

Университетский курс  
общей физики

---

В.А.Алешкевич, Л.Г.Деденко, В.А.Карavaев

# МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

## ЛЕКЦИИ

*Под редакцией профессора В.А.Алешкевича*

МОСКВА  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ  
1998

**УДК 530.1**

Механика сплошных сред. Лекции.  
(Университетский курс общей физики)  
Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.,  
изд-во Физического факультета МГУ,  
1998 г., 92 стр., илл.

Пособие содержит лекции по механике сплошных сред, которые являются составной частью раздела «Механика» курса общей физики.

Для студентов физических специальностей университетов и высших учебных заведений.

*Виктор Александрович Алешкевич*

*Леонид Григорьевич Деденко*

*Владимир Александрович Караваев*

Механика сплошных сред. Лекции.  
(Университетский курс общей физики)

*Под редакцией В.А.Алешкевича*

Оригинал-макет подготовлен Издательской группой физического факультета МГУ (тел. 939-5494). Подписано в печать . Сдано в набор . Формат В5, гарнитура Times, печать ризо, Объем 5,75 печ.л., тираж 1000 экз.

Издательство Физического факультета МГУ. Лицензия ЛР-021293 от 18.06.98. Москва, 119899, Воробьевы горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, физический факультет.

ISBN 5-8279-0001-X

© Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А., 1998  
© Виноградов М.П. (обложка и оформление), 1998  
© Физический факультет МГУ, 1998

## Предисловие

*На кафедре общей физики ведется работа по подготовке и изданию оригинального курса «Общая физика», предназначенного для студентов физических специальностей вузов.*

*Курс будет охватывать четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электромагнетизм» и «Оптика», соответствовать новым учебным программам, разработанным на физическом факультете МГУ, и отражать современные тенденции и технологии физического образования.*

*Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем наиболее последовательно в методическом отношении проводится точка зрения о существенном единстве основных форм обучения физике: лекций, лабораторных экспериментов и семинарских упражнений. Лекции по каждой теме начинаются с демонстрации основных экспериментальных фактов, которые затем анализируются и обобщаются в виде физических законов и соотношений. Такой «экспериментальный» подход к изложению материала закрепляется при выполнении лабораторных экспериментов, цель которых - научить студентов навыкам самостоятельной постановки и решения физических проблем, проведению экспериментальных исследований, включая компьютерное моделирование, а также методам интерпретации и анализа экспериментальных данных. Более глубокое понимание основных физических явлений и закономерностей достигается на семинарских занятиях.*

*В соответствии с поставленными задачами каждый раздел курса будет состоять из четырех пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный эксперимент», «Семинарские занятия». Пособия, написанные в едином методическом ключе, будут комплектоваться видеозаписями лекционных демонстраций и дискетами с описанием модельных экспериментов.*

*Лекции по механике сплошных сред являются частью готовящегося к изданию курса «Механика» и могут рассматриваться как самостоятельное учебное пособие по данной теме. Лекции написаны на основе курсов, читаемых авторами на физическом факультете МГУ. Поскольку раздел «Механика сплошных сред» невозможно изложить без применения соответствующего математического аппарата, то он является одним из самых сложных разделов курса общей физики. Изложение материала построено на индуктивном методе, в рамках которого студенты вначале изучают более простые темы «Гидростатика» и «Аэростатика», а затем изучают динамику движущихся жидкостей и газов. В конце студенты знакомятся с основными уравнениями гидродинамики, получающимися как обобщение частных случаев движения сплошных сред. Это, по нашему мнению, позволит им достаточно легко адаптироваться при изучении механики сплошных сред в курсе теоретической физики.*

*Авторы выражают глубокую благодарность профессору В.П. Кандидову, доценту С.А. Шленову и доценту С.С. Чеснокову за любезно предоставленные результаты численного моделирования формирования изображения главного здания МГУ с учетом турбулентных атмосферных искажений, доценту М.В. Семёнову за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, а также К.Б. Бегун, М.П. Виноградову и А.А. Якуте за подготовку рукописи к изданию.*



## ЛЕКЦИЯ 1

*Деформации твердого тела. Понятие о тензоре деформаций. Абсолютно упругое тело и его деформации. Коэффициент Пуассона. Упругие напряжения. Модули Юнга и сдвига. Деформации при изгибе и кручении. Устойчивость тел при деформациях. Энергия упругих деформаций.*

В механике твердого тела предполагалось, что под действием приложенных сил в теле возникают деформации, однако они не принимались в расчет при описании движения этого тела как целого.

