, то все решения уравнений первого приближения затухают. Ляпунов¹ доказал, что в этом случае периодическое решение является вполне устойчивым в том смысле, что всякое достаточно малое отклонение от периодического решения асимптотически стремится к нулю, даже если мы примем во внимание те члены высших порядков, которые мы отбросили при составлении уравнения первого приближения. Можно показать², что в нашем случае эти характеристические показатели определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial \beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{\partial \bar{\Psi}_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \bar{\Psi}_2}{\partial \beta_2} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix}_{\beta_1 = \beta_2 = 0} = 0 \quad (16)$$

Используя начальные условия и полагая $e^{\alpha T} = e^{2\pi x} = \lambda$, имеем

$$\begin{vmatrix} \bar{A}(2\pi) - \lambda & \bar{B}(2\pi) \\ \dot{\bar{A}}(2\pi) & \dot{\bar{B}}(2\pi) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

$$\lambda = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (18)$$

где

$$p = \frac{1}{2} \{ \bar{A}(2\pi) + \dot{\bar{B}}(2\pi) \}, \quad q = \begin{vmatrix} \bar{A}(2\pi) & \bar{B}(2\pi) \\ \dot{\bar{A}}(2\pi) & \dot{\bar{B}}(2\pi) \end{vmatrix} \quad (19)$$

Вопрос об устойчивости решается знаком действительных частей величин α или, что все равно, величиной модулей комплексных чисел λ . Если эти модули меньше единицы, то имеет место устойчивость в смысле Ляпунова, причем всякое достаточно малое отклонение затухает³. Если хотя бы один из этих модулей больше единицы, то, как показал Ляпунов, имеет место неустойчивость. Граничного случая модулей, равных единице, мы не будем рассматривать, потому что для нашей задачи он не представляет интереса. При анализе уравнения (18) следует различать два случая:

$$q > p^2 \quad \text{и} \quad q < p^2$$

В первом случае λ — числа комплексные. Они имеют одинаковые модули

$$|\lambda| = +\sqrt{q} \quad (20)$$

Если $q < 1$ — устойчивость; если $q > 1$ — неустойчивость.

Во втором случае λ — числа действительные. Их модули

$$|\lambda| = |p \pm \sqrt{p^2 - q}| \quad (21)$$

¹ Ляпунов^[9], стр. 211.

² Пуанкаре^[8], стр. 170.

³ В этом случае имеет место более «сильная» устойчивость, чем устойчивость по Ляпунову, — устойчивость по Треффцу^[10], которая является частным случаем устойчивости по Ляпунову.

Устойчивость соответствует

$$|p \pm \sqrt{p^2 - q}| < 1$$

p и q нетрудно получить в виде рядов, расположенных по степеням μ , воспользовавшись формулами (12) и (19):

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \{ [A_0 + \dot{B}_0] + \mu [A_1 + \dot{B}_1] + \mu^2 [A_2 + \dot{B}_2] + \dots \} \\ q &= [A_0 \dot{B}_0 - \dot{A}_0 B_0] + \mu [A_0 \dot{B}_1 + A_1 \dot{B}_0 - \dot{A}_0 B_1 - B_0 \dot{A}_1] + \quad (22) \\ &+ \mu^2 [A_1 \dot{B}_1 + A_0 \dot{B}_2 + A_2 \dot{B}_0 - \dot{A}_1 B_1 - \dot{A}_2 B_0 - \dot{A}_0 B_2] + \dots \end{aligned}$$

Если далее принять во внимание формулы (15), то

$$\begin{aligned} p &= \cos 2\pi\omega + \mu \frac{1}{2} [a \sin 2\pi\omega + b \cos 2\pi\omega] + \dots \\ q &= 1 + \mu b + \dots \end{aligned} \quad (22a)$$

$$p^2 - q = -\sin^2 2\pi\omega + \mu \sin 2\pi\omega [a \cos 2\pi\omega - b \sin 2\pi\omega] + \dots$$

где

$$a = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) d\tilde{\xi}, \quad b = \int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) d\tilde{\xi} \quad (23)$$

Мы видим, что при достаточно малом μ и $\omega \neq n$ (целому числу) вопрос об устойчивости решается величиной q и, следовательно, знаком b ; если $b < 0$, решение устойчивое; если $b > 0$, решение неустойчивое.

В нашем случае b имеет вид:

$$b = \int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}' \left(\frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin \tilde{\xi}, \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \cos \tilde{\xi} \right) d\tilde{\xi} \quad (23a)$$

§ 3. Отыскание периодического решения в области резонанса

Исследуя случай внешней силы малой амплитуды в области резонанса, положим с этой целью

$$\lambda = \mu \lambda_0, \quad \omega^2 = 1 + a_0 \mu \quad (24)$$

где $a_0 \mu$ — «расстройка» нашей системы; если нас интересует точный резонанс, то нам нужно положить $a_0 = 0$. Сейчас мы употребим слово резонанс в том смысле, что это совпадение частоты возмущающей силы и собственной частоты системы. Реальный физический резонанс, т. е. максимум амплитуды или максимум энергии, наступает, вообще говоря, при $a_0 \neq 0$; это зависит от вида характеристики $f(x, \dot{x})$.

Уравнение, которое нам предстоит исследовать, имеет вид:

$$\ddot{x} + x = \mu \{ \lambda_0 \sin t + f(x, \dot{x}) - a_0 x \} \quad (25)$$

Так как здесь может зайти речь о фазе, то периодическое решение

при $\mu = 0$ нужно взять в виде:

$$\begin{aligned} x_0 &= \varphi(t) = P \cos t + Q \sin t \\ \dot{x}_0 &= \dot{\varphi}(t) = -P \sin t + Q \cos t \end{aligned} \quad (26)$$

где P и Q — константы.

Следуя Пуанкаре, мы можем предположить периодическое решение при $\mu = 0$ в виде:

$$\begin{aligned} x &= \varphi + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + G\mu^2 + \mu F_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \\ \dot{x} &= \dot{\varphi} + \dot{A}\beta_1 + \dot{B}\beta_2 + \dot{C}\mu + \dot{D}\beta_1\mu + \dot{E}\beta_2\mu + \dot{G}\mu + \mu F_2(\beta_1, \beta_2, \mu) \end{aligned} \quad (27)$$

с начальными условиями ^[8] (стр. 93), ^[11] (стр. 94).

$$\text{При } t = 0 \quad x(0) = \varphi(0) + \beta_1, \quad \dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) + \beta_2 \quad (28)$$

Легко видеть на основании формул (25), (27) и (28), что $A, B, C \dots$ определяются следующими дифференциальными уравнениями и следующими начальными условиями¹:

$$\begin{aligned} \ddot{A} + A &= 0 & A(0) &= 1, \quad \dot{A}(0) = 0 \\ \ddot{B} + B &= 0, & B(0) &= 0, \quad \dot{B}(0) = 1 \\ \ddot{C} + C &= f(\varphi, \dot{\varphi}) + \lambda_0 \sin t - a_0 \varphi, & C(0) &= 0, \quad \dot{C}(0) = 0 \\ \ddot{D} + D &= \{f_x'(\varphi, \dot{\varphi}) - a_0\} A + f_x'(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}) \dot{A}, & D(0) &= 0, \quad \dot{D}(0) = 0 \\ \ddot{E} + E &= \{f_x'(\varphi, \dot{\varphi}) - a_0\} B + f_x'(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{B}, & E(0) &= 0, \quad \dot{E}(0) = 0 \\ \ddot{G} + G &= \{f_x'(\varphi, \dot{\varphi}) - a_0\} C + f_x'(\varphi, \dot{\varphi}) \dot{C}, & G(0) &= 0, \quad \dot{G}(0) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Условия, что (27) представляют периодическое решение, имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi &= x(2\pi) - x(0) = [C]\mu + [D]\beta_1\mu + [E]\beta_2\mu + [G]\mu^2 + \mu[F_2] = 0 \\ \psi &= \dot{x}(2\pi) - \dot{x}(0) = [\dot{C}]\mu + [\dot{D}]\beta_1\mu + [\dot{E}]\beta_2\mu + [\dot{G}]\mu^2 + \mu[F_2] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

или, если сократить на μ^2 :

$$\begin{aligned} [C] + [D]\beta_1 + [E]\beta_2 + [G] &= 0 \\ [\dot{C}] + [\dot{D}]\beta_1 + [\dot{E}]\beta_2 + [\dot{G}] &= 0 \end{aligned} \quad (30a)$$

Необходимым условием существования искомого периодического решения является

$$\begin{aligned} [C] &= \int_0^{2\pi} \{a_0 \varphi - f(\varphi, \dot{\varphi}) - \lambda_0 \sin \xi\} \sin \xi d\xi = 0 \\ [\dot{C}] &= \int_0^{2\pi} \{f(\varphi, \dot{\varphi}) + \lambda_0 \sin \xi - a_0 \varphi\} \cos \xi d\xi = 0 \end{aligned}$$

Эти уравнения определяют P и Q того «исходного» периодического решения [см. (26)], в непосредственной близости к которому устанавли-

¹ В силу тех же условий, мы написали ряд (27) без членов, содержащих $\beta_1^2, \beta_2^2, \beta_1^3, \beta_2^3$ и т. д.

вается рассматриваемое периодическое решение. Они могут быть записаны в раскрытой форме так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f [P \cos \xi + Q \sin \xi, -P \sin \xi + Q \cos \xi] \sin \xi d\xi + \lambda_0 - a_0 Q &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f [P \cos \xi + Q \sin \xi, -P \sin \xi + Q \cos \xi] \cos \xi d\xi - a_0 P &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Достаточным условием существования искомого периодического решения является неравенство нулю детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} [D] & [E] \\ [\dot{D}] & [\dot{E}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D(2\pi) & E(2\pi) \\ \dot{D}(2\pi) & \dot{E}(2\pi) \end{vmatrix} \quad (32)$$

$D, E, \dot{D}, \dot{E}$ найдутся по уравнениям (29) при помощи формул, вполне аналогичных формулам (15).

Заметим, что из уравнений (30) мы можем определить β_1 и β_2 в виде рядов, расположенных по степеням μ . Таким образом, точно так же, как и в § 1, мы можем представить искомое периодическое решение (27) в виде ряда, расположенного по степеням μ :

$$\Phi(t) = \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \mu^2 \varphi_2 + \dots \quad (33)$$

Здесь $\varphi_0 = P \cos t + Q \sin t$, причем P и Q определяются формулами (31) и (32).

§ 4. Исследование устойчивости периодических решений в области резонанса

Ход исследования здесь тот же, что и в § 2. Уравнение первого приближения, порожденное решением (33), имеет вид:

$$\ddot{\xi} + \xi = \mu \{ [f'_x(\Phi, \dot{\Phi}) - a_0] \xi + f'_x(\Phi, \dot{\Phi}) \dot{\xi} \}$$

Решение мы опять должны предположить в виде:

$$\xi = \bar{A} \bar{\beta}_1 + \bar{B} \bar{\beta}_2 \quad \text{и т. д.}$$

Однако нет никакой необходимости переделывать заново все выкладки. Мы можем сразу воспользоваться результатами § 2, приняв

$$\varphi_0 = P \cos t + Q \sin t, \quad \omega = 1,$$

а вместо функции $f(x, \dot{x})$ взяв функцию

$$f(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x}) - a_0 x_0.$$

Формулы (22) дают

$$p = 1 + \mu \frac{b}{2} + \dots, \quad q = 1 + \mu b + \dots \quad (34)$$

$$p^2 - q = \mu^2 \left\{ \frac{b^2}{4} - \Delta \right\} + \dots$$

где Δ — тот же самый детерминант, что и (32). В раскрытой форме он

имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} - a_{12} & -a_{11} - \dot{a}_{12} + a_0\pi \\ \dot{a}_{22} - \dot{a}_{12} - a_0\pi & \dot{a}_{22} + a_{12} \end{vmatrix} \quad (35)$$

здесь

$$a_{11} = \int_0^{2\pi} f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin^2 \xi d\xi, \quad \dot{a}_{11} = \int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin^2 \xi d\xi \quad (36)$$

$$a_{12} = \int_0^{2\pi} f_x'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin \xi \cos \xi d\xi, \quad \dot{a}_{12} = \int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \sin \xi \cos \xi d\xi$$

$$\varphi_0 = P \cos \xi + Q \sin \xi$$

Δ может быть вычислен в функции P, Q и a_0 , коль скоро нам известна $f(x, \dot{x})$. Заметим, что b в отличие от (23а) имеет вид:

$$b = \int_0^{2\pi} f_{\dot{x}}'(P \cos \xi + Q \sin \xi, -P \sin \xi + Q \cos \xi) d\xi \quad (37)$$

Как мы видели в § 2, при исследовании устойчивости нужно различать два случая:

$$1) p^2 - q < 0, \quad \text{т. е.}^1 \quad \Delta > \frac{b^2}{4};$$

$$2) p^2 - q > 0, \quad \text{т. е.} \quad \Delta < \frac{b^2}{4}$$

В первом случае устойчивость характеризуется требованием $q < 1$, или, что все равно, $b < 0$. Во втором случае устойчивость характеризуется требованием $|p \pm \sqrt{p^2 - q}| < 1$, или, что все равно [см. (34)], требованием

$$\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \Delta} < 0$$

Последнее может быть выполнено только при $b < 0$ и $\Delta > 0$. Нетрудно видеть, что необходимым и достаточным условием устойчивости является в обоих случаях

$$b < 0, \quad \Delta > 0 \quad (38)$$

§ 5. Применение общих формул, полученных в предыдущих параграфах, к теории захватывания в регенеративном приемнике для случая, когда характеристика — кубическая парабола²

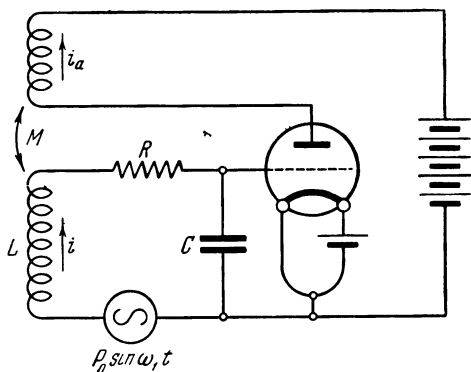
Результаты предыдущих параграфов могут быть использованы для многих проблем теории вынужденных колебаний в системах с одной

¹ Мы предполагаем, что μ достаточно мало.

² Как мы уже упоминали, в данном случае результаты применения общих формул амплитуд и для устойчивости периодических решений совпадают с результатами, полученными нестрогим путем Ван дер Поля. В этом параграфе исследование периодических решений проведено несколько более подробно, чем это сделано у Ван дер Поля.

степенью свободы¹. Мы рассмотрим случай простого регенеративного приемника с колебательным контуром в цепи сетки, на который действует внешняя периодическая сила $P_0 \sin \omega_1 t$ (фиг. 1).

Пренебрегая сеточным током, можно написать дифференциальное уравнение колебаний такого контура:



Фиг. 1.

$$L \frac{di}{dt} + ri + \frac{1}{c} \int_0^t i dt - M \frac{di_a}{dt} = P \sin \omega_1 t \quad (39)$$

Предполагая, что анодный ток зависит только от сеточного напряжения, и принимая для простоты выкладок², что характеристика является кубической параболой, имеем

$$i = f(v_g) = S v_g \left(1 - \frac{v_g^2}{3K^2} \right) \quad (40)$$

Здесь S — крутизна характеристики, K — «напряжение насыщения»³.

$$v_g = \int_0^t \frac{idt}{c}$$

Вводя далее обозначения

$$\tau = \omega_1 t, \quad x = \frac{v_g}{K} \sqrt{\frac{MS}{(MS - cr)}}, \quad \lambda = \frac{P_0 \omega_0^2}{K \omega_1^2} \sqrt{\frac{MS}{(MS - cr)}}$$

$$\mu = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} (MS - cr), \quad \omega_0^2 = \frac{1}{Lc}, \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$$

получим для x дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \lambda \sin \tau + \mu (1 - x^2) \dot{x} \quad (41)$$

А. Область, достаточно далекая от резонанса. Мы можем сейчас же применить результаты § 1, полагая

$$f(x, \dot{x}) = (1 - x^2) \dot{x}$$

¹ Например, для теории вибрационного гальванометра (приближенная теория имеется у Аппельтона [12]).

² Формулы предыдущих параграфов годятся для всяких характеристик, изображаемых аналитическими функциями. Например, можно было бы взять вместо кубической параболы характеристику в виде arcustangens'a (см. [13]).

³ Верхнее напряжение, соответствующее в нашей кубической характеристике максимуму анодного тока; в случае аппроксимирования реальной характеристики кубической параболой следует считать K несколько меньшим истинного напряжения насыщения.

Исходное решение, в непосредственной близости к которому устанавливается искомое периодическое решение, имеет вид:

$$x = \frac{\lambda}{\omega^2 - 1} \sin \tau$$

Если $\omega > 1$, т. е. если собственная частота ω_0 больше вынужденной частоты ω_1 , то разность фаз равна нулю; если $\omega < 1$, то разность фаз равна π . В этом отношении все происходит (в первом приближении) так же, как и при обычном линейном резонансе.

Устойчивость решения по § 2 зависит от знака

$$b = \pi \left\{ 2 - \frac{\lambda^2}{(\omega^2 - 1)^2} \right\} = \pi \{ 2 - R^2 \} \quad (42)$$

именно для устойчивости необходимо, чтобы $b < 0$.

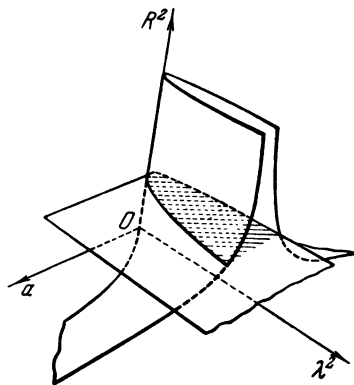
Чтобы уяснить себе положение вещей, построим трехмерную «резонансную поверхность», откладывая по трем взаимно перпендикулярным осям R^2 (квадрат амплитуды рассматриваемого решения), λ^2 (квадрат амплитуды внешней силы) и $a = \omega^2 - 1$ (расстройку) (фиг. 2).

Уравнение такой поверхности имеет вид:

$$R^2 = \frac{\lambda^2}{(\omega^2 - 1)^2}$$

Это обычная резонансная поверхность линейных колебательных систем. Граница устойчивости — новое по сравнению с обычными линейными системами — плоскость $R^2 = 2$. Эта плоскость пересекает резонансную поверхность по параболе

$$\lambda^2 = 2 (\omega^2 - 1)^2$$



Фиг. 2.

Только выше этой плоскости рассматриваемые периодические решения устойчивы, т. е., иначе говоря, мы имеем дело с «захватыванием». Автоколебания в системе не проявляются, они захвачены, увлечены внешней периодической силой. Ниже этой плоскости рассматриваемые решения неустойчивы, устойчивыми стационарными решениями будут квазипериодические решения¹, автоколебания будут себя проявлять.

В. Область резонанса. В этом случае мы должны воспользоваться формулами § 3 и 4.

Уравнения (31) получают в этом случае вид:

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{(P^2 + Q^2)}{4} - 1 \right\} + \lambda_0 - a_0 Q &= 0 \\ Q \left\{ 1 - \frac{(P^2 + Q^2)}{4} \right\} - a_0 P &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

¹ Квазипериодические движения, как уже упоминалось, в настоящей работе не рассматриваются, приближенную теорию можно найти у Ван дер Поля.

где

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \frac{1}{\omega_1 K} \frac{P_0}{(MS - cr)} \sqrt{\frac{MS}{(MS - cr)}} \\ a_0 &= \frac{\omega_0^2 - \omega_1^2}{\omega_1 \omega_0^2 (MS - cr)} \approx \frac{2(\omega_0 - \omega_1)}{\omega_0^2 (MS - cr)}\end{aligned}\quad (44)$$

Полагая

$$P = R \sin \varphi, \quad Q = R \cos \varphi$$

найдем для амплитуды R и фазы φ того исходного периодического решения, в непосредственной близости к которому устанавливается рассматриваемое периодическое решение, следующие уравнения¹:

$$a_0^2 R^2 + R^2 \left(1 - \frac{R^2}{4}\right) = \lambda_0^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{a_0} \left(1 - \frac{R^2}{4}\right) \quad (45)$$

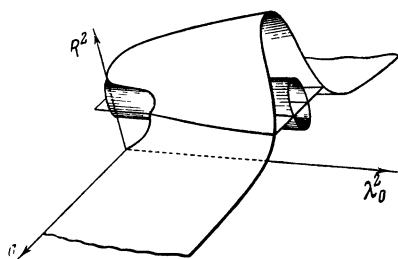
Первая формула дает «резонансную поверхность» для амплитуды; вторая формула — «резонансную поверхность» для фазы. Однако не все такие решения устойчивы. По (38) условия устойчивости имеют вид:

$$b < 0, \quad \Delta > 0$$

причем по (37), (35) и (36)

$$b = \pi(2 - R^2), \quad \Delta = \pi^2 \left(\frac{3}{16} R^4 - R^2 + 1 + a_0^2\right) \quad (46)$$

На фиг. 3 изображена резонансная поверхность амплитуд в координатах R^2 , λ_0^2 , a_0 . Часть этой поверхности, соответствующая устойчивым



Фиг. 3.

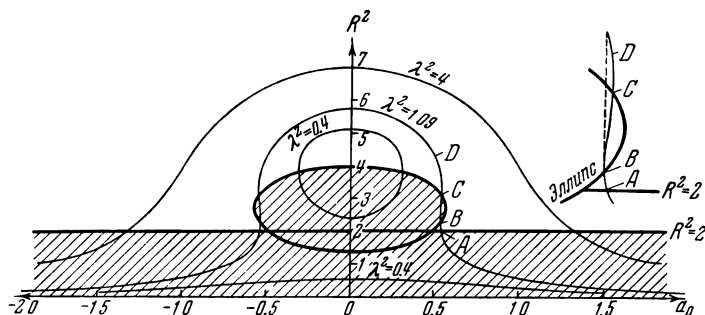
периодическим решениям, лежит выше плоскости $b = 0$ и вне эллиптического цилиндра $\Delta = 0$. Периодические решения, соответствующие нижней части, неустойчивы; для тех значений параметров, которым соответствуют неустойчивые периодические решения, устойчивыми стационарными решениями являются, вообще говоря, квазипериодические решения с двумя периодами, которых мы в этой работе не будем касаться². На

фиг. 4 приведены сечения этой резонансной поверхности с плоскостями $\lambda_0 = \text{const}$; здесь, очевидно, устойчивыми являются те части резонанс-

¹ Легко видеть, что при $\lambda = 0$, $a_0 = 0$ мы имеем $R^2 = 4$. Это амплитуда автоколебаний в нашем генераторе, или, иначе говоря, амплитуда предельного цикла (см. [14]).

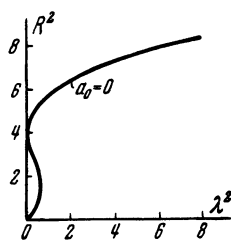
² Следует отметить, что для $1 < \lambda_0^2 < 32/27$ резонансная поверхность имеет, кроме устойчивой верхней части, еще небольшие устойчивые куски, расположенные между эллиптическим цилиндром устойчивости и плоскостью $R^2 = 2$ (отрезок на фиг. 4 и добавочном чертеже вверху). В этих местах возможны одновременно два устойчивых периодических движения, из которых устанавливается то или другое в зависимости от начальных условий или от истории системы в случае адиабатического изменения параметров. Исследование такой зависимости, принадлежащее к кругу вопросов «устойчивости в большом», выходит из рамок настоящей работы.

ных кривых, которые лежат выше прямой $b = 0$ и вне эллипса $\Delta = 0$. На фиг. 5 приведено сечение этой же поверхности с плоскостью $a_0 = 0$ ¹.

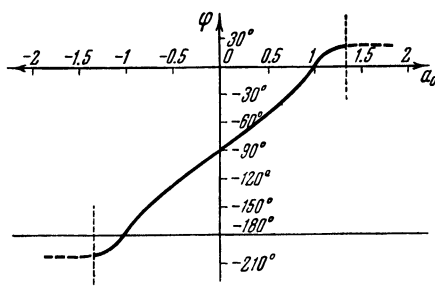


Фиг. 4.

На фиг. 6 дано сечение резонансной поверхности для фазы плоскостью $\lambda_0 = \text{const}$. Неустойчивые части фазовой кривой обозначены пунк-



Фиг. 5.



Фиг. 6.

тиром. В заключение выпишем формулы для вычисления a_0 , соответствующего ширине захватывания для рассматриваемого случая:

- 1) $\lambda_0 < \frac{32}{27}$; a_0 является общим корнем уравнений²

$$a_0^2 R^2 + R^2 \left(1 - \frac{R^2}{4}\right)^2 = \lambda_0^2, \quad \frac{3}{16} R^4 - R^2 + 1 + a_0^2 = 0$$

- 2) $\lambda_0 > \frac{32}{27}$, $a_0 = \pm \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{2}}$

Сама ширина захватывания $\Delta\omega$, отсчитанная от одной границы захватывания до другой³, выражается через a_0 следующим образом:

$$\Delta\omega = a_0 \omega_0^2 (MS - Cr)$$

¹ Заметим, что a_0 относилось к половинной ширине.

² Этот общий корень соответствует наибольшему из трех действительных значений для R^2 , которое дает эти уравнения.

³ В случае точного резонанса ($a_0 = 0$) и для достаточно больших λ_0 ($R \gg 1$) амплитуда устойчивого периодического решения, как нетрудно видеть по (45), дается формулой $R^2 = 4\lambda_0$ или в обычных единицах

$$(V_g)^3 = \frac{4P_0 K^2}{\omega_0 MS}$$

Можно дать простые формулы для вычисления ширины захватывания в следующих случаях:

а) для случая очень слабых сигналов ($\lambda_0^2 \ll 1$)

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 P_0}{V_g^0} \quad (47)$$

б) для случая очень сильных сигналов

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 P_0}{V_g^0} \sqrt{2}$$

где V_g^0 — амплитуда сеточного напряжения при отсутствии внешней силы (амплитуда предельного цикла), как уже было указано, равна

$$2K \sqrt{\frac{MS - Cr}{MS}}.$$

В заключение приносим самую искреннюю благодарность проф. Л. И. Мандельштаму за ценные указания.

ВЭИ

ЛИТЕРАТУРА

1. Appleton E. The automatic synchronization of triode oscillators.—Proc. Cambridge Philos. Soc., 1922, vol. 21, pt 3, p. 231—248.
2. Pol van der B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance.—Philos. Mag., ser. 7, 1927, vol. 3, № 13, p. 65—80
3. Ollendorf F. Erzwungene Schwingungen in angefachten Systemen.—Arch. Elektrotechnik, 1926, Bd 16, H. 4, S. 280—288.
4. Andronow A. und Witt A. Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol.—Atch. Elektrotechnik, 1930, Bd 24, H. 1, S. 99—110 (Андронов А. и Витт А. К теории захватывания Ван дер Поля) (см. стр. 65 настоящего изд.).
5. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Т. 2, М., АН СССР, 1947. О явлениях резонанса n -го рода, с. 13—16.
6. Koga J. New frequency transformer or frequency changer.—Proc. J. R. E., 1927, vol. 15, N 8, p. 669—678.
7. Андронов А. и Витт А. О почти периодических движениях.—Журн. прикл. физики, 1930, т. 6, вып. 1, с. 119—122 (см. стр. 61 настоящего изд.).
8. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I. Paris, 1892, p. 89.
9. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, XII + 251 с.
10. Trefftz E. Zu den grundlagen der Schwingungsteorie.—Math. Ann., 1926, Bd 95, S. 307—312.
11. Poincaré H. Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique.—Acta math., 1890, vol. 13, p. 94.
12. Appleton E. On the anomalous behaviour of a vibration galvanometer.—Philos. Mag., ser. 6, 1924, vol. 47, March, p. 609—619.
13. Joos G. Theorie des Elektronenröhrengenerators. Ann. Physik, 1922, Bd., N 23—24, S. 505—547.
14. Andronow A. Les cycles limites de Poincare te la théorie des oscillations auto-entretenues.—C. r. Acad. sci. Paris, 1929, vol. 189, N 15, p. 559—561 (Андронов А. Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний, см. стр. 55 настоящего изд.).

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ АВТОКОЛЕБАНИЙ¹

§ 1. Простейшая консервативная система. — § 2. Простейшая автоколебательная система. — § 3. Случай многих уравнений первого порядка. — § 4. Устойчивость по Ляпунову. — § 5. Простейшая автоколебательная система под действием внешней силы.

Мой доклад будет посвящен математическим задачам теории нелинейных колебаний, выдвигаемым радиотехникой.

Мне придется сначала в нескольких словах повторить кое-что из доклада Л. И. Мандельштама².

По отношению к нелинейным задачам линейные проблемы представляют собой дико частный случай. Многообразие явлений, которые здесь могут иметь место, неизмеримо больше того, которое наблюдается в линейных системах. Отсюда ясно, что среди этих явлений нелинейного характера могут найтись такие, которые окажутся для целей техники гораздо более выгодными, чем те, которые сейчас употребляются. Примером такого нелинейного явления может служить так называемый «резонанс второго рода», использованный Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси для целей радиоприема. Повидимому, с этим нелинейным приемным устройством, по крайней мере для некоторых технических целей, не могут конкурировать устройства, основанные на обычном резонансе.

Но не следует думать, что необходимость рассмотрения нелинейных систем связана с новейшими открытиями в радиотехнике. Значительнейшая часть существующих радиотехнических устройств также основана на нелинейности. Как известно, даже теория простейшего передатчика принципиально не может быть сведена к исследованию линейного дифференциального уравнения и требует изучения нелинейного уравнения.

Однако радиотехники, за исключением очень немногих, в первую очередь Ван дер Поля (Van der Pol), стремились как бы «не замечать» нелинейности, рассматривать нелинейные системы как линейные (при помощи линейных дифференциальных уравнений, векторных диаграмм и т. д.) и лишь затем вносить «поправки», учитывающие нелинейность.

¹ Этот доклад прочитан А. А. Андроновым на Всесоюзной конференции по колебаниям в 1933 г. Опубликовано в кн.: I. Всесоюзная конференция по колебаниям. М—Л. ГТТИ, 1933, с. 32.

² Л. И. Мандельштам [1]

На таком «полулинейном» языке написано большинство современных курсов по радиотехнике. В докладе Л. И. Мандельштама было выяснено, что такой способ рассмотрения, несмотря на ряд ценных достижений, не адекватен исследуемым процессам и иногда приводит к ошибкам, не говоря уже о том, что он почти не способен идти впереди эксперимента, предсказывать качественно новые явления.

Таким образом, положение в теоретической радиотехнике (я здесь не касаюсь вопросов распространения) может быть коротко сформулировано так: *необходимо произвести реконструкцию существующего математического аппарата, необходимо отыскать аппарат, который был бы адекватен отображаемым процессам и который был бы, кроме того, достаточно эффективен*, т. е. который давал бы ответы на вопросы, выдвигаемые физикой и техникой, не требуя непосильной затраты труда.

Настоящий доклад имеет целью познакомить конференцию с сущностью математических задач, которые выдвигаются этим требованием реконструкции, бегло изложить первые шаги, сделанные в этом направлении, и наметить стоящие здесь очередные задачи.

Математические задачи, связанные с проблемами нелинейных колебаний, с нелинейными дифференциальными уравнениями, несравненно более сложны и менее разработаны, чем те задачи, которые возникают в теории линейных уравнений. Поэтому здесь помощь математиков, работа математиков представляется особенно существенной.

Мне кажется, что эти проблемы и для математики являются чрезвычайно интересными, так как многие задачи, которые ставит радиотехника (например, проблема отыскания периодических и квазипериодических движений, проблема классификации движений, проблема устойчивости и т. д.), являются как раз такими проблемами, которые возникают в математике, в теории дифференциальных уравнений, в силу внутренней математической необходимости. Возможно даже, что дальнейшее развитие как количественной, так и качественной теории дифференциальных уравнений будет в высокой мере стимулировано теоретической радиотехникой, к которой тогда перейдет почетная роль «толкача», «задавателя вопросов», которую играла в течение свыше 200 лет небесная механика.

Отсюда уже видно, что математические проблемы, выдвигаемые радиотехникой, — тонкие математические проблемы. Это проблемы теории нелинейных дифференциальных уравнений, связанные с теорией рядов, с топологией, со специальными отделами теории линейных уравнений, с теорией почти периодических функций и т. д. К этим вещам следует подходить во всеоружии современной математики. Я бы мог привести несколько заведомо ошибочных, упрощающих действительное положение дела, результатов, относящихся к этой области [например, некоторые результаты Черри (Cherry), опубликованные в Transactions of Cambridge Philosophical Society за 1924—1925 гг.]. Таким образом, здесь имеется опасность некоторого «упрощенства», «вульгаризации», которая является

еще одним веским аргументом за совместную работу математиков и физиков в этой области.

Я начну с выяснения математического лица, математической природы тех объектов, с которыми нам придется иметь дело. Нужно ясно себе представить, что это не только нелинейные задачи, но еще и неконсервативные, негамильтоновы задачи. Это отличие консервативных систем от неконсервативных, так как оно в известной мере определяет математический подход к нашим проблемам, я постараюсь показать возможно резче, дополнив то, что сказал по этому поводу Л. И. Мандельштам.

Необходимое сравнение я приведу на простейшем примере системы с одной степенью свободы. Одновременно мне придется объяснить некоторые термины, дать некоторые определения, необходимые для дальнейшего.

§ 1. Простейшая консервативная система

Я рассмотрю сперва простейшую консервативную систему — материальную точку,двигающуюся по прямой под действием силы, зависящей только от расстояния.

Предполагая, что масса равна единице, имеем уравнение движения в виде:

$$\ddot{x} = f(x) \quad (1)$$

Это весьма элементарное уравнение. Оно имеет первый интеграл. Этот интеграл, интеграл энергии, очевидно, может быть записан так:

$$\frac{x^2}{2} + V(x) = h \quad (2)$$

где $V(x)$ — потенциальная энергия рассматриваемой системы; h — константа интегрирования, так называемая константа энергии.

Если бы мы обозначили $2[h - V(x)]$ через $\Phi(x)$ и стали бы исследовать движение, определяемое уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\Phi(x)} \quad (3)$$

в зависимости от свойств $\Phi(x)$, мы пошли бы по пути знаменитого мемуара Вейерштрасса (Weierstrass), который теперь вошел в учебники. Мы будем действовать, следуя Пуанкаре (Poincaré), применяя те приемы, которые позволяют единообразно рассмотреть консервативную и неконсервативную системы. Обозначая скорость $\dot{x}$ через y , мы можем сказать, что движение нашей системы управляется двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = f(x) \quad (4)$$

Следуя Пуанкаре, будем исследовать наше движение в так называемой фазовой плоскости xu . Фазовая плоскость с нарисованными на ней интегральными кривыми дает замечательный портрет рассматриваемой системы, дает возможность сразу, одним взглядом, охватить всю совокупность движений, могущих возникнуть при всевозможных начальных условиях.

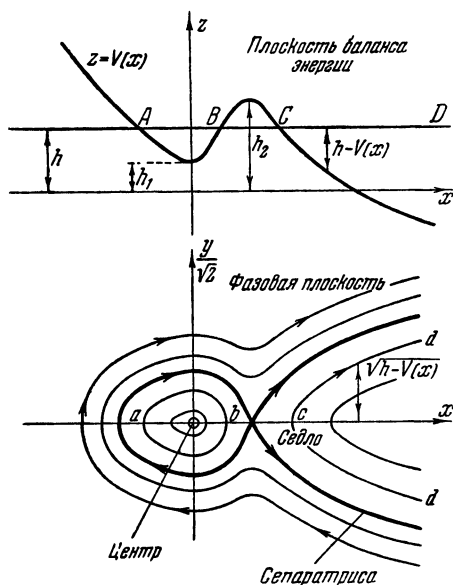
В нашем случае, если мы знаем $f(x)$ или, что то же, $V(x)$, построение этой фазовой плоскости чрезвычайно элементарно, так как можно воспользоваться интегралом энергии

$$\frac{1}{2} y^2 = h - V(x) \quad (2a)$$

Для нашей цели сравнения существенно, что фазовую плоскость можно построить, следуя Пуанкаре, и для неконсервативных систем, когда отсутствует интеграл энергии.

Чтобы дать представление о том, что такое консервативная система, рассмотрим какой-нибудь частный случай $V(x)$. Чтобы облегчить построение кривых на фазовой плоскости, я буду рассматривать одновременно с ней некоторую вспомогательную плоскость — плоскость баланса энергии (фиг. 1). Я изображу на этой вспомогательной плоскости zx кривую

$z = V(x)$. Такая кривая, соответствующая определенному частному случаю, изображена на фиг. 1. Я использую этот, как говорят в Москве, аналитический ландшафт, эту кривую, чтобы перейти к другому аналитическому ландшафту — к семейству кривых на фазовой плоскости, которые будут соответствовать одному и тому же $V(x)$, но разным h . Построения будут очень простые. Если я задам h , то это значит, что на плоскости баланса энергии задана прямая $z = h$. Чтобы получить соответствующую интегральную кривую на фазовой плоскости, которую для удобства будем рисовать как раз под диаграммой баланса энергии, нужно последовательно извлекать из разностей $h - V(x)$ квадратные корни и откладывать их на фазовой плоскости вниз и



Фиг. 1.

вверх от оси x (для простоты построения мы примем для фазовой плоскости несколько иной масштаб вдоль оси ординат, откладывая по ординатам не y , а $y/\sqrt{2}$). Если я замечу, что в силу уравнений (4) мои кривые на фазовой плоскости пересекают ось x вертикально, если только они не пересекают ее в особой точке, т. е. в точке, где одновременно $dx/dt = 0$ и $dy/dt = 0$, то я могу быстро указать вид соответствующих интегральных кривых на фазовой плоскости. Например, для участка AB на диаграмме zx я получу на фазовой плоскости замкнутую ветвь интегральной кривой, для участка CD — ветвь кривой, уходящую в бесконечность. Я могу быстро покрыть всю фазовую плоскость интегральными кривыми, давая различные значения константе энергии h .

При $h = h_1$, т. е. когда прямая $z = h_1$ касается минимума кривой $z = V(x)$, я получу особенность — замкнутая ветвь кривой обратится в точку. Нетрудно видеть, что эта точка является особой в том смысле, о котором уже шла речь. По терминологии Пуанкаре такая изолированная точка, окруженная замкнутыми интегральными кривыми, носит название *особой точки типа центра*.

При $h = h_2$, т. е. когда прямая $z = h_2$ касается максимума кривой $z = V(x)$, мы будем иметь другую особенность — *интегральную кривую, которая самопересекается*. Нетрудно видеть, что точка самопересечения — тоже особая точка; по терминологии Пуанкаре — это *особая точка типа седла*. Сама самопересекающаяся кривая носит название *сепаратрисы*. Такая сепаратриса подразделяет в данном случае фазовую плоскость на части, в которых имеются интегральные кривые определенного топологического типа. Аналогичные вещи имеют место и в более общем случае консервативной системы. Вообще в некотором условном смысле можно сказать, что для консервативной системы сепаратрисы и особые точки типа центра служат тем скелетом, который определяет топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые.

Если взять фазовую плоскость, изображенную на фиг. 2, и постараться дать себе отчет [при помощи уравнений (4)], как будет двигаться изображающая точка, помещенная в то или иное начальное положение, то нетрудно убедиться, что особые точки соответствуют состояниям равновесия, замкнутые интегральные кривые — периодическим движениям, что сепаратриса отображает четыре различных движения и в сущности разбивается на четыре отдельные траектории и т. д.

На этом примере я постараюсь показать характерные особенности консервативной системы. Я не задаюсь целью перечислить все такие особенности, речь будет идти лишь о некоторых, наиболее важных для нашей цели.

Первой, основной, такой особенностью, с которой в сущности связаны все остальные, является то, что система уравнений (4) может быть записана в виде *гамильтоновой системы*, а именно:

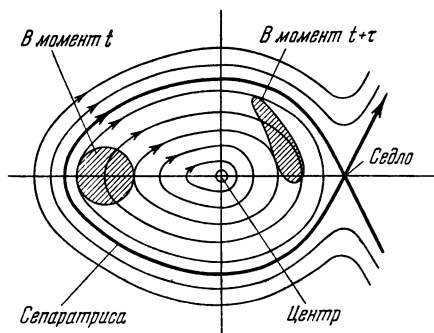
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

где гамильтонова функция $H = p^2/2m + V(x)$, а импульс $p = m\dot{x}$.

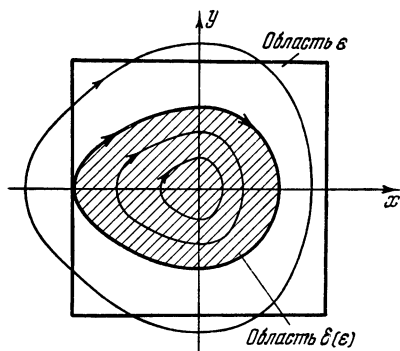
Как известно гамильтоновы системы являются чрезвычайно специальным типом дифференциальных уравнений. Этот тип получается при решении вариационных задач; соответствующие механические, электрические и т. д. проблемы могут быть сформулированы в виде вариационных проблем.

Гамильтоновость системы уравнений (4) сразу позволяет сделать высказывание относительно справедливости для нашей системы так называемой теоремы Лиувилля (Liouville). Эта теорема хорошо известна физикам, так как она находит себе применение в статистической механике. Я скажу

коротко, в чем здесь дело. Если мы возьмем в нашем примере кусочек фазовой плоскости, наделим его изображающими точками и будем следить за таким кусочком, за такой «колонией бактерий», то окажется, что он будет двигаться, не изменяя своей площади (фиг. 2). В более общем случае остается инвариантной не сама площадь, а несколько более сложный интеграл — так называемый «интегральный инвариант». Это свойство консервативных систем использовано Пуанкаре и другими для решения некоторых вопросов устойчивости в случае нескольких степеней



Фиг. 2.



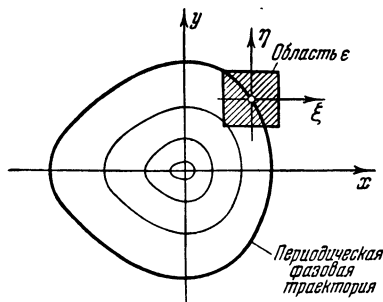
Фиг. 3.

свободы. Для консервативных систем с одной степенью свободы с этим свойством связано прежде всего то обстоятельство, что для них на фазовой плоскости не может быть особых точек такого характера, как фокус или узел, или такого периодического решения, как предельный цикл, — образований, которые «стягивают» изображающие точки.

Второй особенностью, на которую уже обращал внимание Л. И. Мандельштам, является, как это можно видеть хотя бы на разобранном примере, то обстоятельство, что периодические решения не являются изолированными и непрерывно заполняют целые области. Каждая замкнутая кривая соответствует определенному h , определенной энергии и, вообще говоря, определенному периоду, который меняется вместе с энергией. В отношении периода, как известно, могут быть исключения. Например, для простого осциллятора период не зависит от энергии. Однако с точки зрения дифференциальных уравнений этот случай гармонического осциллятора, на котором воспитывалась как классическая теория дисперсии и абсорбции, так и теория квантов Планка (Planck), является случаем совершенно исключительным. Вообще говоря, консервативная система при изменении энергии меняет частоту. Период и «амплитуда» не даются системой, а даются начальными условиями.

Третья особенность — это неустойчивость в смысле Ляпунова периодического движения консервативной системы. Остановимся на вопросе об устойчивости по Ляпунову несколько более подробно, чем это нужно для данного вопроса.

Начнем с устойчивости состояния равновесия. Обычно говорят так: состояние равновесия устойчиво, если достаточно малое возмущение всегда остается малым. Более точное математическое определение — мы его дадим применительно к фазовой плоскости — звучит так. Если можно, задав вокруг состояния равновесия любую сколь угодно малую область ε , найти такую область $\delta(\varepsilon)$, что помещенная в область $\delta(\varepsilon)$ изображающая точка *никогда* не выйдет из области ε , то состояние равновесия является устойчивым, если такой области $\delta(\varepsilon)$ отыскать нельзя, — неустойчивым (фиг. 3). Это старое, известное еще со времени Лежен-Дирихле (Lejeune-Dirichlet) определение устойчивости равновесия. Как обстоит дело с устойчивостью движения? Здесь есть много различных определений, о некоторых из них еще придется говорить потом. Сейчас я буду говорить только об устойчивости движения в смысле Ляпунова¹. Как говорит Адамар (Hadamard), определение, данное Ляпуновым, является единственным определением устойчивости движения, вполне аналогичным обычному определению устойчивости равновесия.



Фиг. 4.

Пусть, например, мы исследуем устойчивость периодического движения. Это движение может быть представлено при помощи изображающей точки, двигающейся на фазовой плоскости по замкнутой кривой. Возьмем движущуюся систему координат ξ, η (фиг. 4), начало которой совпадает с этой изображающей точкой, а оси которой все время остаются параллельными осям x, y . Если при заданной сколь угодно малой области ε на плоскости $\xi\eta$, охватывающей начало нашей подвижной системы, мы можем найти такую область $\delta(\varepsilon)$, что изображающая точка с начальными условиями, заданными в области $\delta(\varepsilon)$, никогда не выйдет из области ε , то рассматриваемое движение устойчиво по Ляпунову. Коротко это можно сформулировать так: движение устойчиво, если при достаточно малом возмущении «возмущенная» изображающая точка всегда останется достаточно близкой от «невозмущенной» изображающей точки.

Нетрудно видеть, что если период зависит от начальных условий, то периодическое движение неустойчиво по Ляпунову. Действительно, так как в этом случае движение по исходной кривой и по соседней, даже сколь угодно близкой, имеет разный период, то с каждым оборотом изображающие точки будут все больше и больше расходиться. Наступит момент, когда они будут противоположны, затем будут опять сближаться. Движение неустойчиво по Ляпунову, так как выбором начальной близости их нельзя заставить оставаться на расстоянии, меньшем заданного.

¹ Следуя самому Ляпунову, правильнее говорить об устойчивости рассматриваемых координат системы, в данном случае x и y .

Переходим к *четвертой особенности* консервативной системы. Эта особенность касается устойчивости периодического решения при малом изменении вида дифференциального уравнения, т. е., иначе, устойчивости периодического движения при малых изменениях того физического аппарата, движение которого мы исследуем.

Можно показать, что периодические решения консервативных систем неустойчивы в только что указанном смысле; малейшее изменение вида дифференциального уравнения, как правило, меняет всю картину на фазовой плоскости. Как правило, замкнутые решения исчезают, превращаясь в спирали. Такая трансформация не должна особенно удивлять: ведь не следует забывать, что при этом, как правило, уравнения перестают быть консервативными.

Нетрудно видеть, насколько физически важна такая устойчивость, так как мы никогда не можем быть уверены, что мы учли все при написании дифференциального уравнения и что наша физическая система совершенно не меняется во время движения. Нетрудно видеть, как «опасно» пользоваться такими уравнениями, решения которых чрезвычайно существенным образом зависят от малых изменений этих уравнений, сколь большие требования такие уравнения предъявляют к идеализации соответствующих физических объектов. Когда я буду говорить о неконсервативной системе, я скажу более точно, в каком смысле периодическое движение, возникающее в таких системах и отображаемое на фазовой плоскости предельным циклом, устойчиво по отношению к малому изменению дифференциального уравнения.

Пятая особенность гамильтоновых систем — на ней мы закончим наш далеко не полный перечень — связана с поведением системы при изменении параметра. В известном смысле это частный случай предыдущей задачи, так как менять параметр — это значит менять вид дифференциального уравнения. Однако сейчас нас будут интересовать существенно иные вещи: во-первых, мы будем сейчас говорить только о таких изменениях параметра, которые сохраняют консервативность системы; во-вторых, мы не будем ограничиваться малыми изменениями параметра.

Пусть у нас есть физическая система, движение которой мы изучаем, и пусть движение этой системы зависит от какого-нибудь параметра λ , могущего принимать те или другие фиксированные значения. Этим параметром может быть, например, жесткость пружины, коэффициент взаимной индукции и т. д.

Мы будем изучать характер изменения совокупности возможных движений, характер изменения фазовой плоскости при изменении параметра и установим те особенности, которые здесь присущи консервативной системе.

С этим вопросом о характере фазовой плоскости при различных фиксированных значениях параметра тесно связан другой вопрос. Пусть мы имеем для какого-нибудь заданного значения параметра определенное движение, пусть изображающая точка описывает у нас определенную траекторию на фазовой плоскости. Начнем затем изменять, например

увеличивать, параметр; будем так делать некоторое время, а затем закрепим его на новом постоянном значении. Фазовая плоскость в конце процесса у нас другая, чем в начале процесса. Как ответить на вопрос о том, по какой из новых интегральных кривых движется теперь изображающая точка?

Очевидно, что в общем случае на этот вопрос нельзя ответить, не зная того, как мы меняли параметр, не зная решений соответствующих неавтономных уравнений. Однако физикам хорошо известно, что для достаточно медленных изменений параметра такой ответ, не зависящий от истории изменения параметра, в некоторых случаях дать возможно и что этот ответ дает теория адиабатических инвариантов Эренфеста. Мы увидим потом, насколько такая постановка задачи отличается от той, которая имеет место для этого же случая достаточно медленных изменений в теории неконсервативных систем.

Перейдем к нашей задаче — к исследованию изменения вида фазовой плоскости консервативной системы при изменении параметра, причем для простоты предположим, что параметр входит лишь в потенциальную энергию.

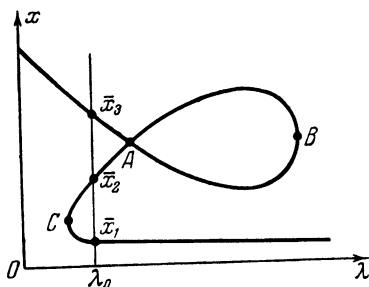
При изменении параметра интегральные кривые на фазовой плоскости будут меняться. Однако, если потенциальная энергия является аналитической функцией параметра, эти изменения будут совершаться непрерывно. Общий вид интегральных кривых будет претерпевать, вообще говоря, количественные изменения, и лишь при некоторых особых, так называемых *бифуркационных*, значениях параметра мы будем иметь качественные изменения характера интегральных кривых. Как нам уже известно, в случае консервативной системы основными элементами, определяющими качественную картину интегральных кривых на фазовой плоскости, являются сепаратрисы и особые точки. Поэтому бифуркационными значениями параметра в этом случае служат те значения параметра, при которых происходит изменение числа или характера этих основных элементов. Более точно и более обще, не связываясь с консервативностью, можно дать такое определение: значение параметра $\lambda = \lambda_0$ мы назовем *обыкновенным*, если существует такое конечное $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, что для всех λ , удовлетворяющих неравенству $(\lambda - \lambda_0) < \varepsilon$, мы имеем одну и ту же топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые. Всякое другое значение параметра мы назовем *бифуркационным*.

Понятие о бифуркационных значениях параметра в несколько менее широком понимании было введено все тем же неистощимым Пуанкаре в связи с его знаменитыми работами о фигурах равновесия небесных тел. Там же было им введено и другое весьма существенное понятие — о так называемой «смене устойчивостей» (*échange des stabilités*).

Чтобы показать, в чем здесь дело, проще всего повторить рассуждения самого Пуанкаре. Пусть у нас имеется простейшая консервативная система и пусть ее потенциальная энергия зависит от некоторого параметра λ . Для положений равновесия сила равна нулю, т. е.

$$f(x, \lambda) = 0 \quad (6)$$

Это уравнение следует решить относительно x , чтобы найти положения равновесия. Каждому значению λ соответствует одно или несколько положений равновесия. Если мы будем менять λ , начиная от некоторого начального значения $\lambda = \lambda_0$, для которого у нас имелось s различных положений равновесия $x = \bar{x}_1, x = \bar{x}_2, \dots, x = \bar{x}_s$, то координаты этих положений равновесия будут непрерывно также меняться, причем вблизи $\lambda = \lambda_0$ мы будем иметь по терминологии Пуанкаре s «линейных рядов» положений равновесия. Зависимость положений равновесия от параметра может быть



Фиг. 5.

наглядно иллюстрирована графически на плоскости $x\lambda$ при помощи построения кривой $f(x, \lambda) = 0$ (фиг. 5). Каждому из линейных рядов соответствует одна из ветвей этой кривой. Если прямая $\lambda = \lambda_0$, параллельная оси x , встречает три ветви кривой, то это значит, что в этом случае у нас имеются три положения равновесия. Каждому положению равновесия на фазовой плоскости соответствует определенное состояние равновесия, определенная особая точка.

Нетрудно видеть, что характер особых точек, или, что все равно, устойчивость положений равновесия, определяется знаком

$$f'_x(\bar{x}, \lambda) = -V''_{xx}(\bar{x}, \lambda)$$

так как особая точка типа центра соответствует минимуму [потенциальной энергии, а типа седла — максимуму.

Дифференцируя уравнение (6), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$$

или

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = - \frac{f'_\lambda(\bar{x}, \lambda)}{f'_x(\bar{x}, \lambda)}$$

Для каждого линейного ряда получается единственное значение для $d\bar{x}/d\lambda$. Таким образом определяется последовательность положений равновесия, принадлежащих к этому ряду. Различные ряды положений равновесия остаются различными до тех пор, пока $f'_x(\bar{x}, \lambda)$ не обратится в нуль. Если $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$ и одновременно $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) = 0$, то, как нетрудно видеть, мы имеем дело с пересечением линейных рядов (точка A); если $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, а $f'_\lambda(\bar{x}, \lambda) \neq 0$, то мы имеем дело с так называемым случаем вертикальной касательной, когда два линейных ряда сливаются (например, точка B). Отсюда ясно, что значение параметра, для которого $f'_x(\bar{x}, \lambda) = 0$, — это бифуркационное значение параметра, так как для него изменяется число особых точек.

Обратим теперь внимание на следующее. Как только что было указано, знак $f'_x(\bar{x}, \lambda)$ определяет устойчивость положения равновесия, или,

иначе, характер особой точки. Если мы будем двигаться вдоль какого-нибудь линейного ряда на диаграмме $x\lambda$, то знак $f'_x(\bar{x}, \lambda)$ будет сохраняться до тех пор, пока мы не дойдем до точки бифуркации.

В этой точке, вообще говоря, знак $f'_x(\bar{x}, \lambda)$ у нас изменится; следовательно, изменится устойчивость.

Это и есть знаменитая «смена устойчивостей», которая имеет место в бифуркационных точках между двумя пересекающимися или сливающимися линейными рядами.

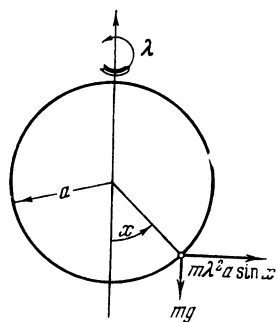
На этом я закончу изложение рассуждений Пуанкаре и не буду приводить элегантные диаграммы, которыми он иллюстрирует различные случаи, имеющие здесь место.

Итак, положение равновесия может изменить свою устойчивость, например из устойчивого сделаться неустойчивым, только предварительно слившись с другим положением равновесия. Эта характерная отличительная особенность консервативной системы, не имеющая места в общем случае.

Пуанкаре рассматривал в работе, о которой шла речь, только те бифуркационные значения, которые относятся к состояниям равновесия. Если интересоваться только состоянием равновесия, то это вполне правильно, так как в смысле смены устойчивостей состояния равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему, поведение которой при изменении параметра можно изучать отдельно. Но если интересоваться топологической структурой фазовой плоскости, то этого недостаточно, — сепаратрисы, о которых у нас уже шла речь, также зависят от параметра и могут быть такие значения параметра, которые являются бифуркационными по отношению к изменению сепаратрис, но не являются бифуркационными для особых точек.

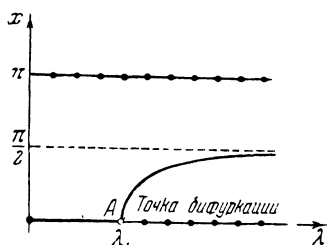
Закончим рассмотрение консервативных систем рассмотрением классического примера на теорию бифуркации. Наше изложение от обычного будет отличаться лишь тем, что мы будем изучать поведение не только состояний равновесия, но и всей фазовой плоскости.

Мы имеем круг, вращающийся вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью λ . По кругу скользит без трения материальная точка, положение которой определяется углом x (фиг. 6). Движение материальной точки происходит под действием трех сил: силы тяжести, центробежной силы и реакции круга. Я не буду приводить вычислений, которые несложны, а ограничусь лишь некоторыми пояснениями к фигурам. Выбирая за переменный параметр угловую скорость λ , я получу такую картину на диаграмме $x\lambda$ (фиг. 7). От $\lambda = 0$ до некоторого $\lambda = \lambda_2$ мы имеем два состояния равновесия (на диаграмме изображены только случаи $\lambda > 0$, $x > 0$, так как все симметрично относительно осей x и λ): одно устойчивое, другое неустойчивое (неустойчивое отмечено жирными

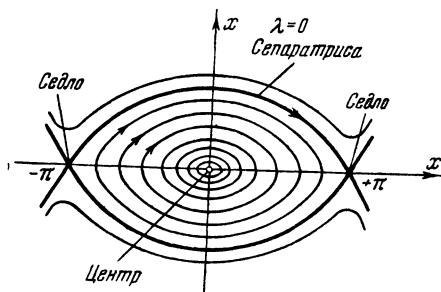


Фиг. 6.

точками). При значении параметра $\lambda = \lambda_1$ мы имеем бифуркационную точку. В этой точке «отпочковывается» новое устойчивое положение равновесия (точнее два новых, из-за симметрии), а старое становится неустойчивым. Далее, вплоть до $\lambda = \infty$, мы будем иметь четыре положения равновесия: два устойчивых и два неустойчивых.

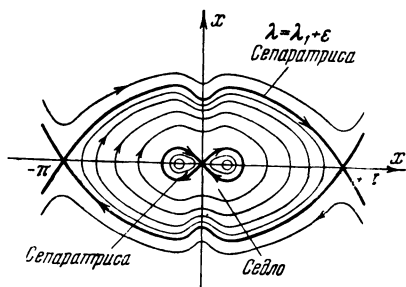


Фиг. 7.

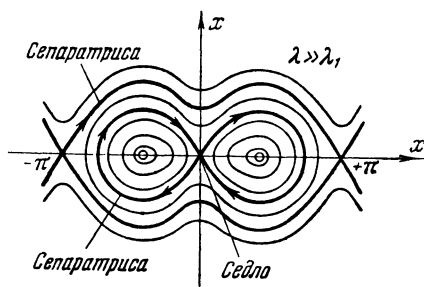


Фиг. 8.

Переходя к фазовой плоскости, увидим следующее. При $\lambda = 0$ получается хорошо известный случай физического маятника (фиг. 8). При увеличении λ эта картина качественно не меняется до $\lambda = \lambda_1$, когда у нас появляются две новые особые точки типа центра, а особая точка $x = 0$, $\dot{x} = 0$ изменяет свой характер, превращаясь из центра в седло (фиг. 9).



Фиг. 9.

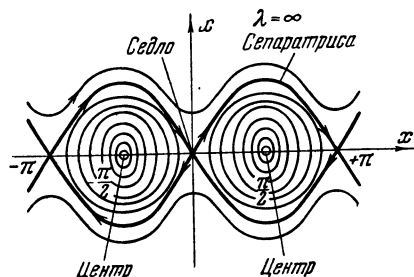


Фиг. 10.

При дальнейшем изменении λ изменения числа и характера особых точек не происходит. Однако следует обратить внимание (фиг. 10) на характер изменения внутренней сепаратрисы, которая ограничивает область периодических решений, охватывающих оба положения устойчивого равновесия, от периодических движений, охватывающих какое-нибудь одно состояние равновесия. Нетрудно видеть (фиг. 11), что $\lambda = \infty$ является бифуркационным значением параметра. Вместо двух сепаратрис у нас остается одна сепаратриса, причем особые точки не меняют своего характера. $\lambda = \infty$ не является бифуркационным значением параметра для особых точек, но мы его должны считать бифуркационным значением параметра в отношении изменения топологической структуры фазовой плоскости. Следует заметить, что в этом примере лишь условно можно говорить о фазовой плоскости. Фазовая плоскость в данном случае не дает,

как это было для случая движения по прямой, взаимно однозначного отображения многообразия состояний нашей системы. Такое взаимно однозначное отображение может быть получено при помощи цилиндра¹.

Это все, что я хотел сказать о консервативных системах. Для ясности я подчеркну еще раз их особенности. Эти особенности следующие: в периодических решениях «амплитуда» и период зависят от начальных условий, периодические движения неустойчивы по Ляпунову; имеет место теорема Лиувилля; периодическое решение неустойчиво по отношению к малому изменению дифференциального уравнения; особые точки меняют устойчивость лишь при совпадении; особые точки являются замкнутой системой, между членами которой происходит обмен устойчивости.



Фиг. 11

Перехожу к системам неконсервативным. Л. И. Мандельштам сказал о них достаточно. Я только остановлюсь, чтобы подчеркнуть некоторые особенности этих систем.

§ 2. Простейшая автоколебательная система

Физическая система несет с собой свое фазовое пространство. В рассмотренных нами случаях это фазовое пространство было либо плоскостью, либо поверхностью цилиндра. Мы ограничимся сейчас случаем, когда фазовое пространство рассматриваемой системы является евклидовой плоскостью. Это ограничение существенно для теории интегральных кривых. Например, законы сожительства предельных циклов и особых точек, о которых говорил Л. И. Мандельштам, имеют силу для фазовой плоскости и должны быть изменены, если мы имеем дело с двумерным фазовым пространством другой природы.

До сих пор мы говорили о консервативных системах, определяя их как системы, подчиняющиеся уравнениям Гамильтона. Можно дать более общее определение консервативной системы, исходя, например, из вида кривых на фазовой плоскости или из существования положительного интегрального инварианта.

Сейчас мы будем говорить о *существенно неконсервативных* системах, к которым следует отнести автоколебательные системы, оставив в стороне различные промежуточные случаи. Уравнения движения такой системы могут быть записаны так:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (7)$$

¹ Этот цилиндр легко получить, если разрезать ту фазовую плоскость, которой мы пользовались, по прямым $x = \pi$, $x = -\pi$ и свернуть среднюю часть в трубу таким образом, чтобы прямые $x = \pi$ и $x = -\pi$ совпали.

где x и y — некоторые переменные, характеризующие состояние системы, например ток и напряжение, а $P(x, y)$, $Q(x, y)$ определяются для радиотехнического случая типом схемы, ламповыми характеристиками и т. д. Сама по себе эта запись ничего нам не говорит о консервативности или неконсервативности системы. Существенно неконсервативные системы характеризуются тем, что для них фазовая плоскость может быть разделена на области таким образом, что траектории, исходящие из одной и той же области, ведут себя асимптотически (при $t \rightarrow \pm \infty$) одинаково. Заметим, что этим определением запрещаются области, сплошь заполненные замкнутыми траекториями.

Для существенно неконсервативных систем замкнутые траектории могут быть только изолированными.

Основными элементами, определяющими качественную картину протекания интегральных кривых на фазовой плоскости, здесь являются особые точки, сепаратрисы и предельные циклы. Они образуют тот «скелет» движений, который — по выражению Биркгофа — играет по отношению к свойствам рассматриваемой динамической системы роль, в некоторой мере аналогичную той, которую играют по отношению к свойствам аналитической функции ее особенности. С физической точки зрения особые точки — это состояние равновесия, предельные циклы — периодические движения; о физическом значении сепаратрисы мы скажем несколько слов потом, когда у нас будет идти речь о так называемой «устойчивости в большом» (im Grossen).

О качественном исследовании системы уравнений (7) уже говорил Л. И. Мандельштам. Я еще вернусь к этому немного, когда буду говорить о нерешенных задачах. Сейчас скажу я кое-что о количественном исследовании и об исследовании устойчивости. Чтобы отыскать особые точки или состояния равновесия, достаточно найти точку пересечения кривых $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$. Если мы имеем такую точку пересечения с координатами x_0, y_0 , то, полагая $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$ и отбрасывая члены высших порядков относительно ξ и η , мы получим систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\xi}{dt} = P'_x(x_0, y_0)\xi + P'_y(x_0, y_0)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = Q'_x(x_0, y_0)\xi + Q'_y(x_0, y_0)\eta \quad (8)$$

исследование которой, вообще говоря, дает ответ на вопрос о характере и об устойчивости особой точки. Именно, решение системы (8), как известно, имеет вид:

$$\xi = C_1 e^{h_1 t} + C_2 e^{h_2 t}, \quad \eta = C_1 \delta_1 e^{h_1 t} + C_2 \delta_2 e^{h_2 t}$$

причем для h получается простое квадратное уравнение. Если оба корня h имеют отрицательные действительные части, то рассматриваемое состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, если хотя бы один корень имеет положительную действительную часть, то — неустойчиво. Если оба корня имеют действительные части, равные нулю, то вопрос об устойчивости рассматриваемого состояния равновесия не может быть сведен к

исследованию линейной системы (8). Как отыскивать периодические решения? Это, особенно если говорить о количественной стороне дела, еще почти совсем не решенная задача. Мы имеем регулярный способ только для так называемого случая колебаний, близких к синусоидальным, для так называемого «случая малых μ ». Чтобы пояснить, в чем здесь дело (это нам понадобится для дальнейшего), рассмотрим такой пример:

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu f(x, y; \mu), \quad \frac{dy}{dt} = -x + \mu g(x, y; \mu) \quad (9)$$

где μ — действительный параметр, который мы можем предполагать достаточно малым¹. При $\mu = 0$ уравнения (9) имеют решение $x = R \cos t$, $y = -R \sin t$; на плоскости интегральные кривые образуют континуум вложенных друг в друга кругов. Пользуясь количественными методами Пуанкаре, нетрудно показать, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, на плоскости xy останутся, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к кругам, радиусы которых легко вычисляются. Пользуясь несколько нестрогой терминологией, можно сказать, что остальные кривые «превратятся» в спирали. Поправка к «исходному» периоду 2π и выражения для x и y получаются в виде рядов, расположенных по степеням μ и сходящихся для достаточно малого μ . Допустим теперь, что мы тем или иным путем нашли периодическое решение уравнений (7) с периодом² a :

$$x = \varphi\left(\frac{t}{a}\right), \quad y = \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (10)$$

Так как уравнения (7) не зависят явно от времени, то такие периодические решения не встречаются изолированно, а образуют семейство, зависящее от одного параметра. Именно, если (10) есть решение, то

$$x = \varphi\left(\frac{t}{a} + c\right), \quad y = \psi\left(\frac{t}{a} + c\right)$$

где c — произвольная константа, также является решением.

Чтобы решить вопрос об устойчивости по Ляпунову периодического решения, перейдем, как это мы однажды уже делали, к подвижной системе отсчета ξ, η , полагая

$$x = \varphi + \xi, \quad y = \psi + \eta$$

Если мы в полученных таким образом уравнениях отбросим нелинейные члены относительно ξ и η , то мы получим систему линейных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d\xi}{dt} = P'_x(\varphi, \psi)\xi + P'_y(\varphi, \psi)\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = Q'_x(\varphi, \psi)\xi + Q'_y(\varphi, \psi)\eta \quad (11)$$

¹ К системе уравнений (9) могут быть сведены при некоторых предположениях уравнения движения обычного лампового генератора.

² Здесь $f(t/a)$ — периодическая функция аргумента t с периодом a , периодическая функция аргумента t/a с периодом 1.

исследование которой, вообще говоря, дает ответ на вопрос об устойчивости по Ляпунову рассматриваемого движения (10). Общее решение такой системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, как известно [теорема Флоке (Floquet)], имеет вид:

$$\begin{aligned}\xi &= C_1 e^{h_1 t} f_{11}\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 e^{h_2 t} f_{12}\left(\frac{t}{a}\right) \\ \eta &= C_1 e^{h_1 t} f_{21}\left(\frac{t}{a}\right) + C_2 e^{h_2 t} f_{22}\left(\frac{t}{a}\right)\end{aligned}\quad (12)$$

где h_1 и h_2 — так называемые «характеристические экспонанты»; $f_{ij}(t/a)$ — периодические функции с периодом a .

Для h_1 и h_2 , точнее для $e^{h_1 a}$ и $e^{h_2 a}$, можно в общем случае получить квадратное уравнение, коэффициенты которого, правда, вычисляются с гораздо большим трудом, чем в случае системы (8).

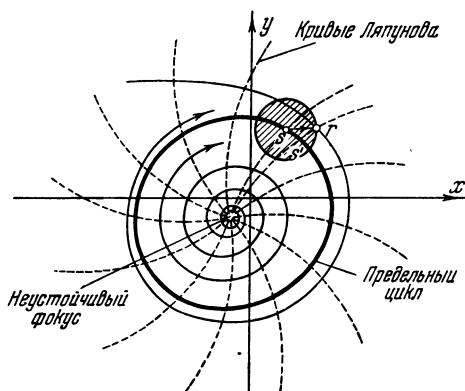
Однако в нашем случае дело обстоит гораздо проще. Можно показать — об этом у нас будет разговор в дальнейшем, — что, так как один характеристический экспонант равен нулю (в силу произвольности фазы), то достаточным условием устойчивости по Ляпунову рассматриваемого периодического движения является неравенство

$$h = \frac{1}{a} \int_0^a [P'_x(\varphi, \psi) + Q'_y(\varphi, \psi)] dt < 0 \quad (13)$$

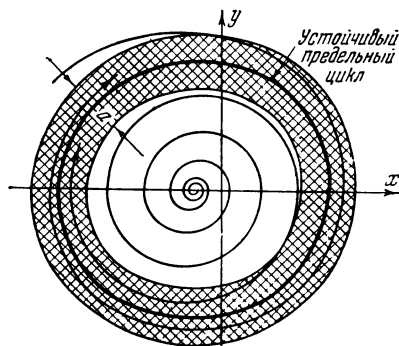
Периодическим решениям, для которых имеет место это неравенство, на фазовой плоскости соответствуют изолированные замкнутые кривые, к которым с внешней и внутренней стороны приближаются при возрастании t соседние решения по спиралям, т. е. устойчивые предельные циклы. Каждому предельному циклу соответствует семейство периодических решений, отличающихся друг от друга лишь по фазе. Предположим, что изображающая точка двигается по предельному циклу, для которого выполнено условие (13). Назовем движение, отображаемое этой точкой, движением S . В некоторый фиксированный момент времени $t = t_0$ она совпадает с определенной точкой s предельного цикла. Можно поставить вопрос о том, каковы те начальные условия $[x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)]$, для которых движение в пределе будет асимптотически приближаться именно к выбранному нами движению S . Ляпунов показал, что геометрическим местом таких начальных значений будет кривая, проходящая через точку s . Через каждую точку предельного цикла, вообще говоря, проходит одна такая «кривая Ляпунова», или, иначе, «кривая данной фазы» (фиг. 12). Если наша система испытает какое-нибудь малое возмущение, т. е. если ее начальные условия «мгновенно» изменятся на некоторый вектор sr (на плоскости xy), то наша система будет асимптотически приближаться к новому периодическому движению S' , отличающемуся от исходного лишь малым смещением по фазе. Это смещение по фазе определится той кривой Ляпунова, которая проходит через точку r . Мы можем сказать следующее. Если периодическое движение отобра-

жается предельным циклом, на который навертываются извне и изнутри интегральные кривые, то такое движение, вообще говоря, устойчиво по Ляпунову. Это следует иметь в виду при сравнении с консервативными системами.

Нетрудно доказать, что в случае существенно неконсервативной системы не имеет места ни теорема Лиувилля, ни ее обобщение, связанное



Фиг. 12.



Фиг. 13.

с так называемым положительным интегральным инвариантом. Действительно, выберем, например, молекулу конечного объема G вблизи устойчивого предельного цикла. Нетрудно видеть, что объем такой молекулы стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, так что нельзя надлежащим подбором конечной плотности $\rho(x, y) \{m^2 < \rho(x, y) < M^2\}$ сохранить неизменным интегральный инвариант

$$\int_G \rho(x, y) dx dy$$

Можно доказать, что предельный цикл устойчив по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений. Пусть вы имеете систему (7) и пусть для этой системы вы имеете на фазовой плоскости предельный цикл (фиг. 13). Накроем этот цикл малой полоской (кольцом) конечной ширины a . Устойчивость цикла по отношению к малым изменениям системы (7) заключается в следующем. Для заданного a всегда можно подобрать такое $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, что, изменяя правые части системы (7) внутри упомянутого кольца меньше, чем на ε [т. е., рассматривая вместо системы (7) любую новую систему

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ меньше ε внутри кольца], мы и для такой измененной системы будем иметь предельный цикл, лежащий внутри упомянутой кольцеобразной полоски. Я не знаю, кому принадлежит эта теорема, она имеется, например, в учебнике Бибербаха (Bieberbach).

Как ведет себя неконсервативная система при изменении параметра?

Когда у нас была консервативная система и мы говорили о достаточно медленном изменении параметра, о применении теории адиабатических инвариантов, то основной вопрос был таков: найти «начальные условия» в измененной системе, если мы их знаем в системе неизменной. Для неконсервативных систем такой вопрос в сущности не имеет смысла. Здесь всякое движение приближается к стационарному, и имеет смысл в отношении достаточно медленных изменений рассматривать только стационарные движения.

Пусть изображающая точка движется по данной стационарной и устойчивой траектории. Мы меняем параметр. Пока эта стационарная траектория существует и сохраняет устойчивость, изображающая точка остается на ней. Если она делается неустойчивой или исчезает, изображающая точка «срывается» и начинает двигаться так, как ей велят интегральные кривые.

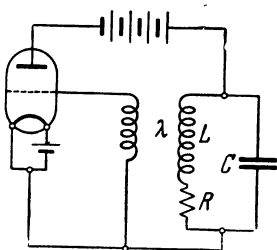
Как меняется при изменении параметра топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые? Какие моменты этого изменения характеризуют бифуркационные значения параметра? Я не могу на этом подробно останавливаться, я скажу только, что здесь ситуация значительно сложнее, чем для консервативной системы, так как здесь мы имеем уже три сорта основных элементов: особые точки, предельные циклы и сепаратрисы. Особые точки здесь уже не образуют замкнутой системы, здесь особая точка может изменить свою устойчивость без слияния с другой особой точкой.

В общем случае отыскание бифуркационных значений параметра здесь исключительно сложно; задача сводится к почти невыполнимому качественному исследованию целого семейства дифференциальных уравнений. Однако для случая колебаний, близких к синусоидальным, для так называемого случая малого μ , это исследование может быть сделано сравнительно просто. Оно может быть сведено к тем же в сущности формулам, какие я здесь приводил, когда говорил о зависимости состояний равновесия консервативной системы от параметра. Только вместо координат особых точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$ мы здесь будем иметь $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_s$ — квадраты амплитуд стационарных движений, — к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и особая точка $\bar{\xi} = 0$. Эти движения образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «смена устойчивостей».

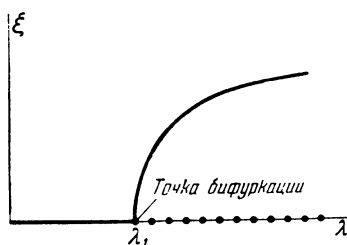
Я теперь постараюсь рассмотреть пару физических примеров на эти вещи, это пояснит значение теории бифуркации для теории автоколебаний, для теоретической радиотехники. Я попрежнему не буду выписывать формул, которые сравнительно просты для случая колебаний, близких к синусоидальным, а ограничусь лишь некоторыми пояснениями к чертежам.

Рассмотрим случай простейшего лампового генератора, причем за параметр λ выберем коэффициент взаимной индукции между цепью сетки и колебательным контуром (фиг. 14). Здесь могут быть два основных случая возникновения колебаний при изменении λ : случай мягкого и случай жест-

кого возбуждения. Вы поймете из дальнейшего, почему взяты такие названия. Физически тот или другой случай осуществляется в зависимости от характеристики лампы, математически они, конечно, соответствуют дифференциальным уравнениям.

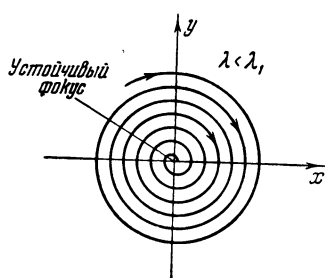


Фиг. 14.

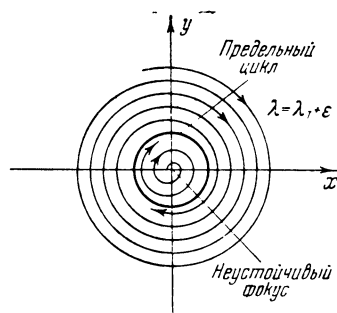


Фиг. 15.

Из диаграммы $\xi\lambda$ (фиг. 15) нетрудно видеть, что для случая $\lambda < \lambda_1$ мы имеем дело только с одним устойчивым состоянием равновесия — с особой точкой типа фокус (фиг. 16). Где бы ни находилась изображающая точка, она через некоторое время окажется в ближайшем соседстве



Фиг. 16.



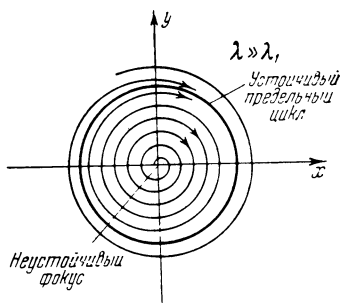
Фиг. 17.

с этим устойчивым фокусом. $\lambda = \lambda_1$ — бифуркационное значение параметра; от особой точки отделяется, отпочковывается устойчивый предельный цикл (фиг. 17).

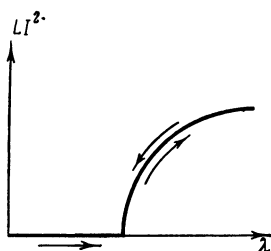
Изображающая точка начинает бегать по предельному циклу, так как состояние равновесия теперь неустойчиво. На физическом языке это значит — у нас начались колебания, у нас самовозбуждение. При увеличении λ радиус предельного цикла увеличивается (фиг. 18), при уменьшении все идет по-старому — предельный цикл сжимается в точку, колебания исчезают. На «физической» диаграмме I^2/λ , где I — амплитуда электрического тока, мы получим плавный («мягкий») переход с постепенно меняющейся амплитудой от состояния покоя к периодическим движениям и обратно (фиг. 19).

Перейдем к жесткому возбуждению (фиг. 20). Если для малых λ система находилась вблизи состояния равновесия, то она и будет находиться вблизи состояния равновесия до $\lambda = \lambda_1$ (фиг. 21, 22 и 23).

То, что при $\lambda = \lambda_0$ у нас появляется пара предельных циклов, из них один устойчивый, это «не касается» нашей изображающей точки, так как устойчивый характер состояния равновесия при этом не меняется. При дальнейшем увеличении λ неустойчивый цикл начинает уменьшаться

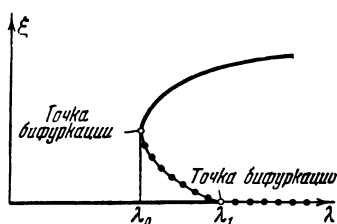


Фиг. 18.

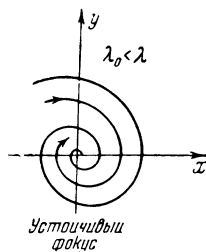


Фиг. 19.

и при $\lambda = \lambda_1$ исчезает, так сказать, «заразив» особую точку своей неустойчивостью. Изображающая точка, конечно, при этом «перескакивает», следуя интегральным кривым, на устойчивый предельный цикл, амплитуда которого все время возрастала (фиг. 24), начиная с $\lambda = \lambda_0$. При уменьшении параметра дело теперь пойдет по-другому. Изображающая точка остается на предельном цикле до $\lambda = \lambda_0$, когда оба цикла совпадут



Фиг. 20.



Фиг. 21.

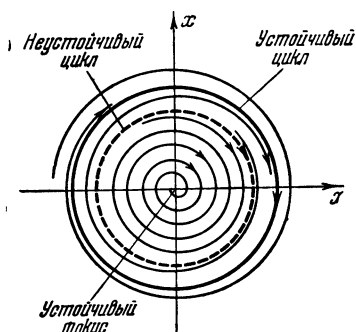
и изображающая точка будет вынуждена «перескочить» в состояние равновесия. Опять-таки «ей не будет никакого дела» до того, что при $\lambda = \lambda_1$ положение равновесия делается устойчивым; это не изменит характера того предельного цикла, по которому она движется.

Диаграмма I^2/λ (фиг. 25) обнаруживает явление резкого («жесткого») изменения амплитуды и, кроме того, необратимый, «гистерезисный» характер этого изменения.

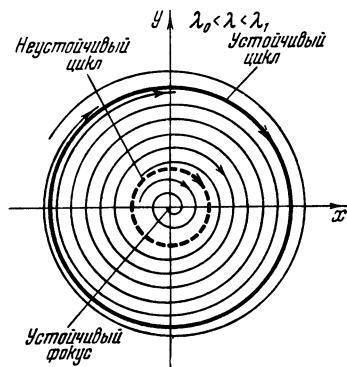
Это весьма интересное для радиотехники явление жесткого возбуждения получает здесь, на языке особых точек, предельных циклов и бифуркационных значений параметра, свое естественное адекватное объяснение. Из рассмотренной картины, например, сразу видно, что для $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ изображающую точку можно «перекинуть» из одного устойчивого режима в другой достаточно сильным толчком (утверждение, кото-

рое вряд ли можно достаточно разумно обосновать на полулинейной теории).

Остановимся еще на одном понятии, которое было бы бессмысленным по отношению к консервативной системе, но которое весьма интересно для неконсервативных систем. Пусть мы имеем устойчивую стационарную траекторию. Мы можем выделить на фазовой плоскости ту область на-

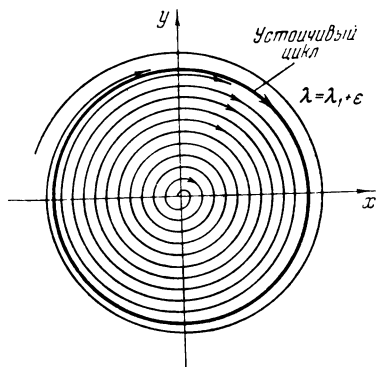


Фиг. 22.

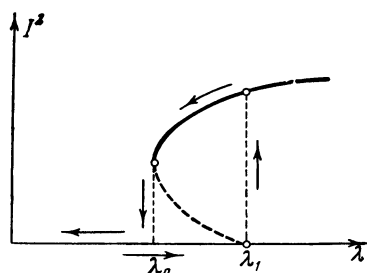


Фиг. 23.

чальных положений изображающей точки, из которых она в конце концов (при $t \rightarrow +\infty$) попадает на данную стационарную траекторию. Эта область носит название «область устойчивости в большом» или «область притяжения» для рассматриваемого движения.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

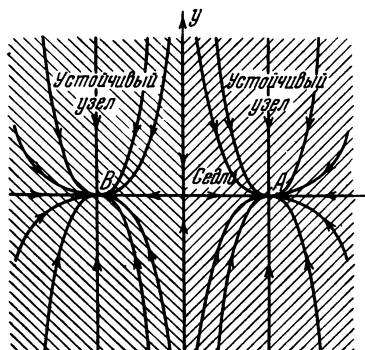
Рассмотрим два примера.

Пусть у нас имеется фазовая плоскость с тремя особыми точками (фиг. 26): двумя устойчивыми узлами и одним седлом. Здесь сразу видно, что областью притяжения узла A является правая полуплоскость, а узла B — левая полуплоскость.

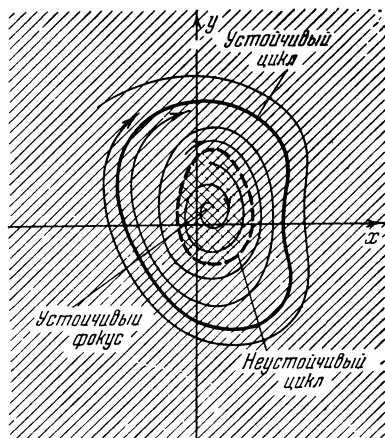
Посмотрим другой пример: устойчивую особую точку, неустойчивый цикл, устойчивый цикл (фиг. 27). Очевидно, что областью устойчивости в большом для положения равновесия является область, заключенная

внутри неустойчивого цикла. Вся остальная часть плоскости является областью притяжения устойчивого цикла.

Я не буду приводить более сложных примеров. Я скажу только, что с определением понятия областей устойчивости в большом, с разбиением всей фазовой плоскости на такие области имеются даже в этом простейшем случае $n = 2$ известные затруднения. Повидимому, даже здесь нельзя обойтись без некоторых вероятностных рассуждений.



Фиг. 26.



Фиг. 27.

Замечу, наконец, что в связи с этим понятием об областях устойчивости в большом находят свой настоящий физический смысл неустойчивые предельные циклы и сепаратрисы. Они являются отделяющими движениями, они определяют, куда будет стремиться система при тех или иных начальных условиях.

Я постарался возможно сильнее оттенить разницу между консервативной и неконсервативной системой. Я думаю, что вы почувствовали это различие. По этому поводу я хотел бы заметить следующее. Мне кажется, что применение настоящей математической теории к проблемам автоколебаний было замедлено как раз этим различием.

Считалось, и это было в известной степени верно, что Пуанкаре, Ляпунов, Биркгоф (Birkhoff) ставили себе задачи, относящиеся к консервативным системам, задачи, выдвигаемые небесной механикой. Те вещи из небесной механики, с которыми физики познакомились благодаря теории квантов (условно периодические системы, контактное преобразование, теория возмущений), казалось, подтверждали это мнение. Поэтому казалось на первый взгляд, что в этих работах нельзя найти аппарата для наших задач, что эти работы занимают другими типами дифференциальных уравнений или по крайней мере, что этот аппарат надо как-то принципиально перестроить. В качестве примера скажу следующее. Гривс (Greaves, Proceeding Roy. Society, 1923) еще до докладчика и

А. А. Витта попытался применить *количественный* метод Пуанкаре к теории автоколебаний. Он дал для рассмотренной им системы периодическое решение, причем он исходил из тех вещей Пуанкаре, которые относятся к консервативным системам. Он получил правильный ответ и пишет в конце своей работы, что он обобщил результаты Пуанкаре, так как у последнего периодические решения не образуют дискретного ряда.

Гривс не подозревал, повидимому, что в тех же «*Methodes nouvelles*» Пуанкаре, только не в том месте, на которое он ссылается, Пуанкаре рассматривает как раз такой случай, а в другом, не менее знаменитом, его сочинении «*Sur les courbes definis par les equations differentielles*» дискретные периодические решения, или, иначе, предельные циклы, являются центральным пунктом исследования.

Прежде чем перейти к общей задаче, я хочу сформулировать некоторые конкретные проблемы, которые здесь есть. Те, которые захотят применять качественные методы Пуанкаре к тем или другим частным дифференциальным уравнениям, встретятся с очень большими трудностями. Эти методы можно применять; нам главным образом удавалось их применять благодаря тому, что полиномы $P(x, y)$, $Q(x, y)$ у нас были *очень небольшими: третьей, пятой степени*. Для таких простых случаев можно это сделать, хотя все же встречаются существенные затруднения.

Нужно поставить следующую проблему перед математиками: увеличить эффективность качественных методов Пуанкаре, т. е. увеличить их силу для конкретных случаев. Возьмем метод Пуанкаре отыскания предельных циклов, связанный с нахождением некоторой топографической системы, которая определяет кривую контакта (не будем объяснять, что это такое). У него сказано, что такая топографическая система, которая нам нужна, существует, но почти ничего не сказано, как конкретно ее находить. Здесь возникает, например, такой, практически весьма существенный, вопрос.

Пусть у нас в уравнениях полиномы $P(x, y)$, $Q(x, y)$ n -ой степени. Когда можно получить нужную топографическую систему в виде полинома? Какой степени будет этот полином?

Вторая задача, которая здесь стоит, такова. Как мы видели, мы можем вычислить при помощи количественных методов Пуанкаре, употребляющихся в небесной механике, периодические решения, близкие к синусоидальным. Это очень легко, и моментально получаются решения, которые счастливо оказываются пригодными даже для техники. Теперь задача ставится шире: вычислить периодические решения для случаев не синусоидальных, для большого значения параметра. Эта задача не решена. Конечно, ее поставить в общем виде нельзя, но для некоторых случаев ее поставить можно и она, я думаю, может быть решена.

Третья задача, о которой более подробно говорил Л. И. Мавдельштам, — это вот что. Нам характеристика лампы задана в виде некоторой кривой, относительно которой мы знаем в известной мере ее качественную природу. И вот нужно связать эту качественную природу

характеристики с числом и устойчивостью предельных циклов. Некоторые исследования в этом направлении уже имеются [Льенар (Liénard)], но исследования весьма недостаточные. Вот три проблемы, которые нам здесь, в Москве, кажутся наиболее существенными в математической теории простейшей автоколебательной системы. Имеется, конечно, и ряд более мелких вопросов, например, вопрос о существовании и протекании тех «кривых Ляпунова», о которых у нас уже шла речь, вопрос о полной теории бифуркаций для неконсервативного случая и т. д. Однако, несомненно, первые три проблемы наиболее актуальны.

§ 3. Случай многих уравнений первого порядка

Перейдем теперь к более общим проблемам. У нас n — число уравнений первого порядка — было равно двум. Качественное исследование уравнений все же можно было проводить, хотя и с большим трудом, для некоторых частных простейших случаев. Кроме того, и это особенно существенно, мы знаем, что там вообще может быть.

Если $n = 3$, то это уже очень плохо. Интегральные кривые были весьма сильно стеснены на плоскости. Здесь они получают совершенно несравнимую свободу; характер возможных движений и соотношений между движениями необычайно усложняется. Здесь не существует теории, которая бы давала хоть сколько-нибудь эффективные способы для качественного исследования конкретных уравнений. Даже то, что вообще там может быть, каков характер интегральных кривых, еще очень плохо исследовано. Борель где-то сказал: «в небесной механике, как в счете дикарей, «много» уже равно трем». Но Борель говорил о числе тел. Число тел было равно трем, что соответствует 18 уравнениям первого порядка. У нас три уравнения первого порядка, но более общего типа — и положение дел не лучше. Еще хуже обстоит дело при $n > 3$, хотя здесь, повидимому, нет столь большой качественной разницы, как между $n = 2$ и $n = 3$.

Физика требует исследования $n = 3$ и в особенности $n = 4$. К задаче $n = 3$ сводится задача о простом ламповом генераторе с учетом сеточного тока, задача о звонке, многие задачи, связанные с теорией регулирующих устройств. К задаче $n = 4$ (так называемый случай двух степеней свободы) сводится чрезвычайно важная задача о генераторе со сложным контуром, задача о взаимодействии двух простых генераторов и т. д. Однако и для самых общих систем при любом конечном n можно все же кое-что сказать относительно характера движений. Пусть у меня имеется система n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

Во-первых, нас интересует такой вопрос: какие движения такой системы отображают автоколебательные процессы? Для $n = 2$ дело обстоит просто: автоколебательные движения периодические и соответст-

вуют устойчивым по Ляпунову предельным циклам Пуанкаре. Следует думать, что здесь они могут иметь более общий характер.

Как математически охарактеризовать автоколебательные движения в общем случае? Тут есть такое физическое, интуитивное определение, что это какие-то регулярно повторяющиеся движения в неконсервативной системе, устойчивые в каком-то смысле по отношению к малым отклонениям.

Два года назад в одной заметке в «Comptes Rendus», посвященной в основном другому вопросу, мы, т. е. А. А. Витт и докладчик, попытались дать математическую характеристику автоколебательных движений. Именно, мы отнесли эти движения к так называемым *рекуррентным* движениям Биркгофа. Чтобы показать, в чем здесь дело, чтобы показать, какие имеются основания считать автоколебательные движения рекуррентными, нам придется коротко остановиться на общей теории движений Биркгофа. Общая классификация движений дается по Биркгофу следующей схемой.



Эта схема движений, несомненно, представляет очень большой интерес: из нее прежде всего видно, какую сложную систему может образовывать совокупность всех движений.

Охарактеризуем бегло те движения, которые имеются в этой схеме. Начнем с центральных движений. Центральные движения,— такие, к которым некоторым образом приближаются все другие движения, не так уж хорошо, но все же приближаются. Несколько точнее их роль можно охарактеризовать тем, что изображающая точка, движущаяся по любой траектории, в конце концов будет двигаться почти исключительно вблизи совокупности центральных движений.

Совокупность же центральных движений, взятая сама по себе, может быть охарактеризована известным сходством с совокупностью движений консервативной системы.

Таким образом, Биркгоф доказывает, что общие неконсервативные системы стремятся в некотором отношении вести себя подобно консервативным системам. Это замечание отнюдь не затрагивает тех фундаментальных отличий консервативных систем от неконсервативных, о которых шла речь выше. Здесь речь идет, например, о том, что *установившееся* движение по предельному циклу по своим *внутренним свойствам* не отличается от движения по одной из замкнутых кривых центра и в частных случаях может быть даже вполне тождественным с ним. Для неконсервативных систем одним из существенных вопросов является взаимоотношение между центральными и нецентральными движениями.

Теория центральных движений была поставлена Биркгофом в связь с атомной динамикой. Именно Биркгоф считал в 1926 г. (год опубликования работы, посвященной центральным движениям), что приближительная консервативность ряда макромеханических систем и предполагаемая консервативность (в так называемой старой квантовой механике) микросистем порядка атома и молекулы есть лишь статистическое следствие «истинных» неконсервативных уравнений, вместо которых мы «подставляем» консервативные уравнения. Вряд ли такая точка зрения соответствует действительному положению дела. Теперь в связи с рядом опытов, установивших так называемую «волновую» природу материи, и в связи с появлением новой квантовой механики недостаточность наших обычных макромеханических исследований для изучения атомных явлений является почти очевидной. Конечно, эти наши представления не могут быть спасены путем замены консервативных уравнений неконсервативными в применении к атомам. Однако тут может быть другое. Физик часто пользуется классической теорией для различного рода подсчетов. Для ряда вещей, например в оптике, классика является достаточно хорошим «асимптотическим» приближением к действительности. Можно думать, что мы получим другое приближение к действительности, другое приближение к квантам, если мы предположим наши атомы некоторыми неконсервативными автоколебательными системами. Правда, это пока фантазия, но, повидимому, это единственный путь хоть кое-что сохранить от этой мысли Биркгофа.

Центральные движения разделяются на устойчивые по Пуассону и на неустойчивые по Пуассону. Что такое устойчивость по Пуассону? Это самая грубая, самая примитивная повторяемость. Если мы начинаем с какой-нибудь точки фазового пространства, то кривая, изображающая движение, устойчивое по Пуассону, непременно подойдет через конечный промежуток времени сколько угодно близко к исходной точке и так будет делать неограниченное число раз. Однако устойчивость по Пуассону не гарантирует, что эти возвращения происходят регулярно, что эта повторяемость регулярна во времени.

Следующий класс движений — это рекуррентные движения. Они замечательны тем, что для них эта повторяемость во времени регулярна. Если мы возьмем начальную точку на рекуррентной траектории, то можно определить для этой точки такой конечный промежуток времени $T(\varepsilon)$, не реже которого изображающая точка будет возвращаться и находиться на расстоянии, меньшем ε , от своего начального положения. Больше того, оказывается, что этот промежуток времени может быть выбран (при заданном ε) одним и тем же для *всех* точек рекуррентного движения, т. е. независимо от того, какую точку рекуррентной траектории мы будем считать исходной. Это значит, что рекуррентное движение равномерно себя приближает, что любой отрезок траектории, соответствующий промежутку времени $T(\varepsilon)$, находится на расстоянии, меньшем ε , от любой точки рекуррентной траектории.

Какие основания у нас были к тому, чтобы причислить автоколебательные движения к классу рекуррентных движений? Все движения стремятся некоторым образом к центральным движениям. Совершенно ясно, что стационарные автоколебательные движения, о которых у нас идет речь, принадлежат к центральным. Так как мы требуем регулярной повторяемости, то нам годятся не все движения, устойчивые по Пуассону, не говоря уже о движениях, неустойчивых по Пуассону, которые вообще не обладают свойством повторяемости. Отсюда сразу указание на класс рекуррентных движений. Это рассуждение достаточно убедительно. Оно может подвергнуться сомнению только в том случае, если мы примем во внимание, что происходящее в действительности движение происходит под влиянием случайных воздействий и что, быть может, *не имеет смысла говорить о движении по одной определенной траектории*.

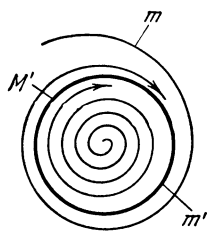
Ввиду важности этих движений как с точки зрения общей теории динамических систем, так и для нашей непосредственной задачи — теории автоколебательных устройств — мы дадим еще одно определение рекуррентного движения, которое раскроет его связь с соседними движениями. При этом для наглядности мы будем апеллировать к самым простым случаям. Однако нужно будет помнить, что это дико тривиальные примеры исключительно сложных вещей.

Представим себе, что у нас есть траектория в фазовом пространстве. Допустим, что она устойчива по Биркгофу. Эта новая вещь. Это не то, что устойчивость по Ляпунову. Устойчивость по Ляпунову, которая идет от Лагранжа и Раута (Routh) и о которой мы уже говорили, — это устойчивость по отношению к соседним движениям. Устойчивость по Биркгофу — совсем другое дело; это есть внутреннее свойство данной траектории. Она тоже имеет свою историю, которая идет от того же Лагранжа и в особенности от Лапласа к Пуанкаре и Биркгофу.

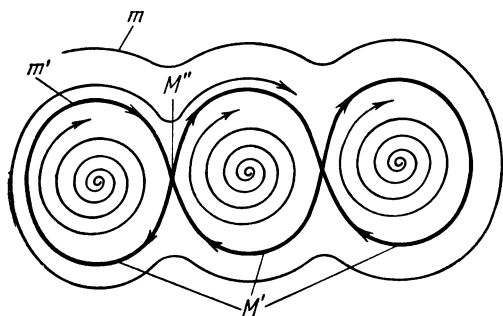
Лаплас назвал бы солнечную систему устойчивой, если бы можно было показать, что планеты не уходят в бесконечность, не падают на солнце и не сталкиваются между собой. Биркгоф говорит, что если фазовая траектория вьется на конечном расстоянии от начала координат и

не приходится к некоторым запрещенным точкам, где, например, скорости обращаются в бесконечность, то движение устойчиво. Так как мы можем идти по траектории, следуя как возрастающему времени, так и убывающему времени, то имеет смысл различать положительно (при $t \rightarrow +\infty$) и отрицательно (при $t \rightarrow -\infty$) устойчивые в смысле Биркгофа траектории.

Будем следить за изображающей точкой какого-нибудь движения, положительно устойчивого по Биркгофу, и рассмотрим все ее предельные точки, т. е. такие точки фазового пространства, в любой близости которых она пройдет бесконечное число раз. Совокупность всех таких



Фиг. 28.



Фиг. 29.

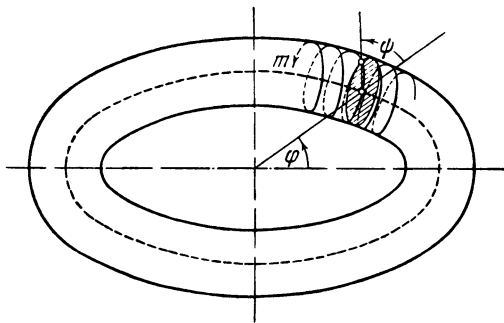
предельных точек образует замкнутое точечное множество. Можно показать, что оно состоит из множества целых движений (траекторий), положительно и отрицательно устойчивых по Биркгофу. Поэтому можно говорить о множестве предельных движений для рассматриваемого движения m . Это те движения, на которые распадается множество предельных точек. Этот «пучок» предельных движений — назовем его множеством движений M' — может состоять либо из одного движения, либо из нескольких, а в общем случае из континуума движений. Рассмотрим пару примеров. Если наша траектория m — спираль, накручивающаяся на предельный цикл (фиг. 28), то очевидно, что предельные точки будут лежать на предельном цикле. Множество M' сводится к одному движению (траектории).

Возьмем несколько более сложный пример. Рассмотрим спираль, навивающуюся на сложную сепаратрису (фиг. 29). Ясно, что предельные точки заполнят шесть движений: четыре лимитационных движения и два положения равновесия. Множество M' состоит из шести движений.

На этих простых примерах видно, что множество предельных точек распадается на совокупность полных движений, положительно и отрицательно устойчивых по Биркгофу. Возьмем теперь из этого множества движений M' какое-нибудь одно движение m' и будем за ним следить. Как и раньше, предельные точки такого движения m' заполнят множество полных движений M'' , которое либо совпадет с M' , либо будет частью M' . Если M'' будет частью M' , то мы возьмем какое-нибудь

движение m'' из множества движений M'' и будем продолжать процесс дальше, т. е. отыщем новое множество предельных движений M''' , которое также либо совпадет с M'' , либо составит часть M'' .

Можно показать, что в результате такого процесса, который может продолжаться трансфинитно, мы придем к минимальной совокупности движений, к «минимальному множеству» движений $M^{(r)}$, для которого $M^{(r-1)}$ совпадает с $M^{(r)}$ независимо от того, каким из движений этого минимального множества мы воспользуемся в качестве породителя предельных движений. Все движения, принадлежащие к такому минимальному множеству движений, называются рекуррентными движениями. Таким образом, каждое рекуррентное движение включено в замкнутое семейство весьма похожих друг на друга движений, которые образуют сгусток, комок траекторий в фазовом пространстве. Биркгоф доказал, что такой сгусток состоит из континуума движений-братьев, если только он не состоит из одной траектории (как это имеет место для периодического движения).



Фиг. 30.

В нашем первом примере $M'' = M'$ рекуррентным движением

является предельный цикл. В нашем втором примере, какое бы из движений множества M' мы ни взяли, все равно $M'' \neq m'$. Нетрудно видеть, однако, что здесь $M''' = M''$ и что рекуррентными движениями будут состояния равновесия.

Для того чтобы иллюстрировать наиболее интересный случай, когда рекуррентные движения образуют континуум, рассмотрим так называемую периодическую «обмотку» тора.

Как раз этот частный случай разбиения поверхности тора на интегральные кривые хорошо известен физикам. Он встречается в учебниках по электричеству в качестве иллюстрации существования силовых линий, не имеющих ни начала, ни конца, не являющихся замкнутыми и не идущих из бесконечности в бесконечность.

Рассмотрим тор (фиг. 30) и введем на поверхности тора ортогональные криволинейные координаты: φ (азимут меридиональной плоскости) и ψ (полярный угол в меридиональной плоскости с вершиной, расположенной на пересечении этой плоскости с осью тора).

Рассмотрим совокупность траекторий на поверхности тора, определяемых дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a, \quad \frac{d\psi}{dt} = b \quad (15)$$

где a и b — некоторые константы.

Легко видеть, что если a и b несоизмеримы, то траектории на торе не будут замкнутыми, а каждая из траекторий будет всюду плотно заполнять поверхность тора. Мы будем иметь континуум траекторий-близнецов, которые образуют, как это нетрудно видеть, минимальное множество движений. Каждая из траекторий является рекуррентной.

Я надеюсь, что эти примеры пояснили несколько абстрактное понятие рекуррентного движения. Не следует забывать, что теперь мы уже имеем два определения рекуррентного движения: одно, только что изложенное, где идет речь о свойствах соседних движений, и другое, которое было дано сначала, внутреннее определение, где говорится о том, что рекуррентное движение равномерно себя приближает.

Можно ли идти дальше? Можно ли а priori выделить из рекуррентных движений еще более узкий класс и отнести автоколебательные движения к этому более узкому классу? Здесь следует указать на следующее. Мы с вами уже много говорили об устойчивости по Ляпунову, это, несомненно, очень существенное для наших целей понятие. Однако, повидимому, невозможно а priori обосновать требование устойчивости по Ляпунову для интересующих нас стационарных автоколебательных движений.

Кроме того, мы знаем, что это требование устойчивости по Ляпунову в тех случаях, которые удалось рассмотреть теоретически, давало физически правильные ответы. Мы знаем также, что в некоторых важных случаях устойчивость по Ляпунову или даже более сильная, так называемая асимптотическая, устойчивость является, так сказать, обычным «природным свойством» рассматриваемых стационарных движений (например, предельных циклов). Отсюда напрашивается «эвристическое» требование устойчивости по Ляпунову для интересующих нас движений. Мы обратились к А. А. Маркову с просьбой попытаться выделить из класса рекуррентных движений движения, устойчивые по Ляпунову. У нас, т. е. у А. А. Витта и у меня, была надежда, что они окажутся почти периодическими. А. А. Маркову удалось доказать теорему, по-моему представляющую существенный интерес, что всякое рекуррентное движение, равномерно устойчивое по Ляпунову, почти периодическое. Таким образом, при помощи этого требования устойчивости по Ляпунову, даже несколько усиленного из-за «равномерности», мы приходим от рекуррентных к классу почти периодических движений.

Вы видите, что изложенное обоснование перехода от рекуррентных движений к почти периодическим не представляется достаточно убедительным. Я замечу еще, что в связи с открытыми в самое недавнее время А. А. Марковым так называемыми «гармонизируемыми» рекуррентными движениями, весьма близкими к почти периодическим, законность такого перехода становится еще более спорной.

Пока еще неизвестна аналитическая природа рекуррентных движений, т. е. неизвестно, какими функциями времени выражаются координаты точки,двигающейся по рекуррентной траектории. Наоборот, аналитиче-

ская природа почти периодических движений, т. е. характер функций, выражающих зависимость координат от времени в случае почти периодического движения, достаточно хорошо известна.

Почти периодическая функция однозначно определяется сходящимся «в среднем» тригонометрическим рядом, так называемым «обобщенным рядом Фурье»:

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n e^{i\lambda_n t} \quad (16)$$

где λ_n — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$.

Если все λ_n выражаются линейно с целыми коэффициентами через конечное число линейно независимых «элементов базиса» или «частот» $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$, т. е. если каждое

$$\lambda_n = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_s \omega_s$$

где $k_1, k_2, \dots, k_s$ — целые числа, то мы имеем дело с частным случаем почти периодической функции, с так называемой «квазипериодической функцией», или функцией Боля. Квазипериодические функции хорошо известны физикам, так как они постоянно использовались в старой квантовой механике. Квазипериодическую функцию часто записывают в следующем виде:

$$f(t) = \varphi\left(\frac{t}{a_1}, \frac{t}{a_2}, \dots, \frac{t}{a_s}\right) \quad (17)$$

где

$$a_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}, a_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \dots, a_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

— так называемые «парциальные периоды» квазипериодической функции, так как такая функция является просто периодической функцией по отношению к каждому из своих аргументов $\xi_i = t/a_i$.

Простейшим примером квазипериодической функции является сумма двух синусоидальных функций:

$$f(t) = A \sin \frac{2\pi}{a_1} t + B \sin \frac{2\pi}{a_2} t \quad (18)$$

где a_1 и a_2 несоизмеримы.

Очевидно, что если в этом случае целого базиса число элементов сведется к одному, то мы будем иметь обыкновенную периодическую функцию переменного t . В более общем случае все λ_n также выражаются в виде линейных комбинаций конечного числа основных частот, но уже не с целыми, а с рациональными коэффициентами. Такие функции носят название предельно квазипериодических. Если в этом случае рационального базиса число элементов сведется к одному, то мы получим простейшую представительницу этого класса, так называемую предельно периодическую функцию.

Могут быть еще более общие случаи, когда общее число элементов базиса (как целого, так и рационального) счетно, хотя каждое λ_n

попрежнему выражается линейно через конечное число элементов. Однако этот последний, наиболее общий класс почти периодических функций, как мы увидим дальше, не представляет интереса для нашей задачи.

Действительно, здесь сразу возникает вопрос, каковы наиболее общие почти периодические решения, которые допускает система n дифференциальных уравнений первого порядка.

Этот вопрос естественен, хотя бы потому, что при $n = 1$ мы вообще не имеем периодических движений, кроме состояний равновесия, при $n = 2$ в случае плоскости мы имеем, кроме состояний равновесия, лишь простые периодические.

Вопрос о максимальном числе линейно независимых частот в квазипериодическом решении был поставлен Эренфестом лет десять назад в связи со старой квантовой механикой. С тех пор появилась пара работ (Ватагин, Черри)¹, но в этих работах не рассматривались столь общие уравнения, какие нам нужны. А. А. Витт и докладчик доказали теорему, что если мы имеем n дифференциальных уравнений первого порядка вида (14) и у нас есть квазипериодическое решение, то число линейно независимых частот не может быть больше $n - 1$. Однако, несмотря на заметку Эренфеста, мы до сих пор не можем сказать, насколько эта теорема нова, так как и у Пуанкаре и у Биркгофа есть места, заставляющие думать, что эта теорема им известна, хотя мы нигде не могли найти ни доказательства, ни четкой формулировки. Здесь следует обратить внимание на следующее. Весьма легко показать, что если наша система уравнений допускает квазипериодическое решение:

$$x_i = \varphi_i\left(\frac{t}{a_1}, \frac{t}{a_2}, \dots, \frac{t}{a_s}\right) \quad (i=1, \dots, n)$$

то она допускает, если соответствующие частоты

$$\frac{2\pi}{a_1}, \frac{2\pi}{a_2}, \dots, \frac{2\pi}{a_s}$$

линейно независимы, и решение вида:

$$x_i = \varphi_i\left(\frac{t}{a_1} + C_1, \frac{t}{a_2} + C_2, \dots, \frac{t}{a_s} + C_s\right) \quad (i=1, \dots, n) \quad (19)$$

где $C_1, C_2, \dots, C_s$ — произвольные константы.

Таким образом, отсюда непосредственно следует, что квазипериодические решения не встречаются изолированно, а образуют семейства весьма похожих решений-братьев. В этом, конечно, нет ничего нового, это простое следствие общей теории. Однако из этих выражений можно вычитать топологическую природу соответствующих минимальных множеств, соответствующих сгустков квазипериодических решений. Именно;

¹ Ватагин рассматривал консервативные системы, Черри — системы, допускающие положительный интегральный инвариант.

так как функции φ_i — периодические по отношению к каждому из аргументов:

$$\frac{t}{a_1} + C_1, \quad \frac{t}{a_2} + C_2, \dots$$

то формулы (19) при переменных $C_1, C_2, \dots, C_s$ дают уравнение S -мерного тора, расположенного в пространстве n измерений.

Как обстоит дело с предельно квазипериодическими движениями?

С точки зрения физика эти решения поистине ужасны: простейшее из таких движений — предельно периодическое движение — может иметь не только все обертоны, как полагается частному периодическому движению, но, кроме того, все унтертоны и все обертоны всех унтертонов.

Л. С. Понтрягин недавно рассмотрел вопрос о том, сколь большой сложности могут быть в нашем случае предельно квазипериодические движения. Это гораздо более трудная задача, требующая гораздо более тонкого математического аппарата, чем аналогичная задача для квазипериодических движений.

Он нашел, что для таких движений число линейно независимых частот не превосходит $n - 2$, если число уравнений первого порядка равно n . В настоящее время к вопросам, связанным с общей теорией рекуррентных и почти периодических движений, привлечено внимание ряда математиков. У нас в СССР, кроме А. А. Маркова и Л. С. Понтрягина, о которых я уже говорил, этими вещами занимаются В. В. Степанов и А. Н. Тихонов.

Теперь я кратко сформулирую проблемы, которые здесь стоят. Случай периодических колебаний, близких к синусоидальным, легко решается и для $n > 2$ теми же методами, о которых у нас шла речь. Таким образом, *первой проблемой* является отыскание периодических решений для большого μ , например в виде рядов Фурье.

Роль почти периодических движений, их связь с периодическими и с более общими движениями, характер их изменений при изменении параметра, эффективное нахождение почти периодических решений — все эти вопросы остаются открытыми. Таким образом, возникает *вторая проблема* — исследование почти периодических движений (в первую очередь квазипериодических) хотя бы для малого μ .

Третья проблема — дать методы качественного исследования дифференциальных уравнений хотя бы для $n = 3$ и $n = 4$; $n = 4$, может быть, наиболее актуальная вещь. У Пуанкаре есть некоторые соображения по этому поводу, но они совершенно неэффективны.

Четвертая проблема — это выяснить зависимость качественной картины фазовых траекторий от параметра, т. е. исследовать бифуркационные значения параметра, исследовать вопрос о смене устойчивостей между различными стационарными движениями, которые здесь возможны, и т. д. С этой же проблемой связан вопрос об областях устойчивости в большом и вопрос о характере возможных «отделяющих» движений, аналогичных сепаратрисам. По поводу последних двух проблем

можно сделать такое общее замечание. Столь полное изучение различных возможных случаев, как это удалось сделать для $n = 2$, повидимому, крайне затруднительно для $n > 2$. Кроме того, надо думать, что для целей радиотехники оно даже излишне, так как интересующие радиотехнику системы в некоторых отношениях специфичны. Таким образом, естественно возникает вопрос об ограничении классов дифференциальных уравнений, подлежащих изучению. Как мы знаем, характерным признаком существенно неконсервативной системы — мы ее в сущности так определили — для $n = 2$ является возможность разбиения фазовой плоскости на области с одинаковым асимптотическим поведением траекторий. Для $n > 2$, имея в виду радиотехнику, повидимому, следует также ограничиться изучением лишь таких систем, для которых аналогичное свойство имеет место в фазовом пространстве, т. е. ограничиться изучением существенно неконсервативных систем. Исследование таких систем, несомненно, должно представить меньшие трудности, чем исследование общего случая.

Пятая проблема имеет несколько своеобразный характер — это обоснование так называемого «метода медленно меняющихся коэффициентов», или, как обычно говорят в радиотехнике, метода Ван дер Поля. Как мы уже упоминали, Ван дер Полю был первым, кто начал систематически рассматривать автоколебательные задачи именно как нелинейные задачи. Способы, которые при этом им применялись, не были строгими и возбуждали сомнения. Поэтому в начале наших работ по автоколебаниям мы несколько недооценили значение работ Ван дер Поля. И лишь после того, как строгие методы подтвердили полученные им результаты, мы поняли, какое место эти работы занимают в радиофизике.

Так как метод Ван дер Поля часто приводит к более простым выкладкам, чем строгие методы, и так как он в очень многих важных случаях дает правильный ответ, то представляется весьма интересным обосновать метод Ван дер Поля и указать границы его применимости. Заметим, что по методу Ван дер Поля можно приближенно исследовать не только периодические решения, но и квазипериодические и даже, — правда, далеко не всегда — можно составить себе грубое представление о поведении интегральных кривых в фазовом пространстве.

§ 4. Устойчивость по Ляпунову

Заслуги Ляпунова в задаче об устойчивости исключительно велики. Ему удалось свести задачу об устойчивости движений нелинейных систем к исследованию свойств решений некоторых линейных дифференциальных уравнений, так называемых «уравнений первого приближения» (equations aux variations, по терминологии Пуанкаре), точнее, ему удалось строго обосновать, когда такое сведение законно.

Пусть мы имеем систему

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n; t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20)$$

и имеем движение

$$x_i = \bar{x}_i(t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Полагая $x_i = \bar{x}_i + \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), т. е., иначе говоря, преобразуя уравнение к движущейся системе координат, получим систему в виде:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n p_{i\alpha}(t) \xi_\alpha + R_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (20')$$

где

$$p_{ij}(t) = \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_{x_i = \bar{x}_i(t)}$$

и где R_i — совокупность членов высших порядков относительно ξ_i . Если мы здесь отбросим нелинейные члены R_i , то как раз и получим те линейные дифференциальные уравнения — уравнения первого приближения

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n p_{i\alpha}(t) \xi_\alpha \quad (i = 1, \dots, n) \quad (21)$$

к исследованию которых Ляпунов свел для целого класса уравнений (20), для нас, пожалуй, наиболее важного класса, исследование устойчивости движения.

Нетрудно видеть, что если «исследуемое на устойчивость» движение было состоянием равновесия, то уравнения (21) — линейные уравнения с постоянными коэффициентами, если движение было периодическим, — то с периодическими, если квазипериодическим, — то с квазипериодическими коэффициентами и т. д. Чтобы более точно сформулировать результаты Ляпунова, поясним некоторые введенные им термины.

Характеристическим числом некоторой функции $f(t)$ Ляпунов называет число λ_0 , обладающее тем свойством, что, как бы ни было мало положительное число ε

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{(\lambda_0 + \varepsilon)t} \rightarrow \infty, \quad \text{а} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{(\lambda_0 - \varepsilon)t} \rightarrow 0$$

Характеристическим числом группы функций¹ Ляпунов называет наименьшее из характеристических чисел функций, составляющих группу. Фундаментальную систему решений линейных уравнений (21) Ляпунов называет *нормальной*, если сумма всех характеристических чисел этих решений достигает наибольшего возможного значения. Систему линейных уравнений вида (21) Ляпунов называет *правильной*, если характеристическое число функции

$$\exp \int_0^t \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha\alpha}(t) dt$$

равно сумме характеристических чисел нормальной системы решений. Основную теорему Ляпунова можно сформулировать так: если система

¹ Каждое решение системы (21) является группой n функций: $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$.

уравнений первого приближения правильная и если все решения соответствующей нормальной системы решений имеют положительные характеристические числа, то исследуемое движение (породившее рассматриваемую систему уравнений первого приближения) устойчиво. Дополнением к этой основной теореме являются следующие утверждения.

1. Если хотя бы одно характеристическое число отрицательно, то движение неустойчиво.

2. Если k характеристических чисел положительны, то движение обладает «относительной устойчивостью», т. е. в пространстве $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ существует некоторое многообразие движений k измерений, которые стремятся к «обобщенному состоянию равновесия», т. е. к исследуемому движению.

Ляпунов доказал, что если коэффициенты $p_{ij}(t)$ — постоянные или периодические функции времени, то соответствующая система (21) правильная. Замечу следующее. Когда мы попытались применить результаты Ляпунова к теории автоколебаний, то мы сразу натолкнулись на следующее затруднение. С состояниями равновесия все было благополучно, так как для них соответствующие фундаментальные решения имеют в общем случае все характеристические числа, отличные от нулей, так что результаты Ляпунова к ним непосредственно применялись. Хуже обстояло дело с периодическими решениями. Весьма хорошо известно, это показал еще Пуанкаре, что в этом случае, если исходные уравнения автономны, уравнения первого приближения всегда имеют одно характеристическое число равным нулю (это происходит в силу произвольности фазы). Поэтому для этого случая достаточное условие, сформулированное Ляпуновым, *никогда* не оправдывается.

Однако нетрудно показать, что в этом случае достаточным является требование положительности остальных $n - 1$ характеристических чисел.

Этой теоремы нет у Ляпунова. В своей работе он указывает лишь путь, каким можно было бы доказать устойчивость в подобных случаях, анализируя члены высших порядков.

Однако, пользуясь результатами Ляпунова, относящимися к относительной устойчивости, и лишь изменив точку зрения, можно почти мгновенно доказать эту теорему. Ляпунов ведет исследования так называемого обобщенного положения равновесия. Если изменить точку зрения и отдать себе отчет, что значат результаты Ляпунова по отношению к действительной траектории, то доказательство получается само собой¹.

При помощи этой теоремы конкретное исследование устойчивости периодических решений автономной системы, если эти последние известны, проводится весьма просто. Существенную роль при этом исследовании играют некоторые неравенства, аналогичные знаменитым неравенствам Раута-Гурвица (Routh-Hurwitz), для уравнений с постоянными коэффициен-

¹ См. А. А. Андронов и А. А. Витт «Об устойчивости по Ляпунову» на стр. 154 стоящего тома. — *Ред.*

тами. Теперь я коротко остановлюсь на задачах, которые здесь стоят. Основной задачей здесь является исследование систем уравнений первого приближения с квазипериодическими коэффициентами, ответ хотя бы на вопрос о правильности такой системы. Произвольные фазы, которые входят в квазипериодические решения и о которых мы уже говорили, несомненно, в ряде случаев облегчат исследование устойчивости.

§ 5. Простейшая автоколебательная система под действием внешней силы

Я рассмотрю теперь систему, математическим портретом которой являются два дифференциальных уравнения первого порядка, правые части которых — периодические функции времени с периодом β :

$$\frac{dx}{dt} = P\left(x, y; \frac{t}{\beta}\right), \quad \frac{dy}{dt} = Q\left(x, y; \frac{t}{\beta}\right) \quad (22)$$

Такая система представляет очень большой интерес для радиотехники, так как с исследованием такой системы связан теоретически подход к ряду весьма важных для радиотехники явлений (захватывание, модуляция, резонанс второго рода и т. д.). Я изложу сейчас некоторые, пока лишь частично опубликованные, общие результаты, полученные А. А. Виттом и докладчиком при исследовании такой системы. Правда, здесь многое нам пока еще не удалось довести до конца, однако все же полученные результаты, по-моему, имеют некоторый интерес сами по себе и, кроме того, позволяют наметить дальнейшие пути исследования.

Стационарные движения, которыми прежде всего интересуется радиотехника, здесь бывают двух основных типов: периодические¹ с периодом, равным внешней силе,

$$x = \varphi\left(\frac{t}{\beta}\right), \quad y = \psi\left(\frac{t}{\beta}\right) \quad (23)$$

квазипериодические² с двумя периодами, из которых один равен периоду внешней силы,

$$x = \Phi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right), \quad y = \Psi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right) \quad (24)$$

Периодические решения (23) здесь встречаются изолированными. Однако в этом случае уже не периодические, как в случае двух автономных уравнений, а квазипериодические решения образуют семейство, зависящее от одного параметра. Можно легко показать, что если

$$x = \Phi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right), \quad y = \Psi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right)$$

¹ Могут быть также периодические решения второго рода:

$$x = \varphi\left(\frac{t}{\tau_0\beta}\right), \quad y = \psi\left(\frac{t}{\tau_0\beta}\right)$$

которые встречаются группами по τ_0 решений, смещенных относительно друг друга по фазе на β .

² Могут быть также квазипериодические решения второго рода:

$$x = \Phi\left(\frac{t}{\iota_0\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right), \quad y = \Psi\left(\frac{t}{\iota_0\beta}, \frac{t}{\alpha_1}\right)$$

есть решение системы (22), то

$$x = \Phi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1} + C\right), \quad y = \Psi\left(\frac{t}{\beta}, \frac{t}{\alpha_1} + C\right)$$

тоже является решением, где C — произвольная постоянная.

Исследование устойчивости по Ляпунову периодических решений сводится, как мы знаем, к исследованию характеристических экспонант системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P_x'\left(\varphi, \psi; \frac{t}{\beta}\right)\xi + P_y'\left(\varphi, \psi; \frac{t}{\beta}\right)\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q_x'\left(\varphi, \psi; \frac{t}{\beta}\right)\xi + Q_y'\left(\varphi, \psi; \frac{t}{\beta}\right)\eta \end{aligned} \quad (25)$$

Однако это исследование здесь несравненно труднее, чем в случае периодических решений автономной системы при $n = 2$, так как, вообще говоря, здесь ни один характеристический показатель не равен нулю.

Исследование устойчивости по Ляпунову квазипериодических решений сводится к исследованию системы линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P_x'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right)\xi + P_y'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right)\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q_x'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right)\xi + Q_y'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right)\eta \end{aligned} \quad (26)$$

общий вид решений которых неизвестен.

Если бы было известно, что линейные уравнения с квазипериодическими коэффициентами образуют правильную (в смысле Ляпунова) систему, то, пользуясь равенством нулю одного из характеристических чисел (так как квазипериодические решения образуют семейство, зависящее от одной произвольной постоянной), можно было бы сразу написать условие устойчивости по Ляпунову решения (26) в виде:

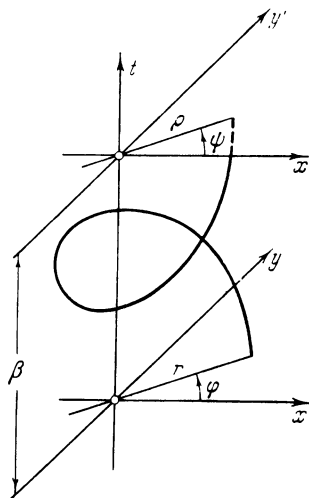
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ P_x'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right) + Q_y'\left(\Phi, \Psi; \frac{t}{\beta}\right) \right\} dt < 0 \quad (27)$$

Однако вопрос о правильности системы линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами до сих пор не решен¹.

Дадим теперь наглядную геометрическую картину поведения и интегральных кривых нашей системы уравнений (22) в пространстве xyt . Поведение интегральных кривых на плоскости xy не представляет интереса, так как на этой плоскости интегральные кривые могут пересекаться. Периодическим решениям в этом пространстве соответствуют изолированные винтовые линии. Семействам квазипериодических решений вида (24)

¹ В самое последнее время А. А. Виту удалось решить вопрос об устойчивости квазипериодических решений в этом случае и строго обосновать неравенство (27) независимо от проблемы правильности системы линейных уравнений с квазипериодическими коэффициентами.

соответствуют трубообразные поверхности (эти поверхности не цилиндрические, в направлении оси t они имеют периодическую структуру, простирающуюся от $-\infty$ до $+\infty$). Через каждую точку пространства вблизи такой трубы проходит (по крайней мере для некоторых случаев) соответствующая поверхность Ляпунова, состоящая из асимптотических квазипериодических движений, стремящихся к той кривой, по которой эта поверхность пересекает трубу. Эта кривая соответствует одному определенному квазипериодическому движению из рассматриваемого семейства. Существуют определенные законы сожительства труб и винтовых линий, т. е. семейств квазипериодических решений и изолированных периодических решений. Например, можно легко показать, что внутри каждой трубы непременно находится по крайней мере одна винтовая линия. Сравнивая эту картину с той, которая имеется при $n = 2$ для автономной системы, — нужно, конечно, иметь в виду пространство xyt , — нетрудно заметить бросающуюся в глаза аналогию между положениями равновесия там и периодическими движениями здесь, между периодическими движениями там и квазипериодическими движениями здесь. Однако здесь имеются и отличия, на которых я не буду останавливаться.



Фиг. 31.

Я перехожу прямо к задачам, которые здесь стоят. Количественные методы Пуанкаре позволяют хорошо рассчитывать периодические решения для случая малых μ . Этими методами был рассчитан ряд радиотехнических вещей и получены удовлетворительные результаты.

Первая и основная задача, которая здесь стоит, — это обобщить количественные методы Пуанкаре, относящиеся к периодическим решениям, на квазипериодические решения. У нас здесь есть некоторые неполные результаты такого характера. Пусть у нас есть квазипериодическая труба. Как ее найти, как вычислить те начальные условия на плоскости xy , которые соответствуют квазипериодическим решениям, образующим трубу? Для квазипериодической трубы у нас такая картина: замкнутая кривая на плоскости xy (сечение трубы при $t = 0$) перейдет в точно такую же кривую на плоскости $x'y'$ (сечение трубы при $t = \beta$).

Возьмем полярные координаты на плоскости xy (r, φ) и на плоскости $x'y'$ (ρ, ψ). Между этими плоскостями легко установить связь (фиг. 31): $\rho = f(r, \varphi)$; $\psi = g(r, \varphi)$ (эти функции легко могут быть найдены в виде рядов при помощи методов Пуанкаре). Зная эту связь, я могу написать функциональное уравнение, которое определит эту замкнутую кривую. Замкнутая кривая $r = s[\varphi]$ перейдет в замкнутую кривую $\rho = s[\psi]$. Если

я здесь совершу замену ρ и ψ , то получу

$$f(r, \varphi) = s[g(r, \varphi)]$$

Я могу здесь заменить r через $s[\varphi]$. Я получу тогда

$$f(s[\varphi], \varphi) = s[g(s[\varphi], \varphi)] \quad (28)$$

Мы получили функциональное уравнение, которое определяет кривую; f и g — заданные функции; $s[\varphi]$ — искомая. Вообще говоря, полученная труба может не всегда состоять из квазипериодических движений. Функциональное уравнение (28) для случая малого μ может быть сведено к последовательным решениям уравнений в конечных разностях. Вопрос математически непростой, потому что здесь появляются так называемые «малые делители» и, по крайней мере в смысле строгости, нам пока не удалось с ними справиться. Замечу, что, зная трубу, нетрудно вычислить собственную частоту квазипериодического решения, перейти к движению во времени и т. д.

Вторая задача, не менее важная, — дать качественную теорию таких уравнений. Эта теория, несомненно, значительно более проста, чем качественная теория автономной системы в случае $n > 2$.

Третья задача — отыскание периодических решений в виде рядов Фурье. Она упрощается здесь тем, что период можно считать заранее известным.

Я кончаю свой затянувшийся доклад. Я опустил в этом докладе ряд существенных областей математической теории автоколебаний. Например, я совершенно не затронул автоколебательные системы, допускающие так называемые «разрывные» стационарные решения, не затронул распределенных автоколебательных систем, вещей, связанных с так называемым установлением колебательных режимов, и т. д. Я все же хочу еще раз напомнить то, что мне представляется, пожалуй, наиболее важным в отношении затронутых здесь математических задач.

Результаты Пуанкаре и Биркгофа для $n > 2$ сугубо неэффективны. Они дают известное представление о роде и характере движения, но не содержат в себе почти никаких данных для того, чтобы исследовать какое-нибудь частное дифференциальное уравнение, с которым нам приходится иметь дело. Поэтому необходимо как-то заполнить пропасть между топологической теорией и тем, что сейчас нам нужно. В этом отношении всякий, даже очень неполный, результат, полученный математиками, будет чрезвычайно ценен. И мне кажется, что в отношении качественной теории здесь чрезвычайно желательна очень быстрая поддержка, потому что качественная теория таких вещей чрезвычайно затруднительна и чрезвычайно необходима.

Л и т е р а т у р а

1. Мандельштам Л. И. 1 Всесоюзная конференция по колебаниям. М — Л. ГТТИ. 1933.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПУАНКАРЕ О «ТОЧКАХ БИФУРКАЦИЙ» И «СМЕНЕ УСТОЙЧИВОСТЕЙ» К ПРОСТЕЙШИМ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫМ СИСТЕМАМ¹

Введение.— § 1. Изложение теории Пуанкаре. — § 2. Применение теории бифуркаций Пуанкаре к системам, определяемым одним дифференциальным уравнением первого порядка.— § 3. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе.— § 4. Физические примеры. Мягкое и жесткое возбуждение катодного генератора.

Введение

Теория мягкого и жесткого возбуждения катодного генератора для случая колебаний, близких к синусоидальным, была дана впервые Ван дер Полем и Эппльтоном в 1922 г.^[1] Эту теорию легко строго обосновать математически, пользуясь методами Пуанкаре, как это и было сделано².

Центральным пунктом настоящей заметки является установление и использование той связи, которая существует между теорией зависимости стационарных режимов катодного генератора от параметра и теорией зависимости состояния равновесия консервативной системы от параметра, данной тем же Пуанкаре в связи с теорией равновесия вращающейся жидкой массы.

Известные до сих пор лишь астрономам-теоретикам понятия «точек бифуркации», «смены устойчивостей» и т. д. оказываются весьма плодотворными в теории колебаний и позволяют придать теории мягкого и жесткого возникновения колебаний — по крайней мере в простейших слу-

¹ Совместно с А. Г. Любиной. Результаты этой работы в сжатом виде, без вывода, были доложены на 1 Всесоюзной конференции по колебаниям (Москва, ноябрь 1931 г.). В конце 1932 г. работа была подготовлена к печати и вскоре сдана в Ученые записки Горьковского государственного университета. Ввиду длительной задержки выхода Ученых записок ГГУ, работа в несколько переработанном и дополненном (включен параграф о теории бифуркаций в системах, определяемых одним уравнением первого порядка) виде была в конце 1934 г. отправлена также в Ж. эксперим. и теор. физики.

В настоящем издании воспроизводится текст статьи в Ж. эксперим. и теор. физики (т. 5, в. 3—4, 1935 г.), так как он полностью охватывает содержание заметки, которая опубликована на эту же тему в Ученых записках Горьковского университета (в. 1, 1935 г.).

² См., например, Андронов [2].

чаях — столь же стройный вид, какой имеет у Пуанкаре теория зависимости состояния равновесия консервативной системы от параметра. § 1 посвящен сжато изложению теории бифуркаций Пуанкаре; § 2 — применению теории бифуркаций к системам, определяемым одним дифференциальным уравнением первого порядка; § 3 — распространению теории бифуркаций на случай автоколебательных систем, близких к линейным консервативным системам; § 4 — рассмотрению физических примеров, связанных с мягким и жестким возбуждением катодного генератора.

§ 1 Изложение теории Пуанкаре

Ограничимся простейшим случаем движения точки по прямой под действием силы, зависящей только от расстояния и параметра.

Уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = \Phi(x, \lambda) \quad (1)$$

Для положений равновесия сила равна нулю, т. е.:

$$\Phi(x, \lambda) = 0 \quad (A)$$

Уравнение (A) определяет на плоскости $x\lambda$ некоторую кривую (фиг. 1). Каждому значению λ соответствует одно или несколько положений равновесия: $x = \bar{x}_1, x = \bar{x}_2, \dots, x = \bar{x}_s$. Меняя λ , мы будем менять координаты этих состояний равновесия; таким образом, каждое из $\bar{x}_k$ есть функция λ ; по терми-

нологии Пуанкаре мы будем иметь s «линейных рядов» состояний равновесия.

Не трудно видеть, что положения равновесия будут устойчивыми, если¹

$$\Phi_{x'}(x, \lambda) < 0$$

и неустойчивыми, если

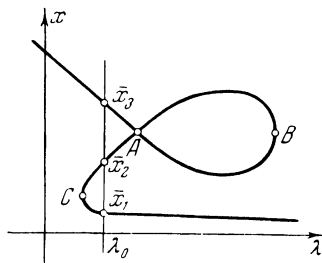
$$\Phi_{x'}(x, \lambda) > 0$$

Дифференцируя уравнение (A), имеем

$$\frac{d\bar{x}}{d\lambda} = - \frac{\Phi_{\lambda}'(\bar{x}, \lambda)}{\Phi_{x'}(\bar{x}, \lambda)}$$

Для каждого линейного ряда получается отсюда единственное значение для $d\bar{x}/d\lambda$; таким образом, определяется последовательность положений равновесия, принадлежащих этому ряду.

¹ $\Phi(x, \lambda) = -V_{x'}(x, \lambda)$, где $V(x, \lambda)$ — потенциальная энергия. Устойчивым положениям равновесия соответствует минимум потенциальной энергии, т. е. соответствует $V_{xx}''(x, \lambda) > 0$ или $\Phi_{x'}(x, \lambda) < 0$



Фиг. 1.

Различные ряды положений равновесия остаются различными до тех пор, пока $\Phi_x'(\bar{x}, \lambda)$ не обратится в нуль.

Значения параметра λ , для которых хотя бы одно $\Phi_x'(\bar{x}_k, \lambda) = 0$, носит название *бифуркационных значений* параметра, а соответствующие точки на кривой $\Phi(x, \lambda) = 0$, называются *точками бифуркации*.

Пусть $\Phi_x'(x, \lambda) = 0$, а $\Phi_\lambda'(x, \lambda) \neq 0$; тогда кривая $\Phi(x, \lambda) = 0$ имеет в этой точке вертикальную касательную. Когда λ переходит через значение, соответствующее этой точке, то два действительных корня x сливаются и затем становятся комплексными. Такое положение равновесия, не продолжающееся другим линейным рядом, называется предельным положением равновесия (например, точка B на фиг. 1).

Пусть теперь для рассматриваемой точки не только $\Phi_x'(x, \lambda) = 0$, но и $\Phi_\lambda'(x, \lambda) = 0$, тогда соответствующее положение равновесия характеризуется двойной точкой на бифуркационной диаграмме x, λ . Мы имеем дело с пересечением различных линейных рядов (точка A на фиг. 1).

Для выяснения различных обстоятельств, связанных с точками бифуркации, построим поверхность

$$z = \Phi(x, \lambda)$$

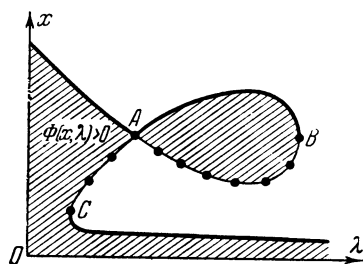
Пересечение этой поверхности с плоскостью $z = 0$ даст кривую $\Phi(x, \lambda) = 0$, о которой была уже речь. Кривая эта разделяет те части плоскости $x\lambda$, где $z > 0$, и те, где $z < 0$.

Если область, где $\Phi(x, \lambda) > 0$, лежит под некоторой частью кривой $\Phi(x, \lambda) = 0$, то функция $z = \Phi(x, \lambda)$ убывает с возрастанием x ; производная $\partial z / \partial x < 0$; таким образом, рассматриваемая часть кривой соответствует положениям устойчивого равновесия.

Если область, где $\Phi(x, \lambda) > 0$, лежит над некоторой частью кривой $\Phi(x, \lambda) = 0$, то функция $z = \Phi(x, \lambda)$ возрастает с возрастанием x ; производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \Phi_x'(x, \lambda) > 0$$

и рассматриваемые части кривой соответствуют неустойчивым положениям равновесия.



Фиг. 2.

Не трудно видеть (фиг. 2), что, вообще говоря¹, точки бифуркации, где сливаются линейные ряды положений равновесия, обладают замечательным свойством: там происходит так называемая [«смена устойчивостей»] (*échange des stabilités*, по терминологии Пуанкаре).

Двигаясь по одному линейному ряду и сохраняя непрерывность касательной, мы переходим в точке бифуркации от устойчивых положений равновесия к неустойчивым или наоборот.

¹ Это относится к общему случаю, когда $\Phi_x'(x, \lambda)$, обращаясь в нуль, меняет свой знак.

Так как смена устойчивости может произойти только при слиянии линейных рядов, то состояние равновесия может сменить устойчивость, только слившись с другим состоянием равновесия. Таким образом, — и это характерная особенность консервативных систем — состояния равновесия консервативных систем образуют полную замкнутую систему в отношении смены устойчивости.

Так как каждому устойчивому состоянию равновесия соответствует на фазовой плоскости особая точка типа «центр», а неустойчивому — особая точка типа «седло», то «центр» может превратиться в «седло» или, наоборот, «седло» — в «центр» только в точках бифуркации; таким образом, особые точки могут исчезать и появляться только парами, причем эти пары состоят из «центра» и «седла».

Мы не будем здесь приводить примеров на применение этой теории, так как такие примеры имеются в учебниках¹.

§ 2. Применение теории бифуркации Пуанкаре к системам, определяемым дифференциальным уравнением первого порядка

Изложенные в § 1 соображения о зависимости состояний равновесия консервативной системы с одной степенью свободы от параметра могут быть мгновенно перенесены в теорию зависимости от параметра состояний равновесия общих динамических систем, определяемых одним дифференциальным уравнением первого порядка²:

$$\frac{dx}{dt} = \Phi(x, \lambda), \quad (2)$$

где x — координата, определяющая состояние системы, а λ — параметр, который характеризует саму систему и которому мы можем придавать различные фиксированные значения.

Такие системы весьма часто приходится исследовать в электрофизике. Вид функции $\Phi(x, \lambda)$ определяется видом характеристик тех аппаратов (электронических машин, катодных ламп и т. д.), которые содержит система.

Состояния равновесия такой системы даются уравнением

$$\Phi(x, \lambda) = 0 \quad (A')$$

На плоскостях $x\lambda$ это уравнение определяет некоторую кривую, причем каждому значению λ соответствует одно или несколько состояний равновесия: $x = \bar{x}_1$, $x = \bar{x}_2$, ..., $x = \bar{x}_s$.

Не трудно показать, что состояние равновесия устойчиво, если для соответствующего $\bar{x}_i$

$$\Phi'_x(\bar{x}_i, \lambda) < 0 \quad (B')$$

и неустойчиво, если

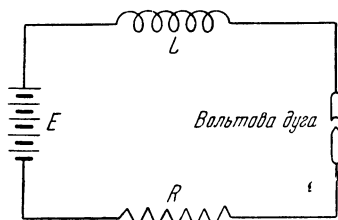
$$\Phi'_x(\bar{x}_i, \lambda) > 0$$

¹ См., например, Анпель [3].

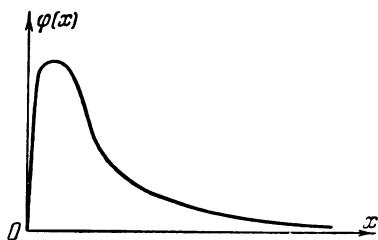
² Иногда такие системы носят название систем, имеющих половинную степень свободы.

Условия (А') и (В') в точности совпадают с условиями (А) и (В). Этим доказывается высказанное в начале этого параграфа утверждение, что теория зависимости от параметра состояний равновесия общей динамической системы, определяемой одним уравнением первого порядка, в точности копирует теорию, изложенную в § 1.

В качестве примера рассмотрим поведение вольтовой дуги в цепи с сопротивлением и самоиндукцией.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Пользуясь обозначениями, указанными на фиг. 3, имеем

$$L \frac{dx}{dt} + Rx + \varphi(x) = E$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E - Rx - \varphi(x)}{L}$$

где $\varphi(x)$ — так называемая характеристика дуги, дающая напряжение на зажимах дуги как функцию силы тока; $U = \varphi(x)$ обычно задается графически и представляет собой кривую, очень быстро возрастающую с увеличением x от нуля и затем падающую примерно по гиперболическому закону (фиг. 4)¹.

Построим для этой системы две бифуркационные диаграммы, один раз принимая за параметр напряжение батареи, другой раз — сопротивление.

А. Бифуркационная диаграмма для E. Уравнение бифуркационной диаграммы имеет следующий вид:

$$\Phi(x, E) = E - Rx - \varphi(x) = 0$$

где E и x — переменные, а R — константа.

Чтобы построить кривую $E = Rx + \varphi(x)$, достаточно сложить ординаты кривой $y = \varphi(x)$ и прямой $y = Rx$.

Полученная таким образом бифуркационная диаграмма изображена на фиг. 5. Заштрихованная часть плоскости xE соответствует условию

$$\Phi(x, E) > 0$$

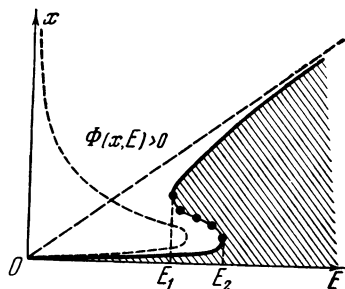
Это сразу дает возможность указать по рецепту, изложенному в § 1, какие части бифуркационной кривой устойчивы, какие неустойчивы.

¹ См., например, Баркхаузен [4], фиг. 18.

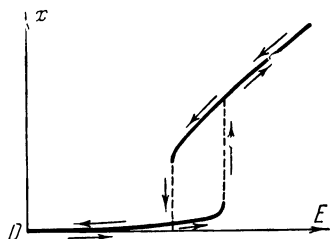
Неустойчивые части бифуркационной кривой, как обычно, отмечены жирными точками.

Как легко видеть, для $E > 0$ мы имеем два бифуркационных значения параметра: $E = E_1$ и $E = E_2$.

При достаточно медленном (так называемом «адиабатическом») изменении E сила тока будет меняться непрерывно, за исключением прохождения E через бифуркационные значения, когда будут происходить так называемые «скачки» и «срывы» силы тока (фиг. 6).



Фиг. 5.

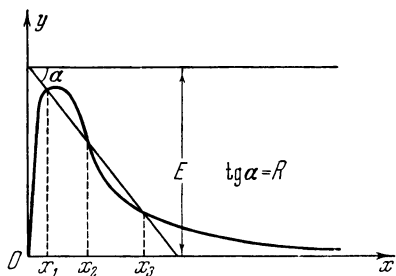


Фиг. 6.

Б. Бифуркационная диаграмма для R . Уравнение бифуркационной диаграммы имеет тот же самый вид:

$$\Phi(x, R) = E - Rx - \varphi(x) = 0$$

где теперь R и x — переменные, а E — константа. Чтобы построить бифуркационную диаграмму $\Phi(x, R) = 0$, проще всего использовать то построение для нахождения стационарных режимов, которое приводится в классических учебниках.



Фиг. 7.

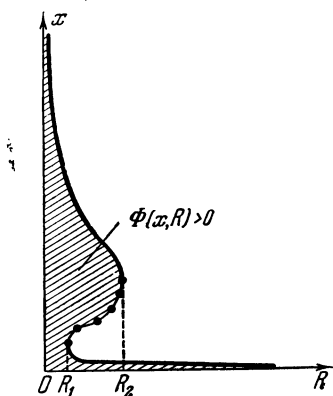
Рассмотрим плоскость ux и на ней кривую $y = \varphi(x)$ и прямую $y = E - Rx$ (фиг. 7). Чтобы построить бифуркационную диаграмму $\Phi(x, R) = 0$, будем при постоянном E менять R от $R = 0$ до $R = \infty$ и следить за тем, как будут изменяться абсциссы точек пересечения прямой $y = E - Rx$, у которой будет меняться

наклон, с кривой $y = \varphi(x)$, которая не зависит от R .

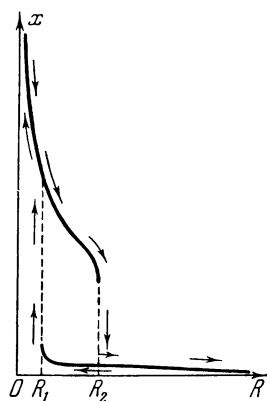
Бифуркационная кривая¹, построенная этим способом, изображена на фиг. 8. Здесь нас интересуют опять два бифуркационных значения па-

¹ Заметим, что бифуркационная диаграмма дана на фиг. 8 для случая $E > \varphi_{\max}$. Если $E < \varphi_{\max}$, то бифуркационное значение $R = R_1$ становится отрицательным и, следовательно, не имеет физического смысла. В этом случае для $R = 0$ мы имеем три значения x , одно из которых соответствует устойчивому стационарному току конечной амплитуды.

параметра: $R = R_1$ и $R = R_2$, при которых у нас будут скачки тока; при достаточно медленном изменении R сила тока будет меняться, следуя фиг. 9.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

§ 3. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе

Чтобы перенести теорию бифуркаций на стационарные движения автоколебательной системы с одной степенью свободы, близкой к линейной консервативной, нам придется напомнить теорию таких систем и проделать некоторые выкладки.

Пусть мы имеем автоколебательную систему с одной степенью свободы, близкую к линейной консервативной системе. Пусть эта система зависит от какого-нибудь параметра λ , которому мы можем придавать различные фиксированные значения. Уравнение движения такой системы может быть записано в таком виде:

$$\ddot{x} + x = \mu g(x, \dot{x}; \lambda) \quad (3)$$

где x — координата, определяющая конфигурацию системы (например, смещение, напряжение и т. д.); μ — малый параметр, который характеризует степень близости рассматриваемой автоколебательной системы к линейной консервативной системе и по которому совершаются разложения в теории периодических решений Пуанкаре; λ — тот параметр (например, коэффициент взаимной индукции и т. д.), влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся; $g(x, \dot{x}; \lambda)$ — функция, определяемая физической природой сопротивлений и устройств, доставляющих энергию системе.

Перейдем к исследованию уравнения (3), предполагая μ достаточно малым. При $\mu = 0$ уравнение (3) имеет решение $x = R \cos \tau$, $\dot{x} = -R \sin \tau$; на фазовой плоскости $x\dot{x}$ интегральные кривые образуют континуум вложенных друг в друга кругов.

Пользуясь методами Пуанкаре, не трудно показать, что при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, на плоскости $x\dot{x}$ останутся, вообще говоря, только изолированные замкнутые кривые, близкие к кругам, радиусы которых даются уравнением

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(R \cos \xi, -R \sin \xi; \lambda) \sin \xi d\xi = 0 \quad (a)$$

Остальные интегральные кривые не будут замкнутыми — это будут спирали, мало отличающиеся от кругов, если μ достаточно мало¹. Также не трудно доказать, что периодические движения, соответствующие изолированным замкнутым интегральным кривым — предельным циклам Пуанкаре, — будут устойчивы по Ляпунову, если выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_{\dot{x}}(R \cos \xi, -R \sin \xi; \lambda) d\xi < 0 \quad (b)$$

Покажем, что для зависимости стационарных движений от параметра мы здесь имеем ту же самую картину, какую мы имели в § 1 и 2.

Введем обозначение $R^2 = \rho$ и запишем левую часть уравнения (a), помножив его предварительно на $-\sqrt{\rho}$, таким образом²:

$$\Phi(\rho, \lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sqrt{\rho} \cos \xi, -\sqrt{\rho} \sin \xi; \lambda) \sqrt{\rho} \sin \xi d\xi \quad (a')$$

Найдем $\Phi_{\rho}'(\rho, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\rho}'(\rho, \lambda) &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} \{g_{\dot{x}}' \sqrt{\rho} \sin \xi \cos \xi + g_{\dot{x}}' \sqrt{\rho} \cos^2 \xi\} d\xi + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g_{\dot{x}}' d\xi - \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin \xi d\xi = \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} [g \cos \xi]_0^{2\pi} + \\ &+ \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin \xi d\xi + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g_{\dot{x}}' d\xi - \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho}} \int_0^{2\pi} g \sin \xi d\xi \end{aligned}$$

откуда

$$\Phi_{\rho}'(\rho, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g_{\dot{x}}' d\xi$$

Таким образом, мы видим, что условия (a) и (b) могут быть записаны так:

$$\Phi(\rho, \lambda) = 0 \quad (A'')$$

$$\Phi_{\rho}'(\rho, \lambda) < 0 \quad (B'')$$

Отсюда следует, что условия (A'') и (B'') представляют собой полную аналогию с условиями (A) и (B), которые мы имели для состояния рав-

¹ См. Андронов [2].

² Этим самым мы меняем порядок кратности корня $\rho = 0$.

новесия консервативной системы. Только вместо координат особых точек $x_1, x_2, \dots, x_s$, мы здесь будем иметь $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ — квадраты «амплитуд» стационарных движений, к которым относятся как предельные циклы, близкие в этом случае к кругам, так и особая точка $\rho = 0$.

Таким образом, для зависимости стационарных движений от параметра мы действительно получаем ту же самую картину, которую мы имели в § 1 для зависимости состояний равновесия от параметра.

Мы здесь получаем снова «линейные ряды» теперь уже не состояний равновесия, а стационарных движений, которые сохраняют свою устойчивость или неустойчивость до слияния с другими линейными рядами, т. е. до точек бифуркации.

Как мы увидим дальше, точки бифуркации и здесь имеют чрезвычайно важное физическое значение: это те значения параметра, при которых происходят качественные изменения колебательного процесса, т. е. например, происходит возникновение колебаний, срыв колебаний и т. д.

Стационарные движения, о которых мы сейчас говорили, подобно состояниям равновесия консервативных систем образуют замкнутую систему элементов, между которыми происходит «обмен устойчивостей».

Прежде чем перейти к рассмотрению физических примеров на теорию бифуркаций, дадим еще развернутые формулы для амплитуд и устойчивости, относящиеся к наиболее важному с точки зрения приложений случаю, когда

$$g(x, \dot{x}; \lambda) = f(x, \lambda) \dot{x}$$

где $f(x, \lambda)$ — степенной ряд по x :

$$f(x, \lambda) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

коэффициенты которого $a_0, a_1, \dots$ суть функции параметра λ . Выполняя простые квадратуры, найдем, что условия (A) и (B) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, \lambda) &= \frac{1}{2} \left\{ a_0 \rho + \frac{a_2 \rho^2}{4} + \frac{a_4 \rho^3}{8} + \dots \right\} \\ \Phi'_\rho(\rho, \lambda) &= \frac{1}{2} \left\{ a_0 + \frac{a_2 \rho}{2} + \frac{3}{8} a_4 \rho^2 + \dots \right\} \end{aligned}$$

§ 4. Физические примеры. Мягкое и жесткое возбуждение катодного генератора

Чтобы пояснить значение теории бифуркаций для теории автоколебаний, рассмотрим в виде примера случай мягкого и жесткого возбуждения катодного генератора.

Возьмем обычный катодный генератор с колебательным контуром в цепи анода (фиг. 10) при обычных упрощающих предположениях, т. е. пренебрегая сеточным током и анодной реакцией. Уравнение тока в колебательном контуре имеет вид:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = i_a \quad (1)$$

где $i_a = \varphi(v)$ — анодный ток, зависящий от сеточного напряжения v , которое можно принять равным э. д. с. взаимной индукции, т. е. принять, что

$$v = M \frac{di}{dt}$$

Предполагая, как это обычно делается, что характеристика лампы может быть аппроксимирована степенным рядом, и ограничиваясь — этого будет достаточно для нашей цели — членами до пятой степени включительно, можно положить

$$i_a = \varphi(v) = \alpha_0 v + \beta_0 v^2 + \gamma_0 v^3 + \delta_0 v^4 + \varepsilon_0 v^5 \quad (2)$$

Вводя новые переменные

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad x = \frac{v}{v_0}$$

(v_0 — некоторое напряжение, например напряжение насыщения), не имеющие размерности, и выбирая, например, за малый параметр величину

$$\mu = \beta_0 v_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

также не имеющую размерности, приведем уравнение (1) к виду:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + x = \mu \frac{M}{L} \{ \alpha + 2x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 \} \frac{dx}{d\tau} \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{M\alpha_0 - CR}{\beta_0 v_0 M}, \quad \gamma = \frac{3\gamma_0 v_0}{\beta_0}, \quad \delta = \frac{4\delta_0 v_0^2}{\beta_0}, \quad \varepsilon = \frac{5\varepsilon_0 v_0^3}{\beta_0}$$

В согласии с (А'') и (В'') мы можем так записать условия для амплитуд и устойчивости¹:

$$\Phi(\rho, \lambda) = (M\alpha_0 - RC)\rho + \frac{3}{4}\gamma_0 v_0^2 M\rho^2 + \frac{5}{8}\varepsilon_0 v_0^4 M\rho^3 = 0 \quad (4)$$

$$\Phi'_\rho(\rho, \lambda) = (M\alpha_0 - RC) + \frac{3}{2}\gamma_0 v_0^2 M\rho + \frac{15}{8}\varepsilon_0 v_0^4 M\rho^2 < 0 \quad (5)$$

Пусть параметром, влиянием изменения которого на рассматриваемую систему мы интересуемся, будет коэффициент взаимной индукции M . Следовательно, нам нужно построить бифуркационные диаграммы ρ, M для мягкого и для жесткого случая возникновения колебаний. Мы ограничимся рассмотрением области $M > 0$, так как она имеет для этой задачи основной интерес; не следует также забывать, что физический смысл имеют лишь значения $\rho \geq 0$, так как лишь они соответствуют действительным амплитудам стационарных решений. Чтобы упростить выкладки, мы будем каждый раз выбирать возможно более простую математическую идеализацию, делая те или иные предположения относительно коэффициентов ряда (2), представляющего характеристику лампы².