Во многих важных случаях учет деформаций является определяющим, например, когда речь идет о целой области физики — о механике сплошной среды — или о расчете прочности многочисленных конструкций и деталей машин и механизмов, базирующемся на отдельной инженерной науке, называемой сопротивлением материалов и т.д.

В этой лекции мы рассмотрим поведение твердых тел, которые деформируются под действием приложенных сил. Надо отметить, что основные положения механики деформируемых твердых тел, рассматриваемых как сплошные среды, были разработаны в начале XIX в. и составляют основу современной теории упругости.

Опыт показывает, что под действием приложенных сил тела в той или иной степени меняют свою форму и объем, что на микроскопическом уровне означает относительное смещение атомов, составляющих тело. Для удобства описания деформаций мысленно разобьем тело на физически малые объемы (иногда их будем называть частицы), содержащие, однако, большое число атомов. В отсутствие деформаций атомы находятся в состоянии теплового равновесия, а все малые объемы — в механическом равновесии. Тогда сумма сил и моментов сил, действующих на выделенный объем со стороны примыкающих к нему других объемов, будет равна нулю. Изменения положений атомов при деформациях приводят к тому, что в теле возникают внутренние силы, или внутренние напряжения, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия.

Важно отметить, что внутренние силы, как силы молекулярного взаимодействия, являются короткодействующими. Только соседние атомы или молекулы эффективно взаимодействуют друг с другом. Это упрощает ситуацию, поскольку позволяет считать, что силы, действующие на малый объем, приложены к ограничивающей его поверхности.

**Элементарные деформации. Коэффициент Пуассона.**

При всем многообразии случаев произвольную деформацию тела можно свести к двум элементарным деформациям — растяжению (сжатию) и сдвигу.

Обратимся к опыту. Закрепим один конец резинового шнура длиной  $\ell$ , имеющего квадратное сечение, и потянем за другой конец с постоянной силой. Шнур придет в новое положение равновесия с длиной  $\ell_1 > \ell$  (рис. 1.1). Такую простейшую деформацию можно охарактеризовать относительным удлинением

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell}{\ell}, \quad (1.1)$$

При этом растяжению соответствует  $\varepsilon > 0$ , а сжатию —  $\varepsilon < 0$ .

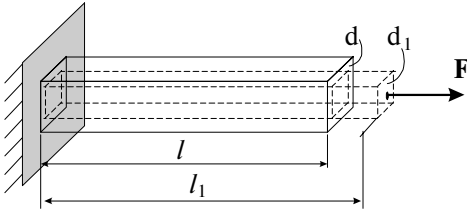


Рис. 1.1

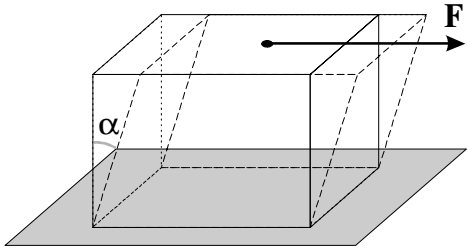


Рис. 1.2

Деформацию сдвига можно наблюдать в опыте с резиновым кубиком, если закрепить, например, его нижнее основание, а к верхнему основанию приложить касательную силу (рис. 1.2). Деформация в этом случае будет характеризоваться параметром

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.2)$$

зависящим от угла сдвига  $\alpha$ , который в большинстве практически важных случаев мал, и  $\gamma \approx \alpha$ .