¹ В дальнейшем обозначение $\Phi(\rho, \lambda)$ сохранено для функции, которая отличается от (а') § 3 постоянным множителем.

² Заметим, что в выражение (4) входят лишь те коэффициенты ряда, изображающего характеристику, которые стоят при нечетных степенях; остальные коэф-

А. Мягкое возникновение колебаний. Предположения $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 < 0$, $\varepsilon_0 = 0$ дают возможность, максимально упростив выкладки, отобразить существенные черты мягкого возникновения колебаний. Вводя обозначение

$$\frac{3}{4} \gamma_0 v_0^2 = -a \quad (a > 0)$$

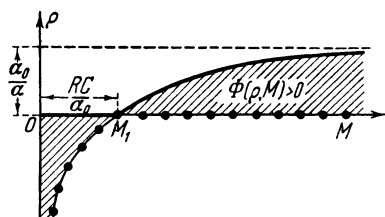
запишем $\Phi(\rho, M)$ так:

$$\Phi(\rho, M) = \{M\alpha_0 - RC - aM\rho\} \rho \quad (6)$$

Не трудно видеть, что на плоскости ρ, M бифуркационная диаграмма $\Phi(\rho, M)$ распадается на прямую $\rho = 0$ и гиперболу $M\alpha_0 - RC - aM\rho = 0$.

Не трудно также выделить области плоскости ρ, M , где $\Phi(\rho, M) > 0$ и, пользуясь общими правилами, изложенными в § 1, наметить устойчивые и неустойчивые части линейных рядов (фиг. 11). Бифуркационным значением параметра M служит значение

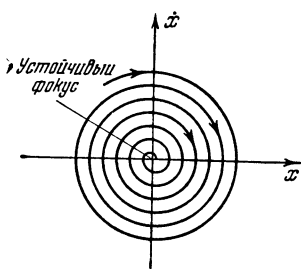
$$M_1 = \frac{RC}{\alpha_0}$$



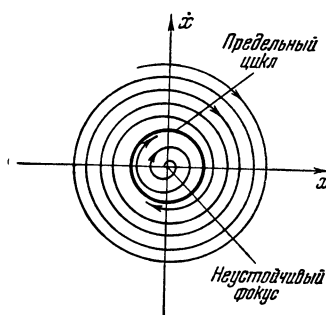
Фиг. 11.

где пересекаются линейные ряды, соответствующие вышеупомянутой прямой и гиперболу. Прямая устойчива до значения параметра $M = M_1$; затем после смены устойчивостей в точке бифуркации устойчивой становится гипербола.

Теперь перейдем от бифуркационной диаграммы ρ, M к фазовой плоскости $x\dot{x}$ и будем исследовать эту фазовую плоскость при различных M .



Фиг. 12.



Фиг. 13.

На фазовой плоскости для $M < M_1$ мы имеем только одно устойчивое стационарное движение — устойчивый фокус (фиг. 12). Куда бы мы ни

фициенты, не влияя таким образом в первом приближении на величину амплитуд и на устойчивость стационарных режимов, играют существенную роль при действии внешней силы (например, в случае детектирования резонанса n -го рода). Для наших рассуждений существенно предположение, что $\beta_0 \neq 0$, но достаточно мало, так как малый параметр

$$\mu = \beta_0 v_0 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

поместили нашу изображающую точку, она, двигаясь по спирали, в конце концов окажется в ближайшем соседстве с устойчивой особой точкой.

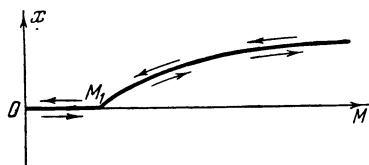
При переходе M через бифуркационное значение $M = M_1$ от особой точки отделяется, отпочковывается устойчивый предельный цикл (фиг. 13). Изображающая точка, находившаяся раньше в состоянии равновесия, перейдет теперь на предельный цикл, так как при $M > M_1$ состояние равновесия неустойчиво¹.

На физическом языке это значит — у нас начались колебания, у нас самовозбуждение. При увеличении M радиус предельного цикла увеличивается и стремится к асимптотическому значению, соответствующему

$$\rho = \frac{\alpha_0}{a}$$

При уменьшении M система ведет себя обратимо, предельный цикл сжимается, изображающая точка следит за предельным циклом и при $M = M_1$, когда предельный цикл сожмется в точку, изображающая точка снова совпадает с устойчивым фокусом.

Прибор, измеряющий амплитуду напряжения на сетке X , покажет нам плавный («мягкий») переход с постепенно меняющейся амплитудой от состояния покоя к периодическому движению и обратно (фиг. 14).



Фиг. 14.

Б. Жесткое возникновение колебаний. Предположения $\alpha_0 > 0$, $\gamma_0 > 0$, $\epsilon_0 < 0$ отображают, как известно, существенные черты жесткого возникновения колебаний.

Вводя обозначения

$$\frac{3}{4} \gamma_0 v_0^2 = a \quad (a > 0), \quad \frac{5}{8} \epsilon_0 v_0^4 = -b \quad (b > 0)$$

запишем для этого случая $\Phi(\rho, M)$ так:

$$\Phi(\rho, M) = \{M\alpha_0 - RC + aM\rho - bM\rho^2\} \rho \quad (7)$$

На плоскости ρM бифуркационная диаграмма распадается на прямую $\rho = 0$ и кривую третьего порядка $M\alpha_0 - RC + aM\rho - bM\rho^2 = 0$. На фиг. 15 указано примерное расположение этих кривых, указаны области, где

$$\Phi(\rho, M) > 0$$

и намечены устойчивые и неустойчивые части линейных рядов.

Не трудно видеть, что для $M > 0$ мы имеем два бифуркационных значения параметра:

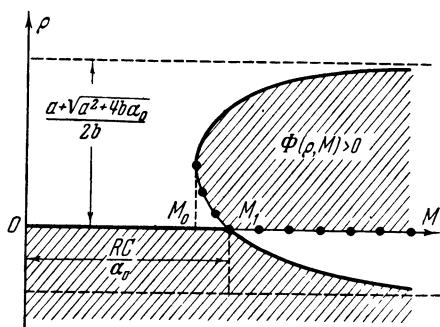
$$M_0 = \frac{RC}{\alpha_0 + \frac{a^2}{4b}}, \quad M_1 = \frac{RC}{\alpha_0}$$

¹ Мы будем предполагать, что изменения параметра M достаточно медленны. Так как всякое движение в автоколебательных системах приближается к стационарному, то при достаточно медленных изменениях параметра мы можем считать, что изображающая точка находится в окрестности стационарных движений.

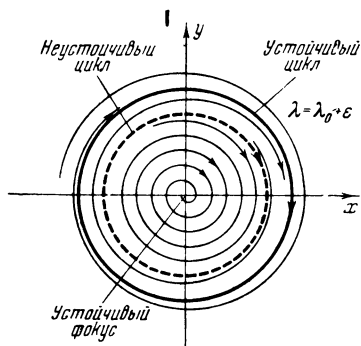
где M_0 соответствует слиянию двух линейных рядов¹, M_1 — пересечению двух линейных рядов.

Перейдем теперь к фазовой плоскости. Для $0 < M < M_0$ на нашей фазовой плоскости имеется только одно стационарное движение — устойчивый фокус в начале координат. При переходе M через бифуркационное значение параметра $M = M_0$ у нас сразу появляется пара предельных циклов, имеющих конечный радиус (фиг. 16). Один из этих циклов — большой — устойчивый, меньший — неустойчивый; характер особой точки в начале координат при этом не меняется, она остается устойчивой.

При дальнейшем увеличении M неустойчивый цикл начинает уменьшаться и при $M = M_1$ исчезает, слившись с особой точкой, которая при $M > M_1$ становится уже неустойчивой; что же касается большого цикла, то он при увеличении M монотонно растет, и его радиус асимптотически стремится к значению, соответствующему



Фиг. 15.



Фиг. 16.

равновесия до тех пор, пока это состояние равновесия не делается неустойчивым, т. е. вплоть до $M = M_1$; то, что при $M = M_0$ у нас появилась пара предельных циклов, из них один устойчивый, это «не касается» нашей изображающей точки, так как устойчивый характер состояния равновесия при этом не изменяется.

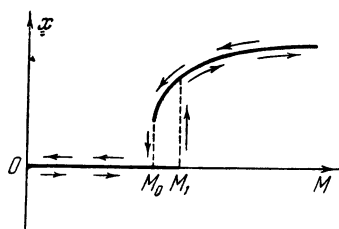
Для $M > M_1$ особая точка делается неустойчивой; изображающая точка «срывается» при переходе M через $M = M_1$, приходит к устойчивому предельному циклу и уже не покидает его при дальнейшем увеличении M . При уменьшении параметра M дело теперь пойдет по-другому. При уменьшении M изображающая точка остается на предельном цикле вплоть до $M = M_0$, когда устойчивый цикл сольется с неустой-

¹ Соответствующая точка бифуркации на плоскости ρ, M отвечает так называемому «предельному» стационарному движению.

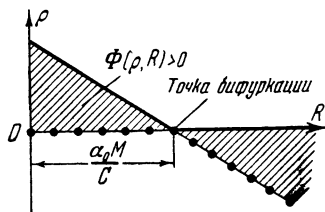
чивым и исчезнет; изображающая точка не будет реагировать на то обстоятельство, что при $M = M_1$ состояние равновесия делается устойчивым, так как это не изменяет характера того предельного цикла, по которому она двигается. При переходе M через значение $M = M_0$ изображающая точка, следуя интегральным кривым, перейдет в состояние равновесия и останется там при дальнейшем уменьшении M .

Прибор, измеряющий амплитуду напряжения на сетке, обнаружит явления резкого («жесткого») изменения амплитуды для $M = M_1$ при увеличении M и для $M = M_0$ при уменьшении M .

Мы видим, что явление протекает иначе при увеличении M , чем при уменьшении M ; мы имеем дело с процессом, носящим необратимый, «гистерезисный» характер (фиг. 17).



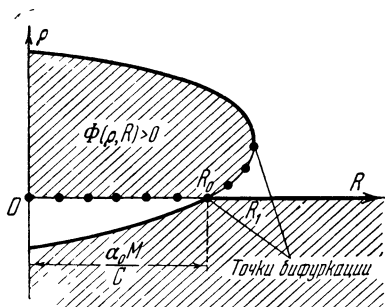
Фиг. 17.



Фиг. 18.

Мы получили таким образом бифуркационные диаграммы для мягкого и жесткого возникновения колебаний, принимая за параметр, влиянием изменений которого на рассматриваемую систему мы интересуемся,

коэффициент взаимной индукции M . Аналогичные диаграммы мы могли бы получить и для других параметров, характеризующих нашу систему. На фиг. 18 и 19 приведены бифуркационные диаграммы ρ , R , где R — омическое сопротивление, опять для случая мягкого и жесткого режима; соответствующие формулы легко могут быть получены из выражений (6) и (7).



Фиг. 19.

Мы видим таким образом, что весьма важные для физики явления возникновения колебаний, исчезновения колебаний, срыва колебаний и т. д. получают здесь, на языке особых точек, предельных циклов и бифуркационных значений параметра, свое адекватное объяснение и приводятся в стройную схему.

В заключение отметим, что изложенная здесь теория бифуркаций, относящаяся к случаю автоколебательных систем, близких к линейным консервативным системам, может быть обобщена на более сложные нелинейные системы.

Однако это обобщение требует изменения самого понятия о бифуркационных значениях параметра. Под бифуркационным значением параметра в этой обобщенной теории разумно понимать, идя по пути развития идей Пуанкаре, те значения параметра, при которых меняется топологическая структура разбиения фазового пространства на интегральные кривые, в частном случае — структура разбиения фазовой плоскости. Не трудно видеть, что это обобщенное определение в случае систем, определяемых одним уравнением первого порядка, и в случае автоколебательных систем с одной степенью свободы, близких к линейным консервативным, совпадает с тем, которым мы здесь пользовались¹.

ЛИТЕРАТУРА

1. Appleton E. and van der Pol B. On a type of oscillation hysteresis in a simple triode generator. — *Philos. Mag.*, ser. 6, 1922, vol. 43, N 253, p. 177—193.
2. Andronow A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues. — *C. r. Acad. sci.*, Paris 1929, t. 189, N 15, p. 559—561. (см. стр. 55 настоящего изд.).
3. Appell P. *Traité de mécanique rationnelle*. T. 4. 4 ed., Paris, 1926.
4. Borkhausen H. *Das Probleme der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksicht. Schneller elektrischer Schwingungen*. Leipzig, Hirzel, 1907, 113 S.

¹ Эти определения не совпадают в случае консервативных систем с одной степенью свободы, которые мы рассматривали в § 1. Дело в том, что для таких систем топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые может изменяться не только при изменении характера и числа особых точек, но и при изменении характера и числа так называемых сепаратрис.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ¹

Пусть мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = Z(x, y, z) \quad (1)$$

допускающую периодическое решение

$$\bar{x} = \varphi(t), \quad \bar{y} = \psi(t), \quad \bar{z} = \kappa(t) \quad (2)$$

с периодом T . Пусть X, Y, Z — голоморфные функции x, y, z в области рассматриваемого периодического решения.

Устойчивость решения (2) связана по Пуанкаре^[1] и Ляпунову^[2] с так называемыми характеристическими показателями h_1, h_2, h_3 , которые находятся хорошо известным путем. В нашем случае один из таких характеристических показателей всегда равен нулю², так как уравнения (1) не зависят явно от времени. Спрашивается, достаточно ли в этом случае для «устойчивости по Ляпунову», чтобы остальные характеристические показатели имели отрицательные действительные части?

Рассмотрим достаточно малые возмущения³ нашего движения, соответствующие моменту $t = t_0$. Они заполняют некоторую область вокруг точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$.

Так как у двух характеристических показателей отрицательные действительные части, по Ляпунову⁴ существует поверхность

$$F(x - \bar{x}_0, y - \bar{y}_0, z - \bar{z}_0) = 0 \quad (3)$$

являющаяся геометрическим местом таких начальных значений (т. е. соответствующих моменту $t = t_0$), что отвечающие им движения асимптотически стремятся к движению (2). Эта поверхность проходит через точку $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, которая является обыкновенной точкой поверхности⁵.

¹ Совместно с А. А. Виттом опубликована в Ж. эксперим. и теор. физики. 1933, 3, в. 5, с. 373. Эта же работа была опубликована также на немецком языке: Zur Stabilität nach Liapunow. — Zeitschrift der Sowietunion, 1933, Bd 4, Heft 4. — *Ред.*

² Пуанкаре^[1], стр. 180.

³ Т. е. достаточно малые изменения начальных условий.

⁴ Ляпунов, ^[2], стр. 43.

⁵ Ляпунов ^[2], стр. 42—43.

Рассмотрим относительное расположение нашей периодической траектории и этой поверхности вблизи точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$.

1) Траектория не может лежать на поверхности, так как любое смещение вдоль траектории периодического движения ведет к переходу от данного периодического движения к некоторому другому периодическому движению, имеющему ту же самую траекторию, но заведомо иную фазу.

2) Траектория не может лежать по одну сторону от поверхности вблизи точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, так как в этом случае всегда найдутся соседние достаточно близкие траектории, пересекающие нашу поверхность в двух точках. Это невозможно, так как движения, исходящие из этих двух точек, всегда (а следовательно, и в пределе) будут иметь отличную от нуля разность фаз.

3) Следовательно, траектория вблизи точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ лежит по обе стороны от рассматриваемой поверхности, причем по одну сторону для $t < t_0$ и по другую для $t > t_0$.

Продолжим все траектории, проходящие через нашу поверхность вблизи точки $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, в обе стороны на расстояния

$$\Delta S = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} dt \quad (4)$$

Так как X, Y, Z не обращаются одновременно в нуль на периодической траектории, то таким образом мы получим некоторую трехмерную область, окружающую точку $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$.

Очевидно, что все движения, соответствующие в момент времени $t = t_0$ точкам, лежащим в этой области, асимптотически стремятся к периодическим движениям, отличающимся от исходного движения (2) самое большое на фазу Δt_0 . Заметим, что в случае любого числа n уравнений доказательство проводится совершенно аналогичным путем.

Таким образом, мы получаем теорему:

Если исходная система n дифференциальных уравнений не зависит явно от времени, то для устойчивости по Ляпунову достаточно, чтобы $n - 1$ характеристический показатель рассматриваемого периодического движения имел отрицательную действительную часть¹.

Следовательно, в этом случае уравнения первого приближения полностью решают вопрос об устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. T. I. Paris, 1892.
2. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, XII + 251 с.
3. Andronow A. et Witt A. Sur la théorie mathématique des autooscillations. — С. г. Acad. sci., Paris, 1930, t. 190, № 4, p. 256—258 (см. стр. 58 настоящего изд.).

¹ Эта теорема была нами приведена без доказательства в заметке [4].

О СТАТИСТИЧЕСКОМ РАССМОТРЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

§ 1. Постановка задачи. — § 2. Уравнение для плотности распределения вероятности. — § 3. Уравнение для математического ожидания времени перехода. § 4. Случай одного уравнения первого порядка. — § 5. Случай двух уравнений первого порядка. — § 6. Некоторые общие замечания.

§ 1. Постановка задачи

Пусть мы имеем динамическую систему, определяемую n дифференциальными уравнениями первого порядка²:

$$\frac{dx_i}{dt} = X^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (I)$$

Эти уравнения при заданных начальных условиях однозначно определяют поведение «изображающей» нашу систему точки в фазовом пространстве. Мы примем, что на нашу систему, подчиняющуюся уравнениям (1), действуют по законам случая (здесь возможны различные вероятностные гипотезы) «толчки» или «возмущения».

Введение в рассмотрение таких «случайных» толчков преследует две цели, связанные с теми двумя задачами, которые себе ставит настоящая работа.

Первая задача. Несомненно, что процессы в реальных динамических системах не полностью отображаются дифференциальными уравнениями вида (1); эти уравнения определяют движение системы лишь в основном, лишь приблизительно, не учитывая случайных толчков и возмущений. При благоприятных условиях эксперимент может обнаружить некоторые следствия существования таких случайных толчков. Отсюда возникает задача — *выяснить общее поведение системы при наличии случайных толчков и, в частности, дать теоретическое построение, которое позволило бы из экспериментальных данных подойти к выяснению характера «случайных толчков» в реальных динамических системах.* Такая

¹ Совместно с А. А. Вяттом и Л. С. Понтрягиным. Опубликовано в Ж. эксперим. и теор. физики. 1933, 3, в. 3, с. 165.

² Мы ограничиваемся рассмотрением автономных систем, т. е. таких, для которых дифференциальные уравнения не зависят явно от времени. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для неавтономных систем.

задача была поставлена несколько лет назад Л. И. Мандельштамом как очередная задача теории автоколебаний.

Вторая задача. До сих пор в общей теории движений, например у Биркгоффа, все рассмотрения, в том числе и вероятностные, связывались с представлением о движении изображающей точки по определенной фазовой траектории. Случайные толчки, о которых только что была речь и возможность которых всегда учитывалась в динамике, когда шла речь об устойчивости по Ляпунову, переводят изображающую точку с одной траектории на другую. Отсюда естественно возникает задача *дополнить биркгоффовскую общую теорию движений соображениями, связанными с учетом случайных толчков, в частности выделить из множества движений динамической системы те движения, которые осуществляются с наибольшей вероятностью при наличии таких толчков.*

Случайные толчки при такой постановке вопроса являются лишь аппаратом, который служит для исследования характера движений, определяемых уравнением (1).

Хотя ни первая, ни вторая задачи нами не решены сколько-нибудь общим образом, тем не менее нам кажется, что последующие соображения представляют известный шаг вперед в этих направлениях и, возможно, имеют некоторый общий интерес помимо тех применений, которые они могут найти в теории автоколебаний. На наш взгляд, также является интересным проследить связь излагаемых ниже вещей со статистической механикой, однако мы не предполагаем этого сделать в настоящей работе.

§ 2. Уравнение для плотности распределения вероятности

Рассмотрим сперва простейший случай, когда $n = 1$ и когда фазовое пространство — прямая OX . Вместо системы (I) получим одно уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X(x) \quad (1)$$

Как мы уже сказали, можно задаться различными вероятностными гипотезами относительно случайных толчков. Пусть толчки происходят следующим образом: через каждый промежуток времени τ фазовая точка мгновенно перескакивает на расстояние α по случайному направлению (направления вправо и влево равновероятны), затем двигается τ секунд в согласии с уравнением движения, затем снова перескакивает и т. д.

В силу того, что движение изображающей точки определяется не только уравнением (1), но и вероятностными законами, невозможно рассматривать x как определенную функцию t , а можно говорить лишь о вероятности для нашей изображающей точки находиться в той или другой области фазового пространства.

Легко усмотреть аналогию между поставленной таким образом задачей и так называемой «задачей о движении абсолютно пьяного человека»,

которой, повидимому, первым занимался Релей¹ в связи с вопросами сложения колебаний. Рассматриваемую нами задачу можно по аналогии назвать «задачей о плавании абсолютно пьяного человека в канале, где существуют регулярные течения».

Необходимое вероятностное рассмотрение сравнительно просто приводится в предельном случае, если мы предположим, что a стремится к нулю вместе с τ , в то время как a^2/τ стремится к конечному пределу, характеризующему интенсивность толчков.

Именно переходя к пределу, можно получить уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{X(x) f\} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad b = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{a^2}{\tau} \quad (2)$$

которому² удовлетворяет плотность распределения вероятности $f(t, x)$. В том случае Релея, о котором только что шла речь, т. е. для $X(x) = 0$, уравнение (2) превращается в простое уравнение теплопроводности. Мы взяли очень частное предположение относительно характера случайных толчков. В более общем случае мы можем считать, что у нас имеется детерминированное движение изображающей точки согласно уравнению (1), на которое накладывается случайный процесс, подчиняющийся некоторому статистическому закону, зависящему от местонахождения изображающей точки. Если мы примем, что этот статистический процесс не имеет никакой собственной направленности и что случайные воздействия таковы, что вероятность больших перемещений достаточно быстро стремится к нулю с уменьшением времени τ , то мы вместо уравнения (2) получим несколько более общее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{X(x) f\} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{b(x) f\} \quad (3)$$

где $b(x)$ — коэффициент, характеризующий силу рассеяния статистического процесса, который может быть определен как $\lim (\bar{\xi}^2/\tau)$ при $\tau \rightarrow 0$, где $\bar{\xi}^2$ — средний квадрат смещения за время τ под действием статистического процесса³. По смыслу понятия плотности вероятности нас интересуют толь-

¹ Релей [1], § 42а.

² Это уравнение в частных производных и его обобщения, о которых будет идти речь дальше, хорошо известны благодаря работам Релея, Фоккера, Смолуховского, Колмогорова и т. д. (См. например, перечень литературы у Цернике [2], стр. 357). Заметим, что если $f(t, x)$ — плотность распределения вероятности, то вероятность нахождения изображающей точки в момент t в области G определяется формулой

$$W(t, G) = \int_G f(t, x) dx$$

³ Пусть $p(x, \tau, y) dy$ — вероятность изображающей точки, находившейся в положении x , попасть в силу случайного процесса в положение от y до $y + dy$ за промежуток времени τ . Тогда

$$b(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau, y) (y - x)^2 dy$$

ко такие решения уравнения (3), для которых $f(t, x) \geq 0$ и которые нормированы, т. е. для которых¹

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = 1 \quad (4)$$

Чтобы найти определенное решение уравнения (3), достаточно знать функцию $f(t, x)$ при $t = 0$, т. е. иметь начальное распределение вероятности. Если желают изучить поведение изображающей точки, в начальный момент имевшей определенное положение ξ , то следует найти такую функцию распределения $f(t, x)$, которая при $t \rightarrow \infty$ стремилась бы к нулю во всех точках, за исключением ξ , и, кроме того, удовлетворяла бы условию (4). Определенная таким образом функция зависит, конечно, от точки ξ ; мы ее будем обозначать $p(\xi, t, x)$; $p(\xi, t, x) dx$ — это вероятность случайной точки, находившейся в момент $t = 0$ в положении ξ , перейти за время t в положение от x до $x + dx$.

Может случиться (системы, для которых это имеет место, и будут нас главным образом интересоваться), что всякое нестационарное распределение плотности $f(t, x)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к определенной предельной функции $f(x)$. Чтобы найти это предельное стационарное распределение, следует положить в уравнении (3) $\partial f / \partial t = 0$ и рассматривать уравнение

$$\frac{d}{dx} \{X(x) f\} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \{b(x) f\} \quad (5)$$

которое мы будем называть стационарным случаем уравнения Фоккера. Решение уравнения (5), не зависящее от начальных условий, в наилучшей степени отражает свойства динамической системы (I). Поэтому в дальнейшем мы будем заниматься исследованием именно этого уравнения и его обобщением на случай $n > 1$. Что же касается уравнения (3), то, хотя его исследование и представляет интерес с точки зрения задачи о характере толчков в реальных физических системах, мы им не будем непосредственно заниматься; это исследование в общем виде весьма трудно; решение удастся найти лишь в немногих частных случаях [3, 4].

→ Так как мы приняли, что статистический процесс не имеет направленности, то

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau, y) (y - x) dy = 0$$

Быстрота уменьшения вероятности больших отклонений с уменьшением τ характеризуется тем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau, y) |y - x|^3 dy = 0$$

¹ При некоторых предположениях общего характера относительно уравнения (3) можно утверждать, что если при $t = 0$, $f(0, x)$ всюду положительно и нормировано, то эти условия будут сохраняться и при всех $t > 0$.

Отметим — это нам понадобится в дальнейшем, — что уравнению (3) можно дать и иное чисто статистическое толкование, а не рассматривать его, как это мы только что делали, как результат наложения статистического процесса на динамический¹.

Мы предполагали до сих пор, что у нас одно дифференциальное уравнение вида (1) и что соответствующее фазовое пространство — прямая. В общем случае вместо уравнения (1) мы будем иметь систему (I), а вместо уравнения (3) уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \{X^{\alpha} f\} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \{b^{\alpha\beta} f\} \quad (\text{II})$$

где $b^{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ опять характеризуют статистический процесс². Заметим, что координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ мы будем понимать как декартовы координаты в евклидовом пространстве.

Таким образом, если мы знаем уравнения (1), которые характеризуют динамическую систему, и знаем функции b^{ij} , которые характеризуют случайные толчки, мы можем написать уравнение (II). Уравнение (II) мы будем называть уравнением Фоккера, соответствующим системе (I)³.

¹ Пусть изображающая точка находится под действием только статистического процесса и пусть существует функция $p(\xi, t, x)$, такая, что $p(\xi, t, x) dx$ есть вероятность для изображающей точки перейти из определенного положения ξ в положение от x до $x + dx$ за время t . Тогда можно показать при известных предположениях, относящихся к функции p , и при условиях:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \tau, x) (x - \xi) dx = X(\xi)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \tau, x) (x - \xi)^2 dx = b(\xi), \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \tau, x) |x - \xi|^3 dx = 0$$

что $p(\xi, t, x)$, как функция t и x , удовлетворяет уравнению (3). Нетрудно видеть, что тогда и распределение общего вида $f(t, x)$ удовлетворит этому уравнению, так как

$$f(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) p(\xi, t, x) d\xi$$

где $f(\xi)$ — распределение при $t = 0$.

² При этом

$$b^{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n; \tau; y_1, y_2, \dots, y_n) (y_i - x_i) (y_j - x_j) dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

причем $p(x_1, x_2, \dots, x_n; \tau, y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 dy_2 \dots dy_n$ — вероятность изображающей точки, находившейся в положении $x_1, x_2, \dots, x_n$, попасть в силу случайного процесса в положение от y_1 до $y_1 + dy_1$, от y_2 до $y_2 + dy_2$ и т. д. за промежуток времени τ . Соответствующие соотношения для первых и третьих моментов могут быть написаны по аналогии с такими же для уравнения (3) (см. примечание 1 на стр. 157).

³ В виде (II) оно приведено у Колмогорова^[4], стр. 415.

Само собой разумеется, что нас интересуют не отрицательные и нормируемые решения этого уравнения. Стационарный случай этого уравнения мы получим, полагая, как и раньше $\partial f / \partial t = 0$:

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \{X^{\alpha} f\} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \{b^{\alpha\beta} f\} \quad (\text{III})$$

Вернемся теперь, имея уравнения (II) и (III), к нашим задачам, поставленным в § 1.

С точки зрения первой задачи — задачи изучения случайных толчков в реальных динамических системах¹ — нужно отыскать такие b^{ij} , которые наилучшим образом отражали бы результаты эксперимента. Здесь b^{ij} задаются исследуемой физической системой.

С точки зрения второй задачи — изучения при помощи уравнений (II) и (III) динамической системы, определяемой уравнениями (I), и этих уравнений — в особенности уравнение (III) должно отражать свойства системы (I). Поэтому с точки зрения второй задачи коэффициенты b^{ij} являются вспомогательными величинами, служащими для исследования системы (I). В дальнейшем мы, например, будем исследовать поведение решений уравнения (III) при $b^{ij} \rightarrow 0$ и будем смотреть при этом, как ведут себя эти решения в зависимости от характера стремления b^{ij} к нулю.

§ 3. Уравнение для математического ожидания времени перехода

Кроме функции распределения $f(t, x)$, имеются еще и другие функции, существенные для характеристики поведения случайной точки.

Начнем рассмотрение этих новых функций опять с простейшего одномерного случая. Пусть фазовое пространство является прямой Ox . Пусть по этой прямой двигается случайная точка, для которой соответствующая плотность распределения вероятности подчиняется уравнению Фоккера².

Вычислим вероятность того, что случайная точка, находившаяся в начальный момент времени $t = 0$ в какой-нибудь точке x внутри отрезка ab , в течение времени t выйдет из этого отрезка, перейдя³ (хотя бы один раз) либо точку a , либо точку b .

Обозначим искомую вероятность через $\varphi(t, x)$ и исследуем $\varphi(t + \tau, x)$. Так как в начальный момент $t = 0$ изображающая точка имела фиксированное положение x , то в момент τ она имеет распределение плотности

¹ Мы отнюдь не утверждаем, что всякие случайные воздействия в реальных динамических системах могут быть исследованы по схеме уравнения Фоккера.

² В дальнейших рассуждениях мы будем придерживаться чисто статистической схемы (см. примечание 2 на стр. 160).

³ Можно ставить также вопрос о вероятности выхода случайной точки либо только через левый, либо только через правый конец отрезка, либо, наконец, о вероятности невыхода. Уравнение остается, как нетрудно видеть, тем же, меняются лишь краевые условия.

вероятности $p(x, \tau, \xi)$. Так как вероятность выхода случайной точки в течение малого времени τ из интервала ab весьма мала, то, имея в виду дальнейший предельный переход, можно, пренебрегая ею, написать

$$\varphi(t + \tau, x) = \int_a^b p(x, \tau, \xi) \varphi(t, \xi) d\xi \quad (6)$$

Разлагая $\varphi(t, \xi)$ в ряд Тейлора, находим

$$\begin{aligned} \varphi(t, \xi) = & \varphi(t, x) + \varphi'_x(t, x)(\xi - x) + \frac{1}{1.2} \varphi_{xx}''(t, x)(\xi - x)^2 + \\ & + \frac{1}{1.2.3} \varphi_{xxx}'''[t, x + \vartheta(\xi - x)](\xi - x)^3 \end{aligned}$$

откуда по (4)

$$\begin{aligned} \varphi(t + \tau, x) = & \varphi(t, x) \int_a^b p(x, \tau, \xi) d\xi + \varphi'_x(t, x) \int_a^b p(x, \tau, \xi)(\xi - x) d\xi + \\ & + \frac{1}{2} \varphi_{xx}''(t, x) \int_a^b p(x, \tau, \xi)(\xi - x)^2 d\xi + \\ & + \frac{1}{6} \varphi_{xxx}'''[t, x + \vartheta(\xi - x)] \int_a^b p(x, \tau, \xi)(\xi - x)^3 d\xi \end{aligned}$$

Деля на τ и переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, мы можем распространить стоящие здесь интегралы на всю прямую¹. После перехода к пределу получим уравнение в частных производных² для функции $\varphi(t, x)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (7)$$

Найдем теперь начальные и краевые условия для $\varphi(t, x)$. Очевидно, что в начальный момент $\varphi(0, x) = 0$, если x , как было предположено, лежит внутри отрезка (a, b) . Мы примем также, что $\varphi(t, a) = \varphi(t, b) = 1$ при любом t , так как если случайная точка приближается к a или к b , то естественно допустить, что вероятность ее выхода из отрезка (a, b) вместе с тем приближается к единице.

Поставим теперь вопрос о математическом ожидании $M(x)$ времени выхода, т. е. времени, необходимого для того, чтобы изображающая точка, первоначально находившаяся в какой-нибудь точке x отрезка (a, b) , вышла из этого отрезка либо через точку a , либо через точку b . Так как вероятность выхода случайной точки за промежуток времени от t до $t + dt$ есть $(\partial \varphi / \partial t) dt$, то искомое математическое ожидание равно

$$M(x) = \int_0^\infty t \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \quad (8)$$

¹ Законность этого следует из условия, наложенного на третий момент (см. примечание 2 на стр. 160).

² Уравнения (7) и (9), как и их обобщения на случай $n > 1$, получены Л. С. Понтрягиным.

Чтобы получить дифференциальное уравнение, определяющее M , продифференцируем уравнение (5) по t , затем умножим обе его части на t и проинтегрируем от 0 до ∞ . Тогда мы получим

$$\int_0^{\infty} t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt = X(x) \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} t \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} t \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

или, так как¹

$$\int_0^{\infty} t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt = \left[t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = - [\varphi(t, x)]_{t=0}^{t=\infty} = -1$$

то искомое дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{2} b(x) \frac{d^2 M}{dx^2} + X(x) \frac{dM}{dx} = -1 \quad (9)$$

Соответствующие краевые условия, как нетрудно видеть, будут следующие:

$$M(a) = 0, \quad M(b) = 0$$

Кроме того, по смыслу задачи необходимо, чтобы $M(x) > 0$. Заметим, что если мы интересуемся математическим ожиданием времени перехода случайной точкой положения a ($a < x$), то нам следует найти решение только что поставленной задачи, а затем перейти к пределу при $b \rightarrow \infty$.

Предыдущие рассуждения легко могут быть обобщены на случай $n > 1$. Пусть мы имеем случайную точку, движение которой подчиняется уравнению Фоккера, соответствующему общему случаю. Пусть G будет некоторая область соответствующего фазового пространства, пусть A — граница этой области и γ — часть этой границы.

Назовем $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ вероятность случайной точки, находившейся в момент $t = 0$ в положении $x_1, \dots, x_n$ в области G , в течение времени t выйти из области G , пересекши при выходе часть границы γ .

Поступая аналогично предыдущему, легко найти для функции $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^n X^{\alpha}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\alpha}} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n b^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} \quad (IV)$$

с такими начальными и краевыми условиями: $\varphi(0, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ для всех точек, лежащих внутри области G ; $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ для точек, принадлежащих к части границы γ , и $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ для точек, принадлежащих к остальной части A .

Если мы хотим исследовать вопрос о выходе случайной точки из области G через часть границы γ не в течение определенного t , но в течение всего времени, следующего за начальным моментом, то нужно

¹ $\varphi(0, x) = 0$, так как по предположению x лежит внутри отрезка (a, b) ; $\varphi(\infty, x) = 1$, так как это вероятность того, что случайная точка когда-нибудь выйдет из отрезка (a, b) , равная достоверности.

перейти к пределу при $t \rightarrow +\infty$. В этом случае подобно тому, как это мы делали в § 2, нужно положить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Следовательно, вопрос сводится к нахождению решения $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n b^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = 0 \quad (\text{IV}')$$

при тех же самых краевых условиях, о которых только что шла речь. В случае, если γ совпадает с A , функции $\varphi(t, x_1, \dots, x_n)$ и $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ обращаются в единицу вдоль всей границы A . В этом случае уравнению (IV') удовлетворяет единица; это значит, что вероятность случайной точке выйти из области G когда-нибудь и где-нибудь равна единице.

Уравнение для математического ожидания времени выхода в этом случае будет иметь такой вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n b^{\alpha\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^2 M}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \\ & + \sum_{\alpha=1}^n X^\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} = -\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (\text{V})$$

где $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствующее решение уравнения (IV), а краевые условия $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на всей границе¹ A . Если γ совпадает с A , то, как мы знаем, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ и, следовательно, уравнение (V) получает вид:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n b^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 M}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \frac{\partial M}{\partial x_\alpha} = -1$$

с теми же краевыми условиями.

§ 4. Случай одного уравнения первого порядка

A. Стационарное распределение плотности вероятности. Как мы уже знаем, стационарное распределение является неотрицательным нормированным решением уравнения

$$\frac{d}{dx} \left\{ X(x) f - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} [b(x) f] \right\} = 0 \quad (5)$$

¹ Так как на границе A величина $\varphi(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ константа, то

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_0^\infty t \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$$

на границе A обращается в нуль.

На существование стационарного решения в общем случае рассчитывать нельзя. Наиболее естественные условия, при которых можно ожидать существования стационарного решения и которые мы в дальнейшем будем считать выполненными, суть следующие:

а) $c'' > b(x) > c' > 0$;

б) $X(x)$ при достаточно больших положительных x — отрицательно, при достаточно больших отрицательных x — положительно, причем и в том и в другом случае по модулю больше некоторой константы $g > 0$.

Первая интеграция уравнения (5) дает

$$X(x)f - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \{b(x)f\} = C_1 \quad (10)$$

Если условия а) и б) соблюдены и если $f(x)$ неотрицательна и нормируема¹, то $C_1 = 0$.

Интегрируя второй раз, находим

$$f(x) = \frac{C}{b(x)} e^{\varphi(x)} \quad (11)$$

где

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{X(\xi)}{b(\xi)} d\xi$$

а C — новая константа интеграции, или коэффициент нормирования. Отметим прежде всего то обстоятельство, что при $b(x)$ постоянном максимумы (или соответственно минимумы) нашего решения совпадают с точками устойчивого (или соответственно неустойчивого) равновесия для исходной динамической системы, определяемой уравнением (1). Действительно, так как e^z — функция монотонная, то максимумы и минимумы нашего решения совпадают с таковыми же функции $\varphi(x)$; что же касается этой последней функции, то для нее рассматриваемый факт весьма легко установить.

Исследуем теперь решение в предположении, что $b(x)$ равномерно убывает. Для этого представим $b(x)$ в форме $b(x) = \lambda q(x)$, где $q(x)$ ($q'' > q(x) > q' > 0$) — неизменная функция, а λ — параметр, который мы будем стремить к нулю.

Решение тогда запишется так:

$$f(x) = \frac{C(\lambda)}{q(x)} e^{\frac{\psi(x)}{\lambda}} \quad (12)$$

где

$$\psi(x) = \int_0^x \frac{X(\xi)}{q(\xi)} d\xi, \quad \frac{1}{C(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{\psi(\xi)}{\lambda}}}{q(\xi)} d\xi. \quad (13)$$

¹ Именно можно показать, что при этих условиях f и ее производная при $x \rightarrow \infty$ убывает настолько быстро, что левая часть уравнения стремится к нулю и что, следовательно, $C_1 = 0$.

Допустим, что существует единственная точка (пусть это будет начало координат), в которой $\psi(x)$ достигает абсолютного максимума. Можно показать, что при $\lambda \rightarrow 0$ $f(x)$ всюду, кроме точки нуль, стремится к нулю, а в точке нуль стремится к бесконечности. Действительно, в том случае можно найти оценку $C(\lambda)$ для достаточно малого λ :

$$\frac{1}{C(\lambda)} = s(\lambda) \sqrt[n]{\lambda}$$

где n — целое четное положительное число и $s(\lambda)$ заключено в положительных пределах¹.

Следовательно,

$$f(x) = \frac{e^{\frac{\psi(x)}{\lambda}}}{q(x) [s(\lambda) \sqrt[n]{\lambda}]} \quad (14)$$

Если $x \neq 0$, то числитель этого выражения убывает гораздо быстрее при $\lambda \rightarrow 0$, чем знаменатель, и все выражение стремится к нулю.

¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(\lambda)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{q(\xi)} e^{\frac{\psi(\xi)}{\lambda}} d\xi = \\ &= \int_{-h}^{+h} \frac{1}{q(\xi)} e^{\frac{\psi(\xi)}{\lambda}} d\xi + \int_{-\infty}^{-h} \frac{1}{q(\xi)} e^{\frac{\psi(\xi)}{\lambda}} d\xi + \int_{+h}^{+\infty} \frac{1}{q(\xi)} e^{\frac{\psi(\xi)}{\lambda}} d\xi \end{aligned}$$

Пусть h — весьма малое положительное число. Легко можно показать в силу свойств $\psi(\xi)$, что два последних интеграла при $\lambda \rightarrow 0$ бесконечно малы по сравнению с первым интегралом.

В достаточно малом интервале $(-h, +h)$ функцию $\psi(x)$ можно приближенно представить в виде $-kx^n$, где n — четное положительное целое число, т. е.

$$-k'x^n > \psi(x) > -k''x^n$$

где $k' > k'' > 0$.

Таким образом, в том же интервале имеем

$$\frac{1}{q''} e^{-\frac{k''x^n}{\lambda}} < \frac{1}{q(x)} e^{\frac{\psi(x)}{\lambda}} < \frac{1}{q'} e^{-\frac{k'x^n}{\lambda}} \quad (A)$$

Так как в равенстве

$$\int_{-h}^{+h} e^{-\frac{k\xi^n}{\lambda}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\xi^n}{\lambda}} d\xi - 2 \int_h^{\infty} e^{-\frac{k\xi^n}{\lambda}} d\xi$$

мы опять можем (как это мы только что сделали) пренебречь вторым слагаемым правой части и так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\xi^n}{\lambda}} d\xi = \sqrt[n]{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kz^n} dz = p(k) \sqrt[n]{\lambda}$$

где $p(k)$ не зависит от λ , то отсюда в силу (A) и вытекает сделанное утверждение.

Если же $x = 0$, то числитель не зависит от λ и, следовательно, все выражение стремится к бесконечности.

Имея заданную функцию $X(x)$, можно так подобрать функцию $q(x)$, что абсолютный максимум $\psi(x)$ попадает на любую из точек устойчивого равновесия уравнения (1). Стационарное распределение будет всюду стремиться к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, за исключением той точки устойчивого равновесия, где $\psi(x)$ достигает абсолютного максимума.

Следует отметить, что это свойство не есть локальное свойство данной устойчивой точки равновесия, т. е. может случиться, что в точке, локально наиболее устойчивой, т. е. где $|X'(x)|$ имеет наибольшее значение, функция $\varphi(x)$ не достигает абсолютного максимума, даже если $b(x)$ постоянно.

Рассмотрим пару простых примеров на стационарное распределение.

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0, \quad b(x) = 2D = \text{const} \quad (15)$$

где D — константа.

Фазовое пространство в этом случае — бесконечная прямая с единственным состоянием равновесия $x = 0$ (фиг. 1).

Это состояние равновесия устойчиво.

Условия а) и б) (стр. 164) выполнены.

Решением динамического уравнения служит

функция $x = Ce^{-kt}$.

Если при $t = 0$ $x = x_0$, то решение $x = x_0 e^{-kt}$

$$\varphi(x) = 2 \int \frac{X(\xi)}{b(\xi)} d\xi = -2 \int \frac{k\xi}{2D} d\xi = -\frac{k}{2D} \xi^2 \quad (16)$$

$$f(x) = Ce^{-\frac{kx^2}{2D}}$$

причем

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k\xi^2}{2D}} d\xi = \sqrt{\frac{2\pi D}{k}} \quad (17)$$

Мы получили обычное гауссовское распределение (фиг. 2), тем больше размытое, чем сильнее толчки, чем больше D , и тем больше сжатое, чем больше k , чем больше устойчивость состояния равновесия¹.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = kx(a^2 - x^2), \quad k > 0, \quad b(x) = 2D \quad (18)$$

где D — константа.

Фазовое пространство в этом случае — бесконечная прямая с тремя состояниями равновесия: $x = 0$, $x = a$, $x = -a$ (фиг. 3). Из них состояние $x = 0$ неустойчивое, состояния $x = a$ и $x = -a$ устойчивые. Условия а) и б) выполнены. Решением динамического уравнения служит

¹ Этот пример хорошо известен. См., например, Мизес, [3], § 517, 1931.

функция

$$x^2 = \frac{a^2}{1 + C'e^{-2a^2 kt}}$$

Если при $t = 0$ $x = x_0$, то

$$C' = \frac{a^2 - x_0^2}{x_0^2}$$

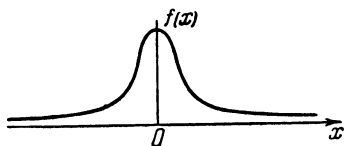
$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{ka^2 \xi - k\xi^3}{2D} d\xi = \frac{k}{D} \left\{ \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right\} \quad (19)$$

$$f(x) = C e^{\frac{k}{4D} \{2a^2 x^2 - x^4\}}$$

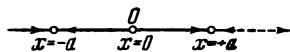
причем

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{k}{4D} \{2a^2 \xi^2 - \xi^4\}} d\xi \quad (20)$$

Мы получим стационарное распределение с двумя максимумами ($x = +a$ и $x = -a$) и минимумом $x = 0$ (фиг. 4).



Фиг. 2.

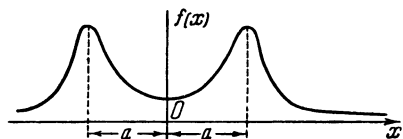


Фиг. 3.

Б. Математическое ожидание времени перехода. Вычислим для рассматриваемого одномерного случая математическое ожидание $M_q(x)$

времени перехода изображающей точки из положения x в положение q ($q < x$). Как было показано, $M(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} b(x) \frac{d^2 M}{dx^2} + X(x) \frac{dM}{dx} + 1 = 0 \quad (9')$$



Фиг. 4.

Мы должны найти решение этого уравнения при условиях $M(q) = 0$ и при условии, что интересующее нас решение возрастает наиболее медленным образом при $x \rightarrow \infty$. Производная общего решения уравнения (9') имеет вид:

$$\frac{dM}{dx} = \left\{ C + \int_x^\infty \frac{2}{b(\xi)} e^{\varphi(\xi)} d\xi \right\} e^{-\varphi(x)}$$

где

$$\varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{X(\xi)}{b(\xi)} d\xi$$

Очевидно, что при возрастании x $M(x, q)$ также возрастает; следовательно, $C \geq 0$. Но так как интересующее нас решение должно возрасть

наиболее медленным образом, то $C = 0$. Следовательно¹,

$$\frac{dM}{dx} = \left\{ \int_x^{\infty} \frac{2}{b(\xi)} e^{\varphi(\xi)} d\xi \right\} e^{-\varphi(x)} \quad (21)$$

откуда, интегрируя и принимая во внимание, что при $x = q$ $M(q) = 0$, находим

$$M_q(x) = \int_q^x \left\{ \int_{\xi}^{\infty} \frac{2}{b(y)} e^{\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(\xi)} d\xi \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что функция

$$\psi(x) = \left\{ \int_x^{\infty} \frac{2}{b(y)} e^{+\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(x)} \quad (23)$$

представляет собой обратную величину средней скорости, с которой точка движется от положения x к положению q справа налево. Точно так же найдем, что математическое ожидание $M_p(x)$ времени перехода изображающей точки из положения x в положение p ($p > x$) представится интегралом

$$M_p(x) = \int_x^p \left\{ \int_{-\infty}^{\xi} \frac{2}{b(y)} e^{+\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(\xi)} d\xi \quad (24)$$

причем

$$\bar{\psi}(x) = \left\{ \int_{-\infty}^x \frac{2}{b(y)} e^{+\varphi(y)} dy \right\} e^{-\varphi(x)} \quad (25)$$

представляет обратную величину средней скорости, с которой точка движется от положения x к положению p слева направо.

Можно показать, что в пределе при точках, стремящихся к нулю, эта средняя скорость стремится к той скорости, которая получается из динамического уравнения (1), если выбранное нами направление (от x к q или от x к p) совпадает с динамическим направлением движения, и стремится к нулю, если выбранное нами направление и динамическое противоположны.

Рассмотрим опять пару примеров, иллюстрирующих изложенную теорию, причем рассмотрим те же случаи, для которых мы только что исследовали стационарное распределение вероятности.

Пример 3.

$$\varphi(x) = -\frac{kx^2}{4D}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{D} \left\{ \int_x^{\infty} e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right\} e^{+\frac{kx^2}{2D}}, \quad \bar{\psi}(x) = \frac{1}{D} \left\{ \int_{-\infty}^x e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right\} e^{+\frac{kx^2}{2D}} \quad (26)$$

¹ $X(x)$ и $b(x)$ должны быть таковы, чтобы $\int_x^{\infty} \frac{2}{b(\xi)} e^{+\varphi(\xi)} d\xi$ имел смысл.

Математическое ожидание времени перехода из положения $x = 0$ в положение $x = p$ ($0 \leq p$)

$$M_p(0) = \frac{1}{D} \int_0^p \left\{ \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{ky^2}{2D}} dy \right\} e^{+\frac{k\xi^2}{2D}} d\xi. \quad (27)$$

Пример 4.

$$\varphi(x) = \frac{k}{4D} \{2a^2x^2 - x^4\}.$$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{D} \left\{ \int_x^{\infty} e^{\frac{k}{4D} (2a^2y^2 - y^4)} dy \right\} e^{-\frac{k}{4D} (2a^2x^2 - x^4)} \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{D} \left\{ \int_{-\infty}^x e^{\frac{k}{4D} (2a^2y^2 - y^4)} dy \right\} e^{-\frac{k}{4D} (2a^2x^2 - x^4)} \end{aligned} \quad (28)$$

Математическое ожидание времени перехода из точки $x = -a$ в точку $x = p$ ($-a \leq p \leq +a$)

$$M_p(-a) = \frac{1}{D} \int_{-a}^p \left\{ \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{k}{4D} (2a^2y^2 - y^4)} dy \right\} e^{-\frac{k}{4D} (2a^2\xi^2 - \xi^4)} d\xi \quad (29)$$

§ 5. Случай двух уравнений первого порядка

Мы ограничимся здесь несколькими замечаниями, касающимися стационарной задачи, и одним наглядным примером.

Если динамическая система характеризуется уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = X^{(1)}(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = X^{(2)}(x_1, x_2) \quad (30)$$

то плотность распределения вероятности в стационарной задаче подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \{X^{(1)}f\} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{X^{(2)}f\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \{b^{11}f\}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \{b^{12}f\}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \{b^{22}f\}}{\partial x_2^2} \right] \quad (31)$$

Нас интересует неотрицательное решение этого уравнения, интеграл от которого, взятый по всей плоскости, равен единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1x_2) dx_1 dx_2 = 1$$

Вопрос о том, когда уравнение (31) имеет такое нормированное решение, остается невыясненным. Если $b^{ij}(x_1, x_2)$ ограничены сверху и снизу, т. е. если $0 < c' < b^{ij} < c''$, то следует ожидать, что такое решение существует в том случае, когда бесконечно удаленная точка плоскости является вполне неустойчивой для системы (30).

Качественный характер решений системы (30) хорошо известен благодаря работам Пуанкаре [5] и др. Особые точки, предельные циклы,

сепаратрисы — вот те замечательные движения, которые являются определяющими элементами такой системы. Какова роль этих движений с точки зрения уравнения (31), с точки зрения статистического рассмотрения динамической системы? Следует ожидать, что вблизи устойчивых особых точек образуются максимумы функции $f(x_1, x_2)$ вблизи точек вполне неустойчивых — минимумы, вблизи устойчивых предельных циклов — подъемы характера валов и т. д. Как обстоит дело, когда толчки стремятся к нулю? Какие решения тогда выделяются как наиболее вероятные? На все эти вопросы не удалось дать столь исчерпывающих ответов, как для $n = 1$.

Исходя из предположения о существовании интересующего нас решения, можно доказать следующее предложение, доказательства которого мы здесь не приводим.

Пусть a — некоторая точка фазовой плоскости. Если 1) через a можно провести цикл без прикосновения, или 2) a лежит на неустойчивом предельном цикле, или 3) a — неустойчивый фокус или неустойчивый узел, то существует такая малая окрестность g точки a , что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_g f(x_1, x_2; \lambda) dx_1 dx_2 \rightarrow 0 \quad (32)$$

где $f(x_1, x_2; \lambda)$ — стационарное распределение, а λ — параметр, характеризующий величину толчков $\{b^{ij}(x_1, x_2) = \lambda q^{ij}(x_1, x_2)\}$. Отсюда следует, что при $\lambda \rightarrow 0$ случайная точка с вероятностью, как угодно близкой к единице, находится в произвольно малой окрестности устойчивых фокусов и узлов, устойчивых предельных циклов, сепаратрис и седел¹. Повидимому, и здесь, подобно тому как это было при $n = 1$, выбором соответствующих $q^{ij}(x_1, x_2)$ можно создавать (при $\lambda \rightarrow 0$) абсолютный максимум вероятности в окрестности того или другого из этих движений.

В заключение рассмотрим один простой пример, наглядно иллюстрирующий распределение плотности вероятности в двумерном случае. Пусть наши толчки постоянны и изотропны ($b^{12} = 0$, $b^{11} = b^{22} = b_0$)². Тогда уравнение (31) получает простой вид:

$$\frac{\partial Xf}{\partial x} + \frac{\partial Yf}{\partial y} = \frac{b_0}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \quad (33)$$

где

$$X(x, y) = \frac{dx}{dt}, \quad Y(x, y) = \frac{dy}{dt} \quad (34)$$

Выберем теперь в качестве характерного примера такую систему уравнений (34), которая имела бы неустойчивую бесконечность, устойчивый предельный цикл и неустойчивую особую точку в начале координат

¹ Можно дать примеры, где случайная точка при $\lambda \rightarrow 0$ с вероятностью единицы попадает в окрестность устойчивого узла, устойчивого фокуса или устойчивого предельного цикла; однако полностью выяснить роль седла пока не удалось.

² Постоянные толчки могут быть сделаны изотропными линейной заменой переменных.

(фиг. 5). Рассмотрим частный случай:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x, y) = \{1 - (x^2 + y^2)\} x - y; \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) = \{1 - (x^2 + y^2)\} y + x\end{aligned}\quad (34')$$

который весьма легко решается путем перехода к полярным координатам r и φ ($x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$).

Действительно, переходя к полярным координатам, имеем

$$\frac{dr}{dt} = R(r, \varphi) = r(1 - r^2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Phi(r, \varphi) = 1 \quad (35)$$

С другой стороны, нетрудно написать уравнение (33) в полярных координатах с функциями R и Φ вместо $X(x, y)$ и $Y(x, y)$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{rRf\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \{r\Phi f\} = \frac{b_0}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial f}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right] \quad (36)$$

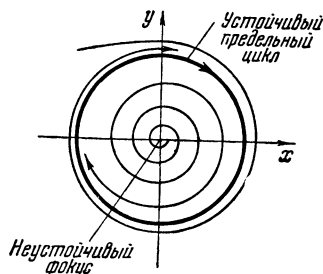
В согласии с тем, что в нашем примере R и Φ не зависят от φ , будем искать симметричное, не зависящее от φ решение уравнения (36).

Такое решение удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} \{rRf\} = \frac{b_0}{2} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{df}{dr} \right\} \quad (37)$$

откуда, интегрируя, находим

$$Rf = \frac{1}{2} b_0 \frac{df}{dr} + \frac{C}{r}$$



Фиг. 5.

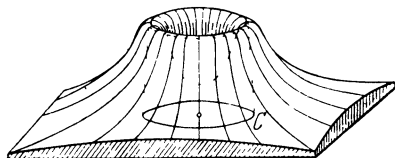
Предполагая, что f и $df/\bar{dr}$ при $r \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремятся к нулю, можем положить $C = 0$;

откуда

$$f = Ce^{\frac{2}{b_0} \int_0^r Rdr} = Ce^{\frac{1}{b_0} \{r^2 - \frac{1}{2} r^4\}}$$

причем

$$\frac{1}{C} = 2\pi \int_0^\infty e^{\frac{1}{b_0} \{r^2 - \frac{1}{2} r^4\}} r dr.$$



Фиг. 6.

Нетрудно сообразить характер полученной нами плотности распределения вероятности. Мы имеем «кратерообразную» поверхность, имеющую минимум в точке $r = 0$ и максимумы которой образуют окружность, лежащую над предельным циклом $r = 1$ (фиг. 6).

§ 6. Некоторые общие замечания

Замечания, касающиеся первой задачи

1. Схема с «толчками» или точнее со «скачками» на фазовой плоскости является абстрактной схемой. Ее следует приспособить сообразно тем или иным условиям задачи¹. Например, обычные «удары» классической механики — это толчки или «скачки» по отношению к скоростям, но отсутствие воздействия на изображающую точку по отношению к координатам.

2. При всяком выводе уравнения Фоккера допускается, что в течение сколь угодно малого промежутка времени возможны сколь угодно большие «скачки», однако с весьма малой вероятностью. Это соответствует тому, что допускаются сколь угодно быстрые движения фазовой точки. Естественно, что такое допущение отражается и на результате: именно если мы будем исходить из начального Дираковского распределения при $t = 0$ (нуль всюду, кроме одной точки), то мы получим решение, при сколь угодно малом значении t всюду отличное от нуля. Однако это решение стремится к нулю при отдалении от начального значения чрезвычайно быстро. Если даже принять, что в реальных случаях сколь угодно быстрые движения фазовой точки невозможны, получаемые нами решения в достаточной мере соответствуют действительности, так как они допускают сколь угодно большие толчки лишь с малой вероятностью. Аналогичные вещи, как известно, имеют место и в обычной теории теплопроводности.

3. Заметим еще следующее: не всегда является очевидным в конкретной системе, какое воздействие считать статистическим и какое динамическим. Например, при движении броуновской частицы в поле консервативных сил следует принять, что, кроме консервативных сил, на нее еще действует регулярная сила трения, пропорциональная скорости, порожденная случайными толчками молекул. Эту силу трения разумно учесть при написании динамических уравнений.

Замечания, касающиеся второй задачи

Мы занимались поведением стационарного решения при толчках, стремящихся к нулю, для случаев $n = 1$ и $n = 2$. В более общих случаях, при $n > 2$, естественно предположить, что соответствующим предельным переходом можно выделять те или другие асимптотические устойчивые (в смысле приближения к орбитам) совокупности рекуррентных траекторий; однако несомненно, что такой предельный переход может выделять и другие классы движений. Все это относится к существенно неконсервативным случаям, не обладающим интегральными

¹ Мы уже упоминали о том, что отнюдь не всякие случайные воздействия в динамических системах могут быть исследованы по схеме уравнения Фоккера.

инвариантами. В случае, если система допускает интегральный инвариант и если фазовое пространство системы замкнуто, то картина поведения функции распределения при толчках, стремящихся к нулю, повидимому, существенно иная. Здесь возникает интересный вопрос: не стремится ли стационарное распределение при толчках, стремящихся к нулю, к одному из интегральных инвариантов системы? На эту мысль наводит тот факт, что уравнение Фоккера при толчках, стремящихся к нулю, переходит в уравнение интегрального инварианта.

Положительный ответ на этот вопрос может быть использован для обоснования¹ некоторых выводов классической статистической механики, опиравшихся на квазиэргодическую гипотезу. Действительно, пусть R будет фазовое пространство некоторой механической гамильтоновой проблемы и M — многообразие постоянной энергии в нем. Пусть M будет замкнуто. Так как всякая траектория, пересекающаяся с M , проходит целиком на M , то на M тем самым установлена система дифференциальных уравнений. Если эта система дифференциальных уравнений имеет единственный интегральный инвариант, то он известен — это фазовая площадь на M . Таким образом, при достаточно малых толчках вероятность попадания случайной точки в некоторую область пропорциональна приблизительно соответствующей фазовой площади.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh Lord. Theory of sound. Vol. 1. London, 1894.
2. Zernike F. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. In: Handbuch der Physik, Bd 3, Berlin, 1928, S. 419—492.
3. Mises R. von. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretische Physik. Wien, 1931, § 517. (Vorlesungen aus dem Gebiete d. angewandtem Mathematik. I.)
4. Kolmogoroff A. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Math. Ann., 1931, Bd. 104, S. 454.
5. Poincaré H. Oeuvres. T. I. Paris, 1928.

¹ Мы сейчас не рассматриваем вопроса о физической ценности такого обоснования, основывающегося на допущении статистических воздействий.

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АУТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ¹

Введение и краткое резюме. — § 1. Отыскание периодического решения. — § 2. Устойчивость периодического решения. — § 3. Случай двух индуктивно связанных контуров, из которых один возбужден катодной лампой.

Введение и краткое резюме

При исследовании автоколебаний возникают следующие фундаментальные вопросы.

1. Каковы состояния равновесия, и устойчивы ли они по отношению к достаточным малым отклонениям?

2. Каковы стационарные движения, и устойчивы ли они по отношению к достаточно малым отклонениям?

3. Каков процесс установления стационарных состояний, или, что то же самое, каково поведение системы при больших отклонениях от стационарных состояний?

4. Как меняется характер возможных движений при изменении параметров, характеризующих рассматриваемую систему?

Наиболее простая задача—это автоколебания автономной системы с одной степенью свободы. Здесь стационарными движениями могут быть только периодические движения. Топологическая картина протекания интегральных кривых сравнительно проста, и здесь иногда² удается дать более или менее удовлетворительный ответ на все упомянутые выше вопросы.

В случае двух степеней свободы, даже если система автономна, топологическая картина протекания интегральных кривых чрезвычайно усложняется вследствие увеличения числа измерений фазового пространства; стационарными движениями тут, по видимому, могут быть не только периодические, но и более сложные движения.

Ответ на первый вопрос и в этом случае сравнительно нетруден, так как нахождение состояний равновесия сразу сводится к разрешению простых (т. е. не дифференциальных) уравнений; выяснение устойчивости состояний равновесия сводится к исследованию некоторой системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и, следовательно, автоматически сводится к применению известного критерия Раута-Гурвица [1, 2].

Строгий ответ на второй вопрос представляет значительные трудности, даже если ограничиться исследованием периодических решений. Ответы на третий и четвертый вопросы особенно трудны, так как в сущности пока в этих направлениях нет строгих методов исследования. Настоящая работа дает строгую математическую теорию периодических режимов в автономной автоколебательной системе с двумя степенями свободы в случае колебаний, близких к синусоидальным. Для этой цели

¹ Совместно с А. Виттом. Опубликовано в Ж. техн. физики. 1934, 4, в. 1, с. 122.

² Например, для случая колебаний, близких к синусоидальным.

в работе использованы результаты Пуанкаре, относящиеся к нахождению периодических решений в случае так называемого малого параметра^[3], и результаты Ляпунова, относящиеся к устойчивости периодических движений^[4]. Таким образом, настоящая работа дает частичный ответ на второй из поставленных выше вопросов.

Работа распадается на две части. Первая, математическая, часть посвящена нахождению амплитуд периодических решений (§ 1) и исследованию их устойчивости (§ 2).

Во второй, физической, части в качестве примера на применение общих формул, полученных в математической части (пригодных для любого рода связи и любых условий возбуждения, если только колебания достаточно близки к синусоидальным¹⁾), рассматриваются автоколебания двух связанных контуров, из которых один самовозбужден.

Краткое изложение результатов математической части было опубликовано в Comptes Rendus Парижской Академии Наук^[5]².

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Математическое исследование разбивается на две задачи. Первая задача заключается в отыскании периодического решения некоторой системы дифференциальных уравнений. Метод отыскания периодических решений и исследование вопроса об их существовании развиты Пуанкаре³. Как уже было указано, этот метод дает возможность находить периодические решения для достаточно малых значений некоторого параметра μ , если мы знаем периодические решения для $\mu = 0$.

Самые периодические решения и соответствующие им начальные условия получаются при этом в виде степенных рядов по μ , сходящихся для достаточно малых μ .

Мы будем здесь рассматривать такие нелинейные системы, зависящие от параметра μ , которые при $\mu = 0$ переходят в консервативные линейные системы. Для удобства теоретических рассуждений мы воспользуемся так называемыми нормальными координатами⁴, которые оказывают существенную пользу при исследовании линейных консервативных систем со многими степенями свободы. Каждое дифференциальное уравнение движения такой линейной консервативной системы при исполь-

¹ Точнее: если только рассматриваемая автоколебательная система достаточно близка к линейной консервативной системе.

² Необходимо заметить, что вследствие недосмотра в вычислениях приведенные в [5] условия устойчивости E [соответствующие условиям (34) настоящей работы] нуждаются в исправлении. Соответствующая ошибка была нам указана А. Г. Майером, которому мы здесь выражаем благодарность. Заметим, что этот недосмотр не влияет на верность приведенных там окончательных формул для амплитуд и устойчивости [формулы (D), (F)].

³ Пуанкаре^[3], стр. 89.

⁴ Заметим, что самое понятие «нормальные координаты» имеет смысл только для линейных консервативных систем. Когда мы будем говорить о нормальных координатах для нелинейной системы, то это значит, что мы имеем в виду ту линейную систему, которая получается из данной нелинейной при $\mu = 0$. По поводу нормальных координат см. Крылов^[6] или Релей^[7].

зовании нормальных координат содержит лишь одну зависимую переменную и, следовательно, интегрируется мгновенно.

В нашем случае использование нормальных координат, кроме ряда преимуществ в отношении техники вычислений, позволяет сразу в общем виде исследовать различные случаи связи и возбуждения.

Вторая задача заключается в исследовании устойчивости найденных периодических движений, причем под устойчивостью мы будем понимать устойчивость в смысле Ляпунова¹. В согласии с Ляпуновым, если мы имеем систему

$$\frac{d\xi_i}{dt} = X_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

и имеем какое-нибудь решение

$$\xi_i = \Phi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

то для решения вопроса об его устойчивости мы должны составить так называемые «уравнения первого приближения» или «уравнения в вариациях», вводя вместо ξ_i новые зависимые переменные U_i , $\{\xi_i = \Phi_i(t) + U_i\}$ и отбрасывая в дифференциальных уравнениях все члены, содержащие квадраты и высшие степени U_i . В нашем случае уравнения первого приближения являются системой линейных уравнений с периодическими коэффициентами вида

$$\frac{dU_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) U_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Решения такой системы могут быть записаны в таком виде:

$$U_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}(t) e^{\alpha_j t} \quad (i = 1, \dots, n),$$

где $S_{ij}(t)$ — периодические функции t , а α_j ($j = 1, \dots, n$) — так называемые характеристические показатели.

Если все α_j имеют отрицательные действительные части, то все решения вспомогательных уравнений затухают.

Ляпунов² доказал, что в этом случае периодическое решение является вполне устойчивым в том смысле, что всякое достаточно малое отклонение от периодического движения асимптотически стремится к нулю, даже если мы примем во внимание те члены высших порядков, которые отбросили при составлении вспомогательных уравнений.

В случае, когда исходные дифференциальные уравнения не зависят явно от времени, один из характеристических показателей всегда равен

¹ Ляпунов^[4]. В настоящей работе мы не входим в обсуждение того, насколько определение Ляпунова соответствует тем требованиям устойчивости, которые предъявляются к движениям физических и технических приборов.

² Ляпунов^[4], стр. 211.

нулю¹. Однако в этом случае требование, чтобы все остальные характеристические показатели имели отрицательные действительные части, достаточно для устойчивости по Ляпунову².

§ 1. Отыскание периодического решения

Дифференциальные уравнения, исследование которых нас интересует, при надлежащем выборе системы координат (нормальные координаты) могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi &= \mu f(\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}; \mu) \\ \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta &= \mu g(\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}; \mu),\end{aligned}\quad (1)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени, μ — действительный и положительный параметр, который, как мы предположим, можно выбирать произвольно малым. Функции f и g мы предположим голоморфными по $\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}, \mu$ в области исходного периодического решения.

Пусть исходное решение (при $\mu = 0$) имеет вид:

$$\xi = R \cos \omega_1 t = \varphi_0(t), \quad \eta = 0 \quad (2)$$

Это решение с периодом

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Точно так же мы могли бы выбрать за исходное решение

$$\xi = 0, \quad \eta = R \cos \omega_2 t,$$

которое имеет период

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Остановимся на первом предположении. Полагая

$$\xi = \varphi_0(t) + x, \quad \eta = 0 + y,$$

найдем для x и y такие дифференциальные уравнения³:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega_1^2 x &= \mu \{f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0; 0, 0; 0) + \\ &+ f_{\xi}' x + f_{\dot{\xi}}' \dot{x} + f_{\eta}' y + f_{\dot{\eta}}' \dot{y} + f_{\mu}' \mu + O_2(x, \dot{x}; y, \dot{y}; \mu)\} \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= \mu \{g(\varphi_0, \dot{\varphi}_0; 0, 0; 0) + \\ &+ g_{\xi}' x + g_{\dot{\xi}}' \dot{x} + g_{\eta}' y + g_{\dot{\eta}}' \dot{y} + g_{\mu}' \mu + O_2(x, \dot{x}; y, \dot{y}; \mu)\} \quad (3)\end{aligned}$$

¹ Пуанкаре [3], стр. 179.

² Это утверждение легко доказать, исходя из результатов Ляпунова. Доказательство будет нами дано в другом месте.

³ Ниже $O_k(u, v, w, \dots)$ — выражения, которые содержат соответствующие переменные не ниже, чем в k -й степени. Заметим, что в разных уравнениях этот символ может обозначать различные функции.

Следуя Пуанкаре, мы можем искать решение этих уравнений в виде рядов, расположенных по степеням μ и начальным значениям:

$$\begin{aligned} x(0) &= \beta_1, & \dot{x}(0) &= \beta_2, & y(0) &= \beta_3, & \dot{y}(0) &= \beta_4 \\ x &= \beta_1 A + \beta_2 B + \beta_3 C + \beta_4 D + \mu \{E + \beta_1 F + \beta_2 G + \beta_3 H + \beta_4 K + \mu L + \\ & \quad + O_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \mu)\} + \overline{O}_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) \\ y &= \beta_1 \overline{A} + \beta_2 \overline{B} + \beta_3 \overline{C} + \beta_4 \overline{D} + \mu \{\overline{E} + \beta_1 \overline{F} + \beta_2 \overline{G} + \beta_3 \overline{H} + \\ & \quad + \beta_4 \overline{K} + \mu \overline{L} + O_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \mu)\} + \overline{O}_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \end{aligned} \quad (4)$$

где $A, B, \dots, \bar{A}, \bar{B}, \dots$ — функции времени.

Согласно Пуанкаре^[3] мы можем в нашем случае (уравнения не содержат явно времени), не нарушая общности, положить одно из β равным нулю; положим, например, $\beta_2 = 0$.

Подставляя ряды (4) в уравнения (3) и сравнивая коэффициенты при членах одинакового измерения (в отношении $\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu$) в правых и левых частях, мы получим линейные дифференциальные уравнения для последовательного определения коэффициентов $A, B, \dots, \bar{A}, \bar{B}, \dots$. Произвольные постоянные в интегралах этих уравнений, легко разрешаемых в квадратурах, мы определим так, чтобы тождественно¹ удовлетворялись начальные условия.

Выполняя эти операции, находим:

$$\begin{aligned}
C &= 0, & D &= 0, & O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) &= 0, & A &= \cos \omega_1 t \\
E &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t f(\varphi_0, \dot{\varphi}_0; 0, 0; 0) \sin \omega_1(t-q) dq \\
F &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \{\cos \omega_1 q \cdot f_{\xi}' - \omega_1 \sin \omega_1 q \cdot f_{\xi}''\} \sin \omega_1(t-q) dq \\
H &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \{\cos \omega_2 q \cdot f_{\eta}' - \omega_2 \sin \omega_2 q \cdot f_{\eta}''\} \sin \omega_1(t-q) dq \quad (5a) \\
K &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 q \cdot f_{\eta}' + \cos \omega_2 q \cdot f_{\eta}'' \right\} \sin \omega_1(t-q) dq \\
L &= \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \{Ef_{\xi}' + \dot{E}f_{\xi}'' + \bar{E}f_{\eta}' + \dot{\bar{E}}f_{\eta}'' + f_{\mu}'\} \sin \omega_1(t-q) dq \\
&\dots\dots\dots \\
0, & \quad \bar{O}_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4) = 0, & \bar{C} &= \cos \omega_2 t, & \bar{D} &= \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t
\end{aligned}$$

¹ Т. е. независимо от μ .

$$\begin{aligned}
\bar{E} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t g(\varphi_0, \dot{\varphi}_0; 0, 0; 0) \sin \omega_2(t-q) dq \\
\bar{F} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \{\cos \omega_1 q \cdot g_{\xi}' - \omega_1 \sin \omega_1 q \cdot g_{\xi}''\} \sin \omega_2(t-q) dq \\
H &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \{\cos \omega_2 q \cdot g_{\eta}' - \omega_2 \sin \omega_2 q \cdot g_{\eta}''\} \sin \omega_2(t-q) dq \\
\bar{K} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 q \cdot g_{\eta}' + \cos \omega_2 q \cdot g_{\eta}'' \right\} \sin \omega_2(t-q) dq \\
\bar{L} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \{E g_{\xi}' + \dot{E} g_{\xi}'' + \bar{E} g_{\eta}' + \dot{\bar{E}} g_{\eta}'' + g_{\mu}'\} \sin \omega_2(t-q) dq
\end{aligned} \tag{56}$$

и т. д.

Для того, чтобы $\xi = \varphi_0(t) + x$, $\eta = 0 + y$ было бы периодическим решением уравнений (1), имеющим период $T = 2\pi/\omega_1 + \tau$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
[\xi] &= \xi\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - \xi(0) = 0; \quad [\dot{\xi}] = \dot{\xi}\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - \dot{\xi}(0) = 0 \\
[\eta] &= \eta\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - \eta(0) = 0; \quad [\dot{\eta}] = \dot{\eta}\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - \dot{\eta}(0) = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Эти четыре условия могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}
R[\cos \omega_1 t] + \beta_1[A] + \mu\{[E] + \beta_1[F] + \beta_3[H] + \beta_4[K] + \\
+ \mu[L] + [O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu)]\} &= 0 \\
R[-\omega_1 \sin \omega_1 t] + \beta_1[\dot{A}] + \mu\{[\dot{E}] + \beta_1[\dot{F}] + \beta_3[\dot{H}] + \beta_4[\dot{K}] + \\
+ \mu[\dot{L}] + [O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu)]\} &= 0 \\
\beta_3[\bar{C}] + \beta_4[\bar{D}] + \mu\{[\bar{E}] + \beta_1[\bar{F}] + \beta_3[\bar{H}] + \beta_4[\bar{K}] + \mu[\bar{L}] + \\
+ [O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu)]\} &= 0 \\
\beta_3[\dot{\bar{C}}] + \beta_4[\dot{\bar{D}}] + \mu\{[\dot{\bar{E}}] + \beta_1[\dot{\bar{F}}] + \beta_3[\dot{\bar{H}}] + \beta_4[\dot{\bar{K}}] + \mu[\dot{\bar{L}}] + \\
+ [O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu)]\} &= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

Квадратные скобки здесь обозначают ту же операцию, что и в уравнениях (6). Разлагая выражения в квадратных скобках в ряды по τ и вводя подходящие обозначения

$$\begin{aligned}
[A] &= A\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - A(0) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \dots \\
[\dot{A}] &= \dot{A}\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - \dot{A}(0) = \dot{a}_0 + \dot{a}_1\tau + \dot{a}_2\tau^2 + \dots \\
[E] &= E\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - E(0) = e_0 + e_1\tau + e_2\tau^2 + \dots
\end{aligned} \tag{8}$$

где $a_0, a_1, \dots; \dot{a}_0, \dot{a}_1, \dots; e_0, e_1, \dots$ могут быть определены по формулам (5); мы получаем из (7)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{R\omega^2\tau}{2} + \beta_1 \{a_0 + a_1\tau\} + \mu \{e_0 + e_1\tau + \beta_1 f_0 + \beta_3 h_0 + \beta_4 k_0 + \mu l_0\} + \\
 & \quad + O_3(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) = 0 \\
 & -R\omega_1^2\tau + \beta_1 \{\dot{a}_0 + \dot{a}_1\tau\} + \mu \{\dot{e}_0 + \dot{e}_1\tau + \beta_1 \dot{f}_0 + \beta_3 \dot{h}_0 + \beta_4 \dot{k}_0 + \mu \dot{l}_0\} + \\
 & \quad + O_3(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu, \tau) = 0 \\
 & \beta_3 \{\bar{e}_0 + \bar{e}_1\tau\} + \beta_4 \{\bar{d}_0 + \bar{d}_1\tau\} + \mu \{\bar{e}_0 + \bar{e}_1\tau + \beta_1 \bar{f}_0 + \beta_3 \bar{h}_0 + \beta_4 \bar{k}_0 + \mu \bar{l}_0\} + \\
 & \quad + O_3(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu, \tau) = 0 \\
 & \beta_3 \{\dot{\bar{e}}_0 + \dot{\bar{e}}_1\tau\} + \beta_4 \{\dot{\bar{d}}_0 + \dot{\bar{d}}_1\tau\} + \mu \{\dot{\bar{e}}_0 + \dot{\bar{e}}_1\tau + \beta_1 \dot{\bar{f}}_0 + \beta_3 \dot{\bar{h}}_0 + \beta_4 \dot{\bar{k}}_0 + \mu \dot{\bar{l}}_0\} + \\
 & \quad + O_3(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu, \tau) = 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

В этих уравнениях часть коэффициентов не зависит от выбора функций f и g . Например, всегда

$$\begin{aligned}
 a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \dot{a}_0 = 0, \quad \dot{a}_1 = -\omega_1^2 \\
 \bar{e}_0 = \cos \gamma - 1, \quad \bar{d}_0 = \frac{1}{\omega_2} \sin \gamma, \quad \dot{\bar{e}}_0 = -\omega_2 \sin \gamma, \quad \dot{\bar{d}}_0 = \cos \gamma - 1,
 \end{aligned} \tag{10}$$

причем

$$\gamma = 2\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

Второе уравнение (9), если мы примем во внимание (10) и исследуем несколько подробнее соответствующее $O_3(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu, \tau)$ даст нам τ — поправку к периоду

$$\tau = \mu \{\alpha_0 + \beta_1 \alpha_1 + \beta_3 \alpha_3 + \beta_4 \alpha_4 + \mu \alpha_5 + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu)\},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{\dot{e}_0}{R\omega_1^2}, \quad \alpha_1 = \frac{R\dot{f}_0 - \dot{e}_0}{R^2\omega_1^2}, \quad \alpha_3 = \frac{\dot{h}_0}{R\omega_1^2}, \quad \alpha_4 = \frac{\dot{R}_0}{R\omega_1^2}, \quad \alpha_5 = \frac{R\omega_1^2 \dot{e}_0 + \dot{e}_0 \dot{e}_1}{R^2\omega_1^4} \tag{11}$$

Взяв найденное таким образом значение τ и подставив его в оставшиеся неиспользованными уравнения (9), мы будем иметь по сокращении на μ первого из них такие три уравнения для определения $\beta_1, \beta_3, \beta_4$:

$$\begin{aligned}
 e_0 + \beta_1 f_0 + \beta_3 h_0 + \beta_4 k_0 + \mu \left(l_0 + \alpha_0 e_1 - \frac{R}{2} \omega_1^2 \alpha_0^2 \right) + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) &= 0 \\
 \beta_3 (\cos \gamma - 1) + \beta_4 \left(\frac{1}{\omega_2} \sin \gamma \right) + \mu e_0 + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) &= 0 \\
 \beta_3 (-\omega_2 \sin \gamma) + \beta_4 (\cos \gamma - 1) + \mu \dot{e}_0 + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) &= 0
 \end{aligned} \tag{12}$$

Мы ищем такое периодическое решение ур-ний (1), которое при $\mu \rightarrow 0$ стремилось бы к исходному решению (2); т. е., иначе говоря, для нашего решения все β_i должны стремиться к нулю, когда $\mu \rightarrow 0$.

Отсюда на основании (12) следует необходимое условие существования искомого периодического решения

$$e_0 = 0 \quad (13)$$

или в раскрытом виде

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} f(R \cos \omega_1 q, -\omega_1 R \sin \omega_1 q; 0, 0; 0) \sin \omega_1 q \, dq = 0 \quad (13a)$$

Это условие определяет амплитуду того периодического движения¹ с периодом $\frac{2\pi}{\omega_1}$, соответствующего $\mu = 0$, сколь угодно близко к которому устанавливается рассматриваемое периодическое движение при достаточно малом μ .

Достаточное же условие существования искомого периодического решения — это, как следует из (12), — неравенство нулю соответствующего детерминанта:

$$\begin{vmatrix} f_0 & h_0 & k_0 \\ 0 & \cos \gamma - 1 & \frac{1}{\omega_2} \sin \gamma \\ 0 & -\omega_2 \sin \gamma & \cos \gamma - 1 \end{vmatrix} = 2f_0 (1 - \cos \gamma) \neq 0 \quad (14)$$

Причем в этом условии нужно под R (от которого зависит f_0) подразумевать те значения, которые отвечают требованию (13).

Если $\gamma \neq 2\pi n$, где n — целое число, или иначе: если $\omega_2 \neq n\omega_1$, т. е. если нормальная частота ω_2 не является «обертоном» нормальной частоты ω_1 ², то условие существования решения (2) может быть записано так:

$$f_0 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{ \cos \omega_1 q f_{\xi}' - \omega_1 \sin \omega_1 q \cdot f_{\xi}' \} \sin \omega_1 q \, dq \neq 0 \quad (15)$$

Если детерминант (14) равен нулю, но не равен нулю один из детерминантов, составленных в предположении, что не β_2 , а какое-нибудь другое β положено равным нулю, то это будет также достаточным условием существования³; если же все такие детерминанты равны нулю, то необходимо особое рассмотрение.

Найденное периодическое решение имеет такой вид:

$$\begin{aligned} \xi = \Phi(t) &= R \cos \omega_1 t + \beta_1 A + \mu \{ E + \beta_1 F + \beta_3 H + \beta_4 K + \mu L + \\ &\quad + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) \} \\ \eta = \bar{\Phi}(t) &= \beta_3 \bar{C} + \beta_4 \bar{D} + \mu \{ \bar{E} + \beta_1 \bar{F} + \beta_3 \bar{H} + \beta_4 \bar{K} + \mu \bar{L} + \\ &\quad + O_2(\beta_1, \beta_3, \beta_4, \mu) \}, \end{aligned} \quad (16)$$

¹ Вообще таких движений может быть несколько и даже, при подходящем выборе функции f , бесконечное множество.

² Случай $\gamma = 2\pi h$ требует отдельного рассмотрения, именно в таком случае нужно брать иное исходное решение. Например, если $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_1 = \omega$, то за такое исходное решение можно взять $\xi = P \cos \omega t + Q \sin \omega t$, $\eta = R \cos 2\omega t$.

³ Пуанкаре [3], стр. 90.

где R определяется по (13); $A, E, F, \dots$ — формулами (5); $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ — формулами (12).

Если мы в этом решении заменим $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ их выражениями¹, полученными из (12), и соберем члены с одинаковыми степенями, то решение представится в виде рядов, расположенных по степеням μ , коэффициенты которых — функции времени

$$\begin{aligned}\xi &= \Phi(t) = \varphi_0 + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \mu^3\varphi_3 + \dots \\ \eta &= \bar{\Phi}(t) = \mu\bar{\varphi}_1 + \mu^2\bar{\varphi}_2 + \mu^3\bar{\varphi}_3 + \dots\end{aligned}\quad (16a)$$

Здесь $\varphi_0 = R \cos \omega_1 t$; остальных функций мы не будем выписывать, хотя первые из них, например $\varphi_1, \varphi_2, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2$, найдутся весьма легко на основании приведенных нами формул. Эти функции нам не понадобятся для решения вопросов устойчивости, если только мы предположим μ достаточно малым².

Заметим, что ряды (16a) можно надлежащей перегруппировкой членов представить в виде рядов Фурье с коэффициентами, являющимися степенными рядами по μ .

Мы отыскивали периодические решения, близкие к решениям вида $\xi = R \cos \omega_1 t$; $\eta = 0$. Совершенно аналогично проводится отыскание периодических решений, близких к решениям вида $\xi = 0$, $\eta = R \cos \omega_2 t$. Все полученные нами результаты сохраняют свою силу и для этого последнего случая, если только в полученных формулах надлежащим образом изменить обозначения.

§ 2. Устойчивость периодического решения

Исследуем теперь устойчивость найденного периодического решения (16).

Подставляя

$$\xi = \Phi(t) + u, \quad \eta = \Phi(t) + v \quad (17)$$

в уравнения (1) и откидывая все члены высших порядков относительно u и v , мы получим так называемые «уравнения первого приближения»³:

$$\begin{aligned}\ddot{u} + \omega_1^2 u &= \mu (f'_\xi u + f'_\xi \dot{u} + f'_\eta v + f'_\eta \dot{v}) \\ \ddot{v} + \omega_2^2 v &= \mu (g'_\xi u + g'_\xi \dot{u} + g'_\eta v + g'_\eta \dot{v}),\end{aligned}\quad (18)$$

которые послужат нам для решения вопросов устойчивости. Заметим,

¹ Решения уравнений (12) имеют вид:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \mu \{ \beta_1^{(0)} + \mu \beta_1^{(1)} + \mu^2 \beta_1^{(2)} + \dots \}, \quad \beta_3 = \mu \{ \beta_3^{(0)} + \mu \beta_3^{(1)} + \mu^2 \beta_3^{(2)} + \dots \} \\ \beta_4 &= \mu \{ \beta_4^{(0)} + \mu \beta_4^{(1)} + \mu^2 \beta_4^{(2)} + \dots \}\end{aligned}$$

Коэффициенты $\beta_1^{(0)}, \beta_1^{(1)}, \dots$ определяются последовательно.

² Если бы мы захотели исследовать устойчивость на всем допустимом интервале значений μ (величина μ ограничивается требованием сходимости всех рассматриваемых рядов), то нам уже нельзя было бы в формулах (16a) удовлетвориться знанием членов нулевого порядка по μ .

³ Пуанкаре называет их «equations aux variations». Об этих уравнениях в связи с вопросами устойчивости см.: Пуанкаре,^[3] стр. 162—232, Ляпунов,^[4] стр. 208—245.

что здесь в $f_{\xi}', f_{\eta}', \dots, g_{\eta}'$ переменные $\xi, \dot{\xi}, \eta, \dot{\eta}$ заменены соответственно через $\Phi(t), \dot{\Phi}(t), \bar{\Phi}(t), \dot{\bar{\Phi}}(t)$.

Мы можем искать решение этих линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в виде ¹

$$\begin{aligned} u &= A\bar{\beta}_1 + B\bar{\beta}_2 + C\bar{\beta}_3 + D\bar{\beta}_4 \\ v &= \bar{A}\bar{\beta}_1 + \bar{B}\bar{\beta}_2 + \bar{C}\bar{\beta}_3 + \bar{D}\bar{\beta}_4, \end{aligned} \quad (19)$$

где $A, B, C, D; \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ — неизвестные функции времени, а $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \bar{\beta}_4$ — начальные значения u, v и их производных, именно ²:

$$u(0) = \bar{\beta}_1, \dot{u}(0) = \bar{\beta}_2, v(0) = \bar{\beta}_3, \dot{v}(0) = \bar{\beta}_4 \quad (20)$$

Заметим, что правые части уравнений (18) могут быть представлены в виде степенных рядов по μ , так как в силу (16а)

$$\begin{aligned} f_{\xi}'(\Phi, \dot{\Phi}; \bar{\Phi}, \dot{\bar{\Phi}}; \mu) &= f_{\xi}'(\varphi_0, \dot{\varphi}_0; 0, 0; 0) + \\ &+ \mu \{ f_{\xi\xi}'' \varphi_1 + f_{\xi\dot{\xi}}'' \dot{\varphi}_1 + f_{\xi\eta}'' \bar{\varphi}_1 + f_{\xi\dot{\eta}}'' \dot{\bar{\varphi}}_1 + f_{\xi\mu}'' \} + \mu^2 \{ \} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

и т. д. Естественно поэтому искать неизвестные функции $A, B, \dots, \bar{A}, \bar{B}, \dots$ также в виде степенных рядов по μ :

$$\begin{aligned} A &= A_0 + \mu A_1 + \mu^2 A_2 + \dots \\ \bar{A} &= \bar{A}_0 + \mu \bar{A}_1 + \mu^2 \bar{A}_2 + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

и т. д. Вставляя (19) в (18) и сравнивая коэффициенты при членах одинакового измерения (в отношении $\beta_i \mu^n$), мы получим линейные дифференциальные уравнения для последовательного определения коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots; \bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots$ и т. д.

Произвольные постоянные в интегралах этих уравнений мы определим так, чтобы были выполнены начальные условия (20).

Таким образом, находим ⁴

$$A_0 = \cos \omega_1 t, \quad A_1 = F \text{ и т. д.}$$

$$B_0 = \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

¹ Мы здесь проводим отыскание характеристических показателей, следуя Пуанкаре, хотя теоремы, обосновывающие законность использования уравнений первого приближения для решения вопросов устойчивости движения, принадлежат Ляпунову. Следуя Ляпунову, было бы естественнее для составления уравнения (26), не вводя $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3, \bar{\beta}_4$, сразу разыскивать фундаментальную систему решений уравнений (18), удовлетворяющую «стандартным» начальным условиям. Само собой понятно, что и этим путем мы бы пришли к тому же уравнению (26).

² Заметим, что $A, B, C, D; \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ здесь иные функции, чем те, которые были обозначены этими буквами в предыдущем параграфе.

³ Пары функций $A, \bar{A}; B, \bar{B}; C, \bar{C}; D, \bar{D}$ являются решениями системы (18) и удовлетворяют соответственно «стандартным» начальным условиям.

⁴ Мы не выписываем всех необходимых формул, а частично ссылаемся на формулы (5).

$$B_1 = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 q \cdot f_{\xi}' + \cos \omega_1 q \cdot f_{\xi} \right\} \sin \omega_1 (t - q) dq \text{ и т. д.}$$

$$C_0 = 0; C_1 = H \text{ и т. д.} \quad D_0 = 0, D_1 = K \text{ и т. д.}$$

$$\bar{A}_0 = 0, \quad \bar{A}_1 = \bar{F} \text{ и т. д.}$$

$$\bar{B}_0 = 0, \quad \bar{B}_1 = \frac{1}{\omega_2} \int_0^t \left\{ \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 q g_{\xi}' + \cos \omega_1 q g_{\xi} \right\} \sin \omega_2 (t - q) dq \quad (23)$$

$$\bar{C}_0 = \cos \omega_2 t, \quad \bar{C}_1 = \bar{H} \text{ и т. д.} \quad \bar{D}_0 = \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t, \quad \bar{D}_1 = \bar{K} \text{ и т. д.}$$

Обозначим, следуя Пуанкаре

$$\begin{aligned} u(T) - u(0) &= [u] = \psi_1; & v(T) - v(0) &= [v] = \psi_3 \\ \dot{u}(T) - \dot{u}(0) &= [\dot{u}] = \psi_2; & \dot{v}(T) - \dot{v}(0) &= [\dot{v}] = \psi_4, \end{aligned} \quad (24)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega_1} + \tau$, причем τ — поправка к периоду — дается формулой (11).

Тогда характеристические показатели α , играющие фундаментальную роль в исследовании устойчивости, определяются уравнением

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_3} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{\partial \psi_3}{\partial \beta_4} \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \beta_3} & \frac{\partial \psi_4}{\partial \beta_4} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

В нашем случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} [A] + 1 - e^{\alpha T} & [B] & [C] & [D] \\ [\dot{A}] & [\dot{B}] + 1 - e^{\alpha T} & [\dot{C}] & [\dot{D}] \\ [\bar{A}] & [\bar{B}] & [\bar{C}] + 1 - e^{\alpha T} & [\bar{D}] \\ [\dot{\bar{A}}] & [\dot{\bar{B}}] & [\dot{\bar{C}}] & [\dot{\bar{D}}] + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} \quad (26)$$

где

$$[A] = A\left(\frac{2\pi}{\omega_1} + \tau\right) - A(0) \quad \text{и т. д.}$$

Полагая $1 - e^{\alpha T} = \rho$ и вводя обычные обозначения для элементов этого детерминанта, мы можем его записать так:

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} + \rho & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} + \rho & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \rho & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} + \rho \end{vmatrix} \quad (27)$$

а уравнение (25) в следующем виде:

$$\rho^4 + a\rho^3 + b\rho^2 + c\rho + d = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a &= a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} \\ b &= A_{22}^{11} + A_{33}^{11} + A_{44}^{11} + A_{33}^{22} + A_{44}^{22} + A_{44}^{33} \\ c &= A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} \\ d &= \Delta(0) \end{aligned} \quad (29)$$

причем $A_{11}, \dots, A_{44}$; $A_{22}^{11}, \dots, A_{44}^{33}$ — соответствующие диагональные миноры детерминанта $\Delta(0)$.

Мы знаем из общей теории¹, что в нашем случае один из характеристических показателей непременно равен нулю, так как рассматриваемые уравнения не зависят явно от времени². Отсюда следует, что уравнение (28) непременно имеет один корень, равный нулю, так как $\alpha = 0$ соответствует $\rho = 0$. Таким образом, $d = 0$ и уравнение (28) приводится к кубическому уравнению

$$\rho^3 + a\rho^2 + b\rho + c = 0 \quad (30)$$

Можно показать, что движение является устойчивым по Ляпунову, если все три остальные характеристические показателя будут иметь отрицательные действительные части.

Условие, что α имеет отрицательную действительную часть, равносильно условию, что $e^{\alpha T}$ имеет модуль, меньший единицы, или, иначе говоря, условию, что $\rho = 1 - e^{\alpha T}$ находится внутри круга радиуса единицы на плоскости комплексного переменного ρ , центр которого смещен на единицу вправо по отношению к началу координат (фиг. 1).

Условия, чтобы все корни уравнения (30) находились внутри только что упомянутого круга, нетрудно получить в виде некоторых неравенств, относящихся к коэффициентам этого уравнения³.

Действительно, отобразим внутренность такого круга, находящегося

¹ Пуанкаре [3], стр. 179.

² Исключение было бы в том случае, если бы уравнения первого приближения также не содержали явно времени, т. е. в случае равновесия.

³ Ср. Мизес [8].

на плоскости комплексного переменного ρ , на левую полуплоскость комплексного переменного z (фиг. 2), положив

$$\rho = \frac{2}{1-z} \quad (31)$$

Уравнение (30) примет тогда вид:

$$z^3(-c) + z^2(2b + 3c) + z(-4a - 4b - 3c) + (8 + 4a + 2b + c) = 0 \quad (32)$$

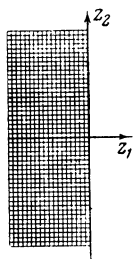
Тем корням уравнения (30), которые лежат внутри вышеупомянутого круга, соответствуют в уравнении (32) корни, имеющие отрицательную действительную часть, и наоборот.

Условия, чтобы все корни алгебраического уравнения имели отрицательную действительную часть, хорошо известны. Это условия¹ Раута — Гурвица.

Для уравнения (32) эти условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{2b + 3c}{-c} &> 0 \\ b^2 + c^2 + 2bc + ab + ac - c &< 0 \\ \frac{8 + 4a + 2b + c}{-c} &> 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Фиг. 2. Плоскость комплексного переменного $z = z_1 + iz_2$.



Ясно, что эти же условия являются необходимыми и достаточными, чтобы все корни уравнения (30) находились внутри вышеуказанного круга. Условиям (33) можно дать простую геометрическую интерпретацию. Возьмем в пространстве прямоугольную систему координат a, b, c . Тогда условия (33) выделяют нам некоторую замкнутую область, лежащую между $c = 0$ и $c = -8$, ограниченную с одной стороны гиперболическим параболоидом $b^2 + c^2 + 2bc + ab + ac - c = 0$, с другой — плоскостью $8 + 4a + 2b + c = 0$.

Пересечение этой области плоскостью $c = -k$ ($0 < k < 8$) дано на фиг. 3.

Условия (33) поэтому могут быть записаны следующим образом:

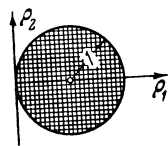
$$\begin{aligned} c &< 0 \\ (b + c)^2 + a(b + c) - c &< 0 \\ 8 + 4a + 2b + c &> 0, \quad 2b + 3c > 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Следует заметить, что гиперболический параболоид пересекается с плоскостью $8 + 4a + 2b + c = 0$ по той же самой прямолинейной образующей (точка δ на фиг. 3), через которую проходит вторая входящая в условия (33) плоскость $2b + 3c = 0$. Однако условие $2b + 3c > 0$ не является лишним, так как оно «запрещает» некоторую область значений a, b, c , «разрешенную» условиями

$c < 0, \quad (b + c)^2 + a(b + c) - c < 0, \quad 8 + 4a + 2b + c > 0$
(на фиг. 3 — это область, ограниченная второй ветвью гиперболы).

¹ Раут [1], Гурвиц [2].

² Это легко обнаружить непосредственно по уравнению (30), так как c — произведение корней этого уравнения, которые в исследуемом случае (см. фиг. 1) все имеют положительную действительную часть и модули которых ≤ 2 .



Фиг. 1. Плоскость комплексного переменного $\rho = \rho_1 + i\rho_2$.

Применим теперь эти условия к нашему конкретному случаю, когда $\Delta(\rho)$ дается уравнением (26).

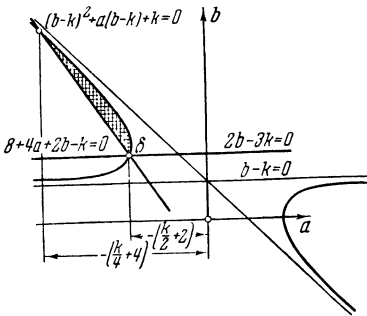
Разложим в ряд по μ элементы детерминанта $\Delta(0)$, имея в виду, что $\tau = \alpha_0 \mu + O_2(\mu)$, т. е. что τ не ниже первого порядка по μ .

Таким образом, находим

$$a_{11} = [A] = [A_0] + \mu [A_1] + \mu^2 [A_2] + \dots = b_{11} \mu + O_2(\mu)$$

$$a_{12} = [B] = [B_0] + \mu [B_1] + \mu^2 [B_2] + \dots = b_{12} \mu + O_2(\mu)$$

и т. д. Для наших целей будет достаточно выписать только члены нулевого и первого порядка по μ :



Фиг. 3.

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} b_{11}\mu + \dots & b_{12}\mu + \dots & b_{13}\mu + \dots & b_{14}\mu + \dots \\ b_{21}\mu + \dots & b_{22}\mu + \dots & b_{23}\mu + \dots & b_{24}\mu + \dots \\ b_{31}\mu + \dots & b_{32}\mu + \dots & (\cos \gamma - 1) + b_{33}\mu + \dots & \frac{\sin \gamma}{\omega_2} + b_{34}\mu + \dots \\ b_{41}\mu + \dots & b_{42}\mu + \dots & -\omega_2 \sin \gamma + b_{43}\mu + \dots & (\cos \gamma - 1) + b_{44}\mu + \dots \end{vmatrix} \quad (35)$$

Значения коэффициентов $b_{11}, b_{12}, \dots$ находятся по формулам (23). Ниже мы приведем значения тех из них, которые войдут в условия устойчивости. Формула (35) дает

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 2(\cos \gamma - 1) + \mu \{b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}\} + O_2(\mu)$$

$$A_{22}^{11} + A_{33}^{11} + \dots + A_{44}^{33} = 2(1 - \cos \gamma) + \mu \{(\cos \gamma - 1)[2(b_{11} + b_{22}) + b_{33} + b_{44}] + \sin \gamma \left[\omega_2 b_{34} - \frac{b_{43}}{\omega_2} \right]\} + O_2(\mu) \quad (36)$$

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = 2\mu(1 - \cos \gamma)(b_{11} + b_{22}) + O_2(\mu)$$

откуда по (29)

$$c = 2\mu(1 - \cos \gamma)(b_{11} + b_{22}) + O_2(\mu)$$

$$(b + c)^2 + a(b + c) - c = 2\mu(1 - \cos \gamma) \{ \cos \gamma (b_{33} + b_{44}) + \sin \gamma \left(\omega_2 b_{34} - \frac{b_{43}}{\omega_2} \right) \} + O_2(\mu) \quad (37)$$

$$8 + 4a + 2b + c = 4(1 + \cos \gamma) + O_1(\mu)$$

$$2b + 3c = 4(1 - \cos \gamma) + O_1(\mu)$$

В настоящей работе мы ограничиваемся исследованием устойчивости для достаточно малых значений μ . Если

$$\gamma \neq 2\pi n, \quad \gamma \neq (2n + 1)\pi,$$

где n — целое число, то условия устойчивости (34) сводятся к двум условиям:

$$b_{11} + b_{22} < 0$$

$$\cos \gamma (b_{33} + b_{44}) + \sin \gamma \left(\omega_2 b_{34} - \frac{b_{43}}{\omega_2} \right) < 0 \quad (38)$$

Выпишем теперь значения b_{11} , b_{22} , ..., входящие в эти условия, не забывая поправок на $\tau = \alpha_0 \mu + O_2(\mu)$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{ \cos \omega_1 q f'_\xi - \omega_1 \sin \omega_1 q f'_\xi \} \sin \omega_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq \\ b_{22} &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left\{ \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 q f'_\xi + \cos \omega_1 q f'_\xi \right\} \cos \omega_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq \\ b_{33} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{ \cos \omega_2 q g'_\eta - \omega_2 \sin \omega_2 q g'_\eta \} \sin \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq - \alpha_0 \omega_2 \sin \gamma \\ b_{44} &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left\{ \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 q g'_\eta + \cos \omega_2 q g'_\eta \right\} \cos \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq - \alpha_0 \omega_2 \sin \gamma \\ b_{34} &= \frac{1}{\omega_2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left\{ \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 q g'_\eta + \cos \omega_2 q g'_\eta \right\} \sin \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq + \alpha_0 \cos \gamma \\ b_{43} &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{ \cos \omega_2 q g'_\eta - \omega_2 \sin \omega_2 q g'_\eta \} \cos \omega_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} - q \right) dq - \alpha_0 \omega_2^2 \cos \gamma \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя эти выражения в (38), мы получаем условия устойчивости в весьма простом виде:

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} f'_\xi dq < 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} g'_\eta dq < 0 \quad (40)$$

Выполняя интеграцию, следует иметь в виду, что в этих формулах

$$\dot{\xi} = R \cos \omega_1 q, \quad \dot{\eta} = -R \omega_1 \sin \omega_1 q; \quad \eta = 0, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \mu = 0,$$

а R определяется условием (13).

II. ФИЗИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Результаты предыдущих параграфов могут быть непосредственно применены к рассмотрению ряда вопросов теории колебаний электрических и механических систем с двумя степенями свободы *независимо от вида связи и условий самовозбуждения*, если рассматриваемые системы достаточно мало отличаются от соответствующих консервативных линейных систем и, следовательно, колебания достаточно близки к синусоидальным. Сюда относятся колебания двух связанных возбужденных генераторов, колебания одного генератора (если не пренебрегать сеточным контуром), колебания двух связанных контуров, из которых один возбужден. Мы рассмотрим *в виде примера* только этот последний случай¹.

Как известно, колебания такой нелинейной системы обладают следующим свойством: из двух нормальных частот, с которыми способна колебаться соответствующая «близкая» линейная система, наша нелинейная система «выбирает» только одну, причем этот выбор в некоторых случаях зависит не только от состояния системы в данный момент, но и от ее истории.

Именно для некоторой области настройки — области изменения параметра (например, емкости) — возможна реализация той или другой нормальной частоты в зависимости от того, с какой стороны происходит настройка. На границах этой «области затягивания» при изменении настройки колебательный режим меняется скачком, система «перескакивает» с одной частоты на другую. Это явление затягивания уже разбиралось теоретически многими авторами², однако, насколько нам известно, нигде не было дано *строгой* математической теории.

В настоящей работе получены формулы для амплитуд и условий устойчивости, которые дают полную картину затягивания для того случая, когда нормальные частоты достаточно разнятся между собой. Как известно, это всегда будет иметь место в случае сильной связи, если только связь одного какого-нибудь рода, т. е. либо чисто емкостная, либо чисто индуктивная. В случае слабой связи все явление затягивания будет разыгрываться на небольшом интервале частот в непосредственной близости к резонансу. Поэтому этот случай слабой связи нуждается в особом рассмотрении, которое может быть сделано теми же методами, которые применяются в настоящей работе³. Сюда же, к случаям, требующим особого рассмотрения, относится случай, когда одна частота является целой кратной другой. Следует отметить, что по исследованию затягивания как для случая сильной связи, так и для случая слабой

¹ В этом случае полученные нами соотношения (50), (50а), (51а), (51в), являющиеся частными случаями общих формул (13) (40), совпадают с известными уже раньше из работ Ван дер Поля, Рунге и др. (см. дальше)

² Ван дер Поль^[9], Паули^[10], Рунге^[11].

³ См. [12] (Ред.)

связи и для случая, когда одна частота кратна другой, имеется большой экспериментальный материал¹.

§ 3. Случай двух индуктивно связанных контуров, из которых один возбужден катодной лампой

Пренебрегая сеточным током, мы можем написать уравнения Кирхгофа для наших двух контуров (фиг. 4) в виде

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_1}{dt} + r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt &= M \frac{di_a}{dt} + N \frac{di_2}{dt} \\ L_2 \frac{di_2}{dt} + r_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt &= N \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (41)$$

Полагая

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt, & v_2 &= \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt, & \alpha_1 &= r_1 C_1, & \alpha_2 &= r_2 C_2 \\ n_1^2 &= \frac{1}{L_1 C_1}, & n_2^2 &= \frac{1}{L_2 C_2}, & \kappa_1 &= N C_2 n_1^2, & \kappa_2 &= N C_1 n_2^2 \end{aligned}$$

перепишем уравнение (41) так:

$$\begin{aligned} \ddot{v}_1 - \kappa_1 \ddot{v}_2 + n_1^2 v_1 &= n_1^2 \left\{ -\alpha_1 \dot{v}_1 + M \frac{di_a}{dt} \right\} \\ \ddot{v}_2 - \kappa_2 \ddot{v}_1 + n_2^2 v_2 &= n_2^2 \left\{ -\alpha_2 \dot{v}_2 \right\} \end{aligned} \quad (41a)$$

Пренебрегая реакцией анода и принимая в качестве характеристики обычно кубическую параболу, имеем

$$i_a = S v_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{3K^2} \right) \quad (42)$$

где S — крутизна характеристики, K — напряжение насыщения.

Обозначая далее [14]

$$v_1 = xK \sqrt{\frac{MS - C_1 r_1}{MS}}, \quad v_2 = yK \sqrt{\frac{MS - C_1 r_1}{MS}} \quad (43)$$

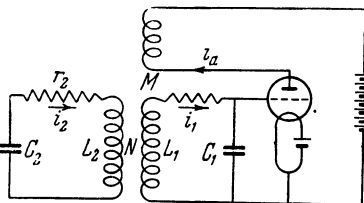
мы можем записать уравнения (41a) в виде

$$\ddot{x} - \kappa_1 \ddot{y} + n_1^2 x = n_1^2 \varphi, \quad \ddot{y} - \kappa_2 \ddot{x} + n_2^2 y = n_2^2 \psi \quad (41b)$$

где

$$\varphi = (MS - \alpha_1)(1 - x^2) \dot{x}, \quad \psi = -\alpha_2 y \dot{y}$$

¹ См. цитированные выше работы по затягиванию, а также, например, Полэк [13], Ватанабе [14].



Фиг. 4.

Нетрудно преобразовать левые части этих уравнений к так называемым «нормальным»¹ координатам ξ , η , полагая, например,

$$\xi = x + k_1 y, \quad \eta = y + k_2 x, \quad x = \frac{\xi - k_1 \eta}{1 - k_1 k_2}, \quad y = \frac{\eta - k_2 \xi}{1 - k_1 k_2}; \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{n_2^2}{n_1^2} \left(\frac{\kappa_1 \omega_1^2}{n_2^2 - \omega_1^2} \right) = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \left(\frac{n_1^2 - \omega_1^2}{\kappa_2 \omega_1^2} \right) \\ k_2 &= -\frac{n_1^2}{n_2^2} \left(\frac{n_2^2 - \omega_2^2}{\kappa_1 \omega_2^2} \right) = -\frac{n_1^2}{n_2^2} \left(\frac{\kappa_2 \omega_2^2}{n_1^2 - \omega_2^2} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

Причем ω_1^2 и ω_2^2 соответственно наибольший и наименьший корни уравнения²

$$(1 - \kappa_1 \kappa_2) \omega^4 - (n_1^2 + n_2^2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad (45a)$$

После такого преобразования уравнения (41б) получают вид:

$$\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi = \omega_1^2 \{\varphi + k_1 \psi\}, \quad \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta = \omega_2^2 \{\psi + k_2 \varphi\} \quad (46)$$

где правые части в согласии с формулами (44) мы можем рассматривать смотря по надобности, или как функции x , $\dot{x}$, y , $\dot{y}$, или как функции ξ , $\dot{\xi}$, η , $\dot{\eta}$. Обозначая, наконец, через μ не имеющую размерности величину

$$\mu = n_1 (MS - C_1 r_1) \quad (47)$$

примем ее за тот параметр, по которому производится разложение в ряды³. Таким образом, уравнения (41) примут требуемый вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi &= \mu f(\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}) = \mu \frac{\omega_1^2}{n_1} f_1(x, \dot{x}; y, \dot{y}) \\ \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta &= \mu g(\xi, \dot{\xi}; \eta, \dot{\eta}) = \mu \frac{\omega_2^2}{n_1} g_1(x, \dot{x}; y, \dot{y}) \end{aligned}$$

причем

$$f_1(x, \dot{x}; y, \dot{y}) = (1 - x^2) \dot{x} - k_1 \delta \dot{y}, \quad g_1(x, \dot{x}; y, \dot{y}) = -\delta \dot{y} + k_2 (1 - x^2) \dot{x} \quad (48)$$

где⁴

$$\delta = \frac{C_2 r_2}{MS - C_1 r_1}$$

Будем теперь искать, следуя § 1, возможные амплитуды автоколебаний. Вместо того, чтобы разыскивать амплитуды нормальных колебаний⁵

¹ См. введение к математической части.

² ω_1 и ω_2 носят название нормальных частот; k_1 и k_2 — коэффициентов распределения.

³ Нижнюю границу для радиуса сходимости этих рядов можно вычислить по Пуанкаре (Methodes nouvelles, t. I, p. 60). Однако эта граница очень груба, и мы ее здесь не приводим.

⁴ Заметим, что $\delta = \varepsilon/\zeta$, где

$$\varepsilon = \frac{\frac{r_2}{L_2}}{\frac{MS}{L_1 C_1} - \frac{r_1}{L_1}}$$

не зависит от C_2 , а $\zeta = n_2^2/n_1^2$ — так называемая расстройка.

⁵ Это те нормальные колебания, к которым близки рассматриваемые периодические движения.

R_1 , R_2 , будем искать амплитуды x_1 и x_2 — амплитуды колебаний в первом контуре. Зная их, нетрудно найти, само собой разумеется, и амплитуды R_1 и R_2 , а также амплитуды колебаний во втором контуре y_1 и y_2 .

Для первого нормального колебания имеем

$$\begin{aligned} \xi &= R_1 \cos \omega_1 t, \quad \eta = 0 \\ \text{или в силу (44)} \quad x &= \frac{R_1}{1 - k_1 k_2} \cos \omega_1 t = x_1 \cos \omega_1 t \\ y &= -\frac{R_1 k_2}{1 - k_1 k_2} \cos \omega_1 t = -k_2 x_1 \cos \omega_1 t \end{aligned} \quad (49)$$

По (13) и (48), выполнив интеграцию, найдем следующее уравнение, определяющее x_1 :

$$\omega_1 x_1 \left\{ \delta k_1 k_2 + \left(1 - \frac{x_1^2}{4} \right) \right\} = 0$$

Отсюда либо $x_1 = 0$, либо

$$x_1^2 = 4 \{ 1 + \delta k_1 k_2 \} \quad (50)$$

Можно показать, что условие существования рассматриваемого периодического решения — неравенство нулю выражения (15) — всегда выполнено, за исключением случая $x_1 = 0$.

Для второго нормального колебания имеем

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \quad \eta = R_2 \cos \omega_2 t \\ x &= -\frac{k_1 R_2}{1 - k_1 k_2} \cos \omega_2 t = x_2 \cos \omega_2 t \\ y &= \frac{R_2}{1 - k_1 k_2} \cos \omega_2 t = -\frac{x_2}{k_1} \cos \omega_2 t \end{aligned} \quad (49a)$$

Выполняя интеграцию, совершенно аналогично получаем, что либо $x_2 = 0$, либо

$$x_2^2 = 4 \left\{ 1 + \frac{\delta}{k_1 k_2} \right\} \quad (50a)$$

Можно показать, что и в этом случае выражение (15) не равняется нулю, только если $x_2 = 0$.

Исследуем теперь в согласии с § 2 устойчивость рассматриваемых периодических движений. Условия устойчивости первой нормальной частоты могут быть записаны по (40) в таком виде:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \xi} \right\} dq &< 0 \\ \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \eta} \right\} dq &< 0 \end{aligned} \quad (51)$$

или, так как $1 - k_1 k_2 > 0$, в виде

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{f'_{1\dot{x}} - k_2 f'_{1\dot{y}}\} dq < 0, \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \{-k_1 g'_{1\dot{x}} + g'_{1\dot{y}}\} dq < 0$$

Вставляя в эти формулы x из выражений (49) и произведя интегрирование, получим¹ условия устойчивости в виде

$$x_1^2 > 2 \{1 + \delta k_1 k_2\}, \quad x_1^2 > 2 \left\{1 + \frac{\delta}{k_1 k_2}\right\} \quad (52)$$

Первое условие выполнено всегда в силу (50); второе условие выполнено не всегда. Его можно заменить по (50а) условием

$$x_1^2 > \frac{x_2^2}{2} \quad (51a)$$

Для второй нормальной частоты получается все симметрично: одно условие выполняется автоматически, другое условие сводится к

$$x_2^2 > \frac{x_1^2}{2} \quad (51b)$$

Чтобы интерпретировать полученные формулы (50), (50а), (51а), (51b) и получить наглядную картину затягивания, будем исходить из следующей физической картины: параметры первого, генерирующего контура фиксированы; связь фиксирована; меняется лишь емкость во втором контуре. В качестве независимого переменного введем так называемую расстройку — отношение квадратов частот $\zeta = n_2^2 / n_1^2$ — и будем строить диаграммы x_1^2 / ζ , x_2^2 / ζ , Ω^2 / ζ ($\Omega^2 = \omega^2 / n_1^2$) как функции ζ при фиксированных значениях

$$\varepsilon = \delta \zeta, \quad \left(\varepsilon = \frac{\frac{r_2}{L_2}}{\frac{MS}{L_1 C_1} - \frac{r_1}{L_1}} \right), \quad \sigma = 1 - x_1 x_2$$

Формулы (50) и (50а) получают тогда вид

$$x_1^2 = 4 \left\{1 + \varepsilon \frac{k_1 k_2}{\zeta}\right\} = 4 \{1 + \varepsilon M(\zeta)\} \quad (50')$$

$$x_2^2 = 4 \left\{1 + \varepsilon \frac{1}{\zeta k_1 k_2}\right\} = 4 \{1 + \varepsilon N(\zeta)\} \quad (50a')$$

где

$$M(\zeta) = \frac{\zeta - 1 + V(1 + \zeta)^2 - 4\sigma\zeta}{\zeta(\zeta - 1 - V(1 + \zeta)^2 - 4\sigma\zeta)}, \quad N(\zeta) = \frac{\zeta - 1 - V(1 + \zeta)^2 - 4\sigma\zeta}{\zeta(\zeta - 1 + V(1 + \zeta)^2 - 4\sigma\zeta)}$$

а формула (45а) — вид

$$\sigma \Omega^4 - (1 + \zeta) \Omega^2 + \zeta = 0 \quad (45a')$$

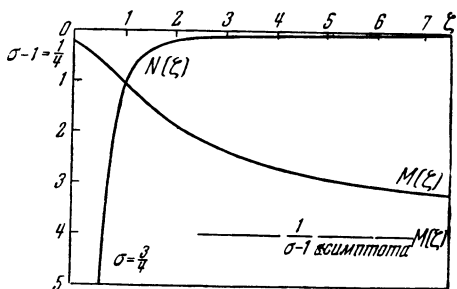
На фиг. 5 приведены кривые, дающие $M(\zeta)$ и $N(\zeta)$ при заданном σ .

На фиг. 6, 7 и 8 приведены кривые, дающие величины x_1^2 , x_2^2 , Ω_1^2 , Ω_2^2 в функции ζ для постоянного σ и трех значений ε : $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$.

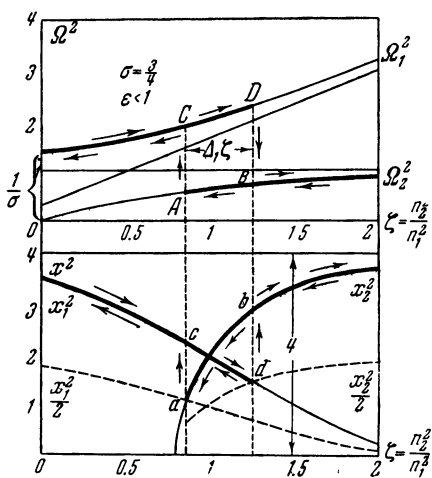
¹ $k_1 k_2 < 0$.

На тех чертежах, которые изображают амплитуды, пунктирными линиями проведены кривые, отмечающие границы устойчивости; ординаты этих кривых в силу условий (51а) и (51б) равны половинам ординат кривых x_1^2 и x_2^2 . Устойчивые части кривых амплитуд выделены жирными линиями. Заметим, что особенно наглядно можно себе представить картину изменения колебательных режимов, если рассматривать пространственную диаграмму при помощи декартовых осей Ω^2 , x^2 , ζ .

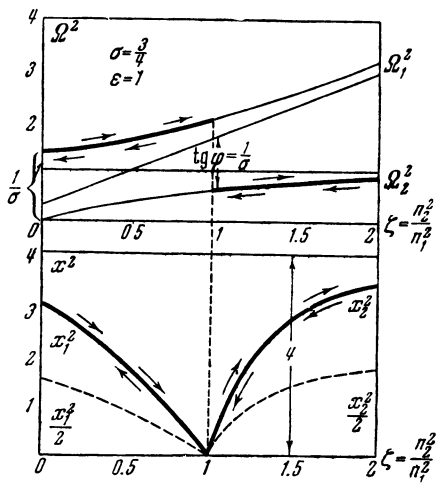
Случай $\varepsilon < 1$ (фиг. 6). В этом случае, если вести «настройку» справа (от $\zeta \gg 1$), то мы будем продвигаться по кривой Ω_2^2 (соответственно x_2^2) до тех пор, пока не дойдем до точки А (соответственно а). С этого момента дальнейшие части кривых соответствуют неустойчивым движе-



Фиг. 5.



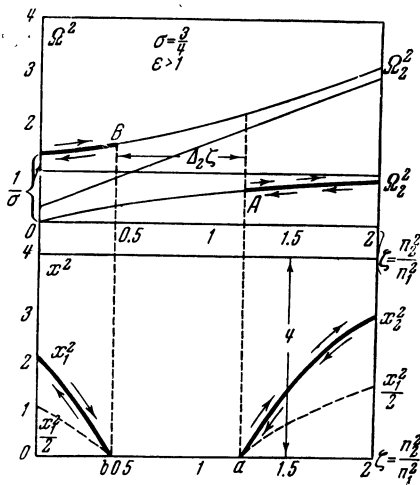
Фиг. 6.



Фиг. 7.

ниям; при этом значении $\zeta = \zeta_1$ система «перескакивает»¹ с точки А(а) в точку С(с) и при дальнейшем уменьшении ζ продвижение идет дальше по кривой Ω_1^2 (x_1^2). Этот процесс обозначен на чертеже (фиг. 6) стрелками снизу. При настройке с обратной стороны перескок будет совершаться в другом месте, а именно в точке D при $\zeta = \zeta_2$. Этот процесс настройки с обратной стороны обозначен стрелками сверху.

¹ Мы здесь предполагаем, что других устойчивых стационарных решений (кроме рассматриваемых периодических движений и состояний равновесия) нет. Как уже было отмечено в настоящей работе, мы не исследуем всей картины протекания интегральных кривых. Пользуясь методом Ван дер Поля, такое исследование провели Стрелков и Скибарко. (См. [15]).



Фиг. 8.

ся. При помощи критерия Раута — Гурвица можно показать, что в интервале AB (ab) и только в этом интервале состояние равновесия устойчиво, т. е. что нет самовозбуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Routh E. J. Stability of given state of motion, especially steady motion. London, Macmillan, 1877.
2. Hurwitz A. Über die Bedingungen unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.—Math. Ann., 1895, Bd 46, S. 273—284.
3. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. I. Paris, 1892.
4. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, XII+251 с.
5. Andronow A., Witt A. Sur la théorie mathématique des auto-oscillations.—C. r. Acad. sci., Paris, 1930, vol. 190, № 4, p. 256—258.
6. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах. Изд. 2-е. Л., АН СССР, 1932, IV + 472 с.
7. Rayleigh Lord. Theory of sound. Vol. 1, London, 1894, p. 107.
8. Mises R. von. Dynamische Probleme der Maschinenlehre. In Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, 1911, Bd 4—2, H. 2, S. 153—355.
9. Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom.—Philos. Mag., ser. 6, 1922, vol. 43, № 256, p. 700—719.
10. Pauli. Jahrb. der drahtlose Telegraphie. Bd. 17. S. 127.
11. Runge. Archiv für Electrotechnik. Bd. 13. 1924, S. 34.
12. Бернштейн И., Иконников Е. К математической теории вынужденных колебаний в автоколебательных системах с двумя степенями свободы.—Журн. техн. физики, 1934, т. 4, вып. 1, с. 172.
13. Poleck. Über die Zieherscheinungen beim Lichtbogen Generator.—Jahrb. der drahtlose Telegraphie, 1927, Bd 30, N 4, S. 109—116.
14. Watanabe.—J. E. E of Japan, 1925, march, № 440.
15. Скибарко А. П и Стрелков С. П. Качественное исследование процессов в генераторе по сложной схеме.—Журн. техн. физики, 1934, т. 4, вып. 1, с. 158.

ГРУБЫЕ СИСТЕМЫ¹

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (A)$$

где x и y — декартовы координаты на плоскости и $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y .

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением таких систем вида (A), для которых существует так называемый «цикл без контакта», т. е. такая простая замкнутая кривая g с непрерывно вращающейся касательной, что все траектории, проходящие через точки этой кривой, ее пересекают и ни одна траектория не касается. Областью G назовем область плоскости внутри кривой g . Без ограничения общности мы можем предположить, что фазовые траектории, пересекающие кривую g , входят внутрь области G с возрастанием времени t .

Рассмотрим наряду с системой (A) *измененную* систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) + p(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) + q(x, y) \end{aligned} \quad (B)$$

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — также аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y .

Определение I. Систему (A) мы будем называть «грубой» (в отличие от систем «не грубых») в данной области G , если для всякого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных аналитических $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющих в области G условиям:

$$\begin{aligned} |p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon \\ |p'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

существует взаимно однозначное и взаимно непрерывное преобразование T области G самое в себя, при котором: 1) соответствующие друг другу

¹ Совместно с Л. С. Повтрягиным. Опубликовано в Докл. АН СССР. 1937, 14, № 5, с. 247. Представлено акад. Л. И. Мандельштамом 2 I 1936.

точки находятся на расстоянии меньшем η ; 2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (А), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (В), и обратно¹.

Необходимые условия грубости системы (А) в области G могут быть сформулированы в виде следующих трех предложений.

Теорема I. *Если система (А) грубая в области G , то в области G система (А) может иметь только такие состояния равновесия, для которых действительные части корней соответствующего характеристического уравнения отличны от нулей.* Или иначе: в области G система (А) не может иметь состояний равновесия $x = x_0$, $y = y_0$,

а) для которых

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_x'(x_0, y_0) & P_y'(x_0, y_0) \\ Q_x'(x_0, y_0) & Q_y'(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$$

б) для которых при $\Delta > 0$

$$\sigma = -[P_x'(x_0, y_0) + Q_y'(x_0, y_0)] = 0$$

Теорема II. *Если система (А) грубая в области G , то в области G система (А) может иметь только такие периодические движения, для которых характеристический показатель не равен нулю.* Или иначе: в области G система (А) не может иметь периодических движений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \quad \psi(t + \tau) = \psi(t))$$

для которых

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P_x'(\varphi, \psi) + Q_y'(\varphi, \psi)] dt = 0$$

Теорема III. *Если система (А) грубая в области G , то в области G система (А) может иметь только такие сепаратрисы (усы седла), которые не идут из седла в седло.* Или иначе: в области G система (А) не может иметь сепаратрис, идущих из седла в седло.

¹ Это определение грубости системы можно рассматривать как определение устойчивости совокупности траекторий динамической системы по отношению к достаточно малым изменениям правых частей уравнений (А). Устойчивость такого рода представляет интерес для физики. В частности, требование устойчивости периодических движений по отношению к достаточно малым изменениям правых частей системы (А) было высказано и использовано одним из авторов^[1] при доказательстве утверждения, что лишь предельные циклы могут отображать в системах вида (А) реальные автоколебательные процессы. В связи с этим следует отметить, что П. Болье^[2] дал существенно иное, относящееся к движениям изображающих точек по траекториям, определение устойчивости динамической системы по отношению к малым изменениям правых частей уравнений. Такая устойчивость в смысле Боля накладывает исключительно тяжелые требования на исходную систему. Например, исходная система вида (А) может быть устойчивой по Болю только в том случае, если в области G имеется лишь одно состояние равновесия и если все остальные движения стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к этому состоянию равновесия.

Мы будем говорить, что система (А) удовлетворяет в области G условиям Γ , если система (А) имеет внутри цикла без контакта g :

1) лишь такие состояния равновесия, для которых $\Delta \neq 0$, и если $\Delta > 0$, то $\sigma \neq 0$;

2) лишь такие периодические траектории, для которых $h \neq 0$;

3) лишь такие сепаратрисы, которые не идут из седла в седло.

В силу известных результатов Бендиксона [3] система (А), удовлетворяющая в области G условиям Γ , может иметь в области G траектории лишь следующих одиннадцати типов:

I. Состояния равновесия:	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Узлы (фокусы) } [\Delta > 0, \sigma \neq 0] & \dots\dots\dots 1 \\ \text{Седла } [\Delta < 0] & \dots\dots\dots 2 \end{array} \right.$
II. Предельные циклы:	
III. Сепаратрисы:	$\left\{ \begin{array}{ll} [h \neq 0] & \dots\dots\dots 3 \\ \text{Выходящие из узла (фокуса) или стремящиеся к узлу (фокусу)} & \dots\dots\dots 4 \\ \text{Сворачивающиеся с предельного цикла или стремящиеся к предельному циклу} & \dots\dots\dots 5 \\ \text{Входящие в область } G & \dots\dots\dots 6 \end{array} \right.$
IV. Траектории, имеющие в качестве своих предельных траекторий лишь узлы (фокусы) и предельные циклы, расположенные в области G :	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Выходящие из узла (фокуса) и стремящиеся к узлу (фокусу)} & \dots\dots\dots 7 \\ \text{Сворачивающиеся с предельного цикла и стремящиеся к предельному циклу} & \dots\dots\dots 8 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Выходящие из узла (фокуса) и стремящиеся к предельному циклу (или обратно)} & \dots\dots\dots 9 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Стремящиеся к узлу (фокусу)} & \dots\dots\dots 10 \end{array} \right.$
	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Стремящиеся к предельному циклу} & \dots\dots\dots 11 \end{array} \right.$
V. Траектории, входящие в область G и не являющиеся сепаратрисами:	

Определение II. Траектория называется положительно (отрицательно) устойчивой по Ляпунову в области G ^[4], если, какова бы ни была ее точка $M_0 (M_0 \subset G)$, соответствующее движение $M = \varphi(t - t_0, M_0)$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) при всех $t > t_0$ [$t < t_0$] $M \subset G$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\varepsilon, M_0)$, что при всех $t > t_0$ [$t < t_0$] $\rho[\varphi(t - t_0, M_0), \varphi(t - t_0, M_0')] < \varepsilon$, коль скоро $\rho[M_0, M_0'] < \delta$.

Траектория называется положительно (отрицательно) неустойчивой по Ляпунову в области¹ G , если она удовлетворяет условию 1) и не удовлетворяет условию 2).

Определение III. Траектория называется особой, если она положительно или отрицательно неустойчива по Ляпунову.

Траектория называется обыкновенной, если она:

1) либо положительно и отрицательно устойчива по Ляпунову;

2) либо положительно устойчива по Ляпунову и выходит из области G при $t \rightarrow -\infty$.

¹ В дальнейшем для краткости мы будем опускать слова «в области G ».

Теорема IV. Для системы (A), удовлетворяющей в области G условиям Γ , траектории типа I, II, III особые, все остальные траектории в области G обыкновенные.

Теорема V. В динамической системе (A), для которой в области G выполнены условия Γ , множество особых траекторий разбивает область G на конечное число связанных компонент («ячеек»), заполненных обыкновенными траекториями¹. Эти компоненты разделяются на два класса: на класс компонент, примыкающих к циклу без контакта g , и на класс внутренних компонент. В каждой внутренней компоненте любая траектория положительно и отрицательно устойчива по Ляпунову; каждая такая компонента имеет в составе границы одну положительно устойчивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся «элементом притяжения», или «стоком», и одну отрицательно устойчивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся «элементом отталкивания» или «источником».

В каждой компоненте, примыкающей к циклу без контакта, любая траектория положительно устойчива по Ляпунову; каждая такая компонента имеет в составе границы одну положительно устойчивую по Ляпунову особую траекторию, являющуюся стоком.

Пусть мы имеем две динамические системы типа (A): (A_1) и (A_2) и соответственно два разбиения фазовой плоскости на траектории S_1 и S_2 , причем пусть в соответствующих областях G_1 и G_2 выполнены условия Γ .

Мы будем говорить, что качественные структуры разбиений фазовой плоскости на траектории S_1 и S_2 одинаковы в областях G_1 и G_2 , если существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T плоскости в плоскость, переводящее область G_1 в область G_2 , при котором точкам области G_1 , лежащим на одной и той же произвольной траектории разбиения S_1 , соответствуют точки области G_2 , лежащие на одной и той же траектории разбиения S_2 , и наоборот.

Нижеследующая теорема позволяет утверждать, что в системах вида (A), для которых в соответствующих областях G выполнены условия Γ , качественная структура разбиения этих областей на траектории определяется особыми траекториями, направлением движения по замкнутым особым траекториям и характером устойчивости предельных особых траекторий.

Теорема VI. Качественные структуры разбиений S_1 и S_2 , для которых внутри соответствующих циклов без контакта выполнены условия Γ , одинаковы в областях G_1 и G_2 в том и только в том случае, если существует взаимно-непрерывное и взаимно-однозначное преобразование T_1 плоскости в плоскость, переводящее область G_1 в область G_2 , при котором точкам области G_1 , лежащим на одной и той же (любой) особой траектории разбиения S_1 , соответствуют точки области G_2 , лежащие также на одной

¹ Заметим, что существует лишь конечное число возможных топологических типов ячеек, рассматриваемых вместе с их границами.

и той же особой траектории разбиения S_2 , и наоборот, причем: 1) всем источникам и стокам соответствуют опять источники и стоки (или всем, наоборот,—стоки и источники); 2) направление вращения (по времени) на всех соответственных замкнутых особых траекториях сохраняется (или переходит в противоположное).

В условии этой теоремы пункты 1) и 2) можно заменить следующим требованием: в каждой компоненте разбиения S_1 существует обыкновенная траектория, точки которой при преобразовании T_1 переходят в точки одной и той же обыкновенной траектории соответствующей компоненты разбиения S_2 и наоборот.

Достаточные условия грубости системы (A) в области G формулируются в виде следующей теоремы:

Теорема VII. Если система (A) удовлетворяет в области G условиям Γ , то такая система является грубой в области G .

Очевидно, что грубые системы существуют.

Теоремы IV, V, VI, относящиеся к системам вида (A), удовлетворяющим в соответствующих областях G условиям Γ , могут быть сформулированы непосредственно для систем вида (A), грубых в соответствующих областях G .

ЛИТЕРАТУРА

1. Andronow A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues. C. r. Acad. sci. Paris, 1929, vol. 189, N 15, p. 559—561. (см. стр. 55 настоящего изд.).
2. Bohl P.—Acta mathem., 1914, vol. 144, p. 284.
3. Bendixon J. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta mathem., 1901, vol. 24, p. 1—88.
4. Markoff A.—Math. Zs, 1933, Bd 36, S. 708.

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ЗАВИСИМОСТИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ОТ ПАРАМЕТРА¹

Введение.— § 1. Функция последования, связь с характеристическим показателем предельного цикла. Бифуркационная диаграмма для простейшего случая.— § 2. Рождение предельного цикла из особой точки.— 3. Рождение предельного цикла из сепаратрисы.— § 4. Появление предельного цикла при исчезновении сложной особой точки.

Введение

Предположим, что мы имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y; \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y; \lambda) \quad (1)$$

где x, y — декартовы координаты на плоскости, а λ — некоторый параметр.

Сделаем ряд общих замечаний, касающихся изменения качественной картины фазовых траекторий при изменении параметра, предполагая, что $P(x, y; \lambda), Q(x, y; \lambda)$ — аналитические функции x, y в некоторой области G^2 и аналитические функции λ для всех λ внутри некоторого промежутка $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$.

Напомним прежде всего определение так называемого *бифуркационного* значения параметра^[1].

Пусть нам дано какое-нибудь значение параметра $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 \leq \lambda_0 \leq \lambda_2$). Если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех значений λ , удовлетворяющих условию $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, топологическая структура разбиения фазовой плоскости на траектории одинакова, то мы скажем, что $\lambda = \lambda_0$ есть *обыкновенное* значение параметра. Всякое не обыкновенное значение параметра мы будем называть бифуркационным.

Очевидно, что при исследовании изменений качественного характера фазовых траекторий с изменением параметра основной интерес представляют бифуркационные значения параметра и непосредственно к ним примыкающие.

¹ Совместно с Е. А. Леонтович. Опубликовано в Уч. зап. Горьковского ун-та. 1939, в. 6, с. 3.

² Областью G , в частности, может служить вся плоскость.

Как известно^[2], качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории определяется так называемыми *особыми элементами* или *особыми траекториями*. Поэтому, чтобы изучить зависимость качественной картины фазовых траекторий от параметра, следует изучить зависимость от параметра системы особых элементов.

В настоящей заметке мы рассмотрим ряд простейших частных задач, связанных с наличием в системе (для бифуркационного значения параметра) «не грубых»^[3] особых элементов, порождающих при изменении параметра предельные циклы.

Сделаем предварительно несколько замечаний, касающихся грубых систем. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ наша система является грубой, т. е. на фазовой плоскости существует цикл без контакта, определяющий собой область G внутри которой:

1) все особые точки таковы, что для них

$$q = \begin{vmatrix} P_x'(x_0, y_0; \lambda_0) & Q_x'(x_0, y_0; \lambda_0) \\ P_y'(x_0, y_0; \lambda_0) & Q_y'(x_0, y_0; \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

и если $q > 0$, то

$$p = -[P_x'(x_0, y_0; \lambda_0) + Q_y'(x_0, y_0; \lambda_0)] \neq 0$$

где x_0, y_0 — координаты особой точки;

2) все предельные циклы имеют характеристические показатели

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P_x'(\varphi, \psi; \lambda_0) + Q_y'(\varphi, \psi; \lambda_0)] dt \neq 0$$

где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, $\psi(t + \tau) = \psi(t)$] — одно из периодических движений, соответствующих предельному циклу;

3) сепаратрисы (усы седла) не идут из седла в седло.

Очевидно, что в этом случае значение $\lambda = \lambda_0$ не может быть бифуркационным по самому определению грубых систем и по нашему предположению об аналитичности правых частей уравнений (A) как функций λ .

Предположим для упрощения рассуждений, что при всех рассматриваемых изменениях параметра λ ($\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$) цикл без контакта так и остается циклом без контакта. Очевидно, что только те значения параметра λ могут быть бифуркационными, при которых появляются особые элементы, имеющие негрубую природу¹. Укажем некоторые простейшие случаи таких негрубых образований.

1. Сложные особые точки (такие точки могут либо появиться вновь, либо получиться от слияния простых точек, например узла и седла).

2. Вырожденный фокус или центр.

3. Полуустойчивый предельный цикл (такой цикл может либо появиться вновь, либо получиться от слияния устойчивого и неустойчивого циклов).

¹ Если $\lambda = \lambda_0$ соответствует грубой системе, то мы всегда можем указать интервал (достаточно малый) значений λ вокруг $\lambda = \lambda_0$, чтобы при значениях λ из этого интервала система также была грубой.

4. Сепаратриса, идущая из седла в седло.

При дальнейшем изменении параметра система может опять сделаться грубой: сложная особая точка может или исчезнуть, или разбиться на простые; вырожденный фокус может, как мы увидим в дальнейшем, стать невырожденным, изменяя при этом устойчивость и породив предельный цикл и т. д.

Кроме того, легко видеть, что при наших предположениях о $P(x, y; \lambda)$ и $Q(x, y; \lambda)$ индекс простой замкнутой кривой N

$$j = \frac{1}{2\pi} \int_N \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}$$

есть непрерывная (и даже аналитическая) функция параметра λ , если только на самой кривой N не появляются состояния равновесия. Отсюда следует, что при этом условии индекс не меняется при изменении параметра, так как он является целым числом.

Отсюда вытекает, что одно состояние равновесия, индекс которого не равен нулю, не может ни появиться, ни исчезнуть при изменении параметра. Если мы имеем простую особую точку — узел, то она может, например, исчезнуть лишь после предварительного слияния с седлом, при котором образуется сложная особая точка, индекс которой равен нулю. Обратно, седло или узел могут, например, появиться следующим образом: сначала появляется сложная особая точка, индекс которой равен нулю, которая затем разделяется на две: седло и узел.

Сформулируем основные предложения, которые нам будут нужны в дальнейшем.

Предложение I. Пусть мы имеем систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y; \lambda), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y; \lambda)$$

где $P(x, y; \lambda)$, $Q(x, y; \lambda)$ — аналитические функции x и y в некоторой области G и аналитические функции λ в области $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$.

Пусть при значении $\lambda = \lambda_0$ ($\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$) решение

$$x = \varphi(t - t_0; x_0, y_0; \lambda_0), \quad y = \psi(t - t_0; x_0, y_0; \lambda_0)$$

принимаящее значение x_0, y_0 (из области G) при $t = t_0$, продолжаемо для всех значений $t > t_0$ (или $t < t_0$) и остается в области G . Каково бы ни было $T > t_0$ (или $T < t_0$), всегда можно указать такое $\delta > 0$, чтобы для всех значений t , удовлетворяющих условию $t_0 \leq t \leq T$ (или $t_0 \geq t \geq T$), решение

$$x = \varphi(t - t_0; \xi, \eta; \lambda), \quad y = \psi(t - t_0; \xi, \eta; \lambda)$$

было аналитической функцией ξ, η, λ для всех значений этих переменных, удовлетворяющих неравенствам:

$$|\xi - x_0| < \delta, \quad |\eta - y_0| < \delta, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta$$

Предложение II. Пусть при значении $\lambda = \lambda_0$ мы имеем отрезок без контакта L и пусть траектория

$$x = \varphi(t - t_0; x_0, y_0; \lambda_0), \quad y = \psi(t - t_0; x_0, y_0; \lambda_0)$$

пересекает этот отрезок при значении $t = \tau$ в точке x_1, y_1 , не являющейся концом отрезка L .

Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\Delta > 0$, всегда можно указать такое $\delta > 0$, чтобы при всех значениях $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ отрезок L оставался бы отрезком без контакта и всякая траектория

$$x = \varphi(t - t_0; \xi, \eta; \lambda), \quad y = \psi(t - t_0; \xi, \eta; \lambda)$$

где

$$|\xi - x_0| < \delta, \quad |\eta - y_0| < \delta, \quad |\lambda - \lambda_0| < \delta$$

пересекала бы отрезок L в точке $\xi_1 \eta_1$

$$|\xi_1 - x_1| < \varepsilon, \quad |\eta_1 - y_1| < \varepsilon$$

при значении t , отличающемся от τ меньше чем на Δ

$$|t - \tau| < \Delta$$

§ 1. Функция последования,

связь с характеристическим показателем предельного цикла.

Бифуркационная диаграмма для простейшего случая

Пусть при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ мы имеем отрезок без контакта L . Выберем на нем какую-нибудь определенную точку P , и пусть s — расстояние точек отрезка L до этой точки, отсчитываемое в некотором определенном направлении.

Уравнение отрезка L можно записать в параметрической форме выбирая за параметр s :

$$x = f_1(s), \quad y = f_2(s), \quad [s_1 \leq s \leq s_2]$$

Предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ траектория C_0 , проходящая при $t = 0$ через точку x_0, y_0 отрезка L пересечет этот отрезок еще раз при значении $t = \tau$ в точке x_1, y_1 (при этом будем предполагать, что точки x_0, y_0 и x_1, y_1 — внутренние точки отрезка L).

Пусть точка x_0, y_0 соответствует значению $s = s_0$, а точка x_1, y_1 — значению $s = s_1$.

В силу предложения II для всех значений λ , достаточно близких к λ_0 ($|\lambda - \lambda_0| < \delta$), отрезок L останется отрезком без контакта, и всякая траектория C , проходящая через точку $x_0(s), y_0(s)$, достаточно близкую к точке x_0, y_0 (соответствующей $s = s_0$), пересечет отрезок L еще раз в точке, сколь угодно близкой к точке x_1, y_1 , при значении t , сколь угодно близком к $t = \tau$.

Пусть уравнение траектории C

$$x = \varphi[t, x_0(s), y_0(s); \lambda] = \Phi_1(t, s, \lambda)$$

$$y = \psi[t, x_0(s), y_0(s); \lambda] = \Phi_2(t, s, \lambda)$$

где $\Phi_1(t, s, \lambda)$ и $\Phi_2(t, s, \lambda)$ — голоморфные функции t, s и λ при всех значениях t и при всех значениях s и λ внутри некоторых промежутков.

Так как траектория C_0 пересекает отрезок L в точке x_1, y_1 соответствующей $s = s_1$, то мы будем иметь:

$$\Phi_1(\tau, s_0, \lambda_0) = x_1 = f_1(s_1), \quad \Phi_2(\tau, s_0, \lambda_0) = y_1 = f_2(s_1)$$

Будем искать точки пересечения траектории C с отрезком L , близкие к точке x_1, y_1 . Для этого мы должны написать:

$$\Phi_1(t, s, \lambda) = f_1(\bar{s}), \quad \Phi_2(t, s, \lambda) = f_2(\bar{s}) \quad (2)$$

Так как при $\lambda = \lambda_0$ отрезок L в точке x_1, y_1 не касается траектории C_0 , то детерминант

$$\begin{vmatrix} \Phi_{1t}' & f_{1t}'(\bar{s}) \\ \Phi_{2t}' & f_{2t}'(\bar{s}) \end{vmatrix}$$

при $t = \tau, s = s_0, \lambda = \lambda_0, \bar{s} = s_1$ не обращается в нуль, и, следовательно, из соотношения (2) мы можем найти $\bar{s}$ и t как функции s и λ для всех значений s и λ , достаточно близких к s_0 и λ_0 . Таким образом, мы найдем из соотношения (2) функцию последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$, которая будет голоморфной функцией s и λ для значений этих переменных, достаточно близких к s_0 и λ_0 [4].

Очевидно, замкнутые траектории¹, пересекающие отрезок L , будут соответствовать тем значениям s и λ , для которых

$$f(s, \lambda) - s = 0$$

Предположим теперь, что при $\lambda = \lambda_0$ траектория C_0 есть предельный цикл. Тогда будем иметь $s_1 = s_0$. Положим для сокращения выкладок, что

$$s_1 = s_0 = 0$$

Если мы напишем функцию $\bar{s} = f(s, \lambda)$ в виде ряда, расположенного по степеням s :

$$\bar{s} = \alpha_0(\lambda) + \alpha_1(\lambda)s + \alpha_2(\lambda)s^2 + \dots$$

то, как нетрудно видеть, мы будем иметь тогда $\alpha_0(\lambda_0) = 0$.

Найдем, как выражается $\alpha_1(\lambda_0)$ в зависимости от характеристического показателя h предельного цикла C_0 .

При этом сделаем следующее очевидное замечание: для отыскания $\alpha_1(\lambda_0)$ мы положим в соотношениях (2) $\lambda = \lambda_0$. Тогда соотношения (2) могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} x_0 + a_1 s + b_1(t - \tau) + \dots &= x_0 + c_1 \bar{s} \\ y_0 + a_2 s + b_2(t - \tau) + \dots &= y_0 + c_2 \bar{s} \end{aligned}$$

¹ Если бы все траектории, пересекающие отрезок L достаточно близко к C_0 , были замкнуты, то, очевидно, функция последования была бы $\bar{s} = s$.

Принимая во внимание, что

$$\Phi_1(\tau, 0, \lambda_0) = x_0 = f_1(0), \quad \Phi_2(\tau, 0, \lambda_0) = y_0 = f_2(0)$$

нетрудно видеть из соотношений (2), что

$$\alpha_1(\lambda_0) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Будем теперь искать выражения для a_1 , a_2 , b_1 , b_2 и т. д. Пусть

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y; \lambda_0), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y; \lambda_0) \quad (1')$$

рассматриваемая нами система при значении $\lambda = \lambda_0$ и пусть

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$

($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — периодические функции с периодом τ), параметрическое уравнение предельного цикла C_0 при $\lambda = \lambda_0$, пересекающего отрезок L в точке x_0, y_0 , соответствующей $s = 0$, так что

$$\varphi(0) = \varphi(\tau) = x_0, \quad \psi(0) = \psi(\tau) = y_0$$

Сделаем в уравнении (1') замену:

$$x = \varphi(t) + \xi, \quad y = \psi(t) + \eta$$

и мы получим для ξ и η уравнения с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P_x'(\varphi, \psi; \lambda_0)\xi + P_y'(\varphi, \psi; \lambda_0)\eta + \dots \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q_x'(\varphi, \psi; \lambda_0)\xi + Q_y'(\varphi, \psi; \lambda_0)\eta + \dots \end{aligned} \quad (I)$$

Для исследования характера решений этой системы при достаточно малых начальных значениях ξ и η мы воспользуемся известным методом^[5], а именно, отбросим члены, содержащие степени ξ и η выше первой, и рассмотрим линейную систему¹:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P_x'(\varphi, \psi; \lambda_0)\xi + P_y'(\varphi, \psi; \lambda_0)\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q_x'(\varphi, \psi; \lambda_0)\xi + Q_y'(\varphi, \psi; \lambda_0)\eta \end{aligned} \quad (II)$$

Известно, что для уравнений (II) один характеристический показатель всегда равен нулю^[6].

Если второй характеристический показатель h не равен нулю, то система (II) имеет фундаментальную систему решений вида:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \varphi_{11}(t), & \xi_2(t) &= \varphi_{12}(t)e^{ht} \\ \eta_1(t) &= \varphi_{21}(t), & \eta_2(t) &= \varphi_{22}(t)e^{ht} \end{aligned}$$

¹ Где ряды по ξ и η , стоящие в правых частях уравнений (II), сходятся при всех значениях t для всех достаточно малых ξ и η .

где φ_{ij} — периодические функции с периодом τ . При этом мы всегда можем полагать, что

$$\varphi_{11}(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{21}(t) = \psi'(t)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — периодические функции, дающие параметрическое уравнение предельного цикла.

Если оба характеристические показатели равны нулю, то система (II) будет иметь фундаментальную систему вида:

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= \varphi_{11}(t), & \xi_2(t) &= [t \varphi_{12}(t) + \psi_{12}(t)] \\ \eta_1(t) &= \varphi_{21}(t), & \eta_2(t) &= (t \varphi_{22}(t) + \psi_{22}(t)) \end{aligned}$$

где $\varphi_{11}(t)$, $\varphi_{21}(t)$, $\psi_{12}(t)$, $\varphi_{12}(t)$, $\varphi_{22}(t)$, $\psi_{22}(t)$ — периодические функции t с периодом τ , причем здесь, так же как и в первом случае, можно принять, что

$$\varphi_{11}(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{21}(t) = \psi'(t)$$

Рассмотрим первый случай, когда $h \neq 0$.

Для дальнейшего нам будет удобнее взять новую фундаментальную систему:

$$\begin{aligned} \xi &= A_1(t) = \frac{1}{\Delta} [\varphi_{22}(0) \varphi_{11}(t) - \varphi_{21}(0) e^{ht} \varphi_{12}(t)] \\ \xi &= A_2(t) = \frac{1}{\Delta} [\varphi_{11}(0) e^{ht} \varphi_{12}(t) - \varphi_{12}(0) \varphi_{11}(t)] \\ \eta &= B_1(t) = \frac{1}{\Delta} [\varphi_{11}(0) \varphi_{21}(t) - \varphi_{21}(0) e^{ht} \varphi_{22}(t)] \\ \eta &= B_2(t) = \frac{1}{\Delta} [\varphi_{11}(0) e^{ht} \varphi_{22}(t) - \varphi_{12}(0) \varphi_{22}(t)] \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(0) & \varphi_{12}(0) \\ \varphi_{21}(0) & \varphi_{22}(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned} A_1(0) &= 1, & A_2(0) &= 0 \\ B_1(0) &= 0, & B_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что общее решение системы (II), удовлетворяющее условиям $\xi(0) = \xi_0$, $\eta(0) = \eta_0$ при $t = 0$, имеет вид:

$$\xi = \xi_0 A_1(t) + \eta_0 A_2(t), \quad \eta = \xi_0 B_1(t) + \eta_0 B_2(t)$$

а соответствующее решение системы (I) имеет вид:

$$\xi = \xi_0 A_1(t) + \eta_0 A_2(t) + \dots, \quad \eta = \xi_0 B_1(t) + \eta_0 B_2(t) + \dots,$$

где невыписанные члены высших степеней относительно ξ_0 , η_0 обращаются в нуль при $t = 0$; соответствующие ряды сходятся для всех достаточно малых значений ξ_0 и η_0 [5].

Решение системы (1') будет:

$$x = \varphi(t) + \xi_0 A_1(t) + \eta_0 A_2(t) + \dots$$

$$y = \psi(t) + \xi_0 B_1(t) + \eta_0 B_2(t) + \dots$$

Полагая

$$\xi_0 = f_1(s) - x_0 = c_1 s + \dots, \quad \eta_0 = f_2(s) - y_0 = c_2 s + \dots$$

мы получим при достаточно малых значениях s уравнения траекторий, проходящих при $t=0$ через точки дуги L , близкие к точке с координатами x_0, y_0 .

Для нахождения коэффициента $\alpha_1(\lambda_0)$ в функции последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$ разложим выражения для x и y по степеням s и $t - \tau$. Мы будем иметь:

$$x = \varphi(\tau) + \varphi'(\tau)(t - \tau) + \dots (c_1 s + \dots) [A_1(\tau) + \dots] + (c_2 s + \dots) [A_2(\tau) + \dots]$$

$$y = \psi(\tau) + \psi'(\tau)(t - \tau) + \dots (c_1 s + \dots) [B_1(\tau) + \dots] + (c_2 s + \dots) [B_2(\tau) + \dots]$$

Для нахождения зависимости $\bar{s}$ от s мы можем написать:

$$x_0 + \varphi'(\tau)(t - \tau) + [c_1 A_1(\tau) + c_2 A_2(\tau)] s + \dots = x_0 + c_1 \bar{s}$$

$$y_0 + \psi'(\tau)(t - \tau) + [c_1 B_1(\tau) + c_2 B_2(\tau)] s + \dots = y_0 + c_2 \bar{s}$$

При этом очевидно, что

$$\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & c_1 \\ \psi'(\tau) & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Мы получаем таким образом

$$\alpha_1(\lambda_0) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & c_1 A_1(\tau) + c_2 A_2(\tau) \\ \psi'(\tau) & c_1 B_1(\tau) + c_2 B_2(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & c_1 \\ \psi'(\tau) & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D_2}$$

Развернем детерминант, стоящий в числителе, принимая во внимание, что

$$\varphi'(\tau) = \varphi_{11}(\tau), \quad \psi'(\tau) = \varphi_{21}(\tau)$$

$$D_1 = c_1 \begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & A_1(\tau) \\ \psi'(\tau) & B_1(\tau) \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & A_2(\tau) \\ \psi'(\tau) & B_2(\tau) \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 [\varphi'(\tau) B_1(\tau) - \psi'(\tau) A_1(\tau)] + c_2 [\varphi'(\tau) B_2(\tau) - \psi'(\tau) A_2(\tau)] =$$

$$= \frac{c_1}{\Delta} \left\{ \varphi'(\tau) [\varphi_{21}(\tau) \varphi_{22}(0) - \varphi_{22}(\tau) e^{h\tau} \varphi_{21}(0)] - \psi'(\tau) [\varphi_{11}(\tau) \varphi_{22}(0) - e^{h\tau} \varphi_{12}(\tau) \varphi_{21}(0)] \right\} +$$

$$+ \frac{c_2}{\Delta} \left\{ \varphi'(\tau) [\varphi_{22}(\tau) \varphi_{11}(0) e^{h\tau} - \varphi_{12}(0) \varphi_{21}(\tau)] - \psi'(\tau) [\varphi_{12}(\tau) e^{h\tau} \varphi_{11}(0) - \varphi_{11}(\tau) \varphi_{12}(0)] \right\} =$$

$$= \frac{c_1}{\Delta} \left\{ \varphi'(\tau) \psi'(\tau) \varphi_{22}(0) - \varphi_{22}(\tau) e^{h\tau} \varphi'(\tau) \psi'(\tau) - \psi'(\tau) \varphi'(\tau) \varphi_{22}(0) + e^{h\tau} \varphi_{12}(\tau) [\psi'(\tau)]^2 \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_2}{\Delta} \left\{ [\varphi'(\tau)]^2 e^{h\tau} \varphi_{22}(\tau) - \varphi'(\tau) \psi'(\tau) \varphi_{12}(\tau) - e^{h\tau} \varphi_{12}(\tau) \psi'(\tau) \varphi'(\tau) - \varphi'(\tau) \psi'(\tau) \varphi_{12}(\tau) \right\} = \\
& = \frac{e^{h\tau} c_1}{\Delta} \left\{ -\psi'(\tau) [\varphi'(\tau) \varphi_{22}(\tau) - \psi'(\tau) \varphi_{12}(\tau)] \right\} + \frac{e^{h\tau} c_2}{\Delta} \left\{ \varphi'(\tau) [\varphi'(\tau) \varphi_{22}(\tau) - \psi'(\tau) \varphi_{12}(\tau)] \right\} = \\
& = e^{h\tau} [c_2 \varphi'(\tau) - c_1 \psi'(\tau)] = D_2 e^{h\tau}
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\alpha_1(\lambda_0) = \frac{d\bar{s}}{ds} = e^{h\tau} \quad (3)$$

Совершенно такие же рассуждения справедливы и для случая $h = 0$.

Точно так же из фундаментальной системы $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$ мы образуем фундаментальную систему $\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1; \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2$, удовлетворяющую условиям:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1(0) &= \bar{A}_1(0) = 1, & \bar{\xi}_2(0) &= \bar{A}_2(0) = 0 \\
\bar{\eta}_1(0) &= \bar{B}_1(0) = 0, & \bar{\eta}_2(0) &= \bar{B}_2(0) = 1
\end{aligned}$$

и общее решение системы (II) может быть записано так:

$$\xi = \xi_0 \bar{A}_1(t) + \eta_0 \bar{A}_2(t), \quad \eta = \xi_0 \bar{B}_1(t) + \eta_0 \bar{B}_2(t)$$

где

$$\bar{A}_1(t) = \frac{1}{\Delta} \{ \psi_{22}(0) \varphi_{11}(t) - \varphi_{21}(0) [t \varphi_{11}(t) + \psi_{12}(t)] \}$$

$$\bar{A}_2(t) = \frac{1}{\Delta} \{ \varphi_{11}(0) [t \varphi_{11}(t) + \psi_{12}(t)] - \psi_{12}(0) \varphi_{11}(t) \}$$

$$\bar{B}_1(t) = \frac{1}{\Delta} \{ \psi_{22}(0) \varphi_{21}(t) - \varphi_{21}(0) [t \varphi_{21}(t) + \psi_{22}(t)] \}$$

$$\bar{B}_2(t) = \frac{1}{\Delta} \{ \varphi_{11}(0) [t \varphi_{21}(t) + \psi_{22}(t)] - \psi_{12}(0) \varphi_{21}(t) \}$$

и где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(0) & \psi_{12}(0) \\ \varphi_{21}(0) & \psi_{22}(0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Повторяя в точности такие же рассуждения, как и для $h \neq 0$, мы получим

$$\alpha_1(\lambda_0) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & c_1 \bar{A}_1(\tau) + c_2 \bar{A}_2(\tau) \\ \psi'(\tau) & c_1 \bar{B}_1(\tau) + c_2 \bar{B}_2(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'(\tau) & c_1 \\ \psi'(\tau) & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D_2}$$

Разворачивая D_1 и принимая во внимание, что

$$\varphi_{11}(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{21}(t) = \psi'(t)$$

мы получим:

$$\begin{aligned}
D_1 &= c_1 [\varphi'(\tau) \bar{B}_1(\tau) - \psi'(\tau) \bar{A}_1(\tau)] + c_2 [\varphi'(\tau) \bar{B}_2(\tau) - \psi'(\tau) \bar{A}_2(\tau)] = \\
&= \frac{c_1}{\Delta} \{ \varphi'(\tau) [\psi_{22}(0) \varphi_{21}(\tau) - \varphi_{21}(0) \tau \varphi_{21}(\tau) - \varphi_{21}(0) \psi_{22}(\tau)] - \psi'(\tau) [\psi_{22}(0) \varphi_{11}(\tau) - \\
&\quad - \varphi_{21}(0) \tau \varphi_{11}(\tau) - \varphi_{21}(0) \psi_{12}(\tau)] \} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_2}{\Delta} \{ \varphi'(\tau) [\varphi_{11}(0) \tau \varphi_{21}(\tau) + \varphi_{11}(0) \psi_{22}(\tau) - \psi_{12}(0) \varphi_{21}(\tau)] - \dot{\varphi}'(\tau) [\varphi_{11}(0) \tau \varphi_{11}(\tau)] + \\
& \quad + \varphi_{11}(0) \psi_{12}(\tau) - \psi_{12}(0) \varphi_{11}(\tau) \} = \\
& = \frac{c_1}{\Delta} \{ \varphi'(\tau) \dot{\varphi}'(\tau) \psi_{22}(\tau) - [\dot{\varphi}'(\tau)]^2 \varphi'(\tau) \tau - \dot{\varphi}'(\tau) \varphi'(\tau) \psi_{22}(\tau) - \dot{\varphi}'(\tau) \varphi'(\tau) \psi_{22}(\tau) + \\
& \quad + [\dot{\varphi}'(\tau)]^2 \varphi'(\tau) \tau + [\dot{\varphi}'(\tau)]^2 \psi_{12}(\tau) \} + \\
& + \frac{c_2}{\Delta} \{ [\varphi'(\tau)]^2 \dot{\varphi}'(\tau) \tau + [\varphi'(\tau)]^2 \psi_{22}(\tau) - \varphi'(\tau) \dot{\varphi}'(\tau) \psi_{12}(\tau) - \dot{\varphi}'(\tau) [\varphi'(\tau)]^2 \tau - \\
& \quad - \varphi'(\tau) \dot{\varphi}'(\tau) \psi_{12}(\tau) + \varphi'(\tau) \dot{\varphi}'(\tau) \psi_{12}(\tau) \} = \\
& = \frac{c_1}{\Delta} \{ \dot{\varphi}'(\tau) [\dot{\varphi}'(\tau) \psi_{12}(\tau) - \varphi'(\tau) \psi_{22}(\tau)] \} + \frac{c_2}{\Delta} \{ \dot{\varphi}'(\tau) [\varphi'(\tau) \psi_{22}(\tau) - \dot{\varphi}'(\tau) \psi_{12}(\tau)] \} = \\
& = c_2 \varphi'(\tau) - c_1 \dot{\varphi}'(\tau) = D_2
\end{aligned}$$

Отсюда, как нетрудно видеть,

$$\alpha_1(\lambda_0) = 1 \quad (4)$$

Резюмируя все предыдущее, мы можем сказать следующее.

Если мы имеем отрезок L , являющийся отрезком без контакта при всех значениях λ [$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$] и при всех этих значениях λ функцию последования на нем: $s = f(s, \lambda)$ ($s_1 \leq s \leq s_2$) (причем s_1 и s_2 не зависят от λ), то замкнутые траектории, пересекающие L , соответствуют тем значениям $s = s_0$ и $\lambda = \lambda_0$, при которых $\psi(s, \lambda) = f(s, \lambda) - s = 0$, причем в том случае, когда характеристический показатель h замкнутой траектории (предельного цикла) отличен от нуля, мы имеем

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = e^{h\tau} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = e^{h\tau} - 1$$

а когда $h = 0$

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds} \right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 1 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 0$$

Высказанные соображения находятся в тесной связи с теорией устойчивости по Ляпунову периодических решений, соответствующих замкнутой фазовой траектории. Именно, как известно [7], если $h < 0$ или, иначе, $(d\bar{s}/ds)_{s=s_0} < 1$, то соответствующее периодическое решение устойчиво по Ляпунову. Если же $h > 0$, или $(d\bar{s}/ds)_{s=s_0} > 1$, то соответствующее периодическое решение неустойчиво по Ляпунову. Если $h = 0$, или же $(d\bar{s}/ds)_{s=s_0} = 1$, то вопрос требует дополнительного исследования.

Пользуясь функцией последования, сделаем несколько простых замечаний относительно появления и исчезновения предельных циклов.

1. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ мы имеем предельный цикл, пересекающий отрезок L в точке, соответствующей $s = s_0$, т. е. мы имеем

$$f(s_0, \lambda_0) - s_0 = \psi(s_0, \lambda_0) = 0$$

причем пусть

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} \neq 0$$

Очевидно, что при всех значениях, достаточно близких к $\lambda = \lambda_0$, будем иметь одну и только одну функцию $\bar{s} = f(s, \lambda)$, удовлетворяющую соотношению $\psi(s, \lambda) = 0$ и стремящуюся к s_0 при λ , стремящемся к λ_0 . Другими словами, при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , мы будем иметь один и только один предельный цикл (для значений s , достаточно близких к s_0).

2. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ мы имеем

$$f(s_0, \lambda_0) - s_0 = \psi(s_0, \lambda_0) = 0$$

причем

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = 0, \quad \text{но} \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}\right)_{\substack{s=s_0 \\ \lambda=\lambda_0}} \neq 0$$

Тогда, как нетрудно видеть, при $\lambda = \lambda_0$ значению $s = s_0$ соответствует двойной «полуустойчивый» цикл. При сколь угодно малых изменениях λ этот цикл может, вообще говоря, либо исчезнуть, либо разделиться на два цикла, из которых один устойчивый, другой неустойчивый.

Можно было бы продолжить такое же рассмотрение дальше, выяснить, в каких случаях предельный цикл может разделиться на три, четыре цикла и т. д.

§ 2. Рождение предельного цикла из особой точки

Рассмотрим теперь простейший случай появления предельного цикла из состояния равновесия типа фокус.

Перенесем начало координат в эту особую точку и приведем исходную систему путем надлежащего преобразования к так называемому каноническому виду. Тогда исходная система запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(\lambda)x - b_1(\lambda)y + P_2(x, y, \lambda) \\ \frac{dy}{dt} &= b_1(\lambda)x + a_1(\lambda)y + Q_2(x, y, \lambda) \end{aligned} \quad (5)$$

где $P_2(x, y, \lambda)$ и $Q_2(x, y, \lambda)$ — ряды, расположенные по степеням x и y , начинающиеся с членов не ниже второго порядка, а $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$ — действительная и мнимая часть корней характеристического уравнения

$$S_1 = a_1(\lambda) + ib_1(\lambda), \quad S_2 = a_1(\lambda) - ib_1(\lambda)$$

Кроме того, мы предположим, что при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$)

$$b_1(\lambda) \neq 0$$

Напомним, что если $a_1(\lambda) > 0$, то состояние равновесия устойчиво, если $a_1(\lambda) < 0$, то неустойчиво.

Если $a_1(\lambda) = 0$, то члены первого порядка не дают ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия.

Если при изменении λ , $a_1(\lambda)$ меняет знак, то при этом может появиться предельный цикл.

Переходя к полярным координатам, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} &= a_1(\lambda)(x^2 + y^2) + P_2(x, y, \lambda)x + Q_2(x, y, \lambda)y \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} [b_1(\lambda)(x^2 + y^2) + Q_2(x, y, \lambda)x - P_2(x, y, \lambda)y] \end{aligned} \quad (6)$$

Деля первое из уравнений (6) на второе, получаем:

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{[a_1(\lambda)r + P_2 \cos \theta + Q_2 \sin \theta]}{[b_1(\lambda)r + Q_2 \cos \theta - P_2 \sin \theta]} \quad (7)$$

Так как при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) $b_1(\lambda) \neq 0$, то правая часть уравнения (7) может быть разложена в ряд по степеням r :

$$\frac{dr}{d\theta} = rR_1(\theta, \lambda) + r^2R_2(\theta, \lambda) + r^3R_3(\theta, \lambda) + \dots \quad (8)$$

причем ряд в правой части сходится при всех значениях θ и при всех рассматриваемых значениях λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$) для всех достаточно малых значений r , $|r| < \rho$ (ρ можно взять не зависящим от λ).

Как легко видеть,

$$R_1(\theta, \lambda) = \frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)}$$

т. е. не зависит от θ , а $R_k(\theta, \lambda)$ ($k = 2, 3, \dots$) — периодические функции θ .

Пусть $r = f(\theta, r_0, \lambda)$ — решение уравнения (8), обращающееся в r_0 при $\theta = 0$, так что

$$r_0 = f(0, r_0, \lambda)$$

Можно показать¹, что это решение может быть разложено в ряд по степеням r_0 , сходящийся при всех θ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и при всех рассматриваемых значениях λ , для значений r_0 , $|r_0| < \rho$, где ρ можно взять не зависящим от λ ($\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$).

Таким образом,

$$r = f(\theta, r_0, \lambda) = r_0 u_1(\theta, \lambda) + r_0^2 u_2(\theta, \lambda) + \dots \quad (9)$$

Для вычисления коэффициентов $u_k(\theta, \lambda)$ мы можем, например, подставить этот ряд в дифференциальное уравнение (8) и получить для функции $u_k(\theta, \lambda)$ рекуррентные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= u_1 R_1(\theta, \lambda) \\ \frac{du_2}{d\theta} &= u_2 R_1(\theta, \lambda) + u_1^2 R_2(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (9a)$$

¹ См., например, Бибербах [8], глава II, Пуанкаре [6], Ляпунов [5].

Так как $f(0, r_0, \lambda) = r_0$, то $u_1(0, \lambda) = 1$ и $u_k(0, \lambda) = 0$ ($k = 2, 3, \dots$).

Этими начальными условиями совместно с дифференциальными уравнениями (9а) полностью определяются функции $u_k(\theta, \lambda)$. В частности, первое из уравнений (9а) дает

$$u_1(\theta, \lambda) = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} \theta}$$

Обратим теперь внимание на следующее.

Прямая $\theta = 0$ для всех достаточно малых значений r и при всех рассматриваемых значениях λ не касается интегральных кривых на плоскости $r\theta$. Поэтому достаточно малый отрезок этой прямой (соответствующий значениям $0 \leq r \leq r_0$) будет играть роль, вполне аналогичную обычному отрезку без контакта, хотя один из его концов упирается в особую точку (фокус). Поэтому, давая в решении (9) θ значение 2π , мы получим функцию, вполне аналогичную функции последования, о которой у нас была речь выше:

$$\bar{r} = f(2\pi, r_0, \lambda) = u_1(2\pi, \lambda) r_0 + u_2(2\pi, \lambda) r_0^2 + \dots$$

При этом

$$u_1(2\pi, \lambda) = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} 2\pi}$$

Пользуясь этой функцией, мы могли бы провести рассмотрение, в точности аналогичное тому, которое мы провели для случая обычной функции последования (см. выше). Введем функцию

$$\psi(r_0, \lambda) = f(2\pi, r_0, \lambda) - r_0 = \alpha_1(\lambda) r_0 + \alpha_2(\lambda) r_0^2 + \dots$$

где

$$\alpha_1(\lambda) = u_1(2\pi, \lambda) - 1 = e^{\frac{a_1(\lambda)}{b_1(\lambda)} 2\pi} - 1$$

$$\alpha_k(\lambda) = u_k(2\pi, \lambda) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Рассмотрим плоскость $r_0 \lambda$ и будем строить для этого случая обычные бифуркационные диаграммы. При этом нужно иметь в виду, что функции $f(2\pi, r_0, \lambda)$ и $\psi(r_0, \lambda)$ имеют смысл только для положительных значений r_0 .

Посмотрим, какие здесь могут быть возможности.

1) Предположим, что для рассматриваемых значений λ , $a_1(\lambda) \neq 0$ и, следовательно, $\alpha_1(\lambda) \neq 0$. Тогда для рассматриваемых значений λ кривая $\psi(r_0, \lambda)$ не имеет кратных точек (точек, в которых одновременно $\psi_{r_0} = 0$, $\psi_{\lambda} = 0$); знак $a_1(\lambda)$ не меняется, особая точка — фокус — сохраняет свою устойчивость, и от нее не может отделиться (и к ней не может стянуться) предельный цикл.

2) Займемся теперь случаем, о котором мы говорили выше, именно тем случаем, когда $a_1(\lambda)$ обращается в нуль, т. е., иначе говоря, когда среди рассматриваемых значений λ найдется такое значение $\lambda = \lambda_0$, при котором $a_1(\lambda_0) = 0$, а следовательно, и $\alpha_1(\lambda_0) = 0$ (фокус становится вырожденным).

Кривая $\psi(r_0, \lambda)$ имеет тогда в точке $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ кратную точку (легко проверить, что $\psi_{r_0}' = 0, \psi_{\lambda}' = 0$ при $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$).

Прежде чем исследовать характер бифуркационной диаграммы вокруг точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$, сделаем следующее замечание: если при значении $\lambda = \lambda_0$ $\alpha_1(\lambda_0) = 0$, то непременно обращается в нуль также и $\alpha_2(\lambda_0)$. И вообще: если $\alpha_1(\lambda_0) = \alpha_2(\lambda_0) = \dots = \alpha_{2k-1}(\lambda_0) = 0$, то непременно и $\alpha_{2k} = 0^1$.

Рассмотрим функцию $\psi(r_0, \lambda) = 0$. Для исследования кратной точки $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ найдем выражения для вторых производных $\psi(r_0, \lambda)$ при значении $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$. Получим:

$$(\psi''_{r_0 r_0})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \alpha_2(\lambda_0) = 0$$

$$(\psi'_{\lambda\lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = 0$$

$$(\psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} = 2\pi \frac{a_1'(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)}$$

Рассмотрим подробнее случай, когда

$$(\psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} = \left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$$

Тогда

$$(\psi''_{rr})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} (\psi''_{\lambda\lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0} - (\psi''_{r_0 \lambda})_{r_0=0, \lambda=\lambda_0}^2 < 0$$

и точка $r_0 = 0, \lambda = \lambda_0$ будет простой двукратной точкой (узлом) для кривой $\psi(r_0, \lambda) = 0$.

В этом случае при изменении λ от значений, меньших λ_0 , до значений, больших λ_0 , $\alpha_1(\lambda)$ и $a_1(\lambda)$ меняют знак, и рассматриваемый фокус меняет устойчивость.

¹ Покажем, что в том случае, когда $a_1(\lambda_0) = 0$, а следовательно, и $\alpha_1(\lambda_0) = 0$, непременно и $\alpha_2(\lambda_0) = 0$. Если $a_1(\lambda_0) = 0$, то в уравнении (8)

$$R_1(\theta, \lambda_0) = \frac{a_1(\lambda_0)}{b_1(\lambda_0)} = 0$$

Первые два уравнения (9а) при $\lambda = \lambda_0$ принимают вид:

$$\frac{du_1}{d\theta} = 0$$

откуда, принимая во внимание начальные условия, получаем

$$u_1 = 1 \quad \text{и} \quad \frac{du_2}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0) \quad [\text{так как } R_1(\theta, \lambda_0) = 0 \text{ и } u_1 = 1]$$

Нетрудно видеть, что $R_2(\theta, \lambda_0)$ есть однородная функция $\cos \theta$ и $\sin \theta$ третьего измерения. Интегрируя обе части последнего уравнения в пределах от 0 до 2π и принимая во внимание, что $u_2(0, \lambda_0) = 0$, получим

$$u_2(2\pi, \lambda_0) = \int_0^{2\pi} R_2(\theta, \lambda_0) d\theta = 0$$

Аналогичным образом можно показать, что первый неравный нулю коэффициент $\alpha_k(\lambda_0)$ должен быть нечетного номера (см. Ляпунов, ^[5], стр. 147).

Проще всего исследовать характер точки $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$, если воспользоваться тем, что кривая $\psi(r_0, \lambda) = 0$ распадается на прямую $r_0 = 0$ и кривую $\varphi(r_0, \lambda) = \alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)r_0 + \dots = 0$.

Чтобы выяснить, как расположена кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$, вычислим значения $d\lambda/dr_0$ и $d^2\lambda/dr_0^2$ в этой точке.

Мы получим

$$\left(\frac{d\lambda}{dr_0}\right)_{\substack{\lambda=\lambda_0 \\ r_0=0}} = -\frac{\alpha_2(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}} = 0$$

т. е. кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ имеет в точке $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ вертикальную касательную:

$$\left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} = -\frac{2\alpha_3(\lambda_0)}{\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}}$$

Предположим, что $\alpha_3(\lambda_0) \neq 0$.

Тогда кривая $\varphi(r_0, \lambda) = 0$ вблизи точки $r_0 = 0$, $\lambda = \lambda_0$ расположена целиком по одну сторону от касательной.

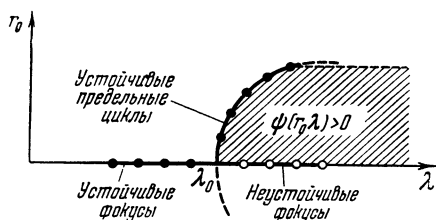
Нетрудно видеть, что здесь могут быть четыре возможности в зависимости от знака $\alpha_1'(\lambda_0)$ и знака $\alpha_3(\lambda_0)$ [согласно сказанному выше, $b_1(\lambda)$ не обращается в нуль, и мы будем считать, что $b_1(\lambda) > 0$]. Приведем бифуркационные диаграммы, соответствующие этим случаям, где заштрихованные области соответствуют $\psi(r_0, \lambda) > 0$.

а) $\alpha_1'(\lambda_0) > 0$, $\alpha_3(\lambda_0) < 0$
Тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0 \qquad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} > 0$$

Бифуркационная диаграмма представлена на фиг. 1.

В этом случае, при возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, и при этом появляется устойчивый предельный цикл (и только один).



Фиг. 1.

б) $\alpha_1'(\lambda_0) > 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$

Тогда

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} > 0, \qquad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} < 0$$

Бифуркационная диаграмма имеет вид, представленный на фиг. 2. При возрастании λ фокус из устойчивого делается неустойчивым, при этом неустойчивый предельный цикл (только один) стягивается в фокус.

в) $\alpha_1'(\lambda_0) < 0$, $\alpha_3(\lambda_0) > 0$

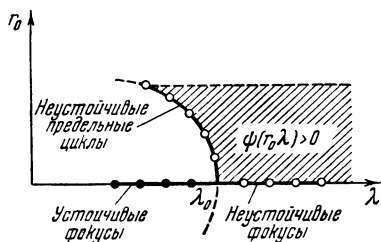
$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0, \qquad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} > 0$$

В этом случае неустойчивый фокус при возрастании λ делается устойчивым и появляется неустойчивый предельный цикл (фиг. 3).

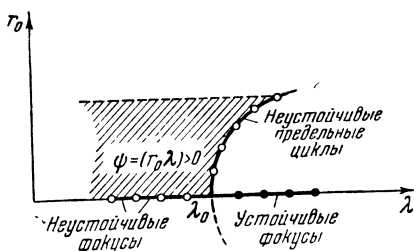
$$d) \quad a_1'(\lambda_0) < 0, \quad \alpha_3(\lambda_0) < 0$$

$$\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0} < 0, \quad \left(\frac{d^2\lambda}{dr_0^2}\right)_{\substack{r_0=0 \\ \lambda=\lambda_0}} < 0$$

При возрастании λ неустойчивый фокус делается устойчивым. Устойчивый предельный цикл стягивается в фокус (фиг. 4). Такие же резуль-



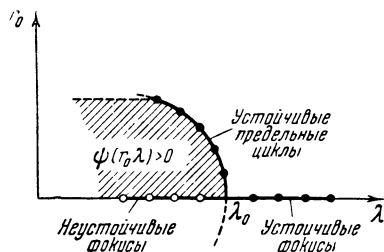
Фиг. 2.



Фиг. 3.

таты мы получили бы, если $\alpha_3(\lambda_0) = 0$, и первый не равный нулю коэффициент был бы $\alpha_{2k+1}(\lambda_0)$, где $k > 1$. И в этом случае всегда появляется (или исчезает) один и только один предельный цикл. Случай $\alpha_1'(\lambda_0) = 0$ мы рассматривать не будем. В этом случае, вообще говоря, при изменении λ могут появиться два, три и т. д. предельных цикла.

Прежде чем перейти к исследованию других случаев рождения циклов, заметим следующее. Как мы видели, для решения вопроса в простейшем случае (этот случай практически представляет наибольший интерес) нам достаточно знать величины $\alpha_k(\lambda)$ только для $\lambda = \lambda_0$. Поэтому для упрощения вычислений следует писать уравнение (8) только для $\lambda = \lambda_0$:



Фиг. 4.

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{[(P_2)_0 \cos \theta + (Q_2)_0 \sin \theta]}{[b_1(\lambda_0)r + (Q_2)_0 \cos \theta - (P_2)_0 \sin \theta]}$$

где через $(P_2)_0$ и $(Q_2)_0$ обозначены $P_2(x, y, \lambda)$ и $Q_2(x, y, \lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$. Или

$$\frac{dr}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0)r^2 + R_3(\theta, \lambda_0)r^3 + \dots$$

так как

$$R_1(\theta, \lambda_0) = 0$$

Решение этого упрощенного уравнения опять ищем в виде ряда

$$r = r_0 u_1 + r_0^2 u_2 + \dots$$

причем $u_1 = 1$, а для остальных $u_k(\theta, \lambda_0)$ получаем уравнения:

$$\frac{du_2}{d\theta} = R_2(\theta, \lambda_0)$$

$$\frac{du_3}{d\theta} = 2u_2 R_2(\theta, \lambda_0) + R_3(\theta, \lambda_0)$$

$$\frac{du_4}{d\theta} = (u_2^2 + 2u_3) R_2(\theta, \lambda_0) + 3u_2 R_3(\theta, \lambda_0) + R_4(\theta, \lambda_0)$$

с начальными условиями

$$u_k(0, \lambda_0) = 0 \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Отсюда мы сможем найти $\alpha_3(\lambda_0)$ или, если $\alpha_3(\lambda_0) = 0$, то $\alpha_5(\lambda_0)$ и т. д. Что же касается выражения для $\left(\frac{d\alpha_1(\lambda)}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_0}$, которое также необходимо для решения вопроса о стягивании или рождении цикла, то $a_1(\lambda)$ и $b_1(\lambda)$, нужные для его вычисления, могут быть найдены из обычного уравнения, определяющего характеристические показатели.

§ 3. Рождение предельного цикла из сепаратрисы

Предположим, что при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет простое седло.

Нетрудно видеть, что при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , дифференциальное уравнение продолжает иметь простое седло в качестве особой точки. Кроме того, координаты этого седла будут непрерывными функциями λ .

Будем считать, что при всех рассматриваемых значениях λ , достаточно близких к λ_0 , седло останется неподвижным; если бы это было не так, то мы всегда бы могли путем замены переменных $[\xi = x + a_1(\lambda), \eta = y + b_1(\lambda)]$ достигнуть того, чтобы это седло было неподвижно.

Пусть Q — это седло. Мы всегда можем взять окружность S с центром в Q такую, которая при всех рассматриваемых значениях λ не содержала бы ни внутри, ни на своей границе ни одной особой точки, кроме точки Q .

При всех рассматриваемых значениях λ мы будем иметь четыре сепаратрисы, кончающиеся в точке Q (две — при $t \rightarrow +\infty$ и две — при $t \rightarrow -\infty$). При этом ни одна из этих сепаратрис не может целиком лежать внутри S , так как в противном случае, как нетрудно было бы показать, внутри S должны были бы быть особые точки, кроме точки Q .

Возьмем при значении $\lambda = \lambda_0$ на всех четырех сепаратрисах точки: $P_1(\lambda_0)$, $P_2(\lambda_0)$, $P_3(\lambda_0)$, $P_4(\lambda_0)$, такие, чтобы части $P_i(\lambda_0)Q$ ($i = 1, 2, 3, 4$) этих сепаратрис целиком лежали внутри S . Проведем через точки $P_i(\lambda_0)$ не пересекающиеся друг с другом отрезки без контакта: L_1, L_2, L_3, L_4 .

Мы покажем, что при всех значениях λ , достаточно близких к λ_0 , на отрезках L_i будут лежать точки $P_i(\lambda)$, через которые будут проходить сепаратрисы, кончающиеся в точке Q , причем координаты точек $P_i(\lambda)$ — непрерывные функции λ .

Это даст нам возможность говорить об уравнении «одной и той же сепаратрисы, кончающейся в точке Q », при различных значениях λ .

Сделаем прежде всего следующее замечание: в силу известной теоремы¹ всякая траектория, пересекающая L_1 справа² от точки $P_1(\lambda_0)$, достаточно близко к $P_1(\lambda_0)$, не выходя из S , пересечет отрезок L_2 «слева» от точки $P_2(\lambda_0)$. Точно так же всякая траектория, пересекающая отрезок L_2 справа от точки $P_4(\lambda_0)$, пересечет, не выходя из S , отрезок L_3 слева от точки $P_3(\lambda_0)$ и т. д. (фиг. 5).

Докажем наше утверждение для отрезка L_1 .

Возьмем на L_1 две точки A_1 и A_2 справа от точки $P_1(\lambda_0)$, достаточно близко к $P_1(\lambda_0)$, и на L_3 — две точки B_1 и B_2 слева и справа от $P_3(\lambda_0)$, так, чтобы:

1) траектория D , проходящая (при $t = t_0$) через точку A_1 , пересекла бы, не выходя из S , отрезок L_2 (в точке A_1');

2) траектория D' , проходящая через точку A_2 , пересекла бы, не выходя из S , отрезок L_4 в точке A_2' ;

3) траектория D_1 , проходящая через точку B_1 , пересекла бы, не выходя из S , отрезок L_2 в точке B_1' ;

4) траектория D_1' , проходящая через точку B_2 , пересекла бы отрезок L_4 в точке B_2' (см. фиг. 5).

Траектории D , D' , D_1 и D_1' вместе с отрезками без контакта A_2A_1 , $A_1'B_1'$, B_1B_2 и $B_2'A_2'$ образуют простую замкнутую кривую S' . Заметим при этом, что если траектории, пересекающие отрезок A_2A_1 , входят внутрь этой замкнутой кривой S' , то и все траектории, пересекающие отрезок B_1B_2 , тоже будут входить внутрь S' , а все траектории, пересекающие отрезки $A_1'B_2'$ и $B_1'A_2'$, будут выходить из S' .

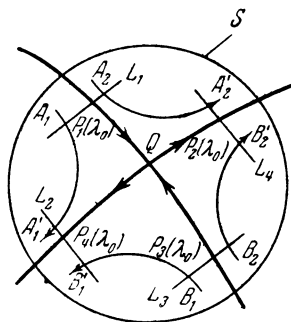
Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы при всех значениях, удовлетворяющих неравенству $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$:

- а) внутри S была только одна особая точка — седло Q ;
- б) отрезки L_i оставались отрезками без контакта;
- в) траектории, проходящие через точки A_1 , A_2 и B_1 , B_2 , не выходя из S , пересекали соответственно те же отрезки без контакта L_i , что и траектории, проходящие через те же точки при $\lambda = \lambda_0$.

Это всегда возможно в силу предложения I и предложения II (см. введение).

Таким образом, при всяком значении λ , $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ мы будем иметь замкнутую кривую $S'(\lambda)$, образованную траекториями $D(\lambda)$, $D'(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ и $D_1'(\lambda)$ и частями отрезков без контакта L_i (фиг. 6).

Покажем, что на отрезке L_1 между точками A_1 и A_2 при всех λ ,



Фиг. 5.

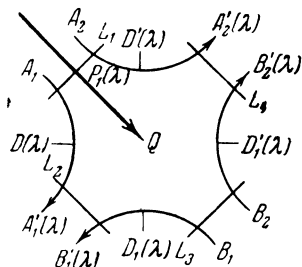
¹ См., например, Бендиксон^[9], стр. 20.

² «Справа» и «слева» — если мы каждый раз будем смотреть от точки P_i к точке Q .

$|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ найдется точка, через которую проходит траектория, кончающаяся в точке Q .

Действительно, через все точки отрезка A_1A_2 , достаточно близкие к A_1 в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, проходят траектории, пересекающие отрезок L_2 между точками $A_1'(\lambda)$ и $B_1'(\lambda)$, а через все достаточно близкие к A_2 точки проходят траектории, пересекающие отрезок L_4 между точками $A_2'(\lambda)$ и $B_2'(\lambda)$. Пусть R — предельная точка для точек первого типа и T — предельная точка для точек второго типа (такие предельные точки непременно существуют). Рассмотрим траекторию $\bar{C}$, проходящую через точку R .

В точке R она входит внутрь замкнутой кривой $S'(\lambda)$. Она не может выйти из этой замкнутой кривой ни через отрезок $A_1'(\lambda)B_1'(\lambda)$, ни через отрезок $A_2'(\lambda)B_2'(\lambda)$, так как тогда точка R не могла бы быть предельной точкой для точек первого типа. Но она не может выйти и через отрезок B_1B_2 , так как все траектории, пересекающие этот отрезок, входят внутрь $S'(\lambda)$. Следовательно, траектория $\bar{C}$ должна кончиться в точке Q . Точно так же можно было бы показать, что и траектория $\bar{C}'$ (проходящая через точку T) тоже должна кончиться в точке Q . Если точки T и R не совпадают, то и



Фиг. 6.

все траектории, пересекающие L_1 между точками T и R , должны были бы кончаться в точке Q . Но в точке Q не может кончаться бесчисленное множество траекторий, так как Q — седло. Следовательно, точки T и R совпадают, и таким образом при всяком λ , удовлетворяющем неравенству $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$, на отрезке A_1A_2 будет одна и только одна точка $P_1(\lambda)$, через которую будет проходить траектория, кончающаяся в точке Q (см. фиг. 6).

Для доказательства того, что координаты этой точки — непрерывные функции λ , достаточно заметить, что расстояние между точками $P_1(\lambda_0)$ и $P_1(\lambda)$ меньше расстояния между точками A_1 и A_2 . Но расстояние между точками A_1 и A_2 можно взять сколь угодно малым; все рассуждения останутся в силе для всех значений λ , $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ при надлежащем выборе ε . А значит, и расстояние между точками $P_1(\lambda)$ и $P_1(\lambda_0)$ можно сделать сколь угодно малым при надлежащем выборе ε .

Таким образом, при всех значениях λ , $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ существуют непрерывные функции $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$, такие, что через точку $x_0(\lambda)$, $y_0(\lambda)$ всегда проходит сепаратриса, кончающаяся в точке Q .

Условимся говорить, что мы имеем одну и ту же сепаратрису $\bar{C}_1(\lambda)$ при различных значениях λ .

Очевидно, что уравнение сепаратрисы $C_1(\lambda)$ при всех рассматриваемых значениях мы получим, если в функции

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, y_0, \lambda), \quad y = \psi(t - t_0, x_0, y_0, \lambda)$$

вместо x_0, y_0 подставим $x_0(\lambda), y_0(\lambda)$.

Мы получим:

$$x = \varphi[t - t_0, x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda] = \varphi_1(t, \lambda)$$

$$y = \psi[t - t_0, x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda] = \psi_1(t, \lambda)$$

Эти функции непрерывны по λ ($|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$) равномерно относительно t из промежутка $t_0 \leq t \leq T$ (или $T \leq t \leq t_0$), где T — любое фиксированное число. Это непосредственно вытекает из свойств функций φ и ψ .

Совершенно так же мы будем говорить, что мы имеем *одну и ту же сепаратрису* $C_2(\lambda)$ [или $C_3(\lambda)$, или $C_4(\lambda)$] *при разных значениях* λ , если проведем в точности такое же рассуждение для отрезка L_2 (или L_3 , или L_4).

Возьмем теперь две сепаратрисы $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$, причем при всех значениях λ $|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$ сепаратриса $C_1(\lambda)$ пересекает отрезок L_1 и уравнение ее

$$x = \varphi_1(t, \lambda) \quad y = \psi_1(t, \lambda) \quad (10)$$

а сепаратриса $C_2(\lambda)$ пересекает отрезок L_2 и уравнение ее

$$x = \varphi_2(t, \lambda), \quad y = \psi_2(t, \lambda)^1 \quad (11)$$

Предположим теперь, что мы имеем отрезок M_1M_2 , который при всех значениях λ ($|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$) остается отрезком без контакта, и пусть при тех же значениях λ сепаратрисы $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ пересекают этот отрезок в точках $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$. При этом для всех рассматриваемых значений λ точки $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ являются внутренними точками отрезка M_1M_2 и соответствуют в уравнениях (10) и (11) сепаратрис $C_1(\lambda)$ и $C_2(\lambda)$ значениям t , меньшим некоторого определенного значения T (не зависящего от λ)².

Пусть при значении $\lambda = \lambda_0$ точки $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ совпадают. Следовательно, сепаратрисы $C_1(\lambda_0)$ и $C_2(\lambda_0)$ являются продолжением одна другой, т. е. сливаются в одну и ту же траекторию C , выходящую из седла и возвращающуюся в то же седло.

Значение $\lambda = \lambda_0$ является бифуркационным значением параметра. При $\lambda = \lambda_0$ траектория C вместе с седлом Q образует замкнутый особый цикл, разбивающий плоскость на две части: G_1 и G_2 . В одной из этих областей — G_2 — лежат две другие сепаратрисы седла Q (фиг. 7).

Предположим для определенности, что точка M_1 отрезка без контакта лежит внутри области G_1 .

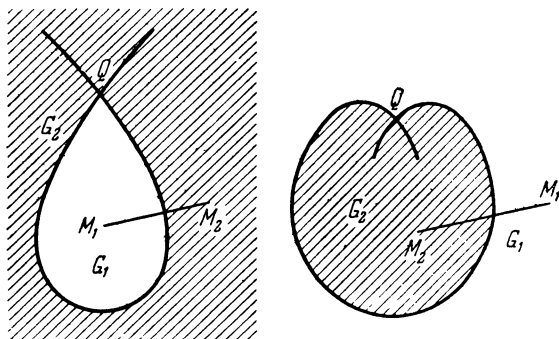
Соединяя известную теорему Бендиксона³ с предложениями I и II, мы можем сказать следующее: для всех значений λ ($|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon$) всегда можно на отрезках $P_1(\lambda)M_1$ и $P_2(\lambda)M_1$ выделить такие части $P_1(\lambda)B_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)B_2(\lambda)$ длины l_1 и l_2 , не зависящей от λ , чтобы всякая траекто-

¹ Очевидно, что $C_1(\lambda)$ при всех λ является «продолжением» $C_2(\lambda)$ в смысле Бендиксона.

² Последнее равносильно тому, что части сепаратрис QP_1 и QP_2 при всех рассматриваемых значениях λ находятся на конечном расстоянии от всякой особой точки, если не считать конца Q .

³ Бендиксон [9]¹, стр. 19, теорема 5.

рия, пересекающая один из этих отрезков, пересекала бы и другой, если при этом на траекториях, пересекающих отрезок $P_1(\lambda)B_1(\lambda)$ (или $P_2(\lambda)B_2(\lambda)$), мы будем двигаться в том направлении, в каком, двигаясь по сепаратрисе $C_1(\lambda)$ [$C_2(\lambda)$], мы придем в седло Q . Отсюда следует, что каждая точка интервала $P_1(\lambda)B_1(\lambda)$ или $P_2(\lambda)B_2(\lambda)$ имеет последующую.



Фиг. 7:

Выберем за начало отсчета точку M_1 , и пусть s — расстояние на отрезке M_1M_2 , отсчитываемое от этой точки. Пусть (фиг. 8)

$$\begin{aligned} s_1(\lambda) &— \text{длина отрезка } M_1P_1(\lambda) \\ \underline{s}_2(\lambda) &— \text{длина отрезка } M_1P_2(\lambda) \\ \underline{s}_1(\lambda) &— \text{длина отрезка } M_1B_1(\lambda) \\ \underline{s}_2(\lambda) &— \text{длина отрезка } M_2B_2(\lambda) \end{aligned}$$

При $\lambda = \lambda_0$ точки $P_1(\lambda_0)$ и $P_2(\lambda_0)$ совпадают.

Из предыдущего следует, что мы будем иметь на отрезке M_1M_2 функцию последования $\bar{s} = f(s, \lambda)$, во всяком случае определенную для значений s :

$$\bar{s}_1(\lambda) \leq s < s_1(\lambda)$$

Рассмотрим теперь два случая, когда при изменении λ появляется по крайней мере один предельный цикл.

1. Предположим, что:

а) при $\lambda = \lambda_0$ для значений $s, \bar{s}_1(\lambda_0) \leq s < s_1(\lambda_0)$

$$f(s, \lambda_0) - s > 0$$

б) при значениях $\lambda > \lambda_0$ (или $\lambda < \lambda_0$), достаточно близких к λ_0 ,

$$s_1(\lambda) > s_2(\lambda)$$

При значениях $\lambda = \lambda_0$ точки $P_1(\lambda_0)$ и $P_2(\lambda_0)$ совпадают, и одна из дуг $P_1(\lambda_0)B_1(\lambda_0)$ и $P_2(\lambda_0)B_2(\lambda_0)$ является частью другой.

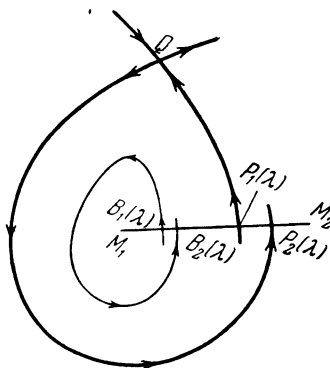
Возьмем на отрезке $B_1(\lambda_0)P_1(\lambda_0)$ две внутренние точки R_1 и R_2 (R_2 соответствует значению s большему, чем R_1).

Тогда на отрезке R_1R_2

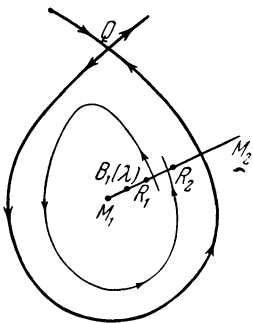
$$f(s, \lambda_0) - s > \eta > 0$$

Всегда можно взять столь малое ε_0 ($\varepsilon_0 < \bar{\varepsilon}$), чтобы при всех значениях λ , $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_0$ (или $\lambda - \varepsilon_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$):

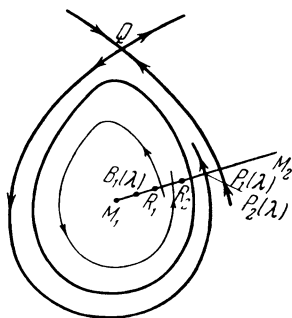
1) отрезок M_1M_2 оставался бы отрезком без контакта и точки $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ оставались бы внутренними точками отрезка M_1M_2 ;



Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.

2) точка $B_1(\lambda)$ соответствовала бы значению s меньшему, чем точка R_1 , а точка $P_2(\lambda)$ соответствовала бы значению s большему¹, чем R_2 ;

3) на отрезке R_1R_2 $f(s, \lambda) - s$ оставалось² бы больше $\frac{1}{2}\eta$.

Для всякого значения λ из промежутка $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon$ функция последования существует на всем отрезке R_1R_2 и для всех точек этого отрезка

$$f(s, \lambda) - s > 0$$

С другой стороны, легко видеть, что для всех значений s , достаточно близких $s_1(\lambda)$:

$$f(s, \lambda) - s < 0$$

Следовательно, должна найтись на отрезке $B_1(\lambda)P_1(\lambda)$ по крайней мере одна такая точка, для которой

$$f(s, \lambda) - s = 0$$

т. е. через которую проходит предельный цикл (фиг. 9 и 10).

II. Мы получим совершенно аналогично, что в том случае, когда при $\lambda = \lambda_0$ для значений s , $\bar{s}_1(\lambda_0) \leq s < s_1(\lambda_0)$

$$f(s, \lambda_0) - s < 0$$

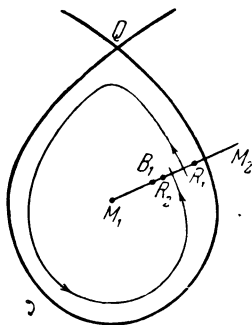
¹ Это всегда возможно, так как длины отрезков $B_1(\lambda)P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)B_2(\lambda)$ l_1 и l_2 не зависят от λ , а точки $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ смещаются непрерывно.

² Это следует из того, что, как нетрудно видеть, при достаточно малом ε_0 функция $f(s, \lambda)$ будет на отрезке R_1R_2 непрерывной функцией s и λ для всех значений λ ($|\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon_0$).

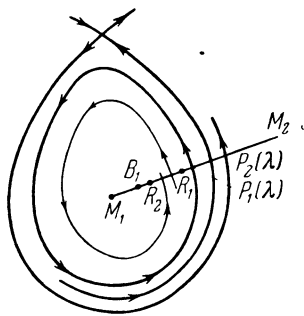
а при значениях $\lambda > \lambda_0$, достаточно близких к λ_0

$$s_1(\lambda) < s_2(\lambda)$$

тоже появляется предельный цикл (фиг. 11 и 12).



Фиг. 11.



Фиг. 12.

§ 4. Появление предельного цикла при исчезновении сложной особой точки

Предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, \lambda)}{X(x, y, \lambda)} \quad (1)$$

имеет в точке $x = 0, y = 0$ сложную особую точку, в которой один из корней характеристического уравнения равен нулю, а другой отличен от нуля. При $\lambda = \lambda_0$ мы можем, следовательно, записать дифференциальное уравнение так:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_1x + b_2y + \dots}{a_1x + a_2y + \dots} \quad (2)$$

причем в силу сделанного предположения

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

но $a_1 + b_2 \neq 0$.

Так как $a_1 + b_2 \neq 0$, то либо $a_1 \neq 0$, либо $b_2 \neq 0$. Будем предполагать для определенности, что $b_2 \neq 0$.

Нетрудно видеть, что при сделанных предположениях для всех изоклин, кроме одной, точка $x = 0, y = 0$ будет обыкновенной точкой, так как в силу того, что $b_2 = (Y'_y)_{x=0, y=0} \neq 0$ соотношение

$$(X'_x)_0 + C(Y'_x)_0 = 0$$

$$(X'_y)_0 + C(Y'_y)_0 = 0$$

выполняется при одном и только при одном значении $C = C_0$:

$$C_0 = \frac{(X'_x)_0}{(Y'_x)_0} = \frac{(X'_y)_0}{(Y'_y)_0} = \frac{a_2}{b_2}$$

Очевидно, что ввиду равенства нулю детерминанта $\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$ все изоклины, не имеющие в точке $x=0, y=0$ особой точки, будут иметь в точке $x=0, y=0$ касательную с наклоном:

$$k = \frac{(Y_x')_0}{(Y_y')_0} = \frac{(X_x')_0}{(X_y')_0} = \frac{b_1}{b_2}$$

Предположим, кроме того, что мы имеем в точке $x=0, y=0$ соприкосновение первого порядка, так что для любых двух изоклин:

$$X + C_1 Y = 0$$

$$X + C_2 Y = 0$$

соответствующих значениям C_1 и C_2 не равным C_0 , мы будем иметь:

$$\frac{(X_{xx})_0 + C_1 (Y_{xx})_0 + 2[(X_{xy})_0 + C_1 (Y_{xy})_0]k + [(X_{yy})_0 + C_1 (Y_{yy})_0]k^2}{(X_y')_0 + C_1 (Y_y')_0} \neq \\ \neq \frac{(X_{xx})_0 + C_2 (Y_{xx})_0 + 2[(X_{xy})_0 + C_2 (Y_{xy})_0]k + [(X_{yy})_0 + C_2 (Y_{yy})_0]k^2}{(X_y')_0 + C_2 (Y_y')_0}$$

Кроме того, как нетрудно видеть, при $C = C_0$ мы будем иметь

$$(X_{xx})_0 + C_0 (Y_{xx})_0 + 2[(X_{xy})_0 + C_0 (Y_{xy})_0]k + [(X_{yy})_0 + C_0 (Y_{yy})_0]k^2 \neq 0$$

Делая соответствующую линейную замену переменных, всегда можно привести уравнение (1) к виду^[9]

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - k_1 \xi + Y_2(\xi, \eta) + \dots}{X_2(\xi, \eta) + \dots} \quad (2')$$

где k_1 — общий наклон изоклин, не имеющих особой точки в точке $\xi=0, \eta=0$; $X_2(\xi, \eta)$ — члены второй степени относительно ξ и η , причем

$$X_2(1, k_1) \neq 0$$

так как в противном случае изоклины имели бы соприкосновение порядка выше первого.

Особая точка уравнения (1) характеризуется двумя «характеристиками, пересекающими особую точку» (*caractéristiques, traversants le point singulier*)¹, и одной «узловой областью» (*region nodale*). «Характеристики, пересекающие особую точку», образованы тремя траекториями C_1, C_2, C_3 , причем две из них C_1 и C_2 входят в особую точку $\xi=0, \eta=0$ при $t \rightarrow +\infty$ (или $t \rightarrow -\infty$) с наклоном $x=0$, а C_3 входит в точку $\xi=0, \eta=0$ при $t \rightarrow -\infty$ (или $t \rightarrow +\infty$) с наклоном k_1 .

При этом C_3 есть «продолжение C_1 по отношению к особой точке $\xi=0, \eta=0$ » («le prolongement par rapport au point singulier»²), а C_2 — «продолжение C_3 » (или C_3 есть «продолжение C_2 »).

¹ Бендиксон^[9], стр. 21.

² Ibid., стр. 25 и др.

На основании исследования уравнения типа (1) методом Бендиксона¹ легко видеть, что когда $X_2(1, k_1) > 0$, то узловая область лежит справа от кривой C , образованной соединением траекторий C_1, C_2 и особой точки $\xi = 0, \eta = 0$ ², а когда $X_2(1, k_1) < 0$, то узловая область лежит слева от этой кривой C .

Очевидно, кроме того, что мы всегда можем считать в уравнении (2') $k_1 = 0$ (в противном случае мы бы могли сделать соответствующую линейную замену переменных).

Поэтому во всем дальнейшем мы будем предполагать, что рассматриваемое нами дифференциальное уравнение (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y, \lambda)}{X(x, y, \lambda)}$$

при $\lambda = \lambda_0$ имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + Y_2(x, y) + \dots}{X_2(x, y) + \dots} \quad (3)$$

причем $X_2(x, y)$ и $Y_2(x, y)$ — члены второй степени относительно x, y и

$$X_2(1, 0) \neq 0$$

Сделаем теперь следующее замечание. Пусть мы имеем уравнение вида (3). Окружим точку $x = 0, y = 0$ окружностью S с центром в этой точке, не содержащей ни одной особой точки, кроме точки $x = 0, y = 0$. Можно показать, что, добавляя к числителю и знаменателю правой части уравнения (3) всевозможные функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$, удовлетворяющие условиям

$$|p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_x| < \varepsilon, \quad |p'_y| < \varepsilon, \quad |q'_x| < \varepsilon, \quad |q'_y| < \varepsilon$$

где ε — некоторое, достаточно малое положительное число, мы будем иметь для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + Y_2(x, y) + \dots + p(x, y)}{X_2(x, y) + \dots + q(x, y)}$$

одну из следующих трех возможностей (и только эти возможности могут осуществиться) для структуры кривых вблизи точки $x = 0, y = 0$.

1) Внутри окружности S находится одна и только одна особая точка того же типа, что и у уравнения (3).

2) Внутри окружности S нет ни одной особой точки [особая точка исчезает при некоторых добавках $p(x, y)$ и $q(x, y)$].

3) Внутри окружности S есть две простые особые точки: узел и седло. (Сложная особая точка распалась на две простые.)

Предположим теперь следующее.

1) При некотором значении $\lambda = \lambda_0$ уравнение (1) имеет вид (3).

¹ Ibid., стр. 53—56.

² Эта кривая — интегральная кривая уравнения (2).

2) При $\lambda = \lambda_0$ траектория C_3 , кончающаяся в точке $x = 0, y = 0$ при $t \rightarrow -\infty$, кончается в той же точке $x = 0, y = 0$ при $t \rightarrow +\infty$ ¹, причем C_3 не совпадает с C_1 или с C_2 .

3) Если при $\lambda = \lambda_0$ мы окружим точку $x = 0, y = 0$ окружностью S с центром в этой точке, не содержащей больше никаких других особых точек, кроме точки $x = 0, y = 0$, то при всех достаточно близких к λ_0 значениях $\lambda > \lambda_0, \lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_0$ внутри окружности S не будет ни одной особой точки.

Мы покажем, что при всех значениях $\lambda, \lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_0$ непременно появляется предельный цикл.

Докажем сначала одно вспомогательное предложение.

Рассмотрим уравнение типа (3):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + Y_2(x, y) + \dots}{X_2(x, y) + \dots}, \quad X_2(1, 0) \neq 0$$

и предположим для определенности, что $X_2(1, 0) = a > 0$.

Проведем через начало координат две прямые D_1 и D_2 : одну под углом $\pi - \varphi_0$, другую под углом $-\pi + \varphi_0$ к оси x , где

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

Заметим, что так как траектории C_1 и C_2 входят в точку $x = 0, y = 0$, касаясь оси y , то мы всегда можем взять столь малую окружность, чтобы внутри этой окружности кривая C , образованная траекториями C_1, C_2 и точкой $x = 0, y = 0$, не имела бы, кроме точки $x = 0, y = 0$, никаких других точек пересечения с прямыми D_1 и D_2 . И, следовательно, если A_1 и A_2 — последние точки пересечения траекторий C_1 и C_2 с окружностью S , то части A_1O и A_2O траекторий C_1 и C_2 будут целиком лежать внутри сектора окружности, соответствующего значениям φ :

$$\pi - \varphi_0 \geq \varphi \geq -\pi + \varphi_0$$

Покажем, что всегда можно найти такое α , чтобы дуги эллипсов

$$\alpha x^2 + y^2 = h$$

заключенные в секторе $\pi - \varphi_0 \geq \varphi \geq -\pi + \varphi_0$ при достаточно малых значениях h были дугами без контактов.

Кривая контактов для семейства эллипсов

$$\alpha x^2 + y^2 = h$$

имеет вид:

$$y^2 + [yY_2(x, y) + \alpha xX_2(x, y)] + \dots = 0$$

Переходя к полярным координатам, мы будем иметь

$$\sin^2 \varphi + \rho [\sin \varphi Y_2(\cos \varphi, \sin \varphi) + \alpha \cos \varphi X_2(\cos \varphi, \sin \varphi)] + \rho^2 () + \dots = 0 \quad (4)$$

¹ Мы будем всюду дальше предполагать, как и раньше, что две траектории — C_1 и C_2 — кончаются в точке $x = 0, y = 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и одна — C_3 — при $t \rightarrow -\infty$.

Пусть внутри окружности S

$$|X_2(x, y)| < n, \quad |Y_2(x, y)| < m \quad (n > 0, \quad m > 0)$$

Возьмем такое ψ меньше φ_0 и меньше $\frac{\pi}{4}$, чтобы при всех значениях $|\varphi| < \psi$ мы имели

$$|X_2(\cos \varphi, \sin \varphi)| > \frac{a}{2}$$

Для всех значений φ

$$\psi \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \quad \text{и} \quad -\pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq -\psi$$

всегда можно взять ρ столь малыми, чтобы левая часть равенства (4) была положительна.

Далее, при всех значениях φ , $|\varphi| \leq \psi$ левая часть равенства (4) будет больше, чем

$$\rho \left(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} m \right) + \dots \quad (5)$$

Но мы всегда можем взять такое $\alpha > 0$, чтобы при всех достаточно малых значениях ρ ($\rho \leq \rho_1$) выражение (5), а следовательно, и левая часть выражения (4) оставались положительными для $|\varphi| \leq \psi$.

Следовательно, всегда можно указать такое $\alpha > 0$ и такое ρ_0 , чтобы дуга L эллипса $\alpha x^2 + y^2 = h$, лежащая внутри окружности радиуса ρ_0 (а это будет всегда иметь место при достаточно малых значениях h) и соответствующая значениям φ , $\pi - \varphi_0 \geq \varphi \geq -\pi + \varphi_0$, была без контакта, что и требуется доказать.

Дуга эллипса, не имеющая контактов, существование которой мы только что доказали, непременно пересечет траектории C_1 и C_2 . Очевидно, отсюда вытекает, что все траектории, кончающиеся в точке $x = 0$, $y = 0$, при $t \rightarrow +\infty$ непременно должны пересечь эту дугу.

Покажем теперь, как при исчезновении особой точки появляется предельный цикл.

Пусть при $\lambda = \lambda_0$ мы имеем окружность S с центром в начале, внутри и на границе которой нет ни одной особой точки, кроме точки $x = 0$, $y = 0$, и пусть A_1 , A_2 и A_3 — последние точки пересечения окружности S с траекториями C_1 , C_2 и C_3 ¹.

Проведем дугу эллипса L , целиком лежащую внутри окружности S и не имеющую контактов в секторе

$$\pi - \varphi_0 \geq \varphi \geq -\pi + \varphi_0 \quad \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right)$$

Пусть Q_1 и Q_2 — точки пересечения дуги L с траекториями C_1 и C_2 и Q_3 — точка на части A_3O траектории C_3 , лежащая вне сектора

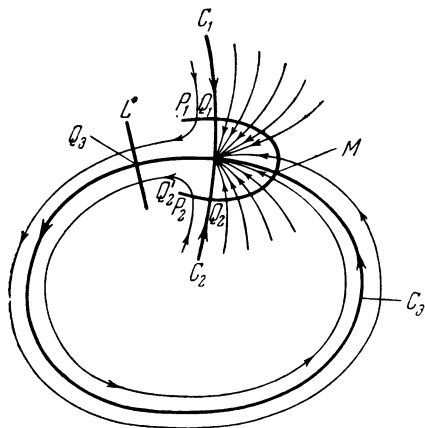
$$\pi - \varphi_0 \geq \varphi \geq -\pi + \varphi_0$$

¹ Последнее в том смысле, что на траекториях C_1 и C_2 нет точек, лежащих вне S и соответствующих значениям t , большим тех, которым соответствуют точки A_1 и A_2 , а на C_3 нет точек, лежащих вне S и соответствующих таким t , которые меньше того значения t , которому соответствует A_3 .

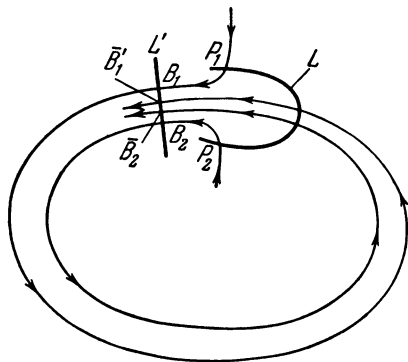
По предположению, траектория C_3 , выходящая из точки $x = 0, y = 0$, кончается в той же точке и при $t \rightarrow +\infty$ и, следовательно, пересекает дугу L эллипса в некоторой точке M , лежащей между точками Q_1 и Q_2 .

Мы всегда можем взять такое $\eta > 0$, чтобы в η окрестности части Q_3M траектории C_3 не лежало ни одной особой точки. Будем обозначать η окрестность Q_3M через G .

Проведем через точку Q_3 такой отрезок без контакта L' (с центром в точке Q_3), чтобы все пересекающие этот отрезок траектории, не выходя из G , пересекли дугу L (фиг. 13).



Фиг. 13



Фиг. 14

Кроме того, на дуге L слева от точки Q_1 и слева от точки Q_2 мы всегда можем выделить такие дуги $Q_1Q'_1$ и $Q_2Q'_2$, чтобы все пересекающие эти дуги траектории при возрастании t пересекали, не выходя из S , отрезок L' .

Пусть C_{P_1} и C_{P_2} — траектории, проходящие соответственно через точки P_1 и P_2 отрезков $Q_1Q'_1$ и $Q_2Q'_2$ и пересекающие отрезок L' в точках, не являющихся границами этого отрезка.

Рассмотрим значения $\lambda > \lambda_0$. Мы всегда можем указать такое $\varepsilon_1, \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$, чтобы при всяком значении $\lambda, \lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_1$:

- 1) дуги L и L' оставались бы дугами без контакта;
- 2) область G не содержала бы ни одной особой точки;
- 3) траектории C_{P_1} и C_{P_2} , проходящие через точки P_1 и P_2 , не выходя из S , пересекали бы отрезок L' и, не выходя из области G , пересекали бы дугу L во всяком случае между точками P_1 и P_2 .

Пусть при каком-нибудь λ из указанного промежутка B_1 и B_2 — точки пересечения C_{P_1} и C_{P_2} с отрезком L' (фиг. 14). Нетрудно видеть, что все другие траектории, пересекающие отрезок B_1B_2 , пересекут, не выходя из G , дугу L между точками P_1 и P_2 ; но всякая траектория, пересекающая дугу L между точками P_1 и P_2 , войдет внутрь замкнутой кривой $\bar{S}$, образованной частью P_1P_2 дуги L , частями P_1B_1 и P_2B_2 дуг траекторий $\bar{L}_{P_1}$ и $\bar{L}_{P_2}$ и отрезком B_1B_2 . Но кривая $\bar{S}$ лежит внутри S . а

по условию при всех значениях λ , $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_0 + \varepsilon_1 \leq \lambda_0 + \varepsilon_0$, внутри S нет ни одной особой точки. Следовательно, всякая траектория, вошедшая внутрь кривой $\bar{S}$, должна выйти из нее. Нетрудно видеть, что выйти она может только через отрезок B_1B_2 .

Отсюда следует, что всякая точка отрезка B_1B_2 (включая концы) имеет последующую. Выбирая на отрезке B_1B_2 какую-нибудь фиксированную точку и обозначая через s расстояние точек отрезка B_1B_2 (отсчитываемое, например, в направлении от точки B_1 к точке B_2) до выбранной точки, мы будем иметь на отрезке B_1B_2 функцию последования $\bar{s}' = f(s)$.

Рассмотрим, в частности, точки B_1 и B_2 и их последующие $B'_1B'_2$. Нетрудно видеть, что точка B'_2 непременно должна лежать между точками B'_1 и B_2 . Если s_1 и s_2 — значения s , соответствующие точкам B_1 и B_2 , то мы имеем

$$f(s_1) - s_1 > 0 \text{ и } f(s_2) - s_2 < 0$$

А значит, между s_1 и s_2 непременно есть значение s , при котором

$$f(s) - s = 0$$

т. е. есть хотя бы один предельный цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. Математические проблемы теории автоколебаний. В кн.: 1-я Всесоюзная конференция по колебаниям. Сб. 1. М.—Л., 1933, с. 32—71 (см. стр. 99 настоящего изд.).
2. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории.— Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 251—257.
3. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы.— Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 247—250 (см. стр. 197 настоящего изд.).
4. Poincaré H. Sur les courbes définies par une équation différentielle.— Oeuvres T. 1. Paris, 1928, p. 1—158.
5. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892, XII + 251 с.
6. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste. T. 1, Paris, 1892.
7. Andronow A. und Witt A. Zur Stabilität nach Liapunow.— Phys. Sowjet., 1933, Bd. 4, S. 606—608 (см. стр. 154 настоящего изд.).
8. Bieberbach L. Theorie der Differentialgleichungen. 2 neubearb. Aufl., Berlin, Springer, 1926, IX + 357 S.
9. Bendixson J. Sur les courbes définies par des equations différentielles.— Acta math., 1901, vol. 24, p. 1—88.

К ТЕОРИИ ИЗМЕНЕНИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ РАЗБИЕНИЯ ПЛОСКОСТИ НА ТРАЕКТОРИИ*

При исследовании физических систем нельзя ограничиться изучением грубых систем^[1]. И не только потому, что для некоторых специальных целей имеет смысл рассматривать негрубые системы, например консервативные, но прежде всего потому, что при изменении параметра в динамической системе мы переходим от одной грубой системы к другой, качественно отличной грубой системе через негрубые системы.

Отсюда возникает задача исследования негрубых систем и их классификации, которая тесно связана с теорией зависимости от параметра качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории.

Настоящая заметка содержит определение и исследование простейшего типа таких систем, именно систем релятивно грубых по отношению к множеству негрубых систем¹.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (A)$$

где x и y — декартовы координаты на плоскости, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y .

В дальнейшем подобно тому, как это было сделано при рассмотрении грубых систем, ограничимся такими системами вида (A), для которых существует так называемый «цикл без контакта», т. е. такая простая замкнутая кривая g с непрерывно вращающейся касательной, что все траектории, проходящие через точки этой кривой, ее пересекают, и ни одна траектория ее не касается. Областью G назовем область плоскости внутри кривой g .

Рассмотрим наряду с системой (A) измененную систему:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) + p(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) + q(x, y) \quad (B)$$

* Совместно с Е. А. Леонтович. Опубликовано в Докл. АН СССР. 1938, 21, № 9. Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 31 X 1938.

¹ Заметим, что тип негрубых систем, рассматриваемый в настоящей заметке, имеет фундаментальное значение во многих физических вопросах, связанных с поведением динамических систем при изменении параметра^[2].

где $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — также аналитические функции для всех рассматриваемых значений переменных x и y .

Определение 1. Систему (А) мы будем называть негрубой системой первого порядка в области G , если

а) она не является грубой,

б) для всякого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при всех $p(x, y)$ и $q(x, y)$, при которых система (В) не является грубой и при которых в области G удовлетворяются условия:

$$\begin{aligned} |p(x, y)| < \varepsilon, \quad |q(x, y)| < \varepsilon \\ |p'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |p'_y(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_x(x, y)| < \varepsilon, \quad |q'_y(x, y)| < \varepsilon \\ |p''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |p''_{yy}(x, y)| < \varepsilon \\ |q''_{xx}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{xy}(x, y)| < \varepsilon, \quad |q''_{yy}(x, y)| < \varepsilon \end{aligned}$$

существует взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное преобразование T области G (вместе с границами) самое в себя, при котором:

1) соответствующие точки находятся на расстоянии, меньшем η ,

2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (А), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (В), и наоборот¹.

Необходимые условия того, что система (А) является негрубой системой первого порядка в области G , могут быть сформулированы в виде следующих девяти предложений².

Пусть x_0, y_0 — координаты состояния равновесия. Введем обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \quad \sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0)$$

Теорема 1. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых одновременно $\Delta = 0, \sigma = 0$.*

Пусть мы имеем состояние равновесия, для которого $\Delta = 0, \sigma \neq 0$. В окрестности такого состояния равновесия систему (А) всегда можно, на основании результатов Бендиксона^[3], привести к виду:

$$\frac{dx}{dt} = P_2(x, y) + \dots; \quad \frac{dy}{dt} = y - kx + Q_2(x, y) + \dots$$

где $P_2(x, y)$ и $Q_2(x, y)$ — члены второй степени относительно x и y , а невыписанные члены — третьей степени и выше.

Теорема 2. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых $\Delta = 0, \sigma \neq 0, P_2(1, k) = 0$.*

¹ Аналогично можно определить негрубые системы второго, третьего и т. д. порядка, как относительно грубые.

² В дальнейшем, говоря о негрубых системах первого порядка в области G , мы для краткости будем опускать слова «в области G ».

В дальнейшем состояние равновесия, для которого $\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) \neq 0$, мы будем называть «седло-узел».

Пусть мы имеем состояние равновесия, для которого $\Delta > 0$, $\sigma^2 < 4\Delta$.

Переходя к полярным координатам $x - x_0 = \rho \cos \varphi$, $y - y_0 = \rho \sin \varphi$ и исключая t , получим

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho R_1(\varphi) + \rho^2 R_2(\varphi) + \rho^3 R_3(\varphi) + \dots$$

Теорема 3. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет состояний равновесия, для которых¹*

$$\sigma = 0, \quad \Delta > 0, \quad \alpha_3 = \int_0^{2\pi} R_3(\varphi) d\varphi = 0$$

Состояние равновесия, у которого $\sigma = 0$, $\Delta > 0$, $\alpha_3 \neq 0$, мы будем называть «сложным фокусом первого порядка».

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ [$\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$, $\psi(t + \tau) = \psi(t)$] — периодическое решение системы (A), соответствующее замкнутой траектории, расположенной в области G .

Теорема 4. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет замкнутых траекторий, для которых*

$$h = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} [P_x'(\varphi, \psi) + Q_y'(\varphi, \psi)] ds = 0$$

и одновременно

$$\begin{aligned} h_2 = & - \int_0^{\tau} \{ \rho f [(P_{xx}'' - P_{yy}'') \dot{\varphi} + (Q_{xx}'' - Q_{yy}'') \dot{\psi} + 2(Q_{xy}'' \dot{\varphi} - P_{xy}'' \dot{\psi})] + \\ & + 2\rho^2 f [(P_x' + Q_y')(\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}) + (P_y' - Q_x')(\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{\psi}\ddot{\psi})] \} ds = 0 \\ & \left\{ f(s) = \exp \int_0^s [P_x'(\varphi, \psi) + Q_y'(\varphi, \psi)] ds, \quad \rho(s) = [\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2]^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Замкнутую траекторию, для которой $h = 0$, $h_2 \neq 0$, мы будем называть «двойным предельным циклом».

Будем называть ω или α орбитно-неустойчивые^[4] полутраектории, имеющие своими ω или α предельными точками седло ($\Delta < 0$) или седло-узел, соответственно сепаратрисами (усами) седла и сепаратрисами (усами) седла-узла.

Теорема 5. *Негрубая система первого порядка в области G не имеет сепаратрис, идущих из седла в то же самое седло, если в этом седле $\sigma = 0$.*

¹ Если $\sigma = 0$, то

$$R_1(\varphi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} R_2(\varphi) d\varphi = 0$$

Будем называть орбитно-неустойчивые траектории, которые могут быть в грубых системах, грубыми орбитно-неустойчивыми траекториями¹. Все другие орбитно-неустойчивые траектории будем называть негрубыми орбитно-неустойчивыми траекториями.

Определение 2. Мы скажем, что негрубая орбитно-неустойчивая траектория L_1 независима, если, какую бы другую негрубую орбитно-неустойчивую траекторию L_2 мы ни взяли, множество точек L_1 и ее ω и α предельных точек и множество точек L_2 и ее ω и α предельных точек либо не пересекаются, либо пересекаются по грубым орбитно-неустойчивым траекториям, либо множество точек их пересечения совпадает с множеством точек L_1 и ее ω и α предельными точками.

Теорема 6. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть двух негрубых независимых орбитно-неустойчивых траекторий.*

Теорема 7. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть ни сепаратрис седла-узла, идущих в седло (или из седла), ни двух сепаратрис седла-узла, являющихся продолжением одна другой.*

Теорема 8. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть двух сепаратрис седел, одна из которых накручивается на двойной предельный цикл, а другая скручивается с этого цикла.*

Теорема 9. *В негрубой системе первого порядка в области G не может быть сепаратрисы, идущей из седла в то же самое седло, на которую накручивается (или с которой скручивается) сепаратриса другого седла.*

Мы скажем, что система (A) в области G удовлетворяет условиям Γ' , если в области G :

а) она имеет одну и только одну негрубую независимую орбитно-неустойчивую траекторию;

б) эта негрубая, независимая орбитно-неустойчивая траектория принадлежит лишь к одному из следующих типов:

1) сложный фокус первого порядка ($\Delta > 0$, $\sigma = 0$, $\alpha_3 \neq 0$),

2) седло-узел [$\Delta = 0$, $\sigma \neq 0$, $P_2(1, k) \neq 0$],

3) двойной предельный цикл ($h = 0$, $h_2 \neq 0$),

4) сепаратриса, идущая из седла в седло, причем если она возвращается в то же седло, то в этом седле $\sigma \neq 0$;

с) сепаратрисы седел и седел-узлов (являющиеся не независимыми негрубыми орбитно-неустойчивыми траекториями) удовлетворяют следующим требованиям:

¹ Грубыми орбитно-неустойчивыми траекториями являются следующие траектории:

1) состояние равновесия, для которого $\Delta \neq 0$ и, если $\Delta > 0$, то $\sigma \neq 0$,

2) замкнутая траектория, для которой $h \neq 0$,

3) сепаратриса седла, не идущая из седла в седло, среди предельных точек которой могут быть лишь орбитно-неустойчивые траектории типа (1) и (2).

Всякая орбитно-неустойчивая траектория, отличная от перечисленных, является негрубой.

1) сепаратриса седла не может накручиваться на сепаратрису другого седла, идущую из седла в то же самое седло (или скручиваться с нее),

2) сепаратриса седла не может накручиваться на двойной цикл, если есть сепаратриса, скручивающаяся с него (и наоборот),

3) сепаратрисы седла-узла не могут ни идти в седло, ни являться продолжением одна другой.

Теорема 10. *Если система (A) удовлетворяет в области G условиям Γ' , то она является негрубой системой первого порядка в области G.*

Физико-технический институт,
г. Горький.

Поступило
1. XI. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. и Понтрягин Л. Грубые системы. — Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 247—250 (см. стр. 197 настоящего изд.).
2. Андронов А. А. и Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. — Уч. зап. Горьковского ун-та, 1937, вып. 6, с. 1—24 (см. стр. 262 настоящего изд.).
3. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. — Acta math., 1901, vol. 24, p. 1—88.
4. Леонтович Е. и Майер А. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории. — Докл. АН СССР, 1937, т. 14, № 5, с. 251—254.

II

**ТЕОРИЯ
РЕГУЛИРОВАНИЯ**

ЗАДАЧА МИЗЕСА В ТЕОРИИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ И ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Исследуется при обычных упрощающих предположениях движение системы машина — регулятор при наличии кулоновского трения^[1] и отсутствии вязкого трения.

Этот случай общей задачи прямого регулирования рассматривался в ряде работ^[2—14]. Мы будем его называть задачей Мизеса. Применение к этой нелинейной задаче теории точечных преобразований поверхностей позволяет строго получить ряд результатов как новых, так и полученных ранее Мизесом и другими графически или путем численных выкладок.

1. Обозначив через x приведенное смещение муфты регулятора, через y приведенное отклонение угловой скорости машины, через A так называемый первый главный параметр прямого регулирования¹, будем иметь систему

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = F(x, y, z) \quad (A)$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} -Ax + y - \frac{1}{2}, & \text{если } z > 0 \text{ или } z = 0, -Ax + y > \frac{1}{2} \\ -Ax + y + \frac{1}{2}, & \text{если } z < 0 \text{ или } z = 0, -Ax + y < -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{если } z = 0, -\frac{1}{2} \leq -Ax + y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Решение системы определяется начальными условиями² при $t = 0$: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ и условием непрерывности функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точках разрыва функции $F(x, y, z)$.

*) Совместно с А. Г. Майером. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1944, 43, № 2, с. 58—62 Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 9 II 1944.

¹ Связь безразмерного параметра A с величинами, обычно используемыми в теории регулирования, дается соотношением

$$A = \delta \sqrt[3]{\frac{4T_0^2}{T^2}}$$

где δ — коэффициент неравномерности регулятора, T_0 — время пуска в ход машины, T — время свободного падения муфты регулятора.

² Связь безразмерной константы x_0 с величинами, употребляемыми в теории регулирования, дается соотношением

$$\frac{1}{|x_0|} = \frac{\varepsilon}{\lambda} \sqrt{\frac{4T_0^2}{T^2}}$$

где ε — коэффициент нечувствительности регулятора, λ — так называемое относительное изменение нагрузки машины^[12].

Обозначим корни характеристического уравнения линейной системы, получающейся из (А) при $F(x, y, z) = -Ax + y$, через $-2p$, $p \pm qi$ и положим¹.

$$p = qc, \quad qt = t', \quad x = q\xi, \quad y = \eta, \quad z = q^2\zeta$$

Уравнения (А) определяют преобразование плоскости $\xi\eta$ ($\zeta = 0$) в самое себя.

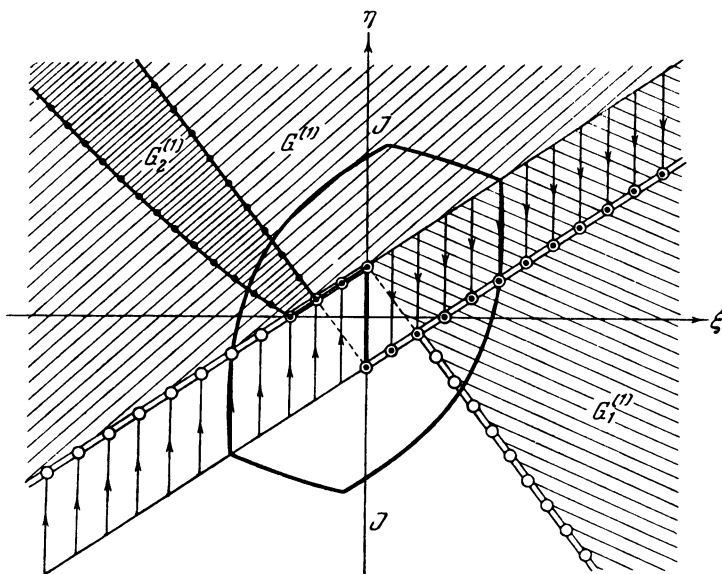
Разобьем плоскость $\xi\eta$ ($\zeta = 0$) на три куска (фиг. 1):

$$G^{(1)}, \text{ где } -Aq\xi + \eta > \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -Aq\xi + \eta = \frac{1}{2}, \quad \xi < 0$$

$$G^{(2)}, \text{ где } -Aq\xi + \eta = \frac{1}{2}, \quad \xi > 0 \text{ или } -\frac{1}{2} < -Aq\xi + \eta < \frac{1}{2} \\ \text{или } -Aq\xi + \eta = -\frac{1}{2}, \quad \xi < 0$$

$$G^{(3)}, \text{ где } -Aq\xi + \eta < -\frac{1}{2} \quad \text{или} \quad -Aq\xi + \eta = -\frac{1}{2}, \quad \xi > 0$$

Если начальная точка $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ принадлежит $G^{(2)}$, то в силу (1) она перейдет при $\xi_0 > 0$ в точку $\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = Aq\xi_0 - \frac{1}{2}$ куска $G^{(3)}$, а при



Фиг. 1

$\xi_0 < 0$ в точку $\xi_1 = \xi_0$, $\eta_1 = Aq\xi_0 + \frac{1}{2}$ куска $G^{(2)}$. Переход точки ξ_0 , η_0 куска $G^{(2)}$ в точку ξ_1 , η_1 будем называть преобразованием Е.

Если начальная точка ξ_0 , η_0 ($t' = 0$) принадлежит $G^{(2)}$ или $G^{(3)}$ и если обозначить через $\tau > 0$ ближайшее значение t' , при котором опять $\zeta = 0$, а через ξ_1 , η_1 соответствующие значения ξ и η , то получим

$$\xi_0 = vf(\tau), \quad \eta_0 + R = vg(\tau) \quad (2)$$

¹ Заметим, что

$$0 < p < \frac{q}{\sqrt{3}}, \quad A = \frac{1 - 3c^2}{3\sqrt{4c^2(1 + c^2)^2}}$$

$$\xi_1 = -ve^{-2c\tau} f(-\tau), \quad \eta_1 + R = -ve^{2c\tau} g(-\tau) \quad (3)$$

где

$$f(\tau) = (1 + c^2) \left\{ \cos \tau + \frac{1 + 3c^2}{2c} \sin \tau - e^{-3c\tau} \right\}$$

$$g(\tau) = \left\{ -2c \cos \tau + \frac{1 + 6c^2 - 3c^4}{4c^2} \sin \tau + 2ce^{-3c\tau} \right\}$$

При $R = -1/2$, $0 < v < +\infty$ формулы (2) и (3) дают в параметрической форме преобразование точки (ξ_0, η_0) куска $G^{(1)}$ в точку (ξ_1, η_1) , принадлежащую $G^{(2)}$ или $G^{(3)}$ (преобразование S^+), а при $R = +1/2$, $0 > v > -\infty$ преобразование точки $G^{(3)}$ в точку, принадлежащую $G^{(1)}$ или $G^{(2)}$ (преобразование S^-). Параметр τ может при этом принимать все значения в промежутке $(0, \theta)$, где θ наименьший положительный корень уравнения

$$e^{-3c\theta} = \cos \theta - 3c \sin \theta \quad (4)$$

Преобразования S^+ , S^- , E в совокупности образуют подлежащее изменению преобразование плоскости ξ, η в самое себя¹.

2. Так как при рассматриваемом преобразовании точки отрезка $\xi = 0$, $-1/2 \leq \eta \leq 1/2$ не сдвигаются, то мы будем называть этот отрезок *отрезком покоя*. Условие устойчивости в малом для отрезка покоя имеет вид: $e^{-c\theta} > c \sin \theta - \cos \theta$ (или $A > 1.2531$). Тот же числовой результат в несколько иной интерпретации был получен Мизесом и другими (см., например, [12]).

3. Пусть точка $P(\xi_0, \eta_0)$ ($v = v_0$, $\tau = \tau_0$) куска $G^{(1)}$ переходит в точку $P_1(\xi_1, \eta_1)$ ($v = v_1$, $\tau = \tau_1$) куска $G^{(3)}$, а затем в точку $\xi_2 = \xi_0$, $\eta_2 = \eta_0$.

Тогда

$$-v_0 e^{-2c\tau_0} f(-\tau_0) = v_1 f(\tau_1), \quad v_0 f(\tau_0) = -v_1 e^{-2c\tau_1} f(-\tau_1)$$

$$-v_0 e^{-2c\tau_0} g(-\tau_0) + \frac{1}{2} = v_1 g(\tau_1) - \frac{1}{2} \quad (5)$$

$$v_0 g(\tau_0) + \frac{1}{2} = -v_1 e^{-2c\tau_1} g(-\tau_1) - \frac{1}{2}$$

Исследование системы (5) показывает, что она имеет только такие решения, для которых

$$\tau_0 = \tau_1 = \tau^*, \quad v_0 = -v_1 = v^*$$

Значение $\tau = \tau^*$ определяется уравнением

$$\operatorname{sh} 2c\tau + \operatorname{sh} c\tau \cos \tau + \frac{1 + 3c^2}{2c} \operatorname{ch} c\tau \sin \tau = 0 \quad (6)$$

Для $A < 1.2531$ это уравнение не имеет решений и, следовательно, нет рассматриваемого периодического движения. Для $A > 1.2531$ это уравнение имеет одно и только одно решение.

¹ При исследовании преобразований (2) и (3) целесообразно различать два случая: 1) случай недорегулирования, когда $f(-\theta) < 0$ (или $A > 2.623$), и 2) случай перерегулирования, когда $f(-\theta) > 0$ (или $A < 2.623$).

4. Изучение соответствующего характеристического уравнения показывает, что P является седлом. Это означает, в частности, что точки, которые при последовательном повторении преобразования неограниченно приближаются к P , расположены на двух кривых L_1 и L_2 (ω -сепаратрисы седла), образующих вместе с P кривую, аналитическую в P . α -сепаратрисы P образуют также вместе с P кривую L . В $G^{(3)}$ симметрично P , L_1 , L_2 и L относительно начала координат также лежит седло $P' \equiv P_1$ и соответствующие сепаратрисы.

5. Исследование структуры фазового пространства в целом начнем с рассмотрения поведения достаточно далеких точек плоскости при помощи преобразования Пуанкаре. Введем

$$z = \frac{1}{\eta} = \frac{w}{g(\tau) - Rw}, \quad u = \frac{\xi}{\eta} = \frac{f(\tau)}{g(\tau) - Rw} \quad (7)$$

где $w = 1/v$. Из формул (2) и (3) вытекает преобразование плоскости z, u в самое себя; при этом ось $z = 0$, преобразующаяся в самое себя, соответствует удаленной прямой плоскости ξ, η (экватор сферы Пуанкаре). Исследование (7) и аналогичного преобразования, полученного при $z = 1/\xi, u = \eta/\xi$, показывает, что на экваторе сферы Пуанкаре есть только две инвариантные точки, соответствующие $w = 0, \tau = \pi$ и являющиеся устойчивыми узлами. Переведем рассмотрение на одну из полусфер Пуанкаре. Часть полусферы $G^{(1)}$ при преобразовании S^+ переходит в некоторое множество $G_1^{(1)}$, точки которого принадлежат $G^{(2)}$ и $G^{(3)}$. Применяя к точкам $G_1^{(1)}$ преобразования S^- и E , получим некоторое множество точек $\bar{G}_2^{(1)}$, содержащее область $G_2^{(1)}$, лежащую в $G^{(1)}$.

Рассмотрение поведения точек $\bar{G}_2^{(1)}$, не вошедших в $G_2^{(1)}$, и рассмотрение поведения точек области $G_2^{(1)}$ (проводимое при помощи некоторого искусственного приема, позволяющего использовать рассуждения Брауэра^[15]), приводит к таким выводам:

а) если $A < 1.2531$, то все точки плоскости, кроме точек отрезка покоя, при повторении преобразования удаляются в бесконечность;

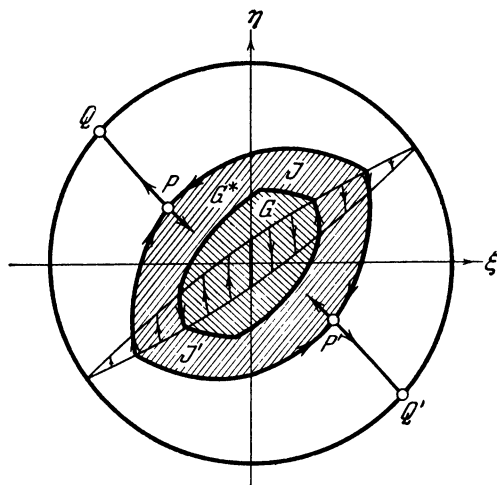
б) если $A > 1.2531$, то ω -сепаратрисы седел P и P' ограничивают точечное множество G^* , такое, что если начальная точка принадлежит G^* , то преобразованные точки сходятся к отрезку покоя, если же начальная точка не принадлежит ни G^* , ни его границе¹, то преобразованные точки удаляются в бесконечность. Из этих выводов следует, что, кроме P, P' и отрезка покоя, других неблуждающих точек (по терминологии Биркгофа^[16]) в конечной части плоскости нет.

6. Как показано выше, процесс регулирования будет сходиться при соблюдении двух условий: 1) $A > 1.2531$; 2) начальные значения лежат

¹ Область G^* является односвязной, если ω -сепаратриса P пересекает соответствующую границу G^* в одной точке. Графические построения Мизеса показывают, что имеет место именно этот случай. При ином поведении сепаратрисы теория показывает удивительное усложнение картины: G^* может быть многосвязной областью или даже распадаться на конечное число областей. Однако в трехмерном фазовом пространстве ξ, η, ζ область притяжения отрезка покоя всегда будет односвязной.

в G^* . Согласно Жуковскому [9], в основе технических расчетов регуляторов должно лежать не G^* , а некоторая его часть G (область Жуковского), для точек которой «начальные» ускорения, начиная со второго перехода, будут равны нулю, т. е. преобразованные точки лежат в $G^{(2)}$.

На основании (2) и (3) нетрудно написать параметрические уравнения границы области Жуковского (кривые I и I' , фиг. 1 и 2).



Фиг. 2

Мы приведем здесь эту границу лишь для специального типа начальных условий, наиболее важного для практики: $x = x_0$, $y = Ax_0$, $z = 0$. В этом случае вопрос о границе сводится к соответствующему граничному значению x_0 . Для представления имеющихся здесь зависимостей обычно пользуются так называемой плоскостью Мизеса, откладывая по оси абсцисс параметр A , а по оси ординат величину $\beta = 1/x_0$. На этой плоскости область значений A , β , пригодная по Жуковскому для работы регуляторов, будет ограничена с одной стороны прямой $A = 1.2531$, с другой стороны — кривой

$$\beta = \frac{1}{q} e^{i\theta} |\sin \theta|$$

где θ определяется уравнением (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. В ы ш н е г р а д с к и й И. А. О регуляторах прямого действия.— Известия СПб. практ. технол. ин-та, т. 1, 1897, стр. 21—62.
2. W i s c h n e g r a d s k i I. Ueber direktwirkende Regulatoren.— Civil-ingenieur, (Freiberg), 1877, Bd. 23.
3. B e g t r u p J. Theorie of steam engine governors.—4.— American Machinist, vol. 17, 1894, № 9.
4. T o l l e M. Beiträge zur Beurteilung der Zentrifugalpendelregulatoren. — Zeitschrift d. VDI. Bd. 39, 1895, № 25, S. 735—741; № 26, S. 776—779.
5. K n o l l e r R. Beiträge zur Beurteilung der Zentrifugalpendelregulatoren.—Zeitschrift d. VDI, Bd. 41, 1897, № 14, S. 415.

6. L e c o r n u L. Regularisation du mouvement dans les machines. Paris, 1898, 218 p.
7. S t o d o l a A. Das Siemenssche Regulirprinzip und die amerikanischen «Inertie»-Regulatoren.— Zeitschrift d. VDI, Bd. 43, 1899, № 18, S. 506—516, 573—579.
8. T h ü m m l e r F. Fliehkraft und Beharrungsregler. Berlin, 1903, 153 S.
9. M i s e s R. von. Zur Theorie der Regulatoren.— Elektrotechnik und Maschinenbau, Bd. 26, 1908, S. 783—788.
10. M i s e s R. von. Dynamische Probleme der Maschinenlehre.— Encyclopädie der mathem. Wissenschaften. Bd. 4, Abt. 2, 1911, № 2, S. 153—355.
11. Ж у к о в с к и й Н. Е. Теория регулирования хода машин. М., 1909. стр. 142.
12. Р е р и х К. О влиянии трения на работу центробежных регуляторов.— Известия Екатериносл. горного ин-та, т. 14, 1924, стр. 415.
13. Н и к о л а и Е. Л. Регулирование машин. Л., 1935, стр. 164.
14. P ö s c h l Th. Grenzkurven in d. Regeltheorie.— Elektrotechnik und Maschinenbau, Bd. 54, 1936, S. 97—102.
15. S c h m i d t W. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939. XV, 114 S.
16. B r o u w e r L. Beweis des ebenen Translationssatzes.— Mathematische Annalen, Bd. 72, 1912, S. 37—54.
17. Б и р к г о ф Д. Динамические системы. Пер. с англ. М.—Л., 1941, стр. 320.
18. B i r k h o f f G. D. and S m i t c h P. A. Structure analysis of surface transformations.— Journal de Mathematiques pures et appliquées, vol. 7, 1928, № 4, p. 345—379.

ДВИЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА, СНАБЖЕННОГО АВТОПИЛОТОМ, И ТЕОРИЯ ТОЧЕЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ *

В работе рассматривается при обычных упрощающих предположениях теория стабилизации курса нейтрального (т. е. без восстанавливающего момента) самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора, вращающего руль направления¹.

Теория точечных преобразований поверхностей позволяет решить эту нелинейную задачу² без всяких предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения.

1. Уравнения движения исследуемой системы имеют вид:

$$\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \quad \dot{\eta} = F, \quad \psi = \varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta \quad (1)$$

причем

$$F = K \text{ для } \psi > 0, \quad F = -K \text{ для } \psi < 0, \quad F = a(\dot{\varphi} + \beta\ddot{\varphi}) \text{ для } \psi = 0.$$

Здесь φ — угол рыскания самолета, η — угол поворота руля, ψ — аргумент сервомотора, управляющего рулем, β — так называемый коэффициент искусственного демпфирования, $1/a$ — так называемый коэффициент обратной связи; M , N и K — положительные константы, характеризующие соответственно естественное демпфирование самолета и рулевое устройство. Вводя

$$t' = Mt, \quad z = \frac{M^3}{NK} \frac{d^2\varphi}{dt'^2}, \quad u = \frac{M^3}{NK} \left\{ \frac{d\varphi}{dt'} + \frac{d^2\varphi}{dt'^2} \right\}, \quad A = M\beta, \quad B = \frac{M}{Na}$$

и предполагая, что $A > 0$, $B > 0$, переходим к системе

$$\frac{dz}{dt'} = -z + f(u, z, \psi), \quad \frac{du}{dt'} = f(u, z, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt'} = g(u, z, \psi) \quad (2)$$

$$f = -1, \quad g = u + (A-1)z - B,$$

$$\text{если } \psi > 0 \quad \text{или} \quad \psi = 0, \quad \text{или} \quad u + (A-1)z - B = 0, \quad \psi = 0, \\ u + (A-1)z - B > 0 \quad \quad u > A + B$$

* Совместно с Н. Н. Баутиным. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1944, 43, № 5, с. 197—201, Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 8 II 1944.

¹ Излагаемая теория с надлежащим изменением механического смысла постоянных относится и к идеальному случаю *поперечной* стабилизации самолета (не обладающего V-образным расположением крыльев) при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора, вращающего элероны.

² Нелинейным задачам о движении самолета с автопилотом за последние годы был посвящен ряд работ [1—5].

$$f = +1, \quad g = u + (A-1)z + B,$$

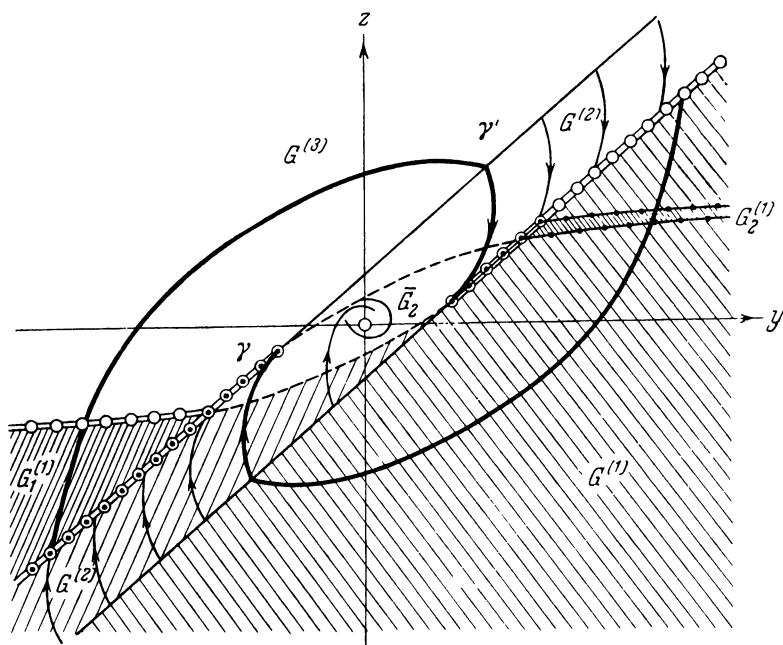
$$\text{если } \psi < 0 \quad \text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z + B < 0$$

$$\text{или } \psi = 0, \quad u + (A-1)z + B = 0, \quad u < -(A+B)$$

$$f = -\frac{1}{B} [(A-1)z + u], \quad g \equiv 0,$$

$$\text{если } \psi = 0, \quad -B < u + (A-1)z < +B$$

Исследуем решение системы (2), определяемое начальными условиями $t' = 0$, $u = u_0$, $z = z_0$, $\psi = 0$ и требованием непрерывности функций $u(t')$, $z(t')$, $\psi(t')$ в точках разрыва правых частей f и g .



Фиг. 1

2. Система (2) имеет единственное состояние равновесия $u = 0$, $z = 0$, $\psi = 0$, принадлежащее «пластинке» $-B < u + (A-1)z < B$ ($\psi = 0$), которая служит своеобразным элементом притяжения для соседних траекторий. При этом разбиение самой пластинки на траектории таково, что состояние равновесия будет устойчивым узлом при $(A+B)^2 > 4B$ и будет устойчивым фокусом при $(A+B)^2 < 4B$.

3. Уравнения (2) определяют преобразования плоскости u, z ($\psi = 0$) в самое себя. Разобьем плоскость u, z ($\psi = 0$) на четыре куса (фиг. 1):

$$G^{(1)}, \quad \text{где } u + (A-1)z - B > 0 \quad \text{или} \quad u + (A-1)z - B = 0, \quad u > (A+B)$$

$$G^{(3)}, \quad \text{где } u + (A-1)z + B < 0 \quad \text{или} \quad u + (A-1)z + B = 0, \quad u < -(A+B)$$

$\bar{G}^{(2)}$ — часть плоскости (вместе с границами), содержащая начало координат и ограниченная прямыми $u + (A - 1)z \pm B = 0$ и кривыми γ и γ' *;

$G^{(2)}$ — часть плоскости, содержащая точки, не принадлежащие $G^{(1)}$, $G^{(3)}$ и $\bar{G}^{(2)}$. Если начальная точка $u = u_0$, $z = z_0$ принадлежит $\bar{G}^{(2)}$, то в силу (2) она попадает, не покидая плоскости $\psi = 0$, в начало координат. Переход точки u_0 , z_0 , принадлежащей $\bar{G}^{(2)}$, в точку (0, 0) будем называть *преобразованием* $\bar{E}$. Если начальная точка u_0 , z_0 принадлежит $G^{(2)}$, то в силу (2) она, не покидая плоскости $\psi = 0$, перейдет в точку $u_1 = -(A - 1)z_1 \pm B$, z_1 , принадлежащую $G^{(1)}$ или $G^{(3)}$. Такой переход точки u_0 , z_0 будем называть *преобразованием* E . Если начальная точка u_0 , z_0 ($t' = 0$) принадлежит $G^{(1)}$ и если обозначить через $\tau > 0$ ближайшее значение t' , при котором опять $\psi = 0$, а через u_1 , z_1 соответствующие значения u и z , то получим

$$\begin{aligned} z_0 &= z_0(\zeta, \tau) \equiv \zeta \\ u_0 &= u_0(\zeta, \tau) \equiv (A - 1)(1 + \zeta) \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \\ z_1 &= z_1(\zeta, \tau) \equiv (1 + \zeta)e^{-\tau} - 1 \\ u_1 &= u_1(\zeta, \tau) \equiv (A - 1)(1 + \zeta) \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Формулы (3) дают в параметрической форме преобразование точки u_0 , z_0 куска $G^{(1)}$ в точку u_1 , z_1 , принадлежащую $G^{(2)}$, $\bar{G}^{(2)}$ или $G^{(3)}$ (*преобразование* S^+)¹. Заменяя в (3) параметр ζ через $-\zeta$ и изменяя знак у координат u и z , соответственно получим формулы

$$z_0 = z_0^*(\zeta, \tau), \quad u_0 = u_0^*(\zeta, \tau); \quad z_1 = z_1^*(\zeta, \tau), \quad u_1 = u_1^*(\zeta, \tau) \quad (3')$$

по которым точка u_0 , z_0 , принадлежащая $G^{(3)}$, переходит в точку u_1 , z_1 , принадлежащую $G^{(2)}$, $\bar{G}^{(2)}$ или $G^{(1)}$ (*преобразование* S^-). Преобразования S^+ , S^- , E и $\bar{E}$ в совокупности образуют подлежащее изучению преобразование u , z в самое себя.

4. Пусть точка $P(u_0, z_0; \zeta, \tau)$ куска $G^{(1)}$ переходит затем в точку $P_1(u_1, z_1; \zeta, \tau)$ куска $G^{(3)}$, а точка $P_1(u_1, z_1; \zeta', \tau')$ переходит затем в точку $u_2 = u_0$, $z_2 = z_0$. Тогда

$$\begin{aligned} u_0(\zeta, \tau) &= u_1^*(\zeta', \tau'); & z_0(\zeta, \tau) &= z_1^*(\zeta', \tau') \\ u_1(\zeta, \tau) &= u_0^*(\zeta', \tau'); & z_1(\zeta, \tau) &= z_0^*(\zeta', \tau') \end{aligned} \quad (4)$$

Исследование системы (4) показывает, что она имеет только такие решения, для которых $\tau = \tau' = \tau^*$, $\zeta = -\zeta' = \zeta^*$.

* Уравнения фазовых траекторий γ и γ' , касающихся прямых $u + (A - 1)z \pm B = 0$, легко получить из (2).

¹ Параметры τ и ζ могут принимать любые значения, удовлетворяющие условиям $\tau > 0$, $\tau^2 \geq 2(A - 1)(1 + \zeta)(1 - \tau - e^{-\tau})$.

Значения $\tau^* > 0$ и $\zeta^* > 0$ определяются уравнениями (5):

$$2(e^{-\tau} - 1)(A - 1) = \tau(1 + e^{-\tau})(1 - A - B) \quad (5)$$

$$1 - \zeta = (1 + \zeta) \exp \left[\frac{2(A-1)}{1-A-B} \zeta \right]$$

Для $A + B > 1$ уравнения (5) не имеют положительных корней и, следовательно, нет рассматриваемых инвариантных точек. Будем в дальнейшем различать три случая:

$$A + B > 1 \quad (I)$$

$$A + B < 1 \quad (II)$$

$$[(A + B)(A - B - 1) + B] \exp \left(\frac{2B}{A+B} \right) < (A + B)(A + B - 1) - B$$

$$A + B < 1 \quad (III)$$

$$[(A + B)(A - B - 1) + B] \exp \left(\frac{2B}{A+B} \right) > (A + B)(A + B - 1) - B$$

5. В случае (II) каждое из уравнений (5) имеет один и только один положительный корень. Исследование соответствующего характеристического уравнения показывает,

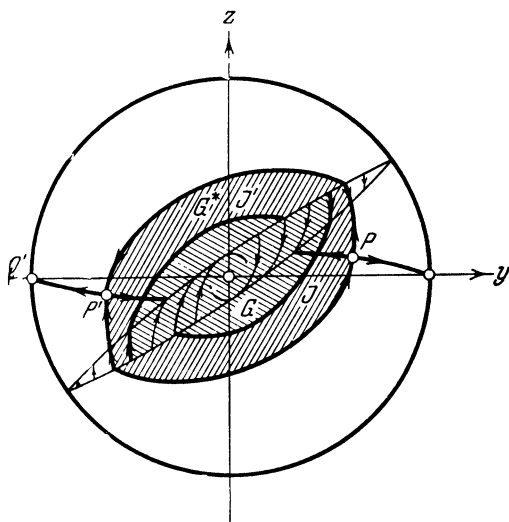
что P является седлом. Это означает, в частности, что точки, которые при последовательном повторении преобразования неограниченно приближаются к P , расположены на двух кривых L_1 и L_2 (ω -сепаратрисы седла), образующих вместе с P кривую, аналитическую в P ; α -сепаратрисы P также образуют вместе с P кривую L . В $G^{(3)}$ симметрично P , L_1 , L_2 и L относительно начала координат лежит седло $P' \equiv P_1$ и соответствующие сепаратрисы.

6. В случае (III) существуют две точки, принадлежащие $G^{(2)}$,

такие, что последовательное применение преобразований E, S^-, E, S^+ переводит их в самих себя¹. Эти точки выделяют в пространстве u, z, ψ неустойчивую периодическую траекторию, в состав которой входят куски фазовых траекторий, принадлежащих пластинке.

7. Исследование структуры фазового пространства в целом начнем с рассмотрения поведения достаточно далеких частей плоскости при помощи преобразования Пуанкаре. Введем $\eta = 1/u$, $\xi = z/u$. Из формул для S^+ и S^- вытекает преобразование плоскости ξ, η в самое себя; при

¹ Используя специальные свойства преобразования (3), можно показать, что G^* — односвязная область.



Фиг. 2

этом ось $\eta = 0$, преобразующаяся в самое себя, соответствует бесконечно удаленной прямой плоскости u, z (экватор сферы Пуанкаре). Исследование этого преобразования и аналогичного $\eta = 1/z$, $\xi = u/z$ показывает, что на экваторе сферы Пуанкаре есть только две инвариантные точки (на «концах» оси u), устойчивые при $A + B < 1$ и неустойчивые при $A + B > 1$. Переведем рассмотрение на одну из полусфер Пуанкаре. Часть полусферы $G^{(1)}$ при преобразовании S^+ переходит в некоторое множество $G_1^{(1)}$, точки которого принадлежат $G^{(2)} \cup \bar{G}^{(2)}$, и $G^{(3)}$.

Применяя к точкам $G_1^{(1)}$ преобразования E, E и S^- , получаем некоторое множество точек $\bar{G}_2^{(1)}$, содержащее область $G_2^{(1)}$, лежащую в $G_1^{(1)}$. Рассмотрение поведения точек $\bar{G}_2^{(1)}$, не вошедших в $G_2^{(1)}$, и рассмотрение поведения точек области $G_2^{(1)}$ (при помощи некоторого искусственного приема, позволяющего использовать рассуждения Брауера [6]) приводит к таким выводам.

Случай 1. Все точки плоскости при повторении преобразования стремятся к состоянию равновесия.

Случай 2. ω -сепаратрисы инвариантных точек P и P' ограничивают точечное множество G^* , такое, что если начальная точка принадлежит G^* , то преобразованные точки сходятся к состоянию равновесия, если же начальная точка не принадлежит ни G^* , ни его границе, то преобразованные точки удаляются в бесконечность. На плоскости, кроме точек P, P' и начала координат, нет других неблуждающих (по терминологии Биркгофа [7, 8]) точек.

Случай 3. В этом случае также можно выделить область G^{**} , являющуюся областью притяжения для состояния равновесия. Если начальная точка не принадлежит ни G^{**} , ни ее границе, то преобразованные точки удаляются в бесконечность; на плоскости существуют, кроме начала координат, другие неблуждающие точки, принадлежащие той неустойчивой периодической траектории, о которой шла речь в п. 6.

8. Как показано выше, следует различать два случая сходимости процесса регулирования.

1) $A + B > 1$. Процесс регулирования сходится при всяких начальных условиях.

2) $A + B < 1$. Процесс регулирования сходится, если начальные условия лежат соответственно в G^* (случай 2) или в G^{**} (случай 3).

Если начальные условия не принадлежат этим областям или их границам, то процесс регулирования расходится, автоматическое устройство не может справиться со своей задачей¹.

¹ Назовем областью G ту часть области G^* (или G^{**}), точки которой после первого перехода попадают в область $\bar{G}^{(2)}$ и далее стремятся к состоянию равновесия, не покидая пластинки. Границы области G нетрудно получить в параметрическом виде. Знание границ области G позволяет грубо оценить снизу границы области G^* (или G^{**}). Точное вычисление границ областей сходимости процесса регулирования представляет известные затруднения (особенно в случае II).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Котельников В. А. Продольная динамическая устойчивость самолета с автопилотом. — Техника возд. флота, 1941, № 1, стр. 27—31.
 2. Котельников В. А. Продольная устойчивость самолета с автопилотом типа АВП-12. М., 1941, стр. 58.
 3. Бутенин Н. В. Автоколебания стэнда с автопилотом. — Труды Ленингр. воен.-возд. Академии Кр. Армии, вып. 3, 1943, стр. 191—207.
 4. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. — Докл. АН СССР, т. 37, 1942, № 9, стр. 283—287.
 5. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. ПММ, 1943, вып. 2, стр. 97—108.
 6. Brouwer L. Beweis des ebenen Translationssatzes. — Mathematische Annalen, Bd. 72, 1912, S. 37—54.
 7. Биркгоф Д. Динамические системы. Пер. с англ. М.—Л., 1941. 320 стр.
 8. Birkhoff G. D. and Smith P. A. Structure analysis of surface transformations. — Journal de Mathématiques pures et appliquées, vol. 7, 1928, № 4, p. 345—379.
-

СТАБИЛИЗАЦИЯ КУРСА НЕЙТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА АВТОПИЛОТОМ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ СЕРВОМОТОРА И ЗОНОЙ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ *

В предыдущей работе [1] мы рассмотрели теорию стабилизации курса нейтрального (т. е. бесфлюгерного момента) самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора руля направления и при отсутствии зоны нечувствительности. Цель настоящей работы — найти условия возникновения и количественные характеристики автоколебаний, порождаемых в той же системе наличием симметричной зоны нечувствительности автоматического устройства¹.

1. Обозначая ширину зоны нечувствительности через $2\psi_0$ ($\psi_0 > 0$) и пользуясь обозначениями предыдущей работы, можно написать уравнения движения исследуемой системы в виде:

$$\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \quad \dot{\eta} = F, \quad \psi = \varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta \quad (1)$$

причем

$$\begin{array}{lll} F = K & \text{для} & \psi > \psi_0 \\ F = -K & \text{для} & \psi < -\psi_0 \\ F = 0 & \text{для} & -\psi_0 < \psi < \psi_0 \\ F = a(\dot{\varphi} + \beta\ddot{\varphi}) & \text{для} & \psi = \psi_0 \quad \psi = -\psi_0 \end{array}$$

Совершая замены, указанные в предыдущей работе, и полагая по-прежнему

$$A = M\beta > 0, \quad B = M^2 / Na > 0$$

приведем систему (1) к виду:

$$\frac{dz}{dt'} = -z + f(u, z, \psi), \quad \frac{du}{dt'} = f(u, z, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt'} = g(u, z, \psi) \quad (2)$$

$$\begin{array}{lll} f \equiv -1, & g \equiv u + (A-1)z - B, & \text{если } \psi > \psi_0 \\ f \equiv 1, & g \equiv u + (A-1)z + B, & \text{если } \psi < -\psi_0 \\ f \equiv 0, & g \equiv u + (A-1)z, & \text{если } |\psi| < \psi_0 \end{array}$$

$$-Bf \equiv u + (A-1)z, \quad g \equiv 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } \left\{ \begin{array}{l} \psi = \psi_0 \\ 0 < u + (A-1)z < B \end{array} \right. \\ \text{если } \left\{ \begin{array}{l} \psi = -\psi_0 \\ -B < u + (A-1)z < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

* Совместно с Н. Н. Баутиным. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1945, 46, № 4, с. 158—161. Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 31 V 1944.

¹ Рассмотрение близких задач содержится в работах В. А. Котельникова [2], Н. В. Бутенина [3], Б. В. Булгакова [4]. Теория точечных преобразований поверхностей позволяет решить рассматриваемую нелинейную задачу, не предполагая малости каких-либо величин, входящих в уравнения движения.

Будем рассматривать u, z, ψ как декартовы координаты и будем исследовать решения системы (2), определяемые требованием непрерывности $u(t'), z(t'), \psi(t')$ в точках разрыва $f(u, z, \psi)$ и $g(u, z, \psi)$.

Фазовое пространство u, z, ψ заполнено кусками траекторий, лежащими:

- 1) в плоскостях $u = c = \text{const}$ для $|\psi| < \psi_0$;
- 2) в цилиндрических поверхностях $z = ce^u - 1$ для $\psi > \psi_0$;
- 3) в цилиндрических поверхностях $z = ce^{-u} + 1$ для $\psi < -\psi_0$.

На плоскостях $\psi = \pm \psi_0$ происходит соединение траекторий. «Пластины»

$$(\sigma) \quad \psi = \psi_0, \quad 0 < u + (A-1)z < B$$

$$(\sigma') \quad \psi = -\psi_0, \quad -B < u + (A-1)z < 0$$

сами разбитые на траектории, служат местом соединения траекторий противоположных направлений.

Изображающая точка, достигая пластинки, продолжает свое движение по траектории разбиения пластинки и покидает последнюю, дойдя до ее края.

На частях плоскостей $\psi = \pm \psi_0$, не принадлежащих пластинкам σ и σ' , происходит соединение траекторий одинакового направления. Отрезок $u = z = 0$, $|\psi| \leq \psi_0$ является отрезком покоя.

2. Уравнения (2) определяют преобразование плоскости $\psi = \psi_0$ (в состав которой входит пластинка σ) в самое себя. Разобьем плоскость u, z ($\psi = \psi_0$) на четыре куска:

$G^{(1)}$ содержит те точки, для которых

$$u + (A-1)z - B > 0 \quad \text{или} \quad u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A + B$$

$\bar{G}^{(2)}$ содержит те точки пластинки σ , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в точки «ребра» (L)

$$u + (A-1)z = 0, \quad u < 0, \quad \psi = \psi_0$$

Само ребро L не включается в $\bar{G}^{(2)}$.

$G^{(2)}$ содержит те точки пластинки σ , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в ребро (M)

$$u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A + B \quad (\psi = \psi_0)$$

Само ребро M не включается в $G^{(2)}$.

$G^{(3)}$ содержит те точки, для которых

$$u + (A-1)z < 0 \quad \text{или} \quad u + (A-1)z = 0, \quad z < 0$$

Обозначим через $H^{(1)}, \bar{H}^{(2)}, H^{(2)}, H^{(3)}$ куски плоскости $\psi = -\psi_0$, соответственно симметричные $G^{(1)}, \bar{G}^{(2)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ относительно начала координат, а L', M' — полупрямые, симметричные L и M .

Если начальная точка $u = u_0, z = z_0, \psi = \psi_0$ ($\psi = -\psi_0$) принадлежит $\bar{G}^{(2)}$ ($\bar{H}^{(2)}$), то в силу (2) она попадает в точку ребра $L(L')$, принадле-

жащую $G^{(3)}(H^{(3)})$. Такой переход точки u_0, z_0 будем называть преобразованием $\bar{E}^+(\bar{E}^-)$.

Если начальная точка принадлежит $G^{(2)}(H^{(2)})$, то в силу (2) она попадает в точку ребра $M(M')$, принадлежащую $G^{(1)}(H^{(1)})$. Такой переход будем называть преобразованием $E^+(E^-)$.

Если начальная точка $u_0, z_0(t'=0)$ принадлежит $G^{(1)}(H^{(1)})$, то, покидая в силу (2) плоскость $\psi = \psi_0$ ($\psi = -\psi_0$) при $t' = 0$, она при $t' = \tau$ снова попадает на ту же плоскость в точку u_1, z_1 , принадлежащую $G^{(2)}(H^{(2)})$, $\bar{G}^{(2)}(\bar{H}^{(2)})$ или $G^{(3)}(H^{(3)})$. Такой переход будем называть преобразованием $S^+(S^-)$.

Если же начальная точка $u_0, z_0, \psi = \psi_0$ ($\psi = -\psi_0$) принадлежит $G^{(3)}(H^{(3)})$, то для $t' = \tau'$ она попадает в точку u_1, z_1 плоскости $\psi = -\psi_0$ ($\psi = \psi_0$). Такой переход будем называть преобразованием $S_0^+(S_0^-)$. Преобразования S^+ и S_0^+ даются формулами

$$(S^+) \quad \begin{cases} z_0 = (1 + \zeta)e^\tau - 1, & z_1 = \zeta \\ u_0 = (A - 1)(1 + \zeta)\frac{1 - e^\tau}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1, & u_1 = u_0 - \tau \end{cases} \quad (3)$$

$$(S_0^+) \quad \begin{cases} z_0 = \zeta, & z_1 = \zeta e^{-\tau'} \\ u_0 = \frac{(A - 1)(e^{-\tau'} - 1)\zeta - 2\psi_0}{\tau'}, & u_1 = u_0 \end{cases} \quad (4)$$

3. Преобразование S_0^+ переводит ребро L в кривую Γ , лежащую на плоскости $\psi = -\psi_0$:

$$u = \frac{2\psi_0}{1 - \tau' - e^{-\tau'}}, \quad z = \frac{2\psi_0}{(A - 1)(1 + \tau'e^{\tau'} - e^{\tau'})} \quad (0 < \tau' < \infty) \quad (5)$$

Возьмем луч $z = ku$, где k определяется уравнением

$$B \exp \left[\frac{2(A + B)}{V 4B - (A + B)^2} \arctg \frac{[(A - 1)k + 1]V 4B - (A + B)^2}{(A - 1)(A + B)k + A - B} \right] = \quad (6)$$

$$= (A - 1)[(A - 1)k^2 + (2 - A - B)k - 1] \quad (0 < \arctg < \pi)$$

если

$$4B - (A + B)^2 > 0$$

или уравнением

$$B \exp \left[\frac{2(A + B)}{V (A + B)^2 - 4B} \operatorname{ar th} \frac{[(A - 1)k + 1]V (A + B)^2 - 4B}{(A - 1)(A + B)k + A - B} \right] =$$

$$= (A - 1)[(A - 1)k^2 + (2 - A - B)k - 1]$$

если

$$4B - (A + B)^2 < 0$$

Точки $\bar{H}^{(2)}$ разбиваются лучом $z = ku$ на три класса:

1) принадлежащие лучу; преобразование $\bar{E}^-$ не изменяет их расстояние до плоскости $u = 0$;

2) точки, для которых $z < ki$; преобразование $\bar{E}^-$ приближает их к плоскости $u = 0$;

3) точки, для которых $z > ki$; преобразование $\bar{E}^-$ удаляет их от плоскости $u = 0$.

Если $k > 0$, то луч $z = ki$ пересекает кривую Γ (возможна только одна точка пересечения).

Пусть точка пересечения P принадлежит $\bar{H}^{(2)}$ (так всегда будет для достаточно малых k или ψ_0). Из определения k следует, что P будет инвариантной относительно преобразования

$$T^* = \bar{E}^- S_0^- \bar{E}^+ S_0^+$$

Каждую точку $\bar{H}^{(2)}$, взятую на кривой Γ , преобразование T^* переводит в точку, также принадлежащую Γ и расположенную ближе к P .

При итерации преобразования T^* последовательность точек на Γ сходится к точке P . Всякую другую точку $\bar{H}^{(2)}$ преобразование T^* переводит в точку на кривой Γ .

Таким образом, инвариантная точка устойчива, а отрезок покоя неустойчив. Соответствующее устойчивое периодическое движение составляется из кусков фазовых траекторий, принадлежащих пластинкам σ и σ' , и траекторий между плоскостями $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$.

Если $k < 0$, то луч $z = ki$ не пересекает кривую Γ ; тогда преобразование T^* всякую точку $\bar{H}^{(2)}$ приближает к отрезку покоя. При итерации преобразования последовательность точек сходится к концу отрезка покоя.

Отрезок покоя в этом случае устойчив.

Если $k = 0$, то луч $z = ki$ касается кривой Γ . Полагая в (6) и (7) $k = 0$, находим значения A и B , при которых отрезок покоя меняет устойчивость и из отрезка покоя появляется устойчивое периодическое движение (кривая D на фигуре).

4. Количественные характеристики исследуемого периодического движения могут быть легко вычислены. Период $\tau^* = 2(\tau_0 + \tau_1)$, где τ_0 и τ_1 — соответственно время движения между плоскостями $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$ и по пластинкам σ и σ' , можно представить в виде:

$$\tau^* = \frac{2B}{A+B} \ln \frac{(A-1)[(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1]}{B[(1-A)k]^{(A+B)/B}}$$

где k определяется из (6) или (7). τ^* неограниченно возрастает, когда периодическое решение стягивается к отрезку покоя ($k \rightarrow 0$).

5. Точка P пересечения луча $z = ki$ и кривой Γ принадлежит периодическому решению (инвариантна относительно $T^* = \bar{E}^- S_0^- \bar{E}^+ S_0^+$)

пока она лежит в $\bar{H}^{(2)}$. Если P выходит из куска $\bar{H}^{(2)}$, то в состав периодического движения входят куски траекторий, лежащих в цилиндрических поверхностях

$$z = ce^u - 1, \quad z = ce^{-u} + 1$$

Этому периодическому движению отвечает на плоскости $\psi = \psi_0$ точка P' , инвариантная относительно

$$T' = S^- \bar{E}^- S_0^- S^+ \bar{E}^+ S_0^+ \quad \text{или} \quad T'' = E^- S^- \bar{E}^- S_0^- E^+ S^+ \bar{E}^+ S_0^+$$

Кривые D' (см. фигуру), вычисленные из условия, что P лежит на границе $\bar{H}^{(2)}$, дают при фиксированном ψ_0 на плоскости A, B границу периодических решений, не содержащих и содержащих куски траекторий в цилиндрических поверхностях.

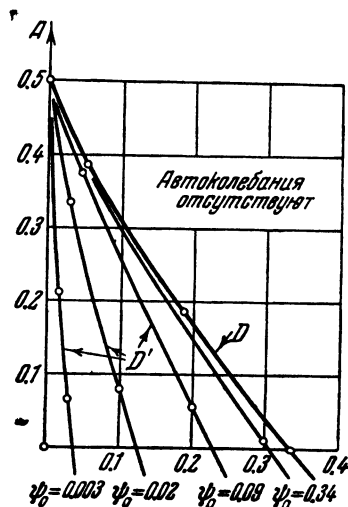
6. Результаты настоящей работы, касающиеся возникновения автоколебаний, обусловленных зоной нечувствительности, представлены на фигуре.

Если $A = M\beta$ и $B = M^2/Na$ достаточно велики, то автоколебаний не будет и будет иметь место *безразличное* (в отношении ψ) *положение равновесия внутри зоны нечувствительности*.

Если уменьшать A и B таким образом, что точка, представляющая систему на плоскости параметров A, B , пересечет кривую D по направлению к началу координат, то в зоне нечувствительности возникнут автоколебания. Кривая D является границей возникновения автоколебаний, не выходящих за пределы зоны нечувствительности. Эта граница не зависит от ψ_0 .

Зададимся теперь ψ_0 . Если при дальнейшем изменении A и B точка на плоскости параметров пересечет кривую D' (соответствующую выбранному ψ_0), то автоколебания начнут выходить за зону нечувствительности. Кривая D' является границей возникновения автоколебаний, выходящих за зону нечувствительности.

Кривая D и семейство кривых D' наглядно показывают роль искусственного демпфирования β в качестве фактора подавления автоколебаний. Однако и при $\beta = 0$ автоколебания могут быть устранены выбором достаточно малого a .



ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. и Баутин Н. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей. — Докл. АН СССР, т. 43, 1944, № 5, стр. 197—201.
2. Котельников В. А. Продольная устойчивость самолета с автопилотом типа АВП-12. М., 1941, 58 стр.
3. Бутенин Н. В. Автоколебания стэнда с автопилотом. — Труды Ленингр. воен.-возд. акад. Кр. Армии, вып. 3, 1943, стр. 191—207.
4. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем. — ПММ, 1943, вып. 2, стр. 97—108.

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ *

Ряд практически интересных систем прямого регулирования, в частности многие системы, регулирующие давление и температуру, обладает следующими характерными особенностями.

При анализе их работы:

- а) нельзя пренебречь наличием между индикатором и регулируемым объектом промежуточного звена, обладающего процессом установления;
- б) нельзя пренебречь твердым (кулоновским) трением в индикаторе, но

- 1) можно пренебречь массой индикатора,
- 2) можно пренебречь вязким трением в индикаторе.

Такой вырожденный случай общей задачи прямого регулирования был рассмотрен В. Шмидтом [1,2] при помощи численного интегрирования уравнения движения. Ниже показывается, что эта нелинейная задача может быть рассмотрена аналитически.

Аналитическое рассмотрение дополняет и уточняет результаты Шмидта в существенном пункте: оно позволяет установить условия возникновения и количественные характеристики автоколебаний, которые возможны в таких устройствах и о которых Шмидт не упоминает.

1. Уравнения движения для рассматриваемого вырожденного случая с учетом обычных упрощений записываются в виде¹:

$$\begin{aligned}
 Q &= -K \text{ для } \frac{d\xi}{dt} > 0 \\
 -a\ddot{\xi} + b\dot{\eta} + Q &= 0, & Q &= K \text{ для } \frac{d\xi}{dt} < 0 \\
 -K &\leq Q \leq K \text{ для } \frac{d\xi}{dt} = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \sigma(\zeta - \eta), \quad \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{a}{b} \frac{1}{T} \xi$$

где ξ — смещение индикатора из состояния равновесия, η — отклонение состояния промежуточного звена от равновесного, ζ — отклонение состоя-

* Совместно с Н. Н. Баутиным. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1945, 46, № 7, с. 304—306. Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 31 V 1944.

¹ См. [2], стр. 100. В обозначениях Шмидта

$$\begin{aligned}
 \xi &= s - s_{11}, & \eta &= z_R - z_{11}, & \zeta &= z_A - z_{11}, & a &= \frac{P_{\max}}{s_{\max} - s_{\min}} \\
 b &= \frac{P_{\max}}{z_{\max} - z_{\min}}, & Q &= R_R
 \end{aligned}$$

ния объекта от равновесного, $a > 0$, $b > 0$ — константы, характеризующие перестановочную силу, $K > 0$ — твердое трение в индикаторе, $\sigma > 0$ — константа, характеризующая быстроту процесса установления в промежуточном звене, $T > 0$ — временная постоянная объекта.

Положим

$$\frac{a\xi}{2K} = x, \quad \frac{b\eta}{2K} = y, \quad \frac{b}{2K}(\zeta - \eta) = z, \quad \sigma t = t', \quad \frac{1}{T_\sigma} = \alpha \quad (\alpha > 0)$$

и будем рассматривать x , y , z как декартовы координаты.

Система (1) получит тогда вид:

$$\frac{dx}{dt'} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt'} = z, \quad \frac{dz}{dt'} = -\alpha x - z \quad (2)$$

где

$$f \equiv 0 \text{ между плоскостями } x - y \pm \frac{1}{2} = 0$$

и

$$f \equiv z \text{ на полуплоскостях}$$

и

$$(H) \quad x - y = \frac{1}{2}, \quad z < 0$$

$$(H') \quad x - y = -\frac{1}{2}, \quad z > 0$$

Мы будем исследовать решения системы (2), определяемые требованием непрерывности $x(t')$, $y(t')$, $z(t')$ в точках разрыва $f(x, y, z)$.

2. В силу (2):

1) трехмерное фазовое пространство заполнено кусками траекторий, лежащими в параллельных плоскостях, $x = \text{const}$;

2) разбиение полуплоскостей H и H' , ограничивающих это фазовое пространство, на траектории состоит либо из кусков траекторий, идущих в устойчивый узел (если $4\alpha - 1 < 0$), либо из кусков спиралей (если $4\alpha - 1 > 0$).

3) отрезок $x = z = 0$, $|y| \leq 1/2$ является отрезком покоя.

Изображающая точка, двигаясь в полуплоскостях H или H' , либо сразу попадает на конец отрезка покоя, либо попадает на полупрямые

$$(L) \quad x - y - \frac{1}{2} = 0, \quad z = 0, \quad x < 0$$

или

$$(L') \quad x - y + \frac{1}{2} = 0, \quad z = 0, \quad x > 0$$

и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую (см. фигуру).

Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (L') на полуплоскость H' (H), а преобразованием E^+ (E^-) переход точки полуплоскости H' (H) на полупрямую L' (L).

Преобразование $T^+ = S^+E^+$ переводит точки полупрямой L в точки полупрямой L' , а преобразование $T = S^+E^+S^-E^-$ переводит L в самое себя.

При $k = -\alpha$ луч $z = kx$ касается кривой Γ в начале координат. Полагая в (3) $k = -\alpha$, находим значение $\alpha = \alpha_0 = 3.04$, при котором отрезок покоя меняет свою устойчивость.

4. Пусть $z = kx$ пересекается с кривой Γ . Из определения k следует, что точка пересечения P (возможна только одна точка пересечения) будет инвариантной относительно преобразования

$$T' = E^+ S^- E^- S^+$$

Всякую точку, взятую на дуге кривой Γ , преобразование T' переводит также в точку, принадлежащую Γ и расположенную ближе к P . При итерации преобразования T' последовательность точек на Γ сходится к точке P . Всякую точку полуплоскости H' , не принадлежащую к точкам Γ , преобразование T' переводит в точку кривой Γ . Таким образом, точка P будет устойчивой инвариантной точкой. Соответствующее устойчивое периодическое движение составляется из кусков фазовых траекторий, лежащих в полуплоскостях H и H' , и кусков траекторий, лежащих между этими плоскостями.

5. Период $\tau^* = 2(\tau_0 + \tau_1)$, где τ_0 и τ_1 означают время пробега по кускам траекторий, принадлежащих периодическому движению, соответственно между полуплоскостями и в полуплоскостях H и H' , можно представить в виде

$$\tau^* = 2 \ln \left\{ \frac{k^2 + k + \alpha}{k + \alpha} \right\}$$

где k находится по формуле (3); τ^* неограниченно возрастает, когда периодическое движение стягивается к отрезку покоя.

6. Процесс регулирования, как показано выше, будет сходиться при всех начальных условиях к состоянию покоя, если $\alpha < 3.04$. Если же $\alpha > 3.04$, то в системе регулирования возникают автоколебания, количественные характеристики которых легко могут быть найдены.

В рассматриваемой системе твердое (кулоновское) трение обуславливает появление неустойчивости и возникновение автоколебаний, так как при $Q \equiv 0$ состояние покоя устойчиво для всех значений α и автоколебания отсутствуют¹.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schmidt W. Gesetze der unmittelbaren Regelung auf allgemeiner Grundlage.— Zeitschrift. d. VDI. Bd. 81, 1937, № 50, S. 1425—1431.
2. Schmidt W. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939, XI, 114 S.

¹ Эти утверждения связаны с принятой нами идеализацией. Если мы предположим, что масса индикатора $m \neq 0$, то при $Q \equiv 0$ состояние равновесия неустойчиво для любых α и m .

О ЗАДАЧЕ ВЫШНЕГРАДСКОГО В ТЕОРИИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ *

Основная задача теории прямого регулирования с учетом вязкого и кулоновского трения была поставлена И. А. Вышнеградским [1] в 1876 г.¹ Мы будем называть эту задачу задачей Вышнеградского. Однако И. А. Вышнеградский решил поставленную им задачу лишь частично, в линейном случае отсутствия кулоновского трения.

Другой частный случай задачи Вышнеградского, когда учитывают только кулоновское трение и не учитывают вязкого трения, рассматривался Лекорню, Мизесом, Жуковским и др. Мы будем называть этот случай задачей Мизеса.

Насколько известно авторам, задача Вышнеградского в своем общем виде до сих пор не была решена, хотя теория очень большого числа регулирующих устройств, в том числе и самых современных, после надлежащей идеализации сводится к задаче Вышнеградского (см., например, [5]).

Недавно нами было дано решение задачи Мизеса путем ее сведения к точечному преобразованию плоскости в самое себя [6]. Этот же метод позволяет дать решение и задачи Вышнеградского, причем как общий ход рассуждений, так и самые выкладки в этом случае сравнительно мало отличаются от тех, которые относятся к задаче Мизеса и которые были опубликованы. Поэтому в настоящей заметке мы ограничимся лишь изложением результатов решения задачи Вышнеградского.

1. Совокупные уравнения движения системы машина—регулятор при обычных упрощающих предположениях (в частности, при предположении, что машина без регулятора не является саморегулируемой системой) и при учете как вязкого, так и кулоновского трения (последнее вносит нелинейность) могут быть записаны (для $d\xi/d\tau \neq 0$) так:

$$\frac{T^2}{4} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\delta\xi + \eta - \frac{T_1}{2} \frac{d\xi}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad T_0 \frac{d\eta}{d\tau} = -\xi \quad (1)$$

где τ — время, ξ — приведенное смещение муфты регулятора, η — приведенное отклонение угловой скорости машины, T — время свободного падения муфты, T_0 — время пуска в ход машины, T_1 — время падения муфты при компенсации вязкого трения, δ — коэффициент неравномерности, ε — коэффициент нечувствительности.

* Совместно с А. Г. Майером. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1945, 47, № 5, с. 345—348. Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 22 XI 1944.

¹ Как известно (см., например, [2—4]), эта работа Вышнеградского сыграла исключительную роль в истории теории регулирования; например, знаменитое неравенство $AB > 1$ (см. ниже), являющееся частным случаем установленных позднее общих условий Рауса—Гурвица, вошло в инженерные расчеты из этой работы.

Учитывая свойства кулоновской силы трения, доопределяем уравнения движения (1) для случая $d\dot{z}/d\tau = 0$ и, вводя новые переменные

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt[3]{T^2 T_0 t}, \quad \xi = \varepsilon \sqrt[3]{\frac{4T_0^2}{T^2}} x, \quad \eta = \varepsilon y \quad (2)$$

получаем систему¹

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = F(x, y, z) \quad (3)$$

где

$$F(x, y, z) = \begin{cases} -Ax + y - Bz - \frac{1}{2}, & \text{если } z > 0 \text{ или если } z = 0, -Ax + y > \frac{1}{2} \\ -Ax + y - Bz + \frac{1}{2}, & \text{если } z < 0 \text{ или если } z = 0, -Ax + y < -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{если } z = 0, -\frac{1}{2} \leq Ax + y \leq +\frac{1}{2} \end{cases}$$

Система (3) и требование непрерывности функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точках разрыва $F(x, y, z)$ определяют подлежащую исследованию динамическую задачу. При этом следует иметь в виду, что классическую теорию регулирования в первую очередь интересует вопрос о характере движения системы машина—регулятор после внезапного изменения нагрузки. Так как координаты x и y отсчитываются от нового стационарного режима, то изменение нагрузки машины непосредственно характеризуется начальным положением изображающей точки в фазовом пространстве.

В случае обычного центробежного регулятора эти начальные условия можно принять в виде²

$$x = x_0, \quad y = Ax_0, \quad z = \frac{dx}{dt} = 0$$

2. Кроме фазового пространства x, y, z , будем рассматривать плоскость³ с декартовыми координатами A, B . Применение теории точечных преобразований поверхностей позволяет при заданных A и B определить качественную структуру разбиения фазового пространства x, y, z на

¹ Безразмерные постоянные

$$A = \delta \sqrt[3]{\frac{4T_0^2}{T^2}}, \quad B = \frac{T_1}{T} \sqrt[3]{\frac{4T_0}{T_1}}$$

фигурирующие в уравнениях (3), носят название главных параметров теории прямого регулирования или параметров Вышнеградского.

² Заметим, что

$$x_0 = \frac{\lambda}{\varepsilon} \sqrt[3]{\frac{T^2}{4T_0^2}}$$

где λ — относительное изменение нагрузки машины. Случай $x_0 > 0$ соответствует внезапному уменьшению нагрузки машины; случай $x_0 < 0$ соответствует внезапному увеличению нагрузки машины. Если бы мы пожелали исследовать задачу об «инерционных» регуляторах, то нам пришлось бы, сохранив уравнение (3), иметь дело с более общими начальными условиями, чем приведенные в тексте.

³ К этой плоскости сводится в рассматриваемой задаче пространство параметров.

траектории и установить нужные для теории регулирования количественные соотношения.

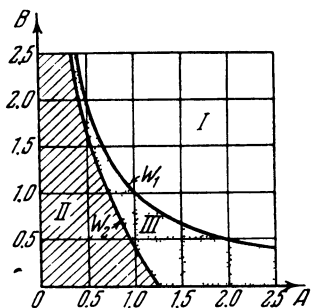
Рассмотрим на плоскости A, B две кривые: кривую W_1 с уравнением $AB=1$, которая носит название гиперболы Вышнеградского, и кривую W_2 , параметрические уравнения которой имеют вид:

$$A = \frac{1 + b^2 - 2ab}{\sqrt[3]{a^2(1+b^2)^2}}, \quad B = \frac{a - 2b}{\sqrt[3]{a(1+b^2)}} \quad (4)$$

где a и b являются функциями вспомогательного параметра θ согласно уравнениям

$$e^{-b\theta} = -\cos \theta + b \sin \theta, \quad e^{-(a+b)\theta} = \cos \theta - (a+b) \sin \theta \quad (5)$$

Кривыми W_1 и W_2 интересующая нас часть плоскости A, B ($A > 0, B \geq 0$) разбивается на три области, такие, что значениям A, B из разных областей соответствуют существенно различные с точки зрения теории регулирования разбиения фазового пространства x, y, z на траектории (фиг. 1)¹.



Фиг. 1

Область абсолютно устойчивых систем (область I), лежащая вне кривой W_1 . В этом случае отрезок покоя² устойчив в малом, а область устойчивости в большом отрезка покоя охватывает все фазовое пространство. Процесс регулирования в этом случае сходится при всяких начальных условиях.

Область абсолютно неустойчивых систем (область II), лежащая между осями координат и кривой W_2 . Отрезок покоя неустойчив в малом. Процесс регулирования в этом случае неограниченно расходится при всяких начальных условиях, лежащих вне отрезка покоя.

Область условно устойчивых систем (область III), лежащая между кривыми W_1 и W_2 . В этом случае хотя отрезок покоя и устойчив в малом, но область устойчивости в большом отрезка покоя, ограниченная сепаратрисными поверхностями неустойчивого периодического движения, охватывает только часть фазового пространства. При одних начальных условиях процесс регулирования расходится, при других — сходится.

3. В случае условно устойчивой системы нас интересует допустимая величина разгрузки машины, т. е. нас интересует отыскание наибольших значений $|x_0|$, при которых процесс регулирования еще сходится к отрезку покоя. Для наглядного представления имеющихся здесь зависимостей

¹ В задаче Мизеса плоскость AB вырождается в ось A , которую кривая W_1 не пересекает, а кривая W_2 пересекает в точке $A = 1.2531$ (ср. [6]).

² Отрезком покоя будем называть отрезок $x = z = 0, -1/2 \leq y \leq +1/2$, каждая точка которого является состоянием равновесия для системы (3).

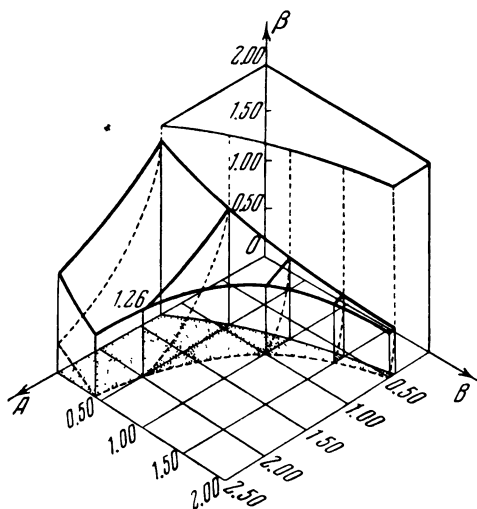
используем построение Мизеса, откладывая по оси абсцисс параметр A , по оси ординат — параметр B , а по оси аппликат — величину $\beta = 1/|x_0|$, где $|x_0|$ характеризует границу тех начальных значений, при которых процесс регулирования еще сходится.

Нетрудно дать нижнюю оценку (с существенной перестраховкой) значений β , воспользовавшись условием Жуковского. По Жуковскому^[7], при технических расчетах центральных регуляторов следует требовать, чтобы начальные ускорения, начиная со второго перехода, были равны нулю. Можно показать, что при выполнении этих требований процесс регулирования в задаче Вышнеградского всегда сходится. Значения β , допустимые по Жуковскому, легко могут быть найдены по уравнению

$$\beta = \sqrt[3]{a(1+b^2)e^{b\theta}} |\sin \theta| = \beta(A, B) \quad (6)$$

так как θ определяется вторым из соотношений (5), b и a связаны

с A, B соотношениями (4). Эти значения β вычислены для различных A при $B = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ и нанесены в масштабе на пространственную диаграмму жирными сплошными линиями (фиг. 2). На этой же пространственной диаграмме пунктирными линиями отмечены истинные значения β . Эти истинные значения β , для которых аналитическое выражение найти затруднительно, определены приближенно, при помощи графического приема, близкого к приему Мизеса.



Фиг. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Wischnegradski I. Sur la théorie générale des régulateurs. C. R. Acad. Sci., Paris, vol. 83, 1876, p. 318—321.
2. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия. — Известия СПб. практ. технол. ин-та, т. 1, 1877, стр. 21—62.
3. Кирпичев В. Иван Алексеевич Вышнеградский, как профессор и ученый. — Вестник Об-ва технологов, 1895, № 6, стр. 95—100.
4. Hort W. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenreglung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Reglungsvorgänge. — Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Bd. 50, 1904, S. 233—279.
5. Вознесенский И. Н. О принципах и схемах автоматического регулирования. — ПММ, т. 6, 1942, вып. 1, стр. 102—110.
6. Schmidt W. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939, XI, 114 S.
7. Андронов А. и Майер А. Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей. — Докл. АН СССР, т. 43, 1944, № 2, стр. 58—62.
8. Жуковский Н. Е. Теория регулирования хода машин. М., 1909, 142 стр.

ЗАДАЧА ВЫШНЕГРАДСКОГО В ТЕОРИИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. I*

ТЕОРИЯ РЕГУЛЯТОРА ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВСКОГО И ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В работе рассматривается, при обычных упрощениях, так называемая основная задача теории прямого регулирования с учетом как вязкого так и кулоновского трения. Путем использования второй методы Ляпунова и теории точечных преобразований поверхности исследуется качественная структура разбиения соответствующего фазового пространства на траектории, а также находятся некоторые, интересующие практику, количественные характеристики этого фазового пространства.

Результаты исследования сведены в расчетные диаграммы, позволяющие с минимумом вычислений решать вопросы сходимости или расходимости процессов регулирования.

Введение

Основная задача теории прямого регулирования с учетом вязкого и кулоновского трения была поставлена И. А. Вышнеградским в знаменитой работе «О регуляторах прямого действия» в 1876—1877 гг. [1,2], и в той же работе была решена для линейного случая отсутствия кулоновского трения. Эта работа Вышнеградского впервые дала в линейном приближении отчетливую картину динамического взаимодействия машины и регулятора Уатта и выяснила влияние на процесс регулирования основных конструктивных данных системы машина — регулятор (коэффициента неравномерности, момента инерции маховика, вязкого трения в подвижных частях регулятора, приведенной массы регулятора).

Авторы более ранних работ, посвященных регуляторам, или рассматривали задачу квазистатически, т. е. заведомо неправильно, или, став на динамическую точку зрения, не умели разумно схематизировать задачу, т. е. не умели перейти к таким приближенным уравнениям движения, которые, с одной стороны, были бы доступны для математического исследования, а с другой стороны, в которых отражались бы основные факторы, характеризующие динамическое взаимодействие машины и регулятора. Наиболее важная из этих предшествующих работ — работа Максвелла 1868 г. «О регуляторах» [3], замечательная во многих отношениях, и прежде всего последовательной динамической точкой зрения,— все

* Совместно с А. Г. Майером. Опубликовано в журн. «Автоматика и телемеханика», 1947, 8, № 5, с. 314—334.

же не содержит решения задачи о движении машины, снабженной регулятором Уатта. Максвелл, далекий от техники, даже отказал механизму Уатта в названии «регулятор», причислив его к «модераторам» — устройствам, умеряющим изменчивость числа оборотов при переменности нагрузки, и сосредоточил свое внимание на тех, сравнительно мало распространенных механизмах, которые по идее конструкторов — современников Максвелла должны были точно поддерживать постоянство числа оборотов.

Отсюда понятна та совершенно исключительная роль, которую сыграла работа Вышнеградского в теории и практике регулирования: в этой работе были впервые даны научные основы конструирования регулятора Уатта и других эквивалентных в динамическом отношении регуляторов прямого действия¹.

Однако пренебрежение кулоновским трением при исследовании сходимости процесса регулирования, которое позволило Вышнеградскому получить замечательные, практически весьма важные результаты совсем простыми математическими средствами и тем самым повернуть основной поток работ по регулированию в линейное русло, не осталось безнаказанным. И вопрос о влиянии кулоновского трения на процесс прямого регулирования, лишь поставленный, но не получивший решения в работе Вышнеградского, еще в конце прошлого столетия сделался предметом ожесточенной дискуссии. Эта дискуссия возникла вокруг тезиса Вышнеградского о необходимости снабжать регуляторы так называемыми катараками, т. е. специальными приспособлениями, создающими вязкое трение. Происхождение этого тезиса таково. Одним из основных результатов работы Вышнеградского было установление того факта, что система машина — регулятор обладает способностью самораскачивания, которое может быть устранено достаточно большим вязким трением в регуляторе. Вышнеградский понимал, что кулоновское трение, влияния которого он не учитывал в своей теории, также может подавить самораскачивание системы машина — регулятор и обеспечить устойчивую работу регулирующего устройства. На этот счет в его работе, и особенно в заметке в «Comptes Rendus», есть совершенно отчетливые высказывания. Но Вышнеградский считал, что кулоновское трение, вызывая застой и уменьшая чувствительность регулятора, является вредным фактором, который следует всячески уменьшать и который недопустимо использовать для борьбы с самораскачиванием. Отсюда его тезис о необходимости катарака.

Дискуссия, о которой идет речь, развернулась уже после того, как сам Вышнеградский сошел с научной сцены. Ряд авторов, участвовавших в дискуссии, неправильно приписывал Вышнеградскому утверждение, что кулоновское трение не может обеспечить сходимости процесса

¹ Анализ роли работы И. А. Вышнеградского в развитии теории регулирования машин дан в подготовляемой к печати статье: А. А. Андронов и И. Н. Вознесенский. А. И. Вышнеградский и автоматическое регулирование машин.

регулирования, и, обвиняя Вышнеградского в ошибке при дифференцировании, доказывал, что достаточно большое кулоновское трение сообщает устойчивость системе машина — регулятор. Другие авторы, правильно понимая Вышнеградского, все же возражали против его тезиса о необходимости катаракта, так как считали, что кулоновское трение, обеспечивая сходимость процесса регулирования, во многих случаях порождает лишь такую нечувствительность регулятора, которая вполне терпима на практике. Таким образом, вопрос о влиянии кулоновского трения на процесс прямого регулирования получил большую актуальность, и в 1894—1902 гг. появились ряд работ (Бегтрэп, 1894^[4], Толле, 1895^[5], Лекорню, 1896^[6], Стодола, 1899^[7], Мизес, 1908^[8,9], Жуковский, 1909^[10]), рассматривавших тот частный, но уже *нелинейный* случай задачи Вышнеградского, когда нет вязкого трения, а есть одно кулоновское трение. Эти работы, в особенности работы Мизеса, более или менее выяснили вопрос о влиянии кулоновского трения на процесс прямого регулирования, хотя даже этот частный случай задачи, поставленной Вышнеградским, все же не получил вполне удовлетворительного решения. Мизес прямо говорит, что его графический прием, при помощи которого он получает кривые для расчета регуляторов, обладающих кулоновским трением, не является по-настоящему математически обоснованным¹. Самые результаты, полученные в этих работах, также подвергались некоторому сомнению. Например, высказывались недоумения по поводу динамического происхождения вертикальных участков на кривых Мизеса, отделяющих области сходящихся от областей расходящихся процессов регулирования². Высказывались сомнения и относительно точности числовых данных, приведенных в этих работах. Этими моментами, а также желанием расширить область табулированных движений, повидимому, следует объяснить появление уже в сравнительно недавнее время новой серии работ, посвященных тому же частному случаю (Рерих, 1924^[11], Николаи, 1928^[12], Пешль, 1936^[13], Шмидт, 1939^[14]). Среди этих работ по количеству затраченного труда и по надежности полученного цифрового материала выделяется работа Рериха. Однако Рерих не пытается охватить процесс регулирования в целом, подчитывая для ряда значений параметров поведение муфты регулятора при нескольких размахах.

В настоящей работе для систем регулирования, подчиняющихся уравнениям Вышнеградского³, во-первых, выяснен характер движений,

¹ «Die vollständige mathematische Erledigung des Problems würde noch den Beweis dieses Satzes, sowie der Existenz der Grenzlinie (es könnte auch eine Grenzschielte von endlicher Breite geben) fordern». См. ^[9], примечание к стр. 280.

² «...die Bedeutung und Entstehung der lotrecht eingezeichneten Stücke der Grenzkurven wie überhaupt der unendlich grossen Werte für die Reibung schwer einzusehen». См. ^[13], стр. 97.

³ Следует отметить, что к задаче Вышнеградского, как в ее полном виде, так и в том ее частном виде, который соответствует отсутствию вязкого трения, с достаточным приближением сводится теория весьма большого числа регулирующих устройств, в том числе самых современных (см., например, ^[14]).

возникающих при различных начальных условиях, т. е. выяснена качественная структура разбиения фазового пространства на траектории, и, во-вторых, даны диаграммы, позволяющие быстро решать вопрос о сходимости или расходимости процессов регулирования при заданных параметрах и заданном изменении нагрузки. Насколько известно авторам, рассмотрение задачи Вышнеградского, как задачи аналитической динамики или как задачи теории нелинейных колебаний, здесь проводится впервые.

Такое рассмотрение не было удовлетворительно проведено даже для частного случая отсутствия вязкого трения.

Настоящее исследование в вопросах, связанных с выяснением качественной картины разбиения фазового пространства на траектории, в значительной мере опирается на *теорию точечных преобразований*, возникновение которой связано с работами Пуанкаре, Брауэра, Биркгофа и которой, повидимому, суждено сыграть видную роль не только в небесной, но и в земной механике, в частности в теории автоматического регулирования, а также на некоторое видоизменение, связанное с рассматриваемым разрывным случаем, так называемой *второй метод Ляпунова*, позволяющей во многих задачах решать вопросы устойчивости в большом с минимумом выкладок. Что же касается расчетных диаграмм, приводимых в настоящей работе, то они представляют собой обобщение соответствующих диаграмм Вышнеградского и Мизеса. Для части кривых, нанесенных на эти диаграммы, удалось получить сравнительно простые аналитические выражения. Другие кривые построены приближенно, при помощи графического приема, близкого к приему Мизеса.

Краткое изложение результатов, содержащихся в настоящей работе, опубликовано в виде двух заметок в Докл. АН СССР [15, 16].

§ 1. Уравнения движения и постановка задачи

Будем рассматривать машину (например, турбину), снабженную обычным центробежным регулятором, в предположении, что существует жесткая связь между смещением муфты регулятора и открытием заслонки, регулирующей доступ пара, и в предположении, что перемещение этой заслонки совершается самими грузами регулятора без привлечения посторонней энергии.

Уравнения движения такой динамической системы (машины, снабженной регулятором прямого действия) при обычных упрощениях¹,

¹ Эти упрощения, внесенные И. А. Вышнеградским, сводятся: 1) к пренебрежению всеми нелинейностями, за исключением той, которая обуславливается наличием кулоновского трения; 2) к пренебрежению саморегулированием машины; 3) к пренебрежению гироскопическим членом в уравнении вращения главного вала; 4) к предположению, что нагрузка машины изменяется внезапно и что уравнения составляются для исследования поведения системы после внезапного изменения нагрузки, причем как смещение муфты, так и изменение угловой скорости отсчитывается от их значений, соответствующих новому стационарному режиму.

в обычных инженерных обозначениях и при учете вязкого и кулоновского трения (последнее вносит нелинейность) могут быть написаны для $d\xi/d\tau \neq 0$ в виде¹:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= -\frac{2E\delta}{a}\xi + \frac{2E}{\omega_m}\eta - \rho \frac{d\xi}{d\tau} \mp K \\ J \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{M}{a}\xi \end{aligned} \quad (A)$$

где τ — время, ξ — смещение муфты, отсчитываемое от нового положения равновесия, η — отклонение угловой скорости от ее нового постоянного значения, m — приведенная к координате муфты масса регулятора, a — ход муфты регулятора, E — приведенная сила или так называемая «энергия» регулятора, ρ — приведенный к движению муфты коэффициент вязкого трения, K — приведенная к движению муфты абсолютная величина силы кулоновского (твердого) трения, ω_m — средняя угловая скорость машины, $\delta = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_m$ — так называемый коэффициент неравномерности регулятора, причем ω_2 — угловая скорость, соответствующая самому высокому положению муфты, а ω_1 — угловая скорость, соответствующая самому низкому положению муфты, J — приведенный момент инерции машины, M — средний вращающий момент машины.

Начальные условия, как обычно, могут быть заданы в виде:

$$\xi_0 = -\lambda a, \quad \left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_0 = 0, \quad \eta_0 = -\omega_m \delta \lambda \quad (A')$$

где λ (для случая разгрузки машины $0 < \lambda < 1$) характеризует относительно изменение нагрузки машины, т. е. отношение величины внешнего изменения нагрузки к величине полной нагрузки.

Отдельные члены правых частей уравнений (A) имеют следующий механический смысл: $(-2E\delta/a)\xi$ — это так называемая перестановочная сила из-за неправильной, т. е. не соответствующей стационарному режиму, позиции муфты регулятора $(+2E/\omega_m)\eta$ — так называемая перестановочная сила из-за неправильного значения угловой скорости машины; $-\rho d\xi/d\tau$ — приведенная к движению муфты сила вязкого трения; $\pm K$ — приведенная к движению муфты сила кулоновского трения; $(-M/a)\xi$ — так называемый избыточный момент, действующий на главный вал машины в силу перемещения муфты.

Введем теперь безразмерные координаты

$$\xi_1 = \frac{\xi}{a}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\omega_m}$$

и новые параметры

$$T_a = \frac{Ia}{M}, \quad T_r = \sqrt{\frac{am}{2E}}, \quad T_k = \frac{\rho a}{2E}$$

¹ См., например, [13], [17], [18]. Выбрав надлежащим образом обобщенные силы, можно записать уравнения (A) в виде лагранжевых уравнений второго рода.