Отметим также известный факт, что при растяжении резинового шнура его поперечный размер  $d$  уменьшается до величины  $d_1$ . Такое поперечное сжатие характеризуется параметром

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}. \quad (1.3)$$

Опытным путем установлено, что отношение  $\varepsilon_{\perp}$  к  $\varepsilon$  приблизительно одинаково для разных деформаций одного и того же материала. Поэтому в теории упругости материал характеризуется коэффициентом Пуассона

$$\mu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon}. \quad (1.4)$$

Каково численное значение коэффициента Пуассона? Чтобы ответить на этот вопрос, подсчитаем изменение объема резинового шнура.

В отсутствие деформации его объем  $V = \ell d^2$ , объем же деформированного шнура

$$V_1 = \ell_1 d_1^2 = \ell(1 + \varepsilon)d^2(1 + \varepsilon_{\perp})^2 \approx V(1 + \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp}). \quad (1.5)$$

В последнем выражении мы пренебрегли малыми величинами  $\varepsilon_{\perp}^2$ ,  $2\varepsilon\varepsilon_{\perp}$  и  $\varepsilon\varepsilon_{\perp}^2$ .

С учетом (1.4) относительное изменение объема запишется в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_1 - V}{V} \approx \varepsilon + 2\varepsilon_{\perp} = \varepsilon(1 - 2\mu). \quad (1.6)$$

Поскольку при растяжении ( $\varepsilon > 0$ ) объем никогда не уменьшается, то  $0 < \mu \leq 1/2$ .

Для изотропных материалов, имеющих одинаковые механические свойства по всем направлениям, коэффициент Пуассона  $1/4 \leq \mu \leq 1/3$ , в частности, для металлов  $\mu = 3/10$ .

### Понятие о тензоре деформаций.

В рассмотренных выше случаях мы имели дело с одномерными однородными деформациями растяжения и сдвига (вдоль одного направления),

когда  $\epsilon$  и  $\gamma$  оказывались одними и теми же для всех элементарных объемов резинового шнура. Во многих случаях ситуация гораздо сложнее: с одной стороны, деформации меняются от точки к точке (неоднородные деформации), а с другой стороны, они не являются одномерными. Последнее означает, что деформации в некоторой точке  $P$  описываются тремя деформациями растяжения  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$  маленького кубика с

точкой  $P$  внутри (рис. 1.3) и двумя сдвигами каждой из трех граней кубика:  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{13}$ ;  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{23}$ ;  $\gamma_{31}$ ,  $\gamma_{32}$ . Здесь первый индекс  $i$  означает, что грань кубика перпендикулярна оси  $X_i$ , второй индекс  $j$  означает, что грань смещается вдоль оси  $X_j$ . Таким образом, неоднородные деформации в каждой точке тела в общем случае характеризуются набором девяти величин, являющихся функциями координат. Эти девять величин составляют тензор деформаций, однако независимы лишь шесть его величин.

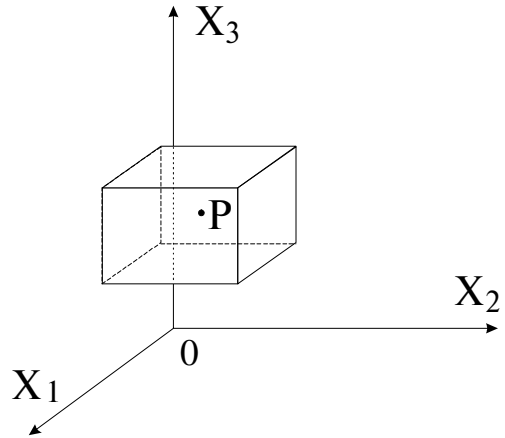


Рис. 1.3

Рассмотрим несколько подробнее подход, используемый для описания деформации в некоторой точке  $P$  и приводящий к понятию тензора деформаций. Пусть тело находится в недеформированном состоянии, и известно положение каждой из его частиц, заданное радиус-вектором  $\mathbf{r}$  относительно некоторой системы координат, как, например, положение точки  $P$  на рис 1.4. При деформировании все точки тела, вообще говоря, смещаются. Смещение каждой точки можно охарактеризовать вектором смещения  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ , являющимся при неоднородных деформациях функцией координат. Однако деформации в точке будут определены лишь тогда, когда известно смещение соседних с точкой  $P$  частиц тела. Таким образом, задание смещения всех частиц тела полностью определяет его деформацию. В самом деле, рассмотрим две бесконечно близкие точки