имеющие размерность времени: T_a — так называемое время пуска в ход машины, T_r — так называемая половина времени свободного падения муфты, T_k — так называемая половина времени, характеризующего катракт (вязкое трение), и безразмерный параметр $\varepsilon = K/E$, который носит название коэффициента нечувствительности регулятора. Тогда система (A) примет вид:

$$\begin{aligned} T_r^2 \frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + T_k \frac{d\xi_1}{d\tau} + \delta \xi_1 &= \eta_1 + \frac{\varepsilon}{2} \\ T_a \frac{d\eta_1}{d\tau} &= -\xi_1 \end{aligned} \quad (B)$$

а начальные условия (A') примут вид:

$$\xi_{10} = -\lambda, \quad \left(\frac{d\xi_1}{d\tau} \right)_0 = 0, \quad \eta_{10} = -\delta\lambda \quad (B')$$

С точки зрения теории колебаний мы имеем здесь дело со своеобразной колебательной системой, в которой обычный гармонический осциллятор, обладающий и вязким и кулоновским трением, связан с простейшим ротатором таким образом, что смещение осциллятора влияет на доступ посторонней энергии во вращательную степень свободы, а отклонение угловой скорости ротатора от равновесной вызывает силы, действующие на осциллятор¹.

Система (B) содержит пять параметров T_a , T_r , T_k , δ , ε . Выполнив замену

$$\xi_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{T_a^2}{T_r^2}} x, \quad \eta_1 = \varepsilon y, \quad \tau = \sqrt[3]{T_r^2 T_a} t$$

перейдем к системе (C), содержащей лишь два независимых безразмерных параметра

$$A = \delta \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}}, \quad B = \frac{T_k}{T_r} \sqrt[3]{\frac{T_a}{T_r}}$$

Получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Ax = y + \frac{1}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad (C)$$

Отметим, что параметры A и B , которые носят название главных параметров теории прямого регулирования или параметров Вышнеград-

¹ Следует иметь в виду, что при составлении второго из уравнений (A) мы пренебрегли гироскопическим членом, взаимным с членом $(+2E/\omega_m)\eta$ в первом уравнении, и членом, характеризующим самовывравнивание машины. Если бы мы учли эти члены, но зачеркнули член $(-M/a)\xi$ во втором уравнении, то мы получили бы элементарную диссипативную гироскопически связанную систему осциллятор—ротатор. Наличие члена $(-M/a)\xi$ в правой части второго из уравнений (A) создает в нашей системе возможность (для некоторой области значений параметров) возникновения неустойчивости.

ского, не содержат величин, характеризующих кулоновское трение. Это значит, что в выбранных нами переменных разбиение фазового пространства на траектории не зависит от величины силы кулоновского трения. Но это отнюдь не значит, что характер движений, возникающих при тех или иных изменениях нагрузки, не зависит от величины кулоновского трения, так как изменение нагрузки машины в нашей задаче непосредственно характеризуется начальным положением изображающей точки в фазовом пространстве, а начальные условия для системы (С) связаны с величиной λ , характеризующей изменение нагрузки, соотношениями

$$x_0 = -\frac{\lambda}{\epsilon} \sqrt[3]{\frac{T_r^2}{T_a^2}}, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{\delta}{\epsilon} \lambda \quad (C')$$

в которые входит коэффициент нечувствительности ϵ . Если, учитывая свойства кулоновской силы трения, доопределить систему уравнений (С) для случая $dx/dt = 0$ и записать ее в виде трех уравнений первого порядка, то придем к системе

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = F(x, y, z) \quad (D)$$

где

$$F(x, y, z) \equiv \begin{cases} -Ax + y - Bz - \frac{1}{2}, & \text{если } z > 0, \text{ или если } z = 0 \text{ и } -Ax + y > \frac{1}{2} \\ -Ax + y - Bz + \frac{1}{2}, & \text{если } z < 0, \text{ или если } z = 0 \text{ и } -Ax + y < -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{если } -\frac{1}{2} \leq -Ax + y \leq +\frac{1}{2}, z = 0 \end{cases}$$

Система (D) совместно с требованием непрерывности функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в точках разрыва $F(x, y, z)$ определяют подлежащую исследованию динамическую проблему.

В случае рассматриваемого нами обычного центробежного регулятора начальные условия, в согласии с (С'), можно принять в виде¹:

$$x = x_0, \quad y = Ax_0, \quad z = \frac{dx}{dt} = 0 \quad (D')$$

По отношению к динамической проблеме (D) настоящая работа содержит: 1) исследование качественной структуры разбиения фазового пространства на траектории при различных значениях параметров A и B ; 2) количественное исследование при различных значениях параметров A и B области устойчивости в большом отрезка покоя² $x = z = 0$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq +\frac{1}{2}$ применительно к начальным условиям (D').

¹ Для некоторых других устройств автоматического регулирования, в частности для так называемых «инерционных» регуляторов, приходится иметь дело с более общими начальными условиями.

² Каждая точка этого отрезка ($x = z = 0$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq +\frac{1}{2}$) является состоянием равновесия для системы (D).

§ 2. Сводка результатов, относящихся к линейному случаю

Для упрощения дальнейшего изложения дадим краткую сводку некоторых результатов, относящихся к случаю отсутствия кулоновского трения. Полагая в системе (B) $\varepsilon = 0$ и совершая замены

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{T_a^2}{T_r^2}} x, \quad \eta = y, \quad \tau = \sqrt[3]{T_r^2 T_a} t$$

получаем линейную систему:

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad \frac{dz}{dt} = -Ax + y - Bz \quad (E)$$

с теми же параметрами A и B , как и в случае системы (D). Единственное состояние равновесия системы (E) — начало координат.

Характеристическое уравнение системы (E) имеет вид:

$$r^3 + Br^2 + Ar + 1 = 0 \quad (1)$$

Корни уравнения (1) будут отрицательными или будут иметь отрицательные действительные части, если $AB > 1$. Если же $AB < 1$, то среди корней будут корни с положительными действительными частями.

Рассмотрим пространство параметров системы (E), откладывая по прямоугольным осям параметры $A \geq 0$ и $B \geq 0$ (фиг. 1, а). Тогда кривая W_1 с уравнением $AB = 1$ (так называемая гипербола Вышнеградского) отделит область значений A, B , соответствующих устойчивости (область $U: AB > 1$), от области значений A, B , соответствующих неустойчивости (область $V: AB < 1$). В дальнейшем нас будет интересовать более детально случай $AB < 1$. В этом случае действительный корень уравнения (1)₁ отрицателен, а два комплексных сопряженных корня имеют положительные действительные части, т. е.

$$r_1 = s, \quad r_2 = p + iq, \quad r_3 = p - iq \quad (s < 0, p > 0, q > 0) \quad (2)$$

Полагая

$$\frac{s}{q} = -a \quad (a > 0), \quad \frac{p}{q} = b \quad (b > 0)$$

мы можем выразить в области V и корни уравнения (1) и параметры A и B через эти новые, в ряде отношений весьма удобные, параметры a, b :

$$p = \frac{b}{\sqrt[3]{a(1+b^2)}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{a(1+b^2)}}, \quad s = -\frac{a}{\sqrt[3]{a(1+b^2)}} \quad (3)$$

$$A = \frac{1+b^2-2ab}{\sqrt[3]{a^2(1+b^2)^2}}, \quad B = \frac{a-2b}{\sqrt[3]{a(1+b^2)}} \quad (4)$$

Условия

$$A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad AB < 1$$

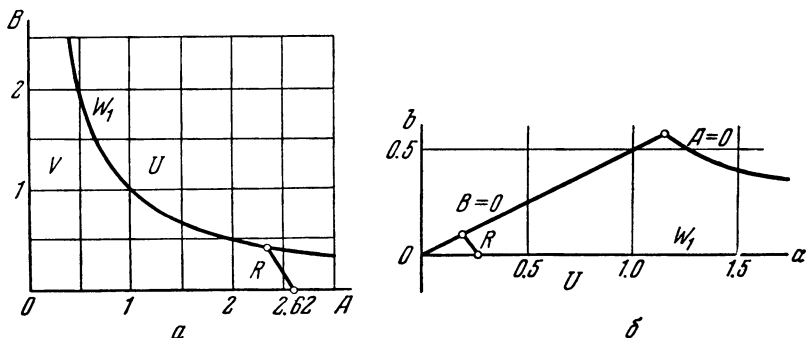
переходят соответственно в условия

$$1 + b^2 - 2ab \geq 0, \quad a \geq 2b, \quad b > 0.$$

При этом гипербола $AB = 1$ на плоскости A, B переходит в прямую $b = 0$ (ось a) на плоскости a, b (фиг. 1, б).

Сформулируем, наконец, некоторые свойства траекторий системы (Е), которыми нам в дальнейшем придется пользоваться.

1. Траектории системы (Е), пересекающие плоскость $z = 0$, переходят с ростом t от отрицательных значений z к положительным (проходят «снизу вверх») в полуплоскости $y > Ax$ и, наоборот («сверху вниз»), — в полуплоскости $y < Ax$. В точках прямой $y = Ax$ траектории касаются



Фиг. 1

плоскости $z = 0$, причем вблизи точки касания при $x > 0$ они остаются под плоскостью $z = 0$, а при $x < 0$ — над ней. Эти свойства траекторий непосредственно вытекают из уравнений (Е).

2. Если значения параметров системы (Е) принадлежат к области V , то изображающая точка, если она не движется по одной из двух исключительных траекторий, обязательно пересекает плоскость $z = 0$.

В самом деле, общее решение системы (Е) может быть записано в виде:

$$x = k_1 C_1 e^{st} + m_1 C_2 e^{pt} \cos qt + l_1 C_3 e^{pt} \sin qt$$

$$y = k_2 C_1 e^{st} + m_2 C_2 e^{pt} \cos qt + l_2 C_3 e^{pt} \sin qt$$

$$z = C_1 e^{st} + C_2 e^{pt} \cos qt + C_3 e^{pt} \sin qt$$

где C_1, C_2, C_3 — константы интегрирования, а $k_1, k_2, m_1, m_2, l_1, l_2$ — некоторые постоянные, не зависящие от начальных условий и определяемые системой (Е).

Если значения параметров A, B принадлежат к области V , то $s < 0$ и $p > 0$. Поэтому если только $C_2^2 + C_3^2 \neq 0$, то z меняет знак и притом бесчисленное множество раз при $t \rightarrow +\infty$. Если же $C_2 = C_3 = 0$, то z при всех значениях t сохраняет один и тот же знак, согласно знаку C_1 . Давая C_1 разные значения, мы получаем одну и ту же траекторию для всех $C_1 > 0$ и другую траекторию для всех $C_1 < 0$.

Пренебрегая этими двумя исключительными траекториями, мы при разборе случая $AB < 1$ можем считать, что начальная точка (x_0, y_0, z_0)

при $t = 0$ лежит на плоскости x, y , т. е. что $z_0 = 0$. Следует отметить, что в случае $AB > 1$ такое утверждение не всегда справедливо. Если все три корня уравнения (1) действительны и отрицательны, то траектории, исключительные в только что указанном смысле, образуют трехмерный континуум.

Так как система (D) содержит те же параметры A, B , что и система (E), то мы можем сохранить при анализе системы (D) то же самое пространство коэффициентов A, B . Однако структура этого пространства коэффициентов будет теперь существенно иная: область $U (AB > 1)$, как мы увидим в следующем параграфе, опять будет областью устойчивости, область же V для системы (D) нам придется разбить на две части: область V_1 , так называемую область условной устойчивости, и область V_2 , так называемую область абсолютной неустойчивости (см. § 5 и 6).

§ 3. Область абсолютной устойчивости $U (AB > 1)$

В случае линейной системы (E) при условии $AB > 1$ все три корня характеристического уравнения (1) имеют отрицательные действительные части, и область притяжения состояния равновесия $x = y = z = 0$ охватывает все фазовое пространство. Покажем, что при $AB > 1$ твердое трение не нарушает устойчивости и что в этом случае область притяжения отрезка покоя системы (D) также охватывает все фазовое пространство¹. Или, иначе, докажем теорему: *если $AB > 1$, то в системе (D) изображающая точка с ростом t при любых начальных условиях неограниченно приближается к отрезку покоя $x = z = 0$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq +\frac{1}{2}$* . Доказательство этой теоремы основывается на рассмотрении функции Ляпунова с некоторым видоизменением ее применительно к рассматриваемому разрывному случаю.

Рассмотрим предварительно семейство трехосных эллипсоидов:

$$V(x, y, z) \equiv [-1 + \alpha(B + A^2)]x^2 + \alpha y^2 + (A\alpha - B)z^2 - 2A\alpha xy + + 2(A + \alpha)xz - 2yz = C \quad (5)$$

где α — положительная постоянная, большая, чем $(A + B^2)/(AB - 1)$ [например, можно положить $\alpha = 1 + (A + B^2)/(AB - 1)$]. При соблюдении указанного условия поверхности (5) действительно представляют собой эллипсоиды, что проверяется без труда на основании обычных критериев.

Легко установить следующие свойства этого семейства.

1. Эллипсы $V(x, y, 0) = C$ имеют прямую $y = Ax$ диаметром, сопряженным хордам, параллельным оси y .

Отсюда следует, что для любой точки $(x_0, y_0, 0)$ имеет место неравенство

$$V(x_0, y_0, 0) > V(x_0, Ax_0, 0) \quad (6)$$

¹ Легко указать задачи из области теории регулирования, где наличие твердого трения порождает неустойчивость.

2. При движении изображающей точки по траектории линейной системы (Е) имеет место соотношение

$$\frac{dV}{dt} = -2(Ax - y)^2 - 2[\alpha(AB - 1) - B^2 - A]z^2 \leq 0 \quad (7)$$

Отсюда следует, что если изображающая точка в какой-либо момент $t = t_0$ находилась на эллипсоиде $V = C_0$, то при $t = t_1 > t_0$ она попадет на эллипсоид $V = C_1$, где $C_1 < C_0$. Таким образом, семейство (5) вновь обнаруживает, что для системы (Е) при условии $AB > 1$ область притяжения состояния равновесия $(0, 0, 0)$ является все пространство.

Перейдем теперь к системе (D). Траектории системы (D) можно получить из траекторий системы (Е) следующим геометрическим построением.

а) Если для точек рассматриваемой части траектории системы (D) $z > 0$ или $z = 0$, $-Ax + y - \frac{1}{2} > 0$, или, наконец, $z = 0$, $-Ax + y - \frac{1}{2} = 0$, $x < 0$, то эту часть траектории системы (D) можно получить из соответствующей части траектории (Е) сдвигом последней на $+\frac{1}{2}$ в направлении оси y . Поэтому для исследования поведения таких частей траекторий системы (D) можно использовать верхние половины эллипсоидов (5), сдвинув их также на $+\frac{1}{2}$ в направлении оси y . Это семейство сдвинутых верхних половин эллипсоидов (5) будем обозначать так:

$$V_{+1/2}(x, y, z) = C \quad (5')$$

и вместо (6) теперь будем иметь:

$$V_{+1/2}(x_0, y_0, 0) > V_{+1/2}(x_0, Ax_0 + \frac{1}{2}, 0) \quad (6')$$

б) Если для точек рассматриваемой части траектории системы (D) имеем $z < 0$ или $z = 0$, $-Ax + y - \frac{1}{2} < 0$, или, наконец, $z = 0$, $-Ax + y + \frac{1}{2} = 0$, $x > 0$, то эту часть траектории системы (D) можно получить из соответствующей части траектории (Е) сдвигом последней на $-\frac{1}{2}$ в направлении оси y . Поэтому для исследования поведения таких частей траектории системы (D) можно использовать нижние половины эллипсоидов (5), сдвинув их на $-\frac{1}{2}$ в направлении оси y . Это семейство сдвинутых нижних половин эллипсоидов (5) будем обозначать так:

$$V_{-1/2}(x, y, z) = \bar{C} \quad (5'')$$

причем очевидно, что

$$V_{-1/2}(x_0, y_0, 0) = V_{+1/2}(x_0, y_0 + 1, 0) \quad (8)$$

в) Наконец, если для точек рассматриваемой части траектории (D) имеем $z = 0$, $-\frac{1}{2} < -Ax + y < +\frac{1}{2}$, или $z = 0$, $-Ax + y + \frac{1}{2} = 0$, $x < 0$, или $z = 0$, $-Ax + y - \frac{1}{2} = 0$, $x > 0$, то эта часть траектории системы (D) есть отрезок прямой, параллельной оси y .

Изображающая точка движется вдоль этого отрезка в сторону уменьшения y при $x > 0$ и в сторону увеличения y при $x < 0$, пока не попадет либо на полупрямую $-Ax + y + \frac{1}{2} = 0$, $z = 0$, $x > 0$, либо на полупрямую

— $Ax + y - 1/2 = 0$, $z = 0$, $x < 0$. Дальнейшее движение совершается согласно случаю (а) при $x < 0$ и случаю (б) при $x > 0$. Эллипсы $V_{+1/2}(x, y, 0) = C$, эллипсы $V_{-1/2}(x, y, 0) = C$ и движение по отрезкам, параллельным оси y , показаны на фиг. 2.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Предварительно заметим, что уравнения (D) не меняются от замены x, y, z соответственно на $-x, -y, -z$.

Пусть начальное положение изображающей точки (при $t = t_0$) есть x_0, y_0, z_0 . В силу только что сказанного мы можем считать без ограничения общности, что $z_0 \geq 0$. Если $z \neq 0$ при $t_0 < t < +\infty$, мы будем иметь, с точностью до сдвига на величину $\frac{1}{2}$ по оси y , то же движение, что и для линейного случая. В силу (7) в этом случае изображающая точка неограниченно приближается к $(0, \pm \frac{1}{2}, 0)$ (знак $+$, если $z_0 > 0$, знак $-$, если $z_0 < 0$).

Чтобы доказать нашу теорему, нам остается лишь доказать, что если изображающая точка дважды попадает на плоскость $z = 0$, то она после второго прихода на эту плоскость начинает свое движение в пространстве на эллипсоиде меньшего номера, чем после первого прихода на эту плоскость.

Пусть в первый раз изображающая точка попала на плоскость $z = 0$ в точку $x_0, y_0, 0$. Без ограничения общности можно считать, что она начнет дальше двигаться в верхнем полупространстве и, следовательно, с эллипсоида $V_{+1/2}(x_0, y_0, 0) = C_0$. При этом движении она в силу (7) будет переходить на эллипсоиды $V_{+1/2}(x, y, z) = C$, где $C < C_0$ и C уменьшается с ростом t . Поэтому если изображающая точка при $t = t_1$ попадает на плоскость $z = 0$ в точку $x_1, y_1, 0$, то

$$C_1 = V_{+1/2}(x_1, y_1, 0) < C_0$$

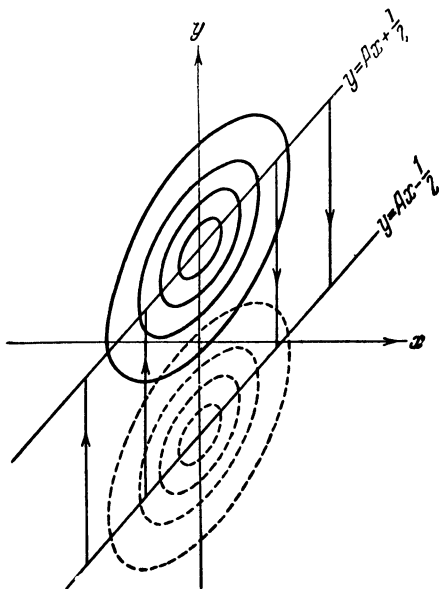
В силу системы (D) для x_1, y_1 имеем неравенство [ибо $(\frac{dz}{dt})_{t=t_1} \leq 0$]

$$-Ax_1 + y_1 - \frac{1}{2} \leq 0$$

Далее возможны четыре случая:

I. $x_1 = 0$, $-\frac{1}{2} \leq y_1 \leq \frac{1}{2}$. Тогда движение прекратится и изображающая точка в конечное время достигнет отрезка покоя.

II. $x_1 > 0$, $y_1 \leq Ax_1 - \frac{1}{2}$ или $x_1 < 0$, $y_1 < Ax_1 - \frac{1}{2}$. Тогда в силу системы (D) изображающая точка должна продолжать свое движение под



Фиг. 2

плоскостью $z = 0$, и, следовательно, вместо семейства $V_{+1/2} = C$ надо теперь брать семейство $V_{-1/2} = \bar{C}$.

В силу (8) и (6') имеем

$$\bar{C}_1 = V_{-1/2}(x_1, y_1, 0) = V_{+1/2}(x_1, y_1 + 1, 0) < V_{+1/2}(x_1, y_1, 0) = C_1 < C_0$$

III. $x_1 > 0$, $Ax_1 - \frac{1}{2} < y_1 \leq Ax_1 + \frac{1}{2}$. Тогда изображающая точка, как было отмечено ранее, должна двигаться по прямой $x = x_1$, пока не попадет в точку $x_1, \bar{y}_1 = Ax_1 - \frac{1}{2}$, и продолжать свое движение в пространстве под плоскостью x, y .

Но опять-таки в силу (8) и (6') имеем

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 = V_{-1/2}(x_1, \bar{y}_1, 0) = V_{-1/2}(x_1, Ax_1 - \frac{1}{2}, 0) < V_{+1/2}(x_1, Ax_1 + \frac{1}{2}, 0) < \\ < V_{+1/2}(x_1, y_1, 0) = C_1 < C_0 \end{aligned}$$

IV. $x_1 < 0$, $Ax_1 - \frac{1}{2} \leq y < Ax_1 + \frac{1}{2}$. Тогда изображающая точка должна двигаться по прямой $x = x_1$, пока не попадет в точку $x_1, \bar{y}_1 = Ax_1 + \frac{1}{2}$, и продолжать свое движение под плоскостью x, y .

В силу (6')

$$\bar{C}_1 = V_{+1/2}(x_1, \bar{y}_1, 0) = V_{+1/2}(x_1, Ax_1 + \frac{1}{2}, 0) < V_{+1/2}(x_1, y_1, 0) = C_1$$

Таким образом, наше утверждение доказано во всех случаях.

Говоря о системе (D), мы будем называть область $U(AB > 1)$ областью абсолютной устойчивости в пространстве параметров A, B . Областью условной устойчивости в пространстве параметров мы будем называть область таких значений параметров A, B , для которых в фазовом пространстве системы (D) область притяжения отрезка покоя не охватывает всего фазового пространства.

§ 4. Область $V(AB < 1)$. Сведение динамической задачи к точечному преобразованию. Недорегулирование и перерегулирование

В силу замечания, сделанного в § 2, в случае $AB < 1$ изображающая точка по любой¹ траектории системы (D) в конечное время достигает плоскости $z = 0$. Поэтому при исследовании движения изображающей точки в фазовом пространстве мы можем принять, что при $t = 0$ $z = 0$. Очевидно, что в рассматриваемом случае изучение поведения каждой отдельной траектории в фазовом пространстве эквивалентно изучению последовательности точек ее пересечения с плоскостью $z = 0$, а изучение структуры разбиения фазового пространства на траектории эквивалентно изучению структуры преобразования плоскости $z = 0$ в самое себя, осуществляемого движением изображающих точек по траекториям.

¹ Кроме двух исключительных траекторий, существованием которых можно пренебречь, имея в виду неизбежные флуктуации.

Для удобства дальнейших вычислений совершим в системе (D) еще одну замену переменных, положив¹

$$\tau = qt, \quad \xi = \frac{x}{q}, \quad \eta = y, \quad \zeta = \frac{z}{q^2} \quad (9)$$

Тогда (D) переходит в (D'')

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \zeta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\xi, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{q^3} F(\xi, \eta, \zeta) \quad (D'')$$

где

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} -Aq\xi + \eta - Bq^2\zeta - \frac{1}{2} & \text{при } \zeta > 0 \text{ и при } \zeta = 0 \text{ и } -Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} > 0 \\ 0 & \text{при } \zeta = 0, -\frac{1}{2} \leq -Aq\xi + \eta \leq +\frac{1}{2} \\ -Aq\xi + \eta - Bq^2\zeta - \frac{1}{2} & \text{при } \zeta < 0 \text{ и при } \zeta = 0 \text{ и } -Aq\xi + \eta + \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

причем, в согласии с (3), будем иметь

$$Aq = \frac{1 + b^2 - 2ab}{a(1 + b^2)}, \quad Bq^2 = \frac{a - 2b}{a(1 + b^2)} \quad (10)$$

Разобьем плоскость ξ, η ($\zeta = 0$) на три куса (см. фиг. 3):

$$G^{(1)}, \text{ где } -Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} > 0 \text{ или } -Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} = 0, \xi < 0 \quad (11)$$

$$G^{(2)}, \text{ где } -\frac{1}{2} < -Aq\xi + \eta < +\frac{1}{2} \text{ или } -Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} = 0, \xi > 0 \\ \text{или } -Aq\xi + \eta + \frac{1}{2} = 0, \xi < 0$$

$$G^{(3)}, \text{ где } -Aq\xi + \eta + \frac{1}{2} < 0 \text{ или } -Aq\xi + \eta + \frac{1}{2} = 0, \xi > 0$$

Пусть начальная точка $(\xi_0, \eta_0, 0)$, соответствующая $\tau = 0$, принадлежит $G^{(2)}$. Тогда решение (D'') будет иметь вид:

$$\xi = \xi_0, \quad \eta = -\xi_0\tau, \quad \zeta = 0 \quad (12)$$

Изображающая точка движется по закону (12), пока она не покинет кусок $G^{(2)}$, переходя при $\xi_0 > 0$ в кусок $G^{(3)}$, а при $\xi_0 < 0$ в кусок $G^{(1)}$. В этот момент ее координаты, согласно (11) и (12), будут

$$\xi_1 = \xi_0, \quad \eta_1 = Aq\xi_0 - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \xi_0, \quad \zeta_1 = 0 \quad (13)$$

Условимся называть только что описанный переход точки $(\xi_0, \eta_0, 0)$ в точку $(\xi_1, \eta_1, 0)$ преобразованием Е. Преобразование Е, таким образом, однозначно, непрерывно, но не взаимно однозначно.

Пусть теперь начальная точка $(\xi_0, \eta_0, 0)$, соответствующая $\tau = 0$, принадлежит куску $G^{(1)}$. В силу (D'') изображающая точка начинает свое движение в верхнем полупространстве ($\zeta > 0$) и снова возвращается на плоскость $\zeta = 0$ в момент времени $\tau = t$ в точку $(\xi_1, \eta_1, 0)$.

На основании (D'') нетрудно написать формулы перехода от ξ_0, η_0

¹ Не путать с теми ξ, η, τ , которые фигурировали в § 1 и 2.

к ξ_1 , η_1 в параметрической форме, вводя в качестве параметров t — время перехода и v — некоторый вспомогательный параметр¹:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= vf(t), & \eta_0 - \frac{1}{2} &= vg(t) \\ \xi_1 &= -ve^{-at}f(-t), & \eta_1 - \frac{1}{2} &= -ve^{-at}g(-t)\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}f(t) &= (1+b^2) \left[\cos t + \frac{[1-b(a+b)]}{a} \sin t - e^{-(a+b)t} \right] \\ g(t) &= -2b \cos t + \left[\frac{(1+b^2)^2 - a^2(b^2-1)}{a^2} \right] \sin t + 2be^{-(a+b)t}\end{aligned}\quad (15)$$

Таким образом, (14) и (15) дают через параметры v и t закон перехода точки ξ_0 , η_0 плоскости $\zeta=0$ в точку ξ_1 , η_1 той же плоскости. Остается лишь определить промежуток изменения параметров v и t . Начнем с нахождения промежутка изменения параметра t . Заметим, что, согласно (14), все точки с одним и тем же «временем перехода» t лежат на луче, проходящем через конец отрезка покоя $(0, \frac{1}{2})$ и имеющем угловой коэффициент

$$k(t) = \frac{g(t)}{f(t)} \quad (16)$$

Преобразованные же точки (ξ_1, η_1) лежат на луче, проходящем через ту же точку $(0, \frac{1}{2})$ и имеющем угловой коэффициент (см. фиг. 3)

$$k(-t) = \frac{g(-t)}{f(-t)} \quad (17)$$

¹ Движение изображающей точки в рассматриваемом случае, в силу уравнений (D'), выразится так:

$$\begin{aligned}\xi &= C_1 a e^{-a\tau} - C_2 e^{b\tau} [b \cos \tau - \sin \tau] - C_3 e^{b\tau} [\cos \tau + b \sin \tau] \\ \eta - \frac{1}{2} &= C_1 c^{-a\tau} + C_2 e^{b\tau} \cos \tau + C_3 e^{b\tau} \sin \tau\end{aligned}\quad (a)$$

$$\zeta = -C_1 a^2 e^{-a\tau} - C_2 e^{b\tau} [(b^2-1) \cos \tau - 2b \sin \tau] - C_3 e^{b\tau} [2b \cos \tau + (b^2-1) \sin \tau]$$

причем, так как $\zeta_0 = 0$, то

$$C_1 a^2 + C_2 (b^2-1) + C_3 2b = 0 \quad (b)$$

Значение t определится как наименьший положительный корень уравнения

$$-C_1 a^2 e^{-at} - C_2 e^{bt} [(b^2-1) \cos t - 2b \sin t] - C_3 e^{bt} [2b \cos t + (b^2-1) \sin t] = 0 \quad (c)$$

По (a) и (b) можно определить C_1 , C_2 , C_3 через ξ_0 , η_0 , и тогда уравнение (c) даст время перехода t . Но значительно удобнее поступить иначе: приняв время перехода за параметр, выразить C_1 , C_2 , C_3 , а тем самым и ξ_0 , η_0 в функции t и второго вспомогательного параметра v , положив

$$\begin{aligned}C_1 &= v \left[\frac{(1+b^2)^2}{a^2} \sin t \right] \\ C_2 &= v [2be^{-(a+b)t} - 2b \cos t - (b^2-1) \sin t] \\ C_3 &= v [-(b^2-1) e^{-(a+b)t} + (b^2-1) \cos t - 2b \sin t]\end{aligned}\quad (d)$$

Если в (a), положив здесь $\tau=0$, подставить вместо C_1 , C_2 , C_3 их выражения из (d), то мы получим ξ_0 , η_0 в функции v и t . Если в (a), положив $\tau=t$, опять подставить вместо C_1 , C_2 , C_3 их выражения из (d), получим ξ_1 , η_1 в функции v и t . Это даст формулы (14) и (15), приведенные в тексте.

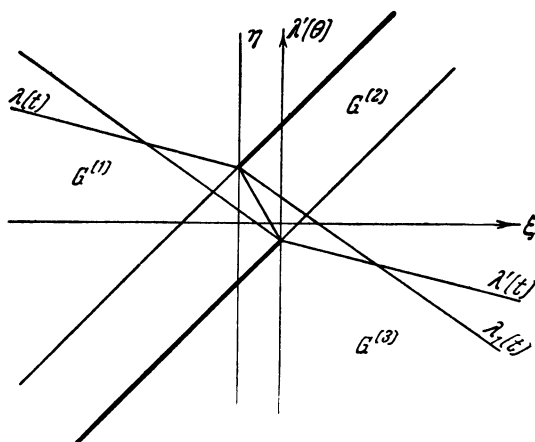
Легко показать, что

$$I. \quad \lim_{t \rightarrow 0} k(t) = \lim_{t \rightarrow 0} k(-t) = Aq \quad (18)$$

Таким образом, точки с нулевым «временем перехода» лежат на границе кусков $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, т. е. на луче $-Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} = 0$, $\xi \geq 0$. Это же вытекает непосредственно из сделанного в § 2 замечания, что вдоль этого луча траектории линейной системы (учитывая, разумеется, сдвиг на величину $\frac{1}{2}$ в направлении оси η) касаются плоскости, оставаясь вблизи точки касания под этой плоскостью.

$$II. \quad k'(t) = (1 + b^2) \frac{1 + (a + b)^2}{a^2} e^{-(a+b)t} \{e^{(a+b)t} - \cos t - (a + b) \sin t\} \quad (19)$$

При $t > 0$ в нашем случае, так как $a > 0$ и $b > 0$, будем иметь: $k'(t) > 0$. Функция $k(t)$ есть монотонно возрастающая функция t . Таким



Фиг. 3

образом, луч, несущий на себе точки с «временем перехода» t , поворачивается с ростом t в положительном направлении (против часовой стрелки).

Мы «выметим» при изменении t этим лучом весь кусок $G^{(1)}$ (пройдя при этом через каждую его точку лишь один раз), если будем менять t до тех пор, пока не придем к другой границе $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, т. е. к лучу $-Aq\xi + \eta - \frac{1}{2} = 0$, $\xi \leq 0$. Таким образом, верхнюю границу изменения t мы получим как наименьший положительный корень уравнения

$$k(t) = Aq$$

а в развернутом виде, после несложных преобразований:

$$e^{-(a+b)t} - \cos t + (a + b) \sin t = 0 \quad (20)$$

Обозначив наименьший положительный корень этого уравнения через $\theta = \theta(a + b)$, мы получаем, таким образом, интервал изменения t :

$$0 \leq t \leq \theta \quad (21)$$

Значения функции $\theta(a+b)$ приводятся в табл. 1.

Нетрудно видеть, что при $a+b \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow \pi$.

Из табл. 1 видно, что θ является убывающей функцией $a+b$. Ее график дан на фиг. 4.

Таблица 1

$a+b$	θ	$a+b$	θ	$a+b$	θ
0	2π	0.601	4.239	1.321	3.794
0.023	5.758	0.660	4.182	1.378	3.773
0.030	5.685	0.720	4.130	1.439	3.752
0.060	5.456	0.744	4.111	1.500	3.732
0.120	5.157	0.750	4.106	1.559	3.714
0.180	4.950	0.780	4.083	1.621	3.696
0.240	4.790	0.840	4.040	1.680	3.680
0.2745	1.5π	0.900	4.000	1.733	3.666
0.300	4.660	0.960	3.964	2.673	3.500
0.330	4.603	1.020	3.930	3.790	3.400
0.360	4.551	1.080	3.899	6.278	3.330
0.420	4.457	1.140	3.870		
0.480	4.376	1.200	3.843		
0.541	4.303	1.260	3.818		

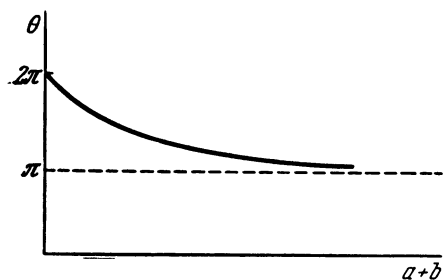
Заметим, что из полученного выше выражения для $k'(t)$ следует что при $0 < t \leq \theta$ будем иметь:

$$\frac{d}{dt} \{k(-t)\} < 0$$

Следовательно, функция $(k-t)$ монотонно убывает, и луч

$$\xi_1 = -ve^{-at}f(-t)$$

$$\eta_1 - \frac{1}{2} = -ve^{-at}g(-t)$$



Фиг. 4

с ростом t поворачивается по часовой стрелке от начального положения,

соответствующего $t=0$, до конечного, соответствующего $t=\theta$. При этом он «выметает» часть кусков $G^{(2)}$ и $G^{(3)}$.

Рассмотрим теперь интервал изменения v . Он определяется тем, что точки луча $\xi_0 = vf(t)$, $\eta_0 - \frac{1}{2} = vg(t)$ должны принадлежать куску $G^{(1)}$. Так как при $v=0$ мы получаем начальную точку луча $(0, +\frac{1}{2})$, то все сводится к определению знака v .

При малых t , как легко видеть,

$$f(t) = (1+b^2) \left\{ t \frac{[1+(a+b)^2]}{a} + \dots \right\}$$

а так как при малом t имеем $\xi_0 > 0$, то $v > 0$ и, следовательно,

$$0 \leq v < +\infty \quad (22)$$

Таким образом, каждая точка (ξ_0, η_0) куска $G^{(1)}$ плоскости $\zeta = 0$, двигаясь согласно (D'') в полупространстве $\xi > 0$, через время t попадает в точку ξ_1, η_1 той же плоскости, принадлежащую $G^{(2)}$ или $G^{(3)}$, причем точки с одним и тем же временем перехода t лежат на одном и том же луче

$$\xi_0 = vf(t), \quad \eta_0 - \frac{1}{2} = vg(t) \quad v > 0$$

и попадают на один и тот же луч

$$\xi_1 = -ve^{-at}f(-t), \quad \eta_1 - \frac{1}{2} = -ve^{-at}g(-t), \quad v > 0$$

Параметр t определяет угловой коэффициент луча и меняется от 0 до θ , параметр v определяет положение точки на луче и меняется от 0 до $+\infty$.

Назовем только что описанное преобразование точек $G^{(1)}$ в точки $G^{(2)}$ и $G^{(3)}$ преобразованием S^+ . Это преобразование взаимно однозначно [в силу того, что траектории линейной системы (E) в пространстве не пересекаются] и непрерывно.

Совершенно аналогичные рассуждения, вычисления и формулы определяют переход точек $G^{(3)}$ в точки $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, так как система (D'') не меняется от замены ξ, η, ζ на $-\xi, -\eta, -\zeta$, причем кусок $G^{(2)}$ переходит в самого себя. Вместо (14) будем теперь иметь

$$\begin{aligned} \xi_0 &= vf(t), & \eta_0 + \frac{1}{2} &= vg(t) \\ \xi_1 &= -ve^{-at}f(-t), & \eta_1 + \frac{1}{2} &= -ve^{-at}g(-t) \end{aligned} \quad (14')$$

где значение v теперь нужно брать отрицательным: $-\infty < v \leq 0$. Преобразование точек $G^{(3)}$ в точки $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$, описанное формулами (14'), будем называть преобразованием S^- . Само собой разумеется, что оно также является взаимно однозначным и непрерывным.

Введем для сокращения дальнейшего изложения символические обозначения для лучей исходных и преобразованных по преобразованиям S^+ и S^- . Луч $\{\xi = vf(t), \eta = \frac{1}{2} + vg(t), v > 0\}$ будем обозначать символом $\lambda(t)$, а луч, полученный из $\lambda(t)$ преобразованием S^+ , т. е. луч $\{\xi = -vf(-t)e^{-at}, \eta = \frac{1}{2} - vg(-t)e^{-at}, v > 0\}$ — символом $\lambda_1(t)$. Луч $\{\xi = vf(t), \eta = -\frac{1}{2} + vg(t), v < 0\}$ будем обозначать символом $\lambda'(t)$, а луч, полученный из $\lambda'(t)$ преобразованием S^- , т. е. луч $\{\xi = -vf(-t)e^{-at}, \eta = -\frac{1}{2} - vg(-t)e^{-at}, v < 0\}$ — символом $\lambda_1'(t)$ (см. фиг. 3).

Условимся, для дальнейшего, отличать так называемый случай *недорегулирования* от случая *перерегулирования*.

Пусть начальные значения ξ_0, η_0 таковы, что $-Aq\xi_0 + \eta_0 - \frac{1}{2} = 0$ и $\xi_0 < 0$, т. е. точки ξ_0, η_0 лежат на луче $\lambda(\theta)$.

Мы скажем, что имеет место случай *недорегулирования*, если для преобразованных точек ξ_1, η_1 имеем $\xi_1 < 0$, и скажем, что имеет место случай *перерегулирования*, если для преобразованных точек имеем $\xi_1 > 0$. Граница между случаями недорегулирования и перерегулирования

определяется разрывом $k(-\theta)$. Выражение для

$$k(-\theta) = \frac{g(-\theta)}{f(-\theta)}$$

с учетом (20) нетрудно привести к виду:

$$k(-\theta) = \frac{1}{a(1+b^2)} \cdot \frac{[a+b+b^3-ab^2-(1-2ab+b^2)\operatorname{ctg}\theta]}{(b-\operatorname{ctg}\theta)} = Aq + \frac{1}{b-\operatorname{ctg}\theta}$$

Отсюда видно, что для граничного случая

$$b = \operatorname{ctg}\theta \quad (23)$$

Уравнения (23) и (20) позволяют найти a и b , соответствующие этой границе, а по ним A и B . Соответствующие значения A и B приведены в табл. 2.

Таблица 2

A	2.623	2.476	2.260	2.161	2.210	2.467	2.68 ₁	2.747	3.000
B	0	0.225	0.689	1.185	1.718	2.313	2.647	2.724	3.000

Кривые, соответствующие этой границе, нанесены на фиг. 1, a и b как линия R . Область недорегулирования лежит справа от этой кривой. Из выражения для $k(-\theta)$ видно, что в случае недорегулирования $b > \operatorname{ctg}\theta$, а в случае перерегулирования $b < \operatorname{ctg}\theta$.

Вернемся к преобразованию плоскости $\zeta = 0$. Каждая точка плоскости $\zeta = 0$ в зависимости от того, где она расположена, либо не смещается (точки отрезка покоя $\xi = 0$, $-\frac{1}{2} \leq \eta \leq +\frac{1}{2}$), либо подвергается одному из трех преобразований S^+ , S^- или E . Выполняя над каждой точкой плоскости соответствующее преобразование S^+ , S^- или E , мы получим преобразование всей плоскости $\zeta = 0$ в самое себя, которое мы обозначим через T и которое является однозначным, но не взаимно однозначным*.

Таким образом, в рассматриваемом случае ($AB < 1$) наша динамическая задача (D'') свелась к точечному преобразованию T плоскости $\zeta = 0$ в самое себя.

§ 5. Область V ($AB < 1$). Исследование устойчивости отрезка покоя в малом

Рассмотрим поведение (при повторении преобразования T) точек, лежащих достаточно близко к неподвижным точкам преобразования, образующим отрезок покоя ($\xi = 0$, $-\frac{1}{2} \leq \eta \leq +\frac{1}{2}$). Так как точки $G^{(2)}$ по преобразованию E переходят в точки $G^{(1)}$ или $G^{(3)}$, то в силу симметрии достаточно рассмотреть точки $G^{(1)}$, близкие к точке $(0, \frac{1}{2})$. Посколь-

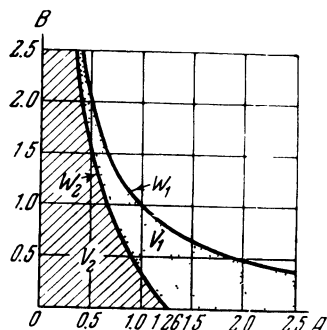
* Из-за точек куска $G^{(2)}$, подвергающихся преобразованию E .

ку же для точек $G^{(1)}$, близких к $(0, \frac{1}{2})$, параметр v будет иметь малые значения, преобразованные точки после преобразования E попадут на луч $\lambda(\theta)$ или $\lambda'(\theta)$. Так как преобразование E не меняет абсциссы преобразованных точек, то при повторении преобразования T точки будут неограниченно приближаться к отрезку покоя, если при достаточно малом ξ_0 будем иметь

$$|\xi_0| > |\xi_1| \quad (24)$$

При обратном же неравенстве они будут, по крайней мере при первых повторениях T , удаляться от отрезка покоя; ни одна точка плоскости ξ, η не будет тогда приближаться к отрезку покоя, как к своему пределу, при повторении преобразования T . Условие (24) сводится к

$$|f(\theta)| > e^{-a\theta} |f(-\theta)| \quad (24')$$



Фиг. 5

Нетрудно проверить, что для случая недорегулирования это условие сводится к неравенству $e^{-b\theta} > -b \sin \theta + \cos \theta$ и, как легко видеть в силу (20) всегда выполняется. В случае же перерегулирования условие (24') сводится к неравенству

$$e^{-b\theta} > b \sin \theta - \cos \theta \quad (25)$$

и выполняется лишь для некоторой области значений a, b , а следовательно, и A, B . Параметрические уравнения границы той области плоскости A, B , где устойчив отрезок покоя (кривая W_2 , фиг. 5), можно записать в виде

$$A = \frac{1 + b^2 - 2ab}{3\sqrt{a^2(1 + b^2)}}, \quad B = \frac{a - 2b}{3\sqrt{a(1 + b^2)}} \quad (26)$$

где a и b — функции вспомогательного параметра θ согласно уравнениям

$$e^{-b\theta} = -\cos \theta + b \sin \theta, \quad e^{-(a+b)\theta} = \cos \theta - (a + b) \sin \theta \quad (26')$$

Значения A, B для этой кривой W_2 приведены в табл. 3.

Таблица 3

A	1.261	1.250	1.227	1.141	1.026	0.950	0.892	0.847
B	0	0.004	0.037	0.157	0.338	0.473	0.582	0.675
A	0.809	0.776	0.749	0.725	0.703	0.683	0.664	0.648
B	0.755	0.826	0.893	0.955	1.014	1.064	1.115	1.165
A	0.633	0.619	0.605	0.515	0.464	0.378	0.297	
B	1.211	1.257	1.299	1.336	1.885	2.348	3.393	

На фиг. 5 показаны как сама кривая W_2 , так и те области плоскости A, B , где отрезок покоя устойчив в малом (область условной устойчи-

вости V_1) и где он неустойчив в малом (область абсолютной неустойчивости V_2). В следующих параграфах будет показано, какой смысл имеют эти наименования областей V_1 и V_2 .

§ 6. Область абсолютной неустойчивости (область V_2)

В этом случае качественная картина преобразования плоскости ξ, η в саму себя устанавливается весьма просто.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = \frac{e^{-at}f(-t)}{f(t)}, \quad 0 < t \leq \theta \quad (27)$$

дающую с точностью до знака отношение абсцисс исходной и преобразованной точек.

Функция $\varphi(t)$ терпит бесконечный разрыв при том значении $t = \bar{t}$, при котором $f(t) = 0$, причем меняет знак при переходе через точку разрыва. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{a}{1+b^2} \frac{e^{-at}}{[f(t)]^2} \{e^{-(a+b)t} [\cos t + (a+b) \sin t] + \\ &+ e^{(a+b)t} [\cos t - (a+b) \sin t] - 2 + [1 + (a+b)^2] \sin^2 t\} < 0 \end{aligned}$$

В самом деле, обозначив для краткости выражение в фигурных скобках через $\Phi(t)$, получим

$$\Phi'(t) = -[1 + (a+b)^2] 2 \sin t [\operatorname{cosech}(a+b)t - \cos t]$$

Значит, $\Phi'(t) < 0$ при $0 < t < \pi$ и $\Phi'(t) > 0$ при $\pi < t < \theta (< 2\pi)$. Следовательно, $\Phi(t)$ достигает наибольшего значения на концах промежутка. Но, как легко подсчитать: $\Phi(0) = \Phi(\theta) = 0$. Следовательно, $\Phi(t) < 0$, а потому и $d\varphi(t)/dt < 0$, что и требовалось доказать.

Если учесть, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = -1, \quad \varphi(\theta) = e^{b\theta} \{b \sin \theta - \cos \theta\} > 1$$

(в силу предположения о неустойчивости отрезка покоя), то ясно, что график $\varphi(t)$ имеет вид, показанный схематически на фиг. 6. Отсюда вытекает, что в случае неустойчивости отрезка покоя всегда $|\xi_1| > |\xi_0|$. Однако это еще не решает вопроса о поведении точек при повторении преобразования Т, ибо при малых ξ_0 отношение $|\xi_1/\xi_0|$ может оказаться как угодно близким к 1. Для этого рассмотрим результат повторного преобразования: точка с абсциссой ξ_0 переходит по S^+ в точку с абсциссой ξ_1 , а затем, после S^- (и, может быть, промежуточного преобразования Е, не меняющего абсциссу), — в точку с абсциссой ξ_2 .

Покажем, что $|\xi_2/\xi_0| > q > 1$, где q — некоторое постоянное относительно ξ_0 число. Для этого отметим, что точки луча $\lambda(\pi)$ переходят в точки продолжения этого луча, т. е. что $k(\pi) = k(-\pi)$ (ср. находя-

дение неподвижной точки бесконечно удаленной прямой в § 9 второй части работы). Следовательно, если при S^+ время перехода $t < \pi$, то для преобразованной точки время перехода по S^- будет $t_1 > \pi$ (может оказаться, что оба времени перехода будут $> \pi$). Но по ходу $\varphi(t)$ ясно, что для $t > \pi$ имеем

$$|\varphi(t)| > \min(|\varphi(\pi)|, |\varphi(\theta)|)$$

Обозначив $\min(|\varphi(\pi)|, |\varphi(\theta)|) = q$, получим

$$\left| \frac{\xi_2}{\xi_0} \right| = \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right| \cdot \left| \frac{\xi_1}{\xi_0} \right| > q$$

что и утверждалось.

Но отсюда следует, что после $2k$ применений преобразований S^+ и S^- (и, может быть, некоторого числа преобразований E) для абсциссы преобразованной точки ξ_{2k} будем иметь

$$|\xi_{2k}| > q^k |\xi_0|$$

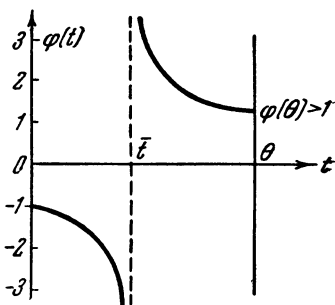
Следовательно, какова бы ни была исходная точка (лишь бы $\xi_0 \neq 0$), преобразованная точка при повторении преобразования уходит в бесконечность.

В том случае, когда $\xi_0 = 0$, будем иметь $\xi_1 \neq 0$. В самом деле, как уже отмечалось, только для $t = \pi$ преобразованная точка лежит на продолжении того луча, на котором лежит исходная. Луч же, соответствующий $t = \pi$, не совпадает с осью η , ибо

$$f(\pi) = -(1 + b^2) [1 + e^{-(a+b)\pi}] \neq 0$$

Следовательно, и точки оси η удаляются в бесконечность.

Тем самым вопрос о качественной картине преобразования плоскости ξ, η в самое себя в рассматриваемом случае решен полностью и установлено, что при значениях A и B из области V_2 при любых начальных условиях регулятор совершает нарастающие по амплитуде колебания.



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Wischnegradski I. Sur la théorie générale des régulateurs.—C. R. de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 83, 1876, p. 318—321.
2. Вышнеградский И. А. О регуляторах прямого действия.—Известия СПб. практ. технол. ин-та, т. 1, 1877, стр. 21—62.
3. Maxwell I. On governors.—Proceedings of the Royal Society, vol. 16, 1868, p. 270—283.
4. B e g t r u p I. Theorie of steam engine governors.—4.—American Machinist, vol. 17, 1894, № 9.
5. T o l l e M. Beiträge zur Beurteilung der Zentrifugalpendelregulatoren.—Zeitschrift d. VDI., Bd. 39, 1895, № 25, S. 735—741.
6. L e c o r n u L. Régularisation du mouvement dans les machines. Paris, 1898, 218 p.

7. S t o d o l a A. Das Siemenssche Regulirprinzip` und die amerikanischen «Inertie»-Regulatoren. —Zeitschrift d. VDI, Bd. 43, 1899, No. 18, S. 506—516, 573—579.
8. M i s e s R. von. Zur Theorie der Regulatoren.— Elektrotechnik und Maschinenbau, B1. 26, 1908, S. 783—788.
9. M i s e s R. von. Dynamische Probleme der Maschinenlehre.— Encyklopädie d. mathem. Wissenschaften, Bd. 4, Abt. 2, 1911, H. 2, S. 153—355.
10. Ж у к о в с к и й Н. Е. Теория регулирования хода машин. М., 1909, 142 стр.
11. Р е р и х К. О влиянии трения на работу центробежных регуляторов.— Известия Екатериносл. горного ин-та, т. 14, 1924, стр. 415.
12. Н и к о л а и Е. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня.— Известия Лгр. политехн. ин-та, т. 31, 1928, отд. 3, стр. 201—227.
13. P ö s c h l Th. Grenzkurven in d. Regeltheorie.—Elektrotechnik und Maschinenbau, Bd. 54, 1936, S. 97—102.
14. S c h m i d t W. Unmittelbare Regelung. Berlin, 1939. XI, 114 S.
15. А н д р о н о в А. и М а й е р А. Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей.—Докл. АН СССР, т. 43, 1944, № 2, стр. 58—62.
16. А н д р о н о в А. и М а й е р А. О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования.—Докл. АН СССР, т. 47, 1945, № 5, стр. 345—348.
17. T o l l e M. Die Regelung der Kraftmaschinen. 3te, verb. u. verm. Aufl. Berlin, 1921. 889 S.
18. Le C o r b e i l l e r. Sur les oscillations des régulateurs.—Mekanistkongressen, III. Stokholm, 1935, S. 205—212.

ЗАДАЧА ВЫШНЕГРАДСКОГО В ТЕОРИИ ПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. II *

ТЕОРИЯ РЕГУЛЯТОРА ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВСКОГО И ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

§ 7. Область условной устойчивости (область V_1).

Предварительные замечания

Этот случай является наиболее сложным; его рассмотрение требует применения общих теорем теории точечных преобразований. Здесь сразу возникает весьма существенное затруднение: само преобразование T не только не сохраняет направление обхода, но и не является взаимно однозначным (из-за преобразования E точек $G^{(2)}$) и непрерывным, а для применимости упомянутых теорем необходимо, чтобы рассматриваемое преобразование обладало всеми этими свойствами.

Требованию «сохранение направления обхода» можно удовлетворить, применяя преобразование T двукратно: $T \times T = T^2$. Следовательно, нужно, во-первых, определить ту область плоскости ξ, η , где преобразование T^2 будет взаимно однозначным и непрерывным, и, во-вторых, установить поведение остальных точек ξ, η при итерации T . Это мы сделаем в настоящем параграфе; в следующих параграфах мы рассмотрим вопрос о неподвижных точках преобразования T^2 , сперва находящихся на конечном расстоянии, а затем и бесконечно удаленных, и после этого установим поведение точек плоскости ξ, η при неограниченном повторении T . Пусть сперва $M(\xi, \eta) \in G^2$. Тогда по E она перейдет в точку M_1 , лежащую на $\lambda(\theta)$ или на $\lambda'(\theta)$. По симметрии преобразования мы можем без ограничения общности рассматривать лишь точки $\lambda(\theta)$. Точки $\lambda(\theta)$ по S^+ переходят в точки луча $\lambda_1(\theta)$. Часть из них находится в $G^{(2)}$, часть — в $G^{(3)}$, причем абсциссы их в силу устойчивости отрезка покоя уменьшаются по абсолютной величине¹ (ср. § 6). Поэтому те точки $\lambda(\theta)$, которые после

* Совместно с А. Г. Майером. Опубликовано в журн. «Автоматика и телемеханика», 1953, 14, № 5, с. 505—530. При этом от редакции к статье было дано следующее примечание.

Известное исследование Александра Александровича Андропова и Артемия Григорьевича Майера о задаче Вышнеградского оставалось до сих пор неопубликованным. Кроме краткого сообщения в Докл. АН СССР, при жизни авторов была напечатана лишь первая часть этой работы (журн. «Автоматика и телемеханика», № 5, 1947). Академик Александр Александрович Андронов отказывался опубликовать вторую часть этого исследования, так как не был полностью удовлетворен им (это касалось главным образом математического дополнения), и предполагал найти силы и время, чтобы дополнить и отредактировать текст второй части статьи для передачи ее в

S^+ попали в $G^{(2)}$, будут при дальнейшем применении T попадать в $G^{(2)}$ и абсциссы их будут при этом по абсолютной величине уменьшаться в геометрической прогрессии — они стремятся к отрезку покоя.

Те же точки $\lambda_1(\theta)$, которые попали в $G^{(3)}$, после S^- частично попадут в $C^{(2)}$, а частично — в $G^{(1)}$. Таким образом, точки $\lambda(\theta)$ распадаются на три множества: множество точек, попадающих в $G^{(2)}$ после S^+ , — они стремятся к отрезку покоя; множество точек, переходящих по S^+ в $G^{(3)}$ и после S^- — опять в $G^{(1)}$ — эти точки допускают взаимно однозначное преобразование T^2 и их поведение будет рассмотрено позже; и, наконец, множество H точек, переходящих по S^+ в $G^{(3)}$, а по S^- в $G^{(2)}$. Поведение этих последних точек мы и рассмотрим.

Трудность рассмотрения их поведения заключается в том, что если при первом преобразовании S^+ их абсциссы уменьшаются по абсолютной величине, то при S^- они могут и увеличиваться. Докажем, что эти абсциссы по абсолютной величине уменьшаются после обоих преобразований. Для этого заметим, что абсцисса точек $\lambda(\theta)$ после S^+ и S^- получает отрицательный знак. В самом деле, в случае недорегулирования $\lambda_1(\theta)$ попадает в угол между лучом $\lambda'(\theta)$ и лучом $f(t_1) = 0$; как вытекает из рассмотрения функции $\varphi(t)$ в § 6, отношение абсцисс точки исходной и преобразованной (для этого угла) сохраняет знак плюс. Поэтому и точки $\lambda_2(\theta)$ будут иметь отрицательную абсциссу. В случае же перерегулирования из тех же рассуждений вытекает, что абсциссы точек $\lambda_2(\theta)$ имеют знак, обратный абсциссам точек $\lambda_1(\theta)$, т. е. тоже отрицательный. Следовательно, если какая-либо точка $\lambda_2(\theta)$ попадает в $G^{(2)}$, то она после E перейдет опять в точку $\lambda(\theta)$. Но в случае перерегулирования абсциссы точек $\lambda'(\theta)$, а потому и абсциссы точек $\lambda_1(\theta)$, достаточно близких к $\lambda'(\theta)$, уменьшаются по абсолютной величине после S^- , а в случае недорегулирования абсциссы точек $\lambda_1(\theta)$, достаточно близких к $\lambda'(\theta)$, как угодно мало увеличиваются по абсолютной величине после S^- . Поэтому абсциссы точек $\lambda(\theta)$, достаточно близких к $(0, 1/2)$, уменьшаются по абсолютной величине после S^+ и S^- (или S^+ , S^- и E). Значит, если бы на $\lambda(\theta)$ были точки множества H , абсциссы которых после S^+ и S^- увеличивались бы по абсолютной величине, то обязательно нашлась бы на $\lambda(\theta)$ и такая

печать. Эта работа была задержана из-за скоропостижной смерти А. Г. Майера и из-за длительной болезни А. А. Андропова. Он успел внести в текст ряд исправлений, но полностью подготовить работу к печати не смог.

После смерти Александра Александровича в его бумагах сохранился публикуемый выше текст последнего варианта второй части работы о задаче Вышнеградского. Несмотря на то что в рукописи имеются пропуски (нехватает нескольких рисунков, сносок и т. д.) и что сам Александр Александрович Андронов, необычайно требовательный к своим публикациям, не считал текст готовым к опубликованию, редакция сочла возможным опубликовать его, так как попытка закончить его обработку без Александра Александровича неизбежно затянет опубликование статьи на длительный срок, а работа эта интересует многих читателей.

¹ Ссылки на § 1—6 относятся к первой части работы, здесь стр. 264 (Ред.)

точка $M_0(\xi_0, \eta_0)$, абсцисса которой после S^+ и S^- приняла бы прежнее значение (по вышеизложенному — и по абсолютной величине и по знаку). Так как после S^+ , S^- и E она перейдет в точку $\lambda(\theta)$ и, следовательно, совпадет с исходной точкой M_0 , то она будет периодической при трехкратном повторении T . Поэтому достаточно доказать несуществование на $\lambda(\theta)$ периодической точки $M_0(\xi_0, \eta_0)$, переходящей по S^+ в точку $M_1(\xi_1, \eta_1) \in G^{(3)}$, а по S^- — в точку $M_2(\xi_2, \eta_2) \in G^{(2)}$, причем $\xi_2 = \xi_0$.

Для доказательства запишем ход преобразований:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= v_0 f(\theta), & \xi_1 &= -v_0 e^{-a\theta} f(-\theta) = v_1 f(t_1) \\ \eta_0 &= \frac{1}{2} + v_0 g(\theta), & \eta_1 &= \frac{1}{2} - v_0 e^{-a\theta} g(-\theta) = -\frac{1}{2} + v_1 g(t_1) \\ \xi_2 &= -v_1 e^{-at_1} f(-t_1) = v_0 f(\theta) \\ \eta_2 &= -\frac{1}{2} - v_1 e^{-at_1} g(-t_1) < \frac{1}{2} + v_0 g(\theta)\end{aligned}\quad (28)$$

(последнее неравенство выражает, что $M_2 \in G^{(2)}$).

Отсюда получаем неравенство

$$\begin{aligned}& v_0 \{2b[f(\theta) + e^{-a\theta} f(-\theta)] + (1 + b^2)[g(\theta) + e^{-a\theta} g(-\theta)]\} > \\ & > -v_1 \{2b[f(t_1) + e^{-at_1} f(-t_1)] + (1 + b^2)[g(t_1) + e^{-at_1} g(-t_1)]\}\end{aligned}$$

или после упрощений

$$v_0(1 - e^{-a\theta}) \sin \theta > -v_1(1 - e^{-at_1}) \sin t_1 \quad (29)$$

Поскольку $v_0 > 0$, $\sin \theta < 0$, левая часть, а тем более и правая отрицательны. Так как $-v_1 < 0$, то $\sin t_1 < 0$ и $t_1 > \pi$.

Отсюда следует, что $\xi_1 = v_1 f(t_1) > 0$, ибо луч $t_1 = \pi$ имеет положительные абсциссы, а лучи $t_1 > \pi$ лежат между ним и $\lambda'(\theta)$. Следовательно, мы имеем случай перерегулирования: $\xi_0 < 0$, $\xi_1 > 0$.

Введем вспомогательную функцию:

$$\Phi(t) = \frac{f(t)}{(1 - e^{-at}) \sin t}$$

Из равенств

$$-v_0 e^{-a\theta} f(-\theta) = v_1 f(t_1), \quad -v_1 e^{-at_1} f(-t_1) = v_0 f(\theta)$$

мы при помощи неравенства (29) получаем простым делением

$$\Phi(-\theta) > \Phi(t_1), \quad \Phi(-t_1) < \Phi(\theta) \quad (30)$$

С другой стороны, при $t_1 > \pi$, $f(t_1) < 0$, $f(-t_1) < 0$ будем иметь

$$\Phi'(t_1) < 0, \quad \Phi'(-t_1) > 0$$

В самом деле,

$$\Phi'(t_1) = -\frac{ae^{-at_1} f(t_1)}{(1 - e^{-at_1})^2 \sin t_1} - \frac{e^{-(a+b)t_1} [e^{(a+b)t_1} - \cos t_1 - (a+b) \sin t_1]}{(1 - e^{-at_1}) \sin^2 t_1}$$

Следовательно,

$$\Phi(t_1) > \Phi(\theta), \quad \Phi(-t_1) > \Phi(-\theta) \quad (31)$$

Соединяя неравенства (30) и (34), легко получаем противоречие. С одной стороны,

$$\Phi(t_1) < \Phi(-\theta) < \Phi(-t_1) < \Phi(\theta)$$

а с другой

$$\Phi(t_1) > \Phi(\theta)$$

Тем самым доказано, что нет периодических точек на $\lambda(\theta)$, переходящих по S^+ в $G^{(3)}$, по S^- в $G^{(2)}$ и по E обратно в исходное положение.

Как было установлено выше, откуда следует, что каждая точка $\lambda(\theta)$, которая после T^2 не возвращается в $G^{(1)}$, попадает опять на $\lambda(\theta)$ с меньшей по абсолютной величине абсциссой и, следовательно, стремится к отрезку покоя¹.

Выделим теперь ту часть куска $G^{(1)}$, для точек которой преобразование T^2 будет взаимно однозначным и непрерывным. Точки куска $G^{(3)}$ можно не рассматривать отдельно в силу симметрии преобразования. Нетрудно указать границы этой части. Уравнение кривой, ограничивающей часть $G^{(1)}$, точки которой после S^+ попадают в $G^{(2)}$, получается из соотношений, выражающих, что точки ее после S^+ попадают на $\lambda'(\theta)$:

$$\xi = v f(t), \quad -ve^{-at} f(-t) = v_1 f(\theta)$$

$$\eta = \frac{1}{2} + vg(t), \quad \frac{1}{2} - ve^{-at} g(-t) = -\frac{1}{2} + v_1 g(\theta)$$

Отсюда

$$\xi_j = ae^{at} \frac{\cos t + \frac{1+b(a+b)}{a} \sin t - e^{-(a+b)t}}{e^{(a+b)t} - \cos t - (a+b) \sin t} \quad (j)$$

$$\eta_j = \frac{1}{2} + \frac{a}{1+b^2} e^{at} \frac{-2b \cos t + \frac{(1+b^2)^2 - a^2(b^2-1)}{a^2} \sin t + 2be^{-(a+b)t}}{e^{(a+b)t} - \cos t - (a+b) \sin t}$$

Совершенно такие же уравнения (с переменной лишь знака в правых частях) получились бы для кривой j' , ограничивающей точки $G^{(3)}$, попадающие после S^- в $G^{(2)}$ (фиг. 7). Отметим следующие свойства кривой j .

1. Кривая j пересекается с лучом $\lambda(\theta)$ в точке C с абсциссой

$$\xi_c = \frac{1}{e^{b\theta} \sin \theta} < 0$$

Начальную точку, симметричную C относительно начала координат, обозначим через C' .

2. При росте t абсцисса точки j монотонно убывает. В самом деле, из первого из уравнений (j) после несложных вычислений получаем

$$\frac{d\xi_j}{dt} = -ae^{at} \times \frac{[e^{-(a+b)t} - \cos t + (a+b) \sin t] \left[\frac{1+b^2}{a} e^{(a+b)t} + (ab+b^2-1) \sin t + (a+2b) \cos t \right]}{[e^{(a+b)t} - \cos t - (a+b) \sin t]^2}$$

¹ Нельзя утверждать, что ее абсцисса будет по абсолютной величине уменьшаться в геометрической прогрессии; но если бы эти точки не стремились к отрезку покоя, то мы получили бы на $\lambda(\theta)$ предельную для них точку, инвариантную относительно чего по доказанному нет.

Первый множитель числителя при $t \leq 0$ будет неотрицателен. Второй же множитель при $t > 0$ положителен и даже возрастает вместе с t . Действительно, обозначив его для краткости через $\psi(t)$, будем иметь¹

$$\psi(0) = \frac{1+b^2}{a} + a + 2b > 0$$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1+b^2}{a} (a+b) e^{(a+b)t} + (ab+b^2-1) \cos t - (a+2b) \sin t > \\ &> \frac{1+b^2}{a} (a+b) e^{(a+b)t} - 1 - (a+2b)t = \\ &= e^{(a+b)t} - 1 - (a+b)t + \left[\frac{1+b^2}{a} (a+b) - 1 \right] e^{(a+b)t} - bt > \\ &> b \left\{ \frac{1+b(a+b)}{a} e^{(a+b)t} - t \right\} > b \left\{ \frac{1+b(a+b)}{a} (a+b)t - t \right\} > btb(a+b) > 0 \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает, что $\psi(t) > 0$ при всех t и, следовательно,

$$\frac{d\xi_j}{dt} \leq 0$$

Отметим точку пересечения луча $\lambda_1'(\theta)$ с j ; она единственная, ибо точки $\lambda_1'(\theta)$ имеют абсциссы, увеличивающиеся вместе с t , а j — уменьшающиеся с t , как только что было показано. Обозначим точку пересечения $\lambda_1'(\theta)$ с j через A_1' , а соответствующую точку пересечения $\lambda_1(\theta)$ с j' через A_1 . На луче $\lambda(\theta)$ отметим точку A , переходящую в A_1 по S^+ ; на j отметим точку C'_{-1} , переходящую² по S^+ в G' . Дуга j' между точками C' и A_1 получится преобразованием S^+ из точек некоторой дуги j'_{-1} , соединяющей точки C'_{-1} на j с A и лежащей вне j [остальные точки j' не имеют прообразов в $G^{(1)}$, как и вообще все точки $G^{(3)}$, лежащие в угле между $\lambda_1(\theta)$ и $\lambda'(0)$].

Мы не будем выписывать параметрические уравнения кривой j'_{-1} и исследовать ее свойства, так как в дальнейшем они нам не понадобятся; отметим лишь, что j'_{-1} будет аналитической кривой.

Существенно, что точки $G^{(1)}$, лежащие вне кривых j'_{-1} и j (заштрихованная область фиг. 7), допускают преобразование взаимно однозначное, непрерывное и сохраняющее направление обхода. Эту часть $G^{(1)}$ обозначим через $\bar{G}^{(1)}$. Остальные точки $G^{(1)}$ распадаются на два класса:

1) точки, лежащие между j и лучом $\lambda(0)$; по S^+ они попадают в $G^{(2)}$, по E переходят в $\lambda'(\theta)$ или $\lambda(\theta)$ (последнее возможно в случае недорегулирования); следовательно, их поведение при повторении T будет установлено, если будет установлено поведение точек $\lambda(\theta)$ и $\lambda'(\theta)$;

2) точки, лежащие между j'_{-1} , $\lambda(\theta)$ и j ; по S^+ они попадают на $G^{(3)}$, заполняя область между j' , $\lambda_1(\theta)$ и прямой — $Aq\xi + \eta + 1/2 = 0$. По S^- они переходят в $G^{(2)}$, по E затем в точки $\lambda(\theta)$.

¹ Это неравенство основано на том, что $0 < ab + b^2$, что вытекает из условий $a \geq 2b$ (ср. § 2) и $b > 0$ в силу $AB < 1$.

² Точка C_{-1}' может лежать на дуге CA_1' или вне ее, смотря по случаю. Фиг. 7 дает одно из возможных расположений.

Таким образом, те из точек $G^{(1)}$, которые после повторения T не попадают в $\bar{G}^{(1)}$, попадают на $\lambda(\theta)$. Как было доказано, в рассматриваемом случае (отрезок покоя устойчив в малом), точки $\lambda(\theta)$, попавшие после повторения T снова на $\lambda(\theta)$, стремятся к отрезку покоя.

Поэтому достаточно рассмотреть поведение точек $\bar{G}^{(1)}$ при повторении T .

§ 8. Область условной устойчивости (V_1). Область технической устойчивости

Построенная в § 7 кривая j позволяет без труда определить нижнюю границу области устойчивости в большом отрезке покоя. Будем называть «областью технической устойчивости» или «областью устойчивости по Жуковскому» область начальных значений, при которых изображающая точка на плоскости ξ, η не выходит из области $G^{(2)}$ (хотя и

совершает переходы в трехмерном пространстве)¹; обозначим эту область через G_j .

Ясно, что начальные точки могут в этом случае находиться либо в $G^{(2)}$, либо в области, ограниченной кривой j и прямой $Aq\xi + \eta - 1/2 = 0$, либо в области, ограниченной кривой j' и прямой $Aq\xi + \eta + 1/2 = 0$. Но те точки $\lambda(\theta)$, которые находятся вне отрезка CO_1 , после преобразования S^+ не попадают в $G^{(2)}$. Поэтому область технической устойчивости G_j будет ограничена линиями:

а) отрезком α_1

$$\xi = \xi_c = \frac{1}{e^{b\theta} \sin \theta}, \quad + Aq\xi_c - \frac{1}{2} \leq \eta \leq Aq\xi_c + \frac{1}{2}$$

а') отрезком α_2

$$\xi = -\xi_c = -\frac{1}{e^{b\theta} \sin \theta}, \quad -Aq\xi_c - \frac{1}{2} \leq \eta \leq -Aq\xi_c + \frac{1}{2}$$

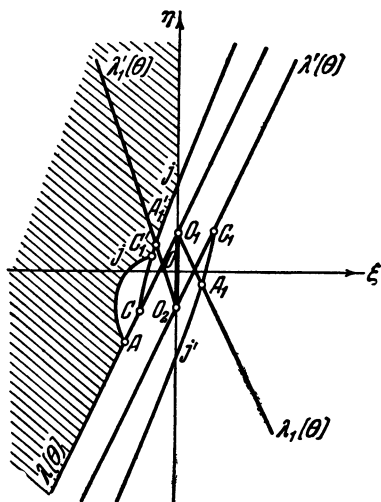
б) линией i_1 , являющейся прообразом по S^- отрезка α_1 ; ее параметрические уравнения

$$\xi = v f(t), \quad \eta = -\frac{1}{2} + v g(t)$$

где $v < 0$ и $t > 0$ определяются из соотношений

$$\xi_c = -ve^{-at} f(-t), \quad Aq\xi_c - \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} - ve^{-at} g(-t) \leq Aq\xi_c + \frac{1}{2}$$

¹ Сноска в этом месте осталась ненаписанной (Ред.).



Фиг. 7

б') линией i_2 , являющейся прообразом по S^+ отрезка α_2 ; ее параметрические уравнения

$$\xi = vf(t), \quad \eta = \frac{1}{2} + vg(t)$$

где $v > 0$ и $t > 0$ определяются из соотношений

$$-\xi_c = -ve^{-at}f(-t), \quad -Aq\xi_c - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}ve^{-at}g(-t) \leq -Aq\xi_c + \frac{1}{2}$$

в) дугой кривой j — от точки C' пересечения j и $\lambda(\theta)$ до точки C'_{-1} пересечения j и i_2 ;

в') дугой j' — от точки C' пересечения j' и $\lambda'(\theta)$ до точки C_{-1} пересечения j' и i_1 .

Ясно, что α_1 и α_2 , i_1 и i_2 , дуги j и j' симметричны одна другой относительно начала координат. По приведенным выше соотношениям их подсчет по точкам не представляет затруднений. В силу сказанного в § 7, в случае устойчивости в малом отрезка покоя все точки области технической устойчивости G_j стремятся к отрезку покоя; поэтому область G_j дает нижнюю границу области устойчивости отрезка покоя в большом¹.

§ 9. Область условной устойчивости (область V_1).

Неподвижные точки преобразования T^2

Рассмотрим теперь вопрос о неподвижных точках преобразования T^2 , находящихся в конечной части плоскости ξ, η . Нас будут интересовать при этом точки $\bar{G}^{(1)}$. Неподвижные точки T^2 получаются из тех точек $\bar{G}^{(1)}$, которые после S^+ и S^- вернутся в исходное положение. Пусть $M_0(\xi_0, \eta_0)$ принадлежит $\bar{G}^{(1)}$ и по S^+ переходит в точку $M_1(\xi_1, \eta_1)$, принадлежащую $G^{(3)}$; пусть далее M_1 по S^- переходит в M_0 . Покажем, что тогда M_1 должна быть симметрична M_0 относительно начала координат.

Имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= v_0 f(t_0), & \xi_1 &= -v_0 e^{-at_0} f(-t_0) = v_1 f(t_1) \\ \eta_0 &= v_0 g(t_0) + \frac{1}{2}, & \eta_1 &= -v_0 e^{-at_0} g(-t_0) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + v_1 g(t_1) \\ \xi_0 &= -v_1 e^{-at_1} f(-t_1) \\ \eta_0 &= -\frac{1}{2} - v_1 e^{-at_1} g(-t_1) \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда получаем соотношение

$$\begin{aligned} v_0 \{ (1 + b^2) [g(t_0) + e^{-at_0} g(-t_0)] + 2b [f(t_0) + e^{-at_0} f(-t_0)] \} = \\ = v_1 \{ (1 + b^2) [g(t_1) + e^{-at_1} g(-t_1)] + 2b [f(t_1) + e^{-at_1} f(-t_1)] \} \end{aligned}$$

или, по упрощении:

$$v_0 (1 - e^{-at_0}) \sin t_0 = -v_1 (1 - e^{-at_1}) \sin t_1 \quad (33)$$

¹ См. заштрихованную область фиг. 11 (Ред.).

Так как $v_0 > 0$, $-v_1 > 0$, то $\sin t_0$ и $\sin t_1$ имеют одинаковые знаки. Следовательно, либо $t_0 > \pi$, $t_1 > \pi$, либо $t_0 < \pi$, $t_1 < \pi$. Но легко видеть, что второй случай невозможен; если $t_0 < \pi$, то необходимо $t_1 > \pi$. Поэтому $t_0 > \pi$, $t_1 > \pi$. Без ограничения общности можно считать, если $t_0 \neq t_1$, что $\pi < t_0 < t_1$. Но так как луч $\lambda(t_0)$ [луч $\lambda'(t_1)$] при $t_0 > \pi$ (при $t_1 > \pi$) лежит в угле между лучами $\lambda(\pi)$ и $\lambda(\theta)$ [между лучами $\lambda'(\pi)$ и $\lambda'(\theta)$], то для точек этого луча имеем $\xi < 0$ ($\xi > 0$).

В силу (32) это значит, что

$$f(t_0) < 0, \quad f(-t_0) < 0, \quad f(t_1) < 0, \quad f(-t_1) < 0 \quad (34)$$

(эти неравенства остаются справедливыми для всех тех точек, у которых абсцисса при преобразовании меняет знак, что имеет место при всех $t > \pi$ для случая перерегулирования и не имеет места при $t > \pi$, но достаточно близком к θ для случая недорегулирования).

Из (32) и (33) получаем уравнения

$$\frac{f(t_0)}{(1 - e^{-at_0}) \sin t_0} = \frac{f(-t_1)}{(e^{at_1} - 1) \sin t_1}, \quad \frac{f(-t_0)}{(e^{at_0} - 1) \sin t_0} = \frac{f(t_1)}{(1 - e^{-at_1}) \sin t_1}$$

которые можно переписать в таком виде:

$$\Phi(t_0) = \Phi(-t_1), \quad \Phi(-t_0) = \Phi(t_1) \quad (35)$$

где через $\Phi(t)$ обозначено выражение

$$\frac{f(t)}{(1 - e^{-at}) \sin t}$$

Покажем, что уравнения (35) несовместимы, по крайней мере если t_0 и t_1 могут принимать те значения, при которых выполняются неравенства (34), т. е. при $\pi < t_0 < t_1 < t'$, где $t' = \theta$ в случае перерегулирования и t' таково, что $f(-t') = 0$ в случае недорегулирования.

В самом деле,

$$\Phi'(t) = -\frac{ae^{-at}}{(1 - e^{-at})^2} \frac{f(t)}{\sin t} - \frac{e^{-(a+b)t}}{1 - e^{-at}} \frac{e^{-(a+b)t} - \cos t - (a+b) \sin t}{\sin^2 t}$$

Отсюда в силу условий $t > \pi$ и (34) следует, что при рассматриваемых значениях $\Phi'(t) < 0$, $\Phi'(-t) > 0$.

Значит, если $t_0 > t_1$ и $-t_0 > t_1$, то при выполнении первого из уравнений (35): $\Phi(t_0) = \Phi(-t_1)$ будем иметь

$$\Phi(-t_0) > \Phi(-t_1) = \Phi(t_0) > \Phi(t_1)$$

и, следовательно, уравнения (35) несовместимы. Поэтому $t_1 = t_0$, но тогда из (33) следует, что $v_0 = -v_1$. Следовательно, точка M_1 должна быть симметрична M_0 относительно начала координат. Вопрос о существовании таких точек и их числе легко решается на основании установленных в § 6 свойств функции $\varphi(t) = -\xi_1/\xi_0$. Именно, согласно полученным там результатам кривая $\varphi(t) = [e^{-at} f(-t)]/f(t)$ пересекается с прямой $\varphi = 1$

в одной и только одной точке $t = t^*$, если $e^{b\theta} [b \sin \theta - \cos \theta] < 1$, что и имеет место в рассматриваемом случае устойчивости в малом отрезка покоя; при этом $t^* > \pi$, ибо $\varphi(\pi) = e^{b\pi} > 1$. Следовательно, при некотором значении $t = t^*$ имеем

$$\xi_0^* = v^* f(t^*) = v^* e^{-at^*} f(-t^*) = -\xi_1^*$$

Значение v^* легко определяется из условия $\eta_0^* = -\eta_1^*$. Получим

$$\begin{aligned} v^* &= \frac{1}{e^{-at^*} g(-t^*) - g(t^*)} = \frac{1}{e^{-at^*} g(-t^*) - g(t^*) + \frac{2b}{1+b^2} [e^{-at^*} f(-t^*) - f(t^*)]} = \\ &= \frac{1}{-\sin t^* [e^{-at^*} + 1] (1+b^2) \frac{1+(a+b)^2}{a^2}} > 0 \end{aligned} \quad (36)$$

ибо

$$\pi < t^* \leq \theta < 2\pi$$

Тем самым доказано существование одной и только одной точки $M^*(\xi^*, \eta^*)$, лежащей в $G^{(1)}$ и неподвижной при преобразовании T^2 . Поскольку в § 7 было установлено, что при устойчивости отрезка покоя ни одна точка $G^{(1)}$, не принадлежащая $\bar{G}^{(1)}$, не может вернуться в исходное положение после S^+ , S^- и E , то установлено, что при применении преобразований S^+S^- или S^+ES^- , или S^+S^-E , или S^+ES^-E одна и только одна точка плоскости ξ, η , именно точка M^* , возвращается в исходное положение; при этом она после T переходит в симметричное относительно начала координат положение и никогда не попадает в $G^{(2)}$. Рассмотрим вопрос о ее характере.

Если обозначить через $M_0(\xi_0, \eta_0)$ точку, достаточно близкую к $M^*(\xi^*, \eta^*)$, то из формул перехода следует, что координаты ξ_1, η_1 преобразованной точки M_1 будут аналитическими функциями ξ_0, η_0 . То же справедливо и для точки $M_2(\xi_2, \eta_2)$, получаемой преобразованием S^- из точки M_1 .

Поэтому характер точки M^* определяется модулями корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_0} - \rho & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_0} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_0} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_0} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

где значения производных взяты при $\xi_0 = \xi^*, \eta_0 = \eta^*$.

Именно, если оба корня (37) по модулю больше единицы, то M^* есть неустойчивая точка типа узла или фокуса; если эти корни по модулю меньше единицы, — устойчивая точка того же типа; если же один из корней по модулю больше, а другой меньше единицы, то M^* есть точка типа седла (термин «неустойчивость» означает в данном случае, что все близкие точки при повторении преобразования удаляются от M^*). Для упрощения вычисления заметим, что при $\xi_0 = \xi^*, \eta_0 = \eta^*$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_0}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_0}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_0}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_0}$$

Последняя кривая $b = \frac{1}{2}a$ соответствует случаю $B = 0$ (случай Мизеса).

Как видно из фиг. 8, точки (P, Q) , определяемые (39), лежат в той части плоскости P, Q , которой соответствуют уравнения (38), один из корней которого по модулю больше, а другой — меньше единицы.

Таким образом, точка M^* есть точка типа седла (direct unstable point по терминологии Биркгофа).

Отметим еще, что по уравнениям, определяющим переменные t^*, v^* , нетрудно видеть, что:

Если параметры A и B меняются, приближаясь к $AB = 1$ (т. е. $b \rightarrow 0$), то точка M^* удаляется в бесконечность, причем

$$t^* \rightarrow \pi, \quad v^* \rightarrow \infty \quad (40)$$

Если параметры A и B меняются, приближаясь к границе области устойчивости отрезка покоя, то

$$t^* \rightarrow \theta, \quad \xi^* \rightarrow \frac{1}{e^{b\theta} \sin \theta}, \quad \eta^* \rightarrow -Aq\xi^* + \frac{1}{2} \quad (41)$$

т. е. точка M^* приближается к точке C пересечения кривой j с $\lambda(\theta)$.

Заметим, что в момент смены устойчивости отрезка покоя $\varphi(\theta) = 1$ и, следовательно, все точки $\lambda(\theta)$ при S^+ сохраняют ту же абсолютную величину абсциссы.

Поэтому в этот момент C по S^+ переходит в C' и, следовательно, $\lambda_1(\theta)$ пересекает $\lambda'(\theta)$ в C' , а $\lambda_1'(\theta)$ пересекает $\lambda(\theta)$ в C (точки A и A' тоже попадают в C).

Из сохранения абсцисс $\lambda(\theta)$ при S^+ следует, что в момент смены устойчивости отрезка покоя мы имеем континуум периодических по T точек — именно все точки параллелограмма, образованного лучами $\lambda(\theta)$, $\lambda'(\theta)$, $\lambda_1(\theta)$, $\lambda_1'(\theta)$.

Если же точки (A, B) на плоскости AB пересекают кривую, попадая в область V_2 , то, как было показано в § 6, никаких периодических по T точек нет.

Таблица 4

III	Кривая IV			Кривая V		
≈ 0.4952	$a = 1.04$			$b = \frac{a}{2}$		
—0.211	0	—0.967	—0.035	0	—0.000	—1.000
—0.224	0.03	—1.061	—0.035	0.02	—0.183	—0.940
—0.234	0.06	—1.154	—0.034	0.06	—0.521	—0.824
—0.238	0.08	—1.170	—0.016	0.08	—0.675	—0.763
—0.231	0.09	—1.161	—0.012	0.12	—0.902	—0.682
—0.202	0.10	—1.000	0.000	0.16	—1.240	—0.526
—0.166				0.18	—1.360	—0.457
—0.095				0.20	—1.457	—0.377
—0.041				0.22	—1.500	—0.280
—0.000				0.24	—1.374	—0.144
				0.2476	—1.000	—0.000

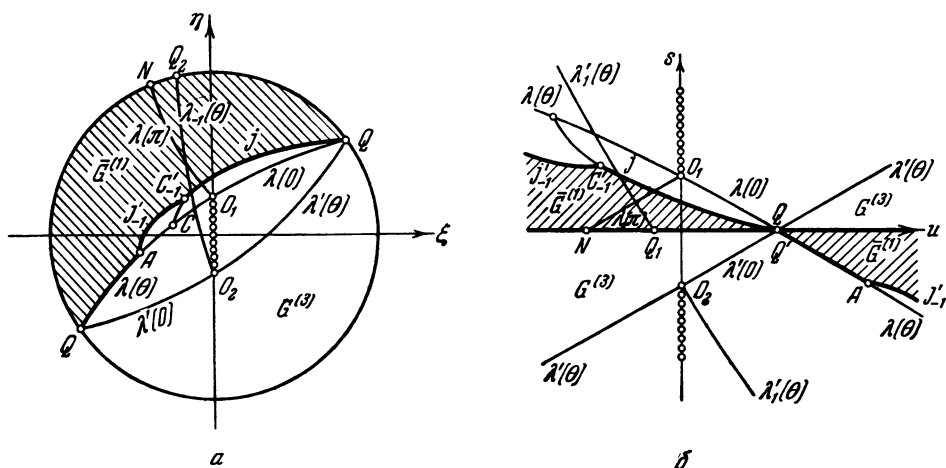
§ 10. Область условной устойчивости (область V_1).

Поведение далеких точек

Рассмотрим теперь вопрос о поведении весьма далеких от начала координат точек $\bar{G}^{(1)}$ при преобразовании T^2 . Для этого воспользуемся сферой Пуанкаре. Положим

$$u = \frac{\xi}{\eta}, \quad s = \frac{1}{\eta} \quad (42)$$

На фиг. 9, а и б показаны область $\bar{G}^{(1)}$ плоскости ξ, η (в проекции нижней полусферы Пуанкаре) и соответствующая часть плоскости u, v ;



Фиг. 9

обе заштрихованы и соответствующие друг другу точки и линии обозначены одинаковыми буквами.

Ось ξ переходит в бесконечно удаленную прямую плоскости u, s , а потому все линии и отрезки, пересекающие ось ξ , на плоскости u, s уходят в бесконечность; диаметрально противоположные точки граничного круга фиг. 9, а совпадают на фиг. 9, б (как точки Q и Q').

Кривая j пересекается с осью u именно в точке Q , ибо

$$\frac{\eta_j^{-1/2}}{\xi_j} = \frac{g(t)}{f(t)}$$

как следует из (j).

Формулы, определяющие преобразования S^+ и S^- для плоскости u, s , будут, очевидно в силу (42), если положить $w = v^{-1}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{f(t)}{g(t) - R w}, & s_0 &= \frac{w}{g(t) - R w} \\ u_1 &= \frac{-e^{-at} f(-t)}{e^{-at} g(-t) - R w}, & s_1 &= \frac{w}{-e^{-at} g(-t) - R w} \end{aligned} \quad (43)$$

где $R = -1/2$ для S^+ и $R = +1/2$ для S^- .

Для точек оси u имеем $w = 0$ и (43) показывает, что точки оси u переходят при T и тем самым при T^2 в самих себя. Нетрудно видеть

из (43), что если какая-либо точка P оси u по T переходит в $P_1 = TP$, то все близкие к P точки плоскости u , s переходят в точки, близкие к P_1 . Исключение составляют две точки.

Во-первых, точка Q . Именно, точки $\bar{G}^{(1)}$, лежащие вблизи Q над осью u , по T перейдут в точки $G^{(3)}$, лежащие под осью u вблизи Q ; сама точка Q , как граничная их точка, останется инвариантной. Но при повторном преобразовании полученные таким образом точки $G^{(3)}$, равно как и точки $\bar{G}^{(1)}$, лежащие вблизи Q под осью u , перейдут в окрестность точки Q_1 — точки пересечения $\lambda_1(\theta)$ с осью u . Сама точка Q перейдет в точку Q_1 .

Таким образом, мы будем иметь разрыв преобразования вблизи точки Q . Но точки всего отрезка QQ_1 не имеют предшествующих по T . Поэтому, если рассматривать те точки оси u , которые сохраняются на ней после одного преобразования T (или T^2), то разрыва в Q не будет.

Во-вторых, одна из точек оси u , скажем M , переходит в бесконечно удаленную точку оси u (изображающую «конец» оси ξ). Тем самым преобразование в этой точке терпит разрыв. Но легко видеть, что достаточно близкие к M точки $\bar{G}^{(1)}$ (и $G^{(3)}$) по T перейдут в достаточно далекие точки плоскости u , s и при повторном применении преобразования перейдут в точки, близкие к той, в которую переходит бесконечно удаленная точка оси u . Таким образом, этот разрыв несущественный¹.

Отсюда следует, что все точки оси u при преобразовании T^2 стремятся к неподвижным точкам этого преобразования. Неподвижными точками T^2 будут неподвижные или периодические (с периодом 2) точки преобразования T . Неподвижной точкой будет такая точка $u_0 = f(t_0)/g(t_0)$, что $u_0 = u_1$ или

$$\frac{f(t_0)}{g(t_0)} = \frac{f(-t_0)}{g(-t_0)}$$

Из этого уравнения легко вытекает, что $t_0 = 0$ или π . Значение $t = 0$ соответствует точке Q , исключенной из рассмотрения, и к ней не приближается никакая точка оси u (она не входит в множество точек, остающихся на оси u после T^2 , как выше установлено). Значению $t = \pi$ соответствует точка N с координатами

$$u_N = -\frac{1+b^2}{2b}, \quad s_N = 0$$

На плоскости ξ, η это означает, что лучи $\lambda(\pi)$ и $\lambda_1(\pi)$ составляют одну прямую. Поэтому точки оси u , соответствующие значениям $t_0 < \pi$, пере-

¹ Его легко устранить, рассматривая точки оси u , сохранившиеся после однократного применения T , и перенеся бесконечно удаленную точку в одну из точек отрезка QQ_1 или в самую точку Q . Это достигается преобразованием вида

$$\tilde{u} = \frac{1}{u - u_0}$$

где $\tilde{u}$ — новая координата. В координатах $\tilde{u}, s$ преобразование будет непрерывным. По отношению к T^2 разрыва не будет и в исходных координатах.

ходят в такие точки оси u , которым соответствует $t_1 > \pi$. Из этого простого замечания сразу вытекает, что на оси u нет периодических по T точек с периодом 2. В самом деле, если точка $u_0 = f(t_0)/g(t_0)$ переходит по T в $u_1 = f(t_1)/g(t_1)$, а u_1 снова переходит в u_0 , то мы должны иметь

$$\frac{f(t_0)}{g(t_0)} = \frac{f(-t_0)}{g(-t_0)}, \quad \frac{f(-t_0)}{g(-t_0)} = \frac{f(t_1)}{g(t_1)}$$

что после несложных преобразований дает

$$\frac{e^{(a+b)t_0} - e^{-(a+b)t_0}}{\sin t_0} = \frac{e^{(a+b)t_1} - e^{-(a+b)t_1}}{\sin t_1}$$

и, значит, $\sin t_0$ и $\sin t_1$ должны иметь одинаковые знаки, т. е. либо t_0 и t_1 оба меньше π , либо t_0 и t_1 оба больше π , что невозможно. Таким образом, точка N есть единственная неподвижная по T^2 точка оси u , и легко проверить, что к ней стремятся все точки оси u , достаточно близкие к ней.

Рассмотрим теперь вопрос о поведении точек $\bar{G}^{(1)}$ (и соответствующих точек $G^{(3)}$), достаточно близких к оси u (т. е. достаточно далеких от начала координат на плоскости ξ, η) при неограниченном повторении T^2 .

Сколь бы ни была мала окрестность точки N и какова бы ни была точка M на оси u , все точки достаточно малой окрестности точки M после конечного числа повторений T^2 попадут в указанную окрестность точки N .

Следовательно, достаточно рассмотреть поведение при T^2 точек достаточно малой окрестности N .

Трудность заключается в том, что точки $\bar{G}^{(1)}$ по T переходят в точки $G^{(3)}$ и коэффициент R в (43) меняет знак.

Поэтому мы будем рассматривать T^2 как повторение преобразования T' , заключающегося в том, что точка u_0, s_0 переходит не в точку u_1, s_1 по (43), а в точку $u_1, -s_1$, что соответствует переходу точки ξ_0, η_0 в точку $-\xi_1, -\eta_1$ и не меняет, с точностью до симметрии относительно начала координат, дальнейшего хода точки при итерации T или T' ; ясно, что $T'^2 = T^2$.

По T' каждая точка $\bar{G}^1$ перейдет опять в точку $\bar{G}^{(1)}$. Поэтому мы можем рассматривать преобразование T' , считая R все время равным $-\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{f(t_0)}{g(t_0) + \frac{1}{2}w_0}, & s_0 &= \frac{w_0}{g(t_0) + \frac{1}{2}w_0} \\ u'_1 &= \frac{-e^{-at_0}f(-t_0)}{-e^{-at_0}g(-t_0) + \frac{1}{2}w_0}, & s'_1 &= \frac{-w_0}{-e^{-at_0}g(-t_0) + \frac{1}{2}w_0} \end{aligned}$$

К преобразованию T' можно приложить обычные приемы исследования и определить характер неподвижной точки N при помощи характеристического уравнения. Его корни будут

$$\rho_1 = -e^{-(a+b)\pi} > -1, \quad \rho_2 = e^{-b\pi} < 1$$

Следовательно, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| < 1$ и N является узлом преобразования T' и тем самым T^2 (по терминологии Биркгофа, N будет *inversly stable point* для T' и *directly stable point* для T^2).

Таким образом, все точки достаточно малой окрестности N при итерации T' , а тем самым и T^2 , неограниченно приближаются к N . Отсюда, согласно сделанным выше рассуждениям, следует, что все точки достаточно малой окрестности оси u (все достаточно далекие точки $\bar{G}^{(1)}$ на плоскости ξ, η) при повторении T^2 стремятся к точке N (уходят в бесконечность, асимптотически приближаясь к лучу $\lambda(\pi)$).

§ 11. Область условной устойчивости (область V_1).

Общая качественная картина поведения точек плоскости ξ, η при повторении T

Так как при E точки $G^{(2)}$ переходят либо в точки $G^{(1)}$, либо в точки $G^{(3)}$ и так как поведение точек $G^{(1)}$ и точек $G^{(3)}$ при повторении T одинаково с точностью до симметрии относительно начала координат, то достаточно рассмотреть поведение точек $G^{(1)}$ при повторении T .

Частично это было сделано в § 7, где было установлено, что те точки $G^{(1)}$, которые после T^2 не возвращаются в $G^{(1)}$, стремятся к отрезку покоя.

Таким образом, требует исследования та часть $G^{(1)}$, точки которой по T^2 вновь попадают в $G^{(1)}$ — часть, обозначенная в § 7 через $\bar{G}^{(1)}$, ограниченная контуром L , состоящим из:

- а) части линии j (точки j по T переходят в точки прямой $-Aq\dot{\xi} + \dot{\eta} + 1/2 = 0$);
- б) линии j'_{-1} (точки j'_{-1} по T переходят в точки j');
- в) части линии $\lambda(\theta)$.

Мы покажем, что каждая точка $\bar{G}^{(1)}$ либо уходит в бесконечность, либо идет к седлу M^* (и тогда лежит на ω — сепаратрисе этого седла), либо через конечное число шагов выходит из $\bar{G}^{(1)}$ и, следовательно, стремится к отрезку покоя.

Это будет показано применением теоремы IIIа (см. математическое приложение); чтобы применить эту теорему, сведем сперва задачу к задаче преобразования конечной области.

Переведем плоскость ξ, η на нижнюю полусферу Пуанкаре и затем спроектируем на горизонтальную плоскость.

Тогда $\bar{G}^{(1)}$ перейдет в конечную область, которую мы будем по-прежнему обозначать через $\bar{G}^{(1)}$, ограниченную контуром L , состоящим из конечного числа аналитических дуг (см. фиг. 10):

- а) полуокружностью QQ' ;
- б) линией $Q'A$ — изображением части луча $\lambda(\theta)$ до точки A пересечения $\lambda(\theta)$ с j'_{-1} ;
- в) линией AC'_{-1} — изображением линии j'_{-1} ;
- г) линией $C'_{-1}Q$ — изображением части линии j .

Преобразование T^2 индуцирует преобразование конечной области $G^{(1)}$ в некоторую область $\bar{G}_1^{(1)}$.

Мы будем обозначать через U определенное таким образом преобразование, расширенное, как это было сделано в § 9, на полуокружность $Q'Q$ и определенное таким образом на $\bar{G}^{(1)} + L$. Согласно ранее установленному, преобразование U имеет следующие свойства:

1) U допускает две неподвижные точки:

1а) одну неподвижную точку N , лежащую на L типа устойчивого узла;

1б) одну неподвижную точку M^* внутри $\bar{G}^{(1)}$ типа седла;

2) всюду в $\bar{G}^{(1)} + L$ преобразование U взаимно однозначно, непрерывно¹ и сохраняет направление вращения, а в некоторой окрестности M^* голоморфно.

Докажем, что условия (3) применимости теоремы IIIa (см. математическое приложение) здесь также выполнены.

Для этого рассмотрим точки пересечения контура L и контура $L_1 = UL$.

Очевидно, что дуга Q_2Q_1 , содержащая N внутри (результат преобразования полуокружности $Q'Q$), будет общей для контуров L и L_1 . Это согласуется с условием 3 (см. математическое приложение).

Остальные точки пересечения L_1 и L будут точками пересечения с контуром L линии $U(Q'A)$ [на плоскости ξ, η это часть линии $\lambda_2(\theta)$], $U(AC'_{-1})$ [на плоскости ξ, η — часть прямой — $Aq\xi + \eta^{-1/2} = 0$] и $U(C'_{-1}Q)$ [на плоскости ξ, η — часть прямой $\lambda_1'(\theta)$].

Линия $U(AC'_{-1}) = A_2C'_1$ составляет часть дуги $Q'Q$ (являющейся изображением прямой — $Aq\xi + \eta^{-1/2} = 0$); в силу определения линий j и j'_{-1} точка C'_1 лежит на пересечении линии $Q'Q$ и линии $U(C'_{-1}Q)$, являющейся изображением прямой $\lambda_1'(\theta)$.

Благодаря устойчивости отрезка покоя точка C'_1 лежит между C и O_1 .

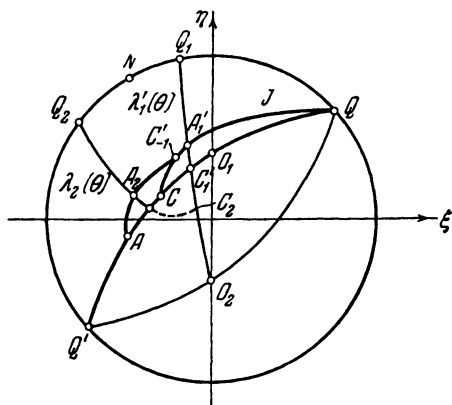
В связи со сказанным в § 7 точка A_2 лежит между A и C'_1 . Таким образом, пересекаться с L могут только линии

$$U(Q'A) = Q_2A_2 \text{ и } U(C'_{-1}Q) = C'_1Q_2$$

Число точек пересечения Q_2A_2 с L может быть и велико², обозначим

¹ Отмеченный в § 10 разрыв преобразования на экваторе в точке теперь не имеет места, так как удалены из рассмотрения точки $\bar{G}^{(1)}$, лежащие над осью U (они не в нижней полусфере), и точки $\bar{G}^{(3)}$.

² Расположение линий на фиг. 10 носит схематический характер; ввиду сложности уравнений и разнообразия могущих быть случаев мы не выясняем всех дета-



Фиг. 10

первую из них (считая A_2Q_2 при движении из A_2KQ_2') через K_1' , последнюю через K_1 ; их прообразы по U будут точки дуги $Q'A$; обозначим их через K' и K соответственно; ясно, что расположение этих точек на дуге $Q'A$ должно быть: $QKK'A$; все точки пересечения A_2Q_2 лежат между K_1' и K_1 и имеют свои прообразы по U между K и K' на QA (фиг. 10 изображает случай единственной точки пересечения A_2Q_2 и AC_{-1}' , тогда $K \equiv K'$, $K_1 \equiv K_1'$).

Число точек пересечения C_1' , Q_2 с L может быть и велико; с линией j прямая $\lambda_1'(Q)$, как было указано в § 7, пересекается лишь в одной точке; точное выяснение возможного числа точек пересечения $\lambda_1'(\theta)$ с j_{-1} было бы сложно и совершенно излишне. Решающим является то обстоятельство, что прообраз A'_{-1} по T^2 точки A_1' пересечения f и $\lambda_1'(\theta)$ лежит на той части j , которая переходит по нашему изображению в дугу $A_1'Q$. Докажем это.

Заметим, что совпадение A_1' и A'_{-1} возможно лишь в момент смены устойчивости отрезка покоя; в противном случае мы получили бы несимметрическую периодическую точку: A'_{-1} переходит по T в точку $\lambda'(\theta)$ (ибо A'_{-1} лежит на j) и после T возвращается в $A_1 \equiv A_1'$. В § 9 было показано, что таких точек нет. Если бы при одних значениях параметров ($A = A_0$, $B = B_0$) из рассматриваемой области V_1 точка A'_{-1} лежала на части j , изображаемой дугой $A_1'Q$, а при других значениях параметров ($A = A_0^*$, $B = B_0^*$) из той же области V_1 точка A'_{-1} лежала на части j , изображаемой дугой $C'_{-1}A_1$, то, двигаясь в области V_1 плоскости A, B от точки (A_0, B_0) к точке (A_0^*, B_0^*) , мы в силу непрерывности получили бы значения параметров $(\bar{A}_0, \bar{B}_0)$, при которых A'_{-1} совпадает с A_1' , чего быть не может, как было указано выше.

Поэтому точка A'_{-1} либо всегда лежит на части j , изображаемой дугой $A_1'Q$, либо всегда лежит на части j , изображаемой дугой $C'_{-1}A_1$.

Достаточно сделать числовой расчет положения A_1' и A'_{-1} на j для какого-либо значения основных параметров из области V_1 , чтобы установить, какой именно случай имеет место.

Чи словой подсчет был сделан для $A = 1.940$, $B = 0$ и дал такие значения абсцисс A_1' и A'_{-1} : абсцисса A_1' равна -0.298 ; абсцисса A'_{-1} равна $+0.594$. Поскольку абсциссы точек кривой j монотонно возрастают при движении по этой кривой, начиная (ср. § 7) с точки C , наше утверждение доказано: точка A'_{-1} всегда лежит на части j , изображаемой дугой $A_1'Q$.

В силу этого нетрудно определить расположение точек пересечения $C_1'Q_2$ с L .

Именно, если $C_1'Q_2$ не пересекается с дугой AC'_{-1} (изображением j'_{-1}), то $C_1'Q_2$ имеет единственную точку пересечения с L — точку A_1' , прообраз которой по U будет A'_{-1} лежит на $A_1'Q$ (случай, показанный на

лей возможного расположения линий, но ограничиваемся лишь установлением тех особенностей пересечения L_1 и L , которые позволяют применить теорему Ша (см. математическое приложение).

фиг. 10); в этом случае возьмем за S и за S' одну и ту же точку A_{-1}' .

Дуги s и s' условия 3 теоремы IIIa (см. математическое приложение) будут:

дуга s контура L

$$KAC'_{-1}A'_{-1}$$

дуга s' контура L

$$K'AC'_{-1}A'_{-1}$$

Условия теоремы IIIa выполнены.

Если C'_1Q_2 пересекается с дугой AC'_{-1} (изображением j'_{-1}), то прообразы всех этих точек пересечения лежат на части j , изображаемой дугой $A'_{-1}Q$.

Обозначим: первую (при движении по C'_1Q_2 от C'_1 к Q_2) из точек пересечения C'_1Q_2 с AC'_{-1} через S'_1 , ее прообраз по U через S' ; последнюю из точек пересечения C'_1Q_2 и AC'_{-1} через S_1 , ее прообраз по U через S . Ясно, что расположение точек S' и S на дуге $A'_{-1}Q$ будет $A'_{-1}S'SQ$. За дугу s условия 3 теоремы IIIa (см. математическое приложение) можно взять дугу $KAC'_1A'_1S$, а за дугу s' — дугу $K'AC'_{-1}A'_1S$, и все условия приложимости теоремы IIIa будут выполнены.

Применяя к области $\bar{G}^{(1)}$ и преобразованию U теорему IIIa, мы получаем следующее.

Каждая точка $\bar{G}^{(1)}$ при повторном применении U либо неограниченно приближается к узлу N , либо приближается к седлу M^* (и тогда лежит на ω -сепаратрисе седла), либо через конечное число шагов попадает вне области $\bar{G}^{(1)}$.

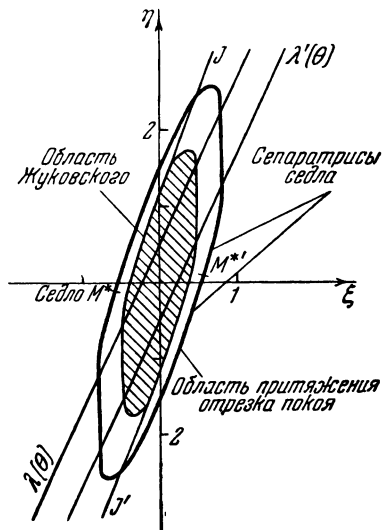
На плоскости ξ, η , в силу того, что точки $\bar{G}^{(1)}$, попавшие вне $\bar{G}^{(1)}$, при

T стремятся к отрезку покоя, при повторении T (как было показано в § 7) имеем: каждая точка плоскости ξ, η при повторении преобразования S^+, E, S^- либо уходит в бесконечность, либо стремится к отрезку покоя, либо же лежит на ω -сепаратрисе седла M^* и приближается к M^* .

Таким образом, область притяжения в большом отрезка покоя (т. е. область тех начальных возмущений, при которых возмущенное движение затухает) ограничена ω -сепаратрисами седла M^* .

Качественное построение этих сепаратрис совершается следующим образом.

По U , ω -сепаратрисы M^* определены в $\bar{G}^{(1)}$; тем самым определены точки их пересечения с $\lambda(\theta)$; прямые, параллельные оси η , дают



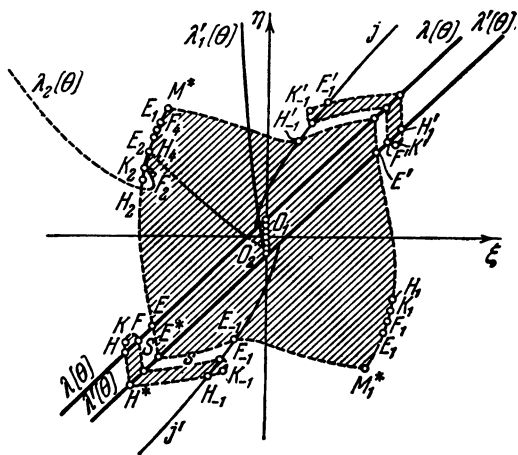
Фиг. 11

продолжение сепаратрисы в $G^{(2)}$, а прообразы этих прямых по S^- из $G^{(3)}$ определяют продолжение сепаратрисы в $G^{(3)}$ до ее пересечения с j' . Таким образом, в силу симметрии получаем полностью границу области притяжения отрезка покоя (фиг. 11). В § 12 указаны приемы, позволяющие дать числовые подсчеты точек сепаратрисы для различных значений параметров A и B из области V_1 .

Эти числовые подсчеты не показали, что реально осуществляется такой логически мыслимый случай: ω -сепаратриса M^* пересекается с $\lambda_2(\theta)$, а тем самым и с $\lambda(\theta)$, в нескольких точках. Если бы этот случай осуществился, то «область притяжения в большом» отрезка покоя распалась бы на несколько областей (ср. заштрихованные области схематического чертежа на фиг. 12).

Однако, поскольку плоскость ξ, η имеет вспомогательное значение, а главным является вопрос об области устойчивости в большом отрезка покоя в трехмерном пространстве ξ, η, ζ (или x, y, z в первоначальных координатах), указанный вопрос теряет интерес: отдельные части области устойчивости в большом на плоскости связаны между собой дугами траекторий в пространстве и потому не порождают отдельных частей области устойчивости в большом в трехмерном пространстве.

Например, для случая, схематически показанного на фиг. 12, точки H, K и F переходят по S^+ в точки H_1, K_1, F_1 , и по S^- в точки H_2, K_2, F_2 и таким образом соединяются пространственными кривыми с ос-



Фиг. 12

тальными точками области устойчивости в большом. Поскольку точки $G^{(1)}$, лежащие между $\lambda_2(\theta)$ и $\lambda(\theta)$, не имеют себе предшествующих по T^2 (т. е. пространственные кривые с ростом t впервые пересекаются с $G^{(1)}$ именно в этих точках), такое соединение областей не противоречиво.

Отметим, что в этом логически мыслимом случае все точки области EFF^*F-E^*E [ограниченной отрезком $\lambda(\theta)$, дугой j' , отрезками прямых, параллельных оси η , и дугами, переходящими в них по S^-] переходят в отрезок $\lambda(\theta)$ между точками F и E и потому принадлежат сепаратрисе, т. е. в силу отсутствия взаимной однозначности преобразования сепаратриса включает в себя целую область w . Эта область w породит и целую область в пространстве, заполненную кривыми, попадающими в точки w . Наличие такой области означало бы, что при определенных начальных возмущениях (соответствующих точкам w) мы будем иметь дело с незатухающими и ненарастающими колебаниями. Однако, как

уже было сказано, числовые подсчеты не обнаружили осуществления подобной логической возможности.

§ 12. Область условной устойчивости (область V_1).

Числовые подсчеты

Чтобы получить представление об области устойчивости в большом отрезке покоя и ее изменении при изменении параметров A и B , мы определим числовыми расчетами точку пересечения сепаратрисы с лучом $\lambda(\theta)$. Эта точка будет, таким образом, давать границу тех начальных значений, удовлетворяющих условию

$$|-Aq\xi + \eta| \leq \frac{1}{2} \quad (44)$$

при которых сходимость процесса регулирования имеет место.

Очевидно, достаточно вычислить абсолютную величину абсциссы этой точки, которую мы обозначим через $|\xi_s|$.

Вычисления будем вести при постоянном B и переменном A . Тогда на плоскости A $|\xi_s|$ мы получим кривую $|\xi_s| = |\xi_s(A)|$, уходящую в бесконечность при $A \rightarrow 1/B$ (ибо при $AB = 1$ имеем: $b = 0$ и седло M^* уходит в бесконечность) и начинающуюся в точке

$$|\xi_s| = |\xi_c| = \frac{1}{e^{b\theta} \sin \theta}$$

при том значении A_B , при котором для заданного B отрезок покоя теряет устойчивость.

Таким образом, область «допустимых абсцисс», т. е. абсцисс, при которых для начальных условий, удовлетворяющих условию (44), имеет место сходимость процесса регулирования, будет ограничена линиями: 1) отрезком $A = A_B$, $0 \leq |\xi| \leq |\xi_c|$; 2) линией $|\xi_s| = |\xi_s(A)|$, и лежит справа и внизу от этих линий.

Однако мы будем строить не эту именно диаграмму, а другую, подобную диаграмме, построенной Мизесом для рассмотренного им случая $B = 0$.

Отличия таковы:

1) построение ведется не для самой абсциссы ξ_s , а для ее обратной величины $1/\xi_s$;

2) построение ведется не в координатах ξ , η , а в первоначальных координатах x , y [см. § 4, (9)].

Следовательно, будет строиться кривая

$$\beta_s = \frac{1}{|x_s|} = \left| \frac{p}{\xi_s} \right| = \beta_s(A, B)$$

при переменном A и фиксированном B . Область, соответствующая допустимым (в смысле сходимости процесса регулирования) начальным условиям, будет ограничена следующими линиями: 1) полупрямой

$$A = A_B, \quad \beta_s \geq \left| \frac{q}{\xi_c} \right| = \left| \frac{q}{e^{b\theta} \sin \theta} \right|$$

2) линией $\beta = \beta_s(A, B)$, и будет расположена справа от этих линий и над ними.

Для сравнения будем рисовать также при тех же значениях B кривую

$$\beta_j = |qe^{b\theta} \sin \theta| = \beta_j(A, B)$$

дающую соответствующую оценку области технической устойчивости по Жуковскому.

Подсчет величины β_s можно провести приемом, вполне аналогичным приему, использованному Мизесом в его случае $B = 0$.

Мы опишем ход вычислений, пользуясь координатами ξ , η .

Составим три функции:

$$\varphi(t) = \frac{e^{-at}f(-t)}{f(t)} = -\frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad k(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{\eta_0 - 1/2}{\xi_0}, \quad k(-t) = \frac{g(-t)}{f(-t)} = \frac{\eta_1 - 1/2}{\xi_1}$$

где через ξ_0 , η_0 обозначены координаты исходной точки куска $G^{(1)}$, через ξ_1 , η_1 — координаты преобразованной по S^+ точки. Роль, аналогичную $k(t)$ для исходной точки, будет играть для преобразованной точки, если она лежит в $G^{(3)}$, функция

$$k_1(t) = \frac{\eta_1 + 1/2}{\xi_1} = k(-t) + \frac{1}{\xi}$$

Все эти функции нами были рассмотрены: первая $\varphi(t)$ в § 6, вторая и третья — в § 4.

Все они монотонны (что очень облегчает вычисления, как сейчас будет видно).

Пусть мы задали какие-нибудь начальные значения k_0 и

$$-\frac{1}{\xi_0} = \left| \frac{1}{\xi_0} \right|$$

Тогда по монотонности функции $k(t)$ можно найти соответствующее t и тем самым — $\varphi(t)$. Выражение

$$-\frac{1}{\varphi(t)\xi_0} = \frac{1}{\xi_1} = \left| \frac{1}{\xi_1} \right|$$

играет роль второй координаты для преобразованной точки. Соответствующее $k_1(t)$ находится из выражения

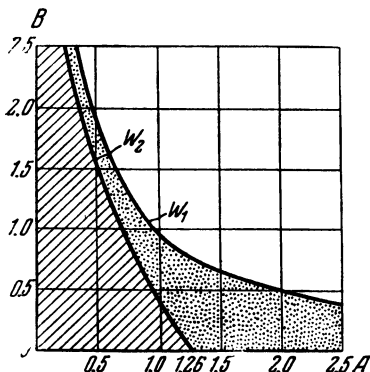
$$k_1(t) = k(-t) + \frac{1}{\xi_1} = k(-t) - \frac{1}{\varphi(t)\xi_0}$$

Таким образом, мы нашли для преобразованной по S^+ точки $k_1(t)$ и $|\xi_1^{-1}|$ и можем снова проделать те же вычисления (описывающие теперь преобразование S^-). Начальное значение k_0 берем соответствующим лучу $\lambda(\theta)$, т. е. $k_0 = +Aq$. Оказывается, что при одних начальных значениях $-\xi_0^{-1}$ величины $|\xi_n^{-1}|$ начинают с увеличением n весьма быстро расти (что соответствует приближению точки к отрезку покоя), а при других уменьшаться (что соответствует удалению точки в бесконечность). После

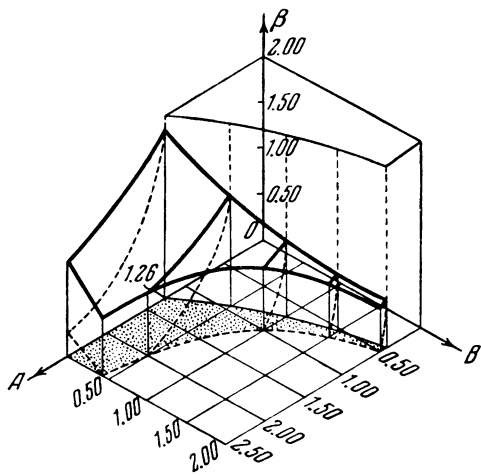
нескольких проб нетрудно приближенно найти граничное значение ξ_0^{-1} , которое и будет искомым.

Фактическое проведение вычислений таково.

Задав A и B (тем самым a , b и θ), строим таблицу значений функций



Фиг. 13



Фиг. 14

$\varphi(t)$, $k(t)$, $k(-t)$. Затем на вспомогательной плоскости u , v строим кривые:

$$\text{а) } u = k(t), \quad v = \varphi(t), \quad \text{б) } u = k(t), \quad v = k(-t)$$

Задав начальные значения k_0 и $-\xi_0^{-1}$, строим на плоскости u , v точки $u_0 = k_0$, $v_0 = -\xi_0^{-1}$; по графикам кривых а) и б) сразу находим соответствующие $\varphi(t)$ и $k(-t)$ и вычисляем

$$\frac{1}{\xi_1} = -\frac{1}{\varphi \xi_0}, \quad k_1(t) = k(-t) - \frac{1}{\varphi \xi_0}$$

Эти найденные значения берем как координаты второй точки:

$$u_1 = k_1, \quad v_1 = \frac{1}{\xi_1}$$

и повторяем те же построения. После немногих шагов уже имеем возможность судить о поведении исходной точки при повторных преобразованиях.

Определив путем нескольких пробных выборов ξ_0^{-1} величину ξ_s , вычисляем

$$\beta_s = \left| \frac{q}{\xi_s} \right|$$

Соответствующее этим A и B значение β_j находим сразу по формуле

$$\beta_j = |qe^{b\theta} \sin \theta|$$

Результаты вычислений приведены в табл. 5.

В этой таблице для значений A и B , соответствующих смене устойчивости, значения β_s совпадают с значениями β_j . Это совпадение нетруд-

но проверить и общими соображениями. В самом деле, как уже было указано в § 9 (см. (41)), в момент смены устойчивости отрезка покоя седло M^* попадает в точку C пересечения кривой j с $\lambda(\theta)$. Можно проверить, что угловой коэффициент касательной к ω -сепаратрисе (которой соответствует корень характеристического уравнения, по модулю меньший 1) при этом стремится к бесконечности, т. е. ω -сепаратриса в точке M^* имеет в момент смены устойчивости вертикальную касательную. Поэтому точка ее пересечения с $\lambda(\theta)$ также приближается к точке C , когда A и B стремятся к границе w_2 области устойчивости, откуда и вытекает совпадение при этих значениях β_s и β_j .

Таблица 5

I. Граница устойчивости w_2

A	0.28	0.38	0.46	0.61	0.70	0.81	0.95	1.14	1.25	1.261
B	3.393	2.348	1.885	1.299	1.014	0.755	0.473	0.157	0.04	0
β_j	0.30	0.41	0.52	0.73	0.87	1.05	1.29	1.64	1.84	1.87

II. Гипербола w_1

A	3.330	2.857	2.000	1.250	1.000	0.500	0.250
B	0.30	0.35	0.50	0.80	1.000	2.000	4.000
β_j	0.52	0.59	0.70	0.75	0.72	0.48	0.25

III. $B = 0$

A	1.26	1.20	1.45	1.60	1.77	1.96	2.18	2.47	2.63	3.32	5.36
β_j	1.87	1.83	1.66	1.55	1.42	1.31	1.19	1.06	1.00	0.80	0.48
β_s	1.87	—	—	0.94	—	0.59	—	0.35	—	—	—

 $B = 0.5$ $B = 1$

A	0.94	1.25	1.45	1.68	2.00	A	0.72	0.84	0.92	1.00
β_j	1.27	1.04	0.94	0.82	0.70	β_j	0.88	0.79	0.75	0.72
β_s	1.27	0.37	—	0.09	0	β_s	0.88	0.28	—	0

На фиг. 13 показаны кривые $\beta_j(A)$ и $\beta_s(B)$ для разных значений B . На фиг. 14 показаны поверхности $\beta_j = \beta_j(A, B)$ и $\beta_s = \beta_s(A, B)$. Наконец, на фиг. 15 показана кривая, по которой перемещается седло M^* при изменении A , для случая отсутствия вязкого трения, т. е. когда $B = 0$ (случай Мизеса). Указаны соответствующие значения A , координаты M_0^* при разных A даны в табл. VI. Положение точки M^* в известной мере определяет размеры области устойчивости в большом отрезке покоя.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы установим одну теорему, относящуюся ко взаимно однозначным и непрерывным преобразованиям некоторой плоской области. Случай, нами рассмотренный, является весьма частным, и те же рассуждения справедливы при гораздо более общих предположениях; наши ограничения введены применительно к условиям, имеющим место в задаче Вышнеградского.

Мы установим сперва некоторые теоремы, представляющие собой довольно простой перенос на наш случай теорем Brouwer'a, установленных при иных предположениях (см. Brouwer, «Beweis des ebenen Translationssatzes», Math. Annalen, 1912, стр. 37—54, теоремы 1, 7 и 8; ср. также Sperner, «Über die fixpunktfreie Abbildung der Ebene», Hamb. Math.), а затем докажем дальнейшее видоизменение одной из них, устанавливающей как раз топологическую структуру преобразования $U = T^2$ § 9.

Пусть нам дана плоская односвязная область G , ограниченная простой замкнутой кривой L ; пусть нам дано преобразование U , определенное в G , обладающее следующими свойствами:

1) U имеет конечное число неподвижных точек, а именно:

а) две неподвижные точки N_1, N_2 , лежащие на L , типа устойчивого узла, т. е. такие, что для каждого N_i можно указать такую окрестность $q_i(N_i)$, что все точки $L + G$, лежащие в $\rho_i(N_i)$, при преобразовании U не выходят из $\rho_i(N_i)$ и неограниченно приближаются к N_i при повторении U ; б) одну точку M^* внутри G типа седла, т. е. такую, что при подходяще выбранных координатах x, y преобразование U в достаточно малой окрестности M^* имеет вид:

$$x_1 = \rho_1 x_0 + \varphi(x_0, y_0), \quad y_1 = \rho_2 y_0 + \psi(x_0, y_0)$$

где через (x_0, y_0) (x_1, y_1) обозначены координаты исходной (преобразованной) точки, $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$; а функции $\varphi(x_0, y_0)$, $\psi(x_0, y_0)$ непрерывны и таковы, что

$$\lim_{x_0^2 + y_0^2 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0, y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \lim_{x_0^2 + y_0^2 \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0, y_0)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = 0$$

(Birkhoff называет такие точки direct unstable point).

2) Всюду в $G + L$ преобразование U взаимно однозначно, непрерывно и сохраняет направление вращения, а в некоторой окрестности точки M^* — голоморфно.

3) $G_1 + L_1 \equiv U(G + L) \in G + L$, причем $L_1 = UL$ не имеет с L других общих точек, кроме $N_1 N_2$ и может быть простых дуг l_1 и l_2 , содержащих внутри N_1 и N_2 .

Хорошо известны следующие свойства таких преобразований.

1. Точки $G + L$, стремящиеся при неограниченном повторении U (U^{-1}), образуют кривую, проходящую через M^* аналитическую в M^* и разделенную M^* на две части*, называемые $\omega - (\alpha)$ -сепаратрисами M^* .

II. Если назвать вектором преобразования R_{MM_1} вектор, идущий из какой-либо точки $M \in G + L$ в точку $M_1 \equiv UM$, то угол поворота вектора R_{MM_1} , когда точка M обходит в положительном направлении простую замкнутую кривую λ , не проходящую через неподвижные точки, равен нулю, если M^* лежит вне λ , и 2π , если M^* лежит внутри¹ λ . (Здесь, как и всюду в дальнейшем, внутренними точками λ называются точки, которые нельзя соединить с точками L простой дугой, не пересекая λ .)

Введем, согласно с Брауэром, следующие термины.

Пусть $M \in G + L$ и $M_1 = UM$. Пусть α — простая дуга с концами в точках M и M_1 , такая, что $\alpha_1 = T\alpha$ имеет с α одну общую точку, именно точку M_1 . Тогда дугу α будем называть «дугой переноса». Множество точек

$$\alpha + \sum_1^{\infty} U^n \alpha$$

будем называть «лучом переноса».

Теорема I². Луч переноса не может иметь двойных точек (т. е. точек, принадлежащих $\alpha_n = U^n \alpha$ и $\alpha_m = U^m \alpha$, $n \neq m$ и отличных от их общего конца, если $|n - m| = 1$).

Будем рассматривать простую дугу, начинающуюся от точки M и получающуюся путем последовательного сложения α , α_1 , α_2 , $\dots$; пусть впервые при присоединении α_k ($k > 1$) не получается простая дуга и обозначим через Q_1 первую от M_k точку пересечения α_k с $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}$, так что простая дуга $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1}$ не имеет с $M_k Q_1$ других точек пересечения, кроме Q_1 . Легко видеть, что $Q_1 \in \alpha$ (если бы $Q_1 \in \alpha_2$, $1 \leq r \leq k-1$, то уже α_{k-r} пересекалось бы с α , вопреки предположению). Ясно (по определению дуги переноса α), что $k \geq 2$. Обозначим через C простую замкнутую кривую, составленную из простых дуг $Q_1 M_1$ (части α) α_1 , α_2 , $\dots$, α_{k-1} и $M_k Q_1$ (части α_k). Точки $Q_2 = U Q_1$ и $Q = U^{-1} Q_1$ принадлежат C ($Q_2 \in \alpha_1$, $Q \in \alpha_{k-1}$). Простая дуга $Q_1 M_{k+1} Q_2$ (состоящая из частей α_k и α_{k+1}) может пересекать лишь дугу $Q_1 M_1$ (часть α), так как в противном случае уже α_{k-1} пересекалась бы с одной из дуг α , α_1 , α_2 , $\dots$, α_{k-2} , вопреки предположению. Поэтому простую дугу $Q_2 M_2 Q_1$ (состоящую из частей дуг α_1 и α_k и простых дуг α_2 , $\dots$, α_{k-1}) можно дополнить до простой замкнутой кривой как при помощи простой дуги $Q_1 M_1 Q_2$ (тогда получим C), так и при помощи простой дуги $Q_1 M_{k+1} Q_2$ (тогда получится простая замкнутая кривая $C_1 = UC$).

Существенно, что простые дуги $Q_1 M_1 Q_2$ и $Q_1 M_{k+1} Q_2$ не могут ограничивать область, содержащую внутри простую дугу $Q M_k Q_1$, так как в противном случае преобразование U меняло бы направление обхода. Но тогда угол, на который поворачивается вектор преобразования R при

* См., например, Birkhoff und Smith. Journal de Math., Bd. VII, 1928.

¹ См. Kerekjarto, Vorlesungen über Topologie, Bd. I, § 2, 4, 1923.

² Точное повторение теоремы I и ее доказательства из указанной работы Брауэра.

перемещении его начальной точки по простой дуге QM_kQ_1 (и, следовательно, конечной точки по дуге $Q_1M_{k+1}Q_2$), будет такой же, как угол поворота вектора, нигде не исчезающего, начало которого движется по простой дуге QM_kQ_1 , а конечная точка — по какому-либо непрерывному закону движения по простой дуге $Q_1M_1Q_2$.

Отсюда следует, что угол поворота вектора преобразования R при обходе начальной точкой кривой C будет такой же, как и угол поворота вектора, нигде не исчезающего, конец которого при обходе начальной точкой кривой C также обходит кривую C (т. е. такой же как вектор преобразования при вращении кривой C), следовательно, будет равен $+2\pi$. Это противоречит приведенной выше теореме об угле поворота вектора R при обходе замкнутой кривой, и теорема I доказана.

Следствие. Пусть Q принадлежит лучу переноса l и именно — дуге α_n (с концами M_n, M_{n+1}), так что $Q_1 \in \alpha_{n+1}$. Простая дуга QQ_1 (состоящая из дуг QM_{n+1} и $M_{n+1}Q_1$) также будет дугой переноса,

Теорема II. Через каждую точку $M \in G_1 + L_1 = U(G + L)$, не инвариантную относительно U , можно провести луч переноса*.

Достаточно доказать, что точку M можно соединить с $M_1 = UM$ дугой переноса.

Соединим M и M_1 простой дугой α , лежащей в G_1 , и пусть $\alpha_1 = U\alpha$.

Возможны два случая:

1) α и α_1 не пересекаются. Тогда теорема доказана.

2) α и α_1 пересекаются.

Обозначим через Q_1 точку пересечения α и α_1 , определенную следующим образом: если $Q = U^{-1}Q_2$, $Q_2 = UQ_1$, то

а) либо MQ_1 не имеет других точек пересечения с M_1Q_2 ,

б) либо M_1Q_1 не имеет других точек пересечения с MQ .

Докажем, что такая точка Q_1 действительно существует.

Пусть S движется по α от M к M_1 ; тогда $S_1 = US$ движется по α_1 от M_1 к M_2 . Возможны два случая:

а) либо точка S , двигаясь по α , пересечет в Q_1 часть дуги α_1 , уже пройденную S_1 до того, как S_1 пересечет часть α , уже пройденную S ; точка Q_1 и будет искомой;

б) либо точка S_1 , двигаясь по α_1 , пересечет в Q_1 часть дуги α , уже пройденную S до того, как S пересечет часть дуги α_1 , уже пройденную S_1 . Точка Q_1 и будет искомой.

Достаточно рассмотреть случай а), так как случай б) обращается в случай а) при замене U на U^{-1} .

Возьмем ε столь малое, чтобы ε -окрестность дуги M_1Q_2 (части α_1) не имела общих точек с точками, предшествующими по U точкам, лежащим в ε -окрестности дуги M_1Q_1 (части α_1 ; эти точки образуют, оче-

* Это повторение теоремы 7 и ее доказательства из цитированной работы Брауэра; не представляет труда перенести на рассматриваемый случай и рассуждения Шпернера.

видно, некоторую окрестность дуги MQ части α). На дуге MQ_1 в ε -окрестности Q_1 возьмем точку R_1 и соединим ее с M_1 дугой β_1 , лежащей в ε -окрестности M_1Q_1 и не пересекающей M_1Q_2 (кроме как в точке M_1) и MQ_1 (кроме как в точке R_1).

Точки дуги $\beta = U^{-1}\beta_1$, соединяющей точку $R = U^{-1}R_1$ с M , тогда не будут пересекаться ни с MR_1 [так как β_1 не пересекается с M_1Q_1], ни с M_1R_2 , где $R_2 = UR_1$ (очевидно, что $R_2 \in M_1Q_2$). Таким образом, простая дуга $RM R_1$ (состоящая из частей β и α) есть дуга переноса, что в силу следствия из теоремы I полностью доказывает утверждение.

Следствие. Пусть $M \in G_1$ не инвариантно и относительно U . Пусть последовательность точек G_1 : $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots$ имеет точку M своей единственной предельной точкой. Всегда можно провести через M луч переноса, содержащий на одной и той же дуге переноса по крайней мере две из точек $w^{(k)}$.

Доказательство. Пусть $M_1 = UM$ и пусть α — луч переноса, соединяющий M с M_1 согласно теореме II. Возьмем столь малую ε -окрестность M , чтобы она не содержала точек L и $\alpha_1 = U\alpha$ и не пересекалась со своим изображением; пусть последняя, считая от M , общая точка α с границей этой окрестности есть D . Если мы дугу MD дуги переноса α заменим какой-либо простой дугой λ , соединяющей точки M и D и лежащей в ε -окрестности M , то дуга α' , состоящая из λ и дуги DM_1 прежней дуги переноса α , очевидно, будет также дугой переноса. Но дугу λ в ε -окрестности M всегда можно провести через две или более точки $w^{(k)}$.

Теорема III. Пусть $M \in G_1 + L_1$ и пусть $M_k = U^k M$. Последовательность $\{M_k\}$ имеет единственную предельную точку, которая будет инвариантной относительно U .

Доказательство. Никакая точка $G_1 + L_1$, кроме точек N_i и M^* , не может быть предельной для $\{M_k\}$, ибо иначе, в силу следствия из теоремы II, мы получили бы дугу переноса, пересекающуюся с одним из своих изображений, что противоречит теореме I. В силу условия (2), если бы в число предельных точек $\{M_k\}$ входила одна из точек N_i , то она была бы единственной предельной точкой последовательности $\{M_k\}$. Следовательно, если последовательность не стремится к одной из точек N_i , то единственной ее предельной точкой может быть точка M^* , что и доказывает теорему.

Перейдем теперь к рассмотрению более сложного преобразования.

Пусть G — попрежнему плоская односвязная область, ограниченная простой замкнутой кривой L , и пусть преобразование U , определенное в G , обладает следующими свойствами:

1) U имеет конечное число неподвижных точек, а именно:

1а) одну неподвижную точку N , лежащую на L , типа устойчивого узла (в прежнем смысле);

1б) одну неподвижную точку M^* внутри G типа седла (в прежнем смысле).

2) всюду в $G + L$ преобразование U взаимно однозначно, непрерывно и сохраняет направление вращения, а в некоторой окрестности точки M^* голоморфно;

3) $L_1 \equiv UL$ имеет с L общими точками, кроме, может быть, некоторой дуги l , содержащей N внутри, точки, расположенные следующим образом:

3а) на L можно указать дугу s с концами в точках K и S , не имеющую ни одной общей точки с l и содержащую все общие точки L_1 и L (кроме l), причем дуги K_1N и S_1N (где $K_1 = UK$, $S_1 = US$) контура L_1 лежат целиком в G кроме, может быть, точек l ;

3б) на s можно указать такую дугу s' с концами в точках K' и S' , что дуги KK' , SS' контура L не имеют общих точек с L_1 , а дуга $s'_1 = Us$ контура L_1 лежит целиком вне $G + L$, кроме концов $K'_1 = UK'$ и $S'_1 = US'$, лежащих на L ;

3в) на дуге s'_1 можно указать такие точки S_1^* , K_1^* , что их можно соединить с точками S_1 и K_1 простыми дугами λ и μ соответственно, не имеющими общих точек, лежащими вне $G_1 + L_1$, кроме концов, и пересекающимися L не более чем в одной точке каждая. При этих условиях имеет место теорема III а.

Теорема III а. Каждая точка $G + L$ при повторном применении преобразования U либо стремится к N , либо стремится к N_i , либо через конечное число попадает вне G .

Доказательство основано на лемме.

Лемма. Пусть g и $\bar{g}$ — две односвязные плоские области, ограниченные простыми замкнутыми кривыми l и $\bar{l}$ соответственно. Пусть на l есть дуга σ с концами в точках A и B , а на $\bar{l}$ дуга $\bar{\sigma}$ с концами в точках $\bar{A}$ и $\bar{B}$, и пусть установлено взаимно однозначное и непрерывное преобразование τ дуги σ в дугу $\bar{\sigma}$, причем пусть при движении исходной точки по σ от A к B преобразованная точка движется по $\bar{\sigma}$ от $\bar{A}$ к $\bar{B}$, и пусть при этом сохраняется направление обхода областей g и $\bar{g}$. Всегда можно установить взаимно однозначное непрерывное и сохраняющее направление обхода преобразование T замкнутой области $g + \bar{l}$ в $\bar{g} + \bar{l}$, совпадающее с τ на σ .

Лемма тривиальна. Например, переведем преобразованием t область g на квадрат q так, чтобы σ перешло в сторону v квадрата q , и преобразованием $\bar{t}$ область $\bar{g}$ на квадрат $\bar{q}$ так, чтобы $\bar{\sigma}$ перешло в сторону $\bar{v}$. Преобразования t и $\bar{t}$ могут быть любыми, но взаимно однозначными, сохраняющими направления обхода и непрерывными как внутри, так и на границах g и $\bar{g}$. Тогда между точками v и $\bar{v}$ будет установлено преобразование $\tau_1 = t\bar{t}^1$. Преобразование T_1 определим всюду в q , пере-

¹ Теорема III а сформулирована и доказывается здесь для того простейшего случая, который встречается в разбираемой задаче. Она имеет место и при более общих предположениях. Однако, если не наложить некоторых ограничений на расположение точек пересечения L и L_1 , то она может быть неверна — в G окажутся периодические по U точки.

нося τ_1 на любую пару отрезков, лежащих в q и $\bar{q}$, параллельных v и $\bar{v}$ и на одинаковом от этих сторон расстоянии. Искомое преобразование будет тогда $T = t^{-1}T_1t$.

Доказательство теоремы III а проведем следующим образом. Распиряя область G и доопределяя U на расширенной области согласно лемме, мы сведем теорему к тому простейшему случаю, когда точки S и S' , K и K' совпадают; этот простейший случай тем же приемом сведем к теореме III. Пусть точка S^*_1 лежит на дуге s'_1 контура L и дуга λ удовлетворяет условию 3в. Поскольку на дуге $S^*_1S'_1$ контура L_1 , нет точек пересечения с L , очевидно, что любую точку Q_1 дуги $S^*_1S'_1$ можно соединить с S_1 простой дугой α_1 , лежащей в области, ограниченной дугой λ и дугой $S^*_1S_1$ контура L и пересекающей L не более чем в одной точке.

Возьмем точку Q_1 столь близко к S'_1 , чтобы на дуге $QS'S$ контура L , где Q определено условием $UQ = Q_1$, не было общих точек с L_1 и соединим точки Q и S простой дугой α , лежащей вне G и не пересекающей L_1 , что всегда возможно.

Обозначим через g_1 область, лежащую вне G_1 , ограниченную простыми дугами α_1 и Q_1S_1 , а через g область, ограниченную простыми дугами α и QS , лежащую вне G .

Пользуясь леммой, доопределим U в g , соблюдая условия:

- 1) $\bar{U}$ совпадает с прежним преобразованием U на дуге QS ;
- 2) $\bar{U}g = g_1$.

Точно так же введем точку P_1 , близкую к K'_1 и лежащую на дуге $K^*_1K'_1$ контура L_1 , и сделаем такое же построение вспомогательных дуг β_1 (соединяющей P_1 и K_1 , лежащей вне G_1 и пересекающей L лишь в одной точке) и β (соединяющей K и P , лежащей вне G) и доопределим U в построенной таким образом области.

После этого мы получим новую область $\bar{G}$, ограниченную контуром $\bar{L}$, в которой будет определено преобразование U , причем вместо условия 3) будет иметь место условие:

- 3) контур $\bar{L}_2 = \bar{U}\bar{L}$ пересекается с $\bar{L}$, кроме как в точках дуги l , еще в двух точках $\bar{K}_1$ и $\bar{S}_1$, лежащих на дуге $\bar{K}\bar{S}$ контура $\bar{L}$, причем дуга $\bar{K}_1\bar{S}_1$ контура $\bar{L}_1$ лежит вне G .

Таким образом, теорема III а приведена к случаю, когда точки области $\bar{G}_1$, не принадлежащие $\bar{G} + \bar{L}$, образуют односвязную область, ограниченную дугой $\bar{K}_1\bar{S}_1$ контура $\bar{L}_1$ и дугой $\bar{K}_1\bar{S}_1$ контура $\bar{L}$, причем точки $\bar{K}_1$ и $\bar{S}$ не принадлежат этой дуге.

Пользуясь аналогичными построениями, сведем теперь теорему III а к теореме III.

Возьмем точку C , лежащую вне $\bar{G}$ и $\bar{G}_1$, и построим простые дуги $\bar{K}C$, $\bar{K}_1C$, $\bar{S}C$, $\bar{S}_1C$, лежащие вне $\bar{G}$ и $\bar{G}_1$, не имеющие попарно общих точек, кроме C , и не имеющие общих точек с $\bar{L}$ и $\bar{L}_1$, кроме точек $\bar{K}$ и $\bar{S}$, $\bar{K}_1$ и $\bar{S}_1$.

Тогда получим односвязные области: Γ , ограниченную простыми дугами $\bar{S} = \bar{K}\bar{S}$ ($\bar{S}$ принадлежит $\bar{L}$), $\bar{K}C$, $\bar{S}C$, и Γ_1 , ограниченную простыми дугами $\bar{S}_1 = \bar{K}_1\bar{S}_1 = \bar{U}K\bar{S}$, $\bar{K}_1C$ и $\bar{S}C$. Определим всюду в Γ и на границе Γ преобразование U^* , сохраняющее направление обхода, взаимно однозначное и непрерывное, переводящее дугу $\bar{K}C$ в $\bar{K}_1C$, $\bar{S}C$ в $\bar{S}_1C$, совпадающее с $\bar{U}$ на $\bar{S}$ и не имеющее в Γ и на контуре Γ неподвижных точек, кроме C . В точке же C пусть U^* имеет устойчивый узел.

Непротиворечивость этих требований легко показать, переводя Γ и Γ_1 в треугольники Δ и Δ_1 , так чтобы $\bar{S}$ и $\bar{S}_1$ перешли в основания Δ и Δ_1 , а точка C — в противоположные вершины, и устанавливая преобразование с нужными свойствами между точками Δ и Δ_1 .

Обозначая через g область $\bar{G} + \Gamma$, а через g_1 область $\bar{G}_1 + \Gamma_1 < g$, а через v преобразование g в g_1 , совпадающее с $\bar{U}$ на $\bar{G}$ и с U^* на Γ , мы получим преобразование V области g в ее часть g_1 , к которому можно применить теорему III.

Это и завершает доказательство теоремы IIIa, ибо те точки, которые по U выходят из G , будут по V стремиться к узлу C , поведение же остальных точек (не выходящих из G при преобразовании U) не меняется.

АВТОКОЛЕБАНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ СХЕМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ АВТОМАТИЧЕСКИЙ ВИНТ ИЗМЕНЯЕМОГО ШАГА*

Работа В. А. Боднера [1] привлекла наше внимание к исследованию автоколебаний, возникающих в некоторых случаях при работе автоматических винтов изменяемого шага. Мы здесь рассматриваем более простую схему, чем В. А. Боднер (отвлекаясь от изменения скорости самолета и от инерции индикатора), но даем точное решение, позволяющее получить полную картину влияния параметров схемы на существование автоколебаний. Мы рассматриваем агрегат коленчатый вал — лопасти винта — индикатор как систему лишь с тремя степенями свободы, конфигурация которой задается углами поворота вала θ и лопастей φ и смещением муфты регулятора ζ , притом как систему вырожденную, во-первых, потому, что пренебрегаем инерцией индикатора и сервомотора и, во-вторых, потому, что принимаем для трения в индикаторе закон Кулона¹. Исследуемая задача, близкая к классической задаче Леоте [2], отвечает также ряду других устройств автоматического регулирования.

1. Уравнение вращения коленчатого вала мотора примем в виде

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_1(\omega, \lambda) - M_2(\omega, \psi) \quad (1a)$$

где $\omega = \dot{\varphi}$, t — время, I — момент инерции, λ — параметр, характеризующий впуск газа, M_1 — момент, развиваемый мотором, M_2 — нагрузочный момент винта.

Уравнение движения муфты индикатора имеет вид:

$$\zeta \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \zeta} = - \frac{\partial V}{\partial \zeta} + Q(\dot{\zeta}) \quad (1b)$$

где $T = T(\zeta, \dot{\zeta}, \omega)$ — кинетическая энергия системы, $V(\zeta)$ — потенциальная энергия пружин и грузов индикатора, $Q(\dot{\zeta})$ — сила трения.

Уравнение движения сервомотора можно принять в виде

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = P_1(\zeta) - P_2(\dot{\varphi}, \varphi) \quad (1c)$$

где I_0 — момент инерции, $P_1(\zeta)$ — момент активных сил, $P_2(\dot{\varphi}, \varphi)$ — момент сил сопротивления.

* Совместно с Н. Н. Баутиным и Г. А. Гореликом. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1945, 47, № 4, с. 265—268. Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 22 XI 1944.

¹ Предполагается, что в нашей схеме изменение шага имеет целью обеспечить возможность изменять силу тяги посредством регулирования подачи газа, не меняя при этом числа оборотов.

Будем рассматривать движения в окрестности равновесного режима $\omega_0, \zeta_0, \varphi_0$. Вводя новые переменные соотношения

$$\omega = \omega_0 + \eta, \quad \zeta = \zeta_0 + \xi, \quad \varphi = \varphi_0 + \chi$$

получим, делая очевидные упрощения и пренебрегая инерцией индикатора и сервомотора, следующие уравнения движения (ср. [1]):

$$\frac{d\eta}{dt} = -M\eta - N\chi, \quad a\xi - b\eta = Q(\dot{\xi}), \quad \frac{d\chi}{dt} = F(\dot{\xi}) \quad (2)$$

Константы M, N, a, b положительны. Мы примем, что

$$Q(\dot{\xi}) = -K \text{ для } \dot{\xi} > 0, \quad Q(\dot{\xi}) = +K \text{ для } \dot{\xi} < 0 \\ |Q(\dot{\xi})| < K \text{ для } \dot{\xi} = 0$$

где K — положительная константа (закон Кулона). Тогда второе уравнение (2) дает

$$a\xi - b\eta = \begin{cases} -K & \left(\text{откуда } \dot{\xi} = \frac{b}{a} \dot{\eta} \right) \text{ для } \dot{\xi} > 0 \\ +K & \left(\text{откуда } \dot{\xi} = \frac{b}{a} \dot{\eta} \right) \text{ для } \dot{\xi} < 0 \end{cases} \quad |a\xi - b\eta| < K \text{ для } \dot{\xi} = 0 \quad (3)$$

Для сервомотора мы примем обычную ломаную характеристику:

$$F(\dot{\xi}) = -F(-\dot{\xi}) = \begin{cases} 0 & \text{для } |\dot{\xi}| < \bar{\psi}_0 \\ \bar{\alpha}(\dot{\xi} - \bar{\psi}_0) & \text{для } \bar{\psi}_0 < \dot{\xi} < \bar{\psi}_1 \\ +\bar{A} & \text{для } \bar{\psi} < \dot{\xi} \end{cases}$$

Положим

$$\frac{a\xi}{2K} = x, \quad \frac{b\eta}{2K} = y, \quad -\frac{b}{2K} \left(\eta + \frac{N}{M} \chi \right) = z, \quad Mt = \tau' \\ \frac{a\bar{\psi}_0}{2K} = \psi_0, \quad \frac{a\bar{\psi}_1}{2K} = \psi_1, \quad \frac{bN}{2KM^2} \bar{A} = A \quad \left(\alpha = \frac{A}{\psi_1 - \psi_0} \right) \quad (4)$$

и будем рассматривать x, y, z как декартовы координаты. Система (2) принимает вид:

$$\frac{dx}{d\tau'} = f(x, y, z), \quad \frac{dy}{d\tau'} = z, \quad \frac{dz}{d\tau'} + z = g(x) \quad (5)$$

На основании (3) изображающая точка может находиться только: либо между плоскостями

$$x - y = \pm 1/2$$

либо на полуплоскости H

$$x - y = 1/2, \quad z < 0$$

либо на полуплоскости H'

$$x - y = -1/2, \quad z > 0$$

При этом

$$f \equiv 0 \quad \text{между плоскостями } x - y = \pm 1/2$$

$$f \equiv z \quad \text{на полуплоскостях } H \text{ и } H'$$

$$g(x) = -g(-x)$$

где¹

$$g(x) \equiv -A \quad \text{для } x \geq \psi_1$$

$$g(x) \equiv -\alpha(x - \psi_0) \quad \text{для } \psi_0 \leq x \leq \psi_1$$

$$g(x) \equiv 0 \quad \text{для } |x| \leq \psi_0$$

2. В силу уравнений (5):

1) интересующая нас часть трехмерного фазового пространства, ограниченная полуплоскостями H и H' , заполнена кусками траекторий, лежащих в параллельных полуплоскостях $x = \text{const}$;

2) разбиение на траектории полуплоскостей H и H' состоит:

из отрезков прямых для $|x| < \psi_0$;

из кусков траекторий, принадлежащих устойчивому фокусу или узлу, для $|\psi_0| < |x| < |\psi_1|$;

из кусков кривых

$$x = A - z - A \ln c(z - A) \quad \text{для } x < -\psi_1$$

$$x = -A - z + A \ln c(z + A) \quad \text{для } x > \psi_1$$

соединение кусков траекторий происходит вдоль прямых

$$x = \pm \psi_0, \quad x = \pm \psi_1$$

3) полоса

$$|x| < \psi_0, \quad |x - y| < 1/2,$$

$$z = 0$$

является полосой покоя.

Изображающая точка, двигаясь в полуплоскостях H или H' , либо сразу попадает на край полосы покоя, либо попадает на полупрямые

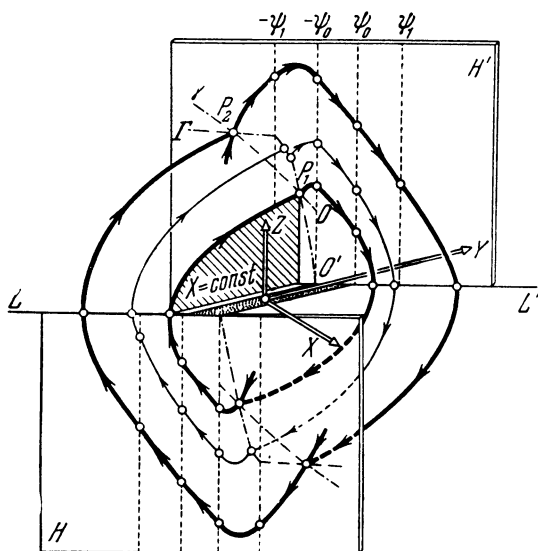
$$(L) \quad x - y - 1/2 = 0,$$

$$z = 0, \quad x < -\psi_0$$

или

$$(L') \quad x - y + 1/2 = 0,$$

$$z = 0, \quad x > \psi_0$$



Фиг. 1

и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую (фиг. 1).

¹ При $\psi = 0$, $A = \infty$ получается задача, уже исследованная Андроновым и Батутиным [3].

Фазовое пространство симметрично относительно начала координат.

Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (L') на полуплоскость H' (H), а преобразованием E^+ (E^-) переход точки полуплоскости H' (H) на полупрямую L' (L).

3. Преобразование S^+ преобразует полупрямую L в кривую Γ :

$$x + \psi_0 = \frac{1}{\alpha(1 - \tau - e^{-\tau})}, \quad z = \frac{1 - e^{-\tau}}{e^{-\tau} + \tau - 1}$$

$$(-\tau^* < \tau < \infty, -\psi_1 \leq x \leq -\psi_0)$$

$$z = A(1 - e^{-\tau^*}), \quad A(e^{-\tau^*} + \tau^*) = 1 + A$$

$$(x \leq -\psi_1)$$

Геометрическим местом точек, для которых $|x|$ не изменяется в результате E^+ , является кривая γ , определяемая уравнением:

$$\text{для } x \leq -\psi_1$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{u^2 - u(\psi_1 - \psi_0) + \alpha(\psi_1 - \psi_0)^2} \exp \left[\frac{-1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(\psi_1 - \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2u - (\psi_1 - \psi_0)} \right] - \\ & - \sqrt{v^2 + v(\psi_1 - \psi_0) + \alpha(\psi_1 - \psi_0)^2} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(\psi_1 - \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2v + (\psi_1 - \psi_0)} \right] = \\ & = 2\psi_0 \quad (0 < \operatorname{arctg} < \pi) \end{aligned}$$

где

$$A - u = (A - z) \exp \left(\frac{\psi_1 + x + z - u}{A} \right), \quad v + A = A \exp \left(\frac{\psi_1 + x + v}{A} \right)$$

$$\text{для } -\psi_1 \leq x \leq -\psi_0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{z^2 + z(x + \psi_0) + \alpha(x + \psi_0)^2} \exp \left[\frac{-1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \frac{(x + \psi_0)\sqrt{4\alpha - 1}}{2z + x + \psi_0} \right] + \\ & + (x + \psi_0)\sqrt{\alpha} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{4\alpha - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{4\alpha - 1} \right] = 2\psi_0 \\ & (0 < \operatorname{arctg} < \pi) \end{aligned}$$

Точки H разбиваются кривой γ на три класса:

- принадлежащие γ ; для них E^+ не изменяет $|x|$;
- расположенные между γ и продолжением L' ; для них E^+ уменьшает $|x|$;
- остальные точки; для них E^+ увеличивает $|x|$.

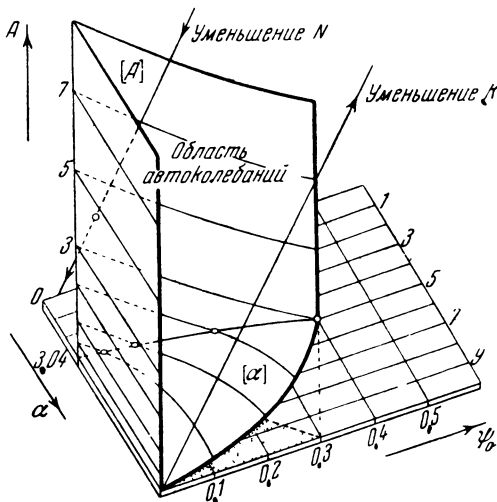
4. Кривые Γ и γ могут иметь либо две различные точки пересечения, либо две слившиеся, либо не иметь ни одной. Пусть P_1 — первая точка пересечения (считая от $x = -\psi_0$), P_2 — вторая.

Тогда через P_1 проходит неустойчивый, а через P_2 — устойчивый предельный цикл.

Если начальное отклонение¹ достаточно мало, система придет к состоянию равновесия; в противном случае установятся автоколебания.

Если γ не пересекает Γ , то при любых начальных условиях устанавливается состояние равновесия.

5. Мы свели параметры рассматриваемой динамической задачи к трем *существенным* параметрам ψ_0 , α , A . На фиг. 2 изображено разбиение пространства параметров на области, различающиеся по качественной структуре фазового пространства. Область, где возможны автоколебания, заключена между плоскостью $\psi_0 = 0$, цилиндрической поверхностью $[A]$, образующей которой параллельны оси A , и поверхностью $[\alpha]$, проходящей через ось α . На фиг. 2 показана часть этой области, ограниченная произвольными плоскостями $\alpha = \text{const}$, $A = \text{const}$. Вне области автоколебаний устройство стремится к состоянию устойчивого равновесия².