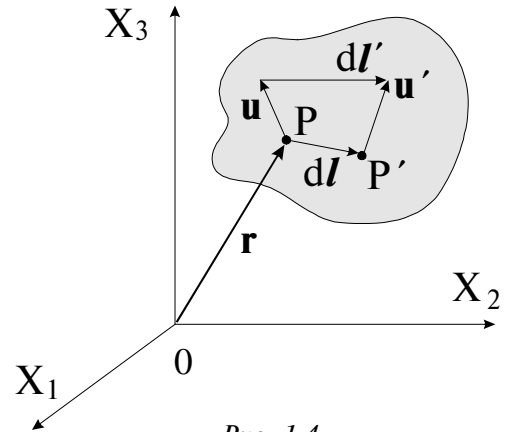


Рис. 1.4

$P(x_1, x_2, x_3)$  и  $P'(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ , имеющие смещения  $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$  и  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ . Из рисунка нетрудно видеть, что если взаимное расположение точек в недеформированном состоянии задавалось радиус-вектором  $d\mathbf{l} = \{dx_1, dx_2, dx_3\}$ , то в результате деформаций новое взаимное расположение определяется вектором

$$d\ell' = d\ell + \mathbf{u}' - \mathbf{u} = d\ell + d\mathbf{u}. \quad (1.7)$$

В частности, если  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}$ , то деформации в точке  $P$  отсутствуют.

Для удобства описания деформаций возведем (1.7) в квадрат и будем оперировать с модулями векторов  $d\ell$  и  $d\ell'$ . Тогда

$$(d\ell')^2 = (d\ell)^2 + 2d\ell \cdot d\mathbf{u} + (d\mathbf{u})^2. \quad (1.8)$$

В равенстве (1.8) пренебрежем последним членом в правой части, поскольку считаем деформации малыми ( $d\mathbf{u} \ll d\ell$ ), а проекции вектора  $d\mathbf{u}$  представим в виде сумм

$$(d\mathbf{u})_i = du_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j; \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Выражение (1.9), по существу, описывает приращение каждой из трех проекций вектора смещения при переходе из точки  $P$  в точку  $P'$  и содержит три слагаемых, каждое из которых есть произведение производной функции  $u_i$  в точке  $P$  на приращение соответствующего аргумента  $dx_j$ .

Расписывая в (1.8) скалярное произведение в виде

$$d\ell \cdot d\mathbf{u} = dx_1 du_1 + dx_2 du_2 + dx_3 du_3$$

и подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$(d\ell')^2 = (d\ell)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j dx_i = (d\ell)^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 U_{ij} dx_j dx_i, \quad (1.10)$$

где, по определению,

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.11)$$

— тензор деформаций. Из его определения видно, что он является симметричным тензором ( $U_{ij} = U_{ji}$ ).

Для описания деформаций в каждой точке  $P$  можно выбрать такую систему координат, в которой только три диагональные компоненты тензора  $U_{11}$ ,  $U_{22}$  и  $U_{33}$  будут отличны от нуля. Как и в случае тензора инерции, для каждой точки тела  $P$  существуют свои три главные оси, относительно которых формула (1.10) имеет наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} (d\ell')^2 &= (d\ell)^2 + 2U_{11} dx_1^2 + 2U_{22} dx_2^2 + 2U_{33} dx_3^2 = \\ &= dx_1^2 (1 + 2U_{11}) + dx_2^2 (1 + 2U_{22}) + dx_3^2 (1 + 2U_{33}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