Фиг. 2

Фиг. 2 в сочетании с формулами (4) показывает, что от автоколебаний всегда можно избавиться, например, любым из следующих простейших способов: 1) уменьшением сухого трения K ; 2) уменьшением $\bar{A}$; 3) уменьшением $\bar{\alpha}$; 4) увеличением $\bar{\psi}_0$ (ширины зоны нечувствительности); 5) уменьшением эффективности регулирующего действия винта N .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б о д н е р В. Теория автоматического ВИШ.— Сборник научн.-техн. конференций ВВА. М., 1944, стр. 242
2. L è a u t é Н. Sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations.— Journal de l'Ecole Polytechnique, t. 55, 1885, p. 1—126.
3. А н д р о н о в А. и Б а у т и н Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования.— Докл. АН СССР, т. 46, 1945, № 7, стр. 304—306.

¹ Обусловленное, например, тем, что при $\tau' = 0$ произошло резкое изменение параметра и система оказалась в новом, неравновесном состоянии, являвшемся при старом значении параметра равновесным.

² Из фиг. 2 видно, что: 1) при $\alpha < 3.04$ не может быть автоколебаний; 2) каждому $\alpha > 3.04$ соответствует такое значение $\psi_0 = \psi_0'$ (тем большее, чем больше α), что при $\psi_0 > \psi_0'$ не может быть автоколебаний; 3) каждым $\alpha > 3.04$, $\psi_0 < \psi_0'$ соответствует такое значение $A = A'$ (тем большее, чем больше ψ_0'), что при $A > A'$ существуют, а при $A < A'$ отсутствуют автоколебания; 4) каждому A соответствует такое $\psi_0 = \psi_0''$, что при $\psi_0 > \psi_0''$ не может быть автоколебаний.

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИ ДВИЖЕНИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ЦИКЛОТРОНЕ*

1. Как известно, разгон заряженной частицы в циклотроне можно рассматривать как резонансное явление. Уже в случае частицы постоянной массы этот резонанс *нелинейный*. Действительно, переменное электрическое поле практически отлично от нуля только в щели между дуантами, вследствие чего сила, действующая на частицу, является не только периодической функцией времени, но и нелинейной функцией координат частицы. Но в случае частицы постоянной массы сами собственные колебания (движение в отсутствие электрического поля) можно описать как круговые колебания *линейного* осциллятора, собственная частота которого есть не зависящая от энергии частицы угловая скорость ее вращения в магнитном поле. В случае *релятивистской* частицы к указанной выше нелинейности прибавляется вторая нелинейность, выражающаяся в зависимости массы от скорости. С точки зрения теории колебаний очевидно, что и здесь должны иметь место резонансные явления, но существенно иного типа, чем в случае частицы постоянной массы. Анализ периодических движений, устанавливающихся — по крайней мере теоретически — благодаря потерям энергии на излучение и соударения, позволил нам выяснить некоторые характерные свойства этих явлений. Мы хотим, в частности, обратить внимание на то, что в случае релятивистской частицы кривые резонанса (кривые зависимости энергии периодического движения от магнитного поля H), обладая при достаточно больших амплитудах возмущающей силы «скосом» и гистерезисом, напоминают кривые феррорезонанса.

Это естественно, так как релятивистская частица в циклотроне является осциллятором, частота собственных (круговых) колебаний которого, как и частота собственных колебаний контура с железным сердечником, зависит от его энергии.

Следствием наличия такой резонансной кривой является возможность «затянуть» частицу в область больших энергий посредством постепенного увеличения H . Мы хотим обратить также внимание на возможность демultiпликации частоты. Она связана с *первой* из указанных выше нелинейностей.

* Совместно с Г. А. Гореликом. Напечатано одновременно на русском и английском языках в ДАН СССР, 1945, 49, № 9, с. 664—666. Представлено академиком Н. Д. Папалекси 23 VI 1945. Более краткое сообщение опубликовано в C. r. Acad. sci., Paris, 1945, t. 221, p. 696.

Наше внимание к вопросам разгона релятивистских частиц в циклотроне было привлечено работами Векслера ^[1,2], предложившего, в частности, метод разгона путем увеличения H . Однако постановка задачи (исследование стационарного режима) здесь существенно иная, чем у Векслера.

2. Предполагая спиралевидное движение релятивистской частицы в циклотроне, обозначим через t_n время, когда частица (заряд e) в n -й раз пересекает ускоряющую щель (которая предполагается бесконечно узкой), покидая ее с энергией E_{n+1} .

Пусть $V \sin \omega t$ — приложенное к щели напряжение, $f(E)$ — энергия, теряемая за пол-оборота частицей, покидающей щель с энергией E .

Баланс энергии выражается уравнением

$$E_{n+1} - [E_n - f(E_n)] = eV \sin(\omega t_n + n\pi) \quad (1)$$

С другой стороны,

$$t_{n+1} - t_n = \pi \frac{\bar{E}_{n+1}}{eHc} \quad (2)$$

где c — скорость света, $\bar{E}_{n+1}$ — некоторое среднее значение энергии частицы между n -м и $(n+1)$ -м прохождением через щель. Мы примем, что

$$\bar{E}_{n+1} = E_{n+1} - \frac{1}{2} f(E_{n+1}) \quad (3)$$

Будем искать такие решения системы нелинейных разностных уравнений (1) — (3), при которых E_n имеет при любом n одно и то же значение E^* . Имеем из (1)

$$f(E^*) = eV \sin(\omega t_n + n\pi)$$

Отсюда

$$t_n = t_0 + n(2s - 1) \frac{\pi}{\omega} \quad (s - \text{целое число}) \quad (4)$$

$$f(E^*) = eV \sin \omega t_0$$

При $s = 1$ имеем периодическое движение с периодом внешнего поля. При $s > 1$ имеем периодические движения, соответствующие случаю демultipликации частоты. При этом

$$E^* - \frac{1}{2} f(E^*) = \frac{eHc}{\omega} (2s - 1) \quad (5)$$

Уравнение (5) однозначно определяет при заданном s значение E^* для каждого значения $H > H_0^{(s)}$, где

$$\frac{e H_0^{(s)} c}{\omega} (2s - 1) = E_0 \quad (E_0 - \text{энергия покоя})$$

Уравнение (4) дает для $f(E^*) < eV$ два действительных значения, сливающихся при $f(E^*) = eV$; для одного из них $\cos \omega t_0 > 0$, для другого $\cos \omega t_0 < 0$. При $f(E^*) > eV$ получаются мнимые t_0 , т. е. периодических решений искомого типа не существует.

Для исследования устойчивости периодических решений полагаем

$$t_n = t_0 + n \frac{\pi}{\omega} + \tau_n$$

Линеаризуя (1), (2), (3) относительно τ_n , получаем

$$\tau_{n+1} - 2\tau_n + \tau_{n-1} + \frac{h}{2} (\tau_{n+1} - \tau_{n-1}) = \frac{\pi V \omega}{Hc} \cos \omega t_0 \tau_n \quad (6)$$

где

$$h = \frac{\pi}{eHc} f'(E^*)$$

причем в силу малости f здесь можно положить приближенно

$$E^* = \frac{eHc}{\omega} (2s - 1)$$

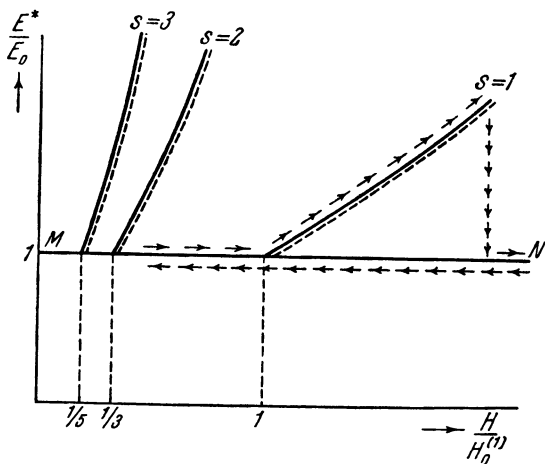
Уравнение (6) дает

$$\tau_n = ae^{n\lambda}$$

причем

$$e^\lambda + e^{-\lambda} + \frac{h}{2} (e^\lambda - e^{-\lambda}) = 2 + \frac{\pi \omega V}{Hc} \cos \omega t_0$$

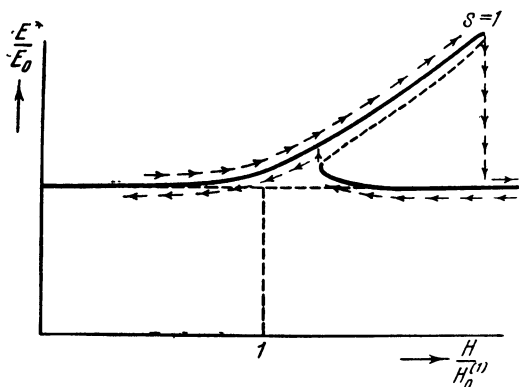
По физическим условиям $eV \ll E^*$, т. е. $\pi \omega V \ll Hc$. При этом λ имеет отрицательную действительную часть (периодическое решение устойчиво), если $\cos \omega t_0 < 0$, и существует положительный корень λ (периодическое решение неустойчиво), если $\cos \omega t_0 > 0$. Таким образом, одно из найденных решений устойчиво, другое — неустойчиво.



Фиг. 1

3. Полученная зависимость E^* от H изображена для $s = 1, 2, 3$ на фиг. 1. Прямая MN изображает состояния покоя (энергия $E = E_0$). Наибольшие достижимые энергии (точки срыва) определяются условием $f(E^*) = eV$, причем $f(E^*)$ зависит, вообще говоря, также от H . Более полная теория, учитывающая конечную ширину щели, дает, например,

для $s = 1$ кривую (фиг. 2), сходство которой с кривой феррорезонанса более очевидно (пунктиром показана неустойчивая ветвь) и предельным



Фиг. 2.

случаем которой является кривая для $s = 1$ (фиг. 1). Стрелки показывают ход процесса при монотонном увеличении и уменьшении H .

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило
23 VI 1945

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер В. И. Новый метод ускорения релятивистских частиц.—Докл. АН СССР, т. 43, 1944, № 8, стр. 346—348.
2. Векслер В. И. О новом методе ускорения релятивистских частиц.—Докл. АН СССР, т. 44, 1944, № 9, стр. 393—396.

О ДВИЖЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ЧАСОВ, ИМЕЮЩЕЙ ДВЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ. МОДЕЛЬ ДО-ГАЛИЛЕЕВЫХ ЧАСОВ*

Хотя часы служили предметом многочисленных теоретических исследований, нельзя считать существующую теорию часов и таких, эквивалентных им в динамическом отношении, устройств, как спусковые регуляторы анкерного типа, удовлетворительной. Полностью изучена только модель часов, имеющая одну степень свободы. Однако такая модель, оставляя без рассмотрения процесс взаимодействия между балансиром и ходовым колесом, не может служить для исследования ряда основных вопросов теории часов. Что же касается тех теоретических работ, где принимались во внимание две степени свободы, то они, насколько известно авторам, ограничивались приближенным анализом отдельных механических вопросов, поставленных конструкторами, и не рассматривали часы как замкнутую динамическую систему с двумя степенями свободы [1,2].

Интерес рассмотрения часов как динамической системы с двумя степенями свободы выходит за пределы собственно теории часов. Такое рассмотрение интересно и с точки зрения общей теории динамических систем, как типичный пример недостаточно изученных автоколебательных систем с двумя степенями свободы, и с точки зрения теории автоматического регулирования, как пример стабилизации периода в системах с двумя степенями свободы.

Мы будем здесь рассматривать упрощенную идеальную модель часов, в которой, с одной стороны, сохранены основные типичные особенности часов, как *неконсервативной* динамической системы с двумя степенями свободы¹; с другой стороны, сведены к минимуму вычислительные трудности, весьма существенные в случае обычных моделей часов.

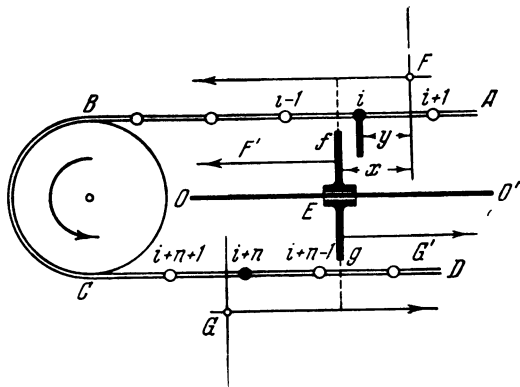
1. «Ходовое колесо» $ABCD$ (см. фигуру) оснащено «зубцами», при помощи которых оно может передавать ударные импульсы «балансиру» E , двигающемуся поступательно вдоль направляющей OO' и снабженному «палетами» f, g , воспринимающими удары.

Пусть общее число зубцов ходового колеса равно $2n+1$, пусть зубцы расположены на равных расстояниях a и последовательно перенумерованы. Мы примем, что зубцы ходового колеса обладают следующими свойствами, характерными для рассматриваемой идеальной модели. В проме-

* Совместно с Ю. Неймарком. Опубликовано в Докл. АН СССР, 1946, 51, № 1, с. 17—20. Представлено академиком Н. Д. Папалекси 28 VII 1945.

¹ В известной проблеме Биркгофа [3] о движении шара на бильярдном столе речь идет о типичной во многих отношениях, но сравнительно легко поддающейся исследованию модели *консервативной* динамической системы с двумя степенями свободы.

жутках времени между ударами (которые мы предположим мгновенными) ходовое колесо имеет *один* функционирующий, т. е. выдвинутый и готовый к передаче импульса, зубец, в то время как все остальные зубцы утоплены в соответствующих пазах и не мешают движениям балансира. После ударного взаимодействия зубец, передавший удар, мгновенно убирается (при помощи механизма, в детали которого нам нет надобности входить), например, поворачивается и скрывается в пазу, а вместо него мгновенно появляется зубец из другого паза по следующему закону, простейшим образом обеспечивающему чередование ударных импульсов по палетам f и g : при ударе о зубец номера i он исчезает и появляется зубец номера $j = i + n \pmod{2n+1}$. Появившийся зубец наносит следующий удар, исчезает



и т. д., и т. д. Если мы предоставим балансиру свободно двигаться взад и вперед под влиянием сил трения и под действием *встречных* ударов со стороны ходового колеса, увлекаемого во вращение постоянным моментом, мы получим *модель до-галилеевых часов*. Если же мы свяжем балансира с положением равновесия пружиной, мы будем иметь *модель маятниковых часов Галилея — Гюйгенса*.

2. В настоящей работе мы рассмотрим модель до-галилеевых часов, или, что то же, модель спускового регулятора без собственных колебаний, причем мы ограничимся отысканием периодического движения и исследованием его устойчивости в малом. Возьмем неподвижную систему координат F . Положение балансира будем определять при помощи координаты x , а положение ходового колеса — при помощи дуги y (см. фигуру).

Наша модель имеет две степени свободы, и ее фазовое пространство четырехмерно.

Но мы можем ограничиться исследованием состояний системы, относящихся к моментам времени, непосредственно следующим за соударениями, т. е. исследованием *пространства послеударных состояний*, число измерений которого может быть сведено к трем, если в качестве координат пространства послеударных состояний выбрать послеударные скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ и пространственную координату z , характеризующую расстояние между тем местом встречи зубца с палетой балансира, которое соответствует рассматриваемому послеударному состоянию, и местом одновременного появления нового зубца.

Мы можем определить z как координату появления нового зубца относительно системы отсчета F' , начало которой жестко связано с балансиром и ось которой параллельна оси x .

Уравнения движения для промежутков времени между соударениями могут быть записаны так:

$$M \frac{dy}{dt} = P_0, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad m \frac{dx}{dt} = -b\dot{x} - mg\rho \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (1)$$

где M — приведенная к дуге y масса ходового колеса, P_0 — постоянная обобщенная сила, приводящая ходовое колесо во вращение, m — масса балансира, b — коэффициент вязкого трения, ρ — коэффициент кулоновского трения, g — ускорение силы тяжести.

Примем, что скорости до удара $\bar{x}$, $\bar{y}$ со скоростями $\dot{x}$, $\dot{y}$ после удара связаны соотношениями, имеющими место для не вполне упругого удара с коэффициентом восстановления k ($0 < k < 1$) в обычном случае непроницаемости, когда удар изменяет знак относительной скорости соударяющихся тел:

$$\dot{x} = a_{11}\bar{x} \pm a_{12}\bar{y}, \quad \dot{y} = a_{21}\bar{x} \pm a_{22}\bar{y} \quad (2)$$

где

$$a_{11} = \frac{J-k}{1+J}, \quad a_{12} = \frac{1+k}{1+J}, \quad a_{21} = \frac{(1+k)J}{1+J}, \quad a_{22} = \frac{1-kJ}{1+J}, \quad J = \frac{m}{M}$$

и где знак плюс соответствует удару о палету f , а знак минус — удару о палету g .

Назовем послеударными состояниями типа $f(g)$ те, которым соответствуют удары о палету $f(g)$. Тогда переходы между послеударными состояниями распадутся на два типа Ω_{fg} и Ω_{gf} . Каждому типу соответствует определенное точечное преобразование трехмерного пространства $\dot{x}$, $\dot{y}$, z в самого себя, причем каждый переход одного типа автоматически влечет за собой определенный переход другого типа. Исследование движений нашей системы сводится к исследованию перемещений изображающей точки в пространстве послеударных состояний, последовательно порождаемых точечными преобразованиями. Уравнения (1) и (2) позволяют написать точечные преобразования Ω_{fg} и Ω_{gf} . Но решение нашей задачи значительно упростится, если мы используем симметрию нашей модели, характеризующуюся тем, что формулы перехода Ω_{fg} переходят в формулы перехода Ω_{gf} при замене x , y , z на $-x$, y , $-z$ и отождествим симметричные состояния¹.

В получившемся после отождествления «спрессованном» пространстве послеударных состояний, для точек которого справедливы неравенства $z \geq 0$, $x - y \geq 0$, имеет место только один тип переходов: $\Omega_{fg} = \Omega_{gf} = \Omega$.

¹ Наглядно это отождествление можно провести следующим образом. Аналогично системам отсчета F и F' установим системы отсчета G и G' (см. фигуру), оси абсцисс которых антипараллельны осям первых систем. Системами F и F' будем пользоваться при рассмотрении удара о палету f , системами G и G' — при рассмотрении удара о палету G . Числа, определяющие x , y , z в той или другой паре систем, будем соответственно откладывать по осям абсцисс, ординат и аппликата пространства послеударных состояний, не обращая внимания, происходят ли эти числа из систем F , F' или систем G , G' .

3. Рассмотрим простейший случай ($b = 0$, $\rho = 0$), когда нет ни кулоновского, ни вязкого трения и когда энергия теряется лишь в результате ударов. В этом случае, в силу уравнений (1) и (2) и отождествления симметричных состояний, точечное преобразование Ω имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_{11}\dot{x} + a_{12}\dot{y} + 2a_{12}q_0t, & \left(q_0 = \frac{P_0}{M}\right) \\ \dot{y}_1 &= -a_{21}\dot{x} + a_{22}\dot{y} + 2a_{22}q_0t \\ z_1 &= -z + a + 2\dot{x}t \end{aligned} \quad (3)$$

где t — наименьший положительный корень уравнения

$$q_0t^2 + (\dot{x} + \dot{y})t - z = 0$$

Сделаем в формулах (3) замену переменных:

$$\dot{x} = a(\xi + \eta), \quad \dot{y} = a(\xi - \eta), \quad z = a\zeta$$

и обозначим

$$q_0 = aq, \quad a_{11} + a_{21} = 2A_1, \quad a_{12} + a_{22} = 2A_2$$

Тогда преобразование (3) примет вид:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (A_2 - A_1)\xi - \eta + 2A_2qt, \\ \eta_1 &= k\xi + kqt \\ \zeta_1 &= -\zeta + 1 + 2(\xi + \eta)t \end{aligned}$$

причем t — наименьший положительный корень уравнения

$$qt^2 + 2\xi t - \zeta = 0$$

Таким образом, исследование нашей динамической задачи сведено к исследованию точечного преобразования (3), содержащего три существенных параметра:

$$J = \frac{m}{M}, \quad q = \frac{P_0}{2Ma}, \quad k$$

4. Точечное преобразование (3) имеет единственную неподвижную точку на конечном расстоянии от начала координат. Для этой точки, соответствующей искомому периодическому движению, имеем

$$\begin{aligned} \xi^* &= \frac{(2A_2 - k)}{(2A_1 + k)} qt^*, & \eta^* &= \frac{2k}{(2A_1 + k)} qt^* \\ \zeta^* &= \frac{1}{2} + \frac{(2A_2 + k)}{(2A_1 + k)} qt^{*2}, & t^* &= \sqrt{\frac{2A_1 + k}{4(1 - k)q}} \end{aligned}$$

Обычное рассмотрение характеристического уравнения показывает, что неподвижная точка является устойчивой при $m/M < 1$ и $k < 1$.

5. Аналогичное, но более громоздкое исследование может быть проведено в случае наличия вязкого или кулоновского трения, т. е. в случае $b \neq 0$ или $\rho \neq 0$.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило 28 VII 1945

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. A n d r a d e J. Horlogerie et chronométrie, Paris, 1924.
2. Ш и ш е л о в А. П. Механика часового механизма, ч. I, II, III, Л., 1933—1937.
3. B i r k h o f f G. D. Dynamical Systems, N. Y., 1927, p. 169.

ТЕОРИЯ НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ УЧЕТЕ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ В ЧУВСТВИТЕЛЬНОМ ЭЛЕМЕНТЕ*

В работе рассматривается при обычных упрощениях нелинейная задача о влиянии кулоновского трения в чувствительном элементе на процесс непрямого регулирования. Объект предполагается как с саморегулированием (положительным или отрицательным), так и без саморегулирования. Рассматривается как сервомотор постоянной скорости, так и сервомотор переменной скорости.

Результаты исследования, полученные методами теории точечных преобразований, представлены на диаграммах (фиг. 5, 7, 10, 14, 15), позволяющих с минимумом вычислений решать вопросы о сходимости или расходимости процессов регулирования.

I. Постановка задачи и краткая история вопроса

§ 1. Введение. Настоящая работа посвящена рассмотрению влияния кулоновского трения в чувствительном элементе на процесс непрямого регулирования в случае пренебрежения массой чувствительного элемента, но при наличии жесткой обратной связи. Объект предполагается как устойчивым, т. е. обладающим саморегулированием, так и неустойчивым, т. е. обладающим отрицательным саморегулированием, и, наконец, безразличным, т. е. без саморегулирования. В работе рассматриваются два типа сервомоторов с идеализированной характеристикой: во-первых, сервомотор переменной скорости (или, иначе, линейный сервомотор); во-вторых, сервомотор постоянной скорости, обладающий мертвой зоной (нелинейный сервомотор). При составлении уравнений движения отбрасываются все нелинейности, кроме тех, которые связаны с кулоновским трением в чувствительном элементе и — если это имеет место — с характеристикой сервомотора.

Рассмотрение полученных таким образом нелинейных математических моделей систем непрямого регулирования ведется *путем исследования разбиения соответствующих фазовых пространств на траектории*. В этом отношении настоящая работа продолжает линию, ведущую — в теории регулирования — свое начало от Леоте (1885), который исследовал таким образом влияние кулоновского трения в чувствительном элементе на работу примитивной (т. е. без обратной связи) схемы непрямого регулирова-

* Совместно с Н. Н. Баутиным и Г. А. Гореликом. Опубликовано в журн. «Автоматика и телемеханика», 1946, 7, № 1, с. 15—41.

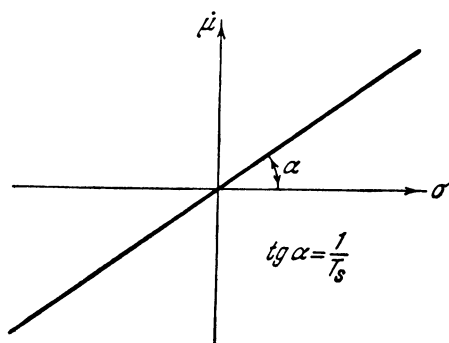
ния, и не следует традиции, ведущей свое начало от Прелля (1884) и принятой в большинстве книг и статей по теории регулирования, по которой рассмотрение подобных нелинейных задач ведется путем последовательного построения графо-аналитическим путем осциллограмм тех процессов, которые возникают при включении и выключении сервомотора. Исследование фазового пространства в рассматриваемых здесь вырожденных (в силу пренебрежения массой чувствительного элемента и вязким трением в нем) случаях сводится в настоящей работе к исследованию точечного преобразования полупрямой самой в себя, которое позволяет дать не только качественный, но и полный количественный ответ о возможных структурах разбиения фазового пространства на траектории при тех или иных значениях параметров и о характере возможных автоколебаний.

Задачи, изучаемые в настоящей работе, а также близкие к ним затрагивались многими авторами как сравнительно давно — при возникновении теории регулирования (Прелль^[1], Леоте^[2], Пфарр^[3], Бауерсфельд^[4], Будау^[5], Толле^[6]), — так и в сравнительно недавнее время (Синж^[7], Хазен^[8], Теодорчик^[9], Оппельт^[10], Уманский^[11], Айзерман^[12], Бильхарц^[13]). Однако, насколько нам известно, рассматриваемые здесь задачи до сих пор еще не получили окончательного решения, и до сих пор не было дано полной картины влияния параметров схемы как на сходимость процесса регулирования, так и на условия возникновения и характеристики ухудшающих процесс регулирования автоколебаний. Заметим, что некоторые выводы только что упомянутых работ (в частности, вывод Толле о неизбежном возникновении незатухающих колебаний при наличии нечувствительности индикатора) находятся в противоречии с утверждениями настоящей работы.

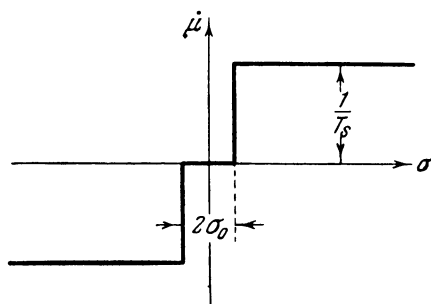
Настоящая работа распадается на три главы. В первой содержится постановка задачи и краткая история вопроса, причем дается сводка уже известных результатов, относящихся к влиянию кулоновского трения на непрямо́е регулирование при отсутствии обратной связи; во второй главе рассматривается случай жесткой обратной связи при наличии сервомотора переменной скорости и, наконец, в третьей — случай жесткой обратной связи при наличии сервомотора постоянной скорости, обладающего мертвой зоной. Каждая из глав заканчивается графиками, позволяющими по параметрам схемы быстро установить, будет ли процесс регулирования сходящимся или расходящимся или, наконец, возникнут автоколебания.

Нам кажется, что выбранные нами задачи особенно удобны для того, чтобы дать почувствовать инженерам, занимающимся теорией регулирования: 1) выгоды, которые дает геометрическое рассмотрение уравнений движения в фазовом пространстве по сравнению с рассмотрением осциллограмм; 2) возможности теории точечных преобразований, позволяющей для рассматриваемых задач получить полную картину влияния параметров схемы на сходимость процесса регулирования.

§ 2. Уравнения движения. Уравнения движения как примитивной схемы непрямого регулирования без обратной связи (servo-operated floating regulator), так и обычной схемы непрямого регулирования, содержащей жесткую обратную связь (follow-up servo-regulator), при пренебрежении массой чувствительного элемента и вязким трением в



Фиг. 1. Характеристика сервомотора переменной скорости



Фиг. 2. Характеристика сервомотора постоянной скорости с мертвой зоной

чувствительном элементе¹, но при учете кулоновского трения в чувствительном элементе и саморегулирования объекта могут быть записаны в безразмерных координатах в следующем виде:

$$T_a \dot{\varphi} = \mu - k\varphi \quad \text{уравнение объекта} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\eta + \varphi &= +\frac{1}{2}\varepsilon & \text{для } \dot{\eta} < 0 \\ \delta\eta + \varphi &= -\frac{1}{2}\varepsilon & \text{для } \dot{\eta} > 0 \\ |\delta\eta + \varphi| &< \frac{1}{2}\varepsilon & \text{для } \dot{\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{уравнение чувствительного элемента} \quad (\text{II})$$

$$\dot{\mu} = +\frac{1}{T_s} \sigma \quad \text{уравнение сервомотора переменной скорости (фиг. 1)} \quad (\text{IIIa})$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu} &= +\frac{1}{T_s} & \text{для } \sigma > \sigma_0 \\ \dot{\mu} &= -\frac{1}{T_s} & \text{для } \sigma < -\sigma_0 \\ \dot{\mu} &= 0 & \text{для } |\sigma| < \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{уравнение сервомотора постоянной скорости с симметричной мертвой зоной (фиг. 2)} \quad (\text{IIIb})$$

$$\sigma = \eta \quad \text{уравнение золотника в случае отсутствия обратной связи} \quad (\text{IVa})$$

$$\sigma = \eta - \gamma\mu \quad \text{уравнение золотника в случае жесткой обратной связи} \quad (\text{IVb})$$

¹ Известно (для случая сервомотора переменной скорости), что при отсутствии вязкого и кулоновского трения и при отсутствии саморегулирования объекта сколь угодно малая масса может породить неустойчивость, которая уничтожается небольшим вязким трением. Поэтому, чтобы иметь право рассматривать систему (I), (II), (IIIa), (IVb) и при $\varepsilon = 0$, $k = 0$, мы должны предположить, что хотя масса чувст-

Здесь φ — относительное отклонение регулируемой координаты, η — относительное смещение чувствительного элемента, σ — относительное смещение золотника сервомотора, μ — относительное смещение регулирующего органа, T_a — время разгона объекта регулирования, k — коэффициент, характеризующий саморегулирование объекта, δ — коэффициент неравномерности чувствительного элемента, ε — коэффициент нечувствительности, T_s — время сервомотора, σ_0 — половина ширины мертвой зоны сервомотора, γ — коэффициент жесткой обратной связи¹.

§ 3. Случай отсутствия жесткой обратной связи. Эта проблема была уже детально исследована [2, 14, 15]. Мы приведем здесь результаты исследования для двух простейших частных случаев, сравнение с которыми нам понадобится в дальнейшем.

А. Сервомотор переменной скорости. В этом случае в силу (IIIa) и (IVa) уравнение сервомотора принимает вид:

$$\dot{\mu} = \frac{1}{T_s} \eta \quad (1)$$

и пять параметров этой задачи T_a , k , δ , T_s , ε могут быть сведены к одному существенному параметру:

$$A = \frac{T_a}{T_s \delta k^2} \quad (2)$$

который и определяет качественную структуру разбиения фазового пространства φ , μ , η на траектории.

Для $A < 3.04$ процесс регулирования будет сходиться при любых начальных условиях, т. е. при любой разгрузке системы, к отрезку состояний равновесия.

Если же $A > 3.04$, то в фазовом пространстве образуется устойчивый предельный цикл или, иначе говоря, в рассматриваемой системе возникают автоколебания, нарушающие правильное функционирование системы регулирования. Количественные характеристики таких автоколебаний могут быть легко подсчитаны. В частности, хотя граница потери устойчивости и возникновения автоколебаний ($A = 3.04$) не зависит от величины кулоновского трения, но амплитуда автоколебаний или, точнее, линейные размеры предельного цикла, пропорциональны коэффициенту нечувствительности ε .

вительного элемента и вязкое трение в чувствительном элементе исчезающе малы, но они находятся между собой в таком соотношении, которое обеспечивает сходимость процесса регулирования для $\varepsilon = 0$, $k = 0$.

¹ Простой заменой переменных можно всегда добиться, чтобы уравнение (IVb) получило вид $\sigma = \eta - \mu$, как это обычно принято в теории регулирования. Мы не выбираем таких переменных и сохраняем γ в исходных уравнениях, так как мы хотим иметь возможность сравнивать между собой системы регулирования при разных γ , т. е. при разных соотношениях плеч рычага, осуществляющего жесткую обратную связь. Безразмерную величину γ можно назвать коэффициентом жесткой обратной связи. При $\gamma = 0$ мы имеем дело с отсутствием жесткой обратной связи.

Б. Сервомотор постоянной скорости с мертвой зоной. В этом случае, в силу (IIIb) и (VIb) уравнение сервомотора принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= + \frac{1}{T_s} & \text{для } \eta > \sigma_0, \\ \dot{\mu} &= - \frac{1}{T_s} & \text{для } \eta < -\sigma_0, \\ \dot{\mu} &= 0 & \text{для } |\eta| < \sigma_0, \end{aligned} \quad (3)$$

и шесть параметров этой задачи T_k , k , δ , T_s , σ_0 , ε могут быть сведены к двум существенным параметрам

$$A = \frac{T_a}{\varepsilon T_s k^2} \quad B = \frac{\sigma_0 \delta}{\varepsilon} \quad (4)$$

или к двум другим существенным параметрам, которые будут функциями первых, например к параметрам

$$a = \frac{1}{A} = \frac{\varepsilon T_s k^2}{T_a} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{B}{A} = \sigma_0 \delta \frac{T_s k^2}{T_a}. \quad (4')$$

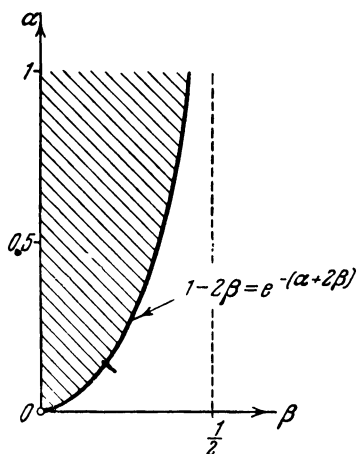
Условия устойчивой работы такой схемы в параметрах α и β даются известным неравенством (фиг. 3):

$$1 - 2\beta < e^{-(\alpha+2\beta)} \quad (5)$$

которое для малых α и β переходит в неравенство

$$\alpha < 2\beta^2 \quad \text{или} \quad \varepsilon < 2\sigma_0^2 \delta^2 \frac{T_s k^2}{T_a}. \quad (5')$$

Если индикатор обладает столь большим кулоновским трением, что неравенство (5) не выполняется, то фазовое пространство φ , μ , η соответствующей системы регулирования имеет единственный устойчивый предельный цикл, который отделяется от «площадки» устойчивых состояний равновесия некоторой вырожденной сепаратрисной поверхностью. Если изменение нагрузки объекта превзойдет некоторый предел, то обязательно возникнут устойчивые автоколебания, нарушающие правильное функционирование системы регулирования. Количественные характеристики как критического изменения нагрузки объекта, так и устанавливающихся автоколебаний легко могут быть вычислены. Если, наоборот, значения α и β удовлетворяют неравенству (5), то при любом изменении нагрузки процесс регулирования сходится к стационарному режиму, не сопровождающемуся автоколебаниями. Неравенства (5) показывают, что увеличение кулоновского трения влияет неблагоприятным образом, а увеличение ширины зоны нечувствительности — благоприятным образом на сходимость процесса регулирования.



Фиг. 3 Плоскость параметров для случая отсутствия жесткой обратной связи (сервомотор постоянной скорости с мертвой зоной)

II. Случай наличия жесткой обратной связи. Сервомотор переменной скорости

§ 1. Уравнения движения. В этом случае уравнения (I), (II), (IIIa), (IVb) после замен

$$t_{\text{нов}} = \frac{(\gamma T_a + k T_s)}{T_a T_s} t_{\text{стар}}, \quad x = \frac{\delta \eta}{\varepsilon}, \quad y = \frac{\varphi}{\varepsilon}, \quad z = \frac{T_s (\mu - k \varphi)}{\varepsilon (\gamma T_a + k T_s)} \quad (6)$$

приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ x + y &= \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{для } \dot{x} < 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{для } \dot{x} > 0 \end{cases} \\ |x + y| &\leq \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{x} = 0 \\ \dot{z} + z &= Ax - By \end{aligned} \quad (7)$$

который содержит два существенных параметра¹:

$$A = \frac{T_s T_a}{\delta (\gamma T_a + k T_s)^2}, \quad B = \frac{\gamma k T_a T_s}{(\gamma T_a + k T_s)^2} \quad (8)$$

Систему (7) удобно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= z \\ z &= -z + Ax - By \end{aligned} \right\} \quad \text{если } |x + y| < \frac{1}{2} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -z \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -z + (A + B)x - \frac{1}{2}B \end{aligned} \right\} \quad \text{если } x + y = \frac{1}{2}, \quad z > 0 \quad (7b)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -z \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -z + (A + B)x + \frac{1}{2}B \end{aligned} \right\} \quad \text{если } x + y = -\frac{1}{2}, \quad z < 0 \quad (7c)$$

Уравнения (7a), (7b) и (7c) показывают, что рассматриваемая нелинейная проблема сводится к рассмотрению нескольких различных систем линейных дифференциальных уравнений и к последовательному «припасовыванию» констант интегриации, исходя из требования непрерывности рассматриваемых функций в точках сопряжения различных систем уравнений. Такое припасовывание происходит в рассматриваемой задаче на полуплоскостях $x + y = \pm \frac{1}{2}$.

¹ Константы A и B не зависят от коэффициента нечувствительности ε . Таким образом, структура фазового пространства не зависит от ε . Но амплитуды как устойчивых, так и неустойчивых предельных циклов в исходных переменных φ , μ , η существенно зависят от ε .

§ 2. Общее описание фазового пространства. Дадим общее описание поведения траекторий в фазовом пространстве, которое позволит свести всю динамическую задачу к исследованию *точечного преобразования прямой в прямую*. В силу уравнений (7) изображающая точка может находиться только либо между плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$, либо на полуплоскостях (H) $x + y = -\frac{1}{2}$, $z \leq 0$ или (H') $x + y = \frac{1}{2}$, $z \geq 0$. Состояния равновесия системы (7) заполняют отрезок $Ax - By = 0$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{1}{2}$. Мы будем называть его *отрезком покоя*. Уравнения (7) не изменяются при заменах x , y , z на $-x$, $-y$, $-z$, поэтому фазовое пространство симметрично относительно начала координат.

В силу уравнения (7) трехмерное фазовое пространство, ограниченное плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$, заполнено кусками траекторий, лежащими либо в параллельных плоскостях $x = \text{const}$, либо в полуплоскостях H и H' . Траектории разбиения плоскостей $x = \text{const}$ представляют собой куски траекторий, принадлежащих либо устойчивому фокусу или узлу (соответственно для $B > \frac{1}{4}$ и $0 < B \leq \frac{1}{4}$), либо седлу (если $B < 0$), либо их вырождениям (если $B = 0$). Траектории разбиения полуплоскостей H и H' также будут кусками траекторий либо фокуса или узла (соответственно для $A + B > \frac{1}{4}$ и $0 < A + B \leq \frac{1}{4}$), либо седла (если $A + B < 0$), расположенных на границе $z = 0$ полуплоскостей (на концах отрезка покоя).

Изображающая точка, двигаясь по траекториям в плоскости $x = \text{const}$, может либо асимптотически приближаться по полутраектории, целиком лежащей между плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$, к состоянию равновесия в плоскости $x = \text{const}$ (такая возможность существует, если плоскость $x = \text{const}$ пересекает отрезок покоя), либо через конечное время попадает на полуплоскости H или H' и продолжает дальше движение по траекториям разбиения полуплоскостей. Только в случае $A + B < 0$, когда состояния равновесия на границах $z = 0$ полуплоскостей будут седла, изображающая точка может по траекториям разбиения полуплоскостей уходить в бесконечность. В других случаях она через конечное время попадает на полупрямые

$$(L) \quad x + y = -\frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x > \frac{B}{2(A+B)},$$

или

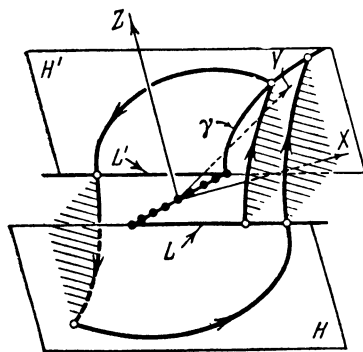
$$(L') \quad x + y = +\frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x < -\frac{B}{2(A+B)}$$

начинающиеся от концов отрезка покоя, и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую (фиг. 4). Назовем траекторией системы (7) последовательность кусков траекторий, которую пробегает изображающая точка при своем движении в фазовом пространстве¹. Изучение поведения такой отдельной траектории в фазовом про-

¹ Движение по такой траектории однозначно определено только в одном направлении.

пространстве эквивалентно изучению последовательности точек пересечения ее с полупрямыми L и L' или с какой-либо одной из полупрямых, а изучение структуры разбиения фазового пространства на траектории эквивалентно изучению структуры преобразования какой-либо из полупрямых L или L' в самое себя, осуществляемого движением изображающих точек по траекториям.

Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (соответственно L') на полуплоскость H (соответственно H'), а преобразованием E^+ (E^-) — переход точки полуплоскости H' (H) на



Фиг. 4. Общий вид фазового пространства

полупрямую L' (L). Преобразование $T^+ = S^+E^+$ переводит точки полупрямой L в точки полупрямой L' , а преобразование $T = S^+E^+S^-E^-$ переводит L в самое себя. Таким образом, рассматриваемая пространственная задача сводится к изучению поведения точек полупрямой L при повторении преобразования T . В силу симметрии фазового пространства относительно начала координат целесообразно отождествить симметричные состояния, считая тождественными симметричные по отношению к началу координат точки полупрямых L и L' , и каждый раз, когда точка, переходя

по преобразованию $T^+ = S^+E^+$, попадает на полупрямую L' , рассматривать вместо нее симметричную ей точку, принадлежащую полупрямой L . Таким образом, задача сводится к рассмотрению преобразования в себя полупрямой L при применении преобразования $T = \overline{S^+E^+}$, где черта сверху означает переход после применения преобразования S^+E^+ в симметричную точку.

Преобразование T может оказаться неприменимым к некоторым точкам полупрямой L , но это будет просто означать, что соответствующая изображающая точка, попадая в пространство между плоскостями, уже не выходит из него и идет сразу к отрезку покоя.

Для изучения структуры преобразования $T = \overline{S^+E^+}$ удобно воспользоваться приемом, представляющим целесообразное видоизменение обычных диаграмм Лемерея. Оказывается, структура разбиения фазового пространства на траектории определяется взаиморасположением и числом точек пересечения двух кривых: кривой γ и кривой Γ , расположенных на плоскости $x + y = \frac{1}{2}$. Кривая γ есть образ полупрямой L по преобразованию S^+ . Кривой γ принадлежат все те точки полуплоскости H' , в которых заканчиваются куски траекторий (расположенные в плоскостях $x = \text{const}$), имеющие своими начальными точками точки на полупрямой L (фиг. 4). Кривая Γ есть геометрическое место точек полуплоскости H' , обладающих тем свойством, что преобразование E^+ не изменяет по абсолютной величине их расстояния до плоскости $x = 0$.

Точки полуплоскости H' разбиваются кривой Γ на три класса: а) принадлежащие кривой Γ , — преобразование E^+ не изменяет их расстояния до плоскости $x = 0$; б) расположенные по одну сторону кривой Γ , — преобразование E^+ приближает их к плоскости $x = 0$; в) расположенные по другую сторону от кривой Γ , — преобразование E^+ удаляет их от плоскости $x = 0$. В силу определения кривых γ и Γ точки пересечения этих кривых принадлежат периодическим решениям, составленным из кусков траекторий в фазовом пространстве. С другой стороны, периодическими решениями, проходящими через точки пересечения γ и Γ , исчерпываются возможные периодические решения системы (7). Устойчивость, как будет показано ниже, также определяется взаимным расположением кривых γ и Γ в окрестности точки пересечения. Заметим еще, что рассмотрение кривых Γ и γ удобно вести, проектируя их на плоскость $y = 0$.

Обратимся теперь к рассмотрению отдельных случаев.

§ 3. Отдельные случаи, требующие различного аналитического рассмотрения. *1-й случай.* Параметр $A > 0$, параметр $B > \frac{1}{4}$. Кривая γ . Решение системы (7a) будет

$$\begin{aligned} y &= \frac{A}{B} x_0 + e^{-1/2 t} \left[C_1 \sin \frac{\omega t}{2} + C_2 \cos \frac{\omega t}{2} \right] \\ z &= e^{-1/2 t} \left[\frac{C_1 \omega - C_2}{2} \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{C_1 + C_2 \omega}{2} \sin \frac{\omega t}{2} \right] \end{aligned} \quad (8a)$$

где $\omega^2 = 4B - 1$.

Изображающая точка, находившаяся в начальный момент на полу-прямой

$$(L) \quad x + y = \frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x > \frac{B}{2(A+B)}$$

попадает через время $\tau = \frac{1}{2} \omega t$ на полуплоскость H' .

Полагая

$$\begin{aligned} t = 0, \quad x = u, \quad y = -\frac{1}{2} - u, \quad z = 0 \\ t = t_1 = \frac{2}{\omega} \tau, \quad x = u, \quad y = +\frac{1}{2} - u, \quad z = v \end{aligned} \quad (9a)$$

получаем из (8a) и (9a) параметрические уравнения проекции кривой γ на плоскость $y = 0$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{B(\omega \exp(\tau/\omega) + \omega \cos \tau + \sin \tau)}{2(A+B)(\omega \exp(\tau/\omega) - \omega \cos \tau - \sin \tau)} \\ v &= \frac{2B \sin \tau}{\omega \exp(\tau/\omega) - \omega \cos \tau - \sin \tau} \end{aligned} \quad (10a)$$

Кривая Γ . Решение системы (7b) будет:

$$\begin{aligned} x &= \frac{B}{2(A+B)} + e^{-1/2 t} \left[C_1 \sin \frac{\omega_1 t}{2} + C_2 \cos \frac{\omega_1 t}{2} \right] \\ z &= e^{-1/2 t} \left[\frac{C_1 + C_2 \omega_1}{2} \sin \frac{\omega_1 t}{2} + \frac{C_2 - C_1 \omega_1}{2} \cos \frac{\omega_1 t}{2} \right] \end{aligned} \quad (8b)$$

Полагая

$$x = -u, \quad z = 0 \quad \text{при } t = 0; \quad x = +u, \quad z = v \quad \text{при } t = -\frac{2}{\omega_1} \theta \quad (9b)$$

получаем из (8b) и (9b) параметрические уравнения проекции кривой Γ на плоскость $y = 0$:

$$u = \frac{B \omega_1 \exp(-\theta/\omega_1) - \omega_1 \cos \theta + \sin \theta}{2(A+B) \omega_1 \exp(-\theta/\omega_1) + \omega_1 \cos \theta - \sin \theta}, \quad (10b)$$

$$v = \frac{2B \sin \theta}{\omega_1 \exp(-\theta/\omega_1) + \omega_1 \cos \theta - \sin \theta}$$

Введем новый масштаб по осям x и z , положив

$$\frac{2(A+B)}{B} u = U, \quad \frac{v}{2B} = V \quad (11)$$

а также обозначения:

$$k = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{V4B-1}, \quad h = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{V4(A+B)-1} \quad (12)$$

Уравнения кривых γ и Γ примут тогда вид:

$$U = \frac{e^{k\tau} + \cos \tau + k \sin \tau}{e^{k\tau} - \cos \tau - k \sin \tau}, \quad V = \frac{k \sin \tau}{e^{k\tau} - \cos \tau - k \sin \tau} \quad \text{для } \gamma \quad (13a)$$

где

$$0 \leq \tau \leq \pi \quad \text{и} \quad 0 < k < +\infty$$

$$U = \frac{e^{-h\theta} - \cos \theta + h \sin \theta}{e^{-h\theta} + \cos \theta - h \sin \theta}, \quad V = \frac{h \sin \theta}{e^{-h\theta} + \cos \theta - h \sin \theta} \quad \text{для } \Gamma \quad (13b)$$

где

$$0 \leq \theta \leq \theta_0 < \pi, \quad e^{-h\theta_0} + \cos \theta_0 = h \sin \theta_0, \quad 0 \leq h \leq \infty$$

Кривые γ и Γ лежат одним концом на нижней границе полуплоскости H' , а другим уходят в бесконечность. Кривая Γ проходит через начало координат.

В самом деле

$$U(\pi) = \frac{e^{k\pi} - 1}{e^{k\pi} + 1}, \quad V(\pi) = 0, \quad U(0) = V(0) = \infty \quad \text{для } \gamma$$

$$U(0) = V(0) = 0, \quad U(\theta_0) = V(\theta_0) = \infty \quad \text{для } \Gamma$$

Из (13a) и (13b) находим соответственно:

$$\frac{dV}{dU} = \frac{k(e^{-k\tau} - \cos \tau + k \sin \tau)}{2(1+k^2) \sin \tau}, \quad \frac{dV}{dU} = \frac{h(e^{h\theta} + \cos \theta + h \sin \theta)}{2(1+h^2) \sin \theta}$$

откуда

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)_{0 < \tau < \pi} > 0, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\tau=\pi} = \infty, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\tau=0} = 0 \quad \text{для } \gamma$$

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)_{0 < \theta < \theta_0} > 0, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\theta=0} = \infty, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\substack{\theta=\theta_0 \\ U=\infty}} = h \frac{e^{h\theta_0} - e^{-h\theta_0} + 2h \sin \theta_0}{2(1+h^2) \sin \theta_0} > 0$$

для Γ

Нетрудно также проверить, что для обеих кривых

$$\frac{d^2V}{dU^2} < 0$$

Переходя к новым переменным ξ , η

$$U = \frac{1 + \xi + \eta}{1 - \xi - \eta}, \quad V = \frac{\eta}{1 - \xi - \eta}$$

получим уравнения кривых γ и Γ в особенно простом виде:

$$\xi = e^{-k\tau} \cos \tau, \quad \eta = ke^{-k\tau} \sin \tau, \quad \text{для } \gamma \quad (14a)$$

$$\xi = -e^{h\theta} \cos \theta, \quad \eta = he^{h\theta} \sin \theta, \quad \text{для } \Gamma \quad (14b)$$

Нетрудно показать, что кривые (14a) и (14b) могут иметь либо две различные точки пересечения, либо две слившиеся, либо не иметь ни одной.

Доказательство этого утверждения легко получается из рассмотрения дифференциальных уравнений и контактной кривой семейств (14a) и (14b). Кривые (14a) и (14b) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{k^2(\eta - \xi)}{\eta + k^2\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{h^2(\eta - \xi)}{\eta + h^2\xi} \quad (15)$$

Для кривых γ и Γ $U > 0$, $V > 0$. Эти условия выделяют на плоскости η , ξ полуполосу $|\xi + \eta| < 1$, $\eta > 0$. Касание кривых, определяемых уравнениями (15), происходит в этой области по прямой

$$\eta - \xi = 0 \quad (16)$$

Не может быть более двух точек пересечения, так как прямая (16) каждую из кривых γ и Γ пересекает только в одной точке.

Найдем условие касания кривых γ и Γ . Из уравнений (14a) и (16) находим $\operatorname{tg} \tau = k^{-1}$, откуда для координаты пересечения кривой γ с прямой (16) получаем

$$\xi = \eta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} e^{-k \operatorname{arctg}(1/k)}$$

Для кривой Γ аналогично

$$\xi = \eta = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} e^{h \operatorname{arctg}(-1/h)}$$

Условие

$$\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} e^{-k \operatorname{arctg}(1/k)} = \frac{h}{\sqrt{1+h^2}} e^{h \operatorname{arctg}(-1/h)} \quad (17)$$

выделяет на плоскости k , h кривую, для точек которой имеет место касание кривых γ и Γ на полуплоскости H' . По одну сторону кривой (17) (в сторону больших h) лежат точки, для которых γ и Γ не пересекаются, по другую сторону (в сторону меньших h), наоборот, — точки, для которых существуют две точки пересечения.

Рассмотрим структуру разбиения фазового пространства, соответствующую различным случаям взаиморасположения кривых γ и Γ .

Пусть γ и Γ не пересекаются. Кривая γ лежит в этом случае целиком по одну сторону кривой Γ и притом таким образом, что преобразование E^+ приближает точки кривой γ к плоскости $x = 0$. Преобразование $T = \overline{S^+ E^+}$ будет приближать точки полупрямой L к плоскости $x = 0$ (к отрезку покоя). Изображающая точка, взятая в любой части фазового пространства, идет к отрезку покоя.

Пусть γ и Γ пересекаются в двух точках и пусть P_1 — первая точка пересечения (считая от $x = 0$), P_2 — вторая. Тогда точки пересечения будут инвариантными относительно преобразования $T' = E^+ S^- E^- S^+$, и через P_1 проходит *неустойчивый*, а через P_2 — *устойчивый предельный цикл*, составленный из кусков фазовых траекторий, лежащих в полуплоскостях H и H' , и кусков траекторий, лежащих между плоскостями. В самом деле: кусок кривой γ между точками P_1 и P_2 будет лежать относительно остальных точек γ по другую сторону кривой Γ . Всякую точку, взятую на куске дуги γ между P_1 и P_2 , преобразование E^+ *удаляет* от плоскости $x = 0$, а преобразование T' переводит в точку, также принадлежащую куску дуги $P_1 P_2$, но расположенную ближе к P_2 . При итерации преобразования T' последовательность точек на γ сходится к точке P_2 . Всякую точку на γ , взятую дальше P_2 , преобразование E^+ , наоборот, приближает к плоскости $x = 0$, а преобразование T' опять переводит в точку γ , расположенную ближе к P_2 . Всякую точку на γ , взятую ближе P_1 , преобразование E^+ *приближает* к плоскости $x = 0$ и при итерации преобразования T' последовательность точек на γ приближается к отрезку покоя.

Если P_1 и P_2 сливаются в одну точку (кривые γ и Γ касаются друг друга), устойчивый и неустойчивый циклы сливаются в один *полуустойчивый предельный цикл*. При сколь угодно малом изменении параметров системы *полуустойчивый цикл либо исчезает, либо опять распадается на два (устойчивый и неустойчивый)*.

2-й случай. Параметр $A > 0$, параметр $0 < B \leq \frac{1}{4}$. При исследовании этот случай распадается на два подслучая соответственно двум возможностям для корней характеристических уравнений: а) $A + B \leq \frac{1}{4}$, когда разбиения и плоскостей $x = \text{const}$ и полуплоскостей H и H' состоят из кусков траекторий устойчивого узла, и б) $A + B > \frac{1}{4}$, когда только состояние равновесия в плоскостях $x = \text{const}$ будет узел, а разбиения полуплоскостей H и H' состоят из кусков траекторий устойчивого фокуса.

Подслучай а. Вводя прежние переменные U и V , получаем для проекций кривых γ и Γ на плоскость U, V следующие уравнения:

$$U = \frac{e^{k_1 \tau} + \cos h\tau + k_1 \sin h\tau}{e^{k_1 \tau} + \cos h\tau - k_1 \sin h\tau}, \quad V = \frac{k_1 \sin h\tau}{e^{k_1 \tau} - \cos h\tau - k_1 \sin h\tau} \quad \text{для } \gamma \quad (18)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{1-4B}}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty, \quad 1 < k_1 \leq \infty$$

$$U = \frac{e^{-h_1\theta} - \cos h\theta + h_1 \sin h\theta}{e^{-h_1\theta} + \cos h\theta - h_1 \sin h\theta}, \quad V = \frac{h_1 \sin h\theta}{e^{-h_1\theta} + \cos h\theta - h_1 \sin h\theta} \quad \text{для } \Gamma \quad (19)$$

где

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{1-4(A+B)}}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0$$

$$e^{-h_1\theta_0} + \cos h\theta_0 - h_1 \sin h\theta_0 = 0, \quad 1 < h_1 < \infty$$

Кривые γ и Γ лежат по разные стороны от прямой $U = 2V$ и потому не могут пересекаться. При итерации преобразования $T = S^+T^+$ изображающая точка, взятая на полупрямой L , идет к отрезку покоя. Всякая другая точка также может только приближаться к отрезку покоя.

Подслучай б. Уравнения кривых γ и Γ даются соответственно уравнениями (18) и (13а). Исследование взаиморасположения кривых γ и Γ проводится теми же приемами, что и для 1-го случая, и приводит к тем же результатам. Кривые γ и Γ могут иметь либо две различные точки пересечения, либо две слившиеся, либо не иметь ни одной. Соответственно этому в фазовом пространстве либо существуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы, либо они сливаются в один полуустойчивый и затем исчезают. Отрезок покоя всегда устойчив. Области в плоскости параметров, соответствующие различной структуре разбиения фазового пространства на траектории, разделяются кривой

$$\frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 - 1}} e^{-k_1 \operatorname{arctg}(1/k_1)} = \frac{h_1}{\sqrt{1 + h_1^2}} e^{h_1 \operatorname{arctg}(-1/h_1)} \quad (20)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{1-4B}}, \quad h_1 = \frac{1}{\sqrt{1-4(A-B)}}$$

Область, где существуют автоколебания, расположена между кривой (20) и прямой $h = 0$.

3-й случай. Сумма параметров $A + B > \frac{1}{4}$, параметр $B < 0$. В плоскостях $x = \text{const}$ состояние равновесия типа седла. Отрезок покоя неустойчив. В полуплоскостях H и H' разбиение состоит из кусков траекторий, соответствующих случаю устойчивого фокуса.

Вводя переменные

$$U = -\frac{2(A+B)}{B}u, \quad V = -\frac{v}{2B}$$

где u и v имеют прежний смысл, находим уравнения кривых γ и Γ :

$$U = \frac{e^{k\tau} + \cos h\tau + k \sin h\tau}{\cos h\tau + k \sin h\tau - e^{k\tau}}, \quad V = \frac{k \sin h\tau}{\cos h\tau + k \sin h\tau - e^{k\tau}} \quad \text{для } \gamma \quad (21)$$

где

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-4B}}, \quad 0 \leq \tau \leq \infty, \quad 0 < k < 1$$

$$U = \frac{e^{-h\theta} - \cos \theta + h \sin \theta}{h \sin \theta - \cos \theta - e^{-h\theta}}, \quad V = \frac{h \sin \theta}{h \sin \theta - \cos \theta - e^{-h\theta}} \quad \text{д} \quad (22)$$

где

$$h = \frac{1}{V\sqrt{4(A+B)-1}}, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \pi$$

$$e^{-h\theta_0} + \cos \theta_0 - h \sin \theta_0 = 0, \quad 0 < h \leq \infty$$

Далее имеем

$$U(\infty) = 1, \quad V(\infty) = \frac{k}{1+k} < \frac{1}{2}, \quad U(0) = V(0) = \infty \quad \text{для } \gamma$$

$$U(\pi) = \frac{1+e^{-h\pi}}{1-e^{-h\pi}} > 1, \quad V(\pi) = 0, \quad U(\theta_0) = V(\theta_0) = \infty \quad \text{для } \Gamma$$

Из (21) и (22) находим соответственно

$$\frac{dV}{dU} = \frac{k(\cos h\tau - k \sin h\tau - e^{-k\tau})}{2(1-k^2) \sin h\tau} \quad (21')$$

$$\frac{dV}{dU} = \frac{h(e^{h\theta} + \cos \theta + h \sin \theta)}{2(1+h^2) \sin \theta} \quad (22')$$

Отсюда

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)_{0 < \tau < \infty} > 0, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\tau=0} = 0, \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\tau=\infty} = \frac{k}{2(1+k)} < \frac{1}{4} \quad \text{для } \gamma$$

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)_{\theta_0 < \theta < \pi} > 0; \quad \left(\frac{dV}{dU}\right)_{\theta=\theta_0} = \frac{h(e^{h\theta_0} - e^{-h\theta_0} + 2h \sin \theta_0)}{2(1+h^2) \sin \theta_0} > 0$$

$$\left(\frac{dV}{dU}\right)_{\theta=\pi} = \infty \quad \text{для } \Gamma$$

Нетрудно также проверить, что для γ и Γ

$$\frac{d^2V}{dU^2} < 0$$

Всегда существует единственная точка пересечения кривых γ и Γ , соответствующая *устойчивому* предельному циклу. Изображающая точка, взятая в любой части фазового пространства, идет к предельному циклу.

4-й случай. $0 < A+B < \frac{1}{4}$, параметр $B < 0$. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на границе полуплоскостей H и H' состояние равновесия — устойчивый *узел*. Уравнение кривой γ остается без изменения, а уравнение кривой Γ будет состоять из двух кусков:

куска Γ_1

$$U = \frac{e^{-h\theta} - \cos h\theta + h \sin h\theta}{h \sin h\theta - \cos h\theta - e^{-h\theta}}, \quad V = \frac{h \sin h\theta}{h \sin h\theta - \cos h\theta - e^{-h\theta}} \quad (22a)$$

где

$$h = \frac{1}{V\sqrt{1-4(A+B)}}, \quad \theta_0 < \theta < +\infty$$

$$h \sin h\theta_0 - \cos h\theta_0 - e^{-h\theta_0} = 0, \quad 1 \leq h \leq \infty$$

вертикального отрезка Γ_2

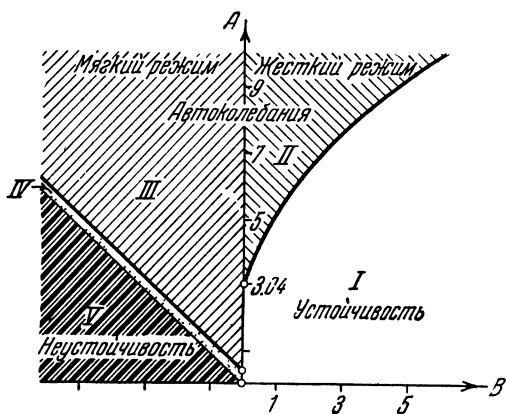
$$U = 1, \quad 0 \leq V \leq \frac{h}{h-1} > 1$$

Кривые Γ_1 и Γ_2 соединяются в точке $U = 1$, $V = h/(h-1)$. Кривая γ не пересекает кусок Γ_1 . Точке пересечения γ и Γ_2 [$U = 1$, $V = 1/2 k/(1+k)$] соответствует *устойчивый предельный цикл, проходящий через концы неустойчивого отрезка покоя*. Изображающая точка из любой части фазового пространства идет к предельному циклу (накручивание на цикл «снаружи» происходит обычным образом: по бесконечной последовательности кусков траекторий, однако с прогрессирующим замедлением при прохождении около концов отрезка покоя; приближение же к циклу «изнутри» происходит не более чем по двум кускам траекторий).

5-й случай. Сумма параметров $A + B < 0$. Как было уже указано, в этом случае в конечной части фазового пространства нет устойчивых элементов, и изображающая точка из любой части фазового пространства (если не считать точек сепаратрисы) идет в бесконечность. Заметим, наконец, что случай $B = 0$, результаты рассмотрения которого были нами приведены в § 3 главы I, требует особого исследования и не получается непосредственно из формул настоящей главы.

§ 4. Пространство параметров. Поведение регулируемой системы для различных значений параметров. Способы подавления автоколебаний.

Переходя во всех рассмотренных случаях от параметров h и k к параметрам A и B , получаем изображенное на фиг. 5 разбиение пространства параметров A , B на области, соответствующие качественно различным случаям разбиения фазового пространства на траектории. Рассмотрим отдельно три случая: $k = 0$, $k > 0$, $k < 0$, т. е. отсутствие саморегулирования, положительное саморегулирование, когда объект без регулятора устойчив, и отрицательное саморегулирование, когда объект без регулятора неустойчив.



Фиг. 5. Плоскость параметров для случая наличия жесткой обратной связи (сервомотор переменной скорости)

1-й случай. Отсутствие саморегулирования ($k = 0$). В этом случае

$$B = 0, \quad A = \frac{T_s}{T_a \delta \gamma^2}$$

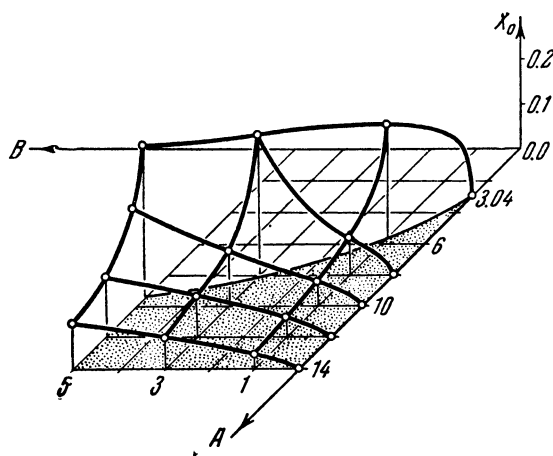
Здесь существует критическое значение $A = A_{\text{крит}} = 3.04$.

Если $A < 3.04$, мы имеем дело с абсолютной сходимостью процесса регулирования при любом внезапном изменении нагрузки. В этом случае в фазовом пространстве имеется один элемент притяжения — устойчивый отрезок покоя.

Если $A > 3.04$, мы имеем дело с устойчивыми автоколебаниями, которые существуют даже в стационарном режиме, т. е. в этом случае взаимодействие машины и регулятора приводит к стационарной самомодуляции угловой скорости вращения. В фазовом пространстве в этом случае также имеется лишь один устойчивый элемент притяжения — устойчивый предельный цикл, все характеристики которого легко могут быть подсчитаны на основании формул, приведенных в тексте. Такие автоколебания, или, иначе, такая самомодуляция, системы регулятор — машина в большей или меньшей степени (в зависимости от амплитуды предельного цикла) нарушают правильное функционирование регулирующего устройства, и, как правило, такие автоколебания должны подавляться надлежащим выбором параметров схемы. Нетрудно видеть, что уменьшение коэффициента неравномерности чувствительного элемента δ

влияет неблагоприятным образом, а увеличение коэффициента жесткой обратной связи γ влияет благоприятным образом на подавление этих нежелательных автоколебаний.

2-й случай. Положительное саморегулирование ($k > 0$). Здесь картина несколько сложнее той, которую мы только что рассматривали. Как видно из фиг. 5, каждому значению параметра $B = B_0$ (где $B_0 > 0$) соответствует определенное «критическое» значение $A = A_{\text{крит}} = F(B_0) \{F(0) = 3.04\}$.



Фиг. 6. Диаграмма Мизеса (сервомотор переменной скорости)

Если $B = B_0$ и $A \leq A_{\text{крит}}$ (область I, фиг. 5), мы имеем дело с абсолютной сходимостью процесса регулирования при любом внезапном изменении нагрузки. В этом случае в фазовом пространстве имеется один устойчивый элемент притяжения — отрезок покоя. Если $B = B_0$ и $A \geq A_{\text{крит}}$ (область II, фиг. 5), мы имеем дело с возможностью возникновения автоколебаний, причем возникают последние или не возникают — это зависит от величины изменения нагрузки машины. В фазовом пространстве в этом случае имеется два устойчивых элемента притяжения и один разделяющий элемент: устойчивый отрезок покоя, внешний устойчивый цикл и неустойчивый предельный цикл, порождающий соответствующую сепаратрисную поверхность в фазовом пространстве, отделяющую область притяжения отрезка покоя от области притяжения устойчивого цикла. Линейные размеры неустойчивого цикла, определяющие допустимую величину изменения нагрузки машины, при которой еще не будут возникать автоколебания, охарактеризованы на фиг. 6, где построена так называемая

мая диаграмма Мизеса¹, т. е. зависимость x_0 (абсциссы точки пересечения кривых γ и Γ на полуплоскости H' , соответствующей неустойчивому предельному циклу) от параметров A и B . Все характеристики внешнего устойчивого предельного цикла легко могут быть подсчитаны на основании формул, приведенных в тексте.

Таким образом, случай $k > 0$ для $A < A_{\text{крит}}$ качественно не отличается от устойчивого случая $k = 0$. Но случай $A > A_{\text{крит}}$ существенно отличается от автоколебательного случая $k = 0$, так как при $k > 0$ для того, чтобы возникли автоколебания, необходимо, чтобы изменение нагрузки превзошло некоторый определенный предел.

Нетрудно видеть, что в этом случае увеличение коэффициента жесткой обратной связи γ , увеличение коэффициента саморегулирования k и увеличение коэффициента неравномерности регулятора δ влияют благоприятным образом на подавление нежелательных автоколебаний.

3-й случай. Отрицательное саморегулирование ($k < 0$)². В этом случае объект без регулятора неустойчив. Мы не будем детально рассматривать этот случай, имеющий меньшее практическое значение, чем первые два. Здесь могут быть два основных случая: случай абсолютной неустойчивости (область V , фиг. 5) и случай автоколебательный (область III и IV , фиг. 5). Из фиг. 5 ясно, что всегда путем увеличения A (т. е., например, путем уменьшения δ) можно из расходящегося процесса сделать автоколебательный. Для точек области IV , фиг. 5 предельный цикл становится вырожденным, проходя через концы отрезка покоя.

III. Случай наличия жесткой обратной связи.

Сервомотор постоянной скорости с симметричной мертвой зоной

§ 1. Уравнения движения. В этом случае уравнения (I), (II), (III b), (IV b) после замен

$$t_{\text{нов}} = \frac{t_{\text{стар}}}{T_a \delta \gamma}, \quad x = \frac{\delta \eta}{\epsilon}, \quad y = \frac{\varphi}{\epsilon}, \quad z = \frac{\gamma \delta}{\epsilon} (\mu - k \varphi) \quad (23)$$

приводятся к виду:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z \\ x + y &= \begin{cases} +\frac{1}{2} & \text{для } \dot{x} < 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{для } \dot{x} > 0 \end{cases} \\ |x + y| &< \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{x} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

¹ Мизес впервые применил аналогичную диаграмму в задаче о влиянии кулоновского трения на прямое регулирование. Мизес откладывал не x_0 , а величину, пропорциональную x_0^{-1} .

² Мы предполагаем, что $\gamma T_a + k T_s > 0$. В противном случае рассуждения должны быть проведены заново. В частности, мы здесь не рассматриваем случай $k < 0$ и одновременно $\gamma < 0$.

$$\dot{z} = -Bz + \begin{cases} A & \text{для } x - z - By > \sigma_1 \\ 0 & \text{для } |x - z - By| < \sigma_1 \\ -A & \text{для } x - z - By < -\sigma_1 \end{cases}$$

который содержит три существенных параметра:

$$A = \frac{T_a \gamma^2 \delta^2}{T_s \varepsilon}, \quad B = k_1 \gamma \delta, \quad \sigma_1 = \frac{\delta \sigma_0}{\varepsilon}$$

Систему (24) в свою очередь удобно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 0, & \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -Bz + \begin{cases} A & \text{для } x - z - By > \sigma_1 \\ 0 & \text{для } |x - z - By| < \sigma_1 \\ -A & \text{для } x - z - By < -\sigma_1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{если } |x + y| < \frac{1}{2} \quad (24a)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -z, & \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -Bz + \begin{cases} A & \text{для } (1+B)x - z - \frac{1}{2}B > \sigma_1 \\ 0 & \text{для } |(1+B)x - z - \frac{1}{2}B| < \sigma_1 \\ -A & \text{для } (1+B)x - z - \frac{1}{2}B < -\sigma_1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{если } x + y = \frac{1}{2}, \quad z \geq 0 \quad (24b)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -z, & \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -Bz + \begin{cases} A & \text{для } (1+B)x - z + \frac{1}{2}B > \sigma_1 \\ 0 & \text{для } |(1+B)x - z + \frac{1}{2}B| < \sigma_1 \\ -A & \text{для } (1+B)x - z + \frac{1}{2}B < -\sigma_1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \text{если } x + y = -\frac{1}{2}, \quad z \leq 0 \quad (24c)$$

§ 2. Общее описание фазового пространства. В силу уравнений (24) изображающая точка может опять находиться либо между плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$, либо на полуплоскостях H и H' . Состояния равновесия системы (24) заполняют площадку $z = 0$, $|x - By| \leq \sigma_1$, $|x + y| \leq \frac{1}{2}$ («полоса покоя»). Фазовое пространство опять симметрично относительно начала координат и заполнено кусками траекторий, лежащими либо в параллельных плоскостях $x = \text{const}$, либо в полуплоскостях H и H' . Разбиение плоскостей $x = \text{const}$ состоит из полосы $|x_0 - z - By| \leq \sigma_1$, заполненной отрезками прямых, *параллельных краям полосы*, к которой другие траектории примыкают с обеих сторон таким образом, что изображающая точка, доходя до полосы, переходит на край полосы и продолжает движение по ее краю. Разбиение полуплоскости H' (разбиение H симметрично H') состоит из полосы

$$\left| (1+B)x - z - \frac{1}{2}B \right| \leq \sigma_1,$$

заполненной отрезками прямых, *пересекающих полосу*, к которой другие траектории примыкают с обеих сторон таким образом, что изображающая точка, доходя до полосы, переходит на траекторию полосы и, пересекая ее, продолжает движение по траекториям, примыкающим к полосе с другой стороны.

Такое элементарное припасовывание начальных условий оказывается, однако, невозможным на куске

$$0 < z < A, (1 + B)x - z - \frac{1}{2}B = -\sigma_1$$

границы полосы. Здесь траектории внутри и вне полосы направлены навстречу друг другу. Здесь необходимо доопределить разбиение на траектории. Доопределение, которое можно обосновать простыми механическими соображениями, приводит на куске

$$0 < z < A, (1 + B)x - z - \frac{1}{2}B = -\sigma_1$$

полуплоскости H' к уравнению $\dot{z} + (1 + B)z = 0^*$, т. е. к требованию, чтобы изображающая точка продолжала движение по границе полосы до края полосы покоя.

Изображающая точка, двигаясь по траекториям в плоскости $x = \text{const}$, может либо асимптотически приближаться по кускам траекторий в полосе $|x_0 - z - By| \leq \sigma_1$ к полосе покоя (если плоскость $x = \text{const}$ пересекает полосу покоя), либо через конечное время попадает на полуплоскости H или H' и продолжает дальше движение по траекториям разбиения полуплоскостей. Изображающая точка по траекториям разбиения полуплоскостей H или H' может либо сразу уходить в бесконечность (это возможно только при $B < 0$), либо приближается асимптотически к краю полосы покоя, либо через конечное время попадает на полупрямые

$$(L) \quad x + y = -\frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x > \frac{2\sigma_1 - B}{2(1 + B)}$$

или

$$(L') \quad x + y = \frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x < -\frac{2\sigma_1 - B}{2(1 + B)}$$

и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую.

Назовем *преобразованием* S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (соответственно L') по кускам траекторий в плоскости $x = \text{const}$ на полуплоскость H' (соответственно H), а *преобразованием* E^+ (E^-) — переход точки полуплоскости H' (H) по кускам траекторий на

* Физическое содержание доопределения заключается в требовании, чтобы характеристика сервомотора рассматривалась как предельная при $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$ для характеристики

$$\dot{\mu} = F(\sigma) = -F(-\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & \text{для } \sigma > \sigma_0 \\ \frac{1}{T_s} \frac{\bar{\sigma}_0 - \sigma}{\bar{\sigma}_0 - \sigma_0} & \text{для } \bar{\sigma}_0 < \sigma < \sigma_0 \\ 0 & \text{для } |\sigma| < \bar{\sigma}_0 \end{cases} \quad (\text{III c})$$

и, следовательно, разбиение фазового пространства рассматриваемой задачи рассматривалось как предельное для разбиения фазового пространства, соответствующего характеристике (III c).

полупрямую $L'(L)$. Задача опять сводится к изучению структуры преобразования полупрямой L при повторении преобразования $T = \overline{S^+E^+}$, которое опять удобно провести, рассматривая взаиморасположение кривых γ и Γ .

Кривая γ . Решение системы (24а) для $x - z - By > \sigma_1$ будет

$$y = -\frac{C}{B} e^{-Bt} + \frac{A}{B} t + C_1, \quad z = C e^{-Bt} + \frac{A}{B} \quad (25)$$

Изображающая точка, находившаяся в начальный момент на полупрямой

$$(L) \quad x + y = -\frac{1}{2}, \quad z = 0, \quad x > \frac{2\sigma_1 - B}{2(1+B)}$$

либо достигает плоскости $x - z - By = \sigma_1$ и далее, двигаясь по линии пересечения плоскостей $x = \text{const}$, $x - z - By = \sigma_1$, попадает на край полосы покоя или на границу полосы в полуплоскости H [на прямую $(1+B)x - z - \frac{1}{2}B = \sigma_1$], либо, не достигая плоскости $x - z - By = \sigma_1$, через время $t = \tau$ попадает на полуплоскость H' .

Полагая

$$\left. \begin{aligned} x = x_0, \quad y = -\frac{1}{2} - x_0, \quad z = 0 & \quad \text{при } t = 0 \\ x = x_0, \quad y = \frac{1}{2} - x_0, \quad z = z_0 & \quad \text{при } t = \tau \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

получаем из (25) и (26) уравнение проекции кривой γ на плоскость $y = 0$:

$$1 - \frac{B}{A} z_0 = \exp \left\{ -\frac{B(B+z_0)}{A} \right\} \quad (27)$$

Таким образом, кривая γ состоит из двух кусков: полупрямой $z_0 = \text{const}$ и отрезка $0 \leq z \leq z_0$ прямой $(1+B)x - z - \frac{1}{2}B = \sigma_1$.

Кривая Γ . Решение системы (24b) будет:

$$x = \frac{C}{B} e^{-Bt} - \frac{A}{B} t + C_1, \quad z = C e^{-Bt} + \frac{A}{B} \quad \text{для } x > \frac{z}{1+B} + \frac{B+2\sigma_1}{2(1+B)} \quad (28a)$$

$$x = \frac{C'}{B} e^{-Bt'} + C_1', \quad z = C' e^{-Bt'} \quad \text{для } \left| x - \frac{z}{1+B} - \frac{B}{2(1+B)} \right| < \frac{\sigma_1}{1+B} \quad (28b)$$

$$x = \frac{C''}{B} e^{-Bt''} + \frac{A}{B} t'' + C_1'', \quad z = C'' e^{-Bt''} - \frac{A}{B} \quad \text{для } x < \frac{z}{1+B} + \frac{B-2\sigma_1}{2(1+B)} \quad (28c)$$

Полагая

$$x = x_0, \quad z = z_0 \quad \text{при } t = 0 \quad (29a)$$

$$x = \frac{u}{1+B} + \frac{B+2\sigma_1}{2(1+B)}, \quad z = u \quad \text{при } t = \tau$$

$$x = \frac{u}{1+B} + \frac{B+2\sigma_1}{2(1+B)}, \quad z = u \quad \text{при } t' = 0$$

$$x = \frac{v}{1+B} + \frac{B-2\sigma_1}{2(1+B)}, \quad z = v \quad \text{при } t' = \tau' \quad (29b)$$

$$x = \frac{v}{1+B} + \frac{B+2\sigma_1}{2(1+B)}, \quad z = v \quad \text{при } t'' = 0$$

$$x = -x_0, \quad z = 0 \quad \text{при } t'' = \tau'' \quad (29c)$$

Из (28a) и (29a), (28b) и (29b), (28c) и (29c) получаем соответственно:

$$Bu - A = (Bz_0 - A) \exp \left\{ -\frac{B^2}{A} \left(x_0 + \frac{u - z_0}{B} - \frac{2u + 2\sigma_1 + B}{2(1+B)} \right) \right\} \quad (30a)$$

$$u = v + 2B\sigma_1 \quad (30b)$$

$$Bv + A = A \exp \left\{ \frac{B^2}{A} \left(\frac{2v - B(B - 2\sigma_1)}{2B(1+B)} - x_0 \right) \right\} \quad (30c)$$

Уравнения (30) дают в совокупности уравнение кривой Г. Условия (29) определяют кривую Г только для точек полуплоскости H' , расположенных вне полосы

$$\left| (1+B)x - z - \frac{1}{2}B \right| \leq \sigma_1$$

(«справа» от нее). Параметр u в уравнениях (30) всегда удовлетворяет условию $u > u_0$, где u_0 — положительный корень уравнения

$$B(u_0 - 2B\sigma_1) + A = A \exp \left\{ \frac{B(1-B)(u_0 - 2B\sigma_1) - B^3(1+2\sigma_1)}{A(1+B)} \right\} \quad (31)$$

получаемого из (30), если положить

$$z_0 = u_0, \quad x_0 = \frac{u_0}{1+B} + \frac{B+2\sigma_1}{2(1+B)}$$

Геометрический смысл u — координата левого конца кривой Г. В указанной части полуплоскости H' точки, принадлежащие кривой Г, существуют только для $B < 1$ [в уравнении (31) $u \rightarrow \infty$, если $B \rightarrow 1$]. При $B > 1$ кривая Г целиком лежит «слева» от полосы.

Из (30) находим также для кривой Г:

$$\frac{dz_0}{dx_0} = \frac{2[Buv + AB(1-B)\sigma_1 + A^2](Bz_0 - A)}{z_0(v - A)(Bu - A)} \quad (32)$$

Так как

$$v > A, \quad \frac{Bz_0 - A}{Bu - A} = \exp \{ \} > 0,$$

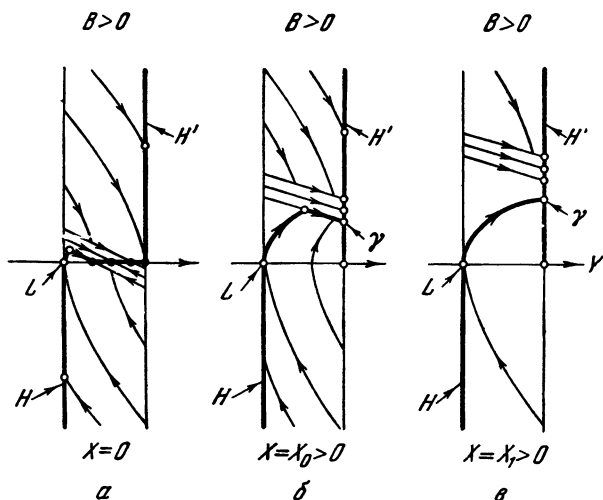
то знак dz_0/dx_0 совпадает со знаком квадратной скобки.

§ 3. Рассмотрение отдельных случаев. 1-й случай. Параметр $B > 0$. Разбиения на траектории сечений $x = 0$ и $x = \text{const} > 0$ изображены на фиг. 7. Изображающая точка, взятая между плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$, может идти либо к полосе покоя, либо переходить на полуплоскости H или H' . Точки полупрямой L (соответственно L' для $x < 0$) могут одним из двух способов (фиг. 7b и 7c) переходить на кривую Г в полуплоскости H' .

Разбиение на траектории полуплоскости H' изображено на фиг. 8. Штриховкой выделена область (область G), ограниченная дугой, составленной из кусков траекторий и проходящей через точку

$$\left(x = -\frac{B-2\sigma_1}{2(1+B)}, \quad z = 0 \right)$$

точки которой, не покидая полуплоскости H' , асимптотически приближаются к границе полосы покоя. Область G может быть количественно



Фиг. 7. Различные сечения фазового пространства (случай $B > 0$)

охарактеризована условием $u < u_1$, выполняющимся для каждой из траекторий области, где u — координата пересечения траектории с краем пластинки, а u_1 — положительный корень уравнения

$$B(u_1 - 2B\sigma_1) + A = A \exp \left\{ \frac{B(u_1 - 2B\sigma_1)}{A(1+B)} \right\} \quad (33)$$

получаемого из (30b) и (30c), если положить

$$x = -\frac{B - 2\sigma_1}{2(1+B)}$$

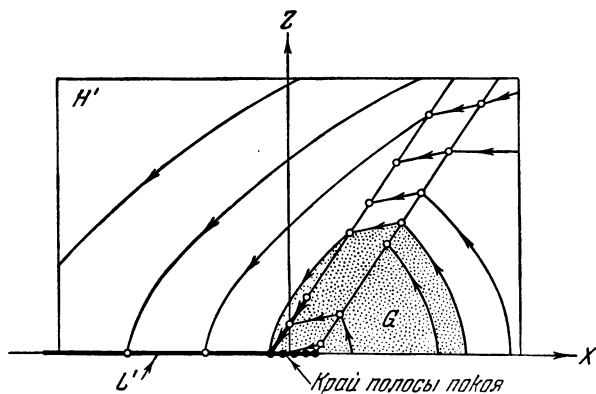
Сравнивая (31) и (33), обнаруживаем, что для $B > 0$ всегда $u_1 < u_0$ и, следовательно, кривая Γ не пересекает границу области G . Для $B > 0$ выражение, стоящее в квадратной скобке формулы (32), всегда положительно, и, следовательно, $dz_0/dx_0 > 0$ для кривой Γ .

Кривые Γ и γ могут иметь либо две различные точки пересечения, либо две слившиеся, либо ни одной (фиг. 9).

Пусть P_1 — первая точка пересечения, считая от значения $x = (B + 2\sigma_1)/2(1+B)$,

P_2 — вторая. Тогда через P_1 проходит неустойчивый, а через P_2 — устойчивый предельный цикл. Условие существования двух точек пересечения будет $z_0 > u_0$, где z_0 и u_0 определяются соответственно уравнениями (27) и (31). Точки пересечения сливаются в одну, если $z_0 = u_0$. При $z_0 < u_1$ кривые Γ и γ не пересекаются.

Полоса покоя устойчива. Изображающая точка может либо идти к полосе покоя, либо накручиваться на предельный цикл. На фиг. 10



Фиг. 8. Разбиение на траектории полуплоскости H' (случай $B > 0$)

(стр. 340) изображено пространство параметров системы. Поверхность проходит через прямые $A = 0$ и $A = \frac{1}{8}$. Для точек поверхности α кривые Γ и γ имеют слившиеся точки пересечения, для точек «внутри» поверхности (область II, фиг. 10) имеют две различные точки пересечения, для точек «снаружи» поверхности (область I, фиг. 10) не имеют ни одной.

2-й случай. Параметр $B = 0$. Все сказанное для случая $B > 0$ относится и к случаю $B = 0$. Уравнения (27), (30), (31), (32) и (33) при $B \rightarrow 0$ вырождаются соответственно в уравнения:

$$u^2 = 2A \quad (27')$$

$$v - \sigma_1 + x_0 = \frac{v^2}{2A}$$

$$u + \sigma_1 - x_0 = \frac{z_0^2 - u^2}{2A}, \quad u = v \quad (30')$$

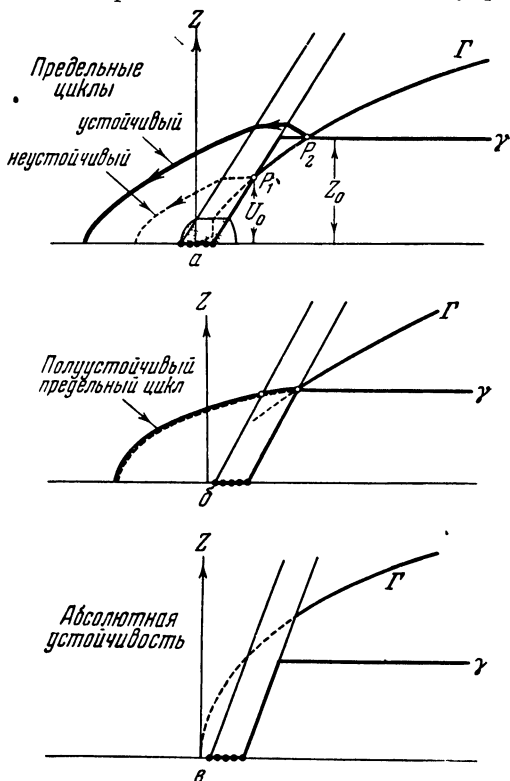
$$u = 4A \quad (31')$$

$$\frac{dz_0}{dx_0} = \frac{2A^2}{z_0(v - A)} \quad (32')$$

$$v = 2A \quad (33')$$

Прямая $A = \frac{1}{8}$ отделяет на плоскости параметров A, σ_1 область, где возможны автоколебания ($A < \frac{1}{8}$) от области, где имеет место абсолютная устойчивость ($A < \frac{1}{8}$) (фиг. 10).

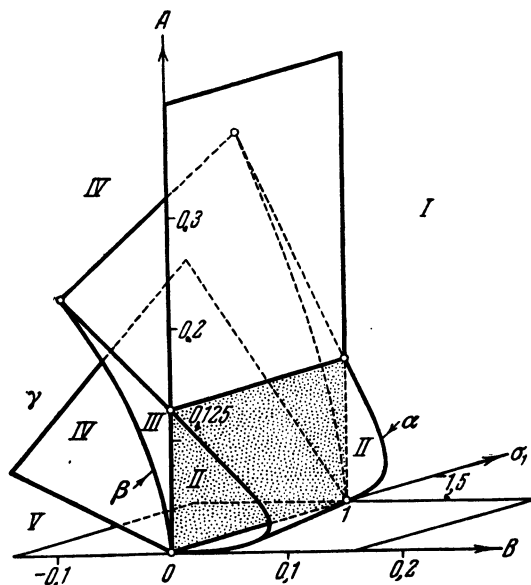
3-й случай. Параметр $B < 0$. Разбиения на траектории сечений $x = 0$ и $x = \text{const} > 0$ изображены на фиг. 11. Изображающая точка, взятая между плоскостями $x + y = \pm \frac{1}{2}$ вне полосы покоя, через конечное время переходит на полуплоскости H или H' . Разбиение на траектории полуплоскости H' изображено на фиг. 12. Штриховкой опять выделена область G , ограниченная дугой, проходящей через точку $(x = -(B - 2\sigma_1)/2(1 + B), z = 0)$. Для $B < 0$ точки области G , не покидая полуплоскости H' , асимптотически приближаются к устойчивому состоянию равновесия $(x = -(B - 2\sigma_1)/2(1 + B), z = 0)$ на границе неустойчивой полосы покоя. Для $B < 0$ (в отличие от случая $B > 0$) «левый» конец кривой Γ может лежать либо на границе полосы, либо на границе области G [кривая Γ определена условиями (29) только для точек полуплоскости H' , расположенных вне G]. Для $B < 0$ выражение в квадратной скобке формулы (32) при возрастании u меняет знак, становясь при



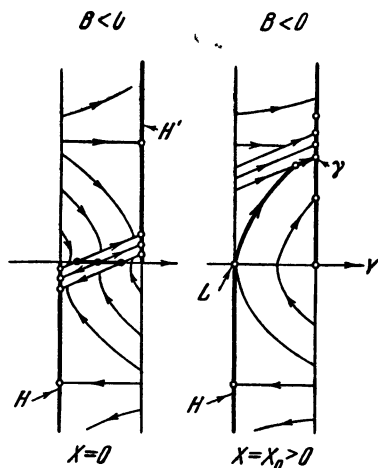
Фиг. 9. Возможные случаи взаиморасположения кривых Γ и γ (случай $B > 0$)

больших и отрицательным. В соответствии с этим кривая Γ может иметь при $B < 0$ две точки пересечения с «горизонтальным» куском кривой γ , а всего три точки пересечения (фиг. 13а.).

Пусть P_1 будет первой точкой пересечения, считая по кривой γ от $x = (B + 2\sigma_1)/2(1+B)$, P_2 — вторая и P_3 — третья (появляющаяся из



Фиг. 10. Пространство параметров для случая наличия жесткой обратной связи (сервомотор постоянной скорости с мертвой зоной)



Фиг. 11. Сечения фазового пространства (случай $B < 0$)

бесконечности при перемене знака B). Тогда через P_1 проходит *неустойчивый*, через P_2 — *устойчивый* и через P_3 — опять *неустойчивый* предельный циклы.

Пусть опять $z_0 = u^*$ и u_0 — положительные корни уравнений (27) и (31) и z_m — максимальная ордината кривой Γ (z_m — либо корень уравнения $dz_0/dx_0 = 0$, либо $z_m = u_0$, если всюду на кривой $dz_0/dx_0 < 0$). Тогда:

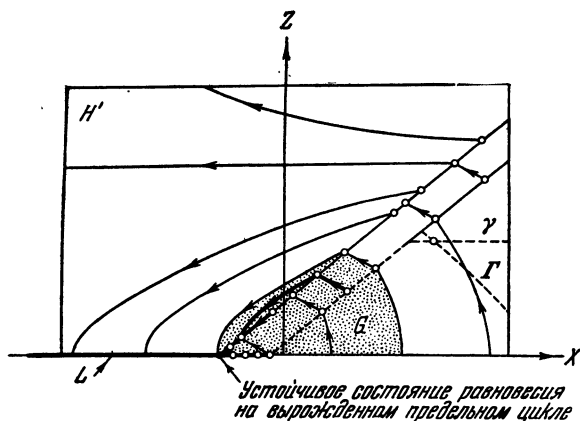
- существуют три точки пересечения (P_1, P_2, P_3), если $u_0 < u^*$, $z_m > u^*$;
- существует одна точка пересечения (соответственно P_1 или P_3), если $z_m < u^*$ или $u_0 > u^*$;
- кривые Γ и γ не пересекаются.

В каждом из этих случаев однозначно определяется качественная структура разбиения фазового пространства на траектории. Нетрудно построить в пространстве параметров A, B, σ_1 поверхности, разделяющие пространство на области, соответствующие перечисленным выше случаям.

На фиг. 10 изображено пространство параметров A, B, σ_1 , а на фиг. 14 — сечение пространства параметров плоскостью $\sigma_1 = 0$. Области III, IV, V на фиг. 10 и 14 соответствуют (в том же порядке) случаям (а), (b), (с).

Различные случаи взаиморасположения кривых Γ и γ , соответствующие случаям (a), (b) и (c), изображены на фиг. 13¹.

Замкнутый контур, составленный из кусков траекторий, принадлежащих области G (фиг. 13c), и, соответственно, симметричных кусков в полуплоскости H , а также симметричных кусков между плоскостями и двух устойчивых состояний равновесия на границе полосы покоя, является *вырожденным устойчивым предельным циклом*, возникающим при перемене знака B из границы полосы покоя. Вырождение цикла,



Фиг. 12. Разбиение на траектории полуплоскости H' (случай $B < 0$)

проявляющееся в том, что он, отделившись от контура, ограничивающего полосу покоя, остается связанным с ней в двух точках, обусловлено вырождением характеристики сервомотора. Рассматривая сервомотор с непрерывной характеристикой типа (IIIc), нетрудно обнаружить, что от контура, ограничивающего полосу покоя, отделяется невырожденный устойчивый предельный цикл, когда полоса покоя меняет устойчивость (при $B = 0$). Этот предельный цикл может исчезнуть, слившись с неустойчивым предельным циклом. Для вырожденной характеристики типа (IIIb) такому слиянию соответствует слияние вырожденного устойчивого предельного цикла с неустойчивым на границе области G . Период устойчивого предельного цикла неограниченно возрастает, когда в пределе характеристика (IIIc) переходит в вырожденную характеристику (IIIb).

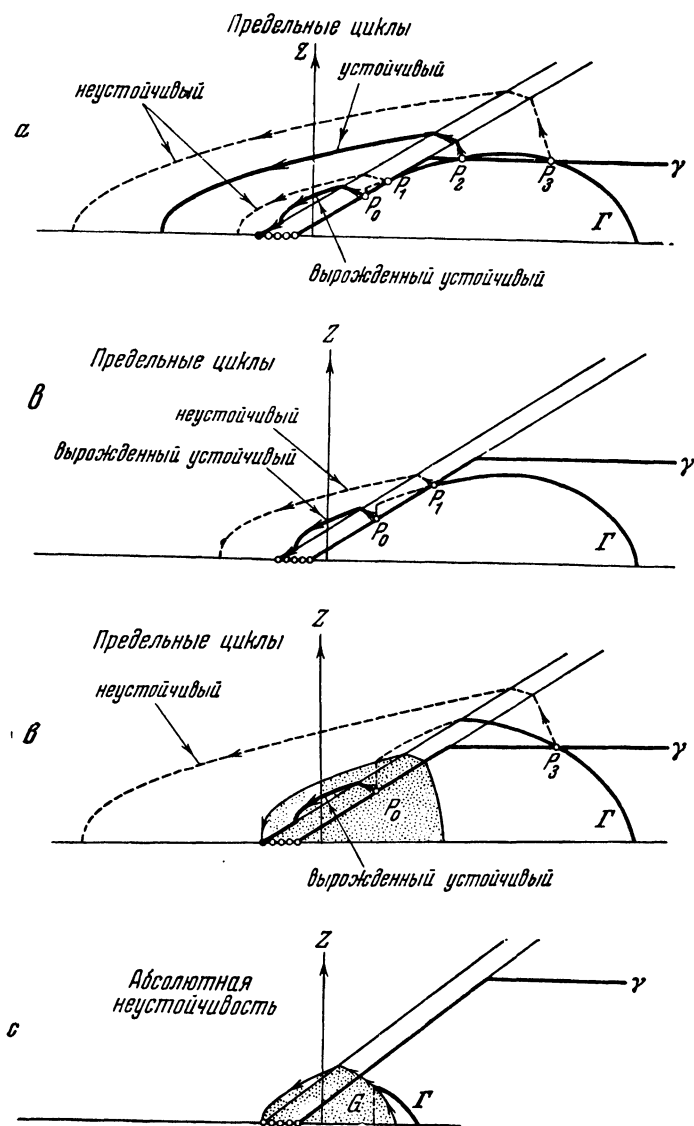
§ 4. Пространство параметров. Поведение регулируемой системы для различных значений параметров. Способы подавления автоколебаний. Рассмотрим случай отсутствия мертвой зоны у сервомотора ($\sigma_0 = 0$).

¹ На фиг. 13, a , b и b' пунктиром изображено продолжение кривой Γ в область «слева» от прямой

$$x = \frac{1}{1+B} z + \frac{B+2\sigma_0}{2(1+B)}$$

Такая «полная кривая Γ » может иметь четыре точки пересечения с кривой γ . Одна из этих точек (P_0) соответствует вырожденному предельному циклу.

В этом случае трехмерное пространство параметров A, B, σ_1 сводится к плоскости A, B (см. фиг. 14). Рассмотрим отдельно, как и раньше, случаи $k = 0, k > 0, k < 0$.



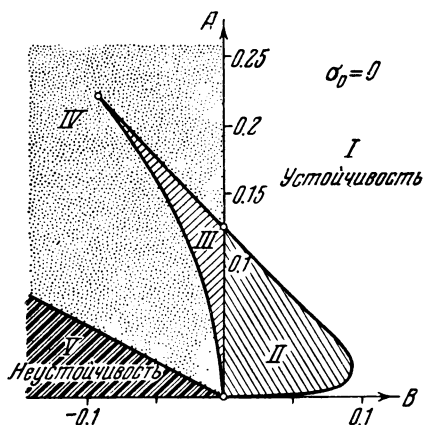
Фиг. 13. Возможные случаи взаиморасположения кривых Γ и γ (случай $B < 0$)

1-й случай. Нейтральный объект ($k = 0$). В этом случае

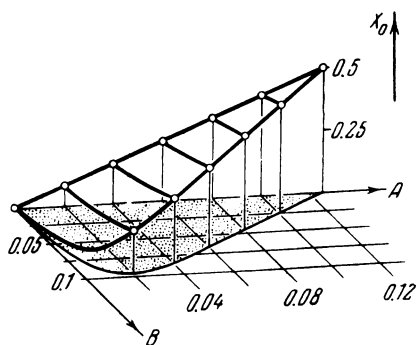
$$B = 0, \quad A = \frac{T_a \delta^2 \gamma^2}{T_s \varepsilon}$$

Если $A > \frac{1}{8}$, мы имеем дело с абсолютной сходимостью процесса регулирования при любом (в пределах рассматриваемой идеализации)

изменении нагрузки. В этом случае в фазовом пространстве имеется один элемент притяжения — устойчивый отрезок покоя. Если $A < \frac{1}{8}$, мы имеем дело с возможным — при достаточно значительном изменении нагрузки — возникновением автоколебаний. Нетрудно видеть, что уменьшение коэффициента неравномерности регулятора δ влияет неблаго-



Фиг. 14. Сечение пространства параметров плоскостью $\sigma_1 = 0$



Фиг. 15. Диаграмма Мизеса (сервомотор постоянной скорости с мертвой зоной)

приятным образом, а увеличение коэффициента жесткой обратной связи влияет благоприятным образом на подавление этих нежелательных автоколебаний, или, иначе говоря, на подавление нежелательной самомодуляции числа оборотов системы машина — регулятор. Отметим, что не прямое регулирование (для случая жесткой обратной связи, наличия определенного коэффициента нечувствительности регулятора и в предположении отсутствия массы регулятора) было изучено Толле^[6]. Однако Толле, следуя Преллю и Пфарру, а не Леоте, учел нечувствительность регулятора не динамически, как следствие имеющегося и влияющего на движение регулятора кулоновского трения, а формально, как некоторое «пространственное» запаздывание осциллограммы $\eta(t)$ (осциллограммы смещений регулятора) относительно осциллограммы $\varphi(t)$ (осциллограммы изменений угловой скорости) и получил результаты, находящиеся в определенном противоречии с результатами настоящего параграфа: по Толле, движение такой системы *всегда* сопровождается автоколебаниями угловой скорости, амплитуда которых зависит от коэффициента нечувствительности регулятора.

2-й случай. Устойчивый объект ($k > 0$). В этом случае ситуация существенно отличается от предыдущей. Если $B > B_{\text{крит}} \approx 0.1$, то при всех значениях A мы имеем дело с абсолютной сходимостью процесса регулирования. Если $B < B_{\text{крит}}$, то для данного B существует два граничных значения параметра $A = A_1$ и $A = A_2$ ($0 < A_1 < A_2$) (см. фиг. 14), отделяющих значения A , при которых возможны автоколебания, от тех

значений A , для которых автоколебания невозможны. Именно, если $A < A_1$ или $A > A_2$, то у нас имеется абсолютная сходимость процесса регулирования. Если же $A_1 < A < A_2$, то возможны автоколебания, если изменение нагрузки будет достаточно велико. Таким образом, взаимодействие машины с саморегулированием и регулятора непрямого действия, обладающего определенной нечувствительностью, носит довольно сложный характер: подавление автоколебаний возможно для $0 < B < B_{\text{крит}}$ двумя путями: как путем увеличения A (т. е., например, путем увеличения коэффициента жесткой обратной связи), так и путем уменьшения A (т. е., например, путем уменьшения коэффициента жесткой обратной связи). При этом следует иметь в виду, что такая относительно сложная структура пространства параметров не специфична для кулоновского трения. Если бы мы рассмотрели аналогичную линейную задачу, заменив сервомотор постоянной скорости сервомотором переменной скорости, а кулоновское трение — вязким трением, то мы бы получили похожие в качественном отношении результаты. На фиг. 15 изображена для $B > 0$ диаграмма Мизеса.

3-й случай. Неустойчивый объект ($k < 0$). В этом случае мы имеем дело, как правило, с довольно сложной структурой фазового пространства. При не слишком больших отрицательных B мы имеем дело, в зависимости от значений A , со следующими тремя случаями (см. фиг. 14): либо с абсолютной расходимостью процесса регулирования (область V , фиг. 14), либо с возможностью наличия устойчивых автоколебаний двух различных типов в зависимости от величины изменения нагрузки (область III) — одного типа автоколебаний с большей амплитудой при значительных изменениях нагрузки, соответствующего обычному предельному циклу, и другого типа автоколебаний, который имеет место при неизменной нагрузке или при достаточно малых изменениях нагрузки и соответствует весьма медленным автоколебаниям и в нашей идеализации, как мы уже говорили, предельному циклу с состоянием равновесия на нем.

Мы не будем подробно рассматривать случай $\sigma_1 \neq 0$, для которого пространство параметров трехмерно (см. фиг. 10). Заметим только, что увеличение σ_1 подавляет автоколебательные возможности регулируемой системы и способствует сходимости процесса регулирования, правда в известном смысле за счет увеличения тех пределов, в которых регулирующее устройство поддерживает постоянство регулируемой координаты при изменении нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pröhl R. Ueber den indirect wirkenden Regulirapparat Patent Pröhl.—Zeitschrift d. VDJ. Bd. 28, 1884, № 24, S. 457—460; № 25, S. 473—477.
- . Léauté H. Sur les oscillations à longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prevenir ces oscillations.—Journal de l'Ecole Polytechnique, vol. 55, 1885, p. 1—126.

3. P f a r r A. Der Regulirvorgang bei Turbinen mit indirekt wirkendem Regulator.— Zeitschrift d. VDJ, Bd. 43, 1899, № 50, S. 1553—1558; № 51, S. 1594—1599.
4. B a u e r s f e l d W. Die automatische Regulierung der Turbinen. Berlin, 1905 208 S.
5. B u d a u A. Beiträge zur Frage der Regulierung hydraulischer Motoren. Wien, 1906—1909. 198 S.
6. T o l l e M. Die Regelung der Kraftmaschinen. 2-te, verb. u. verm. Aufl. Berlin, 1909. S. 649—655, 673—676.
7. S y n g e J. L. Thermostatic control.—American Mathematical Monthly, vol. 40, 1933, № 4, p. 202—216.
8. H a z e n H. L., Theory of servo-mechanisms.—Journal of the Franklin Institute, vol. 218, 1934, № 3, p. 279—281.
9. Т е о д о р ч и к К. Типы движений управляемых реле сервомеханизмов.—ЖТФ, т. 8, 1938, № 10, стр. 960—967.
10. O p p e l t W. Die Flugzeugkurssteuerung im Geradeausflug. Luftfahrtforschung, Bd. 14, 1937, № 4—5, S. 270—282; Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben hinsichtlich der geeigneten Regelgesetzmäßigkeit.—Luftfahrtforschung, Bd. 16, 1939, № 8, S. 447—472; Vergleichende Betrachtung verschiedener Regelaufgaben unter Berücksichtigung der apparativen Verwirklichung des Regelgesetzes.—Luftfahrtforschung, Bd. 17, 1940, № 2, S. 59—64.
11. У м а н с к и й В. Б. О влиянии трения в золотнике сервомотора на процесс регулирования хода машин. — Сборник трудов Днепропетров. горного ин-та, вып. 1, 1939, стр. 185—194; вып. 2, 1940, стр. 105—112.
12. А й з е р м а н М. А. О влиянии сил сухого (кулоновского) трения на движения автоматических регуляторов непрямого действия.—Автоматика и телемеханика, 1941, № 3, стр. 15—34.
13. B i l h a r z H. Rollstabilität eines um seine Längsachse freien Flugzeugs bei automatisch-gesteuerten, intermittierenden, konstanten Guernu der momenten.—Luftfahrtforschung, Bd. 18, 1941, № 9, S. 317—326.—Zeitschrift Angew. Mathem. Mech., Bd. 22, 1942, № 4, S. 206—215.
14. А н д р о н о в А. и Б а у т и н Н. Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования. — Докл. АН СССР, т. 46, 1945, № 7, стр. 304—306.
15. А н д р о н о в А., Б а у т и н Н. и Г о р е л и к Г. Автоколебания простейшей схемы, содержащей автоматический винт изменяемого шага.— Докл. АН СССР, т. 47, 1945, № 4. стр. 265—268.

ПРОСТЕЙШИЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

В настоящей статье рассматриваются с точки зрения физики колебаний простейшие системы с запаздывающими силами, отображаемые линейными дифференциально-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, рассматривается действие внешних периодических сил на такие системы и приводятся графики, позволяющие быстро решать вопросы устойчивости, относящиеся к таким системам.

Введение

В теории автоматического регулирования сравнительно широко используются в качестве идеальных моделей реальных регулирующих устройств системы с запаздывающими силами, как нелинейные, так и линейные (Пфарр^[1], Толле^[2], Хазен^[3], Каллендер, Хартри и Портер^[4], Рейнгардт^[5], Минорский^[6,7]). Системы такого рода представляют значительный интерес и для физики, например для акустики (Корбейе^[8]) и для различных разделов радиофизики (Бовшеверов^[9], Горелик^[10]). Для многих других задач с запаздывающими силами представляет интерес теория систем, отображаемых линейными дифференциально-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами. Основы общей математической теории таких систем были даны в работе Хильба^[11], которая, в частности, свела проблему устойчивости таких систем к обычной задаче Гурвица для соответствующего трансцендентного характеристического уравнения. Хартри с сотрудниками^[4] было показано, что обычное операторное исчисление может быть с успехом использовано при исследовании таких систем. Рейнгардт^[5] и Минорский^[6,7] рассмотрели линейный осциллятор, на который наряду с обычным трением действует запаздывающее вязкое трение. Чеботарев^[14] и Понтрягин^[15] дали решение проблемы Гурвица для некоторого класса трансцендентных уравнений, к которым, в частности, относятся характеристические уравнения, порождаемые линейными дифференциально-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами.

* Совместно с А. Г. Майером. Опубликовано в журн. «Автоматика и телемеханика», 1946, 7, № 2—3, с. 15—41.

Настоящая работа выполнена (как это можно видеть по отчетам Горьковского физико-технического института) еще в 1939 г., и тогда же соответствующая статья была передана для опубликования в «Ученые записки ГГУ». В связи с тем, что «Ученые записки ГГУ» с 1940 г. не выходили, в 1946 г. статья была незначительно переработана (главным образом «Введение») и передана для опубликования в журнал «Автоматика и телемеханика».

Однако некоторые, существенные с точки зрения физики, особенности таких систем до сих пор не были отмечены в литературе так же, как до сих пор не было дано графиков и таблиц, которые позволяли бы для простейших типов таких систем быстро решать вопросы, интересующие физику.

Особенности простейших систем с запаздыванием, к которым стремится привлечь внимание настоящая статья:

1) наличие устойчивых и неустойчивых областей в пространстве параметров, чередование которых, для случая линейного осциллятора с запаздывающими силами, сходно с чередованием устойчивых и неустойчивых областей в теории уравнений с периодическими коэффициентами; 2) наличие резонанса для линейной системы первого порядка с запаздывающими силами, если на такую систему действует внешняя синусоидальная сила подходящей частоты;

3) наличие для линейной системы второго порядка с запаздывающими силами, на которую действует внешняя синусоидальная сила и параметры которой имеют специально выбранные значения, двух резонансных частот.

Графики и таблицы, имеющиеся в настоящей статье, позволяют быстро решать вопрос об устойчивости или неустойчивости простейших линейных систем с запаздыванием и, следовательно, позволяют делать некоторые высказывания о возможности или невозможности возникновения автоколебаний в исходных, нелинеаризованных, системах.

§ 1. Вырожденная система с запаздыванием

Пусть движение рассматриваемой системы отображается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 x_\tau, \quad (A)$$

где

$$x_\tau = x(t - \tau)$$

Для уравнения вида (A) единственное решение определяется путем задания начальной функции $x(t)$ при $0 \leq t \leq \tau$, в чем и заключается его основное отличие от обыкновенного дифференциального уравнения.

Зная $x(t)$ для $0 \leq t \leq \tau$, можно последовательно определить $x(t)$ для $\tau \leq t \leq 2\tau$, $2\tau \leq t \leq 3\tau$..., интегрируя каждый раз уравнение (A) как линейное уравнение первого порядка, причем член $\beta_1 x_\tau$ играет роль свободного члена.

Однако рассмотреть этим путем поведение системы для больших t и, следовательно, решить вопрос об устойчивости весьма затруднительно. Согласно Хильбу^[11], каждое решение (A) может быть представлено рядом вида

$$\sum C_k e^{\lambda_k t}, \quad (1)$$

где каждый отдельный член есть также решение (A), и, следовательно, λ_k определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda = \alpha_1 + \beta_1 e^{-\lambda \tau} \quad (2)$$

Решение $x=0$ будем называть устойчивым, если любое решение $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, определение областей устойчивости сводится к выяснению тех значений параметров α_1, β_1, τ , при которых действительные части всех корней уравнения (2) отрицательны*. Число параметров можно уменьшить до двух, положив

$$\lambda\tau = r, \quad \alpha_1\tau = \alpha, \quad \beta_1\tau = \beta$$

Тогда (2) перейдет в

$$r = \alpha + \beta e^{-r} \quad (3)$$

Исследуем сначала действительные корни уравнения (3). На плоскости α, β геометрическое место точек, для которых уравнение (3) имеет корень r , есть прямая

$$\beta = -\alpha e^r + r e^r \quad (4)$$

Семейство прямых (4) имеет огибающую

$$\alpha = r + 1, \quad \beta = -e^r \quad (5)$$

или, по исключении r ,

$$\beta = -e^{\alpha-1} \quad (6)$$

По (4) и (5) легко видеть, что уравнение (3) имеет корень, равный нулю в точках прямой $\beta = -\alpha$; имеет один положительный корень при $\beta > -\alpha$ и два положительных корня при $\alpha > 1$; $-e^{\alpha-1} < \beta < -\alpha$.

В остальных точках плоскости α, β уравнение (3) либо совсем не имеет действительных корней (именно при $\beta < -e^{\alpha-1}$), либо имеет отрицательные действительные корни (при $\alpha < 1$ и $-e^{\alpha-1} < \beta < -\alpha$).

Переходя к рассмотрению комплексных корней уравнения (3), будем искать те точки плоскости α, β , которым соответствует корень с действительной частью, равной нулю.

Полагая

$$r = u + iv$$

имеем

$$-u + \alpha + \beta e^{-u} \cos v = 0, \quad v + \beta e^{-u} \sin v = 0 \quad (7)$$

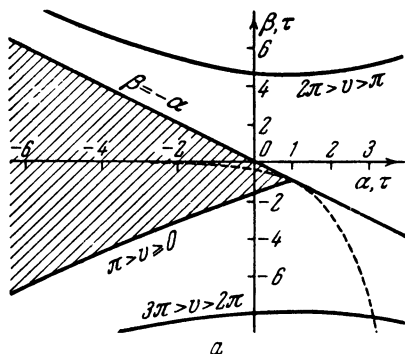
Отсюда при $u = 0$

$$\beta = -\frac{v}{\sin v}, \quad \alpha = v \operatorname{ctg} v \quad (8)$$

Эта кривая распадается на бесчисленное множество ветвей, соответствующих каждой определенному промежутку изменения v от $k\pi$ до

* Это выяснение, как и те, о которых будет идти речь в следующих параграфах, можно было бы проделать, пользуясь приемами, указанными Л. Понтрягиным^[15], или используя надлежащим образом обобщенный критерий Найквиста. Однако во многих случаях, когда отыскиваются области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров, наиболее быстро ведет к цели непосредственное исследование трансцендентного уравнения обычными геометрическими приемами, сходными с теми, которые Ф. Клейн пропагандировал для исследования алгебраических уравнений.

$(k+1)\pi$; между каждыми двумя ветвями есть 1, 2 и т. д. комплексных корней с действительными положительными частями, тогда как остальные имеют отрицательную действительную часть. Кривая показана на фиг. 1; пунктиром изображена кривая $\beta = -e^{\alpha-1}$. Заштрихована область устойчивости.



Фиг. 1

§ 2. Действие внешней силы на вырожденную систему при наличии запаздывания

Рассмотрим действие внешней силы на нашу систему. Выделяя из внешней силы $f(t)$ компоненту частоты p :

$$A \cos(pt + \varphi)$$

ограничимся рассмотрением уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 x_\tau + A \cos(pt + \varphi) \quad (9)$$

Как обычно, решение этого уравнения представится в виде суммы частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнения.

Пусть α_1 и β_1 принадлежат области устойчивости; тогда решение однородного уравнения будет затухать, и, как показывает нетрудный подсчет, установившееся движение описывается функцией

$$x(t) = \frac{A}{(\alpha_1 + \beta_1 \cos p\tau)^2 + (p + \beta_1 \sin p\tau)^2} \cos(pt + \varphi_1) \quad (10)$$

Отсюда видна возможность возникновения явления резонанса в случае уравнения первого порядка при наличии запаздывания.

В самом деле, пусть точка (α_1, β_1) лежит близко к границе области устойчивости:

$$\alpha_1 = \omega \operatorname{ctg} \omega\tau, \quad \beta_1 = -\frac{\omega}{\sin \omega\tau} + \varepsilon \quad \left(0 < \omega < \frac{\pi}{\tau}\right)$$

Внося эти значения α_1, β_1 в выражение для амплитуды установившегося движения, мы получим функцию $R(\varepsilon, p)$. График этой функции имеет ряд максимумов, один из которых, наступающий при p , близком к ω , неограниченно растет при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. Горелик^[13]).

В самой точке границы, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и при $p = \omega$, мы получим, как показывает несложный подсчет, множитель t при тригонометрической функции.

В случае внешней силы общего вида $f(t)$ предположим ее квазипериодической и разложим в обобщенный ряд Фурье. Тогда резонанс

будет иметь место, как вытекает из предыдущих вычислений, если среди собственных частот функции $f(t)$ будет частота $p = \omega$, где ω соответствует той точке границы области устойчивости, в которую попадает точка (α_1, β_1) .

Для внешней силы общего вида, т. е. для дифференциально-разностного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \beta_1 x_\tau + f(t) \quad (11)$$

остается в силе представление решения как суммы решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Это последнее решение можно получить, в согласии со Шмидтом^[12], при помощи комплексного интегрирования.

Обозначим для краткости через $L(x)$ соответствующий линейный дифференциально-разностный однородный оператор

$$L(x) \equiv \dot{x} - \alpha_1 x - \beta_1 x_\tau$$

Тогда уравнение (11) запишем в таком виде:

$$L(x) = f(t)$$

Положим

$$L(e^{i\nu t}) = l(\nu) e^{i\nu t}$$

и выберем η так, что на прямых

$$\nu = \zeta \pm i\eta \quad (-\infty < \zeta < +\infty)$$

нет нулей многочлена $l(\nu)$.

Пусть далее

$$G_\eta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\eta}^{+\infty + i\eta} \frac{e^{i\nu y} d\nu}{l(\nu)(\nu + si)^2} \quad \left(-\frac{1}{2}s \leq \eta \leq \frac{1}{2}s\right)$$

и пусть

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^0 f(y) G_\eta(t-y) dy + \int_0^\infty f(y) G_{-\eta}(t-y) dy$$

Тогда

$$g(t) = -\varphi''(t) + 2s\varphi'(t) - s^2\varphi(t)$$

будет искомым решением. Однако для исследования резонанса это выражение вынужденного решения представляется неудобным.

§ 3. Линейный осциллятор при наличии запаздывающей восстанавливающей силы и запаздывающего трения

Рассмотрим теперь обычный линейный осциллятор при наличии запаздывающей восстанавливающей силы и запаздывающего трения:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x_\tau + \beta \dot{x}_\tau \quad (B)$$

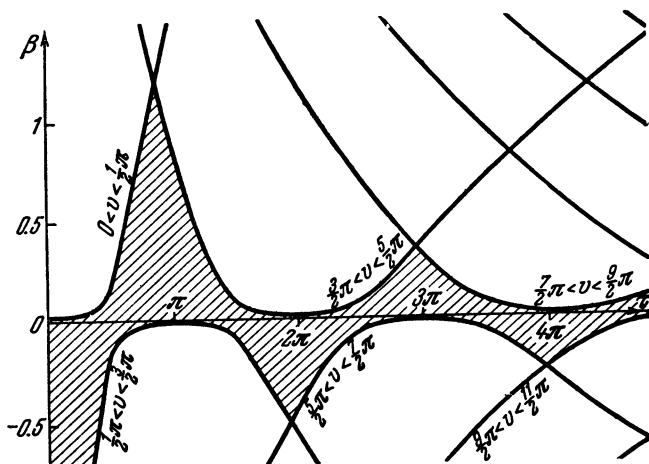
Согласно цитированной в § 1 теореме Хильба, устойчивость решения $x = 0$ имеет место в том и только в том случае, когда действительные части всех корней уравнения

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = \alpha e^{-\lambda\tau} + \beta \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (12)$$

отрицательны.

Исследуем подробно два частных случая: 1) $\alpha = 0$ и 2) $\beta = 0$.

1. *Первый случай:* $\alpha = 0$. Считая h и ω_0^2 постоянными, рассмотрим на плоскости τ, β области устойчивости.



Фиг. 2

Чисто синусоидальное решение $x = Ce^{i\eta t}$ получится при $\lambda = i\eta$, т. е. когда

$$2h = \beta \cos \eta\tau, \quad \omega_0^2 - \eta^2 = 2h\eta \operatorname{tg} \eta\tau \quad (13)$$

Чтобы получить более простое параметрическое уравнение этой кривой, положим $\tau\eta = v$. Будем иметь

$$\beta = \frac{2h}{\cos v}, \quad \tau = [h \operatorname{tg} v + \sqrt{h^2 \operatorname{tg}^2 v + \omega_0^2}] \quad (14)$$

Эта кривая состоит из бесчисленного множества ветвей: первая из них, для которой $0 \leq v < \frac{1}{2}\pi$, лежит над осью τ ; остальные, для которых $\frac{1}{2}(2n-1)\pi < v < \frac{1}{2}(2n+1)\pi$, лежат над осью τ при n четном и под осью τ при n нечетном (при положительном h).

Эта кривая показана на фиг. 2 для $\omega_0^2 = 1$, $h = 0.01$, на фиг. 3 для $\omega_0^2 = 1$, $h = 0.5$ и на фиг. 4 для $\omega_0^2 = 1$, $h = 1.5$ (заштрихована область устойчивости). Соответствующие числовые значения приведены в табл. 1—3.

Граница области существования действительного положительного корня уравнения (14) показана кривой B на фиг. 3 и 4. Ниже ее таких корней нет. Для случая $\omega_0^2 = 1$, $h = 0.01$ она лежит за

Таблица 1

Значения параметров τ и β , при которых есть чисто мнимый корень ($\omega_0^2 = 1$, $h = 0.01$)

$ \beta $	$\nu - k\pi$	$0 < \nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \nu < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \nu < \frac{5\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2} < \nu < \frac{7\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{2} < \nu < \frac{9\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2} < \nu < \frac{11\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{2} < \nu < \frac{13\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{2} < \nu < \frac{15\pi}{2}$
0.118	-1.4	—	1.64	4.60	7.56	10.52	13.48	16.44	19.40
0.075	-1.3	—	1.78	4.80	7.83	10.86	13.89	16.92	19.95
0.055	-1.2	—	1.89	4.95	8.01	11.07	14.13	17.19	20.25
0.037	-1.0	—	2.11	5.20	8.29	11.38	14.47	17.56	20.66
0.029	-0.8	—	2.32	5.43	8.54	11.65	14.76	17.87	20.98
0.024	-0.6	—	2.52	5.64	8.76	11.88	15.00	18.12	21.24
0.022	-0.4	—	2.73	5.86	8.99	12.12	15.25	18.38	—
0.020	-0.2	—	2.94	6.07	9.21	12.34	15.48	18.61	—
0.020	0.0	0.00	3.14	6.28	9.42	12.57	15.71	18.85	21.99
0.020	0.2	0.20	3.35	6.50	9.64	12.79	15.94	19.09	—
0.022	0.4	0.40	3.57	6.71	9.86	13.02	16.17	19.33	—
0.024	0.6	0.60	3.77	6.93	10.10	13.26	16.42	19.59	22.75
0.029	0.8	0.81	3.98	7.15	10.33	13.50	16.67	19.85	23.02
0.037	1.0	1.02	4.21	7.40	10.59	13.78	16.98	20.17	23.36
0.075	1.3	1.35	4.60	7.86	11.11	14.37	17.62	20.88	—
0.282	1.5	1.73	5.34	8.96	12.57	16.19	19.81	23.42	—

пределами чертежа*. Соответствующие кривым B значения приведены в табл. 4.

Из приведенных рисунков видно, что если взять постоянное β достаточно близким к $\pm 2h$, но так, чтобы $|\beta| > 2h$, то при изменении τ будут чередоваться случаи устойчивости и неустойчивости. Это явление выражено тем резче, чем меньше h ; в некоторой степени оно напоминает чередование устойчивых и неустойчивых областей при изменении параметров в теории уравнений с периодическими коэффициентами.

* Подсчет границы области существования действительного положительного корня можно провести так: кривая

$$\beta = e^{\lambda_0 \tau} \left[\lambda_0 + 2h + \frac{\omega_0^2}{\lambda_0} \right] \quad (a)$$

есть геометрическое место точек τ , β , для которых уравнение (12) при $\alpha = 0$ имеет корень $\lambda = \lambda_0$. Считая $\lambda_0 \geq 0$ и беря огибающую семейства кривых (a), получим кривую, уравнение которой в параметрической форме есть

$$\tau = \frac{\omega_0^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^3 + 2h\lambda_0^2 + \omega_0^2\lambda_0}, \quad \beta = \exp \left[\frac{\omega_0^2 - \lambda_0^2}{\lambda_0^2 + 2h\lambda_0 + \omega_0^2} \right] \left[\lambda_0 + 2h + \frac{\omega_0^2}{\lambda_0} \right]$$

где $0 \leq \lambda_0 < +\infty$ (эта кривая дает и геометрическое место кратных корней). Нетрудно убедиться, что положительные действительные корни уравнение (12) при $\alpha = 0$ имеет в точках, расположенных над этой кривой. Как видно из приведенных чертежей эта кривая не является границей области устойчивости.

Таблица 2

Значения параметров τ и β , при которых есть чисто мнимый корень ($\omega_0^2 = 1$, $h = 0.5$)

$ \beta $	$\nu - k\pi$	$0 < \nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{7}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{9}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{11}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{13}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$
5.88	-1.4	—	0.29	0.82	1.35	1.87	2.40	2.93
3.74	-1.3	—	0.48	1.29	2.11	2.92	3.74	4.55
2.76	-1.2	—	0.67	1.75	2.83	3.90	4.98	6.06
1.85	-1.0	—	1.05	2.58	4.12	5.65	7.18	8.72
1.44	-0.8	—	1.43	3.35	5.26	7.18	9.09	11.01
1.22	-0.6	—	1.87	4.18	6.49	8.80	11.11	13.42
1.09	-0.4	—	2.23	4.78	7.33	9.88	12.43	14.99
1.00	0.0	0.00	3.14	6.28	9.42	12.57	15.71	18.85
1.09	0.4	0.49	4.36	8.23	12.10	15.97	19.84	23.71
1.22	0.6	0.85	5.30	9.75	14.20	18.65	23.10	—
1.44	0.8	1.31	6.46	11.61	16.76	21.92	—	—
1.85	1.0	2.05	8.48	14.92	21.35	—	—	—
2.21	1.1	2.62	10.10	17.57	—	—	—	—
2.76	1.2	3.50	12.65	21.80	—	—	—	—
3.74	1.3	5.02	17.14	—	—	—	—	—
5.88	1.4	8.36	—	—	—	—	—	—

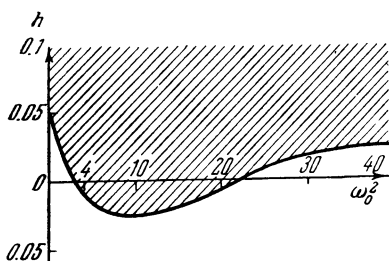
Таблица 3

Значения параметров τ и β , при которых есть чисто мнимый корень ($\omega_0^2 = 1$, $h = 1.5$)

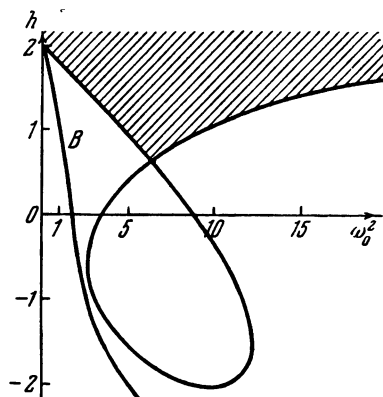
$ \beta $	$\nu - k\pi$	$0 < \nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{7}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{9}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{11}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$	$\frac{13}{2}\frac{\pi}{2}$ $\nu < \frac{\pi}{2}$
17.64	-1.4	—	0.10	0.28	0.46	0.64	0.82	0.99
11.22	-1.3	—	0.17	0.46	0.75	1.04	1.33	1.61
8.28	-1.2	—	0.25	0.65	1.05	1.46	1.86	2.26
5.55	-1.0	—	0.44	1.08	1.73	2.37	3.02	3.66
4.31	-0.8	—	0.69	1.62	2.55	3.48	4.41	5.34
3.65	-0.6	—	1.04	2.32	3.60	4.88	6.17	7.45
3.26	-0.4	—	1.51	3.25	4.98	6.72	8.45	10.18
3.00	0.0	0.00	3.14	6.28	9.42	12.57	15.71	18.85
3.26	0.4	0.73	6.42	12.11	17.80	23.50	29.19	34.88
3.65	0.6	1.47	9.16	16.85	24.54	—	—	—
4.31	0.8	2.71	13.34	23.97	—	—	—	—
5.55	1.0	4.89	20.23	—	—	—	—	—
8.28	1.2	9.41	34.03	—	—	—	—	—
11.22	1.3	14.16	—	—	—	—	—	—
17.64	1.4	24.44	—	—	—	—	—	—

касательная к этой кривой. Из фигур видно, что она не ограничивает область устойчивости (для случая $\tau = 1$, $\beta = 0.1$ эта кривая, в пределах точности чертежа, сливается с осью h).

На фиг. 5 приведен вид плоскости h , ω_0^2 при $\tau = 1$, $\beta = 0.1$, а на фиг. 6 — та же плоскость при $\tau = 1$, $\beta = 4$ (заштрихована область устойчивости). Положительный действительный корень может быть лишь левее кривой B (на фиг. 5 кривая B не отличима от оси ординат).



Фиг. 5



Фиг. 6

2. Второй случай: $\beta = 0$. Тогда исходное уравнение (B) обращается в

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x_\tau$$

а (12) переходит в

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = \alpha e^{-\lambda\tau} \quad (12')$$

Отсюда видим, что при τ , h , ω_0^2 положительных в случае действительного положительного корня λ_0 имеем

$$\alpha \geq \omega_0^2$$

Нижняя граница для α достигается при $\lambda = 0$. Следовательно, на плоскости τ , α ниже прямой $\alpha = \omega_0^2$ действительных положительных корней нет, выше есть по крайней мере один.

Для чисто мнимых корней, полагая $\lambda = \gamma i$ и $\gamma\tau = v$, получаем

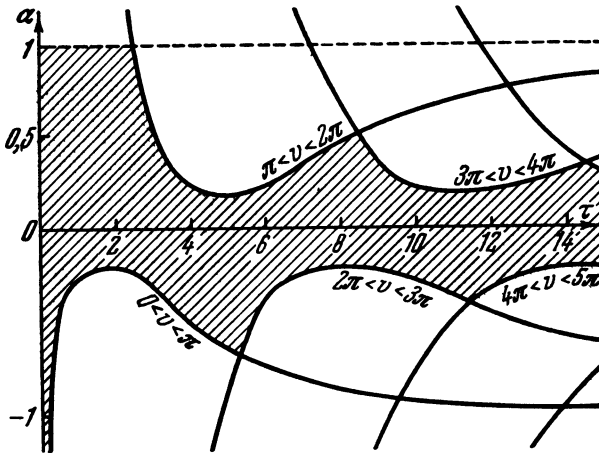
$$\begin{aligned} \tau &= \frac{v}{\omega_0^2} [-h \operatorname{ctg} v + \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 v + \omega_0^2}] \\ \alpha &= -\frac{2h}{\sin v} [h \operatorname{ctg} v + \sqrt{h^2 \operatorname{ctg}^2 v + \omega_0^2}] \end{aligned} \quad (17)$$

Эта кривая состоит из бесчисленного множества ветвей; каждая отдельная ветвь получается при $n\pi < v < (n+1)\pi$. Для случая $\omega_0^2 = 1$, $h = 0.1$, эта кривая показана на фиг. 7, где пунктиром нанесена линия $\alpha = \omega_0^2 = 1$ и заштрихована область устойчивости.

Также несложно определяются области устойчивости при постоянных τ , ω_0 и переменных α , h .

Чисто мнимые корни $\lambda = \eta i$ будут согласно (12') в тех точках плоскости α, h , где

$$\alpha = \frac{\omega_0^2 \tau^2 - v^2}{\tau^2 \cos v}, \quad h = -\frac{\omega_0^2 - v^2}{2\tau i} \operatorname{tg} v \quad (18)$$



Фиг. 7

(здесь попрежнему $v = \eta\tau$). Эта кривая распадается на бесчисленное множество ветвей соответственно значениям v :

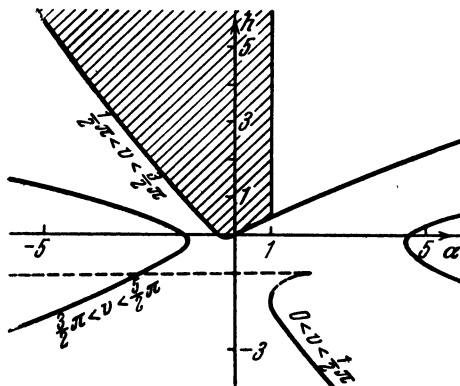
$$0 < v < \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}(2n-1)\pi < v < \frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad (n \geq 1)$$

При действительном положительном λ уравнение (12') определяет на плоскости α, h семейство прямых с огибающей

$$\alpha = \frac{\omega_0^2 - \lambda^2}{\tau\lambda + 1} e^{\lambda\tau}$$

$$h = -\lambda - \frac{\tau}{2} \frac{\omega_0^2 - \lambda^2}{\tau\lambda + 1}$$

$$(0 \leq \lambda < +\infty) \quad (18')$$



Фиг. 8

Для случая $\tau = 4, \omega_0^2 = 1$ кривые (18) и (18') показаны на фиг. 8 (последняя кривая — пунктиром; область устойчивости заштрихована). Действительные положительные корни могут быть в точках, через которые проходят касательные к пунктирной кривой.

§ 4. Действие внешней силы на осциллятор при наличии запаздывания

Пусть теперь на нашу систему действует внешняя сила:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha x_\tau + \beta \dot{x}_\tau + f(t) \quad (19)$$

Ограничимся опять случаем синусоидальной внешней силы

$$A \cos(pt + \varphi)$$

и рассмотрим явление резонанса.

Отыскивая решение с частотой внешней силы

$$x = C \cos pt + D \sin pt$$

получим амплитуду колебаний R в таком виде:

$$R = \sqrt{C^2 + D^2} = \frac{A}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= \omega_0^2 - p^2 - \alpha \cos p\tau + \beta p \sin p\tau \\ \delta &= 2hp + d \sin p\tau - \beta p \cos p\tau \end{aligned} \quad (21)$$

Точный резонанс будет иметь место при тех значениях p , при которых

$$\gamma = 0, \quad \delta = 0$$

Но из (12) легко видеть, что те же уравнения определяют границы области устойчивости, т. е. те значения параметров, при которых (В) имеет чисто периодическое решение, а уравнение (12) — чисто мнимый корень. Отсюда вытекает, что при некоторых значениях параметров (например, при $\alpha = 0$ — тех, которые соответствуют вершинам заштрихованной области фиг. 2, 3, 4, а при $\beta = 0$ — тех, которые дают соответственные точки фиг. 7) система будет резонировать на две различные частоты внешней силы, ибо тогда уравнение (12) имеет два чисто мнимых, несопряженных корня. Нахождение вынужденного движения в общем случае совершается тем же приемом Шмидта, который был указан в § 2.

§ 5. Общий случай системы двух дифференциально-разностных уравнений первого порядка

Рассмотрим теперь случай системы двух дифференциально-разностных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1x_\tau + c_1y + d_1y_\tau, \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2x_\tau + c_2y + d_2y_\tau$$

Предполагая опять решение $x(t)$, $y(t)$ в виде:

$$x(t) = \sum A_k e^{\lambda_k t}, \quad y(t) = \sum B_k e^{\lambda_k t}$$

получим для λ_k уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_1 - b_1 e^{-\lambda\tau} & -c_1 - d_1 e^{-\lambda\tau} \\ -a_2 - b_2 e^{-\lambda\tau} & \lambda - c_2 - d_2 e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0$$

или в раскрытом виде

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - (a_1 + c_2)\lambda + (a_1c_2 - a_2c_1) - \lambda e^{-\lambda\tau}(b_1 + d_2) + \\ &+ e^{-\lambda\tau}(a_1d_2 - d_1a_2 + b_1c_2 - c_1b_2) + e^{-2\lambda\tau}(b_1d_2 - b_2d_1) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Состояние покоя $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ будет устойчиво, если уравнение (22) имеет лишь корни с отрицательной действительной частью. Мы не будем проводить исследования уравнения (22), так как это потребовало бы весьма громоздких вычислений.

Уравнение (22), как и предыдущие характеристические уравнения, относится к тому классу трансцендентных уравнений, для которых проблема Гурвица рассматривалась Чеботаревым^[14] и Понтрягиным^[15], но и в этих интересных работах нет теорем, касающихся *структуры разбиения пространства параметров соответствующих трансцендентных уравнений на устойчивые и неустойчивые области*, и пока этот важнейший для приложений вопрос приходится исследовать для отдельных частных случаев путем непосредственных вычислений.

Физико-технический институт
Горьковского университета

ЛИТЕРАТУРА

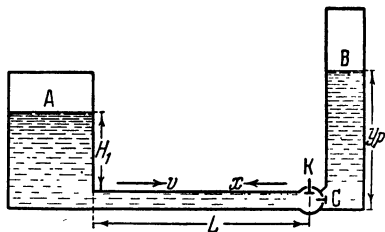
1. P f a r r A. Der Regulirvorgang bei Turbinen mit indirekt wirkenden Regulator.— Zeitschrift d. VDJ, Bd. 43, 1899, S. 1553.
2. T o l l e M. Regelung der Kraftmaschinen. Berlin, 1909, S. 671—678.
3. H a r z e n H. Theorie of servo-mechanisms.—Journal of the Franklin Institute, vol. 218, 1934, p. 279.
4. C a l l e n d e r A. H a r t r e e D. and P o r t e r A. Time-lage in a control system.— Philos. Trans. of the Roy. Soc. London, vol. 235, 1936, p. 415.
5. R e i n h a r d t F. Der Parallelbetrieb von Synchrongeneratoren mit Kraftmaschinenreglern konstanter Verzögerungszeit.— Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Werken, Bd. 18, 1939, S. 24—44.
6. M i n o r s k y N. Self-excited oscillations in dynamical systems possessing retarded actions.—Journal of Appl. Mechanics, vol. 9, 1942, p. A65.
7. M i n o r s k y N. Control problem.—Journal of the Franklin Institute, vol. 232, 1941, p. 451, 51.
8. L e C o r b e i l l e r P. Sur un type d'oscillations entretenues par réaction.—Annales des Postes, Télégr. et Téléph., t. 15, 1926, p. 653.
9. Б о в ш е в е р о в В. М. О некоторых колебательных задачах, приводящих к функциональным уравнениям.—ЖТФ, т. 6, 1936, стр. 1480.
10. Г о р е л и к Г. К теории запаздывающей обратной связи.—ЖТФ, т. 9, 1939, с. 450.
11. H i l b E. Zur Theorie d. linearen funktionalen Differentialgleichungen.—Mathemat. Annalen, Bd. 78, 1918, S. 137—170.
12. S c h m i d t E. Über eine Klasse linearer funktionaler Differenzialgleichungen.— Mathem. Annalen, Bd. 70, 1911, S. 499.
13. Г о р е л и к Г. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами —ЖТФ, т. 4, 1934, с. 1783.
14. Чеботарев Н. Г. О целых функциях с вещественными перемежающимися корнями.— Докл. АН СССР, т. 35, 1942, с. 219—222.
15. Чеботарев Н. Г. Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица.— Докл. АН СССР, т. 35, 1942, с. 251—254.
16. П о н т р я г и н Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций.— Известия АН СССР, сер. матем., т. 6, 1942, с. 115.

К ТЕОРИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТАРАНА*

В настоящей заметке гидравлический таран рассматривается как релаксационная автоколебательная система с волновым звеном. Для данной задачи строятся диаграммы Бержерона и Кенигса-Лемерея и определяется устойчивость периодического режима. Указывается, что диаграммы, построенные обоими методами, по существу совпадают. Отмечается, что теория итераций Кенигса дополняет графические методы Бержерона и др. выяснением устойчивости стационарных процессов.

§ 1. Гидравлический таран представляет собой машину для подъема воды, основанную на использовании гидравлического удара^[1,2,3].

Идеальная модель гидравлического тарана состоит из следующих частей (фиг. 1): питающего бака A , напорного резервуара B , трубопровода длиной L и сечением f и клапанной коробки с двумя клапанами — ударным K и нагнетательным C . Предположим, что уровни воды в питающем баке (давление H_1) и в напорном резервуаре (давление y_p) не меняются во время работы тарана, причем $H_1 < y_p$. Примем также, что размерами клапанной коробки можно пренебречь, т. е. что оба клапана имеют координату $x = 0$, если $x = L$ соответствует месту присоединения трубопровода к питающему баку.



Фиг. 1

Процесс работы тарана, грубо говоря, заключается в следующем. Пусть в начальный момент нагнетательный клапан C закрыт, а ударный клапан K открыт. Через ударный клапан вода будет вытекать наружу с возрастающей скоростью благодаря наличию давления H_1 . В момент открытия клапана скорость истечения, а вместе с тем и давление y в клапанной коробке равны нулю. По мере увеличения скорости давления y в клапанной коробке также возрастает. Для того чтобы таран мог работать, необходимо, чтобы при некоторой скорости давление на ударный клапан снизу вверх y превышало бы вес клапана и закрыло его, преградив выход воде наружу; само собой разумеется, существенно, чтобы клапан закрывался при некотором давлении y_k в клапанной коробке, которое

* Совместно с Г. В. Ароновичем; относится к 1947 г. Подготовлено к печати Г. В. Ароновичем, посмертно опубликовано в Инженерном сборнике Института механики АН СССР, 1954, 20, с. 3—12.

было бы меньше нормального давления H_0 . Отметим, что

$$H_1 - H_0 = (1 + \zeta) \frac{v_0^2}{2g}$$

где ζ — коэффициент сопротивления системы.

Если клапан излишне тяжел ($y_k > H_0$), то, будучи раз открыт, он уже вовсе не закроется. Вода будет вытекать все время из клапана, не приводя в действие таранный механизм.

Пусть ударный клапан закрылся в момент $t = \tau_1$. Промежуток времени от $t = 0$ (момент открытия клапана) до момента $t = \tau_1$ (закрытия клапана K) носит название периода разгона. За время разгона вода приобретает скорость v_k и с этой скоростью в момент $t = \tau_1$ ударяется в нагнетательный клапан C .

Опыт показывает, что давление в клапанной коробке быстро повысится, сделается больше противодавления в напорном резервуаре, в результате чего откроется нагнетательный клапан.

Это происходит в течение очень незначительного промежутка времени, который носит название «периода удара».

После периода удара наступает рабочий период, когда жидкость течет за счет своей кинетической энергии в напорный резервуар, несмотря на то, что находится под обратным давлением.

Скорость в трубопроводе, наибольшая в момент открытия нагнетательного клапана, уменьшается и, наконец, переходя через нуль, меняет направление.

Но одновременно с переменной направления скорости давление y в клапанной коробке сделается меньше давления y_p в напорном резервуаре, и благодаря этому нагнетательный клапан закроется.

Этот момент можно назвать моментом окончания рабочего периода, так как именно в этот момент перестает поступать вода в напорный резервуар. Последний период работы тарана (по Бахметьеву [2] — период отхлывания) заключается в том, что после закрытия нагнетательного клапана давление в клапанной коробке весьма быстро падает до атмосферного или ниже, вызывая открытие ударного клапана. Таким образом, приходим к исходному режиму таранной установки. Вода снова начнет вытекать через ударный клапан, снова при достижении некоторой скорости ударный клапан закроется, снова повысится давление в клапанной коробке, снова откроется нагнетательный клапан и т. д.

Таким образом, таран выполняет периодическое движение. При сделанной идеализации, когда уровни воды в питающем баке и напорном резервуаре постоянны, таран сразу подходит под обычное определение автоколебательной системы и совершает периодическое движение за счет неперiodических источников энергии.

Существуют две основные возможности построения теории тарана. Первая возможность — при построении теории тарана пренебречь (при выводе уравнений движения) упругостью жидкости и стенок трубы и воспользоваться теорией одномерного движения несжимаемой жидкости, при-

соединив к этим уравнениям так называемые постулаты перескоков, столь обычные в радиофизике (которые, само собой разумеется, в скрытом виде учитывают упругость жидкости). Вторая возможность — с самого начала учесть упругость жидкости и стенок и воспользоваться уравнениями Жуковского-Аллиеви.

§ 2. Рассмотрим простейшую теорию гидравлического тарана, учитывающую упругость стенок трубы и жидкости. При этом будем считать, что продолжительность ударного периода не превышает фазы удара (см. ниже). Будем пренебрегать также потерей напора из-за гидравлических сопротивлений. Кроме того, примем для простоты, что сечения отверстий ударного и нагнетательного клапанов одинаковы.

При этих условиях таран можно рассматривать как трубопровод, соединенный с питающим баком, причем внешнее (избыточное) давление у выходного отверстия трубопровода периодически мгновенно меняется: в моменты времени, соответствующие вытеканию воды из ударного клапана в атмосферу, оно равно нулю, а в момент нагнетания равно y_p .

Благодаря этой внезапной смене давлений по трубопроводу распространяются упругие возмущения.

Расчет подобной модели тарана может быть сведен к следующей математической задаче. Найти решение дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.1)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} y &= H_1 \quad \text{при} \quad x = L \\ v &= \sqrt{2gy} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{если} \quad 0 < y < y_k \\ v &= 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{если} \quad y_k \leq y \leq y_p \\ v &= \sqrt{2g(y - y_p)} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{если} \quad y > y_p \\ v &< 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \text{если} \quad y = 0 \\ y &= H_1, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned}$$

Начальные условия выбраны соответствующими пуску тарана в ход. Координата x отсчитывается от выходного отверстия к питающему баку (см. фиг. 1).

Общий интеграл уравнений (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ v - v_0 &= -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь y_0, v_0 соответственно давление и скорость стационарного режима, а F и f — произвольные функции, отображающие собой возмущения, накладывающиеся на исходный стационарный режим. При этом $F(t - x/a)$

представляет так называемую прямую волну возмущения, распространяющуюся вверх по трубопроводу (в сторону питающего бака) со скоростью a , а $f(t + x/a)$ — обратную волну, распространяющуюся с той же скоростью в противоположном направлении.

Будем считать, что начало отсчета времени $t = 0$ совпадает с моментом начала изменения первоначального режима в точке с координатой $x = 0$. Так как при $t = 0$ возмущенное движение вдоль трубопровода (при $x > 0$) отсутствует, потребуем, пользуясь произвольностью функции F и f , чтобы

$$F\left(0 - \frac{x}{a}\right) = 0, \quad f\left(0 + \frac{x}{a}\right) = 0 \quad \text{при } t = 0 \text{ и } x > +0.$$

Тогда из начальных условий следует, что

$$y_0 = H_1, \quad v_0 = 0$$

В силу первого граничного условия

$$F\left(t - \frac{L}{a}\right) = -f\left(t + \frac{L}{a}\right)$$

или (смещая начало отсчета времени)

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right)$$

Как известно, общий интеграл (2.2) при $x = 0$ может быть представлен в виде следующей системы уравнений Жуковского-Аллиеви ^[4]:

$$y_1 - y_0 = F_1(t') - 0$$

$$y_2 - y_0 = F_2(\mu + t') - F_1(t') \quad (2.3)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_n - y_0 = F_n[(n-1)\mu + t'] - F_{n-1}[(n-2)\mu + t']$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_1 - v_0 = -\frac{g}{a}(F_1 + 0)$$

$$v_2 - v_0 = -\frac{g}{a}(F_2 + F_1) \quad (2.4)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_n - v_0 = -\frac{g}{a}(F_n + F_{n-1})$$

$$\dots \dots \dots$$

Здесь $F_1, F_2, \dots$ в уравнениях (2.4) являются сокращенными записями функций, представленных в уравнении (2.3), а

$$t = (n-1)\mu + t'$$

где $\mu = 2L/a$ — фаза удара, n — номер фазы и $0 < t' < \mu$.

Складывая каждое из уравнений (2.3) с предыдущим и вычитая из каждого из уравнений (2.4) предыдущее, представим систему урав-

нений (2.3)–(2.4) в виде так называемых цепных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= + \frac{a}{g} (v_0 - v_1) \\ y_1 + y_2 - 2y_0 &= \frac{a}{g} (v_1 - v_2) \\ &\dots \dots \dots \\ y_{n-1} + y_n - 2y_0 &= \frac{a}{g} (v_{n-1} - v_n) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) для $t' = 0$ связывают давление и скорость в конце предыдущей фазы с их значениями в конце последующей фазы и как таковые являются уравнениями в конечных разностях. Решим рассматриваемую задачу графически (фиг. 2), пользуясь методом Бержерона^[4, 5, 6].

В системе координат v, y проводим прямую $y = 0$, параболы $v = \sqrt{2gy}$ и $v = \sqrt{2g(y - y_p)}$, прямую $y = H_1$ и пунктирную прямую $y = y_k$.

Прямая $y = 0$ (для $v < 0$), параболы (для $v > 0$) и прямая $y = H_1$ графически изображают граничные условия задачи. Первое уравнение системы (2.5) при $y_0 = H_1$ и $v_0 = 0$ имеет вид:

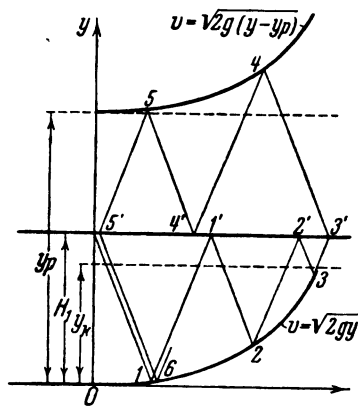
$$y_1 - H_1 = - \frac{a}{g} v_1 \quad (2.6)$$

На фиг. 2 этому уравнению соответствует прямая, пересекающая параболу $v = \sqrt{2gy}$ в точке 1. Точка 1 определяет y_1 и v_1 , т. е. давление и скорость в конце первой фазы. Из точки 1 проводим прямую под углом φ ($\operatorname{tg} \varphi = a/g$) к оси v до пересечения с прямой $y = H_1$ в точке 1', а из точки 1' — прямую под углом φ ($\operatorname{tg} \varphi = -a/g$) до пересечения с параболой $y = \sqrt{2gy}$ в точке 2. Эти прямые суть характеристики волнового уравнения, к которому сводится система дифференциальных уравнений (2.1). Вторая прямая, параллельная прямой (2.6), соответствует второму уравнению цепной серии (2.5):

$$y_2 + y_1 - 2y_0 = \frac{a}{g} (v_1 - v_2) \quad (2.7)$$

Точка 2 определяет y_2 и v_2 , т. е. давление и скорость в конце второй фазы. Построение продолжаем до тех пор, пока y не достигнет значения y_k . Как было указано выше, при $y > y_k$ закрывается ударный клапан, происходит гидравлический удар и начинается рабочий период. В этом случае для определения скорости и давления в конце каждой фазы следует находить точки пересечения соответствующих прямых с верхней параболой $y = \sqrt{2g(y - y_p)}$ (на фиг. 2 точка 4 и следующие). Когда y станет меньше y_p , следует опять спуститься к нижней параболе и т. д.

Продолжая построение на фиг. 2, легко убедиться, что стационарные автоколебания установятся не сразу и что при повторном цикле работы



Фиг. 2

тарана в конце каждой фазы, вообще говоря, будут получаться другие значения скорости и давления, чем в первом цикле.

Что касается самого стационарного режима, то он установится в известной мере независимо от y_k , иначе говоря, данному стационарному режиму будет соответствовать некоторая непрерывная последовательность значений y_k , лежащих в интервале $y_{n-1} < y_k < y_n$, где y_n — ордината точки перехода к верхней параболе. Практически это означает, что для изменения данного режима тарана надо менять вес ударного клапана (а следовательно, и y_k) на конечную величину.

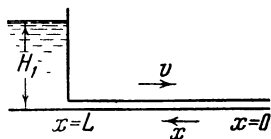
Если при переходе «сверху вниз» наклонная прямая пересекает нижнюю «граничную» кривую в точке, для которой $v < 0$, то при открытии ударного клапана в данный момент вытекания не будет и истечение воды наружу начнется через одну-две фазы. Если же в точке пересечения $v > 0$, то истечение начнется сразу¹.

Полученное графическое решение дает возможность определить ряд величин, характеризующих работу тарана: изменение давления в клапанной коробке со временем (точнее, в зависимости от числа фаз удара), изменение скорости со временем, продолжительность разгонного и рабочего периодов (для этого надо подсчитать число соответствующих фаз), потерю скорости при ударе и т. д. Найденное решение легко обобщить, учитывая разницу в сечениях отверстий клапанов и гидравлическое сопротивление вытеканию.

Гидравлические потери, распределенные по трубопроводу, в решении не отражены, но в первом приближении их можно также считать сосредоточенными у выходного отверстия^[5].

§ 3. Метод Бержерона, которым рассмотрена задача о таране, весьма широко применяется при расчетах на гидравлический удар различных гидросиловых устройств, а также для расчетов процессов другой физической природы, описываемых волновым уравнением. В сущности Бержерон дает графический метод решения функционального уравнения вида

$$\varphi(\tau + T) = \psi[\varphi(\tau)] \quad (0 < \tau < T) \quad (3.1)$$



Фиг. 3

не давая математического обоснования этому методу. Между тем по существу это обоснование было дано давно в теории итераций, о чем, повидимому, Бержерону неизвестно.

В связи с этим приведем другое решение задачи о таране, используя для этого известный из теории итераций и широко используемый в теории нелинейных колебаний метод Кенигс-Лемерея (см. [7, 8]).

Рассмотрим сначала по этому методу задачу об истечении жидкости через трубопровод в атмосферу при внезапном открытии задвижки, счи-

¹ С. Д. Чистопольский указывает (см. [3], стр. 30), что запаздывание в истечении на одну фазу имеет место всегда, однако наш вывод, по крайней мере для случаев малых противодавлений, представляется нам физически более правильным.