В качестве примера рассмотрим деформацию сдвига в резиновом кубе, изображенном на рис. 1.2. Для удобства нанесем на его боковую грань прямоугольную сетку, разбивающую эту грань на маленькие квадратики со сторонами, параллельными ее диагоналям (рис. 1.5а). При деформации квадратики превращаются в прямоугольники (рис. 1.5б). Если под  $d\ell$  и  $d\ell'$  понимать длины диагоналей элементарных квадратика и прямоугольника соответственно, то эти длины можно связать формулой (1.12) только в системе координат, оси которой  $X_1$  и  $X_2$  направлены вдоль ребер элементарных ячеек (ось  $X_3$  перпендикулярна плоскости чертежа).



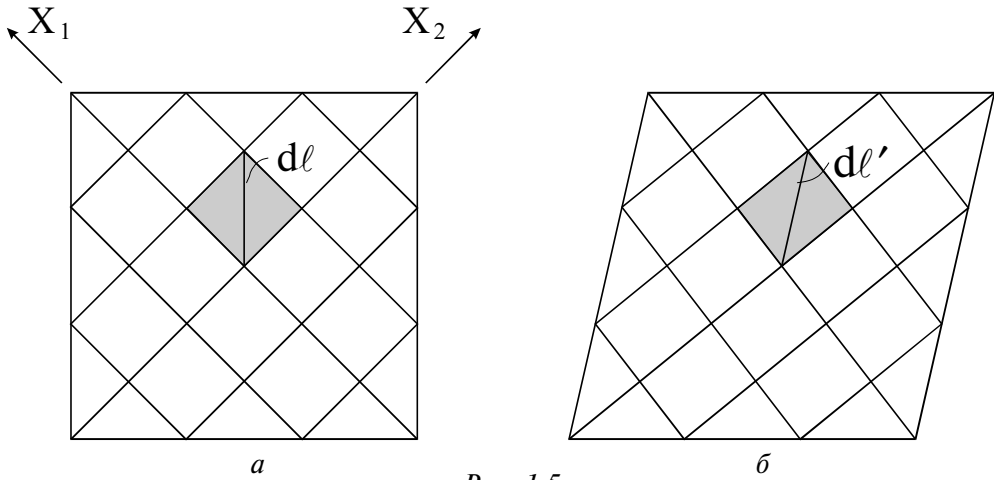


Рис. 1.5

Обобщая полученный результат, следует сказать, что при произвольных деформациях главные оси в любой точке  $P$  должны быть направлены параллельно ребрам элементарного прямоугольного параллелепипеда, который при деформации остается прямоугольным параллелепипедом. Деформации сдвига относительно главных осей координат отсутствуют. Ниже мы установим связь между деформациями сдвига и недиагональными компонентами тензора деформаций.

Выясним далее физический смысл диагональных компонент  $U_{11}$ ,  $U_{22}$  и  $U_{33}$ . Относительное удлинение каждого ребра параллелепипеда равно соответствующей диагональной компоненте тензора деформаций. В самом деле,

$$\epsilon_i = \frac{dx_i \sqrt{1 + 2U_{ii}} - dx_i}{dx_i} = \sqrt{1 + 2U_{ii}} - 1 \approx U_{ii}. \quad (1.13)$$

Пусть в окрестности точки  $P(x_1, x_2, x_3)$  деформации таковы, что параллелепипед со сторонами  $dx_1$ ,  $dx_2$  и  $dx_3$  превращается в другой параллелепипед. Для наглядности рассмотрим картину деформации в плоскости  $X_1 X_2$  (рис. 1.6а). Смещения вершин прямоугольника при деформации изображены соответствующими векторами. Длины прямоугольника в направлении главных осей  $X_1$  и  $X_2$  изменились до величин

$$\begin{aligned} dx'_1 &= dx_1 + u_1(x_1 + dx_1, x_2) - u_1(x_1, x_2), \\ dx'_2 &= dx_2 + u_2(x_1, x_2 + dx_2) - u_2(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.14) легко вычисляются относительные удлинения:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{dx'_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{u_1(x_1 + dx_1, x_2) - u_1(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = U_{11}, \\ \epsilon_2 &= \frac{dx'_2 - dx_2}{dx_2} = \frac{u_2(x_1, x_2 + dx_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = U_{22}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Соотношение (1.13) позволяет связать изменение элементарного объема с диагональными компонентами тензора. Объем элементарного параллелепипеда

$$dV' = dx'_1 \cdot dx'_2 \cdot dx'_3 = dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \sqrt{1 + 2U_{11}} \sqrt{1 + 2U_{22}} \sqrt{1 + 2U_{33}} \quad (1.16)$$

и также изменяется при деформациях. Относительное изменение этого объема при малых деформациях ( $|U_{ii}| \ll 1$ ), как следует из (1.16), равно

$$\frac{dV' - dV}{dV} \approx U_{11} + U_{22} + U_{33}. \quad (1.17)$$

Важно отметить, что при сдвиге объем тела не меняется. Поэтому при деформациях сдвига сумма диагональных компонент тензора деформаций (иногда употребляют термин «след тензора»), приведенного к главным осям, равна нулю (см. ниже).

Поясним далее физический смысл недиагональных компонент тензора деформаций. Пусть параллелепипед испытывает деформацию, в результате которой прямоугольник на рис. 1.6 б превращается в паралле-

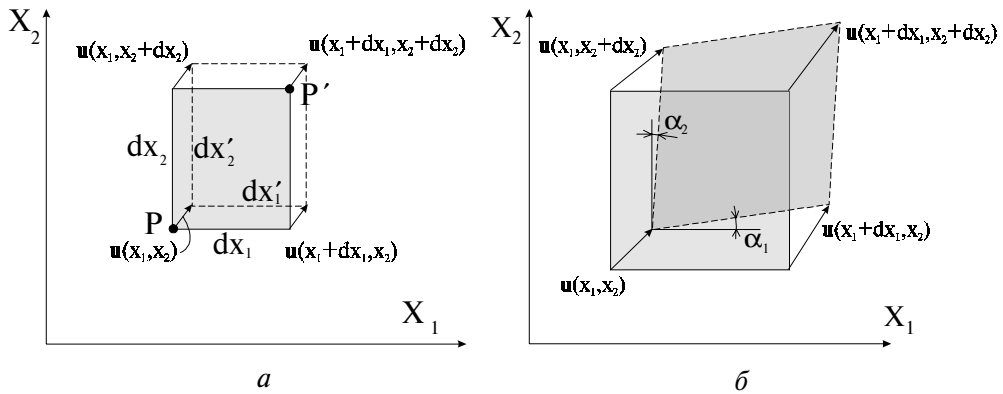


Рис. 1.6

лограм. В рассматриваемом примере мы отвлекаемся, как и ранее, от смещения частиц вдоль оси \$X\_3\$. Легко подсчитать углы \$\alpha\_1\$ и \$\alpha\_2\$, на которые повернулись стороны параллелограмма относительно сторон прямоугольника. Они, очевидно, равны

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{u_2(x_1 + dx_1, x_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1},$$

$$\alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{u_1(x_1, x_2 + dx_2) - u_1(x_1, x_2)}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}.$$

Тогда угол сдвига

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2U_{12} = 2U_{21}.$$

Таким образом, недиагональные компоненты тензора деформаций определяют сдвиговые углы \$\alpha\$ в соответствующих плоскостях.

### Упругие тела.

Как уже отмечалось выше, при деформациях возникают внутренние напряжения, которые, в общем случае, зависят не только от деформаций,

но и от скоростей, с которыми эти деформации происходят. В этом легко убедиться, если взять полимерное вещество, которое в обычных условиях медленно растекается подобно замазке. Можно без особых усилий изменить его форму, если делать это медленно. Однако, если из этого вещества вылепить шарик, то легко обнаружить, что такой шарик обладает хорошими упругими свойствами, подскакивая после удара об пол практически на ту же высоту, с которой он был брошен без начальной скорости. Этот опыт показывает, что напряжения, подобно силам вязкого трения, возрастают по мере увеличения скорости деформации. В ряде практически важных случаев напряжения определяются только деформациями. Такие тела называются абсолютно упругими телами, или упругими телами. Замечательным свойством таких тел является способность полностью восстанавливать свою форму после снятия внешних усилий, прикладываемых к телу.