тая уровень питающего бака постоянным (фиг. 3). Задача сводится к решению системы функциональных уравнений:

$$y - y_0 = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad v - v_0 = -\frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (3.2)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned} y &= H_1, & v &= 0 & \text{при} & t = 0 \\ y &= H_1 & \text{при} & x = L; & v &= \sqrt{2gy} & \text{при} & x = 0 \end{aligned}$$

Начальные условия дают (см. § 2)

$$v_0 = 0, \quad y_0 = H_1$$

Система уравнений (3.2) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= H_1 + F_1(\tau - z) + f_1(\tau + z) \\ v &= -\frac{g}{a} [F_1(\tau - z) - f_1(\tau + z)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\tau = \frac{at}{L}, \quad z = \frac{x}{L}$$

Если, кроме того, ввести безразмерные величины

$$\frac{y}{H_1} = \zeta, \quad \frac{v}{v_1} = u, \quad \rho = \frac{av_1}{2gH_1} \quad (v_1 = \sqrt{2gH_1})$$

то система уравнений (3.3) в безразмерных переменных примет вид:

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 + \varphi_1(\tau - z) + \varphi_2(\tau + z) \\ u &= -\frac{1}{2\rho} [\varphi_1(\tau - z) - \varphi_2(\tau + z)] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из граничных условий следует, что $\zeta = 1$ при $z = 1$ и, следовательно

$$\varphi_1(\tau - 1) = -\varphi_2(\tau + 1), \quad \text{или} \quad \varphi_1(\tau) = -\varphi_2(\tau + 2) \quad (3.5)$$

При $z = 0$ величина $u = \Phi(\zeta)$ есть известная функция ζ или

$$-\frac{1}{2\rho} [\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)] = \Phi[1 + \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau)] \quad (3.6)$$

Заменяя в (3.6) $\varphi_1(\tau)$ через $\varphi_2(\tau + 2)$, согласно соотношению (3.5) получим

$$\varphi_2(\tau + 2) + \varphi_2(\tau) = 2\rho\Phi[1 - \varphi_2(\tau + 2) + \varphi_2(\tau)]$$

или

$$\varphi_2(\tau + 1) + \varphi_2(\tau - 1) = \Phi_1[1 - \varphi_2(\tau + 1) + \varphi_2(\tau - 1)] \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) определяет $\varphi_2(\tau + 1)$ как функцию $\varphi_2(\tau - 1)$:

$$\varphi_2(\tau + 1) = G[\varphi_2(\tau - 1)]$$

Мы получили задачу, тождественную задаче о скрипичной струне, рассмотренной А. А. Виттом^[7]. Поэтому в дальнейшем поступаем анало-

гично тому, как это делает в своей работе А. А. Витт. Отбросим индекс 2 у φ и введем обозначение

$$\varphi(\tau+1) + \varphi(\tau-1) = \alpha, \quad \varphi(\tau-1) - \varphi(\tau+1) = \beta$$

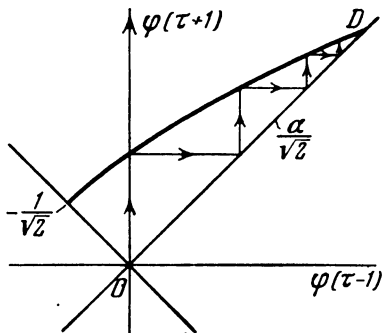
Тогда уравнение (3.7) можно переписать так:

$$\alpha = \Phi_1(1 + \beta) \quad \text{или} \quad \alpha = 2\rho \sqrt{1 + \beta}$$

Кривая, соответствующая этому уравнению, есть парабола, смещенная влево на величину, равную единице (фиг. 4). Чтобы перейти от осей



Фиг. 4



Фиг. 5

α, β к осям $\varphi(\tau-1)$ и $\varphi(\tau+1)$, нужно (согласно общим формулам преобразования прямоугольных координат) повернуть оси β, α на угол 45° по часовой стрелке и сократить масштаб в $\sqrt{2}$ раз, что и изображено на фиг. 5. Диаграмму Кенигса-Лемерея построим следующим образом.

Возьмем на параболе (назовем ее характеристической кривой) точку и проведем горизонтальную прямую до пересечения с диагональю $(0, \alpha)$; затем из точки пересечения этой горизонтальной прямой с диагональю проведем вертикальную прямую до пересечения с характеристической кривой и т. д. Абсциссы точек соприкосновения этой ломаной с характеристической кривой дают нам последовательность итераций. Мы видим, что на диаграмме Кенигса-Лемерея эта последовательность в нашем частном случае асимптотически стремится к устойчивой точке D , координаты которой (в системе отсчета β, α) определяют стационарный режим.

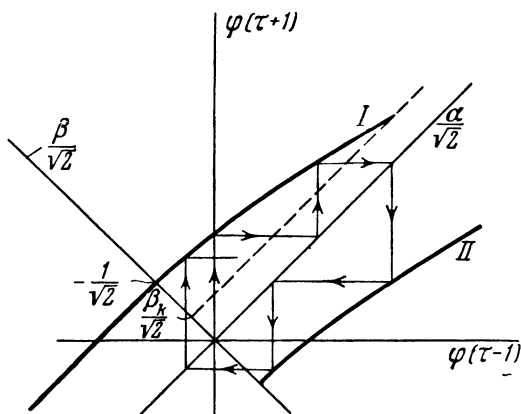
Возвращаясь к задаче о таране, отметим, что фиг. 4 соответствует разгонному периоду его работы. Диаграмму Кенигса-Лемерея для всего цикла можно построить, если, кроме параболы $\alpha = 2\rho \sqrt{1 + \beta}$, нанести на чертеж параболу

$$\alpha = 2\rho \sqrt{1 - h + \beta} \quad \left(h = \frac{y_p}{H_1} > 1 \right)$$

соответствующую граничному условию (при $x = 0$) для рабочего периода, и прямую, соответствующую граничному условию для $v < 0$. На фиг. 6 приведена диаграмма Кенигса-Лемерея для нестационарного режима

работы тарана. Замкнутый многоугольник на фиг. 6 будет соответствовать предельному циклу.

Характеристическая кривая в силу построения неоднозначна. Ее ветвь *I* используется при построении части диаграммы, соответствующей разгонному периоду, а ветвь *II* — при построении части диаграммы, соответствующей рабочему периоду. Переход с ветви *I* на ветвь *II* производится, если β становится больше $\beta_k (y > y_k)$, а с ветви *II* на ветвь *I*, если α становится отрицательным ($v < 0$).



Фиг. 6

Исследуем устойчивость предельного цикла¹. Последовательность итераций, соответствующих предельному циклу, может быть записана в следующем виде при усло-

вии, что продолжительность периода отхлывнивания так же, как и продолжительность ударного периода, не превышает фазы удара: (3.8)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tau+1) + \varphi(\tau-1) &= \Phi_1 [\varphi(\tau-1) - \varphi(\tau+1) + A] \\ \varphi(\tau+3) + \varphi(\tau+1) &= \Phi_1 [\varphi(\tau+1) - \varphi(\tau+3) + A] \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(\tau+2m+1) + \varphi(\tau+2m-1) &= \Phi_1 [\varphi(\tau+2m-1) - \varphi(\tau+2m+1) + A] \\ \varphi(\tau+2m+3) + \varphi(\tau+2m+1) &= \Phi_2 [\varphi(\tau+2m+1) - \varphi(\tau+2m+3) + B] \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi(\tau+2n+2m+1) + \varphi(\tau+2n+2m-1) &= \Phi_2 [\varphi(\tau+2n+2m-1) - \\ &\quad - \varphi(\tau+2n+2m+1) + B] \end{aligned} \right\} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

при условии

$$\varphi(\tau+2n+2m+1) = \varphi(\tau-1) \quad (3.9)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau+2k+1) &= y_k, & y_{k-1} + y_k &= \alpha_k \\ \varphi(\tau+2k-1) &= y_{k-1}, & y_{k-1} - y_k &= \beta_k \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда система уравнений (3.8) переписывается так:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2\rho \sqrt{A + \beta_k} & (0 \leq k \leq m) \\ \alpha_k &= 2\rho \sqrt{B + \beta_k} & (m+1 \leq k \leq n+m) \end{aligned}$$

¹ При выяснении устойчивости не рассматриваются возмущения внутренних степеней свободы трубопровода, а учитываются лишь возмущения краевых условий. Физически ясно и математически нетрудно обосновать, что если система устойчива по отношению к возмущениям краевых условий, то она будет устойчива и по отношению к возмущению внутренних степеней свободы. Однако, в силу того, что здесь рассматривается конкретная задача, более подробно на этом вопросе не останавливаемся.

Отсюда

$$\frac{d\alpha_k}{d\beta_k} = K_k = \frac{\rho}{\sqrt{A + \beta_k}} \quad (0 \leq k \leq m)$$

$$\frac{d\alpha_k}{d\beta_k} = K_k = \frac{\rho}{\sqrt{B + \beta_k}} \quad (m + 1 \leq k \leq m + n)$$

Дифференцируем уравнения (3.10):

$$dy_{k-1} + dy_k = d\alpha_k \quad dy_{k-1} - dy_k = d\beta_k$$

или

$$dy_{k-1} + dy_k = K_k d\beta_k \quad dy_{k-1} - dy_k = d\beta_k$$

Отсюда

$$\frac{dy_k}{dy_{k-1}} = \frac{K_k - 1}{K_k + 1}$$

Так как для всех ступеней $K_k > 0$, то, следовательно,

$$\left| \frac{dy_k}{dy_{k-1}} \right| < 1$$

Но

$$\left| \frac{d\varphi(\tau + 2n + 2m + 1)}{d\varphi(\tau - 1)} \right| = \left| \frac{dy_{n+m}}{dy_0} \right| = \left| \frac{dy_{n+m}}{dy_{n+m-1}} \frac{dy_{n+m-1}}{dy_{n+m-2}} \cdots \frac{dy_1}{dy_0} \right|$$

Следовательно,

$$\left| \frac{dy_{n+m}}{dy_0} \right| < 1$$

т. е. предельный цикл устойчив.

Замечание. Доказать существование простых и сложных предельных циклов, найти их число и определить устойчивость для заданных значений параметров можно графически. Для этого по фиг. 6 следует определить положение на биссектрисе крайних точек ломаной и построить кривые зависимости положения последующих крайних точек от предыдущих (для ряда шагов). Пересечения этих кривых и характер этих пересечений определяют число, характер и устойчивость предельных циклов. Поэтому фиг. 6 можно рассматривать как графическое построение точечного преобразования точек, лежащих на биссектрисе (преобразование прямой в прямую)^[10].

Сравнивая диаграммы Бержерона и Кенигса-Лемерея для тарана, нетрудно убедиться в том, что обе диаграммы, отличаясь друг от друга внешне (положением начала координат, направлением осей, масштабом построения и некоторыми другими деталями), по существу совпадают между собой. Диаграммы Кенигса-Лемерея могут быть построены не только для задач, в которых используется метод Бержерона, но и для задач, решаемых другими графическими методами, если только их решение сводится к определению последовательности итераций из функционально-разностных уравнений (см., например, ^[9]). При этом, как и в случае задачи о таране, можно будет констатировать фактическое (с точностью до деталей построения) совпадение соответствующих диаграмм. Это обстоятельство

является весьма существенным для случаев, когда графическими методами Бержерона или другими определяют стационарный режим, так как в этом случае теория итераций Кенигса позволяет выяснить его устойчивость.

Поступила 23 X

ЛИТЕРАТУРА

1. Бубекин Б. М. Гидравлический таран.—Бюл. Политехн. об-ва, № 1, 1910.
2. Бахметьев Б. А. Введение в изучение неустановившегося движения жидкости. Птг., 1915.
3. Чистопольский С. Д. Гидравлические тараны. 1936.
4. Егiazаров И. В. Гидроэлектрические силовые установки. ОНТИ, 1937, стр. 204.
5. Сурин А. А. Гидравлический удар в водопроводах и борьба с ним. Трансжелдориздат, 1946.
6. L. Bergeron. Methode graphique generale de calcul des propagations d'ondes planes. Memoires de la Societe des Ingenieurs civils de France, Juillet — Août, 1937, pp. 407—497.
7. Витт А. А. К теории скрипичной струны.—ЖТФ, т. VI, вып. 9, 1936; т. VII, вып. 5, 1937.
8. Бовшеверов В. М. О некоторых колебательных задачах, приводящих к функциональным уравнениям.—ЖТФ, т. VI, вып. 9, 1936.
9. De J u h a s z K. J. Graphical Analysis of Transient Phenomena in Industrial Processes. Instruments, vol. 16, Aug., № 8, 1943, p. 466—472, 508, 509, 1943.
10. Ф у ф а е в Н. А. Диссертация ГГУ. 1953. Сборник памяти А. А. Андропова. Изд. АН СССР, 1955.

ТЕОРИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КУРСА НЕЙТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ АВТОПИЛОТА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ СЕРВОМОТОРА*

1. СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ЗОНЫ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

В настоящей работе рассматривается, при обычных упрощающих предположениях, теория стабилизации курса нейтрального (т. е. без восстанавливающего момента) самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора руля направления. При этом предполагается, что автоматическое устройство имеет как обратную связь, так и искусственное демпфирование¹.

Теория точечных преобразований Пуанкаре—Брауера—Биркгофа позволяет вести рассмотрение этой нелинейной задачи без всяких предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнение движения, или о близости рассматриваемых движений к синусоидальным.

Работа распадается на две части². В первой части предполагается, что у автоматического устройства отсутствует зона нечувствительности. Для этого случая в настоящей работе полностью выясняется характер движения, имеющий место при различных начальных условиях. Здесь при обычных предположениях о знаках коэффициентов обратной связи и коэффициента искусственного демпфирования устойчивое периодическое решение не имеет места ни при каких значениях параметров и, следовательно, автоколебания отсутствуют. Однако при некоторых значениях параметров здесь может быть неустойчивое периодическое решение. Такое неустойчивое периодическое решение порождает в трехмерном фазовом пространстве рассматриваемой системы сепаратрисные поверхности, отделяющие те начальные условия, где процесс стабилизации сходится, от тех, где процесс стабилизации расходится и где, следовательно, автоматическое устройство не справляется со своей задачей.

Первая часть работы заканчивается формулами и диаграммами, позволяющими быстро решать вопрос о сходимости или расходимости процесса стабилизации курса при различных значениях параметров и различных начальных условиях.

Во второй части работы рассматривается случай наличия у исследуемого регулирующего устройства симметричной зоны нечувствительности. В такой, более сложной динамической системе, при обычных предположениях о знаках коэффициентов обратной связи и искусственного демпфирования, уже могут быть, при некоторых значениях параметров, автоколебания, крайне нежелательные с точки зрения техники.

* Совместно с Н. Н. Баутиным. Подготовлено к печати Н. Н. Баутиным. Посмертно опубликовано в Известиях АН СССР, ОТН, № 3, 1955, с. 3—32.

¹ Само собой разумеется, что настоящая работа содержит теорию и ряда других устройств автоматического регулирования, изучение которых с достаточной точностью сводится к исследованию тех же самых дифференциальных уравнений.

² Краткое изложение первой и второй частей дано соответственно в [1] и [2].

Исследование разбиения фазового пространства на траектории и в этом случае сводится к исследованию точечного преобразования плоскости самой в себя. Однако полное и детальное исследование этого точечного преобразования, которое могло бы быть проведено теми же приемами, которые использованы в первой части, не проводится ввиду его громоздкости, и анализ ограничивается лишь теми вопросами, которые имеют наибольшее прикладное значение. Во-первых, исследуются условия возникновения и частично количественные характеристики автоколебаний и, во-вторых, для случая, когда автоколебания отсутствуют, но нет абсолютной, не зависящей от начальных условий, сходимости процесса стабилизации, здесь дается оценка той области начальных условий, где этот процесс стабилизации сходится. Эта часть работы также заканчивается формулами и диаграммами, позволяющими по значениям параметров как быстро установить наличие или отсутствие автоколебаний, связанных с зоной нечувствительности, так и быстро оценить область начальных условий, о которых только что шла речь.

К предмету настоящей о исследования имеют непосредственное отношение работы Г. Никольского^[3] и Н. Бутенина^[4], в которых рассматриваются близкие задачи при помощи метода припасовывания, без всяких предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения; работы В. Котельникова^[5] и Б. Булгакова^[6], посвященные решению близких и более общих задач при помощи так называемого метода малого параметра в предположении близости решений к синусоидальным. Особо следует отметить небольшую работу А. Лурье и Н. Постникова^[7], которым для случая, отличающегося от исследуемого здесь лишь несколько более общими предположениями о характеристике сервомотора, удалось при помощи построения трехмерной топографической системы получить некоторые достаточные условия устойчивости.

Введение

Уравнения движения. Уравнения движения исследуемой системы при обычных упрощающих предположениях, как известно^[6], могут быть записаны в виде

$$\ddot{\varphi} + M\dot{\varphi} = -N\eta, \quad \dot{\eta} = F(\psi), \quad \psi = \varphi + \beta\dot{\varphi} - \frac{1}{a}\eta \quad (1)$$

Здесь φ — угол рыскания самолета, η — угол поворота руля, $M > 0$ и $N > 0$ — константы, характеризующие соответственно естественное демпфирование самолета и рулевое устройство, ψ — аргумент сервомотора, управляющего рулем¹, $\beta > 0$ — так называемый коэффициент искусственного демпфирования, $a^{-1} > 0$ — так называемый коэффициент обратной связи. Функция $F(\psi)$ носит название характеристики сервомотора. Принимая, что мы имеем дело с сервомотором постоянной скорости, обладающим зоной нечувствительности, можем положить (фиг. 1)

$$F(\psi) = \begin{cases} K & \text{для } \psi > \psi_0 \\ 0 & \text{для } |\psi| < \psi_0 \\ -K & \text{для } \psi < -\psi_0 \end{cases} \quad (2)$$

¹ Механический смысл ψ — в случае гидравлического сервомотора — открытие золотника.

где K — постоянная скорость сервомотора, $2\psi_0 > 0$ — ширина симметричной зоны нечувствительности.

Уравнения (1) и (2) показывают, что рассматриваемая нами нелинейная проблема сводится к рассмотрению нескольких различных систем линейных дифференциальных уравнений и к последовательному «припасовыванию» констант интегриации, исходя из требования непрерывности рассматриваемых функций в точках сопряжения различных систем уравнений.

Вводя новые переменные

$$t \equiv t_{\text{нов}} = Mt_{\text{стар}}, \quad z = \frac{M^3}{NK} \ddot{\varphi}, \quad u = \frac{M^3}{NK} (\dot{\varphi} + \ddot{\varphi}), \quad \psi \equiv \psi_{\text{нов}} = \frac{M^3}{NK} \psi_{\text{стар}}$$

(точки обозначают дифференцирование по $t_{\text{нов}}$) и обозначая

$$M\beta = A, \quad \frac{M^2}{Na} = B$$

приведем системы (1) и (2) к виду

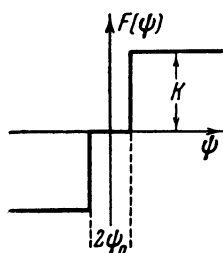
$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -z - 1, & \frac{du}{dt} &= -1, & \frac{d\psi}{dt} &= u + (A-1)z - B & \text{для } \psi > \psi_0 \\ \frac{dz}{dt} &= -z, & \frac{du}{dt} &= 0, & \frac{d\psi}{dt} &= u + (A-1)z & \text{для } |\psi| < \psi_0 \\ \frac{dz}{dt} &= -z + 1, & \frac{du}{dt} &= 1, & \frac{d\psi}{dt} &= u + (A-1)z + B & \text{для } \psi < -\psi_0 \end{aligned} \quad (3)$$

и будем в дальнейшем толковать u , z , ψ как декартовы координаты фазового пространства рассматриваемой динамической системы.

В рассматриваемой задаче припасовывание происходит в плоскостях $\dot{\psi} = +\psi_0$ и $\dot{\psi} = -\psi_0$. Если в точках смыкания кусков траекторий различных линейных систем направления движения по траекториям совпадают, то припасовывание совершается элементарным образом. Но нетрудно видеть, что в данном случае на плоскостях $\dot{\psi} = +\psi_0$ и $\dot{\psi} = -\psi_0$ выделяются области

$$\begin{aligned} \psi &= +\psi_0, & 0 < u + (A-1)z < B \\ \psi &= -\psi_0, & -B < u + (A-1)z < 0 \end{aligned}$$

для которых припасовывание не может совершаться элементарным образом, так как траектории, примыкающие к этим областям (пластинкам) с обеих сторон соответствующих плоскостей $\dot{\psi} = \psi_0$ и $\dot{\psi} = -\psi_0$, на-



Фиг. 1

правлены навстречу друг другу. Очевидно, что необходимо доопределить нашу математическую задачу и установить разбиение самих «пластинок» на траектории таким образом, чтобы каждое движение могло быть неограниченно прослеживаемо во времени. Доопределение естественно получается из требования, чтобы разбиение фазового пространства на траектории, соответствующее характеристике (2), было предельным для

разбиения фазового пространства, соответствующего характеристике

$$F(\psi) = -F(-\psi) = \begin{cases} K & \text{для } \psi \geq \psi_0 \\ \frac{\psi - \psi_0^*}{\psi_0 - \psi_0^*} K & \text{для } \psi_0^* \leq \psi \leq \psi_0 \\ 0 & \text{для } |\psi| \leq \psi_0^* \end{cases}$$

при $\psi_0^* \rightarrow \psi_0$. Это требование приводит к уравнению $\dot{\eta} = a(\dot{\varphi} + \beta\ddot{\varphi})$, которое и дает после перехода к новым переменным искомое разбиение интересующих нас частей плоскостей $\psi = \pm \psi_0$ на траектории.

Приписывая точки плоскостей $\psi = \pm \psi_0$ тем кускам траектории, для которых они будут служить начальными точками после доопределения, вместо (3) получим

$$\frac{dz}{dt} = -z + f(u, z, \psi), \quad \frac{du}{dt} = f(u, z, \psi), \quad \frac{d\psi}{dt} = g(u, z, \psi) \quad (4)$$

причем

$$(1) \quad f \equiv -1, \quad g \equiv u + (A-1)z - B$$

если

$$\psi > \psi_0 \quad \text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad u + (A-1)z - B > 0$$

$$\text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A + B$$

$$(2) \quad f \equiv 1, \quad g \equiv u + (A-1)z + B$$

если

$$\psi < \psi_0 \quad \text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad u + (A-1)z + B < 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad u + (A-1)z + B = 0, \quad u < -(A+B)$$

$$(3) \quad f \equiv 0, \quad g \equiv u + (A-1)z$$

если

$$|\psi| < \psi_0 \quad \text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad u + (A-1)z < 0$$

$$\text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad u + (A-1)z = 0, \quad z < 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad u + (A-1)z > 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad u + (A-1)z = 0, \quad z > 0$$

$$(4) \quad -Bf = u + (A-1)z, \quad g \equiv 0$$

если

$$\psi = \psi_0, \quad 0 < u + (A-1)z < B$$

$$\text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad u + (A-1)z = B, \quad u < A + B$$

$$\text{или} \quad \psi = \psi_0, \quad 0 = u + (A-1)z, \quad z > 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad -B < u + (A-1)z < 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad u + (A-1)z = 0, \quad z < 0$$

$$\text{или} \quad \psi = -\psi_0, \quad -B = u + (A-1)z, \quad z > -(A+B)$$

Система (4) совместно с требованием непрерывности $u(t)$, $z(t)$, $\psi(t)$ в точках разрыва функций f и g является подлежащей исследованию математической моделью рассматриваемой нами задачи о стабилизации

курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора.

Случай отсутствия зоны нечувствительности

§ 1. Сведение динамической задачи к точечным преобразованиям.

Общее описание фазового пространства. В случае отсутствия зоны нечувствительности система (4) принимает вид:

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = -z - 1, \quad \frac{du}{dt} = -1, \quad \frac{d\psi}{dt} = u + (A-1)z - B$$

если

$$\begin{aligned} &\psi > 0 \quad \text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z - B > 0 \\ &\text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A + B \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$(2) \quad \frac{dz}{dt} = -z + 1, \quad \frac{du}{dt} = 1, \quad \frac{d\psi}{dt} = u + (A-1)z + B$$

если

$$\begin{aligned} &\psi < 0 \quad \text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z + B < 0 \\ &\text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z + B = 0, \quad u < -(A+B) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{dz}{dt} = -z - \frac{1}{B} [(A-1)z + u], \quad \frac{du}{dt} = -\frac{1}{B} [(A-1)z + u], \quad \frac{d\psi}{dt} = 0$$

если

$$\begin{aligned} &\psi = 0, \quad -B < u + (A-1)z < B \\ &\text{или} \quad \psi = 0, \quad -B = u + (A-1)z, \quad u > -(A+B) \\ &\text{или} \quad \psi = 0, \quad u + (A-1)z = B, \quad u < A+B \end{aligned}$$

Дадим общее описание поведения траекторий в фазовом пространстве, которое позволит свести всю динамическую задачу к исследованию точечного преобразования плоскости $\psi = 0$ в самое себя. Отметим, что разбиение фазового пространства на траектории симметрично относительно начала координат, так как система (1.1) не меняется, если заменить u , z и ψ соответственно на $-u$, $-z$ и $-\psi$. Достаточно поэтому рассмотреть характер кусков траекторий для $\psi > 0$ и в плоскости $\psi = 0$.

Куски траектории для $\psi > 0$ лежат, как нетрудно видеть, в цилиндрических поверхностях $z = ce^u - 1$ и либо, приходя из бесконечности, обрываются на плоскости $\psi = 0$ (таковы, например, все траектории в цилиндрических поверхностях, не пересекающих прямую $u + (A-1)z = B$ на плоскости $\psi = 0$), либо имеют и начало и конец на плоскости $\psi = 0$ (например, все куски траекторий, лежащие в цилиндрических поверхностях $z = ce^u - 1$ при $c < 0$), либо, приходя из бесконечности, касаются плоскости $\psi = 0$, затем опять уходят в полупространство $\psi > 0$ и снова возвращаются на плоскость $\psi = 0$.

Куски траектории всех трех перечисленных типов есть в каждой цилиндрической поверхности, дважды пересекающей прямую

$$u + (A-1)z - B = 0, \quad \psi = 0$$

Касание траектории последнего типа с плоскостью $\psi = 0$ имеет место на полупрямой $u + (A-1)z - B = 0$.

В точках плоскости $\psi = 0$, расположенных вне пластинки $-B < u + (A-1)z < B$, изображающая точка, двигаясь по фазовой траектории, переходит с кусков траектории верхнего полупространства $\psi > 0$ на куски траекторий нижнего полупространства $\psi < 0$ или наоборот. Сама пластинка разбивается в силу (1.1) на траектории, и это разбиение таково, что точка $u = z = 0$ будет состоянием равновесия [устойчивым узлом при $(A+B)^2 > 4B$ или устойчивым фокусом при $(A+B)^2 < 4B$].

Куски траекторий, примыкающие к пластинке с обеих сторон, имеют встречное направление движения, и поэтому изображающая точка, дойдя до пластинки, ее не пересекает, а начинает двигаться по траекториям пластинки и либо стремится к состоянию равновесия, не выходя за пределы пластинки, либо доходит до края пластинки и уходит с нее в полупространство $\psi > 0$ или $\psi < 0$.

Траектории пластинки касаются края пластинки как раз в конце тех полупрямых

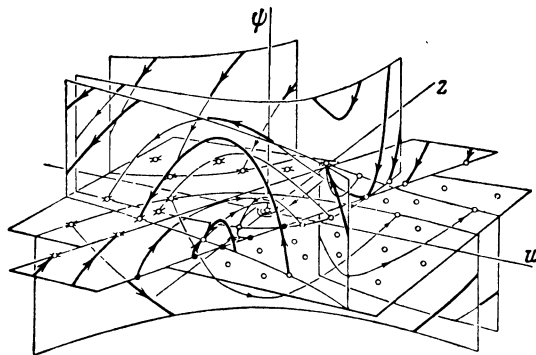
$$\psi = 0, \quad u + (A-1)z = B, \quad u > A+B$$

или

$$\psi = 0, \quad u + (A-1)z = -B, \quad u < -(A+B)$$

с которых изображающая точка уходит в полупространство и по которым касаются края пластинки траектории полупространства. Характер кусков траекторий, заполняющих фазовое пространство, представлен на фиг. 2.

Назовем траекторией системы (1.1) последовательность кусков траекторий, которую пробегает изображающая точка при своем движении в фазовом пространстве¹. Изучение поведения такой отдельной траектории в фазовом пространстве эквивалентно изучению последовательности точек



Фиг. 2

пересечения ее с плоскостью $\psi = 0$, а изучение структуры разбиения фазового пространства на траектории эквивалентно изучению структуры преобразования плоскости $\psi = 0$ в самое себя, осуществляемого движением изображающих точек по траекториям.

Точечное преобразование куска плоскости (дополненного точкой) в самого себя. Разобьем плоскость uz ($\psi = 0$) на три куска:

G — где $u + (A-1)z - B > 0$ или $u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A+B$

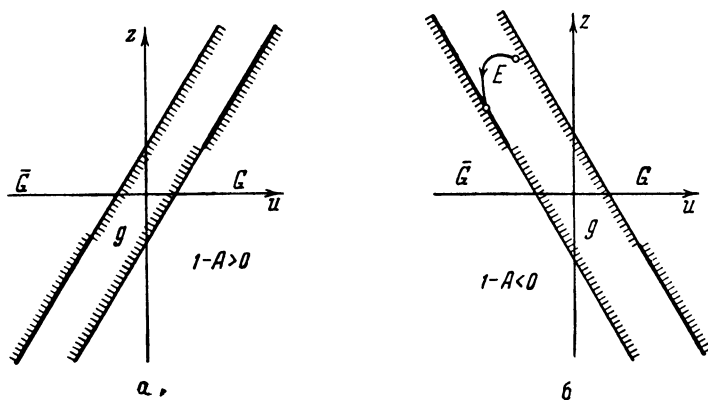
$\bar{G}$ — где $u + (A-1)z + B < 0$ или $u + (A-1)z + B = 0, \quad u < -(A+B)$

g — куда входят все точки, не принадлежащие G или $\bar{G}$ (пластинка).

¹ Движение по такой траектории однозначно определено только в одном направлении, если в состав ее входят куски траекторий на пластинке.

Разбиение изображено на фиг. 3. Штриховкой отмечена принадлежность граничных точек к кускам G , g или $\bar{G}$.

Назовем преобразованием S^+ переход точки (u_0, z_0) , принадлежащей G , в точку (u_1, z_1) , принадлежащую $\bar{G}$ или g , при движении изображающей точки по траекториям в полупространстве $\psi > 0$. Назовем преобразо-



Фиг. 3.

ванием E переход по траекториям разбиения пластинки точки (u_0, z_0) , принадлежащей g , в точку $(0, 0)$, также принадлежащую g , или в точку $u_1 \equiv -(A-1)z_1 - B$, z_1 , принадлежащую $\bar{G}$ (на «ребро» пластинки). Определим также и в $\bar{G}$ преобразование E как тождественное преобразование, чтобы иметь возможность говорить о преобразовании S^+E также и в том случае, когда преобразование S^+ не переводит рассматриваемую точку на пластинку. Каждая точка куска G по преобразованию S^+E попадает либо на кусок $\bar{G}$, симметричный G , либо в начало координат.

В силу симметрии фазового пространства нашей задачи, о которой было сказано выше, целесообразно отождествить симметричные состояния. Во всем дальнейшем мы будем считать тождественными симметричные по отношению к началу координат точки кусков G и $\bar{G}$ и будем каждый раз, когда точка, переходя по преобразованию S^+ , попадает на $\bar{G}$, рассматривать вместо нее симметричную ей точку, принадлежащую G .

Так как каждая точка, принадлежащая g (пластинке), при движении по траекториям разбиения пластинки также попадает либо на кусок G или $\bar{G}$, либо в начало координат, то рассмотрение асимптотического поведения точек пересечения траекторий фазового пространства с плоскостью $\psi = 0$ сводится к рассмотрению преобразования в себя куска G , дополненного точкой $u = z = 0$, при неограниченном повторении преобразования $T = S^+E$, где черта сверху означает переход после выполнения преобразования S^+E в симметричную точку¹.

¹ Также и в других случаях мы будем пользоваться чертой сверху как символом перехода к симметричному образу.

В точке $u = z = 0$ преобразование T определяется как тождественное [точка $u = z = 0$ состояние равновесия системы (1.1)].

Совокупность траекторий полупространства $\psi > 0$, дважды пересекающих плоскость $\psi = 0$, порождает преобразование S^+ . Вводя в качестве параметров τ — время пробега изображающей точки по куску траектории до вторичного пересечения с плоскостью $\psi = 0$ и координату z , получаем для преобразования S^+ такие выражения:

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta, & u_0 &= (A-1)(1+\zeta) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \\ z_1 &= (1+\zeta)e^{-\tau} - 1, & u_1 &= (A-1)(1+\zeta) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Плоскость uz можно покрыть «сеткой», дающей наглядное представление о структуре преобразования S^+ , узлы сетки при этом приводятся во взаимно однозначное соответствие. Из уравнений (1.2), фиксируя τ , находим, что точки, лежащие на прямой

$$u_0 = (A-1)(1+z_0) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \quad (1.3)$$

переходят в точки прямой

$$u_1 = (A-1)(1+z_1) \frac{1-e^{\tau}}{\tau} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \quad (1.4)$$

(прямые (1.3) и (1.4) переходят одна в другую при изменении знака τ). Заметим, что в преобразованиях могут участвовать только те точки прямой (1.3) (полупрямая λ), которые принадлежат G и для которых, следовательно, выполняется неравенство

$$\tau^2 \geq 2(A-1)(1+z_0)(1-\tau-e^{-\tau}) \quad (\tau > 0)$$

Каждой исходной полупрямой λ , принадлежащей G , соответствует преобразованная полупрямая λ^+ , не принадлежащая G (образ λ по преобразованию S^+). Полупрямые λ и λ^+ заполняют соответственно G и его образ G^+ и при этом без пересечений, так как огибающая семейства прямых (1.3) и (1.4) лежит вне G и G^+ . Полупрямая λ_0

$$u + (A-1)z - B = 0$$

$$u < A + B$$

является общей границей G и G^+ . Так как траектории, по которым движутся изображающие точки в полупространстве $\psi > 0$, лежат в цилиндрических поверхностях $z = ce^u - 1$ («цилиндры c »), то мы получаем узлы сетки, переходящие один в другой по преобразованию S^+ , если рассмотрим соответствующие по τ точки пересечения (1.3) и (1.4) с какой-либо из «кривых c » (кривые c — след цилиндров c на плоскости $\psi = 0$). Кривые c [как и огибающие (1.3) и (1.4)] касаются прямой $u + (A-1)z - B = 0$ в конце граничного луча λ_0 , т. е. в точке $u = A + B$,

$z = A/(1 - A)$. Сетка из «полупрямых λ » и «кривых c » изображена на фиг. 4. При преобразовании S^+ полупрямая λ_0 переходит в самое себя: ее продолжение Γ

$$u + (A - 1)z - B = 0, \quad u > A + B$$

переходит в кривую Γ^+ :

$$z = \frac{\tau^2}{2(A-1)(e^\tau - \tau e^\tau - 1)} - 1, \quad u = \frac{\tau(e^{-\tau} - 1)}{2(1 - \tau - e^{-\tau})} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \quad (1.5)$$

$$(0 \leq \tau < \infty)$$

Кусок G плоскости uz переходит при применении преобразования S^+

в кусок G^+ между полупрямой λ_0 и кривой Γ^+ .

Совокупность кусков траекторий разбиения пластинки, принадлежащих G^+ , порождает преобразование точек пластинки либо в точку $u = z = 0$, либо в кусок края пластинки, принадлежащий $\bar{G}$. Аналитическое выражение преобразования E дается для $4B - (A + B)^2 > 0$ выражениями (u_0, z_0 — исходные координаты; u_1, z_1 — преобразованные):

$$z_1 = \left[z_0 \cos \tau^* + \frac{(2 - A - B)z_0 - 2u_0}{V4B - (A + B)^2} \sin \tau^* \right] \exp \left(- \frac{(A + B)\tau^*}{V4B - (A + B)^2} \right)$$

$$u_1 = -(A - 1)z - B \quad (1.6)$$

где τ^* — меньший положительный корень уравнения

$$[(A - 1)z_0 + u_0] \cos \tau + \frac{(A + B)(1 - A)z_0 - (A - B)u_0}{V4B - (A + B)^2} \sin \tau +$$

$$+ B \exp \left(\frac{A + B}{V4B - (A + B)^2} \tau \right) = 0$$

и для $4B - (A + B)^2 < 0$ выражениями:

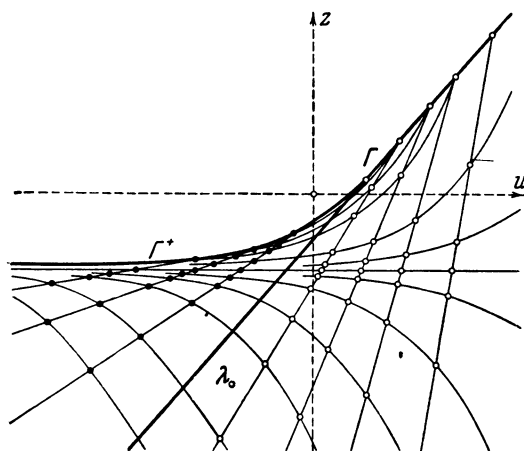
$$z_1 = \left[z_0 \operatorname{ch} \tau^* + \frac{(2 - A - B)z_0 - 2u_0}{V(A + B)^2 - 4B} \operatorname{sh} \tau^* \right] \exp \left(- \frac{(A + B)\tau^*}{V(A + B)^2 - 4B} \right)$$

$$u_1 = -(A - 1)z - B$$

где τ^* — меньший положительный корень уравнения

$$[(A - 1)z_0 + u_0] \operatorname{ch} \tau + \frac{(A + B)(1 - A)z_0 - (A - B)u_0}{V(A + B)^2 - 4B} \operatorname{sh} \tau +$$

$$+ B \exp \left(\frac{A + B}{V(A + B)^2 - 4B} \tau \right) = 0$$



Фиг. 4

Если уравнение для τ^* не имеет положительных корней, точка u_0, z_0 переходит в точку $u = z = 0$.

Правильное и неправильное преобразования. Распадение задачи на преобразование прямой в прямую и области в область. Назовем преобразование $T = \overline{S^+E}$ неправильным, если оно включает движение по траекториям пластинки (преобразование, обратное T , в этом случае неоднозначно), или правильным, если оно не включает движение по пластинкам (обратное преобразование тогда однозначно).

После двукратного применения преобразования $T = \overline{S^+E}$, переводящего G в $G_2 \subset G$, точки куска G_2 разбиваются на три класса: класс точек, допускающих неограниченное повторение неправильного преобразования, класс точек, допускающих неограниченное повторение правильного преобразования, и класс точек, переходящих после конечного числа повторений правильного или неправильного преобразования соответственно в точки первого и второго классов.

Таким образом, задача распадается на рассмотрение поведения точек первого класса при повторении неправильного преобразования, сводящегося к преобразованию прямой в прямую, и рассмотрение поведения точек второго класса при повторении правильного преобразования, сводящегося к преобразованию области в область.

Случай I

$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} > (A+B)(A+B-1)-B$$

Отметим на Γ (фиг. 5) точку P (средняя из трех точек на ребре Γ), которую S^+ переводит на другой край пластинки в точку P^+ . Нетрудно проверить, что условие

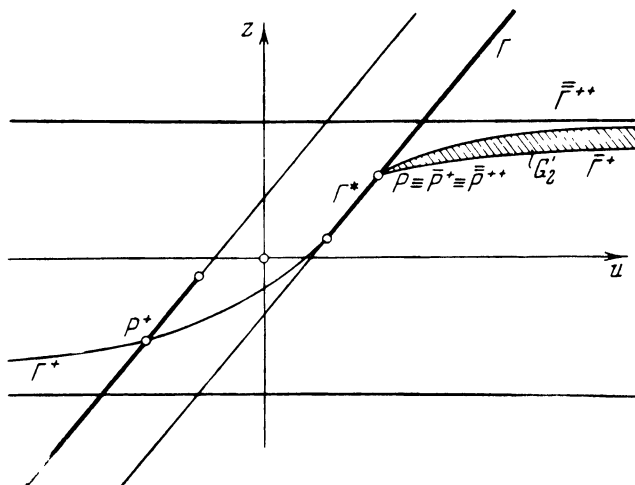
$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} > (A+B)(A+B-1)-B$$

эквивалентно требованию, чтобы ордината точки P была по абсолютной величине меньше ординаты точки P^+ . Рассмотрим преобразование куска G при применении $\overline{S^+E}$, для чего проследим за преобразованием границ G . Преобразование S^+ переводит ребро пластинки Γ в кривую Γ^+ [в кривую (1.5)] и Γ^+ пересекает $\bar{\Gamma}$ (так как ордината точки P^+ больше по абсолютной величине ординаты точки P) в точке P^+ . Кривая Γ^+ пересекает и траекторию α на пластинке¹, касающуюся края пластинки в конце $\bar{O}$ ребра $\bar{\Gamma}$. Точки Γ^+ , принадлежащие пластинке, преобразование E переводит либо в точку $u = z = 0$ (точки от конца O кривой Γ^+ до пересечения с α), либо на отрезок $\bar{OP}^+$ ребра $\bar{\Gamma}$.

¹ И при этом в одной точке. В самом деле, если бы Γ^+ пересекла какую-либо траекторию α на нижней полупластинке дважды, то «кривая c » ($z = ce^u - 1$), проведенная через одну из точек пересечения, сама пересекла бы траекторию α дважды (Γ^+ и c не могут иметь более одной точки пересечения) и имела бы между точками пересечения касание с дугой траектории α' , но это невозможно, так как кривые c касаются траекторий пластинки только по краю пластинки и по прямой $z = 0$.

куска G при применении $\bar{S}^+\bar{E}$. Преобразование S^+ переводит Γ в Γ^+ . Возможно: (а) кривая Γ^+ пересекает $\bar{\Gamma}$ и (б) кривая Γ^+ не пересекает $\bar{\Gamma}$.

(а). Повторяя рассуждения предыдущего случая, обнаруживаем, что кусок G переходит при применении $\bar{S}^+\bar{E}$ частью в точку $u = z = 0$, частью в свою часть G_1 , состоящую из отрезка ребра Γ^* (от конца ребра 0 до точки $\bar{P}^+$) и куска плоскости, ограниченного ребром Γ , начиная от точки



Фиг. 7

$\bar{P}^+$ и кривой $\bar{\Gamma}^+$. Рассмотрим далее преобразование куска G_1 при применении $\bar{S}^+\bar{E}$. Ребро Γ опять перейдет в отрезок Γ^* и кривую $\bar{\Gamma}^+$. Начало кривой $\bar{\Gamma}^+$ (точка $\bar{P}^+$) попадает по преобразованию S^+ в точку $\bar{P}^{++}$ на той части $\bar{\Gamma}^+$, которая принадлежит пластинке (так как точка $\bar{P}^+$ ближе к концу ребра, чем точка P). Кривая $\bar{\Gamma}^+$ перейдет в кривую $\bar{\Gamma}^{++}$, пересекающую ребро $\bar{\Gamma}$ в точке Q^+ . Точки $\bar{\Gamma}^{++}$, принадлежащие пластинке, преобразование E переводит либо в $u = z = 0$ (точки от конца кривой $\bar{\Gamma}^{++}$ до пересечения с α), либо на отрезок $\bar{O}Q^+$ ребра $\bar{\Gamma}$. Для остальных точек $\bar{\Gamma}^{++}$ (принадлежащих $\bar{G}$) E будет тождественным преобразованием. Преобразование симметрии возвращает оставшиеся точки $\bar{\Gamma}^{++}$ в G (в кривую $\bar{\Gamma}^{++}$).

Кусок G переходит при применении преобразования $(\bar{S}^+\bar{E})^2$ частью в точку $u = z = 0$, частью в свою часть G_2 , состоящую из отрезка Γ^* ребра Γ (от конца ребра 0 до точки $\bar{P}^+$) и куска плоскости G_2' , ограниченного отрезком γ_2 ребра Γ между точками $\bar{P}^+$ и $\bar{Q}^+$ и кривыми $\bar{\Gamma}^+$ и $\bar{\Gamma}^{++}$, начинающимися соответственно в точках $\bar{P}^+$ и $\bar{Q}^+$ и имеющими общую асимптоту $z = 1$ (точки кривой $\bar{\Gamma}^+$ не принадлежат G_2).

Покажем, что ордината точки $\bar{Q}^+$ меньше ординаты точки P . Заменив в (1.2) z_1 через $-z_1$ и u_1 через $-u_1$, получим аналитические выражения для преобразования $\bar{S}^+$ [и обратного преобразования $(\bar{S}^+)^{-1}$]. Очевидно, имеем

$$(\bar{S}^+)^{-1} \bar{P}^+ = P$$

Применим дважды к точке $\bar{Q}^+ \subset \Gamma$ обратное преобразование $(\bar{S}^+)^{-1}$:

$$(\bar{S}^+)^{-1}\bar{Q}^+ = Q \subset \bar{\Gamma}^+, \quad (\bar{S}^+)^{-1}Q = Q^- \subset \Gamma$$

и обозначим соответственно через τ_0, τ_1 и τ_2 значения параметра τ в преобразованиях

$$(\bar{S}^+)^{-1}\bar{P}^+, \quad (\bar{S}^+)^{-1}\bar{Q}^+, \quad (\bar{S}^+)^{-1}Q$$

Покажем теперь, что $\tau_2 > \tau_0 > \tau_1$. Обращаясь к выражениям для $(\bar{S}^+)^{-1}$, находим условия, которым должны удовлетворять τ_2, τ_0 и τ_1 . Условие того, что $\bar{Q}^+$ лежит на ребре Γ , а $Q = (\bar{S}^+)^{-1}\bar{Q}^+$ не лежит на ребре, будет

$$\left. \begin{aligned} 2(A-1)(1+\zeta)(e^{-\tau_1} + \tau_1 e^{-\tau_1} - 1) - \tau_1^2 + 4B\tau_1 &= 0 \\ 2(A-1)(1+\zeta)(e^{-\tau_1} + \tau_1 - 1) + \tau_1^2 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

а условие того, что Q принадлежит G , но не лежит на ребре Γ , а $Q^- = (\bar{S}^+)^{-1}Q$ лежит на ребре Γ , будет

$$\left. \begin{aligned} 2(A-1)(1+\zeta)(e^{-\tau_2} + \tau_2 e^{-\tau_2} - 1) - \tau_2^2 + 4B\tau_2 &< 0 \\ 2(A-1)(1+\zeta)(e^{-\tau_2} + \tau_2 - 1) + \tau_2^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Исключая ζ из (1.7) и (1.8), получим соответственно:

$$4B > 2\tau_1 + \tau_1^2 - \frac{\tau_1^3}{e^{-\tau_1} + \tau_1 - 1} \quad (1.9)$$

$$4B < 2\tau_2 + \tau_2^2 - \frac{\tau_2^3}{e^{-\tau_2} + \tau_2 - 1} \quad (1.10)$$

Условие, что $\bar{P}^+$ и $P = (\bar{S}^+)^{-1}\bar{P}^+$ лежат на ребре Γ , дает

$$4B = 2\tau_0 + \tau_0^2 - \frac{\tau_0^3}{e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1} \quad (1.11)$$

Так как правые части (1.9), (1.10) и (1.11) — монотонные функции τ_1, τ_2 и τ_0 , то из сравнения (1.9), (1.10) и (1.11) следует, что $\tau_2 > \tau_0 > \tau_1$. Из выражений для $\bar{S}^+$ следует также, что

$$u_{Q^-} + u_Q = \tau_2, \quad u_{\bar{Q}^+} + u_Q = \tau_1, \quad u_P + u_{\bar{P}^+} = \tau_0 \quad (1.12)$$

где u с индексом внизу означает координату u для соответствующей точки. Из (1.12) находим

$$u_{Q^-} - u_{\bar{Q}^+} = \tau_2 - \tau_1, \quad u_{Q^-} - u_P = \tau_2 - \tau_0 - (u_Q - u_{\bar{P}^+})$$

Оценим разность $u_{Q^-} - u_P$. Заметим, что $\bar{P}^+ \subset \bar{\Gamma}^+$ и $Q \subset \bar{\Gamma}^+$, но $\bar{P}^+ \subset \Gamma$, $Q \notin \Gamma$ и, следовательно, $u_Q - u_{\bar{P}^+} > 0$. Далее очевидно:

$$u_{Q^-} - u_P < \tau_2 - \tau_0 < \tau_2 - \tau_1 = u_{Q^-} - u_{\bar{Q}^+} \quad \text{или} \quad u_{\bar{Q}^+} < u_P \quad (1.13)$$

Каждая точка Γ^* , не попавшая после применения неправильного преобразования $\bar{S}^+E$ в точку $u = z = 0$, может попасть опять только на Γ^* .

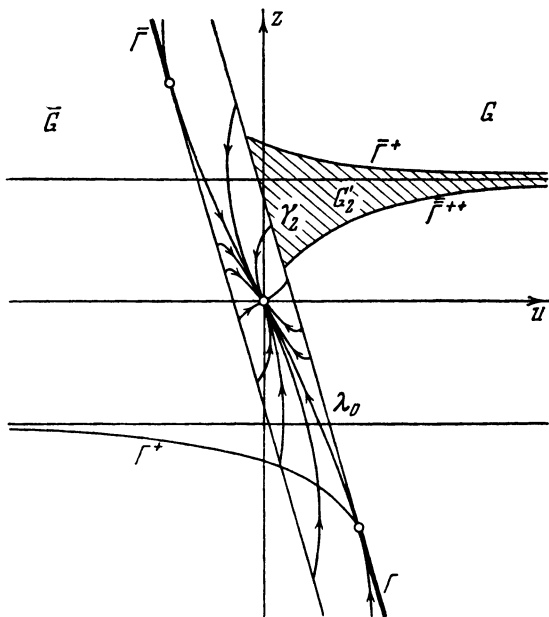
Неправильное преобразование $\overline{S^+E}$ может быть, следовательно, неограниченно повторено.

Каждая точка G_2' , к которой применимо неправильное преобразование $\overline{S^+E}$, попадает либо в точку $u = z = 0$, либо на ребро Γ . В силу условия (1.13) каждая точка Γ , принадлежащая G_2' , после однократного применения $\overline{S^+E}$ переходит либо в $u = z = 0$, либо на кусок Γ^* . Таким

образом, задача также сводится к изучению поведения точек Γ^* при повторении неправильного преобразования и к изучению поведения точек G_2' при повторении правильного преобразования.

(b). Пусть кривая Γ^+ не пересекает ребро $\bar{\Gamma}$. Каждую точку кривой Γ^+ , принадлежащую пластинке, преобразование E переводит в точку $u = z = 0$. Ребро Γ перейдет при применении $\overline{S^+E}$ в точку $u = z = 0$ и кривую $\bar{\Gamma}^+$, но без куска Γ^* .

Повторяя в основном рассуждение случая (a), обнаруживаем, что преобразование $(\overline{S^+E})^2$ переводит G в кусок G_2 , ограниченный кривыми $\bar{\Gamma}^+$



Фиг. 8

и $\bar{\Gamma}^{++}$ ($\bar{\Gamma}^+$ не принадлежит G_2) и отрезком γ_2 полупрямой λ_0 (γ_2 может принадлежать или не принадлежать G_2). Каждая точка куска G_2 , к которой применимо неправильное преобразование $\overline{S^+E}$, попадает либо в точку $u = z = 0$, либо на отрезок $\gamma_2 \subset G_2$. Каждую точку отрезка γ_2 преобразование $\overline{S^+E}$ переводит в точку $u = z = 0$. Таким образом, задача сводится к изучению поведения точек куска G_2 при повторении правильного преобразования.

Случай III. $A > 1$. При условии $A > 1$ ось пластинки $g[u + (A-1)z = 0]$ лежит во II и IV четвертях плоскости uz . Нетрудно проследить, что преобразование $(\overline{S^+E})^2$ переводит G в кусок G_2 (фиг. 8), ограниченный кривыми $\bar{\Gamma}^{++}$ и $\bar{\Gamma}^+$ и куском γ_2 полупрямой λ_0 ($\bar{\Gamma}^+$ и γ_2 не принадлежат G_2). Каждая точка G_2 , к которой применимо неправильное преобразование $\overline{S^+E}$, сразу попадает в $u = z = 0$. Задача сводится к изучению поведения точек G_2 при повторении правильного преобразования.

§ 2. Преобразование прямой в прямую. Построение диаграмм Кенигса-Ламерея. Рассмотрим поведение точек куска G , принадлежащих отрезку OP , ребра Γ , при применении $\overline{S^+E}$. Неправильное преобразование $\overline{S^+E}$ переводит точки OP либо в $u = z = 0$, либо на кусок Γ^* или

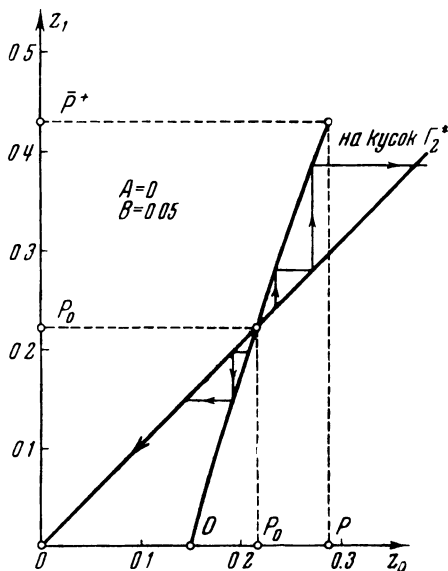
Γ_1^* ребра Γ ($\Gamma^* \subset OP$, $\Gamma_1^* \supset OP$). Пусть $M_0(u_0, z_0)$ — точка на OP , $M_0'(u_0', z_0')$ — ее образ (принадлежащий пластинке) по преобразованию S^+ , $\bar{M}_1(u_1, z_1)$ — точка на ребре $\bar{\Gamma}$, в которую переходит M_0' при применении E и $M_1(u_1, z_1)$ — точка, симметричная $\bar{M}_1$.

Преобразование $\bar{S}^+E$ точку M_0 ребра Γ переводит в точку M_1 , также принадлежащую Γ . Таким образом, на куске ребра Γ определена функция последования $z_1 = f(z_0)$. Будем рассматривать $z_1 = f(z_0)$ как кривую в плоскости z_0z_1 (диаграмма Ламерея). Расположение кривой $z_1 = f(z_0)$ относительно прямой $z_1 = z_0$ полностью определяет поведение точек рассматриваемого куска ребра Γ при применении преобразования $\bar{S}^+E$. Число и характер пересечений с прямой $z_1 = z_0$ определяют число и характер неподвижных точек на Γ . Неподвижным точкам на Γ соответствуют периодические движения (симметричные), включающие куски траекторий на пластинке.

Свойства кривой $z_1 = f(z_0)$:

$$(z_1)_{\min} = \frac{A}{1-A} < (z_0)_{\min},$$

$$\frac{dz_1}{dz_0} > 0$$



Фиг. 9а

вытекают из определения преобразования $\bar{S}^+E$. Будем далее опять различать случаи I и IIa.

Случай I

$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} > (A+B)(A+B-1)-B$$

Ордината точки P меньше ординаты точки $\bar{P}^+ = \bar{S}^+E \cdot P$, т. е. $(z_1)_{\max} > (z_0)_{\max}$. Следовательно, концы кривой $z_1 = f(z_0)$ лежат по разные стороны от прямой $z_1 = z_0$, и существует по крайней мере одна точка пересечения кривой $z_1 = f(z_0)$ с прямой $z_1 = z_0$. Напишем формулы для преобразования отрезка ребра Γ в себя. Нетрудно проверить, что вся рассматриваемая область значений A и B (между прямой $A=0$ и кривой

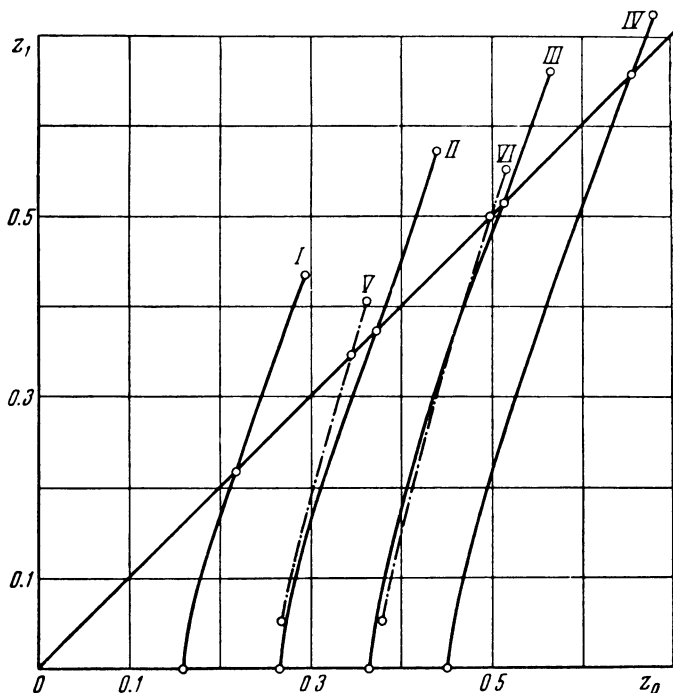
$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} = (A+B)(A+B-1)-B$$

находится внутри области $4B - (A+B)^2 > 0$ и, следовательно, для преобразования E достаточно ограничиться выражениями (1.6) для комплексных корней характеристического уравнения.

Преобразование ребра Γ в себя дается выражениями:

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{\tau^2}{2(A-1)(1-\tau-e^{-\tau})} - 1, \quad z_0' = (1+z_0)e^{-\tau} - 1, \quad u_0' = B + (1-A)z_0 - \tau \\
 &[(1-A)z_0' - u_0'] \omega \cos \tau^* + [(A-B)u_0' + (A+B)(A-1)z_0'] \sin \tau^* = \\
 &= B\omega \exp \frac{A+B}{\omega} \tau^* \\
 z_1 &= -\exp \frac{A+B}{-\omega} \tau^* \left[z_0' \cos \tau^* + \frac{(2-A-B)z_0' - 2u_0'}{\omega} \sin \tau^* \right] \\
 \omega &= \sqrt{4B - (A+B)^2} \quad (0 < \tau^* < \pi)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рассматривая τ как параметр, из (2.4) для заданных A , B и τ находим последовательно z_0 , z_0' , u_0' , τ^* и z_1 . Максимальное значение $\tau = \tau_0$, соответствующее $(z_1)_{\max}$, находим из условия, что u_0' , z_0' лежит на краю пластинки. Это дает для τ_0 уравнение (1.11).

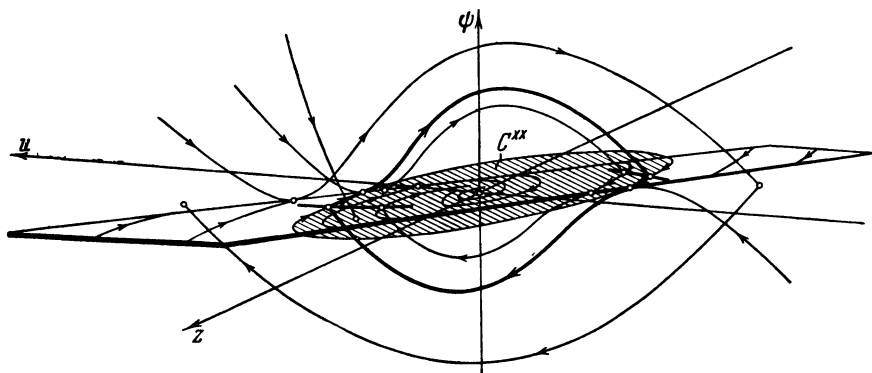


Фиг. 96

Для ряда точек в рассматриваемой области значений параметров A и B (в области, покрытой штриховкой на фиг. 11) по формулам (2.1) построены диаграммы Ламерея (фиг. 9а и 9б). Кривые I, II, III, IV, V и VI построены соответственно для значений параметров:

$$\begin{array}{llll}
 A = 0, & B = 0.05; & A = 0, & B = 0.10; & A = 0, & B = 0.15 \\
 A = 0, & B = 0.20; & A = 0.05, & B = 0.05; & A = 0.05, & B = 0.10
 \end{array}$$

Из приведенных диаграмм видно, что построенные кривые $z_1 = f(z_0)$ сходны по форме, близки к прямым и пересекаются с $z_1 = z_0$ в одной точке. Точка пересечения соответствует, как легко видеть, неустойчивой неподвижной точке P_0 на ребре Γ [неустойчивому периодическому движению, составленному из кусков траекторий в цилиндрических поверхностях $z = ce^u - 1$, $z = ce^{-u} + 1$ и кусков траекторий на пластинке (фиг. 10)].



Фиг. 10

Каждая точка ребра Γ , расположенная ближе к концу O ребра Γ , чем точка P_0 , при повторении $\overline{S^+E}$ идет в точку $u = z = 0$. Каждая точка, расположенная дальше точки P_0 (на отрезке P_0P), при повторении $\overline{S^+E}$ уходит с ребра Γ на кусок Γ_2^* и далее попадает в G_2' .

Случай IIa

$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} < (A+B)(A+B-1)-B, \quad A < 1$$

Ордината точки P больше ординаты точки $\overline{P^+} = \overline{S^+E} \cdot P$, т. е. $(z_1)_{\max} < (z_0)_{\max}$. Следовательно, концы кривой $z_1 = f(z_0)$ лежат по одну сторону от прямой $z_1 = z_0$. Покажем, что кривая $z_1 = f(z_0)$ не может пересекать прямую $z_1 = z_0$. Построим с этой целью другую кривую $z_1 = f_1(z_0)$, такую, что

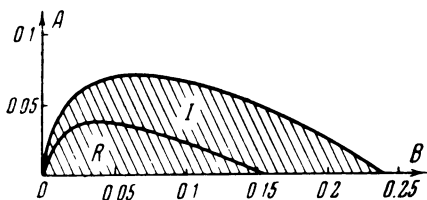
$$f_1(z_0) \geq f(z_0), \quad f_1[(z_0)_{\max}] = f[(z_0)_{\max}], \quad \frac{df_1}{dz_0} > 1$$

Здесь $z_0 = (z_0)_{\max}$, если точка u_0' , z_0' — на краю пластинки.

Очевидно, что такая кривая $z_1 = f_1(z_0)$ прямую $z_1 = z_0$ не пересекает и лежит между кривой $z_1 = f(z_0)$ и прямой $z_1 = z_0$. Мы получим кривую $z_1 = f_1(z_0)$ с требуемыми свойствами, если вместо преобразования $\overline{S^+E}$ будем рассматривать преобразование $\overline{S^+E'}$, где E' означает движение по пластинке до ее края $\bar{\Gamma}$ по отрезкам прямых $u = \text{const}$. Условие $f_1[(z_0)_{\max}] = f[(z_0)_{\max}]$, очевидно, выполнено.

Условие $f_1(z_0) > f(z_0)$ во всяком случае будет выполнено, если для точки $(z_0')_{\min}$, $(u_0')_{\min}$, в которой Γ^+ пересекается с траекторией α ,

выполняется условие $(u_0')_{\min} + (A-1)(z_0')_{\min} \leq 0$, так как на куске пластинки g , выделяемом условиями $u + (A-1)z < 0$, $z < 0$, для траекторий выполняется условие $dz/du > 0$ [$u + (A-1)z = 0$ есть изоклина вертикальных наклонов] и, следовательно, замена куска траектории вертикальным отрезком прямой увеличивает по абсолютной величине координату точки пересечения с ребром $\bar{\Gamma}$. В разбираемом случае на неравенство $(u_0')_{\min} + (A-1)(z_0')_{\min} < 0$ выполняется¹ и, следовательно, $f_1 > f$. Чтобы убедиться в выполнении условия $df_1/dz_0 > 1$, обратимся



Фиг. 11

к уравнению кривой Γ^+ . Соответствующие по параметру τ значения z_0 даются выражением

$$z_0 = \frac{\tau^2}{2(A-1)(1-\tau-e^{-\tau})} - 1 \quad (2.2)$$

которое получается из выражений (1.2) для преобразования S^+ и условия $u_0 + (A-1)z_0 - B = 0$. Значение $f_1 \equiv -\bar{z}_1$ связано с значением $u_0' \equiv \bar{u}_1$ уравнением

$$u_0' - (A-1)f_1 + B = 0 \quad (2.3)$$

(точка $\bar{u}_1, \bar{z}_1$ лежит на ребре $\bar{\Gamma}$). Из уравнения (1.5), в котором нужно u и z заменить через u_0' и z_0' , и уравнений (2.2) и (2.3) находим

$$\frac{dz_0}{dz_0'} = \frac{2 + \tau + (\tau - 2)e^{\tau}}{2e^{-\tau} - \tau^2 + 2\tau - 2}, \quad \frac{df_1}{dz_0'} = \frac{1 - e^{\tau}}{\tau}$$

Отсюда

$$\frac{df_1}{dz_0} = \frac{(\tau^2 - 2\tau + 2 - 2e^{-\tau})(e^{\tau} - 1)}{\tau(2 + \tau + \tau e^{\tau} - 2e^{\tau})} > 1$$

Так как кривая $z_1 = f(z_0)$ на диаграмме Ламерея не пересекает прямую $z_1 = z_0$ и расположена ниже прямой, то на ребре Γ не существует

¹ Равенство

$$(u_0')_{\min} + (A-1)(z_0')_{\min} = 0$$

выполняется, как нетрудно проверить, для точек плоскости AB , лежащих на кривой R :

$$1 - \frac{\tau^2 e^{-\tau}}{2(1-A)(e^{-\tau} + \tau - 1)} = \frac{V\bar{B}}{1-A} \exp \frac{A+B}{V4B-(A+B)^2} \operatorname{arctg} \frac{V4B-(A+B)^2}{A+B}$$

$$B = \tau + \frac{\tau^2(1-e^{-\tau})}{2(1-\tau-e^{-\tau})}, \quad 0 < \operatorname{arctg} < \pi$$

изображенной на фиг. 11. Кривая R целиком расположена в области значений AB , соответствующих случаю I.

неподвижных точек и при повторении $\overline{S^+E}$ каждая точка Γ^* приближается к концу Γ и затем переходит в точку $u = z = 0^1$.

§ 3. Преобразование области в область. В настоящем параграфе рассматривается асимптотическое поведение точек куска G_2' при неограниченном повторении правильного преобразования $T = \overline{S^+E}$. Для того чтобы можно было воспользоваться рассуждениями Брауэра^[8], развитыми им при доказательстве теоремы о топологическом отображении без неподвижных точек (Translationssatz), нам придется наряду с преобразованием T рассматривать преобразование $T^2 = (\overline{S^+E})^2$, которое сохраняет направление обхода. Заметим, что рассуждения Брауэра, касающиеся асимптотического поведения точек при преобразованиях плоскости самой в себя, в случае отсутствия неподвижных точек могут быть с надлежащими изменениями использованы и для случая, когда неподвижные точки внутри области имеются, но относятся к типу седел^[9].

Отыскание и исследование неподвижных точек правильного преобразования. Будем искать в G_2' неподвижные точки M_0 относительно преобразования $T^2 = (\overline{S^+E})^2$ правильного и сохраняющего направление обхода ($\overline{S^+E}$ не сохраняет направление обхода). Покажем, что неподвижная точка относительно T^2 будет неподвижной точкой и относительно T . Так как обратное очевидно, то отсюда будет следовать, что требование $M_0 = TM_0$ эквивалентно требованию $M_0 = T^2M_0$.

Пусть $M_0(u_0, z_0)$ — неподвижная точка относительно T^2 ($M_0 = T^2M_0$) и пусть $M_1(u_1, z_1) = TM_0(u_0, z_0)$ и $M_2(u_2, z_2) = TM_1(u_1, z_1)$. Напишем преобразования $M_1 = TM_0$ и $M_2 = TM_1$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta, & u_0 &= (A-1)(1+\zeta) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \\ z_1 &= 1 - (1+\zeta)e^{-\tau}, & u_1 &= -(A-1)(1+\zeta) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} + \frac{\tau}{2} - A - B + 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta', & u_1 &= (A-1)(1+\zeta') \frac{e^{-\tau'}-1}{\tau'} + \frac{\tau'}{2} + A + B - 1 \\ z_2 &= 1 - (1-\zeta')e^{-\tau'}, & u_2 &= -(A-1)(1+\zeta') \frac{e^{-\tau'}-1}{\tau'} + \frac{\tau'}{2} - A - B + 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что $u_0 + u_1 = \tau$ и $u_1 + u_2 = \tau'$. Сопоставляя это с условием $u_0 = u_2$, обнаруживаем, что $\tau = \tau'$. Исключая теперь $\tau = \tau'$ из уравнений

$$z_1 = 1 - (1+\zeta_0)e^{-\tau}, \quad z_2 = 1 - (1+\zeta_1)e^{-\tau'}$$

и принимая во внимание, что $z_2 = z_0$, находим, что $z_0 = z_1$, после чего, сравнивая в (3.1) и (3.2) соответствующие выражения, непосредственно усматриваем, что $u_0 = u_1$. Таким образом, $M_0 = TM_0$.

¹ Все изложенное применимо также и к граничному случаю, когда точки P и $\bar{P}^+$ совпадают. В этом случае конец кривой $z_1 = f(z_0)$ лежит на прямой $z_1 = z_0$ и кривая $z_1 = f(z_0)$ не имеет с прямой $z_1 = z_0$ других общих точек. Конец отрезка Γ^* (точка P) есть неустойчивая неподвижная точка. Каждая другая точка отрезка Γ^* при повторении неправильного преобразования идет в точку $u = z = 0$.

Из выражения (3.1) и требования $M_0 = TM_0$ получаем уравнения, определяющие τ и координату z_0 :

$$e^{-\tau} = \frac{1-z_0}{1+z_0}, \quad (A-1)(1+z_0) \frac{e^{-\tau}-1}{\tau} = 1-A-B \quad (3.3)$$

Так как $\tau > 0$, то первое из уравнений (3.3) дает

$$0 < z_0 < 1 \quad (3.4)$$

Исключая из (3.3) величину τ , получаем

$$\exp \left\{ \frac{2(A-1)}{1-A-B} z_0 \right\} = \frac{1-z_0}{1+z_0} \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет единственный корень, удовлетворяющий условию (3.4) только в том случае, если

$$\left[\frac{d}{dz_0} \exp \left\{ -\frac{2(1-A)}{1-A-B} z_0 \right\} \right]_{z_0=0} < \left[\frac{d}{dz_0} \left(\frac{1-z_0}{1+z_0} \right) \right]_{z_0=0}$$

Так как $B > 0$, то последнее неравенство сводится к неравенству

$$A+B-1 < 0 \quad (3.6)$$

Для корня уравнения (3.5) должно также выполняться очевидное условие $u_0 + (A-1)z_0 - B \geq 0$ (точка u_0 , z_0 лежит вне или на краю пластинки), которому можно придать вид

$$\frac{(A+B)(A-1)}{A+B-1} z_0 - B \geq 0 \quad (3.7)$$

если из (3.1), (3.3) и (3.5) заметить, что

$$u_0 = \frac{\tau}{2} = \frac{A-1}{A+B-1} z_0$$

Исключая z_0 из (3.5) и (3.7), получаем

$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} \leq (A+B)(A+B-1)-B \quad (3.8)$$

Условия (3.6) и (3.8) выделяют на плоскости параметров AB область, для точек которой в G_2' существует неподвижная точка (и притом только одна) относительно правильного и сохраняющего направление обхода преобразования T^2 . Неподвижная точка попадает на край пластинки, если выполняется равенство (3.8), или уходит в бесконечность, если

$$A+B-1=0$$

Для исследования устойчивости неподвижной точки полагаем

$$\begin{aligned} u_0 &= a + x, & z_0 &= b + y \\ u_1 &= a + \xi, & z_1 &= b + \eta, & \tau &= \tau_0 + h \end{aligned} \quad (3.9)$$

где a , b и τ_0 обозначают соответственно значения координат u , z и параметра τ , относящиеся к неподвижной точке $M_0(a, b)$ и преобразованию

$T(M_0 = TM_0)$. Подставляя (3.9) в (3.1), развертывая (3.1) по степеням малых величин x, y, ξ, η и h и ограничиваясь в разложениях только членами первого порядка, получаем

$$x = \alpha y + \left(\frac{1}{2} + \beta\right) h, \quad \xi = -\alpha y + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h, \quad \eta = -\gamma y + \delta h$$

где

$$\alpha = (A - 1) \frac{e^{-\tau_0} - 1}{\tau_0}, \quad \beta = (A - 1)(1 + b) \frac{1 - \tau_0 e^{-\tau_0} - e^{-\tau_0}}{\tau_0^2}, \quad \gamma = e^{-\tau_0}, \quad \delta = (1 + b) e^{-\tau_0} \quad (3.10)$$

Исключая h , находим¹

$$\xi = \frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} x - \frac{\alpha}{0.5 + \beta} y, \quad \eta = \frac{\delta}{0.5 + \beta} x - \left(\gamma + \frac{\alpha\delta}{0.5 + \beta}\right) y \quad (3.11)$$

Устойчивость неподвижной точки и ее характер могут быть определены из уравнений первого приближения (3.11). Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости заключается в требовании, чтобы корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} - \lambda & \frac{\alpha}{0.5 + \beta} \\ \frac{\delta}{0.5 + \beta} & \left(\gamma + \frac{\alpha\delta}{0.5 + \beta}\right) + \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

были по модулю меньше единицы². Обозначим

$$p = -\left[\frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} - \left(\gamma + \frac{\alpha\delta}{0.5 + \beta}\right)\right] \quad (3.13)$$

$$q = \frac{\alpha\delta}{(0.5 + \beta)^2} - \frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} \left(\gamma + \frac{\alpha\delta}{0.5 + \beta}\right)$$

тогда упомянутое условие устойчивости выражается в виде неравенств

$$-p + q + 1 > 0, \quad p + q + 1 > 0, \quad 1 - q > 0 \quad (3.14)$$

Воспользовавшись выражениями (3.13) и (3.10), а для $1 - q$ также соотношениями (3.3), получаем

$$-p + q + 1 = \frac{1}{0.5 + \beta} (1 - e^{-\tau_0}) > 0$$

¹ Воспользовавшись вторым из уравнений (3.3), можем написать

$$\beta \equiv (A - 1)(1 + b) \frac{1 - \tau_0 e^{-\tau_0} - e^{-\tau_0}}{\tau_0^2} = (1 - A - B) \frac{1 - \tau_0 e^{-\tau_0} - e^{-\tau_0}}{\tau_0 (e^{-\tau_0} - 1)} \equiv \\ \equiv (1 - A - B) R(\tau_0)$$

но

$$0 < 1 - A - B < 1, \quad R(0) = -0.5, \quad R(\infty) = 0, \quad R'(\tau_0) > 0$$

Следовательно,

$$-0.5 < \beta < 0 \quad \text{и} \quad 0.5 + \beta \neq 0$$

² Характер неподвижной точки сохраняется и относительно преобразования T^2 и, как легко проверить, корни соответствующего характеристического уравнения будут квадратами корней уравнения (3.12).

$$p + q + 1 = \frac{2(\alpha\delta + \beta\gamma + \beta)}{0.5 + \beta} = \frac{2(A-1)(1+b)(1 - e^{-2\tau_0} - 2\tau_0 e^{-\tau_0})}{(0.5 + \beta)\tau_0^2} < 0$$

$$1 - q = \frac{1}{1+b} \left[1 + \frac{(1-A-B)^2}{A-1} \right] > 0$$

Таким образом, второе из условий устойчивости (3.14) оказывается невыполненным. В соответствии с этим только один из корней уравнения (3.12) по модулю меньше единицы. Неподвижная точка (и соответствующее периодическое движение) будет неустойчива и будет типа седло.

Поведение точек области в окрестности бесконечно удаленной точки. Для исследования поведения точек куска G_2' в окрестности бесконечно удаленной точки ($u = \infty$, $z = 1$) воспользуемся преобразованием Пуанкаре.

Производя в выражениях (3.1) замену переменных $u = 1/\xi$, $z = \eta/\xi$ и заменяя τ через $1/w$, получим для преобразования $\bar{S}^+$ в окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$, соответствующей бесконечно удаленной точке, выражения

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{2w}{1 + f(w, \zeta)}, & \eta_0 &= \frac{2\zeta w}{1 + f(w, \zeta)} \\ \xi_1 &= \frac{2w}{1 - f(w, \zeta)}, & \eta_1 &+ \frac{2w [1 - (1 + \zeta) \exp(-w^{-1})]}{1 - f(w, \zeta)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$f(w, \zeta) = 2w^2(A-1)(1+\zeta)(e^{-\frac{1}{w}} - 1) + 2w(A+B-1)$$

В самой точке $\xi = \eta = 0$ определим преобразование $\bar{S}^+$ как предельное значение выражений (3.15) при $w = 0$. Очевидно, точка $\xi = 0$, $\eta = 0$ будет неподвижной. При малых w значения ξ_1 , η_1 положительны. Далекие точки куска G_2' при переходе к координатам ξ , η попадают в окрестность точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ на кусок плоскости, расположенный между кривыми, идущими в начало с одинаковым направлением касательной ($z = 1$ переходит в $\eta = \xi$). В окрестности точки $\xi = 0$, $\eta = 0$ при малых w получаем такие асимптотические выражения для преобразования $\bar{S}^+$:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{2w}{1 + 2(A+B-1)w}, & \xi_1 &= \frac{2w}{1 - 2(A+B-1)w} \\ \eta_0 &= \frac{2\zeta w}{1 + 2(A+B-1)w}, & \eta_1 &= \frac{2w}{1 - 2(A+B-1)w} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) находим

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{\xi_0}{1 - 2(A+B-1)\xi_0} = \xi_0 + 2(A+B-1)\xi_0^2 + \dots$$

Отсюда видно, что неподвижная точка $\xi = 0$, $\eta = 0$ неустойчива, если $A+B-1 > 0$, и устойчива, если $A+B-1 < 0$.

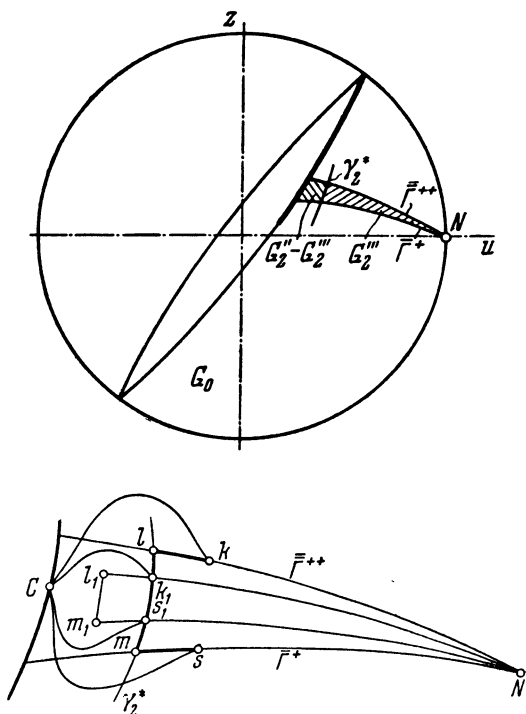
Поведение точек области при неограниченном повторении правильного преобразования. Переведем рассмотрение на полусферу Пуанкаре и будем

вместо куска G_2' рассматривать область G_2'' , дополненную сравнительно с G_2' его границами и точкой N экватора сферы Пуанкаре (соответствующей бесконечно удаленной точке $u = \infty$, $z = 1$ плоскости uz).

В случае I (и в случае, промежуточном между I и II) преобразование $T^2 = (\bar{S}^+ \bar{E})^2$, определенное всюду в G_2'' и на границах, будет непрерывным, взаимно однозначным, сохраняющим направление обхода и переводящим область G_2'' в самое себя. Так как в случае I точка на экваторе есть единственная неподвижная точка области G_2'' и она устойчива (условие $A + B - 1 < 0$ выполнено), то, применяя рассуждения Брауэра, заключаем, что каждая точка G_2'' при повторении преобразования идет к неподвижной точке на экваторе.

В случаях II и III поступим следующим образом. Выделим в G_2'' область G_2''' , к точкам которой дважды применимо правильное преобразование T^2 . Это будет связная область, ограниченная на полусфере кусками кривых $\bar{\Gamma}^+$ и $\bar{\Gamma}^{++}$ и куском кривой γ_2 (полученной из $\Gamma + \lambda_0$ применением обратного преобразования T^{-4}), точки которой при двукратном применении T^2 не выходят из G_2'' . Проследим поведение точек $G_2'' - G_2'''$ при повторении преобразования $T^2 = (\bar{S}^+ \bar{E})^2$. Так как в $G_2'' - G_2'''$ нельзя дважды применить правильное преобразование $(\bar{S}^+ \bar{E})^2$, то это значит, что при не более чем двукратном применении $(\bar{S}^+ \bar{E})^2$ (которое по крайней мере при вторичном применении будет неправильным) каждая точка $G_2'' - G_2'''$ попадает или в точку $u = z = 0$, или на ребро Γ (откуда при повторении неправильного преобразования также переходит в точку $u = z = 0$).

Проследим за преобразованием границ в области G_2''' при применении преобразования $(\bar{S}^+ \bar{E})^2$. Кусок ml дуги γ_2^* между кривыми $\bar{\Gamma}^+$ и $\bar{\Gamma}^{++}$ переходит в кусок $m_1 l_1$, принадлежащий области $G_2'' - G_2'''$. Дуги mN и lN (куски кривых $\bar{\Gamma}^+$ и $\bar{\Gamma}^{++}$) переходят в дуги $m_1 N$ и $l_1 N$, пересекающие дугу ml соответственно в точках s_1 и k_1 (фиг. 12). Отметим также на кривых $\bar{\Gamma}^+$ и $\bar{\Gamma}^{++}$ точки s и k , представляющие соответственно образы точек s_1 и k_1 по преобразованию T^{-2} ($s_1 = T^2 s$, $k_1 = T^2 k$).



Фиг. 12

Поместим теперь где-либо на куске ребра пластинки g , принадлежащем области $G_2'' - G_2'''$, точку C и соединим ее с точками s и s_1 , k и k_1 дугами Cs , Cs_1 , Ck , Ck_1 , не пересекающимися между собой и не имеющими с границами областей G_2''' и $T^2 G_2'''$ других общих точек, кроме точек s , s_1 , k и k_1 .

Рассмотрим область G^* , полученную присоединением к области G_2''' области, ограниченной дугой $klms$ (принадлежащей границе области G_2''') и дугами Ck и Cs (фиг. 12). Определим в G^* преобразование T^* таким образом, чтобы оно: 1) было непрерывным, взаимнооднозначным и сохраняющим направление обхода; 2) переводило G^* в самое себя; 3) не изменяло сравнительно с $T^2 = (\bar{S}^+ \bar{E})^2$ асимптотического поведения точек G_2''' . В области G_2''' и на границах определим T^* как преобразование T^2 . В односвязной области G_1^* , ограниченной дугами $klms$, Ck и Cs , определим преобразование T^* как любое непрерывное, взаимнооднозначное и сохраняющее направление обхода преобразование, совпадающее с T^2 на дуге $kims$, переводящее дуги Ck и Cs соответственно в Ck_1 и Cs_1 и имеющее точку C единственной неподвижной точкой (типа устойчивого узла). Преобразование T^* переводит G_1^* в свою часть и, следовательно, точки G_1^* при повторении преобразования T^* идут к точке C .

Построенное таким образом преобразование T^* в области G^* и на ее границах будет непрерывным, взаимнооднозначным, сохраняющим направление обхода и переводящим G^* в самое себя. Оно не будет также изменять асимптотическое поведение точек G_2''' сравнительно с преобразованием T^2 , так как в области G_2''' оно совпадает с T^2 , а для точек, покидающих при повторении T^2 область G_2''' , оно заменяет фактический переход в точку $u = z = 0$ по преобразованию $T = \bar{S}^+ \bar{E}$ переходом в окрестность точки C переходом эквивалентным, так как окрестность точки C при повторении T переходит в $u = z = 0$.

Будем теперь различать случаи $A + B - 1 > 0$ и $A + B - 1 < 0$. В первом из них неподвижная точка на экваторе неустойчива и внутри области G_2''' нет неподвижных точек. Применяя рассуждения Брауэра, находим, что каждая точка области G_2''' при повторении преобразования T^* идет к точке C (что соответствует точке $u = z = 0$ при фактическом движении изображающей точки). Во втором случае ($A + B - 1 < 0$) неподвижная точка на экваторе устойчива и внутри G_2''' существует неподвижная точка типа седло. Применяя с надлежащими изменениями рассуждения Брауэра, находим, что каждая точка области G_2''' либо идет в точку C , либо в устойчивую неподвижную точку на экваторе, либо принадлежит ω -сепаратрисе седла.

§ 4. Результаты исследования качественной структуры разбиения трехмерного фазового пространства на траектории. *Фазовое пространство и плоскость параметров.* Мы свели параметры рассматриваемой динамической задачи к двум существенным параметрам $A = M\beta$ и $B = M^2/Na$. На фиг. 13 изображено разбиение плоскости параметров A и B на области, различающиеся по качественной структуре фазового пространства.

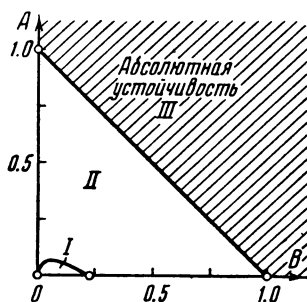
Каждой точке A_0, B_0 , представляющей систему в плоскости параметров, взятой в области $A+B-1 > 0, A \geq 0, B > 0$ (область III на фиг. 13), соответствует фазовое пространство, целиком заполненное траекториями, имеющими своей предельной точкой состояние равновесия в начале координат. Областью устойчивости в большом состоянии равновесия будет являться в этом случае все фазовое пространство. В системе (1.1) при любых начальных условиях для этих значений параметров устанавливается состояние равновесия.

Если точка A_0, B_0 принадлежит области, выделяемой неравенствами

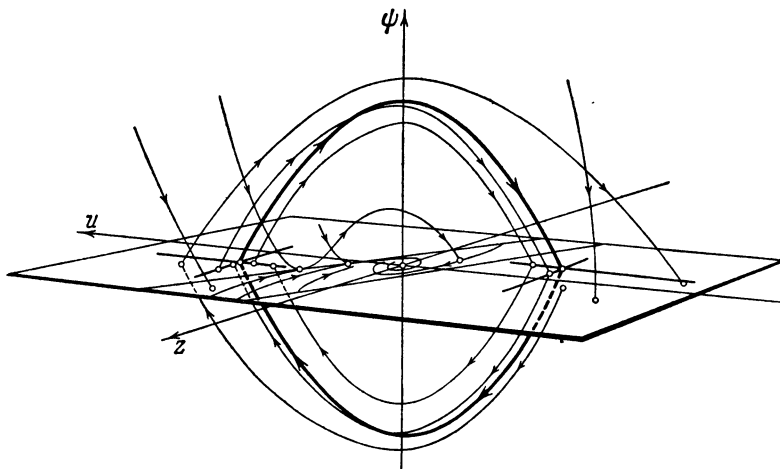
$$A+B-1 < 0, A \geq 0, B > 0$$

$$[(A+B)(A-B-1)+B] \exp \frac{2B}{A+B} < (A+B)(A+B-1)-B$$

(область II на фиг. 13), то в фазовом пространстве u, z, ψ существует неустойчивое периодическое движение, составленное из двух симметричных кусков траекторий, расположенных соответственно в полупространстве $\psi > 0$ и $\psi < 0$ (неустойчивый предельный цикл на фиг. 14). Геометрическим местом точек фазового пространства, имеющих своими ω -предельными точками предельный цикл, будет незамкнутая поверхность, проходящая через предельный цикл (сепаратрисная ω -поверхность). Она делит фазовое пространство на две части: внутреннюю, содержащую начало координат, и внешнюю. Внутренняя часть заполнена траекториями, имеющими своей



Фиг. 13



Фиг. 14

предельной точкой состояние равновесия, и является областью притяжения состояния равновесия. Внешняя область заполнена траекториями, имеющими предельные точки в бесконечности. Если начальное отклонение таково,

что изображающая точка не вышла из границ внутренней области, в системе опять установится равновесный режим; если же начальное отклонение настолько велико, что изображающая точка перешла во внешнюю область, то отклонение с течением времени будет неограниченно возрастать.

Если точка A_0B_0 принадлежит области, выделяемой неравенствами

$$A \geq 0, B > 0, [(A+B)(A-B-1) + B] \exp \frac{2B}{A+B} > (A+B)(A+B-1) - B$$

(область I на фиг. 13), то в фазовом пространстве также существует неустойчивое периодическое движение и все сказанное относительно структуры разбиения на траектории фазового пространства для предыдущего случая равным образом относится и к этому случаю. В последнем случае, однако, периодическое движение составляется из четырех кусков траекторий (соответственно симметричных относительно начала координат), расположенных в полупространстве $\psi > 0$, $\psi < 0$ и на пластинке: $-B < u + (A-1)z < B$, $\psi = 0$ (фиг. 10). Условие

$$[(A+B)(A-B-1) + B] \exp \frac{2B}{A+B} = (A+B)(A+B-1) - B$$

выделяет на плоскости AB точки, соответствующие случаю, когда неустойчивое периодическое решение составляется из двух кусков, лежащих своими концами на краях пластинки.

ω -поверхность, проходящая через предельный цикл, выделяет в фазовом пространстве область устойчивости в большом состояния равновесия. Линия пересечения ω -поверхности с плоскостью $\psi = 0$ дает на плоскости ω -сепаратрисы неподвижной точки, ограничивающие для начальных условий, взятых на плоскости, плоскую область устойчивости в большом (область сходимости процесса регулирования).

Поведение сепаратрис и оценка области устойчивости в большом (область Жуковского). Зависимость от параметров. Граница плоской области устойчивости в большом (ω -сепаратрисы неподвижной точки) симметрична относительно начала координат. Можно поэтому ограничиться рассмотрением той ее половины, которая лежит в G_0 и, например, в нижней части пластинки g . Для значений параметров из области II (фиг. 13) эту полусепаратрису можно рассматривать как состоящую из трех кусков: 1) куска, точки которого при повторении правильного преобразования $\bar{S}^+$ идут к неподвижной точке (правильный кусок сепаратрисы); этот кусок лежит в G_0 , пока неподвижная точка лежит в G_0 ; он стягивается в точку, когда неподвижная точка переходит на край пластинки; 2) другого куска (также принадлежащего G_0), точки которого при применении S^+ попадают на пластинку, и, наконец, 3) одной из траекторий пластинки, в которую переходят при применении S^+ точки второго куска.

Нетрудно для заданных значений A и B провести фактическое построение точек ω -сепаратрисы. При этом главную трудность представ-

ляет разыскание правильного куска сепаратрисы. Построение остальной части полусепаратрисы осуществляется при помощи простых операций: именно путем отображения на кусок G_0 преобразованием S_{-1}^+ (обратным S^+) траектории пластинки, идущей в точку, симметричную точке пересечения правильного куска ω -сепаратрисы с краем $u + (A - 1)z = B$ пластинки g .

Можно, однако, дать простое уравнение, которое будет служить грубым приближением для правильного куска ω -сепаратрисы (для той части ее, где параметр τ достаточно велик), рассматривая вместо преобразования $\bar{S}^+$ «укороченное» преобразование $\bar{\sigma}^+$:

$$\begin{aligned} z_0 &= \zeta, & u_0 &= \frac{(1-A)(1+\zeta)}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \\ z_1 &= 1, & u_1 &= \tau - u_0 \end{aligned}$$

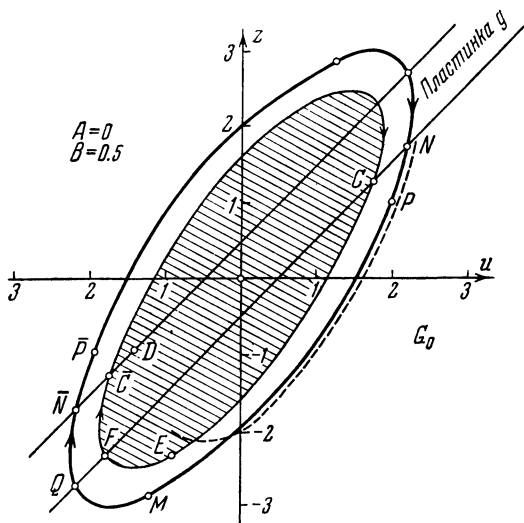
близкое к $\bar{S}^+$ при больших τ . Условие

$$u_1 = \frac{A-1}{A+B-1}$$

(точка $u = u_1$, $z = 1$ — неподвижная точка преобразования $\bar{\sigma}^+$) дает иско-
мое уравнение:

$$\begin{aligned} 2(A-1)(A+B-1)^2(1+z_0) &= [(A+B-1)u_0 + A-1][2(A+B-1)^2 + \\ &+ (A-1) - (A+B-1)u_0] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Испытывая (повторением преобразования $\bar{S}^+$) точки G_0 , близкие к кривой (4.1), можно для заданных A и B с необходимой точностью определить нужное число точек ω -сепаратрисы. На фиг. 15 для значений $A = 0$, $B = 0.5$ изображена построенная таким образом область устойчивости в большом. Кривая $NMQ\bar{N}$ — полусепаратриса. NM — правильный кусок ω -сепаратрисы, QM — образ траектории $Q\bar{N}$ пластинки по преобразованию S_{-1}^+ . Для сравнения изображена также (пунктиром) кривая, построенная по уравнению (4.1). Расхождение между кривой (4.1) и правильным куском ω -сепаратрисы становится значительным только для нижнего конца правильного куска ω -сепаратрисы (здесь τ невелико).



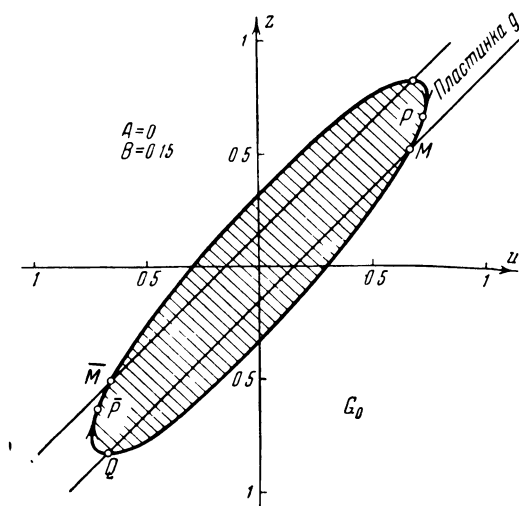
Фиг. 15

Для значений параметров из области I (фиг. 13) полусепаратрису можно рассматривать как состоящую из двух кусков: 1) траектории пластинки, входящей в состав периодического движения, и 2) куска, полученного из нее применением преобразования S_{-1}^+ и лежащего в G_0 . Таким образом, для области I значений параметров A и B могут быть написаны в параметрической форме точные уравнения границ области устойчивости в большом. Параметрические уравнения куска сепаратрисы, принадлежащего пластинке, даются выражениями

$$\begin{aligned} u &= \exp \frac{(A+B)t}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \left[(A-1) \left(\cos t - \frac{A+B}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \sin t \right) z_0 - \right. \\ &\quad \left. - B \left(\cos t + \frac{2-A-B}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \sin t \right) \right] \\ z &= \exp \frac{(A+B)t}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \left[\left(\frac{A-B}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \sin t - \cos t \right) z_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2B}{\sqrt{4B-(A+B)^2}} \sin t \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

где z_0 определяется формулами (2.1) совместно с условием $z_1 = z_0$. Параметрические уравнения куска сепаратрисы, принадлежащего G_0 , даются выражениями

$$\begin{aligned} u &= (1-A)(1+z) \frac{e^\tau - 1}{\tau} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \\ z^* &= (1+z)e^\tau - 1, \quad u^* = \tau - u \end{aligned} \quad (4.3)$$



Фиг. 16

где u^* , z^* — координаты куска сепаратрисы в G_0 , а величины u и z определяются уравнениями (4.2).

На фиг. 16 для значений $A=0$, $B=0.15$ изображена построенная по уравнениям (4.2) и (4.3) область устойчивости в большом. Кривая $MQ\bar{M}$ — полусепаратриса. $Q\bar{M}$ — траектория пластинки, совпадающая на куске $\bar{P}\bar{M}$ с куском траектории периодического движения, QM — образ траектории $Q\bar{M}$ пластинки по преобразованию S_{-1}^+ .

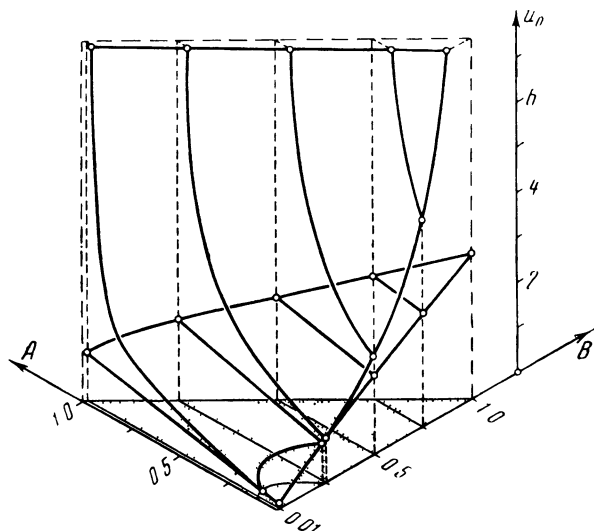
Технически важной оценкой области устойчивости в большом

служит область Жуковского, для точек которой всегда могут быть написаны в параметрическом виде точные уравнения границ. Согласно Жуковскому, в основе технических расчетов регуляторов должна лежать та часть об-

ласти устойчивости в большом, для точек которой начальные ускорения, начиная со второго перехода, будут равны нулю. Таким образом, уже первый переход по пространству $\psi > 0$ или $\psi < 0$ должен переводить изображающую точку на пластинку и при дальнейших переходах она каждый раз должна попадать опять на пластинку.

Область Жуковского, как и область устойчивости в большом, симметрична относительно начала координат и поэтому можно опять ограничиться написанием уравнений для половины границы.

Рассмотрим сначала случай, когда параметры A и B взяты в области II (фиг. 13). Пусть C — та точка на краю $u + (A - 1)z - B = 0$ пластинки g , которую преобразование S^+ переводит на другой край пластинки в точку D , пусть $\bar{C}$ — точка, симметричная точке C (фиг. 15; точка $\bar{C}$ будет расположена «ниже» D), и пусть $F\bar{C}$ — траектория пластинки, идущая в точку $\bar{C}$.



Фиг. 17

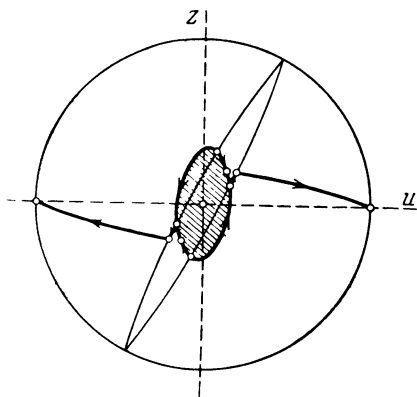
Траектория $F\bar{C}$ вместе с симметричной ей траекторией, идущей в точку C , выделяют на пластинке кусок g' , точки которого либо идут в начало, либо после соскальзывания с края пластинки и одного перехода по пространству $\psi > 0$ или $\psi < 0$ попадают опять на пластинку. Отобразив преобразованием S_{-1}^+ траекторию $F\bar{C}$ и кусок $\bar{C}D$ края пластинки, получим в G_0 кривую, примыкающую своими концами к краю пластинки. Только те точки G_0 , которые лежат между этой кривой и краем пластинки, попадут после одного перехода по пространству $\psi > 0$ на кусок g' пластинки. Очевидно, это и будет граница области Жуковского, лежащая в G_0 .

Параметрические уравнения куска границы, лежащего на пластинке (траектории $F\bar{C}$), даются опять выражениями (4.2), где z_0 определяется из уравнений

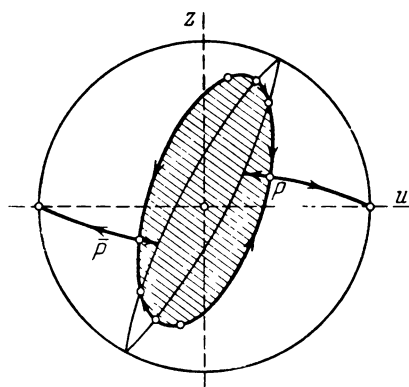
$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\tau_0^2}{2(1-A)(1-\tau_0-e^{-\tau_0})} - 1 \\ 4B &= 2\tau_0 + \tau_0^2 - \frac{\tau_0^3}{e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1} \end{aligned} \quad (4.4)$$

а параметрические уравнения куска границы, лежащего в G_0 , даются выражениями (4.3), где u , z означают координаты «ломаной» $F\bar{C}D$, т. е.

определяются либо из уравнений (4.2) и (4.4) для траекторий $F\bar{C}$, либо из уравнения прямой $u + (A-1)z + B = 0$ для отрезка $\bar{CD}$. На фиг. 15 для значений параметров $A = 0$, $B = 0.5$ внутри области устойчивости в большом изображена область Жуковского, построенная по уравнениям (4.2) и (4.3) совместно с уравнением (4.4) и уравнением прямой $u + (A-1)z + B = 0$. Кривая $CE\bar{F}\bar{C}$ — половина границы области Жуковского, FE — образ траектории $F\bar{C}$, а EC — образ куска $\bar{CD}$ по преобразованию S_{-1}^+ .

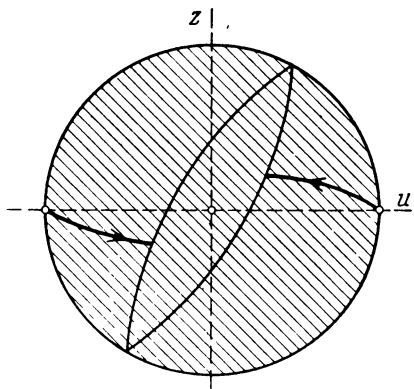


Фиг. 18, I



Фиг. 18, II

Для области I значений параметров A и B (фиг. 13) область Жуковского будет совпадать с областью устойчивости в большом (область C^* показана на фиг. 10).



Фиг. 18, III

Фиг. 17 позволяет судить о зависимости от параметров A и B области устойчивости в большом и области Жуковского. Величина этих областей характеризуется здесь, для области устойчивости в большом, координатой u_0 точки пересечения правильного куска сепаратрисы с краем $u + (A-1) \times z - B = 0$ пластинки g и соответствующей координатой для области Жуковского. Поверхности на фиг. 17 совпадают для значений A и B , соответствующих области I фиг. 13. На фиг. 18, I; 18, II; 18, III

изображены проекции плоскости $\psi = 0$ на нижнюю полусферу сферы Пуанкаре для значений параметров A и B соответственно для областей I, II и III фиг. 13. Штриховкой покрыта область устойчивости в большом. Жирными линиями изображены инвариантные кривые: α и ω — сепаратрисы неподвижных точек P и $\bar{P}$.

§ 5. **Случай вырождения $B = 0$ и случай $B < 0$.** Приведенными на фиг. 18 картинами исчерпываются структуры разбиения плоскости $\psi = 0$ для невырожденного случая $B \neq 0$. Случай $B = 0$ соответствует отсутствию обратной связи ($a^{-1} = 0$). В этом случае на плоскости $\psi = 0$ пластинка g стягивается в прямую $u + (A - 1)z = 0$ и неподвижной точки в G_0 не существует. Анализ поведения точек полуплоскости G_0 в этом случае упрощается.

Если при этом искусственное демпфирование мало или равно нулю ($0 \leq A < 1$), то мы имеем случай неустойчивости.

Если же коэффициент искусственного демпфирования достаточно велик ($A > 1$), то и при отсутствии обратной связи система будет устойчива.

Уравнения (1.1) не определяют в случае $B = 0$ поведение системы на отрезке $A/(A - 1) < z < A/(1 - A)$ прямой $u + (A - 1)z = 0$.

Доопределение естественно получается из требования, чтобы разбиение фазового пространства на траектории в случае $B = 0$ было предельным по отношению к случаю $B \neq 0$. Так как в случае $A > 1$, $B \neq 0$ каждая точка, попавшая на кусок пластинки $A/(A - 1) < z < A/(1 - A)$, $-B < u + (A - 1)z < B$ идет по траекториям разбиения пластинки к состоянию равновесия $u = z = 0$, то следует потребовать в предельном случае $A > 1$, $B = 0$ движения по отрезку к состоянию равновесия $u = z = 0$.

Случай, когда коэффициент обратной связи a^{-1} отрицателен ($B < 0$), не представляет существенного практического значения. Следует отметить, что в этом случае для значений параметров $B < 0$, $A + B - 1 > 0$ существует устойчивое периодическое решение, которое соответствует устойчивым незатухающим колебаниям системы (автоколебаниям).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Баутин Н. Н. Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей. Докл. АН СССР, т. 43, № 5, 1944.
2. Андронов А. А. и Баутин Н. Н. Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности. Докл. АН СССР, т. 46, № 4, 1945.
3. Никольский Г. Н. К вопросу об автоматической устойчивости корабля на заданном курсе. Труды центральной лаборатории проводной связи, вып. 1, 1934.
4. Бутенин Н. В. Автоколебания стенда с автопилотом. Труды ЛВВАКА, т. 3, 1943.
5. Котельников В. А. Продольная динамическая устойчивость самолета с автопилотом. Техника воздушного флота, № 1, 1941.
6. Булгаков Б. В. Автоколебания регулируемых систем, ПММ, т. 7, вып. 2, 1943.
7. Лурье А. И. и Постников В. Н. К теории регулируемых систем. ПММ, т. 8, вып. 3, 1944.
8. Brouwer L. Beweis des ebenen Translationssatzes. Math. Annalen, 72, 1912.
9. Андронов А. А. и Майер А. Г. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. Математическое приложение. Автоматика и телемеханика, т. 14, вып. 5, 1953.

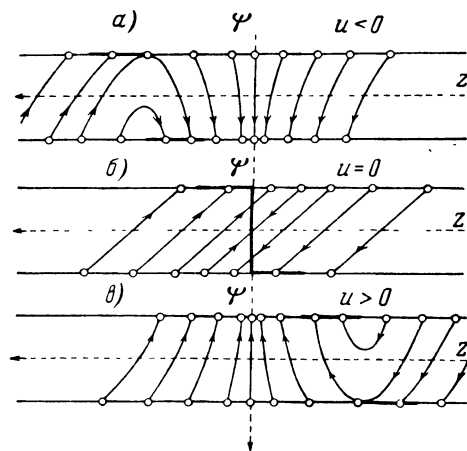
ТЕОРИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ КУРСА НЕЙТРАЛЬНОГО САМОЛЕТА ПРИ ПОМОЩИ АВТОПИЛОТА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ СЕРВОМОТОРА *

II. СЛУЧАЙ НАЛИЧИЯ ЗОНЫ НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ¹

§ 1. Сведение динамической задачи к точечным преобразованиям.
Г°. Общее описание фазового пространства. Дадим общее описание поведения траекторий в фазовом пространстве, которое позволит свести задачу к исследованию точечного преобразования плоскости $\psi = \psi_0$ в самое

себя. Так как разбиение фазового пространства на траектории симметрично относительно начала координат и так как фазовое пространство для $\psi > \psi_0$ в точности совпадает с фазовым пространством для $\psi < 0$ в рассмотренном случае отсутствия зоны неустойчивости [1], то здесь достаточно рассмотреть характер кусков траекторий для $|\psi| < \psi_0$ и в плоскости $\psi = \psi_0$.

Куски траекторий для $|\psi| < \psi_0$ лежат, как нетрудно видеть из уравнений (1.3), в плоскостях $u = \text{const}$ и имеют вид, изображенный на фиг. 1.



Фиг. 1

По траекториям внутри зоны $|\psi| < \psi_0$ изображающая точка может переходить с плоскости $\psi = \pm \psi_0$ на плоскость $\psi = \mp \psi_0$.

Отрезок $u = z = 0$, $|\psi| \leq \psi_0$ является отрезком покоя. Плоскость $\psi = \psi_0$ вне полосы

$$0 < u + (A - 1)z < B \quad (\text{пластинка})$$

служит местом, где изображающая точка переходит с кусков траекторий верхнего полупространства $\psi > \psi_0$ на куски траектории в зоне $|\psi| < \psi_0$.

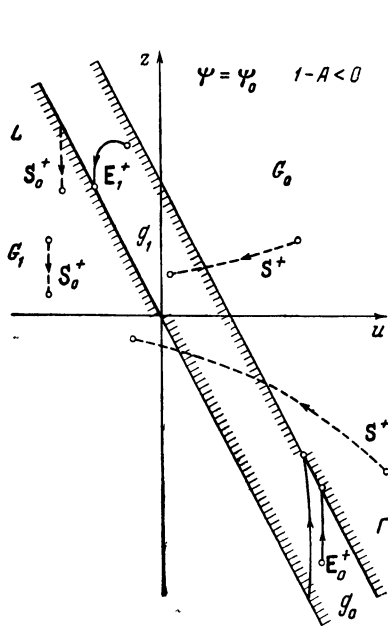
* Совместно с Н. Н. Баутиным. Подготовлено к печати Н. Н. Баутиным. Постерно опубликовано в Известиях АН СССР, 1955, № 6, с. 54—71.

¹ Настоящая статья является второй частью работы [1]. Постановка задачи и уравнения движения для рассматриваемого здесь случая наличия зоны нечувствительности также приведены во введении к работе [1]. Ссылки на формулы из первой части работы будем снабжать дополнительной римской цифрой I.

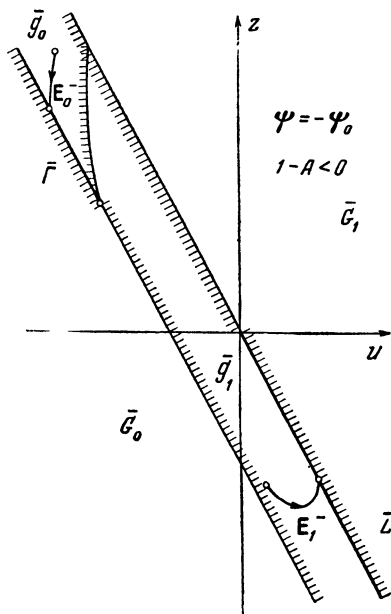
На пластинке оканчиваются куски траекторий, направленные навстречу одна другой; на плоскости $\psi = -\psi_0$ местом стыка траекторий служит пластинка

$$-B < u + (A-1)z < 0$$

Сами пластинки разбиваются в силу (I.4) на траектории, и это разбиение не отличается от разбиения пластинки $-B < u + (A-1)z < B$ в рассмотренном случае отсутствия зоны нечувствительности. Обе пластинки $-B < u + (A-1)z < 0$, $\psi = -\psi_0$ и $0 < u + (A-1)z < B$, $\psi = \psi_0$



Фиг. 2а



Фиг. 2б

могут быть получены из пластинки $-B < u + (A-1)z < B$ разрезанием ее по оси пластинки [по прямой $u + (A-1)z = 0$] и параллельным переносом половинок на плоскости $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$. Изображающая точка, попав на пластинку в плоскости $\psi = \psi_0$, начинает двигаться по траекториям разбиения пластинки и попадает либо на ребро Γ

$$u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A+B, \quad \psi = \psi_0$$

с которого уходит в полупространство $\psi > \psi_0$, либо на ребро L

$$u + (A-1)z = 0, \quad \psi = \psi_0, \quad u < 0$$

с которого уходит в зону $|\psi| < \psi_0$

2°. Сведение задачи к точечным преобразованиям. Разобьем плоскость $\psi = \psi_0$ на четыре куска (фиг. 2а, и 3а):

$$(G_0), \quad \text{где } u + (A-1)z - B > 0, \quad \text{или } u + (A-1)z - B = 0, \quad u > A+B$$

$$(G_1), \quad \text{где } u + (A-1)z < 0, \quad \text{или } u + (A-1)z = 0, \quad u < 0$$

(g_0), содержащий те точки пластинки g , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в точки ребра Γ

$$u + (A - 1)z - B = 0, \quad u \geq A + B$$

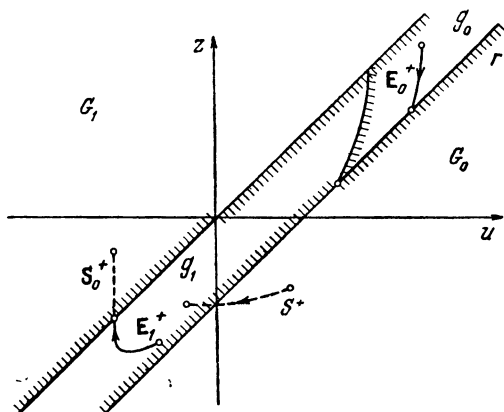
само ребро Γ не включается в g_0 ;

(g_1), содержащий те точки пластинки g , которые по траекториям разбиения пластинки переходят в точки ребра L

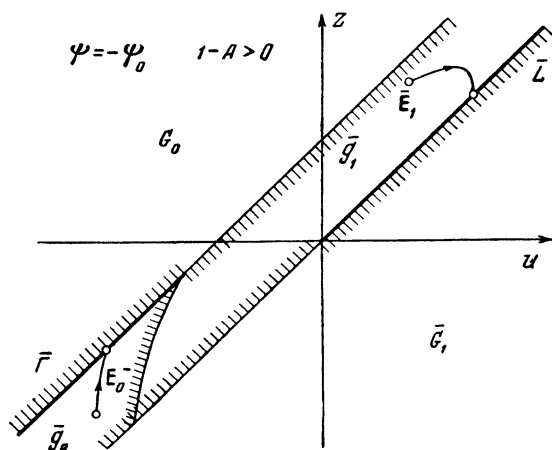
$$u + (A - 1)z = 0, \quad u < 0$$

само ребро L не включается в g_1 .

Обозначим также через $\bar{G}_0, \bar{G}_1, \bar{g}_0, \bar{g}_1$ — куски плоскости $\psi = -\psi_0$, соответственно симметричные G_0, G_1, g_0, g_1 относительно начала координат, а $\bar{\Gamma}$ и $\bar{L}$ — полупрямые, симметричные Γ и L (фиг. 2, б и 3, б).



Фиг. 3а



Фиг. 3б

Назовем *преобразованием* S^+ переход точки $u_0 z_0$, принадлежащей G_0 , в точку $u_1 z_1$, принадлежащую g_1 или G_1 при движении изображающей точки в полупространстве $\psi > \psi_0$.

Назовем *преобразованием* S_0^+ переход по траекториям зоны точки $u_0 z_0$, принадлежащей G_1 , в точку $u_1 z_1$, принадлежащую $\bar{g}_0$ или $\bar{G}_0$.

Для точек плоскости $\psi = \psi_0$ следующим образом определим преобразование E^+ (фиг. 2 и 3):

на куске g_0 ($E^+ \equiv E_0^+$) — как переход по траекториям пластинки точки $u_0 z_0$, принадлежащей g_0 , в точку $u_1 z_1$, принадлежащую куску плоскости G_0 (в ребро Γ);

на куске g_1 ($E^+ \equiv E_1^+$) — как переход по траекториям пластинки точки $u_0 z_0$, принадлежащей g_1 , в точку $u_1 z_1$, принадлежащую куску плоскости G_1^* (в ребро L);

на куске G_0 или на куске

G_1 ($E^+ \equiv E_G^+$) — как тождественное преобразование.

Для точек плоскости $\psi = -\psi_0$ аналогичным образом определяем преобразования S^- , S_0^- и E^- .

В силу симметрии фазового пространства *отождествим симметричные состояния*. Во всем дальнейшем мы будем считать тождественными симметричные точки, расположенные на плоскостях $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$, и будем каждый раз, когда точка попадает на $\bar{G}_0$ или $\bar{L}$, рассматривать вместо нее симметричную ей точку, принадлежащую G_0 или L . Так как каждая точка, принадлежащая g_0 , g_1 или G_1 , при движении по траекториям также попадает либо на куски G_0 или $\bar{G}_0$, либо на отрезок ребра $\bar{L}$, то рассмотрение асимптотического поведения точек пересечения траекторий фазового пространства с плоскостью $\psi = \psi_0$ сводится к рассмотрению преобразования в себя куска G_0 , дополненного примыкающим к концу отрезка покоя отрезком ребра L при неограниченном повторении преобразования T . Преобразование T определяется для точек куска G_0 как $T_G = S^+ E^+ S_0^+ E^-$, а для точек ребра L как $T_L = \bar{S}_0^+ E^-$, где черта сверху означает [переход после выполнения преобразования $S^+ E^+ S_0^+ E^-$ или $S_0^+ E^-$ в симметричную точку. В точке $u = z = 0$ ($\psi = \psi_0$) преобразование T_L будет тождественным преобразованием ($u = z = 0$, $\psi = \psi_0$ — конец отрезка покоя). Будем опять называть преобразование T *правильным*, если оно не включает движения по пластинкам, или *неправильным* в противном случае.

Совокупность траекторий полупространства $\psi > \psi_0$, дважды пересекающих плоскость $\psi = \psi_0$, порождает преобразование S^+ . Вводя, как и раньше, в качестве параметров τ — время пробега изображающей точки по куску траектории до вторичного пересечения с плоскостью $\psi = \psi_0$ и координату $z_0 = \zeta$, получаем для преобразования S^+ опять выражение (I, 1.2):

$$z_0 = \zeta, \quad u_0 = (A - 1)(1 + \zeta) \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} + \frac{\tau}{2} + A + B - 1 \quad (1.1)$$

$$z_1 = (1 + \zeta) e^{-\tau} - 1, \quad u_1 = (A - 1)(1 + \zeta) \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} - \frac{\tau}{2} + A + B - 1$$

Преобразование S^+ определено всюду на куске G_0 .

Совокупность траекторий внутри зоны $|\psi| < \psi_0$, пересекающих каждую из плоскостей $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$, порождает преобразования S_0^+ и S_0^- . Аналитически преобразование S_0^+ дается выражениями

$$z_0 = \zeta, \quad u_0 = \vartheta_s^{-1} [(A - 1)(e^{-\vartheta} - 1)\zeta - 2\psi_0], \quad z_0 = \zeta e^{-\vartheta}, \quad u_1 = u_0 \quad (1.2)$$

Преобразование S_0^+ определено на куске σ , принадлежащем G_1 , но не совпадающем с G_1 . Легко, однако, проверить, что S_0^+ во всяком случае определено для всех тех точек G_1 , где $u < 0$ и $z < 0$; как раз только эта часть G_1 и будет подвергаться преобразованиям, так как только сюда могут переходить точки куска G_0 по преобразованию $S^+ E^+$.

Совокупность кусков траекторий на пластинках порождает преобразования E^+ и E^- . Аналитически преобразования E_0^+ и E_0^- даются для

случая $4B - (A + B)^2 > 0$ выражениями

$$z_1 = \left[z_0 \cos \theta + \frac{(2 - A - B) z_0 - 2u_0}{V 4B - (A + B)^2} \sin \theta \right] \exp \left[-\frac{(A + B) \theta}{V 4B - (A + B)^2} \right]$$

$$u_1 = (1 - A) z_1 \pm B \quad (1.3)$$

где θ — меньший положительный корень уравнения

$$[(A - 1) z_0 + u_0] \cos \theta + \frac{(B - A) u_0 + (A + B)(1 - A) z_0}{V 4B - (A + B)^2} \sin \theta =$$

$$= \pm B \exp \left[\frac{(A + B) \theta}{V 4B - (A + B)^2} \right] \quad (1.4)$$

а для случая $4B - (A + B)^2 < 0$ выражениями, которые могут быть получены из (1.3) и (1.4) заменой величин $4B - (A + B)^2$, $\sin \theta$, $\cos \theta$ соответственно величинами $(A + B)^2 - 4B$, $\operatorname{sh} \theta$, $\operatorname{ch} \theta$. Во всех случаях из двойных знаков следует брать знак плюс для преобразования E_0^+ и знак минус для преобразования E_0^- .

Преобразования E_1^+ и E_1^- даются для случая $4B - (A + B)^2 > 0$ выражениями

$$z_1 = \left[z_0 \cos \theta + \frac{(2 - A - B) z_0 - 2u_0}{V 4B - (A + B)^2} \sin \theta \right] \exp \left[-\frac{(A + B) \theta}{V 4B - (A + B)^2} \right]$$

$$u_1 = (1 - A) z_1 \quad (1.5)$$

где θ — меньший положительный корень уравнения

$$[u_0 + (A - 1) z_0] \cos \theta + \frac{(B - A) u_0 + (A + B)(1 - A) z_0}{V 4B - (A + B)^2} \sin \theta = 0 \quad (1.6)$$

а для случая $4B - (A + B)^2 < 0$ соответствующими выражениями, получаемыми из (1.5) и (1.6) заменой величин $4B - (A + B)^2$, $\sin \theta$, $\cos \theta$ величинами $(A + B)^2 - 4B$, $\operatorname{sh} \theta$, $\operatorname{ch} \theta$.

§ 2. Преобразование прямой в прямую и диаграмма Ламерея.
 I^0 . Устойчивость отрезка покоя. Условия возникновения автоколебаний, не выходящих за зону нечувствительности. Выясним устойчивость отрезка покоя. Общих сведений о кусках траекторий, заполняющих фазовое пространство, достаточно, чтобы утверждать, что каждая точка, взятая в достаточно малой окрестности отрезка покоя, либо идет к отрезку покоя по траекториям разбиения плоскости $u = 0$ (фиг. 1, б) или одной из пластинок [в случае $4B - (A + B)^2 < 0$], либо попадает на отрезок ребра L (или $\bar{L}$), примыкающей к отрезку покоя.

Назовем L_1 множество тех точек ребра L , которые по преобразованию S_0^+ переходят в точки куска $\bar{g}_1$. Это будет отрезок, примыкающий к концу отрезка покоя. Каждая точка L_1 при применении $T_L = S_0^+ E_1^+$ либо сразу попадает на конец отрезка покоя, либо опять переходит в точку, принадлежащую ребру L . Таким образом, исследование устойчивости отрезка покоя сводится к изучению при применении $T_L = S_0^+ E_1^-$ точечного преобразования отрезка L_1 в самого себя.

следующая M_0' по преобразованию E_1^- и $M_1(-u_1, -z_1)$ — точка, симметричная $\overline{M_1}$. Преобразование $\overline{S_0^+ E_1^-}$ переводит точку M_0 отрезка L_1 в точку M_1 , также принадлежащую L . Таким образом, на отрезке L_1 при помощи преобразования $\overline{S_0^+ E_1^-}$ определена функция последования $z_1 = f(z_0)$ (фиг. 4).

Рассматривая $z_1 = f(z_0)$ как кривую в плоскости $z_0 z_1$, получаем обычную диаграмму Ламерея. Из определения преобразования $\overline{S_0^+ E_1^-}$ следуют свойства кривой $z_1 = f(z_0)$

$$f(0) = 0, \quad \frac{dz_1}{dz_0} > 0$$

Покажем, что на диаграмме Ламерея либо нет точек пересечения $z_1 = f(z_0)$ с полупрямой $z_1 = z_0 > 0$, либо есть одна такая точка. Условия перехода от одного случая к другому дадут условия смены устойчивости отрезка покоя и появления из отрезка покоя периодического движения.

Найдем на куске $\overline{g_1}$ пластинки $-B \leq u + (A-1)z \leq 0$, $\psi = -\psi_0$ геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что преобразование E_1^- не изменяет абсолютную величину их расстояния до плоскости $u = 0$. Легко показать, что все такие точки лежат на луче $z = ku$, где k определяется уравнением:

$$\text{если } 4B - (A+B)^2 > 0$$

$$B \exp \left\{ \frac{2(A+B)}{\sqrt{4B - (A+B)^2}} \arctg \frac{[(A-1)k+1]\sqrt{4B - (A+B)^2}}{(A-1)k(A+B) + A - B} \right\} = \\ = (A-1)[(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1](A-1) \quad (2.3)$$

$$\text{если } 4B - (A+B)^2 < 0$$

$$B \exp \left\{ \frac{2(A+B)}{\sqrt{(A+B)^2 - 4B}} \operatorname{ar th} \frac{[(A-1)k+1]\sqrt{(A+B)^2 - 4B}}{(A-1)k(A+B) + A - B} \right\} = \\ = (A-1)[(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1] \quad (2.4)$$

Точки $\overline{g_1}$ разбиваются лучом $z = ku$ на три класса:

- 1) точки, принадлежащие лучу; преобразование E_1^- не изменяет их расстояния до плоскости $u = 0$;
- 2) точки, для которых $z < ku$; преобразование E_1^- приближает их к плоскости $u = 0$;
- 3) точки, для которых $z > ku$; преобразование E_1^- удаляет их от плоскости $u = 0$.

Если $k < 0$, то луч $z = ku$ не пересекает кривую γ и преобразование E_1^- приближает каждую точку кривой γ к плоскости $u = 0$. Преобразование $\overline{S_0^+ E_1^-}$ приближает каждую точку отрезка L_1 к концу отрезка покоя. В этом случае на отрезке L_1 выполняется неравенство

$$z_1 = f(z_0) < z_0 \quad (z_0 > 0)$$

Кривая $z_1 = f(z_0)$ на диаграмме Ламерея не имеет с полупрямой $z_1 = z_0 > 0$ общих точек. При повторении преобразования $\overline{S_0^+ E_1^-}$ последо-

вательность точек сходится к концу отрезка покоя. Отрезок покоя в этом случае устойчив. Если $k > 0$, то луч $z = ki$ пересекает кривую γ и в силу (2.2) возможна только одна точка пересечения, отличная от $u = z = 0$. Пусть точка пересечения P' принадлежит $\bar{g}_1$ (так всегда будет для достаточно малых k или ψ_0) и пусть P — точка на ребре L , полученная из точки P' применением преобразования обратного S_0^+ . Из определения k следует, что точка P будет неподвижной относительно преобразования $S_0^+ E_1^-$. Каждую точку отрезка L_1 ребра L преобразование $S_0^+ E_1^-$ переводит в точку, также принадлежащую L_1 и расположенную ближе к P .

Таким образом, кривая $z_1 = f(z_0)$ на диаграмме Ламерея имеет с полупрямой $z_1 = z_0 > 0$ единственную точку пересечения для значения $z_0 = a$, соответствующего точке P . Для значений $0 < z_0 < a$ и $z_0 > a$ на отрезке L_1 имеет место соответственно $z_1 = f(z_0) > z_0$ и $z_1 = f(z_0) < z_0$. При повторении преобразования $S_0^+ E_1^-$ последовательность точек на L сходится к точке P . Таким образом, неподвижная точка устойчива, а отрезок покоя неустойчив. Соответствующее устойчивое периодическое движение составляется из кусков фазовых траекторий, принадлежащих пластинкам:

$$\begin{aligned} -B < u + (A-1)z < 0 & \quad (\psi = -\psi_0) \\ 0 < u + (A-1)z < B & \quad (\psi = \psi_0) \end{aligned}$$

и кусков траекторий между плоскостями $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$ (фиг. 6).

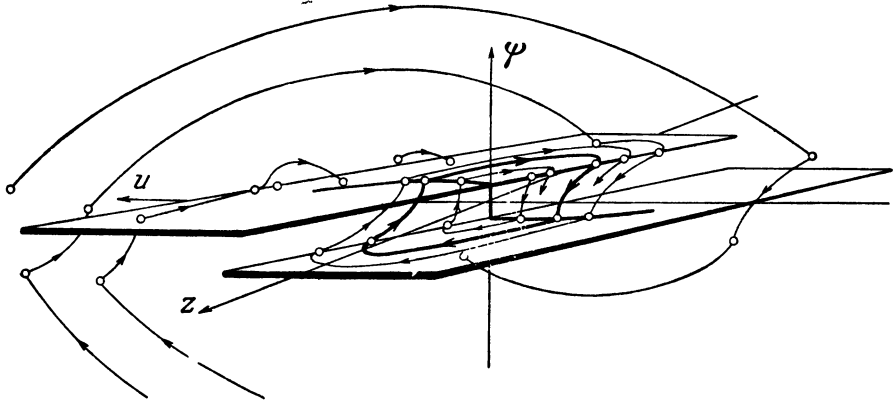
Если $k = 0$, то луч $z = ki$ касается кривой γ и соответственно касается прямой $z_1 = z_0$ в начале координат кривая $z_1 = f(z_0)$ на диаграмме Ламерея. Полагая в (2.3) и (2.4) $k = 0$, находим значения A и B , при которых отрезок покоя меняет устойчивость, и из отрезка покоя появляется устойчивое периодическое движение (кривая D на фиг. 7 или цилиндрическая поверхность D на фиг. 8).

2°. *Полные диаграммы Ламерея и неподвижные точки неправильного преобразования. Условия возникновения автоколебаний, выходящих за зону нечувствительности, и условия исчезновения периодических решений.* Точка пересечения луча $z = ki$ [где k определяется из (2.3) или (2.4)] и кривой γ (точка P') принадлежит устойчивому периодическому движению лишь до тех пор, пока P' лежит на куске g_1 , так как только в этом случае можно говорить о применении к точке P ребра L преобразования $T_L = S_0^+ E_1^-$, о порождаемой этим преобразованием в окрестности неподвижной точки функции последования $z_1 = f(z_0)$ и о соответствующей диаграмме Ламерея.

Каждая точка ребра L , взятая вне куска L_1 (граница которого определяется применимостью преобразования $T_L = S_0^+ E_1^-$), попадает при применении преобразования T_L на кусок G_0 и, следовательно, включается в множество тех точек, к которым далее применяется преобразование T_G .

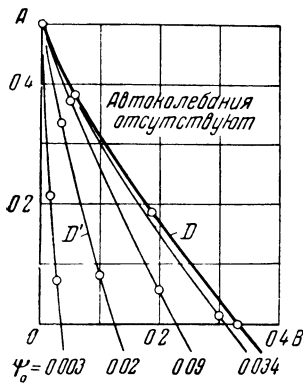
Для точек куска G_0 , близких к краю пластинки, преобразование T_G может быть неправильным, так как либо сразу преобразование S^+ , либо

преобразование $S^+ S_0^+$ может переводить изображающую точку, взятую на G_0 , на пластинку g или $\bar{g}$. Нетрудно выделить в G_0 кусок F , для

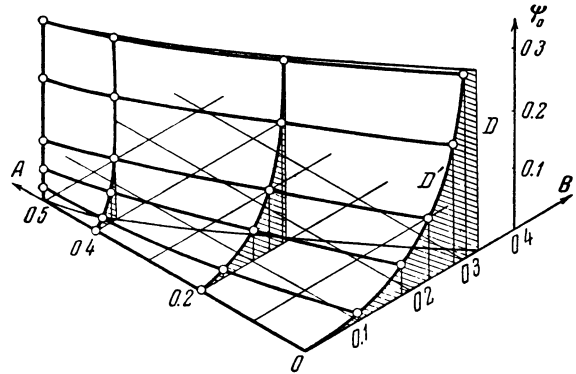


Фиг. 6

которого преобразование T_G будет неправильным. Неправильное преобразование T_G переводит выделенное плоское множество F частью на кусок L_1 , а частью в линейное множество f , принадлежащее G_0 и составленное из кусков ребра Γ и кривой γ .



Фиг. 7



Фиг. 8

Линейное множество f может при этом полностью или частично опять лежать в F , таким образом, изучение поведения точек G_0 при последовательном повторении неправильного преобразования T_G (поскольку о таком повторении может идти речь) сводится к изучению преобразования в себя при применении T_G линейного множества f .

Это преобразование опять может быть удобно представлено в виде диаграмм Ламерея, являющихся продолжением диаграмм Ламерея, порождаемых преобразованием T_L . Последнее становится очевидным, если заметить, что множество f по преобразованию $S^+ E^+$ (при этом E^+ может быть также тождественным преобразованием, если S^+ переводит изобра-

жающую точку сразу на кусок G_1) переходит также в линейное множество f^+ , составляющее вместе с куском L_1 одну непрерывную кривую $L_1 + f^+$ (отрезок ребра L или отрезок ребра L , дополненный куском кривой, лежащей в G_1). Неправильное¹ преобразование T_0 переводит точку $M_0(-u_0, -z_0)$, принадлежащую кривой $L_1 + f^+$, в точку $M_1(-u_1, -z_1)$, также принадлежащую $L_1 + f^+$. Таким образом, на кривой $L_1 + f^+$ определена функция последования $z_1 = f(z_0)$, а в плоскости $z_0 z_1$ — соответствующая диаграмма Ламерея, включающая (как часть) рассмотренную ранее диаграмму Ламерея, а также содержащую ее продолжение (полная диаграмма Ламерея).

Обозначим через z^* значение z_0 , соответствующее концу отрезка L_1 . Как показано выше, для $0 < z_0 < z^*$ может существовать не более одной точки пересечения и число их может измениться только либо в результате появления периодического решения из отрезка покоя (или стягивание периодического решения к отрезку покоя), либо при переходе точки пересечения через значение $z = z^*$ на другую часть диаграммы. Появление периодического решения из отрезка покоя происходит, как выяснено выше, при изменении параметров A и B , соответствующих пересечению цилиндрической поверхности D с образующими, параллельными оси ψ (фиг. 8) в направлении убывающих A и B . Переход точки пересечения через значение $z_0 = z^*$ порождает появление устойчивого периодического движения, включающего куски траектории вне зоны нечувствительности (для $\psi > \psi_0$ и $\psi < -\psi_0$), т. е. возникновение автоколебаний, выходящих на зону нечувствительности.

Поверхность D' (фиг. 8), вычисленная из условия, что для точки пересечения имеет место равенство $z = z^*$ (или, другими словами, из условия, что точка P' лежит на границе куска g_0), дает в пространстве параметров A, B, ψ_0 границу, пересечение которой при изменении параметров в направлении убывающих A или B приводит к возникновению автоколебаний, выходящих за зону нечувствительности.

Конец ребра $\bar{I}$ [$u = -A - B, z = A(A - 1)^{-1}$] лежит на кривой γ , если $B = \mu(A + B)^2$, где $\mu \approx 3.04$ корень уравнения

$$\mu = \exp \left[\frac{2}{\sqrt{4\mu - 1}} \arctg(-\sqrt{4\mu - 1}) \right] \quad (2.5)$$

Ребро $\bar{I}$ пересекает или не пересекает γ соответственно при $B > \mu(A + B)^2$ или $B < \mu(A + B)^2$.

Выражение (2.4) совместно с требованием, что точка P' лежит на границе куска g_0 [т. е. либо на прямой $u + (A - 1)z + B = 0$, если ребро $\bar{I}$ не пересекает кривую γ , либо на траектории, касающейся прямой в конце ребра $\bar{I}$, если $\bar{I}$ пересекает γ], приводят к таким параметрическим

¹ Таковыми будут: преобразование $T_0 \equiv T_{f+} = \overline{S_0^+ E_0^- S^- E_1^-}$ на множестве f , преобразование $T_0 \equiv T_{L_1} = \overline{S_0^+ E_0^-}$ на отрезке L_1 и преобразование $T_{f+} = T_{L_1}$ на конце отрезка L_1 , так как $E_0^- S^- E_1^-$ вырождается здесь в E_1^- .

уравнениям поверхности D'

$$\psi_0 = \frac{B[1 - k(1 - A) + \ln k(1 - A)]}{2[(1 - A)k - 1]} \quad (2.6)$$

где k определяется уравнениями (2.3) или (2.4) [если $B < \mu(A + B)^2$], или

$$\psi_0 = \frac{u_0}{2} [1 - k(1 - A) + \ln k(1 - A)] \quad (2.7)$$

$$u_0 = - \left[(A + B) \cos \tau + \frac{(2 - A - B)(A + B) - 2A}{\sqrt{4B - (A + B)^2}} \sin \tau \right] \exp \frac{A + B}{\sqrt{4B - (A + B)^2}} \tau$$

где k определяется уравнением (2.3) и τ — меньший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{[A + k(A - 1)(A + B)] \sqrt{4B - (A + B)^2}}{k(1 - A)[2B - (A + B)^2] + A(A + B) - 2B} \quad (2.8)$$

[если $B > \mu(A + B)^2$]. Множество f при применении к нему неправильного преобразования T_0 может либо целиком перейти в самое себя, и тогда на множестве f неправильное преобразование T_0 может быть неограниченно повторено, либо преобразование T_0 не для всех точек множества f будет неправильным. Обозначим через z^* значение z_0 , разделяющее на множестве $L_1 + f^*$ точки, для которых преобразование T_0 будет неправильным, от точек, для которых оно становится правильным. Очевидно, $0 \leq z_0 \leq z^*$ будет тот интервал значений z_0 , для которого определены функция последования $z_1 = f(z_0)$ и соответствующая диаграмма Ламерея. Аналитические выражения функции последования $z_1 = f(z_0)$ в интервале $z^* \leq z_0 < z^{**}$ неудобны для исследования их в общем виде. Фактическое построение диаграмм Ламерея для фиксированных значений параметров A , B и ψ_0 может быть, однако, легко проделано. При этом обнаруживается, что в интервале $z^* \leq z_0 \leq z^{**}$ кривая $z_1 = f(z_0)$ может иметь две точки пересечения с прямой $z_1 = z_0$, одна из которых соответствует устойчивому, а другая неустойчивому периодическому движению (характер устойчивости ясен из характера диаграмм Ламерея).

Качественный [характер] диаграмм Ламерея в интервале $z^* \leq z \leq z^{**}$ [число точек пересечения кривой $z_1 = f(z_0)$ с прямой $z_1 = z_0$] может измениться либо при переходе устойчивого периодического движения через значение $z = z^*$ (поверхность D' на фиг. 8), либо при переходе неустойчивого периодического движения через значение $z = z^{**}$ (когда неустойчивое периодическое движение уходит с пластинок или появляется на пластинках g_0 и g_1), либо при слиянии и затем исчезновении точек пересечения кривой $z_1 = f(z_0)$ с прямой $z_1 = z_0$. Слияние точек пересечения происходит, если кривая $z_1 = f(z_0)$ касается прямой $z_1 = z_0$.

Нетрудно написать условия того, что периодическое движение (неустойчивое) проходит через край пластинки, но не содержит кусков траекторий, принадлежащих пластинке. Это условие заключается в том, что точка $u_0 z_0$ лежит либо на ребре $u_0 + (A - 1)z_0 = B$ и является непо-

движной точкой правильного преобразования $T_G = \overline{S^+ S_0^+}$ (случай 1), либо на ребре $u_0 + (A - 1)z_0 = 0$ и является неподвижной точкой правильного преобразования $T_{G_1} = \overline{S_0^+ S^-}$ (случай 2).

Выражения для S^+ и S_0^+ совместно с требованием $T_G M(u_0, z_0) = M(u_0, z_0)$ и условием $u_0 + (A - 1)z_0 = B$ приводят к параметрическим уравнениям поверхности D_1'' в пространстве параметров A, B, ψ_0 :

$$A + B = \frac{(1 + u_0) e^{-2u_0} + u_0 - 1}{e^{-2u_0} + 2u_0 - 1} \quad (2.9)$$

$$\psi_0 = (A + B) u_0 - B - \frac{u_0}{2} \ln \frac{B - u_0}{u_0(2A + 2B - 1) - B}$$

$$\frac{B}{2(A + B)} \leq u_0 \leq \frac{B}{A + B}$$

Выражение для S_0^+ и S^- совместно с требованием $T_{G_1} M(-u_0, -z_0) = M(-u_0, -z_0)$ и условием $u_0 + (A - 1)z_0 = 0$ приводят к параметрическим уравнениям поверхности D_2'' в пространстве A, B, ψ_0 :

$$A + B = \frac{1 - A + u_0 - (1 - A - u_0) e^{2u_0}}{2u_0}$$

$$\psi_0 = -\frac{u_0}{2} [2(A + B) + \ln(1 - 2A - 2B)] \quad (2.10)$$

$$\frac{B}{2(A + B)} \leq u_0 \leq u_0^*, \quad 1 - A - u_0^* = (1 - A) e^{-2u_0^*}$$

Поверхности D_1'' и D_2'' переходят одна в другую на кривой

$$[2(1 - A)(A + B) - B] \left(\exp \frac{A}{A + B} - 1 \right) = 2B(1 - A - B)$$

$$\psi_0 = -\frac{B}{2} - \frac{B}{4(A + B)} \ln(1 - 2A - 2B) \quad (2.11)$$

соответствующей значению параметра $u_0 = \frac{1}{2} B(A + B)^{-1}$ в уравнениях (2.9) и (2.10). Для точек кривой (2.11) периодическое решение сшивается из кусков траекторий, проходящих как через ребро $u + (A - 1)z = B$, так и через ребро $u + (A - 1)z = 0$ пластинки.

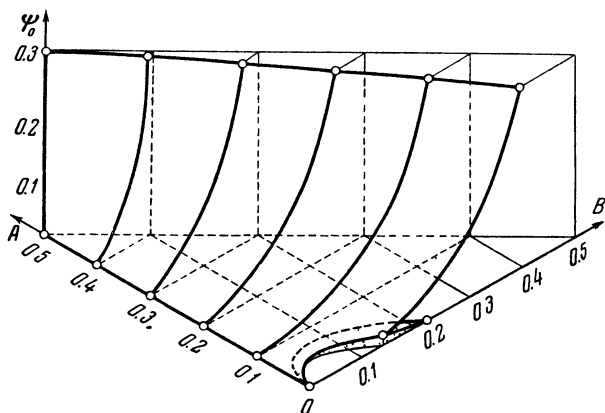
Поверхность D'' , составленная из кусков D_1'' и D_2'' , определена для части куска $A \geq 0, B \geq 0, 1 - 2A - 2B > 0$. Она пересекает плоскость $\psi_0 = 0$ по прямой $B = 0$ (куском D_2'') и по кривой

$$[(A + B)(A + B - 1) - B] = [(A + B)(A - B - 1) + B] \exp \frac{2B}{A + B}$$

(куском D_1''). Плоскость $2A + 2B - 1 = 0$ является асимптотической поверхностью для D'' .

Поверхность D'' изображена на фиг. 9. Изменение параметров, соответствующее пересечению поверхности D'' , в направлении от асимптотической поверхности приводит к появлению на пластинках g_0 и g_1 неустойчивого периодического движения.

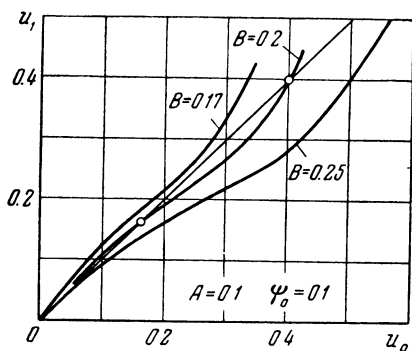
Условия касания кривой $z_1 = f(z_0)$ с прямой $z_1 = z_0$ выделяют¹ в пространстве параметров A, B, ψ_0 поверхность D''' . Изменение параметров, соответствующее пересечению поверхности D''' в направлении возрастающих ψ_0 при фиксированных A и B (убывающих A и B при фиксированном ψ_0), приводит к исчезновению периодических решений.



Фиг. 9

На фиг. 10 изображен ряд диаграмм Ламерея, построенных для фиксированных значений A, B и ψ_0 .

3°. *Количественные характеристики периодического движения.* Координата z_0 точки пересечения кривой $z_1 = f(z_0)$ с прямой $z_1 = z_0$ на диаграмме Ламерея полностью определяет периодическое решение, которое легко может быть построено последовательным припасовыванием кусков траекторий. Возможны периодические решения, «сшитые» из четырех кусков (устойчивое периодическое решение, не выходящее из границ зоны нечувствительности и соответствующее неподвижной точке преобразования $\bar{S}_0^+ E_1^-$), из шести или из восьми кусков (периодическое решение, выходящее за зону нечувствительности). Шести- или восьмикусочное устойчивое периодическое решение появляется, например, при изменении параметров, соответствующем пересечению поверхности D'



Фиг. 10

¹ Условия $z_1 = f(z_0)$, $z_1 = z_0$, $dz_1/dz_0 = 1$ приводят к сложным аналитическим выражениям. Фактическое вычисление точек поверхности D''' удобнее проводить из рассмотрения совокупности диаграмм Ламерея, выделяя при заданных A и B значения ψ_0 , при которых имеет место касание. Нетрудно показать, что при изменении параметра ψ_0 все точки диаграмм Ламерея в интервале $0 < z_0 \leq z_0^{**}$ сдвигаются относительно диаграмм в одном направлении, т. е. образуют в зависимости от ψ_0 семейство непересекающихся кривых.

в должном направлении соответственно на куске, где $B < \mu(A+B)^2$ или $B > \mu(A+B)^2$.

Время движения по отдельным кускам траекторий определяется из формул для S^+ , S_0^+ , E^+ и E^- . Параметры τ и ϑ в S^+ и S_0^+ сразу дают значение соответствующего времени перехода [безразмерного времени уравнений (1, 4)], а параметр θ в выражениях для E связан с безразмерным временем t соотношениями

$$2B\theta = [4B - (A+B)^2]^{1/2} t \quad \text{при } 4B - (A+B)^2 > 0$$

$$2B\theta = [(A+B)^2 - 4B]^{1/2} t \quad \text{при } 4B - (A+B)^2 < 0$$

Для устойчивого периодического движения, не выходящего за зону нечувствительности, выражение для периода имеет простой вид.

Используя выражения для S_0^+ и E_1^- , а также соотношение $z_0 = ku_0$, можно период $\tau^* = 2(\vartheta + \theta)$, где ϑ и θ — соответственно время движения между плоскостями $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$ и по пластинкам g_0 и g_1 , представить в следующем виде:

$$\tau^* = \frac{2B}{A+B} \ln \frac{(A-1)[(A-1)k^2 + (2-A-B)k - 1]}{B[k(A+B)]^{(A+B)/B}}$$

где k определяется из (2.5) или (2.6).

Период τ^* неограниченно возрастает, когда периодическое движение стягивается к отрезку покоя ($k \rightarrow 0$).

§ 3. Преобразование области в область. I° . *Симметричный характер периодического движения.* Пусть $M_0(u_0, z_0)$ — точка, взятая на куске G_0 , и такая, что допускает применение правильного преобразования $S^+ S_0^+ S^- S_0^-$. Напишем в развернутом виде преобразования, соответствующие последовательным переходам по кускам траекторий в пространстве:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= \zeta_1, & u_0 &= (A-1)(1+\zeta_1) \frac{e^{-\tau_1}-1}{\tau_1} + \frac{\tau_1}{2} + A+B-1 \end{aligned} \right\} S^+$$

$$z_1 = (1+\zeta_1)e^{-\tau_1} - 1, \quad u_1 = u_0 - \tau_1$$

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \xi_1, & u_1 &= \vartheta_1^{-1} [(A-1)(e^{-\vartheta_1}-1)\xi_1 - 2\psi_0] \end{aligned} \right\} S_0^+$$

$$z_2 = \xi_1 e^{-\vartheta_1}, \quad u_2 = u_1$$

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= \zeta_2, & u_2 &= (A-1)(\zeta_2-1) \frac{e^{-\tau_2}-1}{\tau_2} - \frac{\tau_2}{2} - A-B+1 \end{aligned} \right\} S^-$$

$$z_3 = (\zeta_2-1)e^{-\tau_2} + 1, \quad u_3 = u_2 + \tau_2$$

$$\left. \begin{aligned} z_3 &= \xi_2, & u_3 &= \vartheta_2^{-1} [(A-1)(e^{-\vartheta_2}-1)\xi_2 + 2\psi_0] \end{aligned} \right\} S_0^-$$

$$z_4 = \xi_2 e^{-\vartheta_2}, \quad u_4 = u_3$$

Пусть однооборотное периодическое движение проходит через точку M_0 и, следовательно, выполняется условие: $z_4 = z_0$, $u_4 = u_0$. Из уравнений $u_1 = u_0 - \tau_1$, $u_3 = u_2 + \tau_2$, $u_2 = u_1$, $u_4 = u_3$ и условия $u_4 = u_0$ найдем, что

$$\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau_0 \quad (3.1)$$

Исключая из уравнений, определяющих преобразования, величины $u_1, z_1, u_3, z_3, \zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$ и приняв во внимание (3.1), получаем для периодического движения такую систему:

$$\begin{aligned} u_0 &= (A-1)(z_0+1)\frac{e^{-\tau_0}-1}{\tau_0} + \frac{\tau_0}{2} + A + B - 1 & (L_0) \\ \left. \begin{aligned} u_0 &= (A-1)(z_0 e^{\vartheta_1} - 1)\frac{1-e^{\tau_0}}{\tau_0} + \frac{\tau_0}{2} - A - B + 1 \\ u_0 \vartheta_2 &= (A-1)(1-e^{\vartheta_1})z_0 + 2\psi_0 \end{aligned} \right\} & (L_0') \quad (3.2) \\ u_2 &= (A-1)(z_2-1)\frac{e^{-\tau_0}-1}{\tau_0} - \frac{\tau_0}{2} - A - B + 1 & (L_2) \\ \left. \begin{aligned} u_2 &= (A-1)(z_2 e^{\vartheta_1} + 1)\frac{1-e^{\tau_0}}{\tau_0} - \frac{\tau_0}{2} + A + B - 1 \\ u_2 \vartheta_1 &= (A-1)(1-e^{\vartheta_1})z_2 - 2\psi_0 \end{aligned} \right\} & (L_2') \\ u_0 - u_2 &= \tau_0 \end{aligned}$$

Сюда нужно еще добавить условия:

$$u_0 + (A-1)z_0 \geq B, \quad u_1 + (A-1)z_1 \leq 0 \quad (3.3)$$

Нетрудно показать, что группа уравнений (L_0, L_0') при фиксированных A, B, ψ_0 и фиксированном τ_0 может удовлетворяться не более чем одной системой значений величин u_0, z_0, ϑ_2 , так как

$$\frac{dz_0}{du_0} > \frac{1}{1-A} \quad \text{для } L_0, \quad \frac{dz_0}{du_0} < \frac{1}{1-A} \quad \text{для } L_0' \quad (3.4)$$

и, следовательно, L_0 и L_0' , рассматриваемые как кривые в плоскости $u_0 z_0$, не могут иметь более одной точки пересечения¹.

Уравнения (L_2, L_2') переходят в уравнения (L_0, L_0') при замене u_2, z_2 соответственно через $-u_0, -z_0$, поэтому при тех же фиксированных A, B, ψ_0 и τ_0 уравнения (L_2, L_2') могут иметь в качестве решения только единственную систему значений:

$$u_2 = -u_0, \quad z_2 = -z_0, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 \quad (3.5)$$

¹ Первое из неравенств (3.4) очевидно. В справедливости второго можно убедиться, и не вычисляя довольно громоздких выражений для dz_0/du_0 ; второе из уравнений L_0' можно рассматривать как семейство прямых, зависящих от параметра ϑ_2 (прямые L_0'), а в совокупности уравнения L_0' определяют u_0 и z_0 как однозначные функции параметра ϑ_2 (кривая L_0'). Для прямых L_0'

$$\frac{dz_0}{du_0} = \frac{\vartheta_2}{(1-A)(e^{\vartheta_1}+1)} \leq -1-A$$

В силу однозначности функций $u_0(\vartheta_2)$ и $z_0(\vartheta_2)$ «кривая L_0' » не может дважды пересекать прямые L_0' . Нетрудно проверить, что движение в направлении возрастающих u вдоль кривой L_0' соответствует пересечению семейства прямых L_0' в направлении возрастающих ϑ_2 , т. е. убывающих dz_0/du_0 для прямых L_0' . Отсюда следует, что для кривой L_0' выполняется (3.4).

и, следовательно, однооборотное периодическое движение (если оно существует) симметрично относительно начала координат.

2°. Область существования симметричного периодического решения. В силу соотношений (3.5) группа уравнений (L_2, L_2') системы (3.2) совпадает с уравнениями (L_0, L_0') , а последнее из уравнений (3.2) заменяется уравнением $2u_0 = \tau_0$. Исключая из этих уравнений координаты u_0, z_0 , входящие линейно, приходим к заменяющей систему (3.2) системе:

$$\vartheta_2 = -\ln \frac{\mu \tau_0 e^{\tau_0} - e^{\tau_0} + 1}{e^{\tau_0} - \mu \tau_0 - 1} \quad (3.6)$$

$$\vartheta_2 = \frac{h}{\tau_0} - \frac{k(e^{\tau_0} + 1)}{e^{\tau_0} - 1} \quad (3.7)$$

где

$$\mu = \frac{A+B-1}{A-1}, \quad k = 2(1-A-B), \quad h = 4(\psi_0 - A + 1)$$

Дополнительные условия (3.3) после исключения из них координат u_0 и z_0 [при помощи условий (3.5) и формул для преобразований S^+ и S_0^+] можно написать в таком виде:

$$\tau_0(1 - e^{-\tau_0}) \geq k(e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1) \quad (3.8)$$

$$(A-1)(e^{-\tau_0} - 1)(1 + \vartheta_2 e^{\vartheta_2} - e^{\vartheta_2}) \leq 2\psi_0(e^{\vartheta_2} + e^{-\tau_0})$$

Отыскание периодических решений и области существования их сводится к исследованию кривых (3.6) на куске плоскости τ_0, ϑ_2 , выделяемом условиями $\tau_0 > 0, \vartheta_2 \geq 0$ и неравенствами (3.8), и определению точек пересечения и области существования в пространстве параметров точек пересечения этих кривых. Область существования ϑ_2 , определяемого уравнением (3.6), дается неравенством

$$0 < \frac{\mu \tau_0 e^{\tau_0} - e^{\tau_0} + 1}{e^{\tau_0} - \mu \tau_0 - 1} \leq 1$$

или эквивалентным неравенством

$$\frac{e^{\tau_0} - 1}{\tau_0 e^{\tau_0}} < \mu \leq \frac{2(e^{\tau_0} - 1)}{\tau_0(e^{\tau_0} + 1)} \quad (3.9)$$

Если $0 < \mu < 1$ и, следовательно,

$$A > 0, \quad B > 0, \quad 1 - A - B > 0 \quad (3.10)$$

то каждому фиксированному μ отвечает интервал значений τ_0 : $\tau_0' < \tau_0 < \tau_0''$, в котором кривая (3.6) существует и существует точка пересечения кривых (3.6) и (3.7). При $\mu > 1$ кривая (3.6) не существует и, следовательно, не могут существовать и периодические движения рассматриваемого типа. Условия (3.10) совместно с условиями (3.8), которые также можно рассматривать, принимая во внимание уравнения (3.6) и (3.7), как соотношения между параметрами A, B и ψ_0 , выделяют в

пространстве параметров область, для точек которой в G_0 существует неподвижная точка правильного преобразования. Неподвижная точка попадает на край пластинки («внешний» или «внутренний»), если выполняется какое-либо из равенств (3.8), и в этом случае мы опять приходим к поверхности D'' , изображенной на фиг. 9. Неподвижная точка уходит в бесконечность, если $1 - A - B = 0$.

3°. *Устойчивость периодического движения.* Для исследования устойчивости неподвижной точки и соответствующего периодического движения обратимся к правильному преобразованию $T_G = \overline{S^+} S_0^+$. Заменяя в формулах для S_0^+ величины z_2 и u_2 соответственно через $\overline{z}_2$ и $\overline{u}_2$ и исключая из уравнений для S^+ и S_0^+ координаты промежуточной точки u_1, z_1 для определения T_G , приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} u_0 &= (A-1)(1+z_0) \frac{e^{-\tau_1} - 1}{\tau_1} + \frac{\tau_1}{2} + A + B - 1 \\ \overline{u}_2 &= \tau_1 - u_0 \\ \overline{z}_2 &= [1 - (1+z_0)e^{-\vartheta_1}]e^{-\vartheta_1} \\ \overline{u}_2 \vartheta_1 &= (A-1)(1 - e^{-\vartheta_1}) \overline{z}_2 + 2\psi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для исследования устойчивости полагаем

$$\begin{aligned} u_0 &= a + x, & \overline{u}_2 &= a + \xi, & \tau_1 &= \theta + h \\ z_0 &= b + y, & \overline{z}_2 &= b + \eta, & \vartheta_1 &= \tau + k \end{aligned} \quad (3.12)$$

где a, b, θ и τ — соответственно значения координат u, z и параметров τ_1 и ϑ_1 , относящиеся к неподвижной точке $M_0(a, b)$ и преобразованию T_G ($M_0 = T_G M_0$). Подставляя (3.12) в (3.11), развертывая (3.11) по степеням малых величин x, y, ξ, η, h и k и ограничиваясь в разложениях только членами первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} x &= \alpha y + \left(\frac{1}{2} + \beta\right) h, & h &= \xi + x \\ \eta &= -\gamma y + \delta h - kb, & k &= \lambda \eta - \mu \xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (A-1) \frac{e^{-\theta} - 1}{\theta}, & \beta &= (A-1)(1+b) \frac{1 - \theta e^{-\theta} - e^{-\theta}}{\theta^2} \\ \gamma &= e^{-(\theta+\tau)}, & \delta &= (1+b)\gamma, & \lambda &= \frac{(A-1)(1 - e^\tau)}{(A-1)be^\tau + a}, & \mu &= \frac{\tau}{(A-1)be^\tau + a} \end{aligned} \quad (3.13)$$

исключая h и k , находим¹

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1/2 - \beta}{1/2 + \beta} x - \frac{\alpha}{1/2 + \beta} y \\ \eta &= \frac{\delta + \mu b (1/2 - \beta)}{(1 + \lambda b)(1/2 + \beta)} x - \frac{\gamma (1/2 + \beta) + \alpha (\delta + \mu b)}{(1 + \lambda b)(1/2 + \beta)} y \end{aligned} \quad (3.14)$$

Устойчивость неподвижной точки и ее характер могут быть определены из уравнений первого приближения (3.14). Необходимое и доста-

¹ В области $A > 0, B > 0, 1 - A - B > 0$ будет $1/2 + \beta \neq 0$ и $1 + \lambda b \neq 0$.

точное условие асимптотической устойчивости заключается в требовании, чтобы корни характеристического уравнения

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} - \rho & -\frac{\alpha}{0.5 + \beta} \\ \frac{\delta + \mu b (0.5 - \beta)}{(0.5 + \beta)(1 + \lambda b)} & -\frac{\gamma (0.5 + \beta) + \alpha (\delta + \mu b)}{(0.5 + \beta)(1 + \lambda b)} - \rho \end{array} \right| = 0 \quad (3.15)$$

были по модулю меньше единицы¹. Обозначим

$$p = -\left\{ \frac{0.5 - \beta}{0.5 + \beta} - \frac{\gamma (0.5 + \beta) + \alpha (\delta + \mu b)}{(0.5 + \beta)(1 + \lambda b)} \right\} \quad (3.16)$$

$$q = \frac{\alpha [\delta + \mu b (0.5 - \beta)] - (0.5 - \beta) [\gamma (0.5 + \beta) + \alpha (\delta + \mu b)]}{(0.5 + \beta)^2 (1 + \lambda b)}$$

тогда упомянутое условие устойчивости выразится в виде неравенств

$$-p + q + 1 > 0, \quad p + q + 1 > 0, \quad 1 - q > 0 \quad (3.17)$$

Воспользовавшись (3.16), получаем

$$\begin{aligned} -p + q + 1 &\equiv \frac{1 - \gamma + \lambda b - \mu b \alpha}{(0.5 + \beta)(1 + \lambda b)} \\ p + q + 1 &\equiv \frac{2(\alpha \delta + \beta \gamma + \beta) + 2\lambda b \beta + \mu b \alpha}{(0.5 + \beta)(1 + \lambda b)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Нетрудно проверить, что условия (3.17) не выполняются, так как выражения (3.18) имеют разные знаки. В соответствии с этим один из корней уравнения (3.15) по модулю меньше, а другой больше единицы. Неподвижная точка (и соответствующее периодическое движение) будет неустойчива и будет типа седло.

§ 4. Оценка области сходимости процесса регулирования. Дадим оценку области сходимости процесса регулирования для тех значений параметров A и B , при которых отрезок покоя устойчив, но существует неустойчивое периодическое движение. Пусть $u_0 z_0$ — точка, взятая на ребре Γ :

$$u + (A - 1)z - B = 0$$

Найдем условия, при которых траектория, проходящая через точку $u_0 z_0$ ребра Γ , опять возвращается на ребро. Для этого достаточно, чтобы преобразование $S^+ E S_0^+$ (E может быть также тождественным преобразованием) переводило изображающую точку $u_0 z_0$ на пластинку в плоскости $\psi = -\psi_0$. Требуемое будет, например, заведомо выполнено, если $u_0 < u_0^*$, а точка $M_0^*(u_0^*, z_0^*)$, взятая на ребре Γ , такова, что

$$S^+ M_0^*(u_0^*, z_0^*) = M_1[u_1 = (1 - A)\bar{z}_1, \bar{z}_1] \quad (4.1)$$

$$S_0^+ M_1[u_1 = (1 - A)\bar{z}_1, \bar{z}_1] = M_2(u_1, z_1) \subset g \quad (4.2)$$

¹ Характер неподвижной точки сохраняется и относительно T_G^2 , ибо, как легко проверить, корни соответствующего характеристического уравнения будут квадратами корней уравнения (3.15).

Условие (4.1) дает

$$2B = 2\tau_0 + \tau_0^2 - \frac{\tau_0^3}{e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1} \quad (4.3)$$

а условие (4.2) приводит к неравенству

$$2\psi_0 < u_1(1 - \vartheta - e^{-\vartheta}) \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta &= \ln \frac{u_1}{B + u_1}, \\ u_1 &= A + B - 1 + \\ &+ \frac{2\tau_0 - \tau_0^2 - 2B}{2\tau_0} \quad (4.5) \end{aligned}$$

При выполнении условия (4.4) координата u_0^* будет характеризовать область заведомой сходимости процесса регулирования, если начальные условия брать на ребре пластинки в плоскости $\psi = \psi_0$. Фиг. 11 позволяет судить о зависимости величины u_0^* от параметров A и B . Значения ψ_0 не должны при этом превосходить границ, определяемых поверхностью

$$\begin{aligned} 2\psi_0 &= u_1(1 - \vartheta - e^{-\vartheta}) \equiv \\ &\equiv F(A, B) \quad (4.6) \end{aligned}$$

в области ее существования. Поверхность (4.6) изображена на фиг. 12.

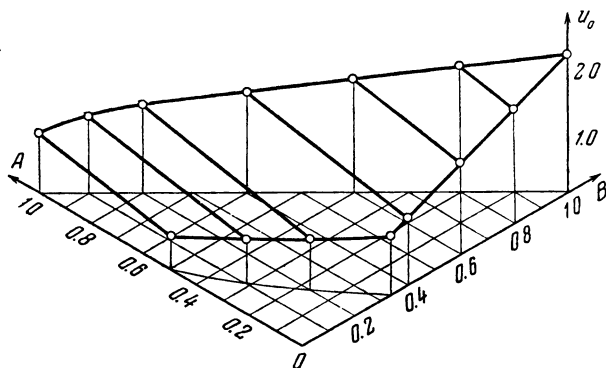
Для заданных A и B значение ψ_0 находится по уравнениям (4.3), (4.5) и (4.6). Цилиндрическая поверхность

$$\begin{aligned} 2B &= 2\tau_0 + \tau_0^2 - \frac{\tau_0^3}{e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1} \\ A &= 1 - \tau_0 - \tau_0^2 + \frac{\tau_0^3(2\tau_0 - 1)}{2\tau_0(e^{-\tau_0} + \tau_0 - 1)} \quad (4.7) \end{aligned}$$

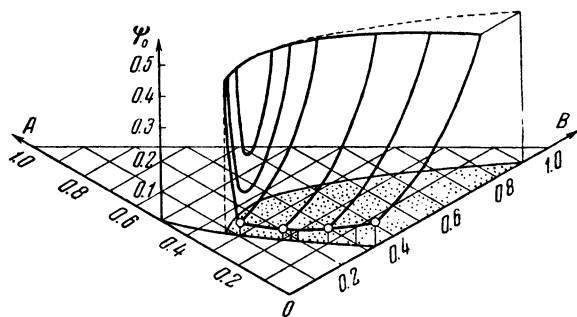
является для (4.6) асимптотической поверхностью. Вне области существования (4.6), ограниченной кривой (4.7) и кривой D смены устойчивости отрезка покоя, величина u_0^* дает оценку области сходимости процесса регулирования независимо от величины параметра ψ_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. и Баутин Н. Н. Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора. I. Случай наличия зоны нечувствительности. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1955.



Фиг. 11



Фиг. 12

О ВЛИЯНИИ КУЛОНОВСКОГО ТРЕНИЯ В ЗОЛОТНИКЕ НА ПРОЦЕСС НЕПРЯМОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ¹

В работе рассматривается при обычных упрощениях нелинейная задача о влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования. Объект предполагается как с саморегулированием (положительным или отрицательным), так и без саморегулирования. Рассматривается как сервомотор постоянной, так и сервомотор переменной скорости. Результаты исследования, полученные методами теории точечных преобразований, представлены на диаграммах фиг. 1, 10 и 11, позволяющих с минимумом вычислений решать вопросы о сходимости или расходимости процессов регулирования.

Работа относится к 1946 г. и является продолжением [1].

Уравнения движения могут быть записаны в безразмерных координатах в следующем виде:

$$T_a \dot{\varphi} = \mu - k\varphi \quad \text{уравнение объекта} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\eta + \varphi &= \frac{1}{2}\varepsilon & \text{для} & \quad \dot{\sigma} < 0 \\ \delta\eta + \varphi &= -\frac{1}{2}\varepsilon & \text{для} & \quad \dot{\sigma} > 0 \\ |\delta\eta + \varphi| &< \frac{1}{2}\varepsilon & \text{для} & \quad \dot{\sigma} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{уравнение тахометра} \\ \text{(трение в золотнике)} \end{array} \quad (\text{II})$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{T_s} \sigma \quad \text{уравнение сервомотора} \quad (\text{IIIa})$$

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{T_s} & \text{для} & \quad \sigma > \sigma_0 \\ \dot{\mu} &= -\frac{1}{T_s} & \text{для} & \quad \sigma < -\sigma_0 \\ \dot{\mu} &= 0 & \text{для} & \quad |\sigma| < \sigma_0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{уравнение сервомотора переменной скорости} \\ \text{уравнение сервомотора постоянной} \\ \text{скорости с мертвой зоной} \end{array} \quad (\text{IIIб})$$

$$\sigma = \eta - \mu \quad \text{смещение золотника} \quad (\text{IV})$$

Здесь φ — относительное отклонение регулируемой координаты; η — относительное смещение чувствительного элемента; σ — относительное смещение золотника сервомотора; μ — относительное смещение регулируемого органа; T_a — время разгона объекта регулирования; k — коэффициент, характеризующий саморегулирование объекта; δ — коэффициент неравномерности чувствительного элемента; ε — коэффициент нечувствительности; T_s — время сервомотора; σ_0 — половина ширины мертвой зоны сервомотора.

¹ Совместно с Н. Н. Баутиным. Подготовлено к печати Н. Н. Баутиным. Посмертно опубликовано в Известиях АН СССР, ОТН № 7, 1955, стр. 34—48.

§ 1. Сервомотор переменной скорости. I° . Уравнения движения. В этом случае уравнения (I), (II), (IIIa) и (IV) после замен

$$U = \frac{\delta\mu}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}, \quad V = \frac{T_s}{\delta T_a} \frac{\delta\mu}{\varepsilon} - \frac{kT_s}{T_a} \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}$$

$$z = \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}, \quad t_{\text{новое}} = \frac{1}{T_s} t_{\text{старое}}$$

приводятся к виду

$$A\dot{U} - \dot{V} + (1 - A)\dot{z} = (A + B)(V - z)$$

$$U = \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} < 0$$

$$U = -\frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} > 0$$

$$|U| < \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} = 0$$

$$B\dot{U} + \dot{V} - (1 + B)\dot{z} = (A + B)z$$

содержащему два существенных параметра

$$A = \frac{T_s}{\delta T_a}, \quad B = \frac{kT_s}{T_a}$$

Систему (1.1) удобно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ \dot{U} &= V \\ \dot{V} &= (A + B)z - BV \end{aligned} \right\} \text{ для } |U| < \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{z} &= -V \\ \dot{U} &= 0 \\ \dot{V} &= (A + B)z - (1 + B)V \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{для } U = \frac{1}{2}, V > 0 \\ &\text{или } U = -\frac{1}{2}, V < 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

2° . [Общее описание фазового пространства. В силу уравнений (1.2) и (1.3) изображающая точка может находиться либо между плоскостями

$$U = \pm \frac{1}{2}$$

либо на полуплоскостях

$$H \left(U = -\frac{1}{2}, V < 0 \right), \quad \text{или} \quad H' \left(U = \frac{1}{2}, V > 0 \right)$$

Состояния равновесия системы (1.1) заполняют отрезок

$$z = 0, \quad V = 0, \quad |U| \leq \frac{1}{2}$$

(отрезок покоя). Фазовое пространство симметрично относительно начала координат и заполнено кусками траекторий, лежащими либо в параллельных плоскостях $z = \text{const}$, либо в полуплоскостях H и H' .

Изображающая точка, двигаясь по траекториям в плоскости $z = \text{const}$, может либо асимптотически приближаться к отрезку покоя, либо через

конечное время попадает на полуплоскости H или H' . Только в случае $A + B < 0$ (когда состояния равновесия на границах $V = 0$ полуплоскостей будут седла) изображающая точка по траекториям разбиения полуплоскостей уходит в бесконечность. В других случаях (когда упомянутое состояние равновесия будет фокус или узел) она через конечное время попадает на полупрямые

$$L \left(U = -\frac{1}{2}, V = 0, z > 0 \right) \text{ или } L' \left(U = \frac{1}{2}, V = 0, z < 0 \right)$$

начинающиеся от концов отрезка покоя, и с них опять уходит в пространство, переходя с одной полуплоскости на другую. Назовем преобразованием S^+ (соответственно S^-) переход точки полупрямой L (соответственно L') по кускам траекторий в плоскости $z = \text{const}$ на полуплоскость H' (соответственно H), а преобразованием E^+ (E^-) — переход точки полуплоскости H' (H) по кускам траекторий на полупрямую L' (L). Задача сводится к изучению структуры преобразования полупрямой L при повторении преобразования $T = S^+E^+$, которое удобно провести, рассматривая взаиморасположение на полуплоскости H' кривых γ и Γ , где γ есть образ полупрямой L по преобразованию S^+ , а Γ — геометрическое место точек полуплоскости H' , обладающих тем свойством, что преобразование E^+ не изменяет по абсолютной величине их расстояния до плоскости $z = 0$.

3°. Отдельные случаи, требующие различного аналитического рассмотрения.

$$I. \text{ Случай } (1 + B)^2 - 4(A + B) < 0$$

Кривая Γ . Решение системы (1.3) будет:

$$z = e^{-pt} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

$$V = e^{-pt} [(c_1 p - c_2 \omega) \cos \omega t + (c_2 p + c_1 \omega) \sin \omega t] \quad (1.4)$$

$$p = \frac{1+B}{2}, \quad 2\omega = \sqrt{4(A+B) - (1+B)^2}$$

Полагая

$$z = -\zeta_0, V = 0; \text{ при } t = 0; \quad z = \zeta_0, V = V_0 \text{ при } t = -\frac{\tau}{\omega} \quad (1.5)$$

получаем из (1.4) и (1.5) уравнения кривой Γ :

$$V_0 = \left[\frac{p^2 + \omega^2}{\omega} \exp \frac{p\tau}{\omega} \sin \tau \right] \zeta_0, \quad \omega \exp \left\{ -\frac{p\tau}{\omega} \right\} = p \sin \tau - \omega \cos \tau \quad (1.6)$$

Таким образом, кривая Γ есть прямая, проходящая через конец отрезка покоя.

Обозначив

$$\frac{p^2 + \omega^2}{\omega} \exp \frac{p\tau}{\omega} \sin \tau = k \quad (1.7)$$

и исключая τ из (1.6) и (1.7), получаем для определения k уравнение

$$\frac{(\rho - k)^2 + \omega^2}{p^2 + \omega^2} = \exp \left\{ \frac{2p}{\omega} \arctg \frac{k\omega}{kp - (p^2 + \omega^2)} \right\} \quad (1.8)$$

где p и ω определяются уравнениями (1.4) и $0 < \arctg < \pi$.

Кривая γ . Решение системы (1.2) будет

$$V = c_1 e^{-Bt} + \frac{A+B}{B} z, \quad U = -\frac{c_1}{B} e^{-Bt} + \frac{A+B}{B} zt + c_2 \quad (1.9)$$

Изображающая точка, находящаяся в начальный момент на полупрямой L ($U = -\frac{1}{2}$, $V = 0$, $z > 0$), попадает через время $t = \theta$ на плоскость H' . Полагая

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad U = \frac{1}{2} \quad V = V_0 \quad \text{при } t = \theta \quad (1.10)$$

получаем из (1.9) и (1.10) такие параметрические уравнения кривой γ :

$$V_0 = \frac{B(1 - e^{-B\theta})}{e^{-B\theta} + B\theta - 1}, \quad z = \frac{B^2}{(A+B)(e^{-B\theta} + B\theta - 1)} \quad (1.11)$$

Для кривой γ имеем:

$$\begin{aligned} a) \quad B < 0, \quad V_0(\infty) = -B > 0, \quad z(\infty) = 0, \quad V_0(0) = z(0) = \infty \\ b) \quad B \geq 0, \quad V_0(\infty) = z(\infty) = 0, \quad V_0(0) = z(0) = \infty \end{aligned}$$

из (1.11) находим также

$$\frac{dV_0}{dz} = \frac{(A+B)(B\theta e^{-B\theta} + e^{-B\theta} - 1)}{B(e^{-B\theta} - 1)}$$

откуда

$$\left(\frac{dV_0}{dz} \right)_{\substack{\theta=\infty \\ (z=0)}} = \begin{cases} \frac{A+B}{B}, & \text{если } B > 0, \\ \infty, & \text{если } B \leq 0 \end{cases}, \quad \left(\frac{dV_0}{dz} \right)_{\substack{\theta=0 \\ (z=\infty)}} = 0, \quad \left(\frac{dV_0}{dz} \right)_{0 < \theta < \infty} > 0 \quad (1.12)$$

Нетрудно также проверить, что $d^2V_0/dz^2 < 0$.

Кривые γ и Γ могут иметь либо одну точку пересечения (отличную от $U = V = 0$), либо ни одной. Граничным случаем будет случай касания кривых γ и Γ в точке $U = V = 0$.

Рассмотрим структуру разбиения фазового пространства для различных случаев взаиморасположения кривых γ и Γ .

а) Кривые γ и Γ не пересекаются. Преобразование $\mathbf{T} = \overline{\mathbf{S}^+ \mathbf{E}^+}$ будет приближать точки полупрямой L к плоскости $z = 0$ (к отрезку покоя). Изображающая точка из любой точки фазового пространства идет к отрезку покоя.

б) Кривые γ и Γ пересекаются в точке P . Тогда точка P будет неподвижной точкой относительно преобразования $\mathbf{T}' = \mathbf{E}^+ \mathbf{S}^- \mathbf{E}^- \mathbf{S}^+$ и через P будет проходить предельный цикл, составленный из кусков фазовых траекторий, лежащих в полуплоскостях H и H' , и кусков траекторий, лежащих между плоскостями.

Из взаиморасположения кривых γ и Γ следует, что предельный цикл будет устойчивым, а отрезок покоя неустойчивым. Изображающая точка из любой части фазового пространства идет к предельному циклу. В рассматриваемом случае $[(1+B)^2 - 4(A+B) < 0]$ для $B \leq 0$ всегда существует точка пересечения кривых γ и Γ , соответствующая устойчивому предельному циклу. Касание кривых γ и Γ возможно для $B > 0$. Мы получим условия соприкосновения, если в соответствии с (1.12) дополним уравнение (1.8) условием

$$k = \frac{A+B}{B} \quad (1.13)$$

Условия (1.13) и (1.8) в совокупности определяют кривую на плоскости A, B .

II. Случай $(1+B)^2 - 4(A+B) > 0, A+B > 0$

Этот случай соответствует узлу на границах полуплоскостей H и H' . Для кривой Γ в этом случае получаем

$$V_0 = \left[\frac{p^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \exp \left\{ \frac{p\tau}{\omega_1} \right\} \operatorname{sh} \tau \right] \zeta_0, \quad \omega_1 \exp \left\{ -\frac{p\tau}{\omega_1} \right\} = p \operatorname{sh} \tau - \omega_1 \operatorname{ch} \tau$$

Если положить

$$\frac{p^2 - \omega_1^2}{\omega_1} \exp \left\{ -\frac{p\tau}{\omega_1} \right\} \operatorname{sh} \tau = k$$

то k определяется из уравнения

$$\frac{(p-k)^2 - \omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} = \exp \left\{ \frac{2p}{\omega_1} \operatorname{arth} \frac{k\omega_1}{kp - (p^2 - \omega_1^2)} \right\} \quad (1.14)$$

Здесь всюду

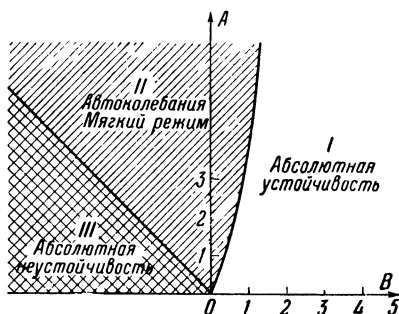
$$p = \frac{1}{2}(1+B), \quad 2\omega_1 = \sqrt{(1+B)^2 - 4(A+B)}$$

Кривая γ дается опять выражениями (1.11). Возможны те же случаи взаиморасположения кривых γ и Γ , что и для случая I. Условия касания (в начале) кривых γ и Γ даются совокупностью выражений (1.13) и (1.14). Касание возможно при $B > 0$. При $B \leq 0$ всегда есть точка пересечения, соответствующая устойчивому предельному циклу.

III. Случай $A+B < 0$

Этот случай соответствует седлу на границах полуплоскостей H и H' . Не существует устойчивых элементов в конечной части пространства, и изображающая точка из любой части пространства уходит в бесконечность.

4°. *Пространство параметров.* На фиг. 1 изображено разбиение пространства параметров A, B на области, соответствующие качественно различным случаям разбиения фазового пространства на траектории.



Фиг. 1

Кривая, разделяющая области I и II , построена по уравнениям (1.13), (1.14) и (1.8). При переходе через эту кривую из отрезка покоя появляется (или, наоборот, к нему стягивается при обратном изменении параметров) устойчивый предельный цикл. Области II и III разделены прямой $A + B = 0$.

§ 2. Сервомотор постоянной скорости с мертвой зоной. 1°. Уравнения движения. Уравнения (I), (II), (IIIб) и (IV) после замен

$$U = \frac{\delta\mu}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\varepsilon} + \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}, \quad V = \frac{\varepsilon T_s}{\delta^2 T_a} \frac{\delta\mu}{\varepsilon} - \frac{k\varepsilon T_s}{\delta T_a} \frac{\varphi}{\varepsilon}$$

$$z = \frac{\delta\sigma}{\varepsilon}, \quad t_{\text{новое}} = \frac{\delta}{\varepsilon T_s} t_{\text{старое}}$$

приводятся к виду

$$\begin{aligned} \dot{V} + A\dot{z} - A\dot{U} &= -(A + B)V \\ U &= \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} < 0 \quad B(\dot{z} - \dot{U}) - \dot{V} = -(A + B) \quad \text{для } z > z_0 \\ U &= -\frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} > 0 \quad B(\dot{z} - \dot{U}) - \dot{V} = 0 \quad \text{для } |z| < z_0 \\ |U| < \frac{1}{2} \quad \text{для } \dot{z} = 0 \quad B(\dot{z} - \dot{U}) - \dot{V} &= A + B \quad \text{для } z < -z_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

содержащему три существенных параметра:

$$A = \frac{\varepsilon T_s}{\delta^2 T_a}, \quad B = \frac{k\varepsilon T_s}{\delta T_a}, \quad z_0 = \frac{\delta\sigma_0}{\varepsilon}$$

Систему (2.1) удобно записать в таком виде:

$$\text{если } |U| < \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{V} = -BV + \begin{cases} A, \\ 0, \\ -A, \end{cases} \quad \dot{U} = V + \begin{cases} 1 \text{ при } z > z_0 \\ 0 \text{ при } |z| < z_0 \\ -1 \text{ при } z < -z_0 \end{cases}$$

$$\text{если } U = \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

$$\dot{z} = -V + \begin{cases} -1 \\ 0, \\ 1 \end{cases} \quad \dot{V} = -BV + \begin{cases} A \text{ при } z > z_0, & V > -1 \\ 0 \text{ при } |z| < z_0, & V > 0, \\ -A \text{ при } z < -z_0, & V > 1 \end{cases} \quad \dot{U} = 0$$

$$\text{если } U = -\frac{1}{2} \quad (2.4)$$

$$\dot{z} = -V + \begin{cases} -1 \\ 0, \\ 1 \end{cases} \quad \dot{V} = -BV + \begin{cases} A \text{ при } z > z_0, & V < -1 \\ 0 \text{ при } |z| < z_0, & V < 0, \\ -A \text{ при } z < -z_0, & V < 1 \end{cases} \quad \dot{U} = 0$$

2°. Общее описание фазового пространства. Доопределение задачи и сведение ее к точечным преобразованиям. В силу уравнений (2.1) изображающая точка может находиться либо между плоскостями

$$U = \pm \frac{1}{2}$$

либо на полуплоскостях:

$$(H) \quad U = -\frac{1}{2} \quad (z > z_0, V < -1; \quad |z| < z_0, V < 0; \quad z < -z_0, V < 1)$$

или

$$(H') \quad U = \frac{1}{2} \quad (z > z_0, V > -1; |z| < z_0, V > 0; z < -z_0, V > 1)$$

Состояния равновесия системы (2.1) заполняют площадку $V = 0$, $|z| < z_0$, $|U| < \frac{1}{2}$ (полоса покоя). Фазовое пространство симметрично относительно начала координат и заполнено кусками траекторий, лежащими либо в параллельных плоскостях $z = \text{const}$, либо в полуплоскостях H или H' . Изображающая точка, двигаясь по траекториям разбиения плоскостей $z = \text{const}$ или полуплоскостей H и H' , может либо асимптотически приближаться к полосе покоя, или уходить в бесконечность (последнее возможно только для $A + B < 0$), либо попадает на край полуплоскости H (или соответственно H') на один из отрезков

$$U = -\frac{1}{2}, \quad z = z_0, \quad -1 < V < 0 \quad \text{или} \quad U = -\frac{1}{2}, \quad V = -1, \quad z > z_0$$

составляющих в совокупности ломаную L , и затем опять уходит в пространство между плоскостями.

Уравнения (2.1) не определяют, однако, разбиения на траектории для плоскостей $z = \pm z_0$. В силу разрывности характеристики сервомотора (IIIб) фазовое пространство претерпевает разрыв на плоскостях $z = \pm z_0$ и дальнейшее поведение изображающей точки, попавшей на отрезок $U = -\frac{1}{2}$, $z = z_0$, $-1 < V < 0$, поэтому не определено. Естественно попытаться доопределить разбиение плоскостей $z = \pm z_0$, рассматривая характеристику сервомотора как предельную при $z_1 \rightarrow z_0$ для характеристики

$$\dot{\mu} = F(z) = -F(-z) = \begin{cases} \frac{1}{T_s} & \text{для } z \geq z_1 \\ \frac{1}{T_s} \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} & \text{для } z_0 \leq z \leq z_1 \\ 0 & \text{для } |z| < z_0 \end{cases} \quad (\text{IIIв})$$

и, следовательно, разбиение фазового пространства рассматриваемой задачи как предельное для разбиения, соответствующего характеристике (IIIв).

Второе из уравнений (IIIв) порождает дополнительные к системе (2.1) уравнения:

$$\text{при } z_0 \leq z \leq z_1 \text{ и } |U| < \frac{1}{2}$$

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{V} = -BV + A \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad \dot{U} = V + \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\text{при } z_0 \leq z \leq z_1 \text{ и } V > -\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad U = \frac{1}{2} \text{ или } V < -\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad U = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{z} = -V - \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad \dot{V} = -BV + A \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \quad \dot{U} = 0$$

(а также аналогичные уравнения для $-z_1 \leq z \leq -z_0$), которые совмест-

но с уравнениями (2.2), (2.3) и (2.4)¹ определяют разбиение фазового пространства, соответствующего характеристике (IIIв). Изучение структуры разбиения фазового пространства, порождаемого характеристикой (IIIв), сводится, как нетрудно показать, к изучению точечного преобразования в себя ломаной L (или симметричной ей L'):

при $z_0 \leq z \leq z_1$

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = -\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

при $z \geq z_1$

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = -1$$

Предельный переход при $z_1 \rightarrow z_0$ и при $(z-z_0)/(z_1-z_0) = \text{const}$ для каждой траектории, попадающей в зону $z_0 \leq |z| \leq z_1$, дает кусок траектории, принадлежащей плоскостям $z = \pm z_0$. Для всей совокупности траекторий зоны $z_0 \leq |z| \leq z_1$ такие куски многократно покрывают плоскость $z = \pm z_0$ и не определяют единственного и однозначного разбиения на траектории плоскостей $z = \pm z_0$. Однако, хотя и оказывается невозможным при сохранении характеристики (IIIб) так доопределить разбиение плоскостей $z = \pm z_0$, чтобы через каждую точку проходила только одна траектория и чтобы разбиение было предельным для системы с характеристикой (IIIв), нетрудно провести доопределение так, чтобы точечное преобразование в себя ломаной L :

$$U = -\frac{1}{2}, \quad z = z_0, \quad -1 \leq V \leq 0; \quad U = -\frac{1}{2}, \quad V = -1, \quad z \geq z_0$$

(или симметричный ей L') было предельным для точечного преобразования ломаной L в системе с характеристикой (IIIв). Для такого доопределения² достаточно проделать предельный переход только для тех траекторий, которые проходят через кусок ломаной L :

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = -\frac{z-z_0}{z_1-z_0}, \quad z_0 \leq z \leq z_1$$

Рассмотрим точечное преобразование отрезка $z = z_0$, $U = -\frac{1}{2}$, $-1 < V < 0$ в отрезок на полупрямой $z = z_0$, $U = \frac{1}{2}$, $V \geq 0$, осуществляемое движением изображающей точки по кускам траекторий в зоне $z_0 \leq z \leq z_1$. Это преобразование состоит из трех частей:

1) перехода по кускам траекторий в полуплоскости H от точки $z = z_0$, $V = -v$ ($0 < v < 1$) до отрезка $V = -(z-z_0)/(z_1-z_0)$ ломаной L (преобразование e);

2) перехода по кускам траекторий в плоскости $z = z' = \text{const}$ ($z_0 < z' < z_1$) от полуплоскости H до полуплоскости H' (преобразование S_0^+);

¹ В правых частях уравнений (2.2), (2.3) и (2.4) следует тогда заменить в первой и третьей строчках z_0 через z_1 .

² Это не будет доопределением в обычном смысле даже и для куска плоскости $z = z_0$, так как эти траектории будут пересекаться.

3) перехода по кускам траекторий в полуплоскости H' до точки $z = z_0$, $V = u$ (преобразование e'). Предельный переход при $z_1 \rightarrow z_0$ и $(z' - z_0)/(z_1 - z_0) = \text{const}$ дает для преобразования e тождественное преобразование, а для преобразования e' либо тождественное (если изображающая точка по преобразованию S_0^+ попадает на полуплоскость H' при $V \geq 0$), либо переход на край полосы покоя в точку $z = z_0$, $U = \frac{1}{2}$, $V = 0$ (если изображающая точка по преобразованию S_0^+ попадает на полуплоскость H' при $V < 0$).

Для преобразования S_0^+ предельный переход дает выражения

$$v = \frac{B^2}{A + B} \frac{1}{e^{-B\tau} + B\tau - 1}, \quad u = v[(A + B)\tau - 1] - B \quad (2.5)$$

где $\tau (\tau_0 \leq \tau \leq \infty)$ — время движения по траекториям в плоскости $z = z_0$ между плоскостями $U = \pm \frac{1}{2}$, а τ_0 определяется из уравнения $v(\tau_0) = 1$.

Назовем преобразованием S^+ переход точек ломаной L на полуплоскость H' (по кускам траекторий в плоскостях $z = \text{const}$ для $z > z_0$ или в соответствии с доопределением для $z = z_0$), а преобразованием E^+ — переход точек полуплоскости H' по кускам траекторий в полуплоскости на ломаную L' . В силу симметрии фазового пространства задача опять сводится к изучению структуры преобразования ломаной L при повторении преобразования $T = S^+E^+$, где черта означает переход после выполнения преобразования S^+E^+ в симметричную точку.

3°. Изучение преобразования $T = S^+E^+$. Для преобразования T на отрезках L_1 и L_2 будем пользоваться соответственно обозначениями T_1 и T_2 . Преобразование $T_1 = \overline{S_1^+E_1^+}$ на отрезке L_1 :

$$U = -\frac{1}{2}, \quad z = z_0, \quad -1 < V < 0$$

имеет простую аналитическую структуру.

Преобразование S_1^+ определяется здесь предельным переходом для преобразования eS_0^+e' и дается выражениями (2.5) для всех тех значений v из интервала $0 < v < 1$, для которых формулы (2.5) дают $u \geq 0$. Остальным значениям v из интервала $0 < v < 1$ (если такие существуют) приводится в соответствие $u = 0$.

Преобразование E_1^+ соответствует движению по кускам траекторий (прямолинейным) в полосе $|z| < z_0$ полуплоскости H' . Обозначив через (z_0, u) и $(-z_0, v')$ координаты исходной и преобразованной точек, находим из (2.3) для преобразования E_1^+ такое выражение:

$$u = v' + 2Bz_0 \quad (2.6)^1$$

Преобразование $T_1 = \overline{S_1^+E_1^+}$ в соответствии с предельным переходом для преобразования eS_0^+e' дается в параметрическом виде $v = v(\tau)$,

¹ Здесь $v' \geq 0$. Если (2.6) дает для v' отрицательное значение, то это значит, что изображающая точка при движении по траекториям разбиения полосы $|z| < z_0$ на полуплоскости H' идет к краю полосы покоя.

$v' = v'(\tau)$ (где v и v' — координаты на отрезке L_1) уравнениями (2.5) и (2.6) для всех тех значений v из интервала $0 \leq v \leq 1$, для которых $v' \geq 0$. Для тех же значений v , которым по формулам (2.5) и (2.6) соответствует $v' < 0$, преобразование T_1 означает переход в точку $U = -\frac{1}{2}$, $z = z_0$, $v' = 0$.

Будем рассматривать (2.5) и (2.6) как кривую в плоскости v, v' (диаграмма Ламерея).

Неподвижные точки преобразования T_1 на отрезке L_1 будут соответствовать точкам пересечения рассматриваемой кривой (кривой γ_1) с отрезком прямой $v = v' (0 < v < 1)$. Для кривой γ_1 :

$$\frac{d^2 v'}{dv^2} = -\frac{(A+B)^2}{B^4} \frac{(e^{-B\tau} + B\tau - 1)^3}{(1 - e^{-B\tau})^3} e^{-B\tau} < 0$$

и поэтому не может быть более двух точек пересечения. Исключая τ из условий $v' = v$ и $dv'/dv = 1$, приходим к уравнению:

$$2z_0 = (1 + 2z_0) \exp \left\{ -\frac{A-B}{2(A+B)z_0} \right\} \quad (2.7)$$

выделяющему в пространстве параметров A, B, z_0 линейчатую поверхность, для точек которой имеет место касание кривой γ_1 с прямой $v = v'$ на диаграмме Ламерея.

Эта поверхность отделяет область, где γ_1 не пересекает прямую $v = v'$, от области, где точки пересечения существуют. Касание всегда происходит на отрезке $0 < v < 1$ (в этом нетрудно убедиться; условия $v' = v = 1$ и $dv'/dv = 1$ могут выполняться только для $B = \infty$); поэтому вблизи поверхности (2.7) обе точки пересечения лежат на куске $0 < v < 1$.

Пусть P_1 — первая, а P_2 — вторая (считая от $v = 0$) точки на отрезке L_1 ($U = -\frac{1}{2}$, $z = z_0$, $-1 < v < 0$), соответствующие (в том же порядке) точкам пересечения кривой γ_1 с прямой $v = v'$. P_1 и P_2 будут неподвижными точками преобразования T_1 .

Поведение изображающей точки при повторении преобразования T_1 наглядно представляется на диаграмме Ламерея поведением «ломаных итераций». Возможны два типа итерации в зависимости от значения dv'/dv в точке P_2 (в точке P_1 всегда $dv'/dv > 1$):

1) $B \geq 0$, тогда $0 \leq (dv'/dv)_{P_2} < 1$. Ломаная итерации имеет вид лестницы (фиг. 2).

Замечание. Максимум кривой γ_1 лежит на прямой $v = v'$, только если $B = 0$. Для $B > 0$ и $z_0 \geq 0$ максимум лежит между прямыми $v' = v$ и $v' = 0$. В самом деле, из (2.5) и (2.6) следует, что при $B > 0$ кривая γ_1 с возрастанием z_0 сдвигается «вниз» к оси $v' = 0$, а требование $dv'/dv = 0$, $v' = v$ приводит при $z_0 = 0$ к условию

$$\frac{A+B}{A-B} = \exp \frac{2AB}{A^2 - B^2}$$

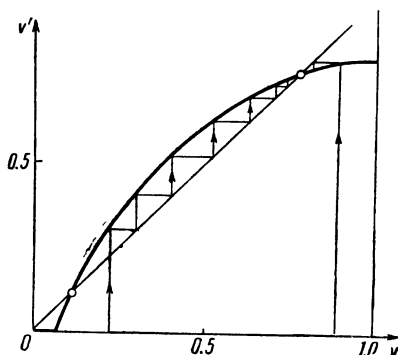
эквивалентному $B = 0$.

2) $B < 0$, тогда $-1 < (dv'/dv)_P < 0$. Ломаная итерации в окрестности точки P_2 имеет вид спирали, сжимающейся к точке P_2 (фиг. 3)¹. В обоих случаях точка P_1 неустойчива, а P_2 — устойчива по отношению к преобразованию T_1 .

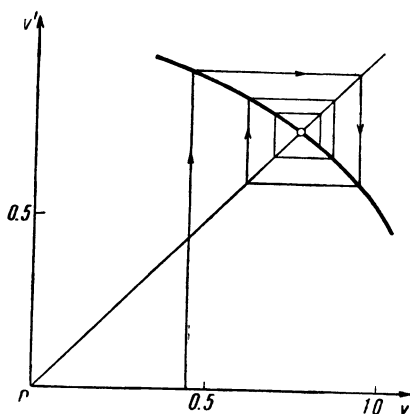
Точка P_2 попадает на конец отрезка L_1 (в точку $U = -\frac{1}{2}$, $z = z_0$; $V = -1$), если $v' = v = 1$. Полагая в (2.5) и (2.6) $v = v' = 1$ и исключая τ , приходим к уравнению

$$A - B - 2B^2 z_0 = (A + B) \exp \left\{ -\frac{2B + B^2(1 + 2z_0)}{A + B} \right\} \quad (2.8)$$

С одной стороны поверхности (2.8) (когда на отрезке L_1 либо две точки пересечения, либо две слившиеся, либо ни одной) преобразование



Фиг. 2



Фиг. 3

T_1 может быть неограниченно повторено. Изображающая точка при повторении преобразования идет либо к устойчивой неподвижной точке P_2 , либо на край полосы покоя.

С другой стороны поверхности (2.8) (когда на отрезке L_1 — одна точка пересечения либо ни одной) изображающая точка при повторении преобразования T_1 либо идет к краю полосы покоя, либо выходит за пределы куска L_1 . Последнее соответствует переходу изображающей точки при движении по траекториям на полупрямую L_2 :

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = -1, \quad z > z_0$$

Изучение поведения точек полупрямой L_2 при повторении преобразования $T_2 = \overline{S_2^+ E_2^+}$ опять удобно провести, рассматривая взаиморасположение кривых γ и Γ на полуплоскости H' .

Кривая γ . Решение системы (2.2) для $z > z_0$ будет

$$V = ce^{-Bt} + \frac{A}{B}, \quad U = -\frac{c}{B} e^{-Bt} + \frac{A+B}{B} t + c_1 \quad (2.9)$$

¹ Нетрудно убедиться, что для всех точек кривой γ_1 всегда выполняется условие $dv'/dv > -1$ и поэтому вокруг точки P_2 не могут существовать предельные квадраты, составленные из звеньев ломаной итерации.

Полагая (2.10)

$$U = -\frac{1}{2}, \quad V = -1 \quad \text{при } t = 0; \quad U = \frac{1}{2}, \quad V = V_0 \quad \text{при } t = \tau$$

получаем из (2.9) и (2.10) уравнение кривой γ

$$\frac{A+B}{A-BV_0} = \exp \left\{ \frac{B(1+B+V_0)}{A+B} \right\} \quad (2.11)$$

Кривая γ , таким образом, представляет собой полупрямую $V_0 = \text{const}$, $z > z_0$ на плоскости $U = \frac{1}{2}$.

Кривая Γ . Решение системы (2.3) будет

$$V = ce^{-Bt} + \frac{A}{B}, \quad z = \frac{c}{B} e^{-Bt} - \frac{A+B}{B} t + c_1 \quad \text{для } z > z_0 \quad (2.12a)$$

$$V = c' e^{-Bt'}, \quad z = \frac{c'}{B} e^{-Bt'} + c_1' \quad \text{для } |z| < z_0 \quad (2.12б)$$

$$V = c'' e^{-Bt''} - \frac{A}{B}, \quad z = \frac{c''}{B} e^{-Bt''} + \frac{A+B}{B} t'' + c_1'' \quad \text{для } z < -z_0 \quad (2.12в)$$

Полагая

$$V = V_0, \quad z = \zeta_0 \quad \text{при } t = 0; \quad V = u, \quad z = z_0 \quad \text{при } t = \tau \quad (2.13a)$$

$$V = u, \quad z = z_0 \quad \text{при } t' = 0; \quad V = v, \quad z = -z_0 \quad \text{при } t' = \tau' \quad (2.13б)$$

$$V = v, \quad z = -z_0 \quad \text{при } t'' = 0; \quad V = 1, \quad z = -\zeta_0 \quad \text{при } t'' = \tau'' \quad (2.13в)$$

из (2.12a) и (2.13a), (2.12б) и (2.13б), (2.12в) и (2.13в) получаем соответственно:

$$\zeta_0 - z_0 = \frac{V_0 - u}{B} + \frac{A+B}{B^2} \ln \frac{BV_0 - A}{Bu - A} \quad (2.14a)$$

$$u = v + 2Bz_0 \quad (2.14б)$$

$$\zeta_0 - z_0 = \frac{v - 1}{B} - \frac{A+B}{B^2} \ln \frac{Bv + A}{A+B} \quad (2.14в)$$

Уравнения (2.14) дают в совокупности уравнения кривой Γ . Из уравнений (2.14) находим для кривой Γ :

$$\frac{dV_0}{d\zeta_0} = \frac{2[Buv + B(A-B)z_0 + A](BV_0 - A)}{(V_0 + 1)(v - 1)(Bu - A)} \quad (2.15)$$

Так как

$$\frac{BV_0 - A}{Bu - A} = \exp \{ \dots \} > 0, \quad (V_0 + 1)(v - 1) > 0$$

то знак $dV_0/d\zeta_0$ совпадает со знаком квадратной скобки.

Если $B > 0$, то выражение в квадратных скобках положительно (так как $u = v + 2Bz_0$ и $v > 1$), следовательно, $dV_0/d\zeta_0 > 0$ и кривая Γ с полупрямой γ для положительных B может иметь не более одной точки пересечения.

Если $B < 0$, то для больших ζ_0 (для больших u и v) выражение в квадратных скобках становится отрицательным, следовательно,

$dV_0/d\zeta_0 < 0$ и кривая Γ с полупрямой γ может иметь две точки пересечения (но не более двух, так как выражение в квадратных скобках с возрастанием ζ_0 изменяется монотонно¹). Полагая в (2.14) $\zeta_0 = z_0$ и исключая из (2.14) и (2.11) параметры v , u и V_0 , опять приходим к уравнению (2.8). При выполнении условия (2.8) точка пересечения кривых Γ и γ (одна из точек пересечения, если $B < 0$) лежит на прямой $z = z_0$ (на конце кривой Γ). При переходе в пространстве параметров через поверхность (2.8) неподвижная точка P_2 переходит с отрезка L_1

$$(z = z_0, U = -\frac{1}{2}, -1 \leq V < 0)$$

на полупрямую L_2

$$(U = -\frac{1}{2}, V = -1, z > z_0)$$

или наоборот.

Структура разбиения фазового пространства на траектории. *Рассмотрение отдельных случаев. Пространство параметров.* Так как для системы с характеристикой (IIIб) нельзя в обычном смысле доопределить разбиение на траектории плоскостей $z = \pm z_0$, то нельзя говорить и о разбиении на траектории фазового пространства в целом. Проведенное в 2° доопределение устанавливает только закон, по которому изображающая точка в плоскостях $z = \pm z_0$ переходит с края одной полуплоскости на другую и который позволяет неограниченно проследживать во времени движение любой изображающей точки, взятой вне плоскостей $z = \pm z_0$. Задача доопределяется, следовательно, так, чтобы для системы с характеристикой (IIIб) можно было говорить о преобразовании в себя ломаной $L_1 + L_2$ и чтобы структура этого разбиения была предельной для структуры разбиения ломаной $L_1' + L_2'$ в системе с характеристикой (IIIв), исследование которой сводится к преобразованию в себя ломаной $L_1' + L_2'$.

Замкнутые контуры, составленные из траекторий, соответствующие неподвижным точкам преобразования T_1 на отрезке L_1 , не представляют собой обычных предельных циклов, так как принадлежащие им куски траекторий, расположенные в плоскостях $z_0 = \pm z_0$, пересекаются. Эти замкнутые контуры получаются, однако, предельным переходом из обычных устойчивого и неустойчивого предельных циклов системы с характеристикой (IIIв). Именно в этом смысле можно говорить о предельных циклах, соответствующих неподвижным точкам на отрезке L_1 .

Переходим к рассмотрению отдельных случаев.

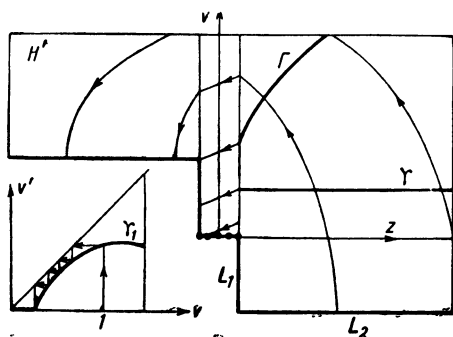
1. *Случай $B > 0$.* Структура преобразования в себя ломаной $L_1 + L_2$, или, что одно и то же, структура разбиения (в указанном выше смысле) фазового пространства на траектории, определяется взаиморасположением кривых Γ и γ на полуплоскости H' и поведением кривой γ_1 на соответ-

¹ Из (2.14б) и (2.14в) следует, что u и v — монотонные функции ζ_0 .

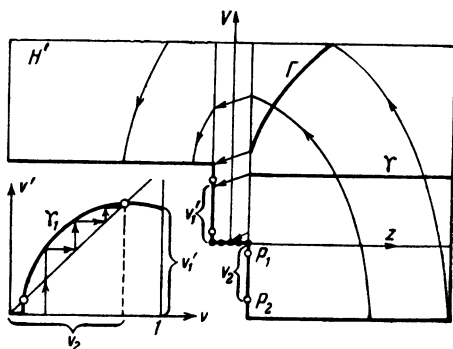
ствующей диаграмме Ламерея для отрезка L_1 . На фиг. 4, 5 и 6 изображено разбиение на траектории полуплоскости H' и различные возможные случаи взаиморасположения кривых Γ и γ , а также соответствующие диаграммы Ламерея. Возможны следующие случаи.

а) Кривая γ_1 на диаграмме Ламерея не пересекается с отрезком $v' = v (v < 1)$ (тогда и кривые Γ и γ не пересекаются). Изображающая точка из любой части пространства идет к полосе покоя. Имеется абсолютная устойчивость (фиг. 4).

б) Кривая γ_1 на диаграмме Ламерея имеет с отрезком $v' = v (v < 1)$ две общие точки (и тогда Γ и γ не пересекаются, фиг. 5), или кривая



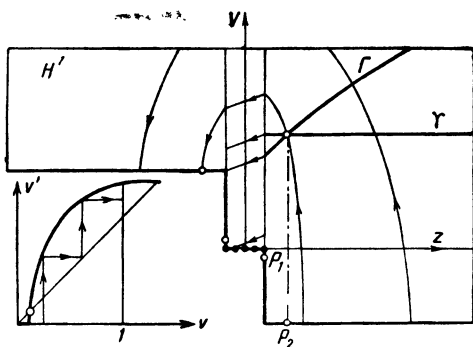
Фиг. 4



Фиг. 5

γ_1 имеет с отрезком $v' = v (v < 1)$ одну общую точку (и тогда Γ и γ также пересекаются в одной точке, фиг. 6). Точки пересечения кривой γ_1 с отрезком, а также точки пересечения кривых Γ и γ соответствуют неподвижным точкам преобразования T на ломаной $L_1 + L_2$. Пусть

P_1 — первая неподвижная точка на ломаной $L_1 + L_2$ (считая от отрезка покоя), P_2 — вторая. Тогда в указанном выше смысле через P_1 проходит неустойчивый, а через P_2 — устойчивый предельный цикл. Полоса покоя устойчива. Изображающая точка может либо идти к полосе покоя, либо накручиваться на предельный цикл. Имеются автоколебания (жесткий режим).



Фиг. 6

Промежуточным между «а» и «б» случаем будет случай касания кривой γ_1 на диаграмме Ламерея с отрезком $v' = v (0 < v < 1)$. Условия касания (2.7) разделяют в пространстве параметров случаи «а» и «б». Поверхность (2.8) отделяет в пространстве параметров случаи, изображенные на фиг. 5 и 6.

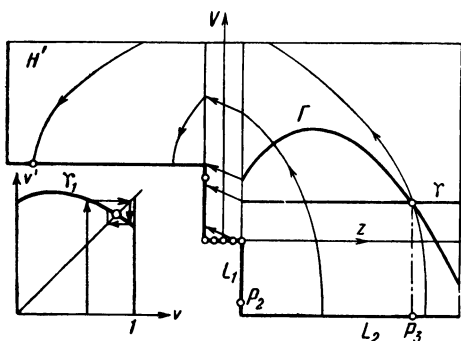
2. *Случай* $B = 0$. Уравнения (2.5), (2.6), (2.8), (2.11), (2.14) и (2.15) при $B \rightarrow 0$ вырождаются соответственно в уравнения:

$$v = \frac{2}{A\tau^2}, \quad u = v(A\tau - 1), \quad u = v'$$

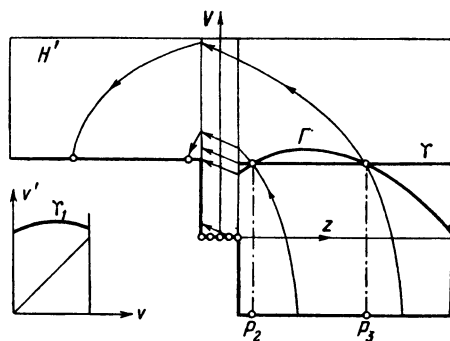
$$A = 2, \quad V_0 = \sqrt{2A} - 1$$

$$\zeta_0 - z_0 = \frac{A}{2} \left(\frac{v-1}{A} \right)^2 = \frac{(v+1)(v-V_0)}{A} - \frac{A}{2} \left(\frac{v-V_0}{A} \right)^2, \quad \frac{dV_0}{d\zeta} = \frac{2A}{(V+1)(v-1)}$$

Кривая γ_1 на диаграмме Ламерея при $B = 0$ проходит через начало координат и вблизи начала лежит «выше» прямой $v' = v$ (считая, что v' направлено кверху), поэтому полоса покоя неустойчива. Есть две возможности: либо кривая γ_1 имеет с отрезком $v' = v$ ($0 < v < 1$) одну точку пересечения и тогда в конечной части плоскости Γ и γ не пересекаются (случай $A < 2$), либо γ_1 не имеет с отрезком общих точек и тогда в конечной части плоскости существует единственная точка пересечения Γ и γ (случай $A > 2$). В обоих случаях точке пересечения соответствует на ломаной $L_1 + L_2$ неподвижная точка преобразования T .



Фиг. 7



Фиг. 8

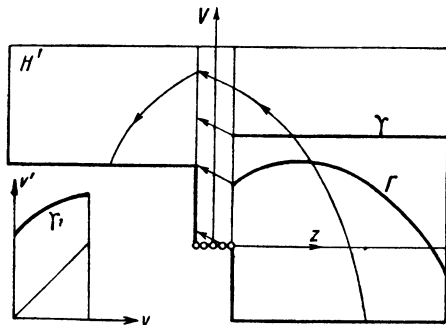
Эта неподвижная точка устойчива и соответствует точке P_2 в рассмотренном выше случае $B > 0$ (неустойчивая точка P_1 при предельном переходе от $B > 0$ к $B = 0$ переходит на край полосы покоя).

Изображающая точка из любой части фазового пространства идет к устойчивому предельному циклу. Имеются автоколебания (мягкий режим).

3. *Случай* $B < 0$. Здесь возможны такие случаи.

а) Кривая γ_1 на диаграмме Ламерея пересекается с отрезком $v' = v$ ($v < 1$) в одной точке, и также кривые Γ и γ пересекаются в одной точке (фиг. 7), или γ_1 с отрезком не пересекается, а Γ и γ пересекаются в двух точках (фиг. 8). В обоих случаях точкам пересечения соответствуют на ломаной $L_1 + L_2$ неподвижные точки преобразования T : устойчивая точка P_2 (первая, считая от полосы покоя) и неустойчивая

точка P_3 (появляющаяся при изменении знака B из бесконечности) Через P_2 и P_3 проходят в фазовом пространстве соответственно устойчивый и неустойчивый предельные циклы. Полоса покоя неустойчива. Бесконечность устойчива. Изображающая точка может либо идти к устойчивому предельному циклу, либо уходить в бесконечность. Имеются автоколебания (мягкий режим).



Фиг. 9

б) Кривая γ_1 на диаграмме Ламерея не пересекается с отрезком $v' = v (v < 1)$, и кривые Γ и γ также не пересекаются (фиг. 9). Изображающая точка из любой части пространства уходит в бесконечность. Имеется абсолютная неустойчивость.

Промежуточным между случаями «а» и «б» будет случай касания на полуплоскости H' кривых Γ и γ .

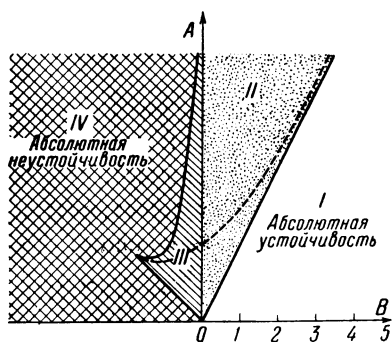
Нетрудно найти аналитические условия касания кривых Γ и γ : исключая из уравнений (2.11) и (2.14) переменные ζ_0 и V_0 и параметр z_0 , приходим к уравнению

$$\frac{A + Br}{A - Bu} = \exp \left\{ \frac{B(u + v + B)}{A + B} \right\} \quad (2.16)$$

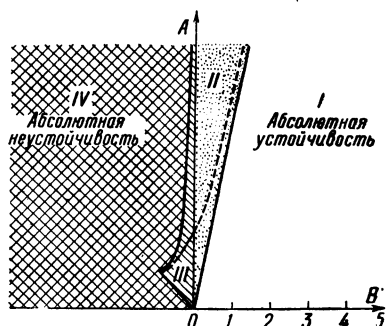
а условие $\frac{dV_0}{d\theta_0} = 0$ даст

$$Buv + B(A - B)z_0 + A = 0 \quad (2.17)$$

Уравнения (2.16), (2.17) и (2.14б) определяют в пространстве параметров A, B, z_0 поверхность, для точек которой имеет место касание



Фиг. 10



Фиг. 11

кривых Γ и γ . Эта поверхность разделяет в пространстве параметров случаи «а» и «б». Поверхность (2.8) отделяет в пространстве параметров случаи, изображенные на фиг. 7 и 8.

Все сказанное выше относилось к случаю $A + B > 0$. Случай $A + B < 0$ не нуждается в подробном исследовании. Здесь задача не приводится к изучению точечных преобразований, так как изображающая точка по траекториям разбиения полуплоскостей H и H' уходит в бесконечность. Всегда имеет место абсолютная неустойчивость.

На фиг. 10 и фиг. 11 изображены сечения пространства параметров плоскостями $z_0 = 0.1$ и $z_0 = 0.5$.

Области II и III соответствуют автоколебаниям: область II — жесткий режим, область III — мягкий режим. Пунктиром изображена кривая, построенная по уравнению (2.8).

Поступило 15 IV 1955

Горький

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андронов А. А., Бутин Н. Н. и Горелик Г. С. Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе. Автоматика и телемеханика, т. 7, № 1, 1946.

III

СТАТЬИ ПО ИСТОРИИ НАУКИ

Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ И ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ¹

1. Предварительные замечания

Общепризнано как у нас в СССР, так и за границей, что деятельность Л. И. Мандельштама оказала фундаментальное влияние на создание и развитие теории нелинейных колебаний, хотя вещи, связанные с нелинейной теорией, — это лишь одна, и при этом, повидимому, не главная, сторона его научного творчества. Научные результаты, полученные им в этой области (большой частью совместно с Н. Д. Папалекси), научные результаты его учеников и учеников его учеников составляют значительную часть научных достижений, которые вообще здесь имеются. Если не ограничиваться только теми работами, где главным моментом являются нелинейные вещи, а учитывать и те работы, где нелинейные вещи являются существенным, но не основным моментом, то наиболее широко известными выдающимися научными достижениями Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси в рассматриваемой области являются: 1) теория параметрической машины и фактическое создание параметрической машины; 2) открытие резонанса второго рода и создание приемного устройства, основанного на резонансе второго рода; 3) изобретение радиоинтерферометрии и создание новой технической дисциплины — радиогодезии. Однако, может быть, не меньшее значение, чем эти конкретные результаты, имеет тот новый подход к исследованию нелинейных систем, который Л. И. Мандельштам вызвал к жизни. Новые понятия, новые расчетные методы, новая терминология, выработанные как им самим, так и при его участии, уже сегодня завоевали себе обширную область применения. Несомненно, что завтра эта область будет еще больше и весьма существенно больше.

За последние годы начал происходить процесс, если можно так выразиться, известного перебазирования теории нелинейных колебаний. Возмужавшая на материале радиотехники, она в настоящее время наряду с непрерывно расширяющейся в связи с новыми типами генераторных и приемных устройств областью применения внутри радиотехники, получила другую, может быть, не менее обширную область систематического применения — теорию автоматического регулирования. И есть серьезные основания ожидать, что помощь, которую теория нелинейных колебаний оказывает теории автоматического регулирования, и те существенные,

¹ Опубликовано в Известиях АН СССР, серия физическая, т. IX, № 1—2, 1945.

но спорадические услуги, которые она оказывает теории электрических машин, динамике полета, теории часов и т. д., приведут в конечном счете к созданию новой научной дисциплины, название которой я не хочу предвосхищать, но которая будет классифицировать машины и механизмы так, как это делает теория колебаний, — по структуре соответствующего фазового пространства, а не по тому, будет ли машина работать сжатым воздухом или электричеством и будет ли механизм твердозвонный, упругозвонный или электрический.

Особо следует упомянуть о расширяющемся применении теории нелинейных колебаний к распределенным системам, начиная от радиотехнических кलिстронов и кончая разнообразными аэрогидродинамическими автоколебаниями.

Поэтому подробный анализ научной деятельности Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний, связь этой деятельности с деятельностью в этой области его предшественников и современников, несомненно, представляет высокий интерес.

Однако мне кажется, что сейчас, когда не прошло еще месяца со дня смерти нашего милого Леонида Исааковича, когда очень мало из того, что им сделано в последнее время, опубликовано и его бумаги еще не разобраны, еще нет возможности такой анализ провести сколько-нибудь добросовестным образом. Я не забываю, конечно, и о том, что — само собой разумеется — настоящая оценка деятельности такого крупнейшего ученого, каким являлся Л. И. Мандельштам, требует определенной перспективы, определенного расстояния во времени.

В анализе научной деятельности Л. И. Мандельштама имеется и такая трудность: как разделить Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси в области теории нелинейных колебаний? Их деятельность была тесно переплетена в течение длинного ряда лет; большинство работ в этой области опубликовано Л. И. Мандельштамом совместно с Н. Д. Папалекси; наконец, в ряде вопросов, например в вещах, связанных с параметрическими машинами, с резонансом второго рода, с теорией асинхронного возбуждения, с радиогодезией, Л. И. Мандельштам всегда особенно подчеркивал роль Н. Д. Папалекси.

Я думаю, что присутствующие и в первую очередь сам Николай Дмитриевич меня простят, если я сегодня на заседании, посвященном памяти Л. И. Мандельштама, буду просто говорить о руководящих идеях Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний.

Проведение предварительного, чернового анализа деятельности Л. И. Мандельштама мне до известной степени облегчил он сам. 21 ноября 1944 г. я советовался с ним, как построить доклад по теории нелинейных колебаний на научной конференции МГУ, считаясь с содержанием приглашения, требовавшего «осветить роль университетского коллектива в развитии теории колебаний в Советском Союзе». Он мне сказал примерно следующее: «Расскажите, как было дело, как фактически возникали наши работы, как мы раньше работали в МГУ. Расскажите, по возможности

без выкладок, без детального исследования вопросов приоритета, так, чтобы это было понятно широкой аудитории, студентам». И после перечисления, на что именно обратить внимание, добавил: «Расскажите вкратце и о том, что сейчас делается, пусть будет видно, что и сейчас в этой области мы не сидим, сложа руки».

Я сегодня смогу последовать советам Л. И. Мандельштама только в той мере, которая соответствует изменившимся целям моего доклада. Но я все же попытаюсь показать на примере некоторых работ, историю которых я близко знаю, как Л. И. Мандельштам руководил широким фронтом исследований по теории нелинейных колебаний, как он ставил задачи, как толкал и направлял своих учеников и сотрудников на их разрешение.

Я попытаюсь также беглыми штрихами рассказать здесь о том, каким своеобразным и особенным ученым был Л. И. Мандельштам, как он понимал теорию колебаний — линейную и нелинейную, — и попробую дать представление о некоторых руководящих идеях его творчества в этой области.

Мне кажется, что знакомство с этими руководящими идеями даже в моем огрубленном, схематическом и субъективном изложении все же представляет значительный интерес для физиков, для математиков, интересующихся прикладными вопросами, и отчасти для инженеров.

II. Л. И. Мандельштам как тип ученого

Обычные термины мало помогут в характеристике Л. И. Мандельштама.

Действительно, как это уже многие и в разных выражениях подчеркивали, в наше время резкого деления физиков на теоретиков и экспериментаторов, на «чистых» физиков и «технических» физиков, Л. И. Мандельштам одновременно и теоретик и экспериментатор, и «чистый» физик и «технический» физик.

Если пользоваться известной терминологией В. Оствальда, Л. И. Мандельштам одновременно и классик — по образцовой ясности и законченности опубликованных им работ, по строгости и точности рассуждений, и романтик — по стремлению делиться своими идеями и догадками, по своей любви к преподаванию, по силе своего живого слова, способного вызвать напряженное внимание и радостное возбуждение аудитории.

Я постараюсь перечислить ряд наиболее характерных черт, не претендуя на полноту и законченность.

Понимание нового на основе исключительного знания старого

Эту черту я отношу прежде всего к теории нелинейных колебаний, одним из создателей которой является сам Л. И. Мандельштам и которая по отношению к классической линейной теории колебаний является

новой теорией. Но эта же черта относится и к другим сторонам научной деятельности Л. И. Мандельштама, в частности к его деятельности в области квантовой теории. Чтобы пояснить, что я здесь имею в виду, я приведу одно высказывание П. С. Эренфеста, сделанное им во время съезда физиков в 1924 г. Эренфеста спросили, чем отличаются А. Эйнштейн и Н. Бор от других физиков и какие свойства их ума и характера определяют те блестящие научные достижения, которые связаны с их именами. И. Эренфест ответил — я недавно просмотрел старую запись, — что хотя Эйнштейн и Бор обладают резко различной индивидуальностью, но у них есть ряд общих черт, отличающих их, как он выразился, от «обыкновенных» физиков. Я приведу сейчас только первую из перечисленных им черт. «И Эйнштейн, и Бор исключительно хорошо знают классическую физику, они, так сказать, пропитаны классическим знанием. Они знают, они любят, они чувствуют классику так, как не может этого делать обыкновенный физик. Меньше всего они готовы признать новое только потому, что это — новое. Скорее их можно назвать консерваторами — с такой бережностью они относятся к классическим объяснениям, к каждому кирпичику здания классической физики. Но для них новые вещи являются необходимостью потому, что они хорошо знают старое и отчетливо видят невозможность старого, классического объяснения».

Я думаю, что эти слова — целиком, ничего в них не меняя, — следует отнести к Л. И. Мандельштаму и уже этим выделить его из категории «обыкновенных» физиков. Ими можно охарактеризовать его отношение и к квантовой теории, и к теории нелинейных колебаний. Я буду говорить только о последней. Он удивительным образом знал, любил и чувствовал классическую линейную теорию колебаний, которой он столь виртуозно пользовался. Но будет правильно сказать о Л. И. Мандельштаме и классической теории линейных колебаний и нечто совсем другое. Никто отчетливее и острее Л. И. Мандельштама не понимал, что ее большие возможности являются все же ограниченными и что громаднейший круг важнейших физических и технических вопросов требует создания нелинейной теории.

*Настороженное и последовательное внимание
к вопросам теории познания*

Л. И. Мандельштам интересовался, как возникают, развиваются и трансформируются физические понятия, как они связаны с объективной реальностью, какова область их эффективного применения. Из его лекций и высказываний ясно, что он глубоко исследовал логическую структуру физических теорий; механики, термодинамики, физической статистики, теории относительности, в последнее время — квантовой механики.

С этой же его чертой связано то внимание к вопросам идеализации, к вопросам связи реальных вещей и процессов с изучаемыми нами математическими моделями, о котором — в разрезе теории колебаний — я еще буду говорить отдельно. Сюда же примыкает его постоянный на протя-

жении ряда лет интерес к анализу и обоснованию теоретико-вероятностных схем, описывающих физические закономерности, и к связи этих схем с объективной реальностью и с динамическими схемами. Этой же и, может быть, первой чертой его научного облика обуславливается тот интерес к процессу взаимодействия старых и новых понятий, который он усматривал в любой развивающейся физической теории, в частности в теории нелинейных колебаний, и который он не только изучал, но, я бы сказал, старался направить и использовать. Здесь же лежат, как мне кажется, главные корни его интереса к истории науки, особенное внимание которой он уделил в последние годы.

Исключительная разносторонность

Л. И. Мандельштам напечатал (вместе с И. Е. Таммом) работу по кристаллооптике теории относительности в «*Mathematische Annalen*», и он же является автором или соавтором около 60 радиопатентов. От обсуждения работы Каратеодори по аксиоматике термодинамики он непринужденно переходил к высказыванию своих соображений о том, почему именно до-галилеевы часы (без маятника, с так называемым балансом) хуже часов Галилея — Гюйгенса (с маятником).

С каждым из своих учеников или сотрудников он имел свой, особый разговор. Этот разговор был специфичен, он отвечал научным интересам ученика или сотрудника. А учеников и сотрудников и вообще лиц, с которыми он беседовал по вопросам физики, было немало, и их научные интересы были весьма разнообразны. В громадном здании физической науки для него не было запертых комнат.

Мне кажется существенным здесь подчеркнуть две вещи.

Во-первых, Л. И. Мандельштам ощущал все точное естествознание, включая математику и технику, как единое развивающееся целое и не только подчеркивал взаимное влияние математики и физики, физики и техники и т. д., но хотел каждую новую вещь, будь то квантовая механика или теория нелинейных колебаний, понять и усвоить прочно, как необходимую составную часть всей физики, всего точного естествознания.

И, во-вторых, что несравненная способность к далеко идущим сопоставлениям сочеталась у Л. И. Мандельштама с большой силой и остротой при конкретном исследовании, с умением преодолевать или обходить экспериментальные или вычислительные трудности.

Особая «мандельштамовская» ясность

Январь, февраль 1930 г. Идет дискуссия в «*Nature*» о том, прав ли Флеминг, заявивший, что боковые полосы при радиопередаче являются не физической реальностью, а математической фикцией. В общем, в результате десятка писем Флеминга, его полуоппонентов и оппонентов истина более или менее выясняется, во всяком случае видно, что Флеминг

неправ. Но вот (март 1930 г.) об этой дискуссии говорит Л. И. Мандельштам. Прежде всего — это характерно для Л. И. Мандельштама — он постарался придать конкретный, доступный экспериментальной проверке смысл словам «физическая реальность боковых полос», указав на естественный критерий реальности частей целого — возможность придания им при помощи тех или иных экспериментальных средств самостоятельного физического существования. Затем он остро сформулировал казалось бы давно установленные принципы спектрального разложения, осуществляемого линейными системами с постоянными параметрами. Этими простыми соображениями Л. И. Мандельштам внес такую ясность в этот круг задач, что ответ на дискутируемый вопрос, который, как всем стало ясно, не имеет другого содержания, кроме такого: «будет ли достаточно селективный приемник регистрировать боковые полосы», — сделался не просто очевидным, а сверхочевидным, тривиальным.

1935—1936 гг. Идет дискуссия между А. Эйнштейном, Б. Подольским и И. Розеном с одной стороны и Н. Бором с другой об основах квантовой теории. Становится в общем понятно, что А. Эйнштейн и его соавторы ошибаются, пусть не в тенденции, которая многим симпатична, но в конкретных упреках квантовой механике. Но положение вещей все же не является ясным до конца для широкого круга физиков, так как ответ Н. Бора написан в его обычном, по выражению Эренфеста, «рембрандтовском» стиле: наряду с яркими и отчетливыми местами в нем есть и темные пятна и полутени, и так как вторая статья А. Эйнштейна, тождественная с первой по уверенности в возможности построения динамической теории микропроцессов, но содержащая в сущности признание ошибочности конкретных обвинений во внутренней противоречивости, предъявленных им и его соавторами квантовой механике, все же несколько упрощает действительное положение дела в последней. В 1938—1939 г. Л. И. Мандельштам дает новое изложение основ квантовой механики, в ряде пунктов примыкающее к изложению математика Неймана, в нескольких же важных пунктах совершенно оригинальное, и объявляет небольшой курс лекций «по некоторым основным вопросам квантовой механики». После нескольких лекций, посвященных, между прочим, отчетливому выяснению теоретико-вероятностей природы квантовой механики и теории измерений в квантовой механике, ситуация вокруг спора А. Эйнштейн — Н. Бор становится столь прозрачной, что становится затруднительным даже простое воспроизведение первоначальных рассуждений А. Эйнштейна, Б. Подольского и И. Розена. Когда Л. И. Мандельштам, следуя обещанию, данному в начале курса, все же должен был их изложить, то, чувствуя, что ему трудно изложить их с педагогической целью, «всерьез», вынужден был сказать: «Теперь ошибка А. Эйнштейна кажется столь тривиальной, что мне трудно излагать его первоначальную точку зрения как правду».

Можно было бы упомянуть и о других примерах, иллюстрирующих особую манеру рассуждать, присущую Л. И. Мандельштаму, при которой основные, решающие стороны проблемы выступают на первый план

и многие вопросы, не требующие вычислений и правильно сформулированные, уже этим самым разрешаются.

У Л. И. Мандельштама и в научной работе, и в преподавании было стремление устранять даже не совсем отчетливо сознаваемые трудности умозаключений, те психологические препятствия, которые часто мешают нам полностью принять те или другие выводы, как бы ни была неумолима логика, приводящая к этим выводам. Он умел в этих случаях быстро понять, что именно затрудняет его собеседника («А что вас шокирует в этом рассуждении?» — обычный для него в таких случаях вопрос), а поняв, двумя-тремя фразами «снять» все трудности. Точно так же он всегда знал, какие выводы будут шокировать аудиторию и заранее в соответствии с этим строил аргументацию. Если к Л. И. Мандельштаму приходили сотрудники или ученики, желавшие проверить какие-либо свои соображения, и если, выслушав их и, как правило, изменив аргументацию, он с ними соглашался, то спрашивающие получали абсолютную уверенность, что у них все в порядке, так как аргументация самого Л. И. Мандельштама была неотразима. Он почти не был способен ошибаться в вопросах физики.

Коллективный характер научного творчества и отсутствие резкой черты между преподаванием и научной работой

У Л. И. Мандельштама не так уже много опубликовано работ, относящихся к теории колебаний в узком смысле этого слова, причем, как уже было сказано, почти все эти работы принадлежат ему совместно с Н. Д. Папалекси. Но тот, кто знает только эти работы, хотя и содержащие важные научные результаты, тот не имеет понятия о его деятельности в области теории колебаний.

Научное творчество Л. И. Мандельштама носило подлинно коллективный характер и отличалось отсутствием резкой границы между преподаванием и научной работой.

Большое значение для развития теории колебаний имели лекции и семинары Л. И. Мандельштама в Московском университете. Эти лекции и семинары иногда содержали новые научные результаты, которые нигде больше не публиковались. Но, может быть, еще большее значение этих лекций было в систематическом привитии навыков колебательного мышления, в общем повышении колебательной культуры.

Влияние этих лекций и семинаров Л. И. Мандельштама, посвященных теории колебаний, как и других, посвященных теории электромагнитного поля, оптике, теории относительности, физической статистике, квантовой механике, далеко выходило за пределы физического факультета МГУ. Они собирали со всей Москвы многочисленную и разнообразную аудиторию, в которой наряду со студентом можно было встретить профессора, наряду с физиком — математика и инженера. Ситуация с «записками» этих лекций и семинаров, в особенности с тем, что относится к теории колебаний и отчасти к оптике и квантовой механике, напоминает

известную ситуацию с записками лекций Вейерштраса, которые распространялись в рукописном виде и оказали существенное влияние как на преподавание, так и на научные исследования в области теории аналитических функций. Вокруг Л. И. Мандельштама существовала атмосфера подлинной научной школы. Во-первых, он любил учить — в самом прямом значении этого слова — молодых физиков, любил задавать и растолковывать им разные трудные и каверзные задачи, разные «парадоксы». Во-вторых, он непрерывно делился с сотрудниками и учениками своими соображениями и планами будущих работ, ставя перед ними вопросы, из которых вырастали научные исследования. При этом Л. И. Мандельштам искренно радовался, если его ученик проявлял работоспособность и, особенно, творческую инициативу в научной работе. Он был готов незаметным и деликатным образом отказаться от авторства в пользу своего ученика или сотрудника и умел придавать его работе известный блеск и остроту, переакцентировав две-три формулировки и указав на новые следствия. Одновременно он никогда не забывал отмечать, если его ученик делал что-нибудь существенное самостоятельно.

III. Как понимал Л. И. Мандельштам теорию колебаний

Л. И. Мандельштам любил теорию колебаний, это было нетрудно заметить, и понимал ее весьма своеобразно и широко.

Каковы те признаки, по которым выделяется учение о колебаниях? Л. И. Мандельштам подчеркивает, что эти признаки принципиально отличны от тех, по которым делят физику на оптику, акустику, учение об электричестве и магнетизме и т. д. Мы выделяем колебания не по признаку физических явлений, которые мы одинаково воспринимаем, а по форме закономерностей. А история и современная ситуация в точном естествознании нам показывает, что эти закономерности фактически бывают одинаковы в самых различных областях, что мы имеем дело с *изоморфизмом закономерностей*. Ситуацию, имеющую здесь место, Л. И. Мандельштам пояснял следующим образом. Каждая из областей физики — оптика, механика, акустика — говорит на своем «национальном» языке. Но есть «интернациональный» язык — это язык теории колебаний. Она вырабатывает специфические понятия, свои методы, свой универсальный язык. «Интернационализм» теории колебаний придает ей колоссальное значение. Изучая одну область, вы получаете тем самым интуицию и знание в совсем другой области. «Темные места в оптике, — говорил Л. И. Мандельштам, — освещаются, как прожектором, при изучении колебаний в механике и т. д.». Л. И. Мандельштам не дал точного определения теории колебаний. Своим слушателям он об этом сказал в такой полушутливой форме: «Вот вы думаете — он все говорит о колебаниях и еще долго будет говорить, а не дал определения, что такое колебания». И Л. И. Мандельштам сказал, что давать определения — это тяжелая и неблагодарная задача. Например, неблагодарная задача дать такое определение физики, кото-

рое отделило бы ее от химии. Важно другое — важны руководящие точки зрения, общие идеи. Одной из таких общих руководящих точек зрения в учении о колебаниях является *периодичность*. Периодические явления или приблизительно периодические явления — это колебательные явления. Всякий периодический процесс относится к ведению теории колебаний. Обратное, конечно, неверно. Многие непериодические процессы также относятся к колебаниям. Кроме того, следует иметь в виду, как это он особенно подчеркивал, что равновесные режимы — это частные случаи периодических процессов.

Вы видите, как своеобразно и широко Л. И. Мандельштам понимал теорию колебаний. Ясно, что в его понимании к теории колебаний в широком смысле относится и теория движения планет, и теория цефеид, и теория радиоприема, и динамическая теория приливов. Ясно, что при таком понимании теории колебаний Л. И. Мандельштам не мог ограничиться изучением только линейных колебаний. Л. И. Мандельштам много раз подчеркивал, что общие закономерности, с которыми имеет дело теория колебаний, нельзя считать чисто математическими. Конечно, говорил он, поскольку вы имеете дело с уравнениями главным образом дифференциальными, то с некоторой точки зрения все это — математика. Но не в этом главное. Прежде всего потому, что именно физика учит нас, как допрашивать дифференциальные уравнения. В теории колебаний математический образ — например, предельный цикл — имеет чрезвычайно наглядное, не только геометрическое, но и физическое содержание, т. е., иначе говоря, в подкрепление к анализу вы здесь имеете не только геометрическую, но физическую наглядность, не только геометрическую, но и физическую интуицию, причем эта физическая наглядность и интуиция может быть весьма разветвленной и богатой и может опираться на радиотехнический, электротехнический, оптический и тому подобный материал.

Имеется известная эволюция во взглядах Л. И. Мандельштама на значение теории колебаний и на ее место в точном естествознании. На конференции по колебаниям, относящейся к 1931 г., Л. И. Мандельштам говорил о «скромных задачах теории колебаний», скромных, например, по сравнению с задачами квантовой механики. В своем докладе о работах А. Н. Крылова и в лекциях 1944 г., посвященных теории колебаний, имеется совсем другая нотка. Он говорит здесь о том, что главные открытия в физике, начиная с открытия Коперника, были по существу колебательными и что, может быть, прав английский математик и философ Уайтхед, утверждающий, что рождение физики связано с применением абстрактной идеи периодичности к большому числу отдельных конкретных явлений.

IV. Идея выработки нелинейного физического мышления

Термины «линейные колебания», «нелинейные колебания» имеют математическое происхождение. Они служат для обозначения тех

колебаний, изучение которых сводится соответственно к линейным и нелинейным, главным образом дифференциальным, уравнениям. То обстоятельство, что эта классификация, определяемая физическими особенностями рассматриваемых задач, связана с математикой, отнюдь не случайно. Она указывает на фундаментальную роль, которую математический аппарат играет в теории колебаний.

Идея выработки нелинейного мышления, опирающегося на твердую математическую базу, идея создания наглядных физических представлений и понятий, имеющих в своей основе адекватные нелинейным физическим объектам математические представления и понятия, является, как мне кажется, основной руководящей идеей научного творчества Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний.

Я начну с классической линейной теории колебаний.

Такие понятия, как гармонический осциллятор, логарифмический декремент, нормальные и парциальные частоты, резонанс, принцип суперпозиции, спектральный подход и т. д., обладают для физика исключительно большой наглядностью и в совокупности создают стройную, цельную и прозрачную картину процессов, происходящих в линейных колебательных системах.

Эти понятия и все это линейное мировоззрение тесно связаны с математикой. Математический аппарат, трактующий линейные колебательные системы, весьма разработан и чрезвычайно адекватен физическим задачам классической теории линейных колебаний. В своей дискретной части он связан с алгеброй линейных преобразований и квадратичных форм, в своей распределенной части — с проблемой собственных значений, теорией специальных функций и т. д. Адекватность этого аппарата физическим задачам классической теории линейных колебаний не должна нас удивлять, так как именно эта область может служить наиболее разительным примером взаимного плодотворного сотрудничества физики и математики. Достаточно вспомнить знаменитый спор Эйлера, Д'Аламбера и Лагранжа о теории колебаний струны, откуда ведут свое происхождение многие относящиеся сюда понятия и методы. С Лагранжа же в сущности начинается и теория малых колебаний, т. е. теория линейных дискретных систем. Классической линейной теории колебаний Л. И. Мандельштам придавал большое значение, и ей в основном был посвящен как его курс лекций по теории колебаний, так и два годичных семинара (1926—1927, 1930—1931). Он разделял две стороны этого аппарата. Во-первых, *принципиальную* сторону, связанную с теми физическими понятиями, о которых только что шла речь, и с тем, какие движения возможны в линейных системах, каков характер их зависимости от внешних сил, от начальных условий и т. д., и *вычислительную* сторону. Он говорил, что в линейных системах с постоянными коэффициентами принципиальных вопросов уже не возникает или почти не возникает. Но относительно вычислительных вопросов он говорил, что они здесь удовлетворительно решены только в относительно простых случаях, относящихся к дискретным системам

и системам с одной, частично с двумя степенями свободы, и очень интересовался всеми возможностями преодоления вычислительных трудностей в случае многих степеней свободы — теорией возмущений, операторным методом Хевисайда, различными рецептами для составления векового уравнения, теоремами Фишера—Куранта и т.д. Аналогичные вещи его живо интересовали и в случае распределенных систем. Некоторые из этих вопросов, относящихся как к дискретным, так и к распределенным системам, были им даны в качестве тем для аспирантских работ, и из них выросли исследования, часть которых была опубликована.

Значительное внимание Л. И. Мандельштам уделил вопросам дальнейшего развития теории линейных систем на случай систем с переменными коэффициентами, в первую очередь с коэффициентами, *периодически зависящими от времени*. Здесь были получены существенные научные результаты, связанные с обобщением в различных направлениях обычного понятия резонанса. Анализ этих работ в связи с деятельностью Л. И. Мандельштама будет дан в специальном докладе Г. С. Горелика. Я хотел бы лишь отметить, что здесь пришлось в некоторых направлениях развить дальше известный математический аппарат, связанный с именем Флоке, что для этого развития физика подсказала ряд руководящих идей и что здесь был создан ряд новых важных физических понятий, прочно вошедших в арсенал физики колебаний.

Но основное внимание Л. И. Мандельштам направил на нелинейные системы. Во-первых, Л. И. Мандельштам остро чувствовал всю необходимость нелинейного мышления, всю необходимость иметь руководящие нелинейные теоретические концепции, которые позволяли бы разбираться в разнообразных и сложных явлениях и которые обладали бы способностью предсказывать новые нелинейные явления. Вот его слова, характеризующие остроту ситуации.

«Я считаю, что в колебательных вопросах, в теории колебаний, современное положение вещей в смысле теоретическом довольно остро». «Мы находимся уже довольно долго в положении, когда с введением нелинейных систем, сильно отличающихся от линейных, в передатчиках и приемниках мы должны отказаться от большинства руководящих теоретических концепций».

Во-вторых, Л. И. Мандельштам не менее остро чувствовал необходимость *строгого* математического рассмотрения хотя бы основных, наиболее простых, жизненно необходимых задач теории нелинейных колебаний, так как в противном случае, говорил он, вы находитесь на зыбкой почве, ни в чем не можете быть уверены и прежде всего не можете быть уверены в хотя бы приблизительной правильности рассматриваемых нами идеальных математических моделей физических задач.

Несколько меньше, — по крайней мере мне так кажется, — его интересовала в теории нелинейных колебаний вычислительная сторона дела — доведение решений до окончательных *числовых* результатов, хотя он и подчеркивал, что такие числовые результаты практически весьма существенны.

Л. И. Мандельштам с известной осторожностью относился к различным нестрогим методам приближенного решения задач теории нелинейных колебаний прежде всего там, где шла речь о действии внешней силы на нелинейную систему, или о теории связанных систем. Особенно его задевали те отдельные случаи когда различные нестрогие методы давали противоречивые результаты или когда авторы делали совершенно необоснованные выводы, подсказывавшиеся им «линейной психологией» (например, ошибка Гюттона с условиями самовозбуждения лампового генератора).

Лишь позднее, к 1930 г., когда выяснилось, что строгие методы нелинейной теории в общем подтверждают выводы первоначальных нестрогих рассмотрений, его отношение к последним изменилось, и он неоднократно отмечает заслуги авторов нестрогих методов, особенно отмечая заслуги Ван дер Поля.

В вопросах, связанных с атакой на нелинейные системы, целесообразно различать два этапа. Первый этап — до 1928 г., т. е. до того, как была установлена связь нелинейных задач теории колебаний с работами Пуанкаре и Ляпунова, и второй этап — после установления такой связи.

Математическое оружие первого этапа — это общие теоремы теории дифференциальных уравнений, позволявшие в некоторых случаях делать заключение о существовании и единственности периодических решений нелинейной задачи по свойствам характеристики лампы и так называемый метод приписывания.

Математическое оружие второго этапа — теория предельных циклов и так называемая теория малого параметра.

Однако не следует думать, что в связи с этой сменой математического вооружения у Л. И. Мандельштама произошли существенные изменения в принципиальных установках. То, что было выше сказано о выработке нелинейного мышления в математическом аппарате, способном решать жизненные задачи, может быть отнесено как к первому, так и ко второму этапу.

Я перейду теперь к изложению нескольких способов атаки нелинейных задач и к полученным при этом результатам.

Выяснение свойств решений по заданным свойствам характеристик

В колебательном семинаре 1926—1927 г. Л. И. Мандельштам поставил специальный доклад об условиях самовозбуждения незатухающих колебаний обычного лампового генератора и так называемого маятника Фроуда. В своем выступлении, которое, как и всегда, явилось наиболее интересным моментом семинара (в случае отсутствия Л. И. Мандельштама на семинаре студенты говорили «чай без сахара»), Л. И. Мандельштам дал физическую характеристику незатухающих колебаний и подчеркнул, что наиболее специфическая их черта — независимость амплитуды от начальных условий — не может быть понята из анализа линейного уравнения,

а требует исследования полного нелинейного уравнения. Он указал, что так как, с одной стороны, математическая теория нелинейных систем весьма мало разработана и так как, с другой стороны, техника настоятельно требует теории этих вещей, то прибегают к различным нестрогим методам приближенного рассмотрения. Подчеркнув, что при таких нестрогих рассмотрениях вы никогда не сможете быть уверены в правильности выбранной вами идеализации задачи, он рассказал в нескольких словах результаты своей, вместе с Н. Д. Папалекси, работы, позволяющие в некоторых случаях строго устанавливать наличие и устойчивость периодических решений нелинейного дифференциального уравнения лампового генератора по нескольким свойствам характеристики, в частности по наличию тока насыщения. Он заметил, что, имея такое доказательство, можно более спокойно пользоваться различными приближенными способами расчета незатухающих колебаний. Эта работа тогда не была напечатана. Когда через пару лет Л. И. Мандельштам ознакомился с работами Картанова (1925) и Льенара (1928), ставивших себе примерно те же цели, он мне сказал, что, может быть, работу, о которой идет речь, все же стоит напечатать, так как «у нас совсем другой подход, чем в этих работах». Однако она так и осталась ненапечатанной.

О важности такого рода задач, решение которых позволяет делать высказывание о колебательных возможностях системы по общим свойствам характеристики, Л. И. Мандельштам особо сказал на конференции по колебаниям в 1931 г., упомянув, что «для некоторых частных случаев эти задачи удалось решить», и не сказал ни слова о своих и Н. Д. Папалекси результатах.

После 1931 г. появилось еще несколько работ, относящихся к этому кругу вопросов, в частности интересное исследование американцев Левинсона и Смиса (1942).

Важность всего этого круга работ общепризнана. Но мало кому известно, что Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси одни из первых, если не первые, получили существенные результаты в этом направлении.

Метод припасовывания

Одной из первых научных работ, выполненных под руководством Л. И. Мандельштама в Московском университете, была работа М. А. Леонтовича «К теории электромагнитного прерывателя».

Тема этой работы, как и многие другие темы, интересовавшие Л. И. Мандельштама, связана с вопросами идеализации. Именно, одной из основных задач работы было выяснение того решающего влияния, которое имеет на работу прерывателя самоиндукция, и выяснение непригодности теоретической модели, не учитывающей самоиндукции. Нас сейчас интересует здесь совсем другое. В этой работе, по совету Л. И. Мандельштама, для отыскания периодического решения был использован так называемый «метод припасовывания», следуя которому, мы заменяем нелинейное

дифференциальное уравнение несколькими линейными уравнениями и «припасовываем» в точках сопряжения различных уравнений постоянные интегрирования, исходя из требования непрерывности решения, а часто и его первой производной по времени. Этот метод был применен впервые к нелинейным проблемам теории колебаний Н. Д. Папалекси в задаче о выпрямителе (1911), затем А. Зоммерфельдом в теории вынужденных колебаний дуги (1914), а затем и многими другими.

Л. И. Мандельштам придавал большое значение методу припасовывания. Он считал, что этот метод может быть математически обоснован и разработан таким образом, чтобы стать рабочим методом физики и техники, пригодным для рассмотрения хотя бы некоторых, наиболее простых, но жизненно необходимых задач теории нелинейных колебаний. Он говорил, что нельзя надеяться, что математика даст нам возможность работать со сколько-нибудь сложными характеристиками, что нам все равно приходится фундаментально упрощать задачу, выбирать ту или иную простую аналитическую аппроксимацию. Он отмечал, что в ряде случаев разбиение нелинейной характеристики на прямолинейные участки прямо подсказывается физикой и является более удобной аппроксимацией, чем аппроксимация полиномами. Он считал также возможным разработку приближенного подхода к решению задач по методу припасовывания, опираясь — в случае незатухающих и близких к синусоидальным колебаний — на представление об «авторезонансе», т. е. о резонансе под действием силы, порождаемой движением самой системы.

В 1927 г. Л. И. Мандельштам предложил мне исследовать устойчивость движений, получаемых по методу припасовывания, а затем вообще «попытаться подвести под этот метод серьезную математическую базу». До сих пор, сказал он, все, кто работали этим методом — Н. Д. Папалекси, А. Зоммерфельд и другие, — в сущности решали отдельные казуистические примеры и ограничивались лишь нахождением периодического решения, оставляя в стороне вопросы устойчивости и вообще вопросы о поведении решений при других начальных условиях, чем те, которые соответствуют периодическому движению. Он сказал, что Н. Д. Папалекси уже ряд лет назад нашел по методу припасовывания периодическое решение в важной проблеме лампового генератора для случая характеристики, составленной из кусков прямых¹, и что, если удастся что-либо сделать в отношении исследования устойчивости периодических движений, получаемых по этому методу или в отношении обоснования этого метода, то сразу будет внесена ясность в целый ряд задач.

Из этой задачи выросла работа о предельных циклах, о которой я скажу ниже, но сама задача, поставленная Л. И. Мандельштамом, тогда не была решена.

¹ Эти результаты Н. Д. Папалекси, составляющие вторую часть его работы «Zur Theorie der Schwingungserzeugung mittels der Elektronenröhren» (Одесса, 1922), не были опубликованы.

С 1927 г. метод припасовывания был многократно использован при решении различных задач теории нелинейных колебаний. Здесь особенного внимания заслуживают работы, относящиеся к теории действия внешней силы на нелинейные системы, в частности работы ден-Хартога о вынужденных колебаниях при наличии сухого трения (1930) и работа Рокара по теории захватывания и ламповом генераторе с $\_|\_$ -характеристикой (1937). Однако задача, поставленная Л. И. Мандельштамом, об исследовании устойчивости периодических движений, получаемых по методу припасовывания, не только не была решена, но даже не была затронута.

За последнее время теория автоматического регулирования заставила обратить особое внимание на метод припасовывания. Дело в том, что основные факторы, обуславливающие нелинейность уравнений движения в теории автоматического регулирования — кулоновское трение и характеристика сервомотора, — непринужденно допускают простую кусочно-прямолинейную аппроксимацию. Это как раз тот, совсем не редкий случай, когда, по выражению Л. И. Мандельштама, «сама физика подсказывает употребление метода припасовывания».

В 1943—1944 гг. мне совместно с моими сотрудниками Н. Н. Баутиным и А. Г. Майером удалось при помощи теории точечных преобразований дать решение ряда простейших нелинейных задач теории автоматического регулирования и наметить способы решения некоторых более сложных задач. Попутно получился ответ на вопрос, поставленный Л. И. Мандельштамом в 1927 г., об исследовании устойчивости периодических движений, получаемых по методу припасовывания: исследование устойчивости приводится к исследованию системы уравнений в конечных разностях, которое может быть проведено по известным рецептам. Л. И. Мандельштам с интересом отнесся к этим работам. Несмотря на приступы болезни, он приехал на мой доклад 10 марта 1944 г. на сессии Отделения физико-математических наук и выступил там с рядом замечаний. Это было одно из последних его публичных выступлений, если не последнее. Я хотел бы здесь отметить, что весь этот цикл работ с некоторой точки зрения можно рассматривать как осуществление старой идеи Л. И. Мандельштама о математическом воспитании метода припасовывания.

Теория предельных циклов

Как уже было сказано, в связи с вопросом об устойчивости периодических движений, получаемых по методу припасовывания, поставленным мне Л. И. Мандельштамом, возникла работа о предельных циклах. Я не буду останавливаться на подробностях. Я скажу только, что он отнесся очень внимательно к моему утверждению, что незатухающие колебания в системах с одной степенью свободы — это предельные циклы Пуанкаре.

Когда дальнейшая мобилизация математической информации быстро привела к работам А. М. Ляпунова по устойчивости и к методу малого

параметра, изложенному в «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste» того же Пуанкаре, то Л. И. Мандельштам, — так по крайней мере мне показалось, — был несколько удивлен. Он захотел отчетливо понять происхождение всех этих работ, их место внутри математики, их связь, а в некоторых случаях отсутствие прямой связи с астрономией, механикой и физикой. Поразительна та легкость, с которой он установился на новой точке зрения, сумел быстро нащупать ее сильные и слабые стороны и начать руководить атаками при помощи нового оружия.

Сильной стороной новой точки зрения, связанной с общей качественной теорией дифференциальных уравнений, Л. И. Мандельштам считал ее адекватность основным задачам теории нелинейных колебаний и ее исключительную геометрическую наглядность. Здесь мы имеем, — говорил Л. И. Мандельштам, — действительно адекватный нашим нелинейным задачам, не имеющий «линейных воспоминаний» математический аппарат, пусть недостаточно разработанный. Опираясь на этот аппарат, можно будет создать новые понятия, специфичные для нелинейных систем, можно будет выработать новые руководящие точки зрения, которые позволяют мыслить нелинейно.

Большое значение он придавал и геометрической наглядности этой теории. Он особенно подчеркивал, что в этой теории каждый геометрический образ — например, особая точка или предельный цикл — имеет наглядное физическое содержание. Он выразил уверенность, что этот геометрический язык через короткое время войдет в обиход физиков и инженеров. Он считал, что определение автоколебаний как предельных циклов Пуанкаре, устойчивых как по отношению к малым изменениям начальных условий, так и по отношению к малым изменениям вида дифференциальных уравнений, представляет некоторое научное достижение, интересовался, не сказал ли этого кто-нибудь раньше, и проявлял определенную заботливость в отношении приоритета. И когда Ле-Корбейе в 1930 г. в своем докладе на конгрессе по прикладной механике в Стокгольме сказал, что автоколебания — это предельные циклы, и при этом сослался на мою работу, то Л. И. Мандельштам, узнавший об этом докладе через несколько лет, все же обратил на это определенное внимание и сказал, что, повидимому, с приоритетом все обстоит благополучно. (Вообще в отношении вопросов приоритета Л. И. Мандельштам больше заботился о своих учениках и сотрудниках, чем о себе самом.) Несомненно, что он ценил и некоторые другие «колебательные» достижения общей качественной теории и верил в ее дальнейшие возможности.

Однако с не меньшей отчетливостью он видел и слабые стороны общей качественной теории. Основная слабость, которую он понял почти мгновенно, — это ее сравнительно малая эффективность в исследовании конкретных уравнений. «Беда теории Пуанкаре не в том, что она дает качественные ответы на вопросы, — как раз эти качественные ответы весьма часто и нужны технике, — беда теории Пуанкаре в том, что она скорее говорит, что вообще может быть у дифференциальных уравнений опреде-

ленного класса, чем учит исследовать конкретное уравнение», — говорил Л. И. Мандельштам. Однако он всегда отмечал, например в докладе на конференции по колебаниям, даже небольшие заслуги качественной теории в исследовании конкретных уравнений. В связи с этим он считал желательным увязку общей качественной теории, во-первых, с рассуждениями, касающимися исследования колебательных возможностей системы по виду характеристики, и, во-вторых, с методом припасовывания.

Я горячо рекомендую каждому, кто хочет познакомиться со взглядами Л. И. Мандельштама на роль предельных циклов и всего качественного подхода в теории линейных колебаний, обратиться к его докладу на конференции по колебаниям в 1931 г., который представляет выдающееся событие в мировой литературе по колебаниям и в котором этим вещам посвящено несколько замечательных страниц¹.

Нужно, конечно, иметь при этом в виду, что с 1931 г. качественная теория дифференциальных уравнений по целому ряду пунктов ушла вперед. Здесь нет места перечислять эти пункты. Я хочу лишь отметить, что за последние годы мы узнали ряд новых существенных фактов и в области истории теории нелинейных колебаний, в частности в отношении предельных циклов.

В 1931 г. мы считали, что Ван дер Поль был первым, кто построил графически, вне связи с теорией Пуанкаре, несколько предельных циклов с целью проследить переход от синусоидальных колебаний к сильно несинусоидальным (релаксационным). Работа Ван дер Поля была вызвана потребностями радиотехники. Но недавно мы узнали, что еще в 1885 г. французский инженер Леоте, изучая, как бы мы сейчас сказали, автоколебания регуляторов, порождаемые кулоновским трением, систематически работал, также, повидимому, вне связи с теорией Пуанкаре, с предельными циклами. По поводу этих работ Леоте Л. И. Мандельштам сказал, что они еще раз подтверждают исключительную жизненность геометрического подхода к исследованию дифференциальных уравнений движения и показывает, что корни такого подхода лежат не только в математике или небесной механике, но и в различных областях техники.

Метод малого параметра

Когда сделалось известным, что метод малого параметра Пуанкаре в комбинации с теорией устойчивости Ляпунова позволяет находить

¹ Есть и другое интересное выступление Л. И. Мандельштама (20 XII 1930), посвященное краткому изложению работ по теории колебаний, выполненных в 1925—1930 гг. в МГУ, где нелинейные вещи затронуты в несколько ином аспекте, но, к сожалению, оно пока не опубликовано. Следует также отметить, что многие вопросы, о которых идет речь в настоящем докладе, освещены в книжке: Л. И. М а н д е л ь ш т а м, Н. Д. П а п а л е к с и и др., Новые исследования нелинейных колебаний, М., Радиоиздат, 1937.

периодические решения и решать вопрос об их устойчивости в случае систем, которые сами неконсервативны, но лишь близки к линейным консервативным, то сначала Л. И. Мандельштам отнесся к этому методу с известной осторожностью.

«Это все же какой-то асимптотический метод, какой-то корреспонденципринцип», — говорил сперва о нем Л. И. Мандельштам. Этим он хотел сказать, что на практике мы не знаем, меньше какого числа должен быть малый параметр, чтобы рецепты вычисления амплитуд или поправок к периоду были достаточно точны или даже вообще имели бы смысл, хотя теория нам и говорит, что при достаточно малом μ все будет в порядке.

Однако он все же считал желательным попытаться приспособить этот метод для систематического решения нелинейных радиотехнических задач и вообще выяснить заключенные в нем возможности. И этот метод, если можно так выразиться, быстро завоевал расположение Л. И. Мандельштама. Большую роль здесь сыграл ученик Л. И. Мандельштама А. А. Витт, который имеет и другие существенные заслуги в области теории нелинейных колебаний. «Импрессионист», — как о нем говорил Л. И. Мандельштам, — А. А. Витт мало интересовался деталями, но обычно сразу видел окончательный результат и умел до него с необыкновенным оптимизмом добираться. Его оптимистический девиз «все плохое сократится, все хорошее останется» помог преодолеть многие трудные выкладки, которые в конце концов приводили к простым и физически прозрачным окончательным формулам.

А. А. Витту и мне в ряде главных образом совместных работ удалось, во-первых, выработав надлежащую рецептуру, при помощи метода малого параметра единообразным способом получить ряд уже известных в радиотехнике результатов, касающихся теории обычного лампового генератора, теории генератора с сеточным током, теории явлений захватывания для случая так называемых «больших» амплитуд, полученных ранее различными методами, не имевшими строго математического обоснования.

Во-вторых, нам же удалось решить попутно спорный вопрос о существовании «порога» для амплитуды внешней электродвижущей силы, ниже которого она не может вызывать принудительной синхронизации или захватывания. Выяснение этого вопроса имело определенное практическое значение. На этой основе А. А. Витт и С. Э. Хайкин разработали новый способ измерения интенсивности полей радиостанций, К. Ф. Теодорчик и С. Э. Хайкин перенесли эти результаты в акустику и разработали новый способ измерения интенсивности звуковых полей.

В-третьих, и это, пожалуй, окончательно определило позицию Л. И. Мандельштама в отношении метода малого параметра, — это проявление методом малого параметра большой эвристической силы — способности предсказывать новые явления. Эта способность отчетливо обнаружила себя в работе Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, относящейся к явлениям резонанса второго рода.

Я остановлюсь на этой работе несколько подробнее.

В теории малого параметра, развитой Пуанкаре для астрономических целей, при отыскании периодических орбит рассматриваются случаи, когда наряду с силами, зависящими только от координат, действуют силы, периодически зависящие от времени. С астрономической точки зрения это, например, значит, что в нашей математической модели реальной астрономической задачи вы рассматриваете движение какого-нибудь одного тела как заранее известное и периодическое. Случай, когда периодическая орбита имеет период, совпадающий с периодом внешней силы, был использован А. А. Виттом и мною для построения теории захватывания. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси обратили внимание, что в теории малого параметра периодические орбиты могут быть и другого типа — с удвоенным, утроенным и т. д. периодом по отношению к периоду внешней силы. Это так называемое «*solutions périodiques de la deuxième espèce*» — периодические решения второго рода Пуанкаре. Так как были некоторые экспериментальные основания ожидать наличия таких периодических решений второго рода и в радиотехнических устройствах, то они предприняли попытку рассчитать их поведение в случае действия синусоидальной электродвижущей силы на обычный регенеративный приемник.

Теория установила не только существование режимов, соответствующих периодическим решениям второго рода, но указала на наличие новых явлений, совершенно неожиданных и непонятных с точки зрения обычного линейного подхода. В частности, теоретически было установлено, что недо возбужденный генератор может возбуждаться под действием электродвижущей силы, частота которой равна удвоенной его частоте; если же частота внешней силы существенно отличается от двойной частоты систем, то система почти не отклоняется, ведет себя как обычная линейная. Таким образом, здесь оказывается возможным говорить о резонансных кривых, характерных для этого «резонанса второго рода». Эти резонансные кривые фундаментально отличаются от резонансных кривых обычного линейного резонанса, наступающего, как известно, при равенстве частот, и от тех резонансных кривых, которые характерны для явлений захватывания в случае возбужденного генератора. Эксперимент полностью подтвердил эти предсказания теории.

В дальнейшем эти явления резонанса второго рода были положены Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси в основу нового приемного радиотехнического устройства.

Эти работы, в особенности работа о резонансе второго рода (опубликована в 1931 г.), привлекли внимание к методу малого параметра, и с 1931 г. появляется большое число исследований, посвященных не только рассмотрению конкретных вопросов при помощи этого метода, но и развитию и обоснованию тех возможностей, которые заложены в этом методе. Я здесь отмечу следующие расширения метода малого параметра:

1) на процессы установления и непериодические режимы в системах,

близких к обычным линейным консервативным (Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов и др.);

2) на системы, близкие к консервативным, но уже нелинейным системам (Л. С. Понтрягин, Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов);

3) на системы, близкие к обычным линейным, но уже неконсервативным системам специального типа (А. А. Витт и, особенно, Б. В. Булгаков);

4) на системы, близкие к линейным системам с периодически меняющимися параметрами специального типа (Г. С. Горелик, С. М. Рытов, Л. И. Мандельштам).

Я коснусь только первого из этих расширений, которое весьма существенно связано с Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, и отчасти четвертого.

Это расширение связано с обоснованием Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси радиотехнического метода исследования процессов установления и вообще непериодических процессов в линейных системах, который носит название метода Ван дер Поля.

Методы, аналогичные методу Ван дер Поля, который также иногда называется методом медленно меняющихся амплитуд, в сущности уже давно применялись в небесной механике. Но Ван дер Полю первый последовательно применил этот подход к задачам радиотехники. Однако вплоть до работы Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси метод Ван дер Поля не только не имел твердого математического обоснования, но даже рецептура его применения не была вполне однозначной. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси дали однозначную рецептуру составления так называемых «укороченных» уравнений, или уравнений Ван дер Поля, выяснили, что этот метод представляет собой одну из разновидностей метода малого параметра, и обосновали этот метод для важного частного случая.

Другой важный частный случай после выяснения рецептуры оказался обоснованным работой французского математика Фату.

Это исследование сыграло весьма существенную роль в теории нелинейных колебаний и вызвало большое число откликов и дальнейших разработок. Дело в том, что, во-первых, укороченные уравнения сами, как правило, нелинейны и часто позволяют сохранить и в приближенном подходе характерные, специфические особенности нелинейных задач, во-вторых, они существенно проще исходных уравнений и их решения гораздо легче исследовать, в-третьих, сама рецептура их составления весьма элементарна. При помощи укороченных уравнений как сами Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси, так и другие исследователи рассмотрели целый ряд конкретных задач. В частности, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси дали теорию так называемого «асинхронного возбуждения», нового открытого ими явления, которое находится в известной связи с явлением резонанса второго рода, но при котором период внешнего воздействия не состоит ни в каком простом кратном отношении с частотой генератора, а также рассмотрели некоторые вопросы установления колебаний при

резонансе второго рода, имевшие целью осветить сложную проблему о влиянии помех на прием, основанный на нелинейных явлениях. Из работ других исследователей, посвященных расширению метода малого параметра на непериодические режимы, следует отметить работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова, содержащие, в частности, обоснование использования этого метода для исследования так называемых квазипериодических решений.

Я скажу также несколько слов о последнем из вышеперечисленных расширений метода малого параметра. Л. И. Мандельштам занимался этими вопросами в связи с теорией параметрических машин, в которых установившийся режим определяется нелинейными эффектами. Первоначальные теоретические исследования рассматривали эти машины как неавтономные системы, близкие к линейным консервативным с постоянными коэффициентами. Но исследования последних лет заставили перейти к рассмотрению систем, у которых имеет место сильная «модуляция» параметров и малая нелинейность. В этом направлении Л. И. Мандельштам получил ряд результатов, которые, однако, еще не опубликованы и с которыми я знаком лишь в некоторой части.

Я закончу этот раздел о теории малого параметра краткими замечаниями о недавней работе ученика Л. И. Мандельштама С. М. Рытова, посвященной теории стабилизации частоты лампового генератора при помощи кварца. Эта работа, к которой Л. И. Мандельштам проявлял определенный интерес, также связана со своеобразным «физическим» расширением метода малого параметра, когда в формулировку задач включаются не только «малые» величины (порядка μ , μ^2 , μ^3 , ...), но наряду с «нормальными» величинами и «большие» величины (порядка μ^{-1} , μ^{-2} , μ^{-3} , ...). Это расширение, не изменяя формализма теории, позволяет более сознательно отнестись к введению малого параметра в уравнения и может принести существенную пользу при формулировке на языке теории малого параметра ряда физических задач. Как раз такой задачей явилась задача о стабилизации кварцем, где это физическое расширение теории подсказало правильное введение малого параметра, в результате которого были найдены периодические решения, содержащие всю теорию кварцевой стабилизации.

Некоторые итоги

Прежде чем перейти к итогам, я укажу на два существенных пробела моего изложения.

Для ряда вопросов теории нелинейных колебаний Л. И. Мандельштам видел острую необходимость отказаться от дискретной идеализации и перейти к распределенным системам.

Для других вопросов теории нелинейных колебаний он видел не менее острую необходимость отказаться от динамической идеализации и с целью учета флуктуации перейти к теоретико-вероятностной модели. В обоих этих

направлениях в значительной степени под влиянием Л. И. Мандельштама были достигнуты существенные успехи. Однако анализ этих успехов выходит за пределы моего доклада.

Каковы итоги? Само собой разумеется, что задачу выработки нелинейного физического мышления, опирающегося на твердую математическую базу, нельзя считать решенной. Но сравните ситуацию, скажем, в 1927 г., когда Л. И. Мандельштам начал разворачивать работу по нелинейным колебаниям в МГУ, с современной ситуацией. Мы имеем теперь целый ряд руководящих нелинейных концепций, пришедших в соответствующих областях на смену старым линейным концепциям и позволяющих уверенно и безошибочно разбираться в некоторых классах нелинейных явлений. Мы имеем теперь — к чему особенно стремился Л. И. Мандельштам — уже довольно значительный запас наглядных физических понятий и представлений, имеющих твердую математическую основу и адекватных нелинейным явлениям. Я перечислю некоторые нелинейные понятия, либо получившие точный физический и математический смысл, либо впервые выдвинутые в этот период времени.

Я начну с фазового пространства, которое в теории колебаний теперь перестало быть только математической абстракцией и приобрело высокую степень физической наглядности не только потому, что физики с ним свыклись, но и потому, что оказалось возможным его приблизить к нашим органам чувств, наблюдая систематически фазовые траектории на экране осциллографа (Бовшеверов). Если говорить об автономных системах, то такие физические понятия, как автоколебания, мягкое и жесткое возбуждение автоколебаний, затягивание и т. д., получили теперь твердую математическую основу в виде предельных циклов, теории бифуркаций, областей устойчивости в большом и т. д. Если говорить о неавтономных системах, то такие физические понятия, как феррорезонанс, захватывание разных видов, получили математическую основу в теории периодических решений и их бифуркаций, а ряд других физических понятий, например резонанс второго рода, асинхронное возбуждение и т. д., был вновь выдвинут, отправляясь от математической теории.

Не все достижения этих лет в направлении выработки нелинейного мышления принадлежат Л. И. Мандельштаму или лицам, так или иначе с ним связанным. Но именно Л. И. Мандельштам вызвал к жизни это новое, опирающееся, с одной стороны, на настоящую математику, с другой стороны, на тонкий радиофизический эксперимент — научное направление в теории нелинейных колебаний.

Следует особо отметить, что некоторые из вышеперечисленных наглядных нелинейных понятий, порожденных радиотехническими проблемами (например, автоколебания), получили теперь все права гражданства и в других областях техники, например в теории регулирования, в аэрогидродинамике, в теории резания.

V. Идея правильной идеализации

«Когда я перевожу физику на математику, я всегда от чего-то отвлекаюсь» — эта фраза принадлежит Л. И. Мандельштаму, и он не устал привлекать внимание к тому, казалось бы очевидному, обстоятельству, что в теории колебаний, как и в всякой другой физической теории, мы работаем с идеальными моделями реальных вещей и процессов. Он считал, что вопросы идеализации должны занимать фундаментальное место во всяком преподавании физики, как в школьном, так и в университетском. Вопросы идеализации занимают большое место во всем научном творчестве Л. И. Мандельштама. Но я сейчас смогу остановиться сколько-нибудь подробно только на одном вопросе, относящемся к этому кругу проблем и имеющем большое техническое значение, — на теории разрывных колебаний.

Создание настоящей теории разрывных колебаний, которым мы в значительной мере обязаны Л. И. Мандельштаму, оказалось возможным только после анализа и преодоления внутренних затруднений теории, связанных с идеализацией. Всякая идеализация, по выражению Л. И. Мандельштама, «обладает способностью мстить за себя», обладает способностью создавать внутренние затруднения. Устранение таких внутренних затруднений теории имеет очень большое практическое значение, так как часто позволяет работать с простыми моделями, и характерно для теории разрывных колебаний.

Чтобы были ясны все идейные связи, мне придется начать издалека.

1895 г. Французский математик и механик Пенлеве придумывает ряд примеров, где закон трения Кулона в сочетании с наличием жестких связей приводит к парадоксам. Именно в примерах Пенлеве, в противоречии с основным положением теоретической механики, задание начальных координат и скоростей не определяет однозначно дальнейшего движения системы. Пенлеве очень остро ставит вопрос о «логической несовместимости» закона трения Кулона с обычными положениями теоретической механики.

1908 г. Знаменитый математик и организатор науки Ф. Клейн читает лекцию в Геттингене «О критике Пенлеве закона трения Кулона». Излагая в этой лекции свои взгляды на парадокс Пенлеве и взгляды уже тогда известного аэрогидродинамика Л. Прандтля, учитывая те статьи о парадоксе Пенлеве, которые появились в промежутке 1895—1908 гг., Клейн и Прандтль указывают, что парадокс Пенлеве есть следствие идеализации, следствие наличия абсолютно жестких связей. Введение деформируемых связей сразу ликвидирует парадокс: уравнения движения изменяются и неоднозначность исчезает. Но не это самое существенное в высказываниях Клейна и Прандтля. Они замечают и всячески подчеркивают другое — и в этом вся соль: можно не вводить деформируемых связей и не переходить к новым дифференциальным уравнениям. Нужно только в соответ-

ствующих случаях принять дополнительную гипотезу¹, характеризующую мгновенные изменения скорости и вызывающую мгновенную остановку, ликвидирующую неоднозначность, на языке фазового пространства — гипотезу о мгновенном скачке изображающей точки. Таким образом, добавочная гипотеза о скачках изображающей точки, т. е. об особом рода внутренних ударах, позволяет достичь однозначности, сохранив идеальные абсолютно жесткие связи и закон Кулона, т. е. сохранив весьма простую математическую модель. Отметим, что Клейн ясно понимал исключительно большое значение вопросов идеализации, считая, что здесь «теоретикам, экспериментаторам и инженерам-конструкторам следует идти рука об руку». Клейн считает возможным, что рассуждения, связанные с преодолением парадокса Пенлеве на пути, отмеченном в его докладе, могут сделаться «отправным пунктом развития новой ветви технической механики».

1925 г. Е. Фридлиндер рассматривает ряд простых схем, главным образом радиотехнических, которые обладают способностью совершать незатухающие колебания, но где, с точки зрения обычной идеализации, имеется *один* элемент, запасающий энергию (т. е. либо самоиндукция, либо емкость). Фридлиндер мало интересуется дифференциальными уравнениями движения, но, пользуясь особой диаграммой, он дает графический прием отыскания амплитуды и формы незатухающих колебаний, исходя из физического представления о мгновенных скачках тока или напряжения — о мгновенных электрических ударах.

Для того, чтобы было понятно, чем мы обязаны Л. И. Мандельштаму в этом вопросе, мне придется кое-что сказать и о своей работе.

1929 г. Я уже стою — как будет дальше видно, в известном смысле, слишком прямолинейно — на той точке зрения, что математический образ, соответствующий незатухающим колебаниям или автоколебаниям, — это предельный цикл Пуанкаре. Я рассматриваю разные схемы и всюду ищу циклы. Но вот я рассматриваю в обычной идеализации схему мульти-вibratorа Абрагама-Блоха, содержащую одни только емкости, но способную совершать автоколебания. Я пишу дифференциальные уравнения движения, ищу цикл, но не только не нахожу цикла, но мне удается строго доказать, что исследуемые мною уравнения движения предельного цикла имеют *не могут*. «Вместо» цикла я нахожу на фазовой плоскости особую кривую, где фазовая скорость становится бесконечной. Наличие такой кривой не позволяет однозначно установить движение изображающей точки. Получился парадокс: автоколебания — это циклы, циклов нет, а схема совершает автоколебания². С этим парадоксом я пришел к

¹ Клейн и Прандтль избегают слова «гипотеза», предпочитая говорить об интерпретации закона Кулона, основанной на результатах предельного перехода к случаю жестких связей в решениях полных уравнений, учитывающих деформируемые связи. Фактически такой предельный переход не всегда может быть выполнен.

² О парадоксе Пенлеве и лекции Клейна я не знал. Работу Фридлиндера я про-

Л. И. Мандельштаму, который почти мгновенно понял, в чем дело, и после некоторого обсуждения резюмировал (у меня есть старая запись): «Если строго доказано, что циклов нет, то это уже хорошо. Так как мульти-вibrator на практике колеблется, то либо идеализация не годится, либо вы не знаете, как нужно работать с такой идеализацией». Он прибавил, что уезжает в Ленинград и там попробует этот парадокс обдумать. Возвратившись из Ленинграда, он сказал, примерно, следующее: «Мы с Николаем Дмитриевичем думаем, что с принятой вами идеализацией можно работать и можно отыскать интересующее физику периодическое решение. Однако оно будет не того непрерывного типа, который вы искали, а разрывного типа, т. е. соответствующее движение изображающей точки будет содержать мгновенные скачки. Мы думаем, что это периодическое решение в данном случае можно найти, если ввести дополнительную гипотезу, что при таких перескоках электрическая энергия, запасенная в конденсаторах, меняется непрерывно».

Вскоре, уже вместе с А. А. Виттом, мы попробовали реализовать эти указания Л. И. Мандельштама.

После преодоления некоторых расчетных трудностей мы нашли разрывное периодическое решение и даже проследили разрывный процесс установления такого периодического решения.

Парадокс с мультивibratorом в сущности весьма близок к парадоксу Пенлеве. Если рассматривать дифференциальные уравнения идеализированной схемы (т. е. действовать обычным образом, без учета самоиндукции), то, как было сказано, вы сразу наталкиваетесь на неоднозначность. Принципиально можно было бы ликвидировать эту неоднозначность, учтя самоиндукции и усложнив уравнения. Но этот путь практически невыполним, так как для систем с двумя степенями свободы уравнения получаются слишком сложными. Но есть другой путь — и этот путь именно был указан Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси — ликвидировать эту неоднозначность, оставаясь в пределах той же самой простой идеализации, но вводя специальную гипотезу о величине и направлении скачков изображающей точки с кривой бесконечных фазовых скоростей, т. е. о характере мгновенных электрических ударов.

Таким образом, была решена задача, значительно более трудная, чем те задачи, которые решались графически Фридлиндером, а главное, была внесена полная теоретическая ясность в этот круг вопросов, которой тогда не было ни у Ван дер Поля, как это отметил Н. Д. Папалекси в своем докладе на съезде физиков в 1930 г., ни у Фридлиндера.

[Я не могу здесь останавливаться ни на роли начальных условий в этом круге вопросов, ни на ряде новых понятий, возникших в связи с теорией разрывных автоколебаний (например, понятия о вырождении колебательной системы), ни на большом значении разрывных автоколебаний для

смотрел, но, не поняв математического смысла его диаграмм, решил отложить детальное изучение.

радиотехники, ни, наконец, на дальнейших работах в этом направлении, как связанных в том или ином виде с Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, так и не связанных с ними. Я коснусь здесь только работ ученика Л. И. Мандельштама С. Э. Хайкина, посвященных *механическим* разрывным автоколебаниям. Еще на конференции по колебаниям в 1931 г. С. Э. Хайкин предложил в качестве механического генератора разрывных автоколебаний использовать обычный маятник Фроуда, поставив на нем вместо груза пружину и создав достаточно большое трение в подшипниках. Эту идею он осуществил несколько позднее вместе с Н. Л. Кайдановским и получил возможность изучить экспериментально разрывные механические автоколебания и проверить выводы теории, которая строится там по образу и подобию теории электрических разрывных колебаний. Полученные в этой работе результаты заинтересовали многих, так как хотя механические разрывные автоколебания имеют большое техническое значение, например для теории торможения, для теории резания и ряда других вопросов, они были здесь впервые теоретически и экспериментально исследованы. Но, пожалуй, тут самое интересное не эти отклики со стороны техников. В 1939 г. английские физики Боуден и Лебен, занимаясь тщательными экспериментами с твердым трением, обнаружили, что при некоторых условиях оно может служить причиной своеобразного прерывистого движения, и выдвинули *гипотезу о скачкообразной природе силы трения*. У лиц, знакомых с опытами Н. Л. Кайдановского и С. Э. Хайкина, сразу возникает подозрение, чтобы не сказать уверенность, что в опытах Боудена и Лебена мы просто имели дело с механическими разрывными колебаниями. Благодаря этой работе и возникшей в связи с ней полемике, механические разрывные колебания и сама работа, о которой идет речь, получили известность у довольно широкого круга физиков. Как я уже сказал, идея преодоления внутренних затруднений теории, порожденных идеализацией, путем введения новых постулатов была выдвинута в применении к задачам, связанным с твердым трением, Ф. Клейном и Л. Прандтлем в 1908 г. Идя в сущности в том же направлении, Л. Прандтль, опираясь на работу предшествующих исследователей и, в частности, использовав знаменитую гипотезу Чаплыгина — Жуковского о конечности скорости потока во всех точках плавно обтекаемого контура с острой кромкой (1909), выдвинул в 1918 г. перечень постулатов, которые необходимо добавить к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости, чтобы ее можно было рассматривать как предельный случай жидкости с исчезающе малым трением.

Л. И. Мандельштаму и Н. Д. Папалекси принадлежит та заслуга, что они выдвинули эту идею в применении к теории колебаний и, отчасти использовав разрозненные высказывания отдельных исследователей, создавали, может быть, и не вполне законченную, но последовательную и плодотворную теорию, или, лучше сказать, *концепцию* идеализации колебательных систем. Эта концепция послужила базой для строгой теории разрывных колебаний, и несомненно, что есть такие области

техники, в частности теория автоматического регулирования, которые ждут последовательного и конкретного применения этой концепции.

Я закончу этот раздел словами Л. И. Мандельштама о том, что правильный с точки зрения теории колебаний подход к вопросам идеализации лишь облегчает выбор математической модели, но «решающую роль играет талант и научный такт исследователя».

VI. Идея колебательной взаимопомощи различных областей физики и техники

Как уже было сказано, различные области физики и техники обладают сходными закономерностями. Но могут быть и специфические различия: одни колебательные вещи открыты и легко дискутируются в одной области, но те же (с точки зрения теории колебаний) вещи завуалированы и в силу этого иногда даже вообще неизвестны в другой области.

Идея Л. И. Мандельштама, которую я хочу сейчас изложить, заключается в том, чтобы вести атаку на колебательные закономерности одновременно с различных сторон, выбирая слабые места и используя результаты, полученные в одной какой-нибудь области (например, механике), во-первых, для обогащения теории колебаний и, во-вторых, для продвижения в другой области (например, радиотехнике). С этой идеей связана характерная особенность Л. И. Мандельштама — не решать, как правило, какую-нибудь одну изолированную проблему, подбирая к ней в случае надобности различные подходы, а, имея определенный теоретический подход, подбирать те жизненные проблемы, которые при этом подходе могут получить решение, или предстать в новом свете, или осветить темное место в самом подходе.

Примером такого «горизонтального распила» физической действительности, когда задачи из различных областей группируются вокруг одного теоретического подхода, являются исследования Л. И. Мандельштама, относящиеся к использованию разложения Фурье в теории линейных систем. Временная постоянная колебательного контура и разрешающая сила дифракционной решетки, боковые полосы при модуляции и комбинационное рассеяние, физическая реальность разложения Фурье и ложные структуры, видимы в микроскопе, и, наконец, быстрота телеграфирования и селективность в радиотехнике и принцип неопределенности в квантовой механике — все эти, казалось, весьма запутанные и ничем друг с другом не связанные понятия и вопросы выстроились здесь у Мандельштама в стройную единую систему. Особо следует отметить, что такие рассуждения, помимо внесения ясности в завуалированные проблемы оседлых областей и обогащения теории колебаний, часто превращались у Л. И. Мандельштама в предвидение новых, еще неизвестных явлений, которые потом могли быть найдены и фактически находились экспериментальным путем. Его возражения Планку основывались на перенесении радиотехнических рассуждений в оптику; его известная работа об

излучении источников света у поверхности раздела двух сред — на том же, причем здесь было предсказано, а затем и открыто новое оптическое явление. Его еще более известная, можно сказать знаменитая, работа о рассеянии света поверхностью жидкости — на перенесении на этот случай с надлежащей модификацией — рассуждений, связанных с объемным флуктуационным рассеянием света жидкостью, причем здесь также было предсказано, а затем и открыто новое оптическое явление.

Работа Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси о резонансе второго рода основана, грубо говоря, на перенесении астрономических результатов в радиотехнику, причем здесь было предсказано, а затем открыто и использовано для приема новое явление.

Мне хочется сейчас осветить некоторые особенности идеи колебательной взаимопомощи в отношении нелинейных задач теории колебаний. Я попытаюсь это сделать на нескольких примерах. В качестве таких примеров, пожалуй, проще всего взять устройства автоматического регулирования различного назначения, но я боюсь, что такие примеры покажутся тривиальными, так как интернаучный характер теории регулирования является привычным. Я поэтому возьму пару примеров из теории электрических машин и буду к ним подбирать другие вопросы, близкие с точки зрения теории колебаний, но далекие с обычной технической точки зрения.

Я начну с элементарной, линейной вещи. Пусть у меня имеется груз на пружине и колебательный контур. Пусть я интересуюсь относительно этих двух систем такими задачами, для которых можно считать выполненными обычные условия идеализации. Тогда для теории колебаний это один и тот же объект исследования. Вы имеете одно и то же. Это всем известное дифференциальное уравнение и одно и то же фазовое пространство — плоскость, разбитая на траектории семейством вложенных друг в друга эллипсов. Можно сказать, что это тривиально. «Но не тривиально то, что это тривиально», — говорил здесь Л. И. Мандельштам, т. е. не тривиально, что эта аналогия между колебаниями груза на пружине и колебаниями заряда или тока в контуре является настолько далеко идущей, что она стала привычным способом рассуждения у физиков, несмотря на то, что сами явления относятся к двум различным областям.

Возьмем другой, также элементарный и хорошо известный, но уже нелинейный пример.

Во-первых, рассмотрим, как это приходится делать в электротехнике систему, состоящую из синхронной машины и шин бесконечной мощности. Если воспользоваться обычной идеализацией и обычными обозначениями, кроме того, пренебречь потерями, то уравнения движения синхронной машины будут иметь вид:

$$K \frac{d^2 \vartheta}{d\tau^2} - P = q \sin \vartheta$$

где ϑ — угол, определяющий положение ротора относительно так называемой синхронной оси системы.

Во-вторых, рассмотрим так называемые «почтовые весы», несимметричный маятник, на который действует постоянный момент. Если пренебречь сопротивлениями, то мы будем иметь то же самое уравнение движения, как и в первом случае. Только здесь ϑ — угол отклонения маятника от вертикали. Таким образом, далеко идущая аналогия налицо. Она используется электротехниками.

Но существенная особенность колебательной взаимопомощи в теории нелинейных колебаний заключается в том, что здесь ценные выводы можно получить из сопоставления задач из различных областей, не требуя, чтобы эти задачи описывались совпадающими уравнениями. Достаточно, чтобы эти уравнения принадлежали к одному типу, имели сходное пространство. Я не буду сейчас уточнять эту мысль, а проиллюстрирую ее плодотворность на двух примерах, связанных с той же теорией синхронных машин, но уже менее элементарных.

В качестве первого примера сопоставим теорию качаний синхронного мотора и теорию симметричного полета самолета с фиксированным углом атаки.

Уравнения движения синхронного мотора при отсутствии демпферной обмотки и при использовании весьма далеко идущих, но обычных, упрощающих предположений могут быть записаны так:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = z, \quad \frac{dz}{d\tau} = A - \sin \vartheta + [B + C \sin \vartheta - D \sin^2 \vartheta] z$$

где ϑ — угол, характеризующий отклонение мотора от его синхронного хода, A, B, C, D — константы, характеризующие механическую нагрузку, момент инерции, омическое и индуктивное сопротивление якоря и т. д.

Уравнения движения самолета в вертикальной плоскости в предположении, что продольная ось самолета совпадает с направлением силы тяги винта и угол атаки остается постоянным, записываются при обычных упрощающих предположениях следующим образом:

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = z - \cos \vartheta, \quad \frac{dz}{d\tau} = 2z(\lambda - \mu z - \sin \vartheta)$$

где ϑ — угол между направлением скорости центра тяжести самолета и горизонтом, z — квадрат скорости центра тяжести, λ — коэффициент, характеризующий силу тяги винта, μ — коэффициент, характеризующий отношение лобового сопротивления к подъемной силе. Заметим, что при $\lambda = 0, \mu = 0$ мы получаем так называемый случай Жуковского, разобранный им в знаменитой работе «О парении птиц» в 1892 г.

На первый взгляд между этими двумя задачами мало общего.

Но сведите задачи эти к соответствующим разбиениям фазовых цилиндров на траектории, и вы увидите сразу большое сходство. И тут и там будут решать дело, т. е. определять поведение системы, кроме начальных условий, те же самые немногие особые траектории состояния равновесия, предельные циклы двух типов (охватывающие и не охватывающие цилиндр)

и так называемые сепаратрисы, хотя физический смысл этих особых траекторий в обеих задачах будет совершенно различный. Состояние равновесия в первой задаче — это синхронное вращение мотора; состояние равновесия во второй задаче — это прямолинейный полет самолета. Предельный цикл, охватывающий цилиндр, в первой задаче — это выпадение мотора из синхронизма; такой же цикл во второй задаче — это мертвая петля или, точнее, петлеобразное движение самолета. Предельный цикл, не охватывающий цилиндр в первой задаче, — это стационарные качания, т. е. автоколебания синхронного мотора; такой же цикл во второй задаче — это стационарный волнообразный полет самолета. Если эти замкнутые траектории устойчивы по Ляпунову, то они всегда могут быть физически реализованы подходящим выбором начальных условий (в частности, волнообразное движение самолета всегда неустойчиво, а петлеобразное устойчиво).

[Не правда ли, сколь различные вещи называются здесь одинаковыми словами: состояние равновесия, предельный цикл и т. д.? Но самое существенное, по Л. И. Мандельштаму, здесь то, что, занимаясь теорией качаний синхронного мотора, вы обогащаете не только эту теорию, не только теорию электрических машин и электротехнику, но и саму теорию колебаний и приобретаете опыт и интуицию для плодотворной работы в другой области со сходными закономерностями, в данном случае в области теории симметричного полета самолета.

В качестве второго примера сопоставим теорию параллельной работы трех синхронных машин и так называемую ограниченную задачу трех тел.

Пусть мы имеем дело с тремя параллельно работающими синхронными машинами. Если мы примем консервативную идеализацию, которая в этом случае оказывает большие услуги инженерам, и рассмотрим так называемый случай компенсации механических мощностей (практически интересный), то исследование нормальных режимов параллельной работы трех таких машин и исследование всевозможных переходов от одного режима к другому сводится к рассмотрению решений системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{\partial U}{\partial \psi}$$

причем

$$2T = A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\psi}^2 - C\dot{\varphi}\dot{\psi},$$

$$2U = p_1\varphi + p_2\psi + q_{12}\cos(\varphi - \psi) + q_{13}\cos\varphi + q_{23}\cos\psi$$

где $\varphi = \vartheta_1 - \vartheta_2$, $\psi = \vartheta_2 - \vartheta_3$ — разности углов, определяющих положение роторов соответствующих машин относительно некоторого вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью, а $A, B, C, p_1, p_2, q_{12}, q_{13}, q_{23}$ — постоянные параметры, характеризующие моменты инерции роторов, извне вводимые и отводимые мощности, сопротивления соединительных проводов и т. д. Этой важной задаче посвящена интересная работа профессора А. А. Горева «К вопросу об устойчивости параллельной работы системы синхронных машин», относящаяся к 1934 г. Она же занимает

большое место и в учебнике профессора А. А. Горева, трактующем вопросы устойчивости параллельной работы электрических станций и районных объединений.

А теперь рассмотрим задачу совсем из другой области, из области астрономии, так называемую ограниченную задачу трех тел.

Теперь исследуемая система состоит из двух тел конечной массы (которые можно условно назвать Солнцем и Юпитером), обращающихся по кругам вокруг их общего центра инерции, и из третьего тела, так называемой планеты нулевой массы, которая движется в той же плоскости, подвергаясь притяжению Солнца и Юпитера, но сама их не притягивает и не нарушает их круговых движений. Если выбрать надлежащие единицы, то, как это можно прочесть во всех учебниках, уравнения движения нулевой массы примут вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

причем

$$2T = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2(\dot{x}\dot{y} - y\dot{x}), \quad 2\Omega = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2}$$

где x и y — декартовы координаты нулевой массы во вращающейся системе, r_1 и r_2 — расстояния до этого тела от Солнца и Юпитера, а $1-\mu$ и μ суть массы последних в принятых единицах. Американский астроном Хилл в работе, относящейся к 1877 г., изучил в этой задаче так называемые поверхности нулевых скоростей

$$\Omega = h = 0$$

и получил возможность ответить на ряд вопросов, относящихся к устойчивости в большом, в частности на вопрос о том, удалится ли (при данных начальных условиях) нулевая масса в бесконечность или навсегда останется на конечном расстоянии от начала координат. Эта работа Хилла — классическая, делающая Хилла наряду с Пуанкаре основоположником качественных методов в небесной механике.

Что делает Горев в своей задаче? Оказывается, Горев в сущности делает то же самое, что и Хилл. Горев изучает кривые, служащие также для решения ряда вопросов устойчивости в большом. Уравнения различны. Различна и качественная структура фазового пространства. Но ряд вопросов, ряд приемов исследования совпадают. Горев для другой задачи и в несколько другом разрезе в сущности повторяет исследования Хилла. Аналогия с Хиллом проливает яркий свет на все построения и вычисления Горева. Если вы знаете Хилла, вы сразу чувствуете себя в работе Горева как дома, хотя выкладки у Горева сложнее, так как число независимых параметров больше и так как вы имеете дело с кривыми на поверхности тора, а не с кривыми на плоскости.

Этих двух примеров, я думаю, будет достаточно. Само собой разумеется, что таким же примером может служить теория резонанса второго рода, о которой я уже неоднократно упоминал.

Несомненно, что плодотворная мандельштамовская идея колебательной взаимопомощи не только не исчерпана в своих выводах, но можно сказать, что здесь сделаны только самые первые шаги.

Заключение

Основной центр исследований в области теории нелинейных колебаний находился в 1907—1921 гг. в Германии, в значительной мере благодаря Баркгаузену. Основные работы, относящиеся к 1922—1929 гг., были выполнены в Голландии — я имею в виду работы Ван дер Поля. Приблизительно с 1930 г. основной центр исследований по теории нелинейных колебаний находится в СССР, чем мы обязаны в первую очередь Л. И. Мандельштаму.

Идеи Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний, о которых я здесь пытался дать некоторое представление, имеют непреходящее значение. Этим идеям предстоит интенсивное развитие и богатая событиями жизнь.

И. А. ВЫШНЕГРАДСКИЙ И ЕГО РОЛЬ В СОЗДАНИИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ¹

Введение

Деятельность Ивана Алексеевича Вышнеградского (1831 — 1895) можно изучать в ряде аспектов, конечно взаимно связанных между собой.

Во-первых, можно рассматривать Вышнеградского как выдающегося ученого, основоположника теории автоматического регулирования. Знаменитая работа Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1877) ответила на жизненно важные вопросы практики регуляторостроения и составила эпоху в теории регулирования. Несомненно ее фундаментальное влияние как на практику регуляторостроения, так и на все дальнейшее развитие теории регулирования. Существенное значение имеет и другая работа Вышнеградского — «О регуляторах непрямого действия» (1878), посвященная некоторым нелинейным задачам теории регулирования.

Во-вторых, можно изучать деятельность Вышнеградского как выдающегося профессора, создателя первой русской школы научно образованных инженеров-машиностроителей и одного из наиболее видных организаторов высшего технического образования в России. Можно сказать, что в XIX в. в России были две основные линии в деле преподавания и две научные школы в области машиностроения. Одна из этих линий связана с Вышнеградским и с Петербургским технологическим институтом, другая линия, другая школа, несколько позднее начавшая свою деятельность, — с Московским высшим техническим училищем, с Ф. Е. Орловым, с Н. Е. Жуковским.

В-третьих, Вышнеградский, хотя и математик по образованию, был выдающимся инженером-практиком, по проектам и планам которого построены и переоборудованы десятки крупнейших промышленных предприятий. Значительная часть этих предприятий — патронные, пороховые, оружейные и пушечные заводы. Роль Вышнеградского в реформах русского артиллерийского дела, начавшихся в 1863 г., весьма значительна. В сущности именно на Вышнеградского в 1862—1878 гг. легла задача

¹ Доклад на сессии Отделения технических наук АН СССР в январе 1949 г. в Ленинграде. Опубликовано в Известиях АН СССР, ОТН, 1949, № 6, с. 805—818, а затем с незначительными изменениями в книге: Вопросы истории отечественной науки. Общее собрание АН СССР, посвященное истории отечественной науки, 5—11 I 1949 г. Изд. АН СССР. Последний вариант и воспроизводится здесь.

постройки и переоборудования заводов артиллерийского ведомства и организация массового производства артиллерийских боеприпасов.

В-четвертых, Вышнеградский — выдающийся популяризатор и пропагандист в области точного естествознания и техники. Его лекции по механике, его знаменитые публичные популярные лекции о машинах, его лекции об основных законах механической теории теплоты привлекали большую аудиторию и, будучи изданы, пользовались большой известностью. Существенно отметить, что не только сам Вышнеградский прочитал много публичных лекций, но что к этому делу популяризации и пропаганды науки он привлек ряд своих учеников и сотрудников.

В-пятых, можно рассматривать деятельность Вышнеградского как члена или председателя правлений различных промышленных, железнодорожных и других предприятий, как крупного акционера-биржевика и представителя финансовой плутократии.

В-шестых, представляет несомненный интерес необычная биография Вышнеградского, отражающая индивидуальные черты самого Вышнеградского. Сын провинциального священника, явившийся в Петербург чуть ли не пешком, без средств и связей, подлинный и беднейший разночинец, несомненно, весьма талантливый и необыкновенно энергичный, становится знаменитым профессором, создателем школы в области прикладной механики и машиностроения, автором замечательных работ, заложивших основы теории регулирования. Этот выдающийся ученый делается затем членом правлений ряда железных дорог и других промышленных предприятий, акционером, биржевиком и банковским дельцом и, наконец, когда он уже почти забросил свои ученые и инженерные занятия, назначается министром финансов Российской империи.

Биография Вышнеградского представляет интерес также и потому, что он был связан со многими выдающимися людьми своего времени. В частности, он хорошо был знаком с Д. И. Менделеевым, которого он «приютил» (выражение К. А. Тимирязева) в министерстве финансов, после того как великий химик был вынужден уйти из Петербургского университета; Менделеева он привлек к выработке таможенного тарифа; ему он поручил организацию палаты мер и весов при министерстве финансов; Вышнеградский имел дружеские отношения с Н. П. Петровым — «отцом гидродинамической теории трения», а также с А. В. Гадолиным — выдающимся специалистом по артиллерийской технологии и известным кристаллографом, со многими другими лицами.

Само собой разумеется, что в настоящем докладе я смогу осветить лишь роль Вышнеградского в создании теории автоматического регулирования, которая часто искажалась и замалчивалась. Мне кажется, что в этот вопрос, особенно сейчас, когда автоматическое регулирование и управление приобрело громадное народнохозяйственное и оборонное значение, следует внести полную ясность. Деятельность Вышнеградского в качестве биржевика, а затем и министра финансов не может заслонить ни его крупнейших научных результатов в области теории автоматического

регулирования, ни его заслуг как главы первой, начинающей свою деятельность еще в 60-х годах прошлого столетия русской школы в области прикладной механики и машиностроения. Приступая к изложению заслуг И. А. Вышнеградского, мне хочется отметить, что многие положения моего сегодняшнего доклада были продуманы во время моих бесед с покойным членом-корреспондентом АН СССР Иваном Николаевичем Вознесенским.

Состояние теории регулирования до появления работы И. А. Вышнеградского

На первый взгляд кажется, что принцип действия обычного центробежного регулятора настолько очевиден, что знание механики позволит быстро провести все необходимые технические расчеты. Однако это дело оказалось совсем не простым. Когда во второй половине прошлого столетия практика настоятельно потребовала от только что возникшего научного машиностроения ответа на вопрос, как рассчитать регулятор, как заранее теоретически определить его конструктивные данные, так, чтобы он безотказно работал, это вызвало большие затруднения. Актуальность и жизненность задачи вызвали появление большого числа теоретических работ, но до Вышнеградского эти работы почти ничего не давали практике.

Я не буду останавливаться подробно на работах, в которых рассматривался регулятор статически. В этих работах угловая скорость машины считалась заданной и регулятор рассматривался в сущности как тахометр, конфигурация которого зависит от заданной угловой скорости. Такие конфигурации могли быть устойчивыми и неустойчивыми. Считалось, что лишь регуляторы, устойчивые в этом статическом смысле, могут быть практически использованы. В частности, особенно добивались, считая их наиболее точными, так называемых астатических тахометров, т. е. таких тахометров, которые могли бы находиться в равновесии только при одной определенной угловой скорости. Простейший пример такого тахометра — так называемый параболический тахометр, сконструированный так, что шары центробежного маятника двигаются в нем по параболе. Полагали, что применение таких астатических регуляторов обеспечивает поддержание строго определенной угловой скорости машины при различных нагрузках, так как при этой угловой скорости его равновесие безразлично и он может открыть заслонку ровно настолько, насколько это нужно, чтобы скомпенсировать изменение внешнего момента.

Эти неясные рассуждения не имели под собой настоящего механического обоснования. Как выяснилось позже, эти статические условия устойчивой работы не были ни необходимыми, ни достаточными.

Не будем подробнее останавливаться на этих статических исследованиях и перейдем к работам, которые рассматривали динамику регулирования, т. е. динамику системы, состоящей из двух объектов — машины и регулятора, между которыми имеется динамическое взаимодействие. Такое динамическое взаимодействие при теоретическом исследовании требует

составления уравнений движения и их интегрирования, точного или приближенного. Таким образом, возникающая динамическая задача отнюдь не проста, и понадобилось довольно много времени с момента постановки проблемы, прежде чем здесь добились настоящего успеха.

Первая работа по динамике регулирования (Эри, 1840) была вызвана потребностями практики астрономических исследований. Астрономы уже в течение долгого времени употребляли специальные двигатели, так называемые фрикционные часовые механизмы, которые позволяли экваториалу автоматически следить за видимым движением звезды.

Такой фрикционный часовой механизм является в сущности некоторым фрикционным регулятором. В простейшем случае этот механизм состоит из центробежного маятника, плечи которого при увеличении угловой скорости раздвигаются и грузы трутся о внутреннюю поверхность круглого корпуса часового механизма. При увеличении угловой скорости возрастает порождаемый шарами момент силы трения; при уменьшении угловой скорости момент силы трения уменьшается. Таким образом регулируется угловая скорость вращения. Хотя такой фрикционный регулятор и не дает той точности, которая требуется, например, в обычных часах, но он все же создает достаточную для обычных астрономических целей равномерность вращения экваториала.

Эри заметил, что весьма часто работа таких часовых механизмов сопровождается нежелательными колебаниями. Он задался целью теоретически рассмотреть этот вопрос и найти при помощи теории средство для борьбы с этими явлениями. Сделав некоторые предположения о зависимости момента силы трения от угла раскрытия шаров центробежного маятника и не принимая во внимание трений в муфте и сочленениях самого регулятора, он составил уравнения движения и стал их интегрировать, но не владел тем, что мы сейчас называем теорией малых колебаний вокруг состояния установившегося движения, поэтому его выкладки чрезвычайно громоздки и напоминают выкладки астрономической теории возмущений.

Из своей теории, не учитывающей трения, Эри сделал вывод, что рассматриваемые им регуляторы всегда работают неустойчиво. Этот пессимистический вывод заставил его прийти к мысли, что нужно как-то существенно изменить конструкцию.

В дальнейшем Эри приспособил к часовому механизму так называемый катаракт, особый прибор, который присоединяется к муфте регулятора и создает пропорциональное скорости перемещения муфты регулятора трение, которое можно изменять по желанию конструктора. При помощи такого катаракта ему удалось сконструировать регуляторы, которые работали без вредных колебаний. Однако теории регулятора с катарактом, в частности условий устойчивой работы такой системы, Эри не дал. Не владея теорией малых колебаний вокруг состояния установившегося движения, это сделать не так просто.

Следующей работой в теории регулирования, имеющей существенно

большее значение, была работа знаменитого английского физика Джемса Клерка Максвелла «О регуляторах» (1868). Появление этой работы также связано с некоторой своеобразной конкретной задачей. Примерно около этого времени сотрудник Максвелла инженер Флеминг Дженкин изобрел особый тип регулятора, который существенно отличался как от обычного центробежного регулятора, так и от того фрикционного регулятора, о котором только что была речь. Регулятор состоял из центробежного маятника, шары которого, раскрываясь, касались внутренней поверхности специального кольца, которое могло вращаться вокруг оси симметрии. Кольцо находилось под действием постоянного момента, порождаемого специальным грузом, и было связано системой рычагов с заслонкой. По идее такой регулятор должен был бы поддерживать число оборотов машины постоянным, несмотря на изменение нагрузки. В современной терминологии этот регулятор можно назвать астатическим регулятором специальной конструкции. Регулятор Флеминга Дженкина работал далеко не всегда хорошо. При его работе часто возникали нежелательные колебания.

Максвелл заинтересовался условиями устойчивой работы регулятора Флеминга Дженкина, а также условиями устойчивой работы других аналогичных астатических регуляторов. Он понял, что условия устойчивой работы таких систем можно получить сравнительно просто, воспользовавшись теорией малых колебаний вокруг состояния установившегося движения. Дело в том, что Максвелл раньше занимался близкими с точки зрения теоретической механики вопросами в своей замечательной работе об устойчивости кольца Сатурна. В работе «О регуляторах» Максвелл линеаризирует рассматриваемые им задачи об устойчивости движения машин, снабженных различными астатическими регуляторами, и сводит вопрос об устойчивости к алгебраической задаче — к исследованию корней так называемого характеристического уравнения. По Максвеллу, установившееся движение системы машина — регулятор будет устойчиво, если все корни этого характеристического уравнения будут иметь отрицательные действительные части. При этом Максвелл утверждает, что явление самораскачивания системы машина — регулятор, возникающее при изменении какого-либо параметра, связано с переходом из области устойчивости, где все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, в область неустойчивости, где хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть. Максвелл был в состоянии найти такие условия лишь для уравнений третьей степени. В том же 1868 г. в Лондонском математическом обществе Максвелл поставил вопрос, занесенный в протокол, не может ли кто-нибудь из членов Общества указать такие условия или указать метод, при помощи которых такие условия могут быть найдены.

Проблему, поставленную Максвеллом, через несколько лет для уравнений четвертой и пятой степеней решил Раус. В 1877 г. тот же Раус в написанной по предложению Максвелла и Стокса работе «Устойчивость

заданного состояния движения» решил эту задачу в общем виде, или, точнее, дал алгоритм, при помощи которого задача могла быть последовательно решена для характеристического уравнения любой степени.

Работа Максвелла — существенный шаг вперед в области теоретической механики. Во многих отношениях эта работа представляет значительный интерес. Простое сопоставление работ Эри и Максвелла показывает, каким крупным шагом в деле создания теории регулирования был переход к рассмотрению устойчивости движения системы машина — регулятор методом малых колебаний.

Но не с Максвелла начинается теория регулирования машин, отвечающая на запросы промышленной практики. Максвелл был физиком, а не инженером. Это сказалось прежде всего на выборе тех систем регуляторов, теорией которых он начал заниматься. Изобретение Флеминга Дженкина, о котором была речь, несомненно, очень остроумно, но поддержание с высокой точностью числа оборотов отнюдь не было жизненной задачей промышленной техники времен Максвелла. Этим изобретением заинтересовались физики и астрономы. Например, лорд Кельвин посвятил ему особую статью, правда не дав настоящей теории его действия. Но среди инженеров это изобретение не встретило большого энтузиазма; и после работы на нескольких опытных установках оно было забыто. Примерно такую же судьбу имели и другие типы астатических регуляторов, которыми занимался Максвелл.

Особо следует отметить, что Максвелл прошел мимо теории обычного центробежного регулятора Уатта. Он даже отказал ему в названии «регулятор», относя его к так называемым модераторам. Это обстоятельство, т. е. то, что он занимался не интересными для техники регуляторами, значительно обесценило его работу в глазах инженеров. Но, пожалуй, существеннее было другое: Максвелл, применяя теорию малых колебаний к движению системы машина — регулятор, не отдавал себе ясного отчета в относительной величине коэффициентов соответствующих систем линейных дифференциальных уравнений движения. Можно сказать и иначе: Максвелл не отдавал себе отчета, какие именно физические факторы обуславливают на практике устойчивую работу обычной паровой машины, снабженной обычным центробежным регулятором Уатта. Поэтому рекомендации, которые Максвелл в своей теории давал инженерам, и главная рекомендация — рекомендация астатического регулятора — были заведомо неправильны. Для машин с малым саморегулированием астатические регуляторы непригодны. Это было хорошо доказано впоследствии.

Максвелл написал условие устойчивой работы астатического регулятора в буквенной форме, учтя саморегулирование. Казалось бы, что здесь имеется прямое указание инженерам. Однако фактически для обычных машин это условие не могло быть выполнено, так как обычные машины не обладали заметным саморегулированием. Ни в выводах Максвелла, ни даже в его уравнениях инженеры не могли найти ясных указаний, как бороться с проявлявшейся во многих случаях склонностью паровых

машин, снабженных обычными регуляторами Уатта, к неустойчивой работе и к самораскачиванию.

Работа И. А. Вышнеградского о регуляторах прямого действия и ее значение для практики регуляторостроения

Теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики, впервые дана в работе Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876). Хотя и математик по образованию, Вышнеградский был инженером-практиком. Он поставил себе конкретную задачу рассмотреть движение обычной паровой машины, снабженной обычным центробежным регулятором. У Максвелла проблема теории регулирования рассматривается как проблема теоретической механики. У Вышнеградского теория регулирования — это глава курса, посвященного проектированию и конструированию паровых машин. Теоретическое рассмотрение Вышнеградский приводит в конце концов к компактным расчетным формулам и к элегантным графикам, позволяющим быстро использовать теоретические результаты на практике. !

Основная заслуга Вышнеградского в теории регулирования заключается в том, что он правильно сумел применить теорию малых колебаний к задаче о взаимодействии машины и регулятора. Особенно замечательна приспособленная к существу вопроса схематизация задач. Он учел то, что нужно было учесть, и отбросил все то, что излишне усложняло задачу и запутывало понимание динамики процесса регулирования. Вышнеградский учел трение, рассматривая катаракт, порождающий вязкое трение. Он не мог этого не сделать, так как если бы он отбросил трение, он получил бы неустойчивость. Он не мог учесть в своей окончательной схеме, связанной с теорией малых колебаний, кулоновское трение, так как тогда задача получается нелинейной и решение становится очень сложным. Однако в некоторых начальных формулах у Вышнеградского фигурирует кулоновское трение, которое ему необходимо, чтобы ввести понятие «чувствительность регулятора».