Рассмотрим, например, растяжение (или сжатие) стержня (рис. 1.1) под действием силы  $F$ , приложенной перпендикулярно к торцевой грани с площадью сечения  $S$ . При последовательном возрастании нагрузки вначале деформации развиваются равномерно по длине стержня и растут пропорционально нагрузке, т.е.

$$\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell}{\ell} = \chi \cdot \frac{F}{S} = \chi \sigma. \quad (1.18)$$

Величина  $\sigma = F / S$  называется нормальным напряжением в торцевом сечении стержня. Пропорциональность деформаций  $\varepsilon$  соответствующим напряжениям выражает закон Гука. Коэффициент пропорциональности  $\chi$  называется коэффициентом удлинения и для каждого материала определяется опытным путем. Так как численные значения  $\varepsilon$  гораздо меньше  $\sigma$ , то  $\chi$  — весьма малая величина. Поэтому обычно вводят модуль упругости (модуль Юнга)  $E = \chi^{-1}$ , и закон Гука окончательно записывают в виде

$$\varepsilon = \sigma / E. \quad (1.19)$$

Опыт показывает, что этот закон выполняется лишь в определенном интервале напряжений. Если растягивать стержень, последовательно увеличивая от нуля приложенную к нему силу, то каждый раз, после снятия нагрузки, деформация исчезает. Однако, при некотором напряжении  $\sigma \geq \sigma_y$  появляется заметное остаточное удлинение. Это напряжение  $\sigma_y$  называется пределом упругости. На рис. 1.7 изображена зависимость деформаций от напряжений, называемая диаграммой растяжений. Следует отметить, что закон Гука выполняется только в части области упругости — области пропорциональности, когда  $0 \leq \sigma \leq \sigma_{\text{п}}$ .

При возрастании нагрузки наблюдается явление текучести, т.е. рост удлинения образца при постоянной нагрузке  $\sigma_{\text{т}}$ , называемой пределом текучести. Отметим, что течение материала происходит равномерно по всей длине стержня. За пределами области текучести дальнейшее удлинение стержня сопровождается увеличением  $\sigma$ . Однако деформации будут распределены уже неодинаково по длине стержня (рис. 1.8) — в некотором месте можно заметить образование шейки. При напряжении  $\sigma_{\text{м}}$ , называемом пределом прочности, в этом ослабленном сечении происходит разрыв.

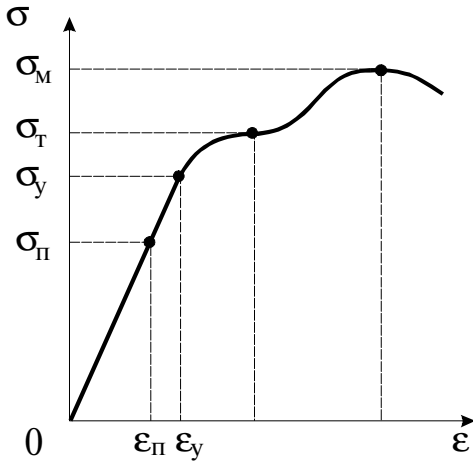


Рис. 1.7

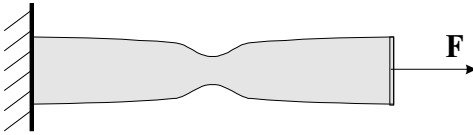


Рис. 1.8

чугун, разрушаются при деформациях  $\epsilon \geq \epsilon_{п}$ . Однако в ряде случаев и пластичные материалы могут разрушаться при малых деформациях  $\epsilon \approx \epsilon_{п}$  (напри-

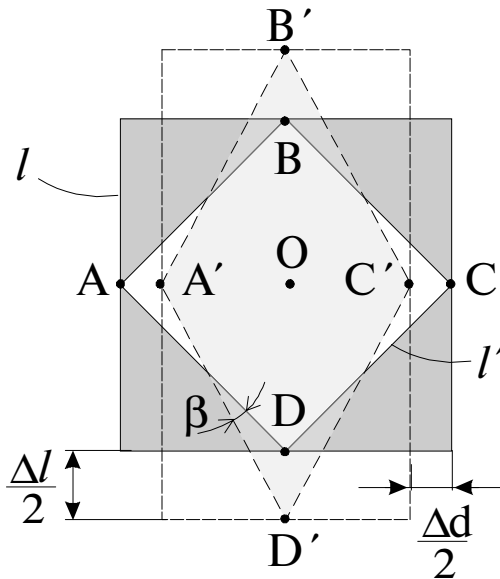


Рис. 1.9

То напряжение, которое данный материал может выдержать на практике, не разрушаясь и не получая опасной деформации, называют допустимым и обозначают  $[\sigma]$ . Обычно  $[\sigma] < \sigma_{п}$ , и все расчеты проводят на основе закона Гука. Чтобы обеспечить прочность при всех обстоятельствах, допустимое напряжение выбирается как часть предела прочности, в частности, для металлов  $[\sigma] = 0,2 \sigma_{м}$ , а для дерева  $[\sigma] = 0,1 \sigma_{м}$ .

Следует отметить, что наибольшие деформации, которые может выдержать материал, определяются протяженностью области текучести. Если область текучести велика, то материал называется пластичным. Такой материал, как, например, сталь, способен выдерживать большие нагрузки без разрушения. Наоборот, если область текучести невелика, то этот материал хрупок. Хрупкие материалы, например, чугун, разрушаются при деформациях  $\epsilon \geq \epsilon_{п}$ . Однако в ряде случаев и пластичные материалы могут разрушаться при малых деформациях  $\epsilon \approx \epsilon_{п}$  (например, сталь при температуре ниже  $-45^{\circ}\text{C}$ ).

Аналогичными свойствами обладают и деформации сдвига. В частности, в области пропорциональности связь между деформацией и касательным напряжением (рис. 1.2) задается соотношением

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{\sigma_{\tau}}{G}, \quad (1.20)$$

в котором  $\sigma_{\tau} = \frac{F}{S}$  — касательное напряжение, аналогичное по смыслу введенному выше нормальному напряжению, а  $G$  — модуль сдвига, являющийся, как и модуль Юнга, характеристикой материала.

Таблица. Характеристики упругости и прочности,  $10^8 \text{ Н/м}^2$ 

Материал	Модуль упругости $E$	Модуль сдвига $G$	Предел пропорциональности $\sigma_{\text{п}}$	Предел текучести $\sigma_{\text{т}}$	Предел прочности при растяжении $\sigma_{\text{м}}$
Сварочная сталь	2000	770	1,3...1,6	1,8...2,6	3,3...4,0
Пружинная сталь незакаленная	2200	850	5,0 и выше	—	до 10 и выше
Пружинная сталь закаленная	2200	850	7,5 и выше	—	до 17
Медь	1100...1300	415...440	—	0,7	22
Серый чугун	750...1050	290...400	—	—	1,2...2,4
Свинец	140...180	55...80	—	0,05	0,14...0,18

В таблице приведены характеристики упругости и прочности некоторых материалов. Из этой таблицы можно сделать два важных вывода.

Во-первых, поскольку предел пропорциональности  $\sigma_{\text{п}}$  на 2-3 порядка меньше модуля упругости, то в области упругости деформации  $\varepsilon_{\text{y}} < 10^{-3} \div 10^{-2}$ .

Во-вторых, просматривается корреляция между величинами модуля Юнга  $E$  и модуля сдвига  $G$  — чем больше  $E$ , тем больше и  $G$ . Это не случайно, так