Весьма существенно и не тривиально, что Вышнеградский сразу отказывается от учета саморегулирования машины, так как обычные промышленные паровые машины его времени обладали малым саморегулированием, не имевшим практического значения.

Провести такую правильную схематизацию было далеко не просто. Максвелл учел трение, но наряду с этим учел и саморегулирование, отбросил неравномерность и получил выводы, не имеющие практического значения.

Вормс де Ромильи рассматривал ту же задачу, что и Вышнеградский, но, не учтя трения, пришел к парадоксальному выводу, что все регуляторы неустойчивы.

Каргль, рассматривавший проблему регулирования паровой машины, у которой регулятор управляет отсечкой пара, пришел к гораздо более

сложной математической проблеме, которую он не сумел решить до конца.

Можно сказать, что Вышнеградский впервые правильно схематизировал проблему движения обычной паровой машины, снабженной обычным центробежным регулятором Уатта, и положил начало теории регулирования, способной оказывать существенную помощь регуляторостроению.

Вышнеградский рассматривает особую упрощенную схему изменения нагрузки. Он считает, что имеет место мгновенное изменение нагрузки на определенную конечную величину, и рассматривает поведение системы машина — регулятор после такого мгновенного изменения, полагая, что в дальнейшем нагрузка уже не претерпевает никаких изменений и что машина работает при постоянной нагрузке, взаимодействуя с регулятором. Устойчивость такого движения он сводит при помощи теории малых колебаний к исследованию характеристического уравнения третьей степени.

Конечные результаты теории он выражает компактной формулой и оригинальным и остроумным графиком. Формула и график позволяют быстро использовать на практике результаты теоретического исследования. График, или так называемая диаграмма Вышнеградского, дает наглядную картину, как меняется устойчивость системы в зависимости от конструктивных параметров машины и регулятора. Так как Вышнеградский применяет теорию малых колебаний и линеаризует уравнение движения, устойчивость регулирования и у него не зависит от величины сброса нагрузки.

Из формулы или из диаграммы непосредственно следует ряд очень важных высказываний. Можно утверждать, что:

- 1) приведенные массы регулятора вредно влияют на устойчивость;
- 2) без трения не может быть устойчивой работы регулятора;
- 3) необходима определенная неравномерность регулятора, т. е. нужно, чтобы при изменении нагрузки несколько менялась установившаяся угловая скорость;
- 4) момент инерции влияет положительно на устойчивость, т. е. чем больше момент инерции, тем мы дальше от неустойчивости.

Чтобы сделать для инженеров свои выводы доступными и привлечь внимание к наиболее важным из них, Вышнеградский формулирует в конце работы свои знаменитые тезисы.

Первый тезис: катаракт есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Второй тезис: астатические регуляторы (т. е. регуляторы с нулевой неравномерностью) даже и с катарактом не должны быть употребляемы, короче: «без неравномерности нет регулятора».

Эти выводы Вышнеградского создали эпоху в теории регулирования. Динамика системы машина — регулятор стала ясной, понятным стало и то, в какую сторону нужно изменять те или иные конструктивные параметры, чтобы увеличить устойчивость системы.

Чтобы уяснить, что именно здесь сделал Вышнеградский, нужно сравнить его работу с работой Максвелла о регуляторах, о которой была уже речь. Приведу свою беседу по этому поводу с членом-корреспондентом АН СССР Иваном Николаевичем Вознесенским, умершим в 1946 г., виднейшим советским инженером, специалистом в области гидравлики и регулирования. Когда я ему принес фотокопию работы Максвелла 1868 г., где были приведены линейные уравнения ряда астатических регуляторов, выписаны условия их устойчивой работы и где Максвелл рекомендует инженерам астатический регулятор, Иван Николаевич воскликнул: «Вот удивительное дело. По существу при помощи одной и той же теории малых колебаний, пользуясь одним и тем же условием отрицательности действительных частей корней кубического уравнения, Максвелл с точки зрения практики запутал вопрос, а Вышнеградский его распутал».

И дальше сказал: «Конечно, работа Максвелла весьма интересна. Опираясь на нее, можно изучать в общем виде теорию взаимодействия машины и регулятора. Но только после Вышнеградского инженеры смогли понять, что им нужно делать, чтобы иметь устойчивое регулирование». Может быть, слово «запутал» следовало бы смягчить, хотя оно и правильно характеризует значение выводов Максвелла для практики регуляторостроения. И если задать простой вопрос, кто же первый дал теорию работы машины, снабженной обычным центробежным регулятором Уатта, то ответ будет: эту теорию дал Вышнеградский.

Следует подчеркнуть — на этом останавливаться мы не будем, — что Вышнеградский дал не только теорию расчета регулятора, в частности расчета его устойчивости, но, насколько я знаю, ему же принадлежит первое исследование качества переходного процесса. Этого исследования нет в русском варианте работы о регуляторах прямого действия, но оно составляет § 14 немецкого варианта.

Не останавливаясь подробно на этом добавлении, отметим только, что в нем Вышнеградский отчетливо указывает, что если мы хотим иметь регулятор с малой неравномерностью, то мы не должны стремиться, чтобы все корни кубического уравнения были отрицательными и действительными. Или, иначе, очень трудно, практически почти невозможно, осуществить такой регулятор, который имел бы малую неравномерность и для которого переходный процесс был бы монотонным. Интересно отметить, что Вышнеградский понимает, что монотонный процесс может быть и в случае комплексных корней, и, наоборот, понимает, что если даже все три корня характеристического уравнения действительны и отрицательны, то при некоторых определенных условиях все же может быть несколько колебаний. Несомненно, что и в этом пункте, т. е. в вопросе теоретического исследования качества переходного процесса, и в понимании динамики такого процесса Вышнеградский значительно опередил свое время.

Перейдем теперь к оценке того состояния, в котором находилась теория регулирования к моменту появления работы Вышнеградского. Центробежные регуляторы, которые ставились на паровые машины

в конце XVIII в., честно работали. Такая честная и безотказная работа регуляторов продолжалась до половины XIX в. Но когда мощность паровых машин стала увеличиваться, машины стали более быстроходными и массы регуляторов возросли, работа регуляторов стала довольно часто сопровождаться вредными колебаниями, самораскачиванием.

Зная результаты работы Вышнеградского, можно легко разобраться, в чем дело. Согласно Вышнеградскому, для устойчивой работы регулятора необходимо трение. Но качество регуляторов, шарниров и обработка трущихся частей значительно улучшились к концу 50-х годов XIX в. Таким образом, трение стало значительно меньше. С другой стороны, массы регуляторов увеличились, так как появилась необходимость передвигать заслонки у машин, обладающих значительно большей мощностью, а в связи с увеличившимся числом оборотов машин стали уменьшать моменты инерции маховиков. Кроме того, так как инженеры не знали, что малая неравномерность вредно влияет на устойчивость, а им хотелось, чтобы число оборотов возможно меньше менялось при изменении нагрузки, регуляторы стали делать с очень малой неравномерностью. Все эти причины, как не трудно усмотреть из формулы или из диаграммы Вышнеградского, вредно влияют на устойчивость. Отсюда ясна причина отказа в работе регуляторов.

Ввиду того что неустойчивость работы регуляторов обнаруживалась довольно часто, конструкторы стали думать (до появления работы Вышнеградского) об изменении самого принципа, на котором построен регулятор Уатта. Полагали, что регулятор, который начинает отклоняться лишь после изменения угловой скорости, принципиально неудовлетворителен, что нужно регулировать так, чтобы регулятор начинал отклоняться в момент появления углового ускорения еще тогда, когда угловая скорость не успела измениться.

Высказывались и другие идеи, как нужно строить регуляторы, отличающиеся от уаттовского. Однако регуляторы, построенные по этим новым принципам, часто также работали неудовлетворительно. Работа Вышнеградского появилась как раз в острый момент в регуляторостроении, и ее значение было поэтому очень велико.

Через несколько лет после работы Вышнеградского, когда результаты ее получили распространение, инженеры стали понимать, в какую сторону нужно менять параметры, чтобы получить надежную и устойчивую работу регулятора. Они стали ясно представлять себе вредное влияние на устойчивость массивных регуляторов и полезное влияние момента инерции и неравномерности.

Значительно труднее было понять тезис о катаракте, которому Вышнеградский придал такую заостренную форму. Инженеры хорошо знали, что существуют надежно работающие регуляторы, не снабженные какими-либо специальными катарактами, порождающими вязкое трение. Однако постепенно они уяснили себе, что вязкое трение, или, что то же самое, катаракт, на практике может быть заменено обычным кулоновским тре-

нием, которое всегда существует в сочленениях регулятора. Тезис Вышнеградского «без катаракта нет регулятора» стали понимать как тезис «без трения нет регулятора» и считать, что для получения качественных результатов вместо кулоновского трения в уравнение движения нужно вносить некоторое эквивалентное вязкое трение.

Признание заслуг И. А. Вышнеградского в создании теории регулирования

Перейдем к вопросу о признании заслуг Вышнеградского в создании теории регулирования. Мы здесь отметим много парадоксального. А. И. Сидоров в книге «Плоские регуляторы» (1892) обнаружил полное непонимание работы Вышнеградского и дал этой работе неправильную оценку.

Н. Е. Жуковский в «Теории регулирования машин» (1909), самой распространенной книге по теории регулирования в России, содержащей замечательное изложение классической теории регуляторов прямого действия и некоторые существенные новые результаты, указывает, что Вышнеградский совершил ошибку в своем исследовании, не учтя того, что он имел дело с уравнением, обладающим разрывной правой частью, и что ему нужно было при каждом размахе выбирать новые константы интегрирования.

В. Д. Кирпичев, несмотря на то, что был учеником Вышнеградского и питал к нему большое уважение, отмечает в «Беседах по механике», что в первых работах по регулированию (само собой разумеется, что здесь имеются в виду работы Вышнеградского) неправильно продифференцировано кулоновское трение, так как авторы забыли о его разрывном характере и потому получили неправильные результаты.

В другой известной русской книге по теории регулирования машин, книге Е. Л. Николаи, совсем не упоминается имени Вышнеградского.

В ряде иностранных книг также встречается отрицательная оценка работы Вышнеградского и указания на его ошибку. Спрашивается, в чем здесь дело? Откуда взялось такое отношение к этой замечательной работе?

Повидимому, определенную роль здесь сыграл А. И. Сидоров, который не только в книге «Плоские регуляторы» (1892), но и в ряде других книг, говоря о работе Вышнеградского, указывал на наличие в ней ошибки. Но главную роль в этом отрицательном отношении сыграла книга французского инженера Лекорню (1897), так как большинство авторов (в том числе Н. Е. Жуковский), упоминая об ошибке Вышнеградского, ссылаются на Лекорню.

Эта недооценка работы Вышнеградского не смогла помешать распространению его заслуг как в России, так и за границей. Особая роль Стодолы в этом деле будет отмечена ниже. Трудно перечислить все книги и статьи, где говорится о заслугах Вышнеградского в создании теории регулирования. Я упомяну лишь о нескольких. В книге немецкого инженера Хорта «Техническая теория колебаний» и в его статье, посвященной истории теории регулирования и прерывистому регулированию, прямо

указывается, что работа Вышнеградского о регуляторах прямого действия, в частности его знаменитые тезисы, лежит в основе современной теории регулирования. В книге немецкого инженера Лоренца «Техническая механика», получившей широкое распространение и переведенной в свое время на русский язык, написано, что теория движения машины, снабженной регулятором Уатта, впервые была дана Вышнеградским.

Из статей, опубликованных в СССР, особо нужно отметить статьи покойного члена-корреспондента АН СССР И. Н. Вознесенского. В настоящее время в СССР в значительной мере благодаря И. Н. Вознесенскому роль И. А. Вышнеградского в создании теории регулирования является общепризнанной.

За границей, особенно в Америке, за последние годы положение изменилось, и там роль И. А. Вышнеградского в создании теории регулирования часто замалчивается. В роли основоположников теории регулирования за границей нередко фигурируют лица (Толле, Тринкс и др.), которые являются компиляторами и педагогами, но отнюдь не создателями этой теории. В связи с этим следует особо отметить книгу американца Тринкса, изданную в Нью-Йорке в 1919 г., в которой можно прочесть, что работа Вышнеградского лежит в основе современной теории регулирования. Тринкс отмечает, что эта работа не получила той известности, которой заслуживала; сам же он оценивает ее очень высоко.

Как же фактически обстоит дело с ошибкой Вышнеградского? Из статьи Вышнеградского и сопоставления ее с немецким вариантом той же статьи и с его заметкой в докладах Парижской Академии наук совершенно ясно, что никакой математической ошибки у Вышнеградского нет, что никакого разрывного члена он не дифференцировал. И в русском варианте работы сказано вполне определенно, что кулоновское трение рассматривается временно, с тем, чтобы в дальнейшем его отбросить. В немецком варианте выписаны соответствующие выражения без кулоновского трения. Кроме того, отчетливо указано, особенно в заметке в докладах Парижской Академии наук, что и в отсутствие катаракта регуляторы могут устойчиво работать. Откуда же тогда тезис Вышнеградского о катаракте?

Происхождение этого тезиса ни с какой математической ошибкой не связано. Как мы отмечали, Вышнеградский не допускал наличия сколь угодно заметной нечувствительности у регулятора. Он считал поэтому неправильным использование кулоновского трения для стабилизации движения системы «машина — регулятор» и полагал, что необходимо максимально уменьшать кулоновское трение и добиваться устойчивости путем использования катаракта.

С современной точки зрения заключение Вышнеградского не совсем правильно, так как во многих случаях можно добиться устойчивого процесса регулирования при таком кулоновском трении, которое создает нечувствительность, вполне терпимую на практике. Но это отнюдь не порочит работы Вышнеградского: то, что Вышнеградский впервые сделал прозрач-

ным самый механизм взаимодействия регулятора с машиной, то, что он выявил роль массы, роль трения и роль неравномерности, — все это остается в полной силе.

Развитие теории регулирования после Вышнеградского

Попробуем теперь кратко охарактеризовать развитие теории регулирования после Вышнеградского. Уже ко времени появления работы Вышнеградского получили широкое распространение наряду с обычными регуляторами так называемые регуляторы непрямого действия. В этих регуляторах перемещение заслонки, управляющей доступом пара в машину, совершается не непосредственно чувствительным элементом. Чувствительный элемент здесь совершает лишь сцепление и расцепление механизма, передвигающего заслонку, с главным валом машины. Энергия для перемещения заслонки доставляется валом машины. Такая система обладала разрывным действием. Линеаризовать такую систему для удобства теоретического рассмотрения было невозможно, приходилось по существу решать сложную нелинейную задачу.

Этими нелинейными задачами Вышнеградский занялся в своей второй работе «О регуляторах непрямого действия», представляющей значительный теоретический интерес. В сущности в мировой науке это первая работа по нелинейной теории регулирования, однако результаты ее по своему значению все же не могут сравниться с результатами первой работы о регуляторах прямого действия. Дело в том, что в момент появления этой работы Вышнеградского регуляторы непрямого действия, теорией которых он занимался, уже стали выходить из употребления. Появились регуляторы непрямого действия, основанные на другом принципе. В этих новых регуляторах чувствительный элемент передвигал золотник особого гидравлического или масляного мотора, поршень которого был связан с заслонкой. Гидравлический мотор имел так называемую жесткую обратную связь, которая позволяет соподчинить положение поршня гидравлического мотора и положение муфты регулятора.

Гидравлический мотор с жесткой обратной связью получил название сервомотора. Введение таких сервомоторов означало существенный успех в практике регуляторостроения. Особенное значение это имело при регулировании водяных турбин, где передвижение заслонок требовало больших усилий и где введение регуляторов непрямого действия нового типа дало возможность много эффективнее разрешить всю проблему. Здесь необходимо отметить следующее. При непрямом регулировании без жесткой обратной связи заслонка обычно движется от одного упора до другого. При непрямом регулировании с жесткой обратной связью отклонения заслонки от равновесного положения во время переходного режима оставались сравнительно незначительными, и это позволяло считать скорость поршня гидравлического сервомотора приблизительно пропорциональной смещению золотника из равновесного состояния и рассматривать в конце концов всю проблему как линейную.

Такую линеаризацию проблемы непрямого регулирования провел, следуя Вышнеградскому, инженер и профессор Цюрихского политехникума Аурель Стодола (1859—1942). Деятельность А. Стодолы, так же как и деятельность Вышнеградского, можно изучать в ряде аспектов.

Стодола — последователь Вышнеградского в теории регулирования, получивший на пути, указанном Вышнеградским, фундаментальные научные результаты.

Стодола — ученый в области конструирования и расчета тепловых двигателей, конструирования паровых и газовых турбин, профессор высшей технической школы в области машиностроения и тепловых двигателей, проектирования и сооружения ряда гидравлических и тепловых установок. Стодоле пришлось столкнуться с проблемой регулирования водяных турбин. В этой области господствовало не прямое регулирование. Широко применялись гидравлические сервомоторы с жесткими обратными связями, которые поддавались линеаризации. Система, которой должен был заняться Стодола, состояла из регулятора, сервомотора, трубопроводов, воздушного колпака и водяной турбины.

В своих рассуждениях и расчетах Стодола является прямым последователем Вышнеградского. Простейшие случаи, которые ему удастся свести к уравнению третьего порядка, он исследует по Вышнеградскому, ссылаясь на него. Но в ряде случаев, когда Стодола приходит к характеристическим уравнениям пятого порядка и выше, он обращается за помощью к математику Гурвицу, своему товарищу по Цюрихскому политехническому институту. Стодола и Гурвиц не знают ни о работах Максвелла, ни о работах Рауса. Гурвиц заново решает задачу, которую примерно лет за 25 до того поставил Максвелл и которую лет за 15 до того решил Раус. Но Гурвиц не просто повторяет решение Рауса. Именно Гурвицу путем использования одной работы французского математика Эрмита удастся получить условие отрицательности действительных частей алгебраического уравнения n -й степени в замкнутом виде, в виде ряда неравенств, записанных в элегантной детерминантной форме. Этот критерий Гурвица хотя по форме отличается от критерия Раута, но по существу с ним совпадает. В настоящее время эти неравенства носят название неравенств Рауса-Гурвица, но эти обращения к Гурвицу касаются лишь математической стороны вопроса. Что же касается механических и инженерных идей Стодолы в области регулирования, то он в этом отношении следует Вышнеградскому и определенно об этом говорит. В частности, во второй части своей работы, где Стодола рассматривает влияние массы регулятора и действия катаракта и где он в математическом отношении следует Гурвицу, он заявляет, что исследование Вышнеградского во многом определило ход его рассуждений.

Эта работа Стодолы замечательна и в других отношениях. В ней он впервые ввел в дифференциальные уравнения системы регулирования так называемые временные постоянные, которые удержались в ней до самого последнего времени. Через несколько лет после этой работы Стодола снова возвращается к теории регулирования и дает теорию плоских инерционных

регуляторов. Так называются регуляторы, в которых, кроме обычной центробежной силы энергии, действуют еще тангенциальные силы инерции. Здесь он также следует Вышнеградскому. Он показывает, как должны быть изменены знаменитые тезисы Вышнеградского, относящиеся к обычным регуляторам прямого действия, для случая инерционного регулятора. В частности, он показывает, что знаменитый тезис «без неравномерности нет регулятора», справедливый для обычного центробежного регулятора, здесь уже не имеет силы. В этой работе Стодола подробно останавливается на выяснении роли кулоновского трения. Он дает приближенный расчет для случаев нелинейной задачи, когда отсутствует вязкое трение и имеет место лишь одно кулоновское трение: показывает, что такое трение может стабилизировать систему машина—регулятор, и дает соответствующую количественную оценку. Он подробно разъясняет значение тезисов Вышнеградского и берет эти тезисы под свою защиту. В частности, тезис Вышнеградского «без катаракта нет регулятора» он несколько видоизменяет и заменяет его тезисом «без трения нет регулятора».

Эти работы Стодолы являются непосредственно продолжением и развитием работы Вышнеградского и завершают собой классическую теорию регулирования двигателей. Основная линия развития теории регулирования Вышнеградский—Стодола—Толле побочная линия: Максвелл—Раус. В последней работе Стодолы эти линии сливаются, так как в ней есть ссылка на книгу Рауса и содержатся указания, как использовать теорию малых колебаний для расчета любой, сколь угодно сложной системы регулирования. В книге Толле, вышедшей позже и служившей основным руководством по теории регулирования во многих странах Европы, в частности в Германии, нет ссылок на Вышнеградского, а есть лишь некоторые указания на работы Стодолы. Но работу Толле следует рассматривать как работу компилятивного и педагогического характера. В сущности Толле изложил лишь, правда весьма ясно и доходчиво, работу Вышнеградского, работы Стодолы и свои сравнительно незначительные, ему лично принадлежащие новые научные результаты. В задачу настоящего доклада не входит анализ работ в области теории регулирования, выполненных за последние десятилетия. Ограничимся поэтому лишь краткими замечаниями.

Развитие теории регулирования можно разбить на три этапа. Первый этап, закончившийся в начале XX в. и подытоженный в книге Толле,—это теория автоматического регулирования двигателей (паровых машин, водяных турбин, паровых турбин). Регулируемой координатой при этом была угловая скорость вала двигателя. Второй этап связан с распространением классической теории на регулирование других величин: электрического напряжения, температуры, давления, расхода и т. д., так как регулирование этих величин получило громадное практическое значение. К этому второму этапу развития теории нужно отнести и использование линейных уравнений для отыскания условий устойчивой работы обычных автопилотов и других сравнительно простых устройств автоматического управления.

Можно считать, что второй этап закончился с началом Великой Отечественной войны. Третий этап, современный, характеризуется процессом слияния линеаризованной теории регулирования и управления с линеаризованной теорией многозвенных и многоконтурных усилительных устройств. Это слияние особенно заметно и плодотворно в теории следящих систем, где оно зашло весьма далеко.

Мы видим, что основное русло, по которому до сих пор развивалась теория регулирования и управления, — это линеаризованная теория. В этом смысле можно сказать, что она развивалась в направлении, практическую эффективность которого доказал в своей работе Вышнеградский. Прежде чем перейти к выводам, я хочу сделать одно небольшое замечание. Третий этап, о котором мы только что говорили, характеризуется большим распространением различных геометрических критериев устойчивости линеаризованных систем. Наиболее интересны здесь диаграммы Найквиста (1832), диаграммы Михайлова (1938), диаграммы Неймарка (1947), позволяющие во многих случаях очень быстро и наглядно решать вопросы устойчивости. Хочется отметить, что все эти диаграммы можно рассматривать как естественные комплексные обобщения обычных действительных диаграмм Вышнеградского.

Выводы

1. В работе «О регуляторах прямого действия» (1876—1877) Вышнеградский впервые дал условие устойчивой работы системы «обычная паровая машина — обычный центробежный регулятор». Это условие, данное им в простой и компактной форме, раскрыло инженерам динамику простейшей схемы регулирования и позволило сразу указать, как влияют конструктивные параметры системы машина — регулятор на возникновение неустойчивости.

2. Тезис Вышнеградского «без катаракта нет регулятора» не связан с какой-либо ошибкой Вышнеградского в математике или в теоретической механике. Вышнеградский отчетливо понимал, что регуляторы могут устойчиво работать и без катаракта за счет кулоновского трения в сочленениях. Но он считал, что регуляторы, устойчивость работы которых обуславливается кулоновским трением, недостаточно чувствительны и потому не могут быть рекомендуемы. Позднейшие теоретические расчеты показали, что эта нечувствительность, которой боялся Вышнеградский, на практике вполне терпима. Тезис о катаракте в несколько иной формулировке — «без трения нет регулятора» — справедлив.

3. Работа Вышнеградского, появившаяся в критический для практики регуляторостроения момент, оказала существенное влияние на эту практику и прекратила шатание конструкторской мысли. Для инженеров сравнительно быстро стало азбукой, что нельзя рассматривать движение регулятора независимо и изолированно от движения машины и что уменьшение массы регулятора и уменьшение неравномерности вредно влияет на устой-

чивость. Отчетливое понимание влияния трения на устойчивость пришло несколько позже, но опять-таки в связи с работой Вышнеградского и с той острой дискуссией, которую она вызвала.

4. Работа Вышнеградского заставила инженеров убедиться в практической эффективности исследования устойчивости процесса регулирования методом малых колебаний и, можно сказать, направила основные работы этой области в сторону линеаризованной теории. Словацкий инженер Стодола в работах по регулированию турбин, следуя Вышнеградскому и ссылаясь на Вышнеградского, распространил линейный анализ Вышнеградского на не прямое регулирование. Наиболее важным и существенным шагом здесь была линеаризация уравнения сервомотора.

5. Уже в 1877 г. Вышнеградский поставил задачу о качестве переходного процесса при сбросе нагрузки и нашел не только так называемые «условия аperiodичности» переходного процесса, но и гораздо более тонкие условия, выполнение которых обеспечивает (при комплексных корнях характеристического уравнения) конечное число колебаний угловой скорости за время переходного процесса. Эти идеи Вышнеградского также были восприняты и развиты дальше Стодолой, который занимался, в частности, вычислением максимальных отклонений угловой скорости машины за время переходного процесса.

6. Работы Стодолы «О регулировании турбин I» (1893), «О регулировании турбин II» (1894) и «Об инерционных регуляторах» (1899) следует рассматривать как работы, завершающие классическую теорию регулирования двигателей, основы которой были заложены Вышнеградским. При этом Стодола, вводя так называемые «временные постоянные», придал теории регулирования ту форму, которая сохранилась до нашего времени. Книга Толле «Регулирование двигателей» содержит в основном результаты, полученные Вышнеградским и Стодолой, хотя в ней нет ссылок на Вышнеградского, а есть лишь беглые указания на Стодолу.

7. Современная теория регулирования, объединившаяся с теорией многозвенных усилительных устройств, развивается прежде всего как линеаризованная теория — в этом прежде всего ее связь с Вышнеградским. Диаграммы Вышнеградского, которые он строил лишь для кубического уравнения, сейчас строятся для более сложных случаев. Комплексные диаграммы, широко используемые в настоящее время для исследования устойчивости, могут рассматриваться как комплексные обобщения обычных действительных диаграмм Вышнеградского.

О РАБОТАХ Д. К. МАКСВЕЛЛА, И. А. ВЫШНЕГРАДСКОГО и А. СТОДОЛЫ В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ МАШИН¹

Из многих сотен ученых и инженеров, работавших в XIX в. над вопросами теории регулирования машин, нужно особо выделить трех: английского физика — профессора в Кембридже Джемса Клерка Максвелла (1831—1879), русского инженера-профессора Петербургского Технологического института Ивана Алексеевича Вышнеградского (1831—1895) и словацкого инженера-профессора Цюрихского политехникума Аурелия Стодолу (1859—1942), фундаментальные работы которых создали то, что мы сейчас называем классической линеаризованной теорией автоматического регулирования.

1. Работа Д. К. Максвелла и ее значение

В 1868 г. появилась работа знаменитого английского физика Д. К. Максвелла «О регуляторах». В этой работе Максвелл обнаруживает свободное владение теми приемами исследования устойчивости движения, которые впоследствии получили название метода малых колебаний. Работа Максвелла «О регуляторах» генетически связана с его другой, более ранней знаменитой работой «Об устойчивости движения колец Сатурна» (1859). В первой части этой последней работы Максвелл, исследуя устойчивость движения некоторых механических моделей кольца Сатурна, линеаризует рассматриваемые задачи и, обобщая результаты Лагранжа, относящиеся к малым колебаниям консервативной системы вокруг положения *равновесия*, развивает на примерах теорию малых колебаний дискретной *консервативной* системы вблизи установившегося *движения*, т. е. такого движения, для которого в рассматриваемых координатах линеаризованная задача сводится к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В работе «О регуляторах» Максвелл линеаризует рассматриваемые им задачи об устойчивости движения машин, снабженных различными регуляторами, развивает на *примерах* теорию малых колебаний дискретной динамической системы *общего (неконсервативного)* типа вокруг установившегося движения и в конечном счете сводит вопрос об устойчивости такого движения к алгебраической задаче об условиях

¹ Совместно с И. Н. Вознесенским. Опубликовано в книге: Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола, Теория автоматического регулирования (Классики науки), АН СССР, 1949.

отрицательности действительных частей корней легко составленного характеристического уравнения.

Максвелл извлекает из этой алгебраической точки зрения отчетливое и — мы бы сказали — современное понимание механизма возникновения неустойчивости и самовозбуждения. Рассматривая систему машина—регулятор, исследование устойчивости установившегося движения которой сводится к исследованию алгебраического уравнения третьей степени, Максвелл утверждает, что явление самораскачивания системы машина—регулятор, возникающее при изменении какого-либо параметра (например, при увеличении массы регулятора), связано с переходом из области устойчивости, где все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, в область неустойчивости, где один корень остается отрицательным, а два других корня получают положительные действительные части. Это явление самораскачивания, или, как мы теперь обычно говорим, явление самовозбуждения колебаний, с которым столкнулся уже Эри в 1840 г., Максвеллу хорошо известно. Он говорит об экспериментальном исследовании этого явления при помощи специального регулятора с устройством, позволяющим изменять воздействие регулятора на машину и, следовательно, позволяющим по произволу вызывать или подавлять самовозбуждение колебаний.

Тонкие замечания делает Максвелл о связи примитивного, квазистатического рассмотрения действия регулятора и настоящего динамического рассмотрения и о роли математики в исследовании самовозбуждения. В случае примитивного квазистатического подхода, когда пренебрегают инерцией грузов центробежного маятника и считают, что он идеально следит за угловой скоростью, машина с регулятором рассматривается как система с одной степенью свободы, а исследование устойчивости установившегося движения в простейшем случае сводится к исследованию алгебраического уравнения *первой* степени, всегда имеющего один и при этом отрицательный корень. Самовозбуждение в такой картине исключено. И Максвелл говорит, что изобретатели регуляторов ограничивались, как правило, этой воображаемой картиной, определяемой тем, как регуляторы *предназначены* действовать, и не принимали во внимание действительную картину, связанную с тем, что шары регулятора из-за инерции и трения не следят идеально за угловой скоростью и что система машина—регулятор является системой с двумя степенями свободы, для которой изучение устойчивости установившегося движения в простейшем случае сводится к исследованию алгебраического уравнения *третьей* степени.

Максвелл утверждает, что математическое исследование явления самовозбуждения имеет практическую ценность, так как позволяет найти лекарство для устранения этого явления. И Максвелл самым непринужденным образом находит в одних случаях — или подготавливает все для быстрого нахождения в других случаях — условия устойчивой работы (или — с обратным знаком неравенств — условия самовозбуждения колебаний) некоторых типов регуляторов.

Начав свою работу с упоминания о трех родах «модераторов» (обычный фрикционный регулятор, обычный регулятор Уатта, водяной регулятор Джона Томсона), Максвелл далее рассматривает — это и составляет основное содержание работы — три типа *астатических* регуляторов (фрикционный регулятор Дженкина, астатический регулятор Уатта, жидкостный регулятор Вильгельма Сименса), излагая сравнительно подробно их теорию и не касаясь деталей конструкции.

Максвелл был гениальным физиком, но не был инженером, хотя и интересовался некоторыми техническими вопросами. Самый выбор систем регуляторов, теорией которых он занимался, носит черты оторванности от инженерных задач регулирования промышленных машин, как они стояли в то время. Максвелл прошел мимо обычного регулятора Уатта¹. Максвелл прямо говорит, что своей работой он хочет обратить внимание инженеров на динамическую теорию другого класса регуляторов — как бы мы сейчас сказали — на теорию *астатических* регуляторов, способных, по крайней мере в принципе, с гораздо большей точностью поддерживать постоянство числа оборотов при изменении нагрузки или движущей силы, чем обычные регуляторы Уатта.

Но поддержание с высокой точностью числа оборотов, являясь серьезной проблемой при конструировании некоторых физических и, особенно, астрономических приборов, отнюдь не было жизненной задачей промышленной техники времен Максвелла. Это была первая причина, почему работа Максвелла осталась незамеченной и неиспользованной инженерами ни в самой Англии, ни на континенте.

Но была и другая, более важная, причина равнодушия инженеров, которая, в частности, объясняет, почему замечательные общие идеи работы Максвелла не были немедленно использованы для создания теории регулятора Уатта и, следовательно, для преодоления накопившихся практических затруднений: сама схематизация задач теории регулирования, принятая Максвеллом, не соответствовала тем объектам — промышленным паровым машинам, с регулированием которых имели дело инженеры.

Обращая внимание инженеров на теорию более совершенных, по его мнению, регуляторов, Максвелл не отдавал себе отчета в том, какие параметры *на практике* определяют устойчивость работы тех примерно 75 000 регуляторов Уатта, которые функционировали в Англии в 1868 г., и какова относительная величина некоторых констант, входящих в уравнения движения, если эти уравнения отнести к промышленным паровым

¹ Максвелл, следуя Вильгельму Сименсу, даже отказал обычному регулятору Уатта (как и другим обычным регуляторам) в наименовании «регулятор», а причислил его к «модераторам», т. е. к устройствам, в названии которых подчеркивается, что они не способны поддерживать число оборотов постоянным и лишь умеряют («модерируют») переменность числа оборотов при изменении нагрузки. Слово «регулятор» Максвелл употребляет в том смысле, в котором сейчас употребляют слово *астатический регулятор* или *регулятор с нулевой неравномерностью*.

машинам. В частности, это обстоятельство объясняет, почему Максвелл в своей работе пропагандировал инженерам непригодный для обычных машин того времени, как это было твердо установлено впоследствии, астатический регулятор Уатта. Дело в том, что Максвелл, излагая теорию такого регулятора, пишет уравнения движения системы машина—регулятор в виде¹

$$A \frac{d^2\Theta}{dt^2} + X \frac{d\Theta}{dt} + K \frac{d\varphi}{dt} + G\varphi = 0$$

$$B \frac{d^2\varphi}{dt^2} + Y \frac{d\varphi}{dt} - K \frac{d\Theta}{dt} = 0$$

т. е. учитывает саморегулирование машины [член $X(d\Theta/dt)$] и учитывает в уравнении главного вала зависимость приведенного момента инерции от положения муфты регулятора [член $K(d\varphi/dt)$].

Из условий устойчивости этой системы, полученных Максвеллом:

$$\left(\frac{X}{A} + \frac{Y}{B}\right)(XY + K) > GK$$

вытекает возможность в некоторой области значений параметров устойчивой работы *астатического* регулятора Уатта. Максвелл не замечает, что эта область значений параметров для обычных паровых машин не имеет практического значения, так как для них член $X(d\Theta/dt)$ и в особенности член $K(d\varphi/dt)$ могут быть отброшены в уравнениях движения².

Инженеры ни в выводах Максвелла, ни даже в его уравнениях не могли прочесть никаких указаний, как им бороться с проявлявшейся во многих случаях склонностью машин, снабженных обычными регуляторами Уатта, к неустойчивой работе и к самораскачиванию. Однако появление работы Максвелла о регуляторах представляет собой событие в теоретической механике и в теории регулирования.

Максвелл отлично представлял себе возможность исследования динамики других, более сложных, чем рассмотренные им,³ систем регулирования. В его работе имеется не вполне законченный набросок рассмотрения взаимодействия машины и сложного «двухступенчатого» регулятора. В связи с этим Максвелл отчетливо понимал прикладную важность нахождения условий, которым должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения n -й степени для того, чтобы все его корни имели отрицательные действительные части. В работе «О регуляторах» Максвелл пишет: «Я не в состоянии определить полностью эти условия для уравнения выше третьей степени, но я надеюсь, что этот вопрос привлечет

¹ Мы приводим эти уравнения в измененных переменных.

² Сходные замечания могут быть сделаны и по поводу двух других типов астатических регуляторов прямого действия, рассмотренных Максвеллом. Когда в начале XX в. в технике регулирования промышленных машин стали распространяться изоморфные регуляторы, обеспечивающие астатическое регулирование, то их конструкции фундаментально отличались от конструкций, теория которых изучалась Максвеллом.

внимание математиков». 23 января 1868 г. на заседании Лондонского математического общества Максвелл спросил, не может ли кто-нибудь из членов общества указать способ получения необходимых и достаточных условий отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения n -й степени, и указал, что решение этого вопроса представляет интерес для теории регулирования. На вопрос Максвелла математик Клиффорд ответил, что, по его мнению, можно достичь успеха, составив новое алгебраическое уравнение, корни которого были бы суммами корней исходного уравнения, и потребовав, чтобы все корни нового уравнения были бы отрицательны. Через несколько лет, в 1873 г., задача, поставленная Максвеллом, была решена Раусом — пока для уравнений четвертой и пятой степеней именно по способу Клиффорда. Полностью эта проблема Максвелла была решена позднее тем же Раусом (в 1877 г.), хотя все необходимые математические средства для решения этой задачи были даны еще Коши.

Говоря о предшественниках Максвелла, следует упомянуть о работах Эри¹ (1801—1892), английского астронома, физика, математика и изобретателя. Его имя связано с первой попыткой объяснить явления самораскачивания в системе машина—регулятор.

Машина, с которой имел дело Эри, — это астрономическая труба, приводимая во вращение тяжелым грузом, а регулятор — конический маятник Уатта, могущий изменять тормозное усилие². Эри обратил внимание, что такие устройства далеко не всегда работают удовлетворительно и что в некоторых случаях их работа сопровождается паразитными — иногда нарастающими — колебаниями угловой скорости, и задался целью найти теоретически причины неустойчивости.

В своей теории Эри не учитывает трения в сочленениях регулятора, и ему удастся показать, что при сделанном им предположении о пропорциональности тормозящего момента угловому отклонению грузов маятника Уатта от некоторой нормальной конфигурации (при которой момент, порождаемый тормозом, компенсирует момент груза) равномерное вращение трубы является *неустойчивым*.

Доказательство Эри крайне громоздко; он не проводит линеаризации самих уравнений возмущенного движения и получает приближенное решение путем длинных выкладок, напоминающих выкладки астрономической теории возмущений.

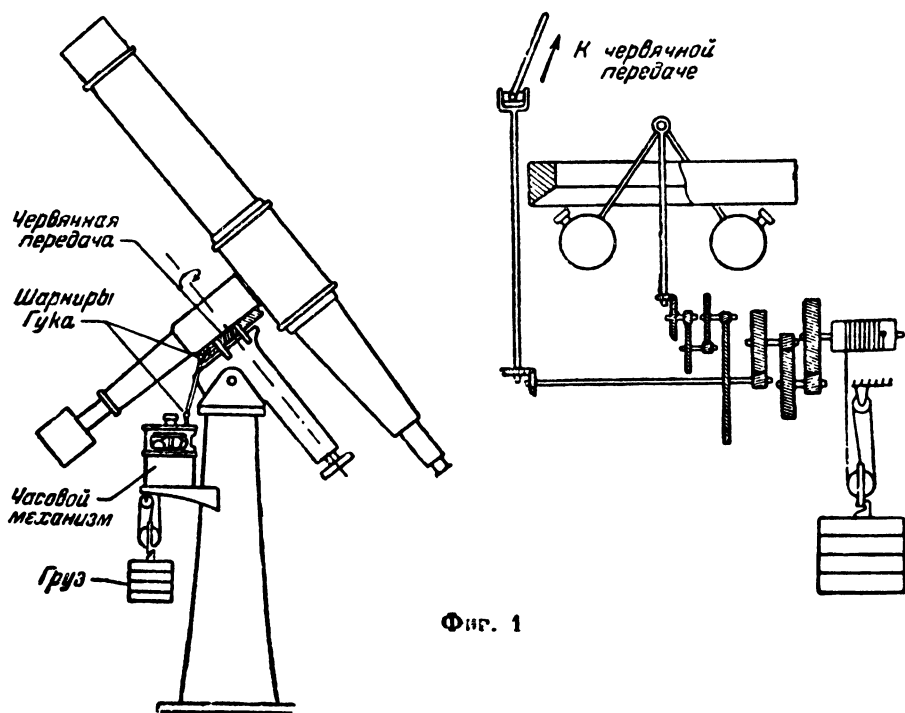
¹ C. Airy «On the Regulator of the Clock-work for effecting Uniform Movement of Equatoreales», Mem. Roy. Astr. Soc., v. XI, London, 1840, p. 249. Его же. Supplement to a Paper «On the Regulator of the Clockwork for effecting Uniform Movement of Equatoreales», Mem. Roy. Astr. Soc., v. XX, London, 1850—1851, p. 115.

² Уже в начале XIX столетия астрономы отчетливо представляли себе те выгоды для наблюдений, которые доставляются автоматическим перемещением астрономической трубы (экваториала), при котором труба «сама», независимо от наблюдателя, следит за видимым движением звезды по небесному своду. Такое автоматическое вращение экваториала осуществлялось во времена Эри (а во многих случаях осуществляется

В течение ряда лет, вплоть до 1850 г., Эри пробует различные приспособления, улучшающие работу тормозных конических регуляторов, и, наконец, публикует новую статью на ту же тему: «Дополнения к работе о регулировании часового механизма, осуществляющего равномерное вращение экваториала» (1851), где он указывает, ссылаясь на эксперимент, что возникновение вредных колебаний может быть предотвращено без малейшего ущерба для работы экваториала, если к муфте конического регулятора присоединить особый водяной катаракт, развивающий силу трения, пропорциональную скорости муфты. Однако в этой второй статье Эри выступает скорее как экспериментатор и изобретатель и не дает теории совместного движения экваториала и конического тормозного регулятора, муфта которого снабжена катарактом.

Простое сопоставление работ Эри и Максвелла показывает, каким крупным шагом в деле создания теории регулирования были переход

и в настоящее время) при помощи особого рода часового механизма, который приводится в движение тяжелым грузом и равномерность хода которого поддерживается не маятником Галилея-Гюйгенса, а коническим маятником Уатта, связанным с тормо-



Фиг. 1

зящим приспособлением. Простейший пример такого тормозящего приспособления — так называемый конический тормозной регулятор, в котором грузы конического маятника Уатта, раздвигаясь с увеличением числа оборотов, касаются внутренней стенки круглого корпуса часов и создают таким образом момент силы трения, существенно зависящий от угловой скорости вращения (см. фиг. 1).

к рассмотрению устойчивости движения системы машина — регулятор методом малых колебаний и отыскание соответствующих условий устойчивости непосредственно из рассмотрения линеаризованных уравнений движения, а не путем отыскания приближенных решений исходной нелинейной системы.

Из изложенного ясно значение работы Максвелла. Но не с Максвелла начинается теория регулирования машин, отвечающая на запросы промышленной практики.

2. Работа И. А. Вышнеградского и теория регулятора Уатта

Теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики, начинается работой Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876).

Вышнеградский, математик по образованию, был одновременно практическим инженером, и его подход к проблеме регулирования существенно отличался от подхода Максвелла.

У Максвелла проблемы теории регулирования рассматриваются как проблемы теоретической механики. У Вышнеградского теория регулирования — это глава курса прикладной механики или, скорее, глава курса, посвященного проектированию и конструированию паровых машин. Теоретические рассуждения у Вышнеградского относятся к промышленным паровым машинам, и конечные результаты теории им приводятся к компактным расчетным формулам и к элегантным графикам, позволяющим быстро использовать эти результаты на практике.

Только из сравнения работ Максвелла и Вышнеградского можно по-настоящему понять, что сделано Вышнеградским и что именно с Вышнеградского начинается инженерная теория регулирования машин.

Вышнеградский распутал вопрос о динамике обычного регулятора Уатта и, в частности, доказал непригодность астатических регуляторов в сущности, — если встать на общую точку зрения, — при помощи тех же уравнений, на основании которых Максвелл сделал свои выводы о пригодности астатического регулятора.

Вышнеградского, как мы говорили, интересовало регулирование промышленных паровых машин, т. е. динамика системы паровая машина — обычный регулятор Уатта.

Чтобы отдать себе отчет в характере проблемы, стоявшей перед Вышнеградским, войдем в некоторые подробности.

Задачей регулятора Уатта является поддержание в возможно узких пределах вокруг заданного значения средней угловой скорости паровой машины при изменениях нагрузки, т. е., например, при включении и выключении обслуживаемых ею насосов, станков и т. д. Пусть нагрузка машины уменьшилась, тогда нарушается равновесие между действующим моментом и нагрузочным моментом и угловая скорость вала машины начинает увеличиваться. Шары регулятора в результате увеличения центробежной

силы разойдутся, муфта поднимется и при помощи системы рычагов *уменьшит* поступление пара в цилиндр машины. Наоборот, если нагрузка машины увеличится, нагрузочный момент окажется больше действующего момента, угловая скорость машины начнет садиться, шары регулятора вследствие уменьшения центробежной силы сблизятся, муфта спустится и при помощи системы рычагов *увеличит* доступ пара в цилиндры машины.

Регулятор Уатта не просто производит выравнивание моментов, изменяя движущий момент в согласии с изменением нагрузки, так что число оборотов сохраняется неизменным. В машине, снабженной регулятором Уатта, в установившемся режиме каждому числу оборотов соответствует¹ определенное положение муфты регулятора, а следовательно, и определенное положение заслонки, управляющей доступом пара. Таким образом, благодаря регулятору Уатта машина получает определенную *характеристику*, определенную однозначную зависимость числа оборотов от движущего момента. Тогда величина момента сопротивления *однозначно* определит число оборотов машины в установившемся режиме. Иначе говоря, паровая машина, снабженная регулятором Уатта, не может работать на любых оборотах при данной нагрузке, а каждой нагрузке соответствует определенное число оборотов.

Характеристика машины, создаваемая регулятором, может иметь те или другие особенности, в зависимости от тех целей, которые себе ставит конструктор. В частности, регулятор Уатта позволяет создать характеристику машины с резким спадом движущего момента в интересующем конструктора интервале угловых скоростей. Тогда в определенном диапазоне нагрузок угловая скорость машины будет изменяться лишь в сравнительно узких, заранее установленных пределах. В этом случае можно сказать, что регулятор Уатта удерживает машину вблизи заданного числа оборотов, несмотря на изменение нагрузки.

Максвелл рассматривал случай, когда машина сама по себе, без регулятора, имеет определенную характеристику, определенное самовыравнивание. В этом случае регулятор использует существующую характеристику машины, видоизменяя ее в нужную сторону.

Вышнеградский же рассмотрел другой, значительно более важный для практики того времени случай, когда самовыравнивание машины отсутствует, когда однозначной характеристикой машина не обладает или, иначе говоря, характеристика машины приближенно представляется прямой, параллельной оси числа оборотов², и когда нужную характеристику машины *создает* регулятор.

¹ Мы пренебрегаем нечувствительностью регулятора, связанной с наличием кулоновского трения.

² Поясним, что значит отсутствие самовыравнивания у машины, не снабженной регулятором. Пусть самовыравнивания нет и движущий момент, развиваемый машиной, постоянен и не зависит от числа оборотов. Пусть нагрузочный момент может принимать те или иные фиксированные значения. Тогда, если нагрузочный момент будет меньше движущего, машина пойдет в разнос; если нагрузочный момент будет больше движущего,

Вышнеградский смело линеаризирует задачу, вступая этим в противоречие с предположениями ряда инженеров, пытавшихся создать до него динамическую теорию действия регулятора Уатта.

Именно Вышнеградский:

1) отбросил все нелинейности в регуляторе, в том числе (*в окончательных* уравнениях) и кулоновское трение в муфте и сочленениях регулятора;

2) предположил, что паровая машина обладает непрерывным подводом энергии, и принял линейную пропорциональность между смещением заслонки и действующим моментом¹;

3) принял, что разным нагрузочным моментам соответствуют разные установившиеся угловые скорости системы машина—регулятор, т. е., говоря инженерным языком, принял, что регулятор имеет некоторую определенную, не равную нулю *неравномерность*;

4) отбросил саморегулирование машины и зависимость нагрузочного момента от числа оборотов;

5) принял постоянство момента инерции в уравнении движения главного вала машины.

Эти предположения² позволили Вышнеградскому правильно схематизировать проблему, отразить в весьма простых уравнениях существеннейшие черты динамической системы обычная паровая машина—регулятор Уатта и положить начало теории регулирования, способной оказывать фундаментальную помощь практике регуляторостроения.

Следует отметить, что Вышнеградский рассматривает (и это рассмотренное характерно для всей классической теории регулирования) некоторую определенную идеальную схему процесса регулирования: *одно* мгновенное изменение нагрузки и затем движение системы машина—регулятор без внешних воздействий в течение неограниченного промежутка времени. Это движение системы *после* изменения нагрузки, носящее название процесса регулирования, и исследуется при помощи линеаризованных уравнений, которые им составляются для малых отклонений от *старого* равновесного режима.

Условия сходимости процесса регулирования Вышнеградский сводит к условиям, которым должны удовлетворять коэффициенты характеристического уравнения

щего, машина остановится; если нагрузочный момент будет равен движущему, машина может иметь *любое* число оборотов, зависящее от начальных условий.

¹ Вышнеградский, повидимому, считал, что его теория охватывает и случай машины, работающей на отсечку пара. Как показал впоследствии Н. Е. Жуковский, выводы теории Вышнеградского справедливы и для машин, работающих на отсечку пара, если они достаточно быстроходны.

² Система уравнений, полученная Вышнеградским, отвечает положению дела не только в обычных паровых машинах, снабженных регуляторами Уатта, но, как мы сейчас знаем, охватывает и много других устройств, содержащих регуляторы прямого действия.

$$\Theta^3 + M\Theta^2 + N\Theta + \frac{KL_d}{I\omega_0} = 0$$

чтобы все его корни имели отрицательные действительные части.

Как известно, эти условия сводятся к одному неравенству:

$$\frac{MN}{KL_d} I\omega_0 > 1$$

где M — коэффициент, характеризующий вязкое трение в муфте и сочленениях регулятора, I — момент инерции главного вала, KL_d — мера подвижности регулятора, N — коэффициент, характеризующий неравномерность регулирования, ω_0 — установившаяся угловая скорость.

Вышнеградский дает замечательную геометрическую интерпретацию полученных им условий устойчивости, имеющую значение, выходящее за пределы рассматриваемой им задачи, и позволяющую придать геометрический смысл проблеме об условиях отрицательности действительных частей корней алгебраического уравнения. Именно Вышнеградский в характеристическом уравнении переходит к новым переменным, полагая

$$\Theta = \varphi \sqrt[3]{\frac{KL_d}{I\omega_0}}, \quad M = x \sqrt[3]{\frac{KL_d}{I\omega_0}}, \quad N = y \sqrt[3]{\left(\frac{KL_d}{I\omega_0}\right)^2}$$

Он получает кубическое уравнение

$$\varphi^3 + x\varphi^2 + y\varphi + 1 = 0$$

зависящее от двух параметров x и y , и строит знаменитую «диаграмму Вышнеградского», откладывая по прямоугольным осям параметры x и y . Для этих параметров условия устойчивости имеют вид $xy > 1$ и, следовательно, на плоскости параметров гипербола $xy = 1$ (так называемая «гипербола Вышнеградского») отделяет область значений x и y , соответствующую устойчивой работе системы машина—регулятор, от области, где имеет место неустойчивость.

Это неравенство или, иначе, это условие отсутствия самовозбуждения позволило Вышнеградскому высказать свои знаменитые тезисы, относящиеся к конструированию обычных промышленных регуляторов Уатта:

- 1) без неравномерности нет регулятора,
- 2) без катаракта нет регулятора.

Первый тезис может быть сформулирован и так: астатические регуляторы непригодны. Этот тезис Вышнеградского находится в прямом противоречии со стремлением Максвелла обратить внимание инженеров на астатические регуляторы. Несомненно, что влияние коэффициента неравномерности на устойчивость процесса регулирования было окончательно выяснено только после работы Вышнеградского.

Второму тезису Вышнеградский придал весьма острую форму, высказав его так: всякий чувствительный и правильно действующий регулятор Уатта должен иметь катаракт, т. е. особое приспособление, порождающее вязкое трение.

Из этого же условия отсутствия самовозбуждения сразу вытекают важные указания о вредном влиянии на устойчивость приведенной массы регулятора и о фундаментальной роли момента инерции главного вала машины в вопросах выбора параметров регулятора.

После работы Вышнеградского динамика простейшей схемы регулирования — схемы Уатта — стала предельно прозрачной. Возникло отчетливое понимание, что машина и регулятор — это одно целое, что при переходных режимах возможно возникновение самораскачивания системы машина—регулятор и, что особенно важно, у инженеров возникло понимание, в какую сторону влияют изменения тех или иных конструктивных параметров этой системы на возникновение такого самораскачивания.

Однако содержание работы Вышнеградского не ограничивалось лишь вопросами устойчивости прямого регулирования паровой машины. В опубликованном почти одновременно с русским оригиналом немецком переводе этой работы¹ имеется дополнительный параграф (§ 14 немецкого текста), отсутствующий в русском оригинале². В этом параграфе Вышнеградский занимается не устойчивостью регулирования, а качеством переходного процесса. Он определяет условия, при которых во время переходного процесса, вызванного мгновенным сбросом нагрузки, угловая скорость машины претерпевает конечное или бесконечное число колебаний. При этом Вышнеградский отчетливо понимает, что колебания могут вовсе отсутствовать даже в том случае, когда характеристическое уравнение системы имеет пару сопряженных комплексных корней. Вышнеградский находит уравнение кривой, которая на диаграмме Вышнеградского отделяет параметры, соответствующие монотонным переходным процессам и процессам с конечным числом колебаний, от параметров, при которых переходный процесс сопровождается бесконечным числом колебаний. Эта кривая имеет минимум при $I=2.38$, в то время как астатическому регулятору соответствует $I=0$. Это позволяет Вышнеградскому установить, что всегда, уменьшая статизм регулятора, его неравномерность, т. е. приближаясь к астатическому регулятору, мы все более сужаем область параметров, при которых переходный процесс монотонный, и если неравномерность регулятора достаточно мала, то колебания угловой скорости во время переходного процесса становятся неизбежными.

Замечательное исследование, содержащееся в этом дополнительном параграфе, осталось сравнительно мало известным. В теории регулирования стало обычным связывать монотонность переходного процесса с отсутствием комплексных корней у характеристического уравнения. Это дало стимул к разработке так называемых «критериев апериодичности», устанавливающих условия, необходимые и достаточные для того, чтобы

¹ Civilingenieur, Bd. 23, 1877, S. 93—132.

² Этот параграф помещен на стр. 91 книги Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодولا, loc. cit. под названием «Дополнения к работе о регуляторах прямого действия».

характеристическое уравнение n -й степени имело только отрицательные действительные корни. Лишь в последние годы в этот вопрос была внесена некоторая ясность: стало очевидным, что переходный процесс может быть монотонным, несмотря на наличие комплексных корней, и что он может иметь колебания с конечным числом размахов, хотя все корни характеристического уравнения действительны. Простое сопоставление этих фактов показывает, в какой мере Вышнеградский опередил свое время в понимании этих, сравнительно тонких, вопросов теории регулирования. Он первый поставил и существенно продвинул вперед задачу об исследовании качества переходного процесса.

Тезисы Вышнеградского, о которых мы упоминали, создали эпоху в теории регулирования промышленных машин, так как, воспринятые после определенной борьбы, они прекратили многочисленные шатания конструкторской мысли в области построения регуляторов прямого действия и в конечном счете заставили инженеров убедиться в практической эффективности исследования устойчивости процесса регулирования методом малых колебаний, или, иначе говоря, убедиться в громадном практическом значении теоретических условий самовозбуждения:

Вышнеградский понял, что в полученном им простом соотношении заключается вся настоящая теория управления паровой машиной при помощи обычного центробежного регулятора. Эта идея воодушевляла Вышнеградского. В его работе чувствуется пульс инженерной мысли, выводы работы заострены на преодоление затруднений, встречающихся в инженерной практике. И работа Вышнеградского, появившаяся в критический период, когда преодоление этих затруднений было требованием жизни, сыграла совершенно другую роль, чем работа Максвелла: ее выводы сравнительно быстро сказались на практике машиностроения, заключенные в ней идеи сравнительно быстро нашли продолжателей, распространивших эти идеи на другие типы регуляторов.

3. Ситуация в области регуляторостроения и теории регулирования к моменту появления работы Вышнеградского

Центробежные регуляторы, построенные по принципу регулятора Уатта, честно работали во времена Уатта и в начале XIX в. К середине XIX в. все чаще отмечались трудности при наладке регуляторов, случаи неустойчивости и случаи генерации колебаний. Технические журналы 60-х годов прошлого века содержат описание многочисленных случаев такого рода и жалобы на отсутствие надежно действующих регуляторов.

Почему уаттовские регуляторы перестали работать?

Теперь, после работы Вышнеградского, нам легко в этом разобраться. Машины, которые строил сам Уатт, — это машины низкого давления, маломощные, с небольшим числом оборотов. У них были громадные маховики и легкие регулирующие органы, перемещавшиеся с существенным трением, обусловленным грубым выполнением. Регуляторы времен

Уатта имели довольно значительный коэффициент неравномерности, т. е. число оборотов при верхнем и при нижнем положениях муфты было существенно различным. Все эти обстоятельства обеспечивали выполнение условий устойчивой работы системы машина—регулятор.

В XIX в. развитие техники привело к созданию мощных и значительно более быстроходных машин. Число оборотов увеличилось, и момент инерции маховика уменьшился. Широкое использование машин в промышленности выдвинуло повышенные требования к точности регулирования. Повышение точности регулирования требовало в свою очередь уменьшения коэффициента нечувствительности регулятора и его коэффициента неравномерности. Одновременно увеличение мощности регулируемых машин потребовало от регулятора больших перестановочных усилий, т. е. увеличилось усилие, требуемое для перемещения регулирующих органов. Это в свою очередь потребовало увеличения массы грузов регулятора.

Мы знаем теперь, что все эти изменения в устройстве регуляторов и регулируемых машин затрудняют выполнение условий устойчивости и способствуют появлению случаев неустойчивости. До Вышнеградского это не было, однако, ясно. Более того, повсеместно считалось, что низкая чувствительность и высокая неравномерность — бич регулирования.

Для повышения чувствительности регулирования принимались специальные меры к уменьшению трения (введение обильной смазки, тщательная обработка трущихся поверхностей, улучшение качества шарниров и уменьшение их числа и т. д.). Многочисленные изменения в конструкции регуляторов были связаны с идеей уменьшения трения и, в частности, устранения явления защемления шарниров под действием кориолисовых сил и тангенциальных сил инерции.

В результате этих мероприятий удалось заметно повысить чувствительность регуляторов и снизить трение в них, а это способствовало нарушению условий устойчивости.

Неправильное направление деятельности инженеров того времени, пытавшихся улучшить регуляторы, еще более ярко видно на примере попыток уменьшить коэффициент неравномерности.

Как мы упоминали, у самого Уатта коэффициент неравномерности был значительным. Пока обращалось внимание лишь на статику регулятора, казалось заманчивым уменьшать коэффициент неравномерности, так как казалось, что при этом возрастала точность поддержания заданного числа оборотов при изменениях нагрузки. Руководимые такой идеей, инженеры предлагали новые конструкции, новые механизмы, отличные от уаттовского и имеющие меньшую степень неравномерности.

Много таких регуляторов было запатентовано, описано в литературе и построено до тех пор, пока гениальный П. Л. Чебышев не показал, что, оставаясь в пределах конструкций регулятора Уатта, за счет простого излома стержней можно сделать регулятор с любым, сколь угодно близким к нулю коэффициентом неравномерности.

Многие из этих работ толкали инженеров в совершенно неправильном направлении, наводили на ложный путь — улучшать работу регулятора за счет уменьшения коэффициента неравномерности, стараясь приблизиться к так называемому астатическому регулятору, имеющему коэффициент неравномерности, равный нулю.

Как мы уже говорили, после работы Вышнеградского этот вопрос сделался настолько очевидным, что уже больше никто не говорил об астатических регуляторах, и было покончено с шатанием инженерной мысли этом вопросе.

Необходимо упомянуть также попытки ряда инженеров и ученых того времени пересмотреть самый принцип уаттовского устройства. Дело в том, что когда регуляторы стали отказывать, то ученые и инженеры заподозрили самый принцип регулятора Уатта и вспомнили об устройствах Понселе (1830) и братьев Сименс (1845), основанных на других принципах. Стало казаться, что сама идея регулятора Уатта порочна. Рассуждали примерно так. Задачей регулятора является поддержание постоянства угловой скорости. Но он начинает действовать только тогда, когда скорость уже изменилась. В силу инерции это изменение скорости запаздывает по отношению к изменению вращающего момента. Следовательно, регулирующее устройство должно начинать действовать немедленно, как только нарушится равновесие моментов. Отсюда появление регуляторов новых типов, принципиально отличных от уаттовского и регулирующих по скорости отклонения регулируемой координаты (по производной) или в зависимости от изменения непосредственно замеряемой нагрузки.

Практика показала, однако, что эти новые конструкции были значительно сложнее уаттовских, а во многих случаях работали еще хуже, чем обычные регуляторы Уатта. Поэтому, когда Вышнеградский разъяснил причины неудач с регуляторами Уатта, практика повсеместно вернулась к обычным регуляторам Уатта. Но эти попытки вести регулирование по ускорениям или по моментам все же не остались бесплодными. Впоследствии теория подтвердила, что сочетание регулирования по координате (уаттовского) с регулированием по скорости изменения этой координаты (сименсовского) во многих случаях представляет существенные преимущества.

К моменту появления работы Вышнеградского ни один инженер не мог гарантировать, что сделанный им регулятор будет безотказно работать, так как было полное непонимание того, как влияют на динамику регулирования и прежде всего на устойчивость отдельные параметры элементов установки.

Из инженерных работ, посвященных динамике регулирования и появившихся до 1876 г., заслуживают упоминания лишь работы Каргля и Вормса де Ромилли¹.

¹ Worms de Romilly. Mémoire sur systèmes régulateurs à force centrifuge, Annales des Mines, v. I, Paris, 1872, p. 36.

Работа Каргля¹ посвящена теории регулирования машин с отсечкой пара. Приближенными приемами Каргль интегрирует уравнения движения и приходит, в частности, к выводу о непригодности астатических регуляторов. Его рассуждения не строгие, влияние трений он не учитывает². Высказанное им предположение о непригодности астатических результатов получило признание лишь после работы Вышнеградского.

Вормс де Ромильи применил к теории системы машина — регулятор Уатта (не учитывая сил трения) теорию малых колебаний и обнаружил неустойчивость такой системы. Этот парадоксальный результат Вормс де Ромильи не смог удовлетворительно объяснить и высказал предположение, что дело здесь либо в том, что он не учел кулоновского трения, либо в том, что сделанное им предположение о непрерывном изменении момента при смещении муфты не может быть положено в основу теории.

Наличие этого парадокса лишило эту работу какой-либо практической ценности и, в частности, не позволило Вормсу де Ромильи выяснить, в какой мере неравномерность регулятора важна для обеспечения устойчивости процесса регулирования, так как у Вормса де Ромильи и статический, и астатический регуляторы оказались в равной мере неустойчивыми.

Таким образом, к моменту появления работы Вышнеградского не существовало теории регулирования, способной справиться с теми задачами, которые ставила перед этой теорией практика регуляторостроения.

4. Тезис Вышнеградского о необходимости катаракта и дискуссия, развернувшаяся вокруг этого тезиса

Одним из основных выводов работы Вышнеградского является тезис о необходимости катаракта — специального приспособления, создающего вязкое трение, — для всякого «чувствительного и правильно действующего регулятора прямого действия». Этот тезис сразу вызвал возражения, так как инженерам были известны надежно работающие регуляторы, не имеющие катарактов. Некоторые в связи с этим тезисом отвергали всю теорию регулирования Вышнеградского. Другие, убежденные в правильности основных идей, положенных в основу работы Вышнеградского, но не разобравшиеся в его аргументации, создали легенду об «ошибке» Вышнеградского.

В связи с тезисом Вышнеградского о необходимости катаракта нам придется войти в некоторые подробности, так как острая дискуссия вокруг этого тезиса, развернувшаяся через 10—15 лет после опубликования работы Вышнеградского, заняла определенное место в истории теории регулиро-

¹ K a r g l. Zur Lösung der Regulatorfrage, Civil-ingenieur, Bd. 17, S. 265—296; 386—404.

² Отзыв Вышнеградского об этой работе Каргля см. на стр. 65 книги Д. К. М а к с в е л л, И. А. В ы ш н е г р а д с к и й, А. С т о д о л а, loc. cit.

вания и, несомненно, повлияла на признание заслуг Вышнеградского, хотя, конечно, не смогла помешать распространению и практическому использованию заключавшихся в этой работе замечательных идей и выводов.

Вышнеградский отлично понимал, что наличие кулоновского трения в системе регулятор — заслонка существенно сказывается на работе регулятора, создавая так называемую *нечувствительность* регулятора.

Действительно, из-за нечувствительности перемещение регулятора наступает позднее, чем изменение числа оборотов. Нечувствительность регулятора и измеряется тем, насколько должна измениться угловая скорость, чтобы регулятор начал переставлять заслонку. Нечувствительность регулятора — это серьезный бич регулирования, так как наличие нечувствительности приводит к тому, что регулятор как бы выключается в определенной зоне и внутри этой зоны — тем более широкой, чем больше нечувствительность — не может контролировать изменения угловой скорости.

Но, как мы уже говорили, Вышнеградский пренебрег кулоновским трением при исследовании сходимости процесса регулирования и в этом предположении установил тот фундаментальный факт, что система машина — регулятор обладает способностью к самораскачиванию, которое может быть устранено достаточно большим вязким трением в регуляторе. Вышнеградский понимал — это мы сейчас докажем, — что кулоновское трение, влияние которого он не учитывал в своей теории, также может, при некоторых условиях, подавить самораскачивание системы машина — регулятор. Однако он считал, что *кулоновское трение, порождающее нечувствительность регулятора, является вредным фактором, который всячески следует уменьшать и который недопустимо использовать для борьбы с самораскачиванием*. Отсюда тезис Вышнеградского о катаракте.

Мы дадим сейчас детальный разбор высказываний Вышнеградского по этому поводу и приведем несколько цитат из его работы и из его заметки в докладах Парижской Академии. При анализе этих высказываний следует иметь в виду, что Вышнеградский, следуя обычной французской терминологии, называет кулоновские силы трения, возникающие при перемещениях муфты (в муфте, в шарнирах, в заслонке), вредными или пассивными сопротивлениями.

В § 4 своей работы он выписывает уравнения движения, содержащие член, соответствующий этим вредным сопротивлениям, с целью дать определение чувствительности регулятора, отчетливо оговаривая, что этот член будет в дальнейшем отброшен¹.

¹ И. А. Вышнеградский. О регуляторах прямого действия, стр. 50 книги Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола, loc. cit.: «... что касается вредных сопротивлений регулятора и регулирующего прибора, то величины их, приведенные к муфте регулятора, будут, конечно, изменяться вместе с положением муфты, но так как эти величины в каждом хорошем регуляторе будут малы, да притом положение муфты также мало переменяется, то их можно считать

В § 5 Вышнеградский, рассматривая совместно уравнения регулятора и машины, сводит их к одному, продифференцировав то уравнение движения муфты регулятора, в котором, по точному смыслу предыдущего, член с кулоновским трением должен считаться откинутым.

В § 11, подводя итоги своего исследования, он указывает, что хотя наличие кулоновского трения может уменьшить способность системы машина — регулятор к самораскачиванию, но что одновременно то же кулоновское трение приведет к нежелательному уменьшению чувствительности регулятора и еще раз с полной отчетливостью напоминает, что кулоновское трение было в его исследовании отброшено¹.

Еще более отчетливо Вышнеградский высказывается на эту тему в заметке, напечатанной в Докладах Парижской Академии наук в 1876 г. В конце этой заметки он прямо говорит, что некоторые регуляторы, не удовлетворяющие условиям устойчивой работы, полученным из его теории, все же могут устойчиво работать за счет наличия кулоновского трения. «Наконец, автор объясняет, что вследствие влияния пассивных сопротивлений некоторые регуляторы, не удовлетворяющие условию $xy > 1$, могут еще эффективно действовать, но тогда эта выгода покупается за счет их чувствительности, которая может быть сохранена только при возможном уменьшении пассивных сопротивлений...» (см. стр. 39) книги Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодола.

В какой же ошибке обвиняли Вышнеградского? Утверждалось, что Вышнеградский не отбрасывал сознательно кулоновское трение, а что оно у него исчезло из окончательных уравнений в силу недосмотра в дифференцировании, или, иначе говоря, что Вышнеградский неправильно считал константы интеграции постоянными для всего времени движения регулятора, в то время как при учете разрывной силы кулоновского трения их следует определять отдельно для каждого размаха регулятора. Утверждалось, что Вышнеградский не имел правильного механического представления о характере действия сил кулоновского трения и поэтому считал эти силы неспособными воспрепятствовать неустойчивости, порождаемой взаимодействием машины и регулятора. Коротко говоря, утверждалось, что тезис

постоянными: мы их обозначим соответственно через $\lambda AR'$ и $\lambda AR''$, где λ будет ± 1 и его знак будет противоположен знаку $\frac{du}{dt}$.

Есть много регуляторов, где эти величины столь малы, что ими можно пренебречь, даже и сравнительно с теми величинами, которые мы сохраняем в качестве величин первого порядка. *Впоследствии это допущение и будет сделано, но в настоящем параграфе мы пока сохраним их.* (Курсив авторов статьи.)

¹ «...вредная подвижность регуляторов может быть... уменьшена влиянием вредных сопротивлений, встречающихся при движении регулятора и регулирующего прибора и которыми мы пренебрегали, но в регуляторах такого рода уменьшение вредной подвижности соединяется с уменьшением и полезной их подвижности, т. е.: чувствительности, которой... невозможно достигнуть... иначе, как под условием возможного уменьшения вредных сопротивлений» (см. стр. 67 книги Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодола, loc. cit., курсив авторов статьи).

Вышнеградского о необходимости катаракта является логическим следствием элементарной — математической или механической — ошибки в трактовке правильно поставленной задачи. Это обвинение, как можно было убедиться из изложенного выше, заведомо неправильно.

Повидимому, обвинения Вышнеградского в ошибке ведут свое начало от работы французского инженера Лекорню, рассмотревшего вопрос о влиянии кулоновского трения на сходимость процесса регулирования в регуляторе прямого действия¹.

Утверждения Лекорню по поводу работы Вышнеградского могут быть сведены к следующим трем пунктам:

1) Вышнеградский не видел, что при наличии разрывного кулоновского трения одни и те же произвольные постоянные в интеграле уравнений движения не могут служить для рассмотрения последовательных размахов регулятора;

2) поэтому Вышнеградский не был в состоянии математически объяснить, почему регулятор без катаракта способен устойчиво работать за счет кулоновского трения;

3) Вышнеградский, не желая впасть в прямое противоречие с фактом существования регуляторов, надежно работающих при отсутствии катаракта, поспешил заявить без должного основания, что устойчивая работа таких регуляторов покупается за счет их чувствительности.

Последующие авторы, обычно ссылаясь на Лекорню, *заострили* эти утверждения и стали прямо говорить об ошибке Вышнеградского².

¹ L é c o r n u. Regularisation du mouvements dans les machines. Paris, 1897, p. 136—138.

² Так, например, у Н. Е. Жуковского мы находим: «Вышнеградский пришел к тому заключению, что все регуляторы неустойчивы и что для их устойчивости к ним необходимо присоединить катаракт... Несмотря на присущую Вышнеградскому тонкость анализа, он сделал ошибку в своем исследовании, указанную Лекорню.

В полученном Вышнеградским уравнении пропадает член, зависящий от величины постоянного трения. Влияние постоянного трения, которое меняет свой знак при изменении направления движения регулятора, сказывается на произвольных постоянных в интеграле, выражающем перемещение муфты.

Эти постоянные Вышнеградский считает одинаковыми для всего времени колебания регулятора, а между тем их следует определять отдельно для каждого колебания регулятора» (Н. Е. Жуковский. Теория регулирования хода машин, М., 1909).

Весьма близко к Н. Е. Жуковскому излагает вопрос В. Л. Кирпичев, конечно, имея в виду Вышнеградского.

«... В первых работах относительно колебаний регуляторов паровых машин не было обращено внимания на то, что в случае постоянного трения мы имеем разрывную величину, откуда следует необходимость рассматривать каждый размах колебания отдельно и пользоваться двумя различными уравнениями.

Оба эти уравнения соединяли в одно и писали их в форме

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \pm f + kx + z = 0 \quad (120)$$

Затем по ходу вывода требовалось найти третью производную $\frac{d^3x}{dt^3}$ для подстановки ее в другое уравнение вопроса... Для нахождения этой величины дифференци-

В чем же здесь дело? Почему Вышнеградского обвиняли в ошибке, которой у него не было? Тут можно указать три обстоятельства. Во-первых, и это может быть самое главное, стиль работы Вышнеградского несколько отличался от обычных математических исследований: если Вышнеградский выписал член с кулоновским трением в § 4 своей работы, то казалось само собой разумеющимся, что он должен его учитывать и исследовать в дальнейших параграфах, и не приходило в голову, что этот член может быть в § 5 отброшен без исследования по соображениям, связанным не с математикой, а с техникой. Во-вторых, и это тоже сыграло определенную роль, вопрос о влиянии кулоновского трения на процесс регулирования Вышнеградский оставил до известной степени в тени, не разъяснил подробно свою точку зрения, которая выясняется лишь при внимательном чтении его статьи и сопоставлении утверждений статьи и заметки в «Comptes Rendus». В-третьих, то обстоятельство, что сам Вышнеградский не принимал никакого участия в этой дискуссии. Через несколько лет после появления своих работ о регуляторах он совсем отошел от научной деятельности, а к моменту появления печатных обвинений с указанием на ошибки в его исследовании его уже не было в живых. Следует отметить при обсуждении вопроса о мифической ошибке Вышнеградского, что авторы обзоров по истории теории регулирования Хорт,¹ Мизес², касаясь результатов, полученных Вышнеградским, нигде не говорят об его ошибке, а продолжатели и пропагандисты идей Вышнеградского, Стодола³ и Тринкс⁴, упоминая о тех недоумениях, которые сначала вызывал тезис Вышнеградского, спешат разъяснить эти недоумения и взять тезис о катаракте под свою защиту. Что же в конечном счете следует сказать о тезисе Вышнеградского?

Катаракт не был изобретен Вышнеградским. Для астрономических регуляторов, как мы видели, его использовал уже Эри. Однако Эри не дал теории действия катаракта. Максвелл, учитывая влияние отклонения шаров регулятора на приведенный момент инерции маховика, не мог вскрыть необходимости трения для правильной работы регулятора, управляющего обычной паровой машиной. Именно Вышнеградский впервые отчетливо выявил роль трения в основной схеме регулирования паровой машины и заострил свои выводы в виде тезиса о катаракте.

Ровали уравнение (120), причем ошибочно предполагали, что производная члена $\pm f$, как производная потоянной величины, будет равна нулю. Этим путем трение совершенно исключалось и не попадало в окончательное уравнение». (В. Л. К и р п и ч е в, Беседы о механике, СПб., 1907).

Мы ограничимся этими цитатами, хотя можно было бы привести много других аналогичных цитат как из русских, так и из иностранных работ.

¹ W. H o r t. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenregelung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Regelungsvorgänge, Z. Math. u. Phys., Bd. 50, H. 3, S. 233, 1904.

² R. M i s e s. Enzyklop. der Mathematischen Wissenschaften, 1907.

³ A. S t o d o l a. Turbinenregulierung, Schweiz. Bauzeitung, Bd. 22, № 17—20, 1893; Bd. 23, № 17—18, 1894.

⁴ T r i n k s. Governors and the governing of prime movers, London, 1919.

Конечно, ситуация фактически оказалась более сложной, чем, повидимому, представлял ее себе Вышнеградский. Оказалось, в противоположность мнению Вышнеградского, которое мы цитировали, что кулоновское трение, обеспечивая сходимости процесса регулирования, во многих случаях порождает лишь такую нечувствительность регулятора, которая вполне терпима на практике. Но вряд ли следует за этот, все же второстепенный, промах строго судить Вышнеградского, который стремился снабжать паровые машины наилучшими регуляторами, но практически имел дело, с нашей точки зрения, с тихоходными машинами, громадными маховиками, грубыми регулирующими устройствами. И если мы, следуя Стодоле, сформулируем тезис Вышнеградского так: «без трения нет регулятора»¹, то мы должны будем признать, что этот тезис лежит в основе современной теории регулирования.

5. Теория непрямого регулирования и работы А. Стодола

Аурель Стодола (1859—1942), впоследствии создатель научной теории паровых и газовых турбин, в 1893—1899 гг. распространил линейный анализ Вышнеградского на не прямое регулирование, а также на прямое регулирование, осуществляемое так называемыми инерционными регуляторами. Кроме того, Стодола окончательно разъяснил недоразумения, возникшие в связи с тезисом Вышнеградского о катаракте.

Регулятор Уатта — простейший регулятор прямого действия. Здесь перестановка заслонки, управляющей поступлением пара в машину, производится при помощи системы рычагов самим чувствительным элементом — центробежным маятником. Но в мощных машинах, там, где для перестановки заслонки или аналогичного приспособления требуется большая сила, устраиваются так называемые регуляторы *непрямого* действия. В них перестановку заслонки совершает не сам чувствительный элемент, а особый двигатель — *сервомотор*, обладающий достаточной силой и имеющий обычно самостоятельный источник энергии, а чувствительный элемент лишь управляет этим сервомотором, переставляя, например, золотник в гидравлических сервомоторах или движок реостата в электрических сервомоторах.

В 1893 г. в тогда еще мало известном журнале «Schweizerische Bauzeitung» появляется работа А. Стодола «О регулировании турбин. I», а в следующем, 1894 г., в том же журнале — ее продолжение «О регулировании турбин. II». Эти работы, которые можно считать двумя частями одного исследования, посвященные регулированию водяных турбин, заслуженно считаются классическими. В эти годы особое значение для развития теории регулирования перестало играть регулирование паровых машин.

¹ С чисто технической стороны существенно еще и то, что работа регулятора, снабженного катарактом, сильно зависит от температурных условий в связи с изменением вязкости масла при изменении температуры.

Громадное влияние на практику и теорию регулирования в это время оказали рост и развитие гидравлических машин. Электрическая энергия до 1891 г., т. е. до создания М. О. Доливо-Добровольским знаменитой линии передачи с высоким к. п. д. от Лауфенского водопада до Франкфурта-на-Майне еще не передавалась по проводам на значительные расстояния, и гидравлические машины обслуживали отдельные трансмиссии или отдельные исполнительные механизмы.

После появления линий электропередач гидравлические машины стали быстро развиваться, и почти параллельно с их развитием и увеличением их мощности шло развитие теории и практики автоматического регулирования.

В 1885 г. появилась работа Леоте¹, занимавшегося регулированием водяных турбин. Леоте был гидравликом. Имея дело с машинами, обладающими значительным саморегулированием, он совершенно иначе представлял себе всю проблему регулирования, чем Вышнеградский. В случае Вышнеградского регулятор *создавал* характеристику паровой машины. В случае Леоте, как и в случае Максвелла, регулятор *использовал* существующую характеристику машины. Можно сказать и так: Леоте искал способы регулирования турбины по их характеристикам, клал в основу наличие резко выраженного саморегулирования. Леоте имел дело с регуляторами *непрямого действия*, которые к этому времени прочно вошли в практику гидравлических установок, так как для передвижения заслонок здесь уже требовались значительные усилия. Но это были *примитивные* регуляторы непрямого действия, у которых *скорость* перемещения заслонки зависела лишь от смещения муфты чувствительного элемента.

Леоте не мог принять *линеаризацию* уравнений движения, которую с таким успехом использовал Вышнеградский, так как Леоте на практике, при работе с примитивными регуляторами непрямого действия в гидравлических устройствах, видел наличие таких явлений, которые *нельзя объяснить линейно* и которые для своего объяснения и расчета требуют учета нелинейностей, наличия «мертвых зон» в характеристике сервомотора и кулоновского трения в чувствительном элементе.

Результаты Леоте представляют фундаментальный интерес для теории регулирования. Его работа, так же как и работа Вышнеградского, является классической: она заложила основы нелинейной теории регулирования. Но эти нелинейные факторы заслонили от Леоте роль регулятора как создателя характеристики машины. При этом Леоте не почувствовал, что влияние нелинейных факторов может быть фундаментально уменьшено, иногда почти сведено на-нет разумной схемой регулирующего устройства. Леоте не оценил работы Фарко², который примерно за десять лет до Леоте

¹ М. Н. L é a u t é. M é m o i r e sur les oscillations á longues périodes dans les machines actionnées par des moteurs hydrauliques et sur les moyens de prévenir ces oscillations. Journ. de l'école Polytechn., 1885.

² F a r c o t. Le servo-moteur ou moteur-aservi, Paris, 1873.

натолкнулся на замечательную идею жесткой обратной связи, идею «порабощения» мотора, переставляющего заслонку, которая для непрямого регулирования восстанавливает зависимость *положения* заслонки от *положения* муфты чувствительного элемента, которая характерна для основной схемы прямого регулирования.

Это изобретение Фарко позволило сконструировать регуляторы непрямого действия, гораздо более надежные в работе, чем те, с которыми имел дело Леоте. Нелинейные факторы перестали в них играть фундаментальную роль, которую они играли в случае Леоте, и подготовили почву для работ Стодолы.

Стодола впервые дал линеаризованную теорию *непрямого* регулирования. До Стодолы в теории непрямого регулирования работали в основном с так называемыми сервомоторами постоянной скорости, а следовательно, имели дело со сложной *нелинейной* проблемой. Стодола, в духе Вышнеградского, начал мужественно оперировать линейными уравнениями и для сервомотора и на этом пути получил результаты выдающегося значения. Этот важный шаг, на который не решались пойти предшественники Стодолы, пытавшиеся с большим или меньшим успехом учитывать влияние нелинейности характеристики (зоны нечувствительности, разгонного участка и др.), сразу дал ему возможность подчинить всю схему непрямого регулирования теории малых колебаний.

Стодола в этих работах о турбинах выступает как прямой продолжатель и последователь Вышнеградского. В первой части работы, где рассматривается идеальный регулятор (т. е. регулятор без инерции и без трения), Стодола прямо сводит задачу к уравнению, исследованному Вышнеградским, и, ссылаясь на работу Вышнеградского, ведет его дискуссию. Во второй части работы, где речь идет об учете действия инерции масс регулятора и о влиянии катаракта, Стодола особо подчеркивает связь своей работы с работой Вышнеградского, указывая, что работа Вышнеградского во многом определила ход его рассуждений (Auf die Wichtigkeit der Kataraktes ist insbesondere von Wischnegradsky in der zitierten Abhandlung, welche dem hier befolgten Gedankengang in mehrfacher Beziehung zu Grunde liegt, hingewiesen).

Стодоле, занимавшемуся теорией регулирования водяных турбин, пришлось рассматривать сложные системы регулирования, включающие распределенное звено — трубопровод. И хотя именно Стодоле удалось дать замечательный приближенный анализ влияния трубопровода на процесс регулирования водяной турбины, все же вопрос об устойчивости системы регулятор — сервомотор — трубопровод — воздушный колпак — турбина свелся у него к исследованию корней характеристического уравнения *высокой* (шестой) степени. Лишь в некоторых простейших случаях, обязательно при отбрасывании массы регулятора, характеристическое уравнение системы является кубическим. Эти элементарные случаи Стодола решает, как мы отметили, следуя Вышнеградскому. Но у Вышнеградского нет ничего, если дело идет об уравнениях степени выше третьей,

и Стодола, не зная работ Максвелла и Рауса, обращается к своему товарищу по Цюрихскому политехникуму математику А. Гурвицу с просьбой найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты многочлена n -й степени, чтобы все корни этого многочлена имели отрицательные действительные части.

Гурвиц, опираясь на работу Эрмита, относящуюся еще к 1867 г., находит в 1893 г. такие условия в элегантной детерминантной форме (эти условия сейчас называются условиями Рауса-Гурвица), и, воспользовавшись ими, Стодола доводит свое исследование до конца, т. е. до буквенных неравенств, в которые легко подставить числовые значения.

Эти буквенные неравенства дают условия устойчивой работы, т. е. условия отсутствия самовозбуждения колебаний. Для придания расчетам большей наглядности Стодола вводит в уравнения в качестве зависимых переменных безразмерные величины, характеризующие соответственно относительную величину перемещений муфты регулятора, золотника сервомотора, заслонки и изменение угловой скорости и т. д. Тогда коэффициенты при производных в этих уравнениях имеют размерность времени и допускают простую физическую интерпретацию. Результаты, полученные Стодолой в области теории регулирования турбин, были тщательно сверены с экспериментами. Эти эксперименты были проверены на нескольких установках и дали замечательное согласие с теорией, по крайней мере в отношении влияния на устойчивость параметров системы (объема воздушного колпака, момента инерции колеса турбины и т. д.).

Следующая фундаментальная работа Стодолы в области регулирования «Принцип регулирования Сименсов и американские инерционные регуляторы», появившаяся в 1899 г., относится к теории прямого регулирования.

Здесь Стодола дает в простой и изящной форме теорию так называемых *инерционных* регуляторов прямого действия, в которых, кроме центробежных сил инерции, как в обычных центробежных регуляторах, действуют еще и тангенциальные силы инерции, т. е. имеет место комбинированное регулирование по регулируемой координате и по производной регулируемой координаты (в данном случае по угловой скорости и угловому ускорению).

Он показывает, что в случае отбрасывания кулоновского трения исследование устойчивости системы машина — инерционный регулятор приводится к исследованию корней кубического уравнения и указывает, как должны быть изменены тезисы Вышнеградского, если речь идет об инерционных регуляторах. Именно он показывает, что введение дополнительного воздействия по угловому ускорению позволяет обеспечить условия устойчивости при астатическом регуляторе, если только в регуляторе есть трение.

В этом более сложном случае Стодола использует диаграммы, являющиеся непосредственным обобщением диаграмм Вышнеградского, откладывая по осям безразмерные параметры, которые он называет «*Wischnegradskyschen Kennzahlen der Regulierung*».

Здесь же Стодола приближенно подсчитывает, как сказывается кулоновское трение¹ на устойчивости движения системы машина — регулятор прямого действия, и затем подробно разъясняет этот важный пункт, оставленный Вышнеградским в тени и лишь слегка задетый самим Стодолой в работе о регулировании водяных турбин.

Можно сказать, что здесь Стодола окончательно разъяснил этот вопрос для широких кругов инженеров, дав простой и наглядный вывод достаточных условий, при которых кулоновское трение *в отсутствие вязкого трения* обеспечивает сходимость процесса регулирования.

Стодола начинает с указания, что работа Вышнеградского, содержащая тезис о катаракте, «была встречена многочисленными сомнениями, которые обосновывались ссылками на многие, хорошо работающие регуляторы, не имевшие катарактов». Далее Стодола берет под свою защиту тезис Вышнеградского и утверждает, что сомневающиеся «проглядели, что в таких регуляторах или в их перестановочных органах всегда имеются налицо некоторые силы трения, которые при возникновении колебаний поглощают живую силу массы регулятора, т. е. демпфируют колебания; таким образом, безусловно остается в силе закон, что регулирование невозможно без определенного демпфирования...».

Интересно отметить, что идея Вышнеградского о необходимости исследования качества переходного процесса также была воспринята и развита дальше Стодолой. В своей работе о регулировании турбин Стодола говорит о необходимости в некоторых случаях проводить исследование переходного процесса, чтобы убедиться в приемлемости выбранных числовых параметров регулятора трубопровода и турбины. В работе, посвященной инерционным регуляторам, Стодола уделяет много места максимальной скорости, имеющей место за время переходного процесса, и строит специальные диаграммы (для астатического инерционного регулятора), при помощи которых можно найти эту максимальную скорость с минимумом выкладок.

Эту работу Стодолы можно рассматривать как завершающую основные оригинальные работы в области классической линеаризованной теории регулирования. В частности, в работе есть ясные указания, как использовать в вопросах регулирования общую теорию малых колебаний системы вокруг установившегося движения для построения линеаризованной теории любой, сколь угодно сложной, системы регулирования.

Резюмируя заслуги Стодолы в области теории регулирования, можно сказать, что Стодола распространил инженерную теорию регулирования Вышнеградского, относившуюся к регуляторам прямого действия, на всю громадную область непрямого регулирования и придал ей ту форму, которая в основном удержалась вплоть до настоящего времени. А разъясне-

¹ Первое приближенное решение этого вопроса было дано Бегтрепом (I. Begtrup, Theory of steam Engine Governors. American Machinist, 1893, 1894), затем Толле (M. Tolle, Z. d. VDI, 1895) и Лекорню (L. Lecornu, Regularisation du mouvement dans les machines. Paris, 1897). После Стодолы этой же проблеме был посвящен еще ряд работ: Мизеса (1908), Жуковского (1909), Рериха (1924), Николаи (1928) и др.

нием действия сил кулоновского трения на процесс регулирования и многочисленными опытами, поставленными для проверки выводов теории, Стодола окончательно убедил инженеров не только в динамической правильности основ линеаризованной теории, но и в ее исключительной практической эффективности.

6. Влияние работ Максвелла, Вышнеградского и Стодолы на последующее развитие теории регулирования

Работа Максвелла «О регуляторах», как мы уже упоминали, осталась почти незамеченной инженерами и не сыграла поэтому *непосредственно* заметной роли в развитии теории регулирования. Но работа Максвелла индуцировала трактат Рауса «Об устойчивости заданного состояния движения»¹ и через эту последнюю работу оказала определенное влияние на развитие теории автоматического регулирования и управления.

Существенное влияние идей Максвелла на трактат Рауса, получивший премию Адамса в Кембриджском университете в 1877 г., как и на некоторые предшествующие работы Рауса, может быть легко установлено. Не говоря уже о том, что Максвелл входил в состав комиссии, выдвинувшей на соискание премии Адамса в 1877 г. тему «Критерии динамической устойчивости», само содержание работы Рауса свидетельствует, что ее следует рассматривать как дальнейшую разработку идей и приемов Максвелла, заключающихся в работе, относящейся к кольцу Сатурна, и особенно в работе, посвященной регуляторам. В частности, Раус в своем трактате дал решение задачи Максвелла о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения n -й степени, чтобы все его корни имели отрицательные действительные части. Именно Раус указал алгоритм, который позволяет последовательно найти эти условия для любого n .

Раус довел исследование устойчивости установившихся движений до той степени автоматизма, когда решение той или иной конкретной неконсервативной задачи не требует каких-либо умственных усилий, а может быть проведено по раз навсегда установленному шаблону.

Однако принципиальная сторона работы Рауса неудовлетворительна. Ни у Максвелла, ни у Рауса нет точного определения понятия «устойчивость движения» и нет сколько-нибудь удовлетворительного обоснования законности линеаризации уравнений движения при отыскании условий устойчивости.

Точное определение понятия «устойчивость движения» было дано лишь А. М. Ляпуновым в 1892 г., и им же были найдены условия, при выполнении которых становится законной — для установления «устойчивости по Ляпунову» — линеаризация уравнений движения. Для слу-

¹ В меньшей степени трактат Рауса связан с «Натуральной философией» Томсона и Тэта, первое издание которой вышло в 1867 г., хотя и эта книга оказала влияние на труд Рауса.

чая установившихся движений, когда линеаризованные уравнения имеют постоянные коэффициенты, эти условия сводятся к тому, чтобы были отрицательны действительные части всех корней соответствующего характеристического уравнения.

Хотя это понятие «устойчивости по Ляпунову», имеющее фундаментальное значение в теории дифференциальных уравнений, связано со сколько угодно малыми отклонениями и в ряде пунктов не отвечает тому понятию об устойчивости движения, которое непосредственно интересует практику, нужно считать, что лишь с появлением диссертации А. М. Ляпунова работы по теории регулирования, основанные на исследовании устойчивости движения при помощи линеаризованных уравнений, получили настоящее математическое обоснование.

Все основные результаты трактата Рауса с рядом дополнений вошли в книгу Рауса «Высшая динамика твердых тел» (1877)¹, которая потом многократно переиздавалась и получила широкое распространение.

Общие рецепты исследования устойчивости установившихся движений, изложенные в этой книге, оказали существенное влияние на математическую и механическую сторону теории автоматического регулирования и управления.

Начиная с работы Стодолы 1899 г., на эту книгу Рауса появляются ссылки в статьях по автоматическому регулированию и управлению и, наконец, условия отрицательности действительных частей алгебраического уравнения n -й степени, которыми сплошь и рядом приходится пользоваться в теории регулирования и задача отыскания которых была впервые поставлена Максвеллом в связи с проблемами регулирования, получают название *условий Рауса-Гурвица*.

При этом следует, однако, иметь в виду, что в области конкретной теории регулирования, в понимании того, какие факторы на практике обуславливают устойчивую работу реальной паровой машины, снабженной регулятором, Раус не пошел существенно дальше Максвелла².

Перейдем теперь к Вышнеградскому. Мы уже отмечали то фундаментальное влияние, которое оказала работа Вышнеградского о регуляторах прямого действия на работу Стодолы и на всю линеаризованную теорию регулирования. Сейчас мы хотим особо остановиться на вопросе о признании заслуг Вышнеградского в мировой технической литературе, прежде всего в русской.

¹ E. Routh. Advanced Part of the Dynamics of the System of Rigid Bodies, London, Macmillan, 1877.

² Даже в тех изданиях своей книги, которые относятся к XX в., Раус позволяет себе рекомендовать астатический регулятор Уатта для машины без саморегулирования, наделив такую систему устойчивостью за счет учета изменения момента инерции главного вала при расхождении шаров регулятора. См. также ядовитые замечания Тринкса в предисловии к книге T r i n k s. Governors and the governing of prime movers (New York, 1919) по поводу непонимания Раусом динамики обычного процесса регулирования.

В момент своего появления работа Вышнеградского была сочувственно встречена в России¹, в частности, и потому, что его имя пользовалось тогда большой популярностью в русских технических кругах. Несомненно, что Вышнеградский привлек внимание русских инженеров к вопросам регулирования, и в последние десятилетия XIX в. в России был опубликован ряд работ, посвященных теории регулирования (Котурницкий, Сидоров, Гречанинов, Грдина и др.), из которых некоторые, например работы Грдина, содержали существенные научные результаты.

Работа Вышнеградского, опубликованная почти одновременно на русском, французском и немецком языках, сразу же получила известность за границей — в Германии, во Франции и в Америке.

Мы не будем повторять уже сказанное о Стодоле, как о продолжателе и пропагандисте идей Вышнеградского. Но следует указать, что даже те авторы, которые оспаривали тезис Вышнеградского о катаракте и полемизировали с Вышнеградским, все же не могли не отметить некоторых выдающихся достоинств работы Вышнеградского и таким образом содействовали распространению заключавшихся в ней идей.

Через несколько лет после появления работы Вышнеградского каждый грамотный инженер, занимавшийся наладкой и конструированием регуляторов, стал понимать, что увеличение массы регулятора и уменьшение неравномерности вредно влияют на сходимость процесса регулирования. Отчетливое понимание влияния трения на сходимость процесса регулирования и понимание смысла тезиса Вышнеградского о катаракте пришло несколько позднее — через 15—20 лет после появления его работы. Но и в том и в другом случае это понимание пришло в связи с работой Вышнеградского и в связи с той острой дискуссией, которая возникла по поводу этой работы.

Переходя к развитию теории регулирования в первые два десятилетия XX в., прежде всего необходимо отметить появление в 1905 г. первого издания книги Толле «Регулирование двигателей»², которая быстро распространилась среди инженеров-машиностроителей Германии, а отчасти России.

В этой книге, явившейся для своего времени хорошим курсом теории регулирования машин, основное место уделено линеаризованной теории регулирования. Но вопросы, связанные с историей теории регулирования, в этой книге почти не затрагиваются, и книга не содержит даже необходи-

¹ См. речь Гадолина, стр. 305. А. С и д о р о в. Плоские регуляторы быстроходных машин, М., 1895. Я. И. Г р д и н а. Движение регулятора прямого действия и его устойчивость, Вест. О-ва технологов, № 4,5, 6—7, 1898; о н ж е, О некоторых типах регуляторов с двухгрузовым маятником, Вестн. О-ва технологов, № 7, 1899 и др.; А. В. Г р е ч а н и н о в. Задача об устойчивости движения машины, управляемой регулятором прямого действия, Вестн. О-ва технологов, № 7 и 9, 1899; о н ж е, Об устойчивости движения регуляторов. Технич. сборник и Вестн. пром-сти, № 1, 3, 4, 6 и 10, 1896.

² T o l l e. Regelung der Kraftmaschinen, Berlin, J. Springer, 1905.

мых ссылок на первоисточники. Толле, несомненно знакомый с работой Вышнеградского, не упоминает его имени даже там, где излагает результаты его работы, ничего не говорит о работе Максвелла и лишь упоминает о работах Стодолы.

Однако, по сути дела, не упоминая фамилии Вышнеградского, книга Толле пропагандирует идеи Вышнеградского, распространяя их не только на не прямое регулирование при помощи сервомотора с жесткой обратной связью, что было сделано еще Стодолой, но и на так называемое *изодромное* регулирование, позволяющее сочетать малую неравномерность, или, теоретически, астатизм, регулирования с высокой степенью устойчивости движения.

К 1910 г. в связи с развитием машиностроения в России значительно усиливается интерес к теории регулирования. Но к этому времени деятельность Вышнеградского в области теории регулирования оказалась уже основательно забытой и русские инженеры начали изучать теорию регулирования по книге Н. Е. Жуковского «Теория регулирования машин» (1909) и отчасти по только что упоминавшейся книге Толле.

Гениальный механик, один из создателей аэрогидродинамики, Н. Е. Жуковский начал систематически заниматься теорией регулирования около 1903 г., хотя ему и раньше приходилось сталкиваться с различными вопросами теории регулирования в беседах с преподавателями Московского высшего технического училища, в частности в беседах с профессором А. И. Сидоровым. Результатом работы Жуковского в этой области было несколько факультативных курсов по теории регулирования, прочитанных им в Московском университете в 1906—1909 гг., и курс «Теория регулирования хода машин», посвященный регуляторам прямого действия и прочитанный им в 1908/1909 учебном году в Московском высшем техническом училище. Литографированные студенческие записки этого последнего курса, предназначавшиеся для слушателей автора, получили широкую известность в России.

«Теория регулирования хода машин» представляет замечательно ясное, простое и доходчивое изложение классической теории регуляторов прямого действия, снабженное в ряде мест существенными и оригинальными дополнениями. Эти дополнения, из которых наиболее интересны «Видоизменение анализа Лекорню», где исследуется нелинейная задача о влиянии кулоновского трения на процесс прямого регулирования, и «Интегрирование разностных уравнений, описывающих динамику регулятора при регулировании на отсечку пара», не были опубликованы Н. Е. Жуковским в виде отдельных работ, но, повидимому, составили основное содержание двух докладов, сделанных Н. Е. Жуковским Московскому математическому обществу весной 1903 г.

Результаты Жуковского, изложенные в первом дополнении, позволяют, в частности, быстро найти (с некоторым запасом) величину кулоновского трения в сочленениях регулятора, при котором процесс регулирования сходится. Результаты Жуковского, изложенные во втором дополнении,

имеют существенное значение для расширения круга объектов, которые охватываются условиями Вышнеградского. Жуковскому удалось строго доказать, что к числу таких объектов безусловно относятся и паровые машины, регулируемые изменением отсечки пара, если их угловая скорость достаточно велика.

Заметим, что Жуковский не отмечает значения работы Вышнеградского в создании теории регулирования. Это происходит, во-первых, в связи с тем, что историческая часть вообще отсутствует в этих лекциях, а во-вторых, в связи с тем, что Жуковский, повидимому не знакомый с самой работой Вышнеградского, а знавший о содержании этой работы по многочисленным полемическим статьям и высказываниям (в частности, проф. А. И. Сидорова), был уверен, что Вышнеградский допустил в ней серьезную математическую ошибку.

Начиная с осени 1909 г., Жуковский перестал заниматься теорией регулирования и, насколько нам известно, больше к ней не возвращался¹.

Во французском руководстве Лекорню, вышедшем в 1904 г.², работа Вышнеградского излагалась подробно, хотя это изложение сопровождалось некоторыми критическими замечаниями.

Существенно иное положение вещей мы обнаруживаем у Хорта³, автора одного из немногих обзоров по истории теории регулирования и автора известной книги по теории колебаний, который, излагая работы Максвелла, Вышнеградского и работу Стодолы об инерционных регуляторах, особо выделяет работу Вышнеградского, считая ее лежащей в основе современной теории регулирования и сожалея, что эта работа не получила той известности, которую заслуживала.

¹ Вопросы динамики машин привлекли внимание В. Л. Кирпичева, одного из выдающихся русских инженеров и деятелей русской Высшей технической школы, учителем которого был Вышнеградский. С 1903 г. В. Л. Кирпичев систематически вел факультативные лекции («беседы») по вопросам теоретической и прикладной механики, в частности по теории уравнивания машин и по теории регуляторов, для молодых преподавателей Петербургского Политехнического института. Однако не весь материал этих факультативных бесед был опубликован, и в известной книге В. Л. Кирпичева «Беседы о механике» теории регулирования посвящено лишь несколько отрывочных замечаний. В. Л. Кирпичев имел ряд выдающихся сотрудников, и один из этих сотрудников (К. В. Рерих) дал несколько существенных работ в области теории регулирования. Но эти работы увидели свет, а частью и были выполнены уже после Октябрьской революции.

² L. L e c o r n u. Les régulateurs des machines à vapeur, Paris, Dunod, 1904.

³ W. H o r t. Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenregelung nebst einem Versuch der Theorie unstetiger Regelungsvorgänge. Z. Math. und Phys., 1904, Bd. 50, S. 233—279.

На стр. 243 Хорт говорит «Работа Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» должна считаться основополагающей для современной теории регулирования» (Als grundlegend für die heutige Regelungstheorie betrachtet werden muss, стр. 243). Далее, в этой же статье Хорт говорит о тезисах Вышнеградского следующее: «В этих положениях содержится вся теория непрерывных регуляторов прямого действия» (In diesen Sätzen ist die ganze Theorie der stetig und direkt wirkenden Regler enthalten).

Примерно аналогичную позицию занимает американец Тринкс¹, автор известного руководства по теории регулирования, сыгравшего для стран, говорящих по-английски, в частности для Америки, роль, близкую к той, которую руководство Толле сыграло для Европы.

Тринкс, отмечая работы Максвелла, Вышнеградского и Стодолы, особо подчеркивает ценность работы Вышнеградского, утверждая, однако, что она не была понята и усвоена инженерами как по причине абстрактно-математической формы изложения, так и потому, что она не давала объяснения некоторым известным фактам, противоречащим теории².

Несомненно, что и Хорт, и Тринкс, как и многие десятки менее известных авторов, занимающих сходную позицию, неправильно представляют себе историю вопроса.

Верно, что работа Вышнеградского положила основание современной теории регулирования. Неверно, что она осталась незамеченной инженерами и не оказала влияния на практику регуляторостроения. Эти авторы просмотрели, что Стодола в своих сделавших эпоху работах по линеаризованной теории непрямого регулирования действовал как последователь Вышнеградского и опирался на результаты Вышнеградского³ и что Толле в области динамики регулирования в конечном счете явился лишь компилятором и педагогом, изложившим в ясной, доходчивой форме результаты ряда работ своих предшественников, прежде всего Вышнеградского и Стодолы.

Чтобы дать законченную картину положения дел с линеаризованной теорией регулирования в первые два десятилетия XX в., сделаем еще несколько замечаний.

К 1910 г. вместо обычного непрямого регулирования получило повсеместное распространение так называемое изодромное регулирование, о котором у нас уже была речь. Приложение линеаризованной теории к изодромному регулированию явилось еще одним свидетельством ее эффективности. Инженеры стали стремиться к уменьшению или там, где это возможно, к практическому уничтожению кулоновских трений, мертвых ходов, перекрытия золотников и других факторов, обуславливающих нелинейность, с целью избавиться от непредвиденных осложнений при

¹ W. T r i n k s. *Governors and the governing of prime movers*, London, Pittsburgh, 1919. Тринкс утверждает, что теория Вышнеградского является основой, на которой строятся современные теории регулирования «...his publications are the foundation upon which modern theories of governing are built».

² Здесь речь идет о наличии исправно действующих регуляторов, не снабженных катарактом.

³ Отметим, что даже авторы (Лекорню и др.), которые не забывают отметить влияние идей и результатов Вышнеградского на работу Стодолы об инерционных регуляторах, проходят мимо гораздо более существенного для понимания истории теории регулирования факта влияния Вышнеградского на работы Стодолы по регулированию водяных турбин, в которых впервые была дана линеаризованная теория непрямого регулирования.

наладке систем регулирования и с целью получить уверенность в надежности расчета системы при помощи ставшей привычной линеаризованной теории.

Все это содействовало укреплению позиций линеаризованной теории. Именно в это время все нелинейные факторы¹ получили название «вторичных» факторов, осложняющих процесс регулирования, подчиняющийся линейной теории.

Одновременно линеаризованная теория регулирования, возмужавшая в основном на вопросах регулирования числа оборотов, получила новые обширные области применения.

Здесь следует отметить регулирование электрических машин, где наряду с регулированием чисел оборотов пришлось иметь дело с регулированием различных электрических величин, например напряжения, а также регулирование температуры, давления, расхода и т. д.

Автоматическое управление и регулирование начали интенсивно проникать в различные области военной, в частности военно-морской, техники, начиная с устройств, стабилизирующих курс торпеды, и кончая автоматическими устройствами для поворота орудийных башен — первоначальными образцами будущих следящих систем.

Во всех этих областях линеаризованные уравнения были положены в основу теоретических расчетов, и эти расчеты привели к выводам, имеющим фундаментальное практическое значение.

В наши дни мы являемся свидетелями нового исключительного расцвета научной деятельности в области теории регулирования. Этот расцвет связан, во-первых, с широким проникновением всевозможных автоматических устройств в различные области гражданской и военной техники. Во-вторых, он связан с непрерывным усовершенствованием этих устройств и с повышением требований к их точности и быстродействию, делающем почти безнадежным проектирование таких устройств без помощи теории.

Несмотря на то, что уровень техники автоматического управления и регулирования в наше время несоизмерим с тем, который был во времена Вышнеградского, идеи, связанные с линеаризованной теорией регулирования, являются ведущими и для большинства новых исследований. Тем более существенно отметить, что в противоположность многим старым руководствам и курсам, в частности курсу Тринкса, о котором уже была речь, в работах и курсах, изданных в последние годы за границей, особен-

¹ Позже, по мере увеличения требований к точности и быстродействию систем, выяснилось, что эти «вторичные» факторы могут существенно влиять на процесс регулирования. Кроме того, некоторые классы регуляторов (регуляторы типа «да—нет», регуляторы, работающие на отсечку, прерывистые регуляторы, вибрационные регуляторы и т. д.) вообще не могут быть удовлетворительно описаны линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому наряду с линейными задачами теории регулирования внимание исследователей было привлечено к нелинейным задачам теории регулирования. Основополагающим работам по нелинейным задачам теории регулирования будет посвящен отдельный том серии «Классики науки».

но в Америке¹, роль работы Вышнеградского в создании теории регулирования не отмечается и даже имя его не упоминается.

В последние годы начался процесс слияния линеаризованной теории регулирования с линеаризованной теорией многозвенных усилительных устройств. Особенно заметно и особенно плодотворно это слияние в области теории следящих систем, где оно зашло весьма далеко.

Существенная роль в новом расцвете теории автоматического регулирования принадлежит советским ученым. Однако анализ научных работ в области теории регулирования, выполненных за последние тридцать лет, выходит за пределы настоящего очерка.

¹ См., например, B r a n h a n d C o n p b a l l, Principles of servomechanisms, New-York, John Wiley, 1948; J a m e s, N i c h o l s, P h i l l i p s, Theory of Servomechanisms, New-York, Mc Graw-Hill, 1947; S m i t h, Automatic Control Engineering, New-York, Mc Graw-Hill, 1944.

МОЙ ПОСЛЕДНИЙ РАЗГОВОР с Л. И. МАНДЕЛЬШТАМОМ

Я хотел бы коротко рассказать о том разговоре, который я имел с Леонидом Исааковичем Мандельштамом 21 ноября 1944 г., за 6 дней до его смерти. Одновременно я попытаюсь показать, почему так любили разговаривать с Л. И. Мандельштамом его сотрудники и ученики. Мы знали уже давно, что Мандельштам тяжело болен. Мандельштама берегли, может быть, недостаточно. Его жена, Лидия Соломоновна, старалась, как могла, оберегать Мандельштама и выпроваживала собеседников после известного промежутка времени. Для нас, горьковчан, — я имею в виду Г. С. Горелика и себя, — был установлен более либеральный режим. Мы старались его не нарушать. По разговорам трудно было заметить, что Л. И. Мандельштам тяжело болен. Он полностью владел своими умственными способностями, был весел, остроумен, шутлив. Сначала мне казалось, что он не так уже сильно болен. Но еще в 1943 г. однажды у Лидии Соломоновны вырвалось несколько слов, из которых я понял, что дело действительно очень и очень серьезно и Леониду Исааковичу осталось жить если не считанные дни, то, может быть, считанные месяцы.

При беседе с каждым своим учеником и сотрудником Леонид Исаакович имел *свой* особый разговор. Этот разговор был специфичен, отвечал научным интересам ученика или сотрудника Мандельштама. Собеседнику казалось, что он особенно внимательно следит как раз за тем кругом вопросов, который интересует этого собеседника. Но это была грубейшая аберрация, эгоцентрическая ошибка. Он точно так же беседовал и с другими людьми по вопросам разнородных направлений.

Почему с ним было приятно разговаривать?

1. Если Мандельштам с Вами соглашался, иногда изменив аргументацию, то Вы получали абсолютную уверенность, что у Вас все в порядке.

2. Были особые вопросы, связанные с логической структурой физической теории, в которых он был особенно силен и беседовать о которых он, повидимому, любил.

3. Если даже вопросы и не решались, то они приобретали много новых аспектов, новых связей, новую окраску.

4. У Мандельштама был зоркий глаз, острая память и большой интерес к факту. Он многое продумывал для себя раньше. Со многими физическими вопросами у него имелись богатые ассоциации. И многие вопросы, имевшие в моем сознании весьма «тощий» вид, наполнялись живым содержанием, приобретали полнокровность после беседы с Леонидом Исааковичем.

5. Доброжелательность к собеседнику, может быть даже чрезмерная. Обычно приходилось выяснять мнение Леонида Исааковича о том или другом научном результате не столько по словам, сколько по оттенкам, по заинтересованности. Он много, мягко шутил, рассказывал анекдоты. Для него анекдот был «логической карикатурой».

6. Мандельштам серьезно относился к таким разговорам. Он чувствовал ответственность за сказанное. Не любил ошибаться и почти не ошибался. Если он ошибался, — а ошибался он крайне редко — и когда понимал, что ошибся, то очень беспокоился, принимался Вас разыскивать по телефону или передавал через третьих лиц просьбу зайти к нему, чтобы исправить небольшую неточность.

Он многое продумывал для себя раньше и на некоторые вопросы имел *готовые* ответы.

Чтобы ввести в курс дела, я вкратце должен сказать о своей работе и о работе Г. С. Горелика.

В 1943 г. вместе с моими горьковскими сотрудниками Н. Н. Баутиным и А. Г. Майером мне удалось при помощи нового для теории нелинейных колебаний метода точечного преобразования поверхностей решить несколько нелинейных задач с трехмерным фазовым пространством. Это не были самые нужные задачи и не были самые трудные задачи (скорее это были узловые задачи), но все же это были трехмерные задачи, и они были решены без всяких предположений о близости системы к линейной консервативной или каких-либо аналогичных предположений. И это сразу открыло некоторые новые возможности. Оказалось возможным рассмотреть такие динамические системы, которые раньше было невозможно решить, и, в частности, стало ясно многое, о чем раньше только предполагали. Оказалось, например, что в обычной схематизации паровая машина не является автовращательной системой и что таковой ее делает центробежный регулятор Уатта. Оказалось, например, что водяные турбины, снабженные регулятором непрямого действия, могут быть способны к паразитным автоколебаниям, порождаемым кулоновским трением, и что эти автоколебания хорошо известны. В 1944 г. в нашу работу включился Г. С. Горелик, и мы решили вместе с ним несколько задач (в частности, с винтом автоматического шага), и как-то раз во время длинной беседы у нас возникла идея — вместо учебника по теории колебаний, который мы раньше предполагали писать, написать сравнительно небольшую монографию по машинам, точнее, по элементарным моделям машин.

Что такое машина? Это грубая динамическая система, т. е. такая динамическая система, фазовое пространство которой качественно не меняется при достаточно малых (с достаточно малыми производными) изменениях правых частей уравнений. Это весьма общее определение. С этой точки зрения и паровая машина с регулятором, и катодный генератор, и торпеда, и самолет, управляемый автопилотом, и циклотрон при некоторой идеализации, и магнетронный генератор — все это машины.

Нужно решить кое-какие новые задачи, а главное, нужно выбрать наи-

более интересное и все это подать с единой точки зрения. Эту идею мы рассказали Мандельштаму. С одной стороны, это было в духе Мандельштама — своеобразный, горизонтальный разрез действительности и элементарные модели. Он сам всегда любил рассматривать элементарные модели. С другой стороны, это все же только элементарные модели, т. е. немного игрушечное, бирюлевое рассмотрение: дать универмаг моделей и не делать второго шага — перехода от элементарной модели к настоящей теории.

Осенью 1944 г. мы рассказали об этой идее Мандельштаму, и в общем он эту идею одобрил. 21 ноября я привез ему написанное Г. С. Гореликом и мною введение в эту монографию и подробный проспект универмага элементарных моделей машин. Особо мне хотелось поговорить с ним о часах, именно об элементарной, весьма обыденной модели машины — динамической модели часов. Тут были две основные причины.

Во-первых, то, что эта задача мне не давалась. В 1928—1929 гг. я потратил много времени, чтобы рассмотреть по-настоящему часы как динамическую систему с двумя степенями свободы, и у меня ничего хорошего не вышло. И в нашей книге вместе с С. Э. Хайкиным мы рассматривали часы как систему с одной степенью свободы и этим лишались самого важного — рассмотрения процесса взаимодействия маятника и ходового колеса. А в 1944 г. нам при помощи этих новых методов удалось рассмотреть эту задачу.

Во-вторых, потому, что эта задача давно привлекала внимание самого Л. И. Мандельштама. Он мне несколько раз говорил, что использование маятника для придания часам определенного периода — это замечательное научное достижение, и я был уверен, что эта работа встретит в нем весьма компетентного критика.

Наш разговор начался шуткой. После разговоров о докладе в МГУ, который я опускаю, я сказал Леониду Исааковичу, что мне удалось придумать такую элементарную модель часов, которая имеет две степени свободы и для которой мне вместе с аспирантом Неймарком удалось дать полную теорию. Я прибавил, однако, что не знаю, подойдет ли эта модель людям, фактически занимающимся часами. На это он мне с улыбкой сказал: «Вы не знаете, подойдет ли Ваша модель? Посмотрим, что это за модель на букву К». Я не понял, что это значит, и попросил разъяснить. «Вы не знаете, что значит модель на букву К»? Я Вам расскажу. К писарю обращается неграмотная женщина и просит написать адрес на конверте. Тот ей отвечает: «Я могу написать тебе адрес, но я не знаю, подойдет ли тебе этот адрес. Я пишу только адреса на букву К: Кременчуг, Киев. У меня очень хорошо выходит буква К. Другие буквы у меня не получаются».

После такого шуточного начала я ему сказал, что все выкладки проведены пока только для часов без маятника, т. е. для тех часов, которые были до Гюйгенса, но что аналогичные, хотя и более громоздкие, выкладки могут быть проведены и для гюйгенсовских часов. Он сказал, что лучше так не говорить и что он хочет это совсем отчетливо сказать и показать.

«Я очень уважаю Гюйгенса, но Ньютон, а не Гюйгенс, впервые указал, что в основе процессов, обуславливающих оптические явления, связанные с однородным светом, лежит периодичность. Точно так же не Гюйгенс, а Галилей впервые придумал часы с маятником. Это весьма фундаментальное дело — приспособить маятник к часам. Это одно из замечательных достижений человеческого ума. Часы после этого изобретения получили совершенно другую точность». Он достал мне книгу Вольфа по истории науки и техники в XVI и XVII столетиях, показал ряд картинок и прочел мне в несколько минут весьма содержательную лекцию по истории часов. Мы условились о терминологии: часы без маятника — это до-галилеевы часы. Часы с маятником — это часы Галилея — Гюйгенса.

«Когда и кем изобретены до-галилеевы часы, неизвестно. Но это продукт эпохи средних веков и начала эпохи Возрождения. Ни в Египте, ни в Ассирии-Вавилонии, ни в Китае, ни в Греции таких механических часов не было. Повидимому, эти часы были у арабов. Они были крайне неточны. Стенные до-галилеевы часы имели гиревой завод, карманные — пружинный. Точность их небольшая. Сильно сказывалась степень загустения масла. В Париже днем, во время жары, часы шли заметно быстрее, чем утром и вечером. Есть указания об использовании маятника для часов у арабов, но это только предположения. Истинный изобретатель — Галилей. Он употреблял маятник не только для отсчета времени, но и оставил своему сыну схематический чертеж часов с маятником. Гюйгенс поставил дело более широко. Он официально предложил свое изобретение генеральным штатам Голландии (16 июня 1657 г.), а в следующем году опубликовал его в печати. С 1662 г. такие часы стали изготавливаться в Англии. Гюйгенс приспособил маятник к старому механизму (старые часы *переделывали* на новые, в результате точность часов возрастала колоссально). Леонид Исаакович спросил меня, могу ли я объяснить, *почему* до-галилеевы часы настолько хуже часов Галилея—Гюйгенса. Я сказал, что надеюсь дать настоящий ответ на его вопрос, решив проблему, которую я сейчас называю проблемой Мандельштама в области теории часов.

Мой ответ его не совсем удовлетворил или, может быть, совсем не удовлетворил.

«То, о чем Вы говорите, нужно сделать, и Вы, вероятно, что-нибудь подобное получите. Но это не все, здесь не видно динамики процесса, стабилизации периода. Не видно, почему часы, снабженные маятником, менее податливы в смысле изменения периода при изменении трения». Он прибавил, что он думал над этим вопросом и что у него есть некоторые соображения, раскрывающие причину такого поведения. Ответ на эту задачу, по его мнению, пригодится и в ряде других задач по теории автоматического регулирования.

На этом закончилась первая часть разговора, и мы вышли в столовую, куда вскоре пришел Семен Эммануилович Хайкин.

Позднее я узнал, что Мандельштам брал книги о часах в Боровое.

БИБЛИОГРАФИЯ ТРУДОВ А. А. АНДРОНОВА

1926 г.

1. *Zur Theorie der molekularen Lichtzerstreuung an Flüssigkeitsoberflächen.*—(К теории молекулярного рассеяния света на поверхности жидкости).—Z. Phys., 1926, Bd 38, S. 485—501, Fig., Tbl. (Совместно с М. Леонтовичем).

Работа содержит расчет интенсивности света, рассеиваемого поверхностью жидкости, и сравнение результатов этого расчета с опытами Рамана и Рамдаса. Работа в теоретической части является обобщением расчета Л. И. Мандельштама, относящегося к 1913 г.

1927 г.

2. *О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами.*—Ж. Русс. физ.-хим. о-ва, ч. физ., 1927, 59, в. 5—6, с. 429—442, фиг. (Совместно с М. Леонтовичем).

В этой работе в связи с рядом задач теории колебаний исследуются свойства решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\ddot{y} + (1 - b \cos pt) y = 0$$

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + (1 + q \cos p t)y = 0$$

и вводится оказавшееся плодотворным понятие о «параметрическом» резонансе.

В частности, статья содержит вывод асимптотических выражений решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, справедливых при достаточно малой частоте модуляции. Эти асимптотические выражения были потом использованы как в работе № 10 настоящего списка, так и в работах других авторов.

1928 г.

3. *К теории адиабатических инвариантов.*—Ж. Русс. физ.-хим. о-ва, ч. физ., 1928, 60, в. 5, с. 413—419 (совместно с Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем).

В этой работе в связи с рассмотрением поведения маятника в периодически меняющемся поле силы тяжести устанавливается необходимость уточнения ряда формулировок теории адиабатических инвариантов и дается определение «временного» и «стационарного» адиабатического инварианта.

4. *Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний.* В кн.: IV съезд русских физиков. Москва, Н.-Новгород, Казань, Саратов (5—16 августа 1928 г.). Перечень докладов, представленных на съезд с кратким их содержанием. М.—Л., Гос. изд-во, 1928, с. 23—24.

Заметка содержит сжатое изложение заключительной аспирантской работы того же названия (неопубликованной). Здесь впервые вводится оказавшееся плодотворным понятие об «автоколебаниях» и показывается путем сопоставления физических признаков автоколебаний (независимости периода и величины размахов от начальных условий) с результатами качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре,

что автоколебания (для систем с одной степенью свободы) всегда соответствуют предельным циклам Пуанкаре. Заметка также содержит указания, как понятия, связанные с качественной теорией дифференциальных уравнений, позволяют дать адекватную трактовку явлениям самовозбуждения, срыва и устойчивости автоколебаний.

1929 г.

5. *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues.*—(Циклы Пуанкаре и теория автоколебаний).—С. г. Acad. sci. Paris, 1929, t. 189, № 15, p. 559—561.

Заметка содержит изложение результатов заключительной аспирантской работы (см. № 4) с рядом существенных дополнений.

Во-первых, в заметке сформулированы следующие два требования, касающиеся устойчивости автоколебаний: 1) в реальных физических системах автоколебания должны сохраняться при достаточно малых изменениях самих систем (физическое требование «грубости» периодических движений, представляющих автоколебания); 2) движение, представляющее реальный автоколебательный процесс, должно быть устойчиво по отношению к изменению начальных условий (требование устойчивости по Ляпунову периодических движений). На основе этих двух требований дается новое доказательство утверждения, что всякий автоколебательный процесс в системе с одной степенью свободы должен соответствовать на языке дифференциальных уравнений предельному циклу Пуанкаре. Требование «грубости» получило в дальнейшем (см. № 22 настоящего списка работ) общую математическую формулировку и было использовано в теории дифференциальных уравнений. Требование устойчивости по Ляпунову поставило на службу теории автоколебаний аппарат исследований устойчивости периодических движений, разработанный Ляпуновым и оставшийся практически без употребления. Во-вторых, в заметке рассматриваются при помощи количественного метода Пуанкаре (так называемого метода малого параметра, изложенного в «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*») автоколебания в системах с одной степенью свободы, близкой к линейной консервативной.

Результаты, сжато изложенные в № 4 и 5, дали теории автоколебаний прочную математическую базу и послужили исходным пунктом длинного ряда других работ.

1930 г.

6. *Лаплас. Жизнь, мировоззрение, место в истории науки.* М., «Моск. рабочий», 1930, 192 с. (совместно с Е. Андроновой).

7. *Sur les mouvements quasi-périodiques.*—(О квазипериодических движениях).—Ж. прикл. физики, 1930, 6, в. I, с. 119—122. (Совместно с А. Виттом).

Работа содержит доказательство наличия произвольных фаз у квазипериодических движений как в случае общей автономной системы, так и в случае системы, периодически зависящей от времени. В частности, в работе устанавливается максимально возможное число независимых периодов для квазипериодических движений в системе, определяемой дифференциальными уравнениями первого порядка отдельно для автономного и неавтономного случая. Результаты этой работы были впоследствии обобщены на почти периодические движения общего типа Л. С. Понтрягиним.

8. *К математической теории захватывания.*—Ж. прикл. физики, 1930, 7, в. 4, с. 3—20, фиг. (Совместно с А. Виттом).

Работа содержит строгую теорию обычного захватывания, опирающуюся на количественные методы Пуанкаре, изложенные в «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*», и на результаты Ляпунова, изложенные в его диссертации «Общая задача об устойчивости движения». Работа содержит ряд методических указаний, касающихся приложений метода малого параметра к случаю действия внешней синусоидальной силы на автоколебательные системы, близкие к линейным консервативным. Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

9. *Sur la théorie mathématique des autooscillations.*—(О математической теории автоко-

лебаний).— С. г. Acad. sci. Paris, 1930, t. 190, № 4, p. 256—258. (Совместно с А. Виттом).

Заметка разбивается на две части. В первой части делается попытка установить связь между автоколебаниями в системах со многими степенями свободы и рекуррентными движениями Биркгофа. Во второй части на основе количественных методов Пуанкаре и на основе теории устойчивости Ляпунова дается общая теория периодических автоколебаний в системах с двумя степенями свободы, близких к линейным консервативным системам, обладающим двумя различными нормальными частотами.

Результаты, изложенные в этой заметке, легли в основу строгой теории затягивания (см. № 15 настоящего списка работ), а также были использованы и развиты в работах других авторов (в частности, в работах С. М. Рытова).

10. *Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol.*— Archiv für Elektrotechnik, 1930, Bd. XXIV, S. 99—110.

Работа посвящена рассмотрению оставшегося открытым вопроса о наличии «порога» (минимальной амплитуды внешней силы) для наступления явления принудительной синхронизации (захватывания) при действии внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему. В работе впервые применена качественная теория Пуанкаре не к исходным уравнениям движения, а к так называемым укороченным уравнениям, полученным по методу Ван дер Поля. Этот способ рассмотрения, позволяющий весьма просто получить отрицательный ответ на вопрос о наличии порога в явлении захватывания, оказался плодотворным и был затем использован в ряде работ.

11. *Unstetige periodische Bewegungen und die Theorie des Multivibrators von Abraham und Bloch.*— Докл. АН СССР, 1930, № 8, с. 189—192. (Совместно с А. А. Виттом).

Работа содержит новое, существенно отличающееся от всех прежних, рассмотрение автоколебаний мультивибратора Абрагама и Блока, развитое на основе качественной теории дифференциальных уравнений и на основе выдвинутого Л. Мандельштамом и Н. Папалекси представления о внутренних электрических ударах, вызывающих мгновенные «перескоки» изображающей точки в фазовом пространстве.

Работа содержит ряд методических указаний, касающихся рассмотрения вырожденных систем, способных совершать разрывные автоколебания. Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

1933 г.

12. *О статистическом рассмотрении динамических систем.*—Ж. эксперим. и теор. физики, 1933, 3, в. 3, с. 165—180, фиг. (Совместно с Л. Понтрягиным и А. Виттом).

13. *Об устойчивости по Ляпунову.*— Ж. эксперим. и теор. физики, 1933, 3, в. 5, с. 373—374. (Совместно с А. Виттом).

14. *Zur Stabilität nach Liapunow.*— (Об устойчивости по Ляпунову).— Phys. Z. Sowjet., 1933, Bd 4, № 4, S. 606—608 (Совместно с А. Виттом).

В работе дано простое геометрическое доказательство теоремы: «Если в автономной системе, описываемой дифференциальными уравнениями первого порядка, характеристический показатель рассматриваемого периодического решения имеет отрицательные действительные части, то рассматриваемое решение устойчиво в смысле Ляпунова».

Эта теорема весьма существенна для приложения теории Ляпунова к автономным системам. Именно эта теорема позволяет сразу сформулировать условия устойчивости автоколебательного периодического процесса. Впоследствии эта теорема рядом авторов была доказана аналитически (Артемов, Отроков) и обобщена (Малкин).

15. *Математические проблемы теории автоколебаний.*—В кн.: I. Всесоюзная конференция по колебаниям. Доклады, резолюции и материалы конференции. Сб. 1, М.—Л., ГТТИ, 1933, с. 32—71.

Работа представляет собой обзорный доклад, посвященный изложению ряда новых научных результатов, полученных в 1928—1931 гг. в теории нелинейных колеба-

ний, анализ ряда новых понятий теории нелинейных колебаний, возникших в связи с качественной теорией дифференциальных уравнений (особые точки, предельные циклы, сепаратрисы, устойчивость в малом и большом, бифуркационное значение параметра, адиабатическое изменение параметра в неконсервативных системах и т. д.) и формулировку серии задач, решение которых представляет значительный интерес для теории автоколебаний. Следует отметить, что значительная часть поставленных в этом докладе задач (создание общей теории бифуркаций, нахождение и исследование устойчивости квазипериодических движений в неавтономных системах, близких к линейным консервативным, теория действия внешней силы на релаксационную систему и др.) была вскоре (в 1932—1936 гг.) решена усилиями ряда лиц.

1934 г.

16. *К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы.*— Ж. техн. физики, 1934, 4, в. 1, с. 122—143, фиг. (Совместно с А. Виттом.)

Работа содержит строгую теорию обычного затягивания, опирающуюся на количественные методы Пуанкаре, изложенные в «*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*», и на результаты Ляпунова, изложенные в его диссертации «Общая задача об устойчивости движения».

Работа содержит ряд методических указаний, касающихся приложений метода малого параметра к автоколебательным системам, близким к линейным консервативным.

Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

17. *Statistische Auffassung dynamischer Systeme.*—(Статистическое рассмотрение динамических систем).— Phys. Z. Sowjet., 1934, Bd 6, N. 1—2, S. 1—24. (Совместно с Л. Понтрягиным и А. Виттом.)

Работа содержит исследование систем, в которых, кроме обычных сил, действуют случайные силы, подчиняющиеся теоретико-вероятностным законам. В работе детально исследован при помощи уравнения Эйнштейна — Фоккера и уравнения, определяющего математическое ожидание времени перехода, ряд простейших случаев, представляющих интерес для теории колебаний, в частности случай, когда динамические уравнения обладают предельным циклом Пуанкаре.

Идеи и результаты, заключающиеся в этой работе, в дальнейшем развивались различными авторами в направлении анализа флуктуаций в нелинейных системах, в частности анализа размытости спектра катодного генератора и в направлении исследования вероятности осуществления тех или иных движений в динамической системе, если система подвергается воздействию случайных толчков, интенсивность которых стремится к нулю.

1935 г.

18. *Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивостей» к простейшим автоколебательным системам.*— Ж. эксперим. и теор. физики, 1935, 5, в. 3—4, с. 296—309, фиг. (Совместно с А. Г. Любиной).

То же.— Уч. зап. Горьковского ун-та, 1935, в. 1, с. 3—14.

В этих работах, из которых первая представляет собой дополненный новыми примерами вариант второй, устанавливается и используется связь, существующая между теорией зависимости стационарных режимов катодного генератора от параметра и теорией зависимости консервативной системы от параметра, данной Пуанкаре в связи с теорией равновесия вращающейся жидкой массы. В частности, дается детальное исследование мягкого и жесткого самовозбуждения автоколебаний, если характеристика аппроксимирована полиномом и если система близка к линейной консервативной.

19. *Exposé des recherches récentes sur les oscillations non lineaires.*— (Отчет о последних исследованиях в области нелинейных колебаний). Techn. Phys. USSR, 1935, vol. 2, № 2—3, p. 81—134, Библ. 71 назв. (Совместно с Л. Мандельштамом, Н. Папалекси, С. Э. Хайкиным и А. Виттом.)

Книга и несколько сокращенная по сравнению с книгой французская статья содержат обзор наиболее существенных результатов в области нелинейных колебаний за ряд лет (1928—1935). В изложении центральное место отведено радиофизическим проблемам.

1936 г.

20. *Новые исследования в области нелинейных колебаний*. М., Гос. изд-во по вопр. радио, 1936, 96 с. Библ. 10 назв. (Совместно с Л. И. Мандельштамом, Н. Д. Папалекси, А. А. Виттом, Г. С. Гореликом и С. Э. Хайкиным).

1937 г.

21. *Теория колебаний*. Ч. 1. М.—Л., ОНТИ, Гл. ред. техн.-теор. лит., 1937. 12, 519 с., фиг. Библ. 125 назв. (Совместно с С. Э. Хайкиным).

Книга содержит подробное изложение теории колебаний автономных систем с одной степенью свободы на основе математического аппарата, адекватного рассматриваемым нелинейным проблемам. Наряду с вводными главами, рассчитанными на студентов, в книге изложен ряд научных результатов, нигде больше не опубликованных. В изложении центральное место отведено радиофизическим проблемам. На эту книгу имеются многочисленные ссылки в ряде работ, относящихся к теории нелинейных колебаний и к теории автоматического регулирования, вышедших как в СССР, так и за границей. В частности, в США в 1947 г. вышла книга Н. Минорского (N. Minorsky, *Introduction to Non-linear Mechanics*, Ann-Arbor. J. W. Edwards, 1947), значительная часть которой является простым изложением (с четким указанием источника) ряда глав «Теории колебаний».

22. *Грубые системы*.—Докл. АН СССР, 1937, 14, № 5, с. 247—250. Библ. 4 назв. (Совместно с Л. Понтрягиным).

То же на франц. яз.—С. г. Acad. sci. URSS, 1937, t. 14, № 5, с. 247—250.

Эта работа представляет собой развитие и математическую обработку идеи, использованной еще в № 5, о том, что решения дифференциальных уравнений, теоретически отображающие реальные процессы, должны быть устойчивы по отношению к малым изменениям правых частей этих уравнений. Требование сохранения качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории при достаточно малых изменениях правых частей позволило выделить класс дифференциальных уравнений («грубые системы»), исследование которого представляет большой интерес для приложений и который обладает рядом интересных в математическом отношении особенностей, в частности исключительной простотой областей устойчивости в большом элементе притяжения (состояний равновесия и предельных циклов).

1938 г.

23. *К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории*.—Докл. АН СССР, 1938, 21, № 9, с. 427—430. Библ. 4 назв. (Совместно с Е. Леонтович).

То же на франц. яз.—С. г. Acad. sci. URSS, 1938, t. 21, № 9, p. 423—426.

1939 г.

24. *Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра*.—Уч. зап. Горьковского ун-та, 1939, в. 6, с. 3—24, фиг. (Совместно с Е. А. Леонтович).

В этих двух работах дана общая теория зависимости от параметра качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории. Эта теория, для которой физика подсказала ряд руководящих идей, помимо своего значения для теории дифференциальных уравнений, имеет значительный практический интерес для теории колебаний, позволяя во многих случаях делать эффективные высказывания о смене качественных картин фазового пространства конкретных колебательных систем.

1944 г.

25. *Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей.*— Докл. АН СССР, 1944, 43, № 2, с. 58—62, фиг. Библ. 16 назв. (Совместно с А. Майер). То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1944, t. 43, № 2, p. 54—58.

В работе рассматривается основная задача теории прямого регулирования при учете кулоновского трения в индикаторе (более общий случай этой же задачи исследуется в работе № 29 настоящего списка), которой, начиная с 1894 г., занимался ряд авторов (Бегтрен, Толле, Лекорню, Жуковский, Мизес). Работа содержит: 1) сведение нелинейной динамической задачи к точечному преобразованию плоскости в плоскость; 2) полный качественный анализ возможных движений, имеющих место при различных начальных условиях; 3) приближенное количественное рассмотрение поведения сепаратрисы неустойчивого периодического движения, позволяющее оценить те изменения нагрузки машины, при которых процесс регулирования остается сходящимся.

26. *Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей.*— Докл. АН СССР, 1944, 43, № 5, с. 197—201, фиг. Библ. 8 назв. (Совместно с Н. Буатиным).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1944, t. 43, № 5, p. 189—193.

27. *Теория точечных преобразований Пуанкаре — Брауера — Биркгофа и теория нелинейных колебаний.* (Доклад, прочитанный на сессии Отделения физ.-мат. н. АН СССР в марте 1944 г.) Краткий отчет о докладе.— Вестник АН СССР, 1944, № 6.

Доклад содержит историю теории нелинейных колебаний, в частности обзор результатов, полученных при помощи метода малого параметра и при помощи качественной теории дифференциальных уравнений. Класс нелинейных задач, которые могут рассматриваться как кусочно-линейные и в отношении которых можно ожидать быстрых успехов от использования теории точечных преобразований Пуанкаре — Брауера — Биркгофа. Задачи, сводящиеся к точечным преобразованиям прямой в прямую, плоскости в плоскость, пространства в пространство.

Выгоды параметрического представления точечного преобразования. Готовый аппарат для локального исследования точечного преобразования вблизи неподвижных точек. Некоторые теоремы теории точечных преобразований, облегчающие глобальное исследование. Краткая сводка результатов, полученных при помощи теории точечных преобразований в теории автоматического регулирования (задача Вышнеградского, задача о самолете с автопилотом и др.) и в радиофизике (задача Баркгаузена, задача об обычном катодном генераторе и др.).

1945 г.

28. *Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний.*— Изв. АН СССР, сер. физ. 1945, 9, № 1—2, с. 30—55.

Доклад, прочитанный на траурном заседании, посвященном Л. И. Мандельштаму, и содержащий краткий очерк деятельности Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний и некоторые характерные штрихи его научного облика.

29. *Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности.*— Докл. АН СССР, 1945, 46, № 4, с. 158—161, фиг. Библ. 4 назв. (Совместно с Н. Баутиным).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 46, N 4, p. 143—146.

В этих двух заметках рассматривается без всяких предположений о малости тех и других величин (входящих в уравнение движения) задача о стабилизации курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора как для случая отсутствия зоны нечувствительности, так и в случае наличия такой зоны. Заметки содержат: 1) сведение соответствующих нелинейных динамических задач к точечным преобразованиям плоскости в плоскость; 2) качественный анализ возможных движений;

3) разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным качественным картинам фазового пространства.

Результаты, изложенные в заметках, позволяют установить те значения параметров системы самолет — автопилот, при которых имеет место устойчивая стабилизация курса, а также в нужных случаях величины тех отклонений от курсов, при которых автоматическое устройство перестает справляться со своей задачей. До появления аннотируемых заметок задача рассматривалась рядом авторов (Оппельт, Котельников, Булгаков и др.), но при предположениях о близости возможных в системе автоколебаний к синусоидальным.

30. *Автоколебания простейшей схемы, содержащей автоматический винт изменяемого шага.*— Докл. АН СССР, 1945, 47, № 4, с. 265—268, фиг. Библ. 3 назв. (Совместно с Н. Баутиным и Г. Гореликом).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 47, № 4, p. 263—267.

В работе рассматривается в самых простых предположениях динамическая система коленчатый вал — лопасти винта — индикатор и изучаются условия подавления автоколебаний, часто осложняющих на практике правильное функционирование винтов изменяемого шага.

Пренебрегая инерциями индикатора и сервомотора и делая ряд дальнейших упрощений, эту нелинейную задачу оказывается возможным свести к точечному преобразованию прямой в прямую и получить полную картину влияния параметров схемы на существование автоколебаний.

31. *О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования.*— Докл. АН СССР, 1945, 47, № 5, с. 345—348, фиг. Библ. 7 назв. (Совместно с А. Майер).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 47, № 5, p. 340—343.

32. *Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования.* Докл. АН СССР, 1945, 46, № 7, с. 304—306, фиг. Библ. 2 назв. (Совместно с Н. Баутиным).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 46, № 7, p. 277—279.

Работа содержит полное качественное и количественное решение динамической задачи, к исследованию которой сводится теория ряда практически интересных схем прямого регулирования, при анализе которых нельзя пренебречь ни наличием между индикатором и регулируемым объектом промежуточного звена, обладающего процессом установления, ни твердым трением в индикаторе, но можно пренебречь вязким трением в индикаторе и массой индикатора. Этому случаю прямого регулирования посвящено несколько глав в книге Schmidt «Unmittelbare Regelung» (Berlin, 1939). Однако Шмидт не дает аналитического решения рассматриваемой задачи и, ограничиваясь приближенными графическими рассматриваемыми, не исследует ряда существенных свойств рассматриваемой системы, в частности возможности появления автоколебаний.

33. *О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне.*— Докл. АН СССР, 1945, 49, № 9, с. 664—666, фиг. (Совместно с Г. Гореликом).

То же на англ. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 49, № 9, p. 640—642.

34. *Résonance non linéaire d'une particule relativiste dans le cyclotron.*— (Нелинейный резонанс релятивистской частицы в циклотроне).— С. г. Acad. sci. Paris, 1945, t. 221, p. 696—698. (Совместно с Г. Гореликом).

В работе разгон заряженной релятивистской частицы в циклотроне рассматривается как нелинейное резонансное явление. Нелинейность задачи обуславливается двумя факторами: 1) переменное электрическое поле практически отлично от нуля только в узкой щели между дуантами, вследствие чего сила, действующая на частицу, является не только периодической функцией времени, но и нелинейной функцией координат частицы; 2) масса релятивистской частицы является нелинейной функцией ее скорости. В работе показывается, что в случае релятивистской частицы кривые резонанса (кривые зависимости энергии периодического движения от напряженности поля) напоминают известные кривые обычного феррорезонанса, обладая при больших полях характерным скопом и гистерезисом. В работе утверждается, что следствием наличия такой скошенной резонансной кривой является возможность «затянуть» частицу в область

больших энергий посредством постепенного увеличения напряженности магнитного поля. Аннотируемая работа возникла в связи с разбором статей Векслера (ФИАН), предложившего метод разгона релятивистских частиц путем изменения напряженности магнитного поля, и имеет ряд точек соприкосновения со статьёй Макмиллана (США), пришедшего позднее Векслера к аналогичной идее.

1946 г.

35. *О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель догалилеевых часов.*— Докл. АН СССР, 1946, 51, № 1, с. 17—20. Библ. 3 назв. (Совместно с Ю. Неймарк).

То же на франц. яз.— С. г. Acad. sci. URSS, 1945, t. 51, № 1, p. 17—20.

В работе рассматривается (без всяких предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения) упрощенная модель часов, в которой, с одной стороны, сохранены основные особенности часов как неконсервативной динамической системы с двумя степенями свободы, а с другой стороны, сведены к минимуму вычислительные трудности.

В работе показывается, что в случае догалилеевых часов (т. е. часов с балансом, но без маятника или пружины) разрывная нелинейная задача сводится к точечному преобразованию трехмерного пространства последовательных состояний в самого себя, причем единственная неподвижная точка этого преобразования соответствует обычному периодическому ходу таких часов. В работе получены простые аналитические выражения для периода и амплитуды автоколебаний, соответствующих этой неподвижной точке.

36. *Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе.*— Автоматика и телемеханика, 1946, 7, № 1, с. 15—41, фиг. Библ. 15 назв. (Совместно с Н. Н. Баутиным и Г. С. Гореликом).

В работе путем сведения нелинейной динамической проблемы к точечным преобразованиям прямой в прямую дается точное решение задачи о влиянии кулоновского трения в индикаторе на процесс непрямого регулирования в случае наличия жесткой обратной связи как в случае объекта, не обладающего саморегулированием, так и в случае объекта, обладающего саморегулированием.

В работе отдельно рассматривается случай сервомотора переменной скорости и сервомотора постоянной скорости, и для обоих случаев даются графики и диаграммы, позволяющие при заданных параметрах системы машина — регулятор и заданной величине изменения нагрузки машины быстро решить вопрос о сходимости или расходимости процесса регулирования. Частный случай рассматриваемой проблемы, когда жесткая обратная связь отсутствует, рассмотрен в классической работе Леоте, относящейся к 1884 г. Случай наличия жесткой обратной связи также был рассмотрен многими авторами. Однако до появления этой работы не было дано точного решения задачи для общего случая.

37. *Простейшие линейные системы с запаздыванием.*— Автоматика и телемеханика, 1946, 7, № 2—3, с. 95—106, фиг. Библ. 15 назв. (Совместно с А. Г. Майер).

В работе рассматриваются с точки зрения физики колебаний простейшие системы с запаздывающими силами, отображаемые линейными дифференциально-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, и приводятся графики, позволяющие быстро решать вопросы устойчивости, относящиеся к таким системам.

1947 г.

38. *Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. Сообц. 1. Теория регулятора прямого действия при наличии кулоновского и вязкого трения.* Автоматика и телемеханика, 1947, 8, № 5, с. 314—334, рис. Библ. 18 назв. (Совместно с А. Майер).

В этой работе дается решение задачи о движении системы машина — регулятор Уатта при наличии кулоновского и вязкого трения в муфте и сочленениях регулятора. Эта задача была поставлена И. А. Вышнеградским в 1876 г., но была им самим решена толь-

ко для линейного случая отсутствия кулоновского трения. С тех пор многократно рассматривался лишь частный случай этой задачи, в котором вязкое трение отбрасывается, но даже и этот частный случай вплоть до последнего времени не получил окончательного решения. В работе имеются: 1) полное качественное исследование возможных движений, имеющих место при различных значениях двух существенных параметров (это качественное исследование проведено — для случая неустойчивости отрезка покоя — путем построения некоторой «разрывной» функции Ляпунова; для случая устойчивости отрезка покоя — путем сведения задачи к точечному преобразованию плоскости в плоскость); 2) количественное исследование сепаратрисы, порождаемой периодическим движением, позволяющее построить удобные диаграммы для решения вопроса о сходимости и расходимости процесса регулирования при заданных конструктивных параметрах и заданных изменениях нагрузки машины.

39. Ред.: А. Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.—Л., ГТТИ, 1947, 392 с.

40. Примечание: Здесь же, стр. 371—390.

1948 г.

41. Иван Алексеевич Вышнеградский (1831—1895). — В кн.: Люди русской науки. Очерки о выдающихся деятелях естествознания и техники. Т. 2, М.—Л., ОГИЗ, Гостехиздат, 1948, с. 931—941.

1949 г.

42. И. А. Вышнеградский и его роль в создании теории автоматического регулирования. — Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, 1949, № 6, с. 805—818.

То же в кн.: Вопросы истории отечественной науки. Общее собрание АН СССР, посвященное истории отечественной науки. 5—11 января 1949 г. М.—Л., АН СССР, 1949, с. 500—517.

43. О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин. — В кн.: Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи). Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А. и Стодола А. М., АН СССР, 1949, с. 253—301, фиг. (Совместно с И. Н. Вознесенским).

Работа содержит новое, основанное на тщательном изучении оригинальных работ, изложение истории создания классической линеаризованной теории регулирования. В частности, эта работа выясняет существенное значение работы И. А. Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876—1877) для практики регуляторостроения того времени, а также показывает фундаментальное влияние этой работы на дальнейшее развитие линеаризованной теории регулирования.

44. Комментарии к работе Д. К. Максвелла «О регуляторах». — Там же, с. 369—391, фиг. 2, вкл. л. фиг.

45. Комментарии к работам И. А. Вышнеградского «Об общей теории регуляторов» и «О регуляторах прямого действия». Там же, с. 392—399.

46. Комментарии к дополнительному параграфу работы И. А. Вышнеградского «О регуляторах прямого действия». Там же, с. 400—410, фиг.

47. Комментарии к работе А. Стодолы «О регулировании турбин. I». Там же, с. 411—418, фиг.

48. Комментарии к работе А. Стодолы «О регулировании турбин. II». Там же, с. 419—424.

49. Комментарии к работе А. Стодолы «Принцип регулирования сиенсов и американские инерционные регуляторы». Там же, с. 425—427.

50. Предисловие (датировано 1948). В кн.: Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Н. Н. Баутин. Л.—М., Гостехиздат, 1949, 7—8.

51. Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи). Ред. Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А. и Стодола А. Редакция и комментарии академика А. А. Андропова и члена-корреспондента АН СССР И. Н. Вознесенского. М..

АН СССР, 1949, 430 с. [Литература] «Список работ Д. К. Максвелла», 97 назв. «Список работ И. А. Вышнеградского», 43 назв. «Список работ А. Стодолы», 68 назв.

52. Послесловие.—Там же, с. 428.

1950 г.

53. Нужны решительные меры [О повышении качества высшего образования]. —Вести. высш. школы, 1950, № 7, с. 33—37.

54. О влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования.— Подготовлена к печати (совместно с Н. Н. Баутиным).

В работе путем сведения нелинейной динамической проблемы к точечным преобразованиям прямой в прямую дается полное решение задачи о влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования в случае наличия жесткой обратной связи и в случае объекта, как не обладающего саморегулированием, так и обладающего саморегулированием. В заключительной части работы рассматриваются сходство и различия, возникающие в процессе непрямого регулирования для случая кулоновского трения в индикаторе и в золотнике.

55. Теория устойчивости в большом параллельной работы синхронных машин и проблема Хилла.— (Подготовлена к печати).

Работа устанавливает связь между проблемой устойчивости параллельной работы синхронных машин в консервативной идеализации и задачей Хилла о качественном анализе устойчивости в большом для ограниченной проблемы трех тел. Установленная связь позволяет сделать ряд утверждений об условиях устойчивой работы синхронных машин.

СОКРАЩЕНИЯ

Ж. Русс. физ.-хим. о-ва, ч. физ.— Журнал Русского физико-химического общества, часть физическая.

Уч. зап. Горьковского ун-та — Ученые записки Горьковского университета.

С. г. Acad. sci. Paris.—Compte rendues hebdomadaire des séances de l'Academie des sciences.

С. г. Acad. sci. URSS — Comptes rendus (Doklady) de l'Academie des sciences de l'URSS. Moscou.

Phys. Z. Sowjet.—Physikalische Zeitschrift. der Sowjetunion. Charkow.

Techn. Phys. USSR — Technical Physics of the USSR. Leningrad. Z. Phys.—Zeitschrift für Physik. Braunschweig.

ЛИТЕРАТУРА ОБ А. А. АНДРОНОВЕ

1. Академик Андронов А. А.—В кн. Общее собрание АН СССР, 29 ноября — 4 декабря 1946 г. М.—Л., АН СССР, 1947, с. 38—39, портр.

2. Андронов А. А.—Вести. АН СССР, 1947, № 1, 57, портр. (Академики, избранные общим собранием АН СССР 30 ноября 1946 г.).

3. Выдвижение кандидатов в депутаты Совета Союза коллективом работников вагонного депо станции Арзамас II.—Правда, 1950, 11/II, № 42.

4. Ф у ф а е в Н. и др. Передовой ученый (А. А. Андронов) — Комсомольск. правда, 1950, 24/II, № 47, портр.

5. Андронов А. А.—БСЭ, изд. 2-е, т. 2, 1950, 435.

6. Г о р е л и к Г. С. О научных работах академика А. А. Андропова (к 50-летию со дня рождения). Автоматика и телемеханика, 1951, т. 12, № 3, с. 195—200.

7. Приветствие академику А. А. Андронову (от ОТН и ИАТ АН СССР в связи с 50-летием).—Автоматика и телемеханика, 1951, т. 12, № 3, с. 193, I вкл. и портр.

СОДЕРЖАНИЕ

I. ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

К теории молекулярного рассеивания света на поверхности жидкостей (совместно с М. А. Леонтовичем)	5
О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами	19
Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний	32
К теории адиабатических инвариантов (совместно с Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем)	34
Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний	41
К математической теории автоколебаний (совместно с А. А. Виттом)	44
О квазипериодических движениях (совместно с А. А. Виттом)	47
К теории захватывания Ван дер Поля (совместно с А. А. Виттом)	51
Разрывные периодические решения и теория мультивibratorа Абрагама и Блоха (совместно с А. А. Виттом)	65
К математической теории захватывания (совместно с А. А. Виттом)	70
Математические проблемы теории автоколебаний	85
Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркаций» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам (совместно с А. Г. Любиной)	125
Об устойчивости по Ляпунову (совместно с А. А. Виттом)	140
О статистическом рассмотрении динамических систем (совместно с Л. С. Понтрягиным и А. А. Виттом)	142
К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы (совместно с А. А. Виттом)	161
Грубые системы (совместно с Л. С. Понтрягиным)	183
Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра (совместно с Е. А. Леонтовичем)	188
К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории (совместно с Е. А. Леонтовичем)	217

II. ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей (совместно с А. Г. Майером)	225
Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей (совместно с Н. Н. Баутиным)	231
Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности (совместно с Н. Н. Баутиным)	237
Об одном вырожденном случае общей задачи прямого регулирования (совместно с Н. Н. Баутиным)	242
О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования (совместно с А. Г. Майером)	246
Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. I (совместно с А. Г. Майером)	250

Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования. II (совместно с А. Г. Майером)	273
Автоколебания простейшей схемы, содержащей автоматический винт изменяемого шага (совместно с Н. Н. Баутиным и Г. А. Гореликом)	303
О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне (совместно с Г. А. Гореликом)	308
О движениях идеальной модели часов, имеющей две степени свободы. Модель до-галилеевых часов (совместно с Ю. Неймарком)	312
Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе (совместно с Н. Н. Баутиным и Г. А. Гореликом)	317
Простейшие линейные системы с запаздыванием (совместно с А. Г. Майером)	
К теории гидравлического тарана (совместно с Г. В. Ароновичем)	358
Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора. I. Случай отсутствия зоны нечувствительности (совместно с Н. Н. Баутиным)	370
Теория стабилизации курса нейтрального самолета при помощи автопилота с постоянной скоростью сервомотора. II. Случай наличия зоны нечувствительности (совместно с Н. Н. Баутиным)	402
О влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования (совместно с Н. Н. Баутиным)	421

III. СТАТЬИ ПО ИСТОРИИ НАУКИ

Л. И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний	441
И. А. Вышнеградский и его роль в создании теории автоматического регулирования	473
О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодолы в области теории регулирования машин	490
Мой последний разговор с Л. И. Мандельштамом	522
Библиография трудов А. А. Андропова	526

КОМИССИЯ ПО ИЗДАНИЮ ТРУДОВ А. А. АНДРОНОВА

Академик *М. А. Леонтович* (председатель), член-корреспондент АН СССР *Н. Н. Боголюбов*, профессор *С. П. Стрелков*, доктор физико-математических наук *Г. С. Горелик*, доктор технических наук *М. А. Айзерман*, доктор технических наук *Д. Ю. Панов*, кандидат физико-математических наук *Е. А. Андропова*, кандидат физико-математических наук *Н. А. Железцов*, кандидат физико-математических наук *Н. Н. Баутин*, кандидат технических наук *В. В. Петров*,
Н. А. Агатова (секретарь)

*

Ответственный редактор
академик *М. А. Леонтович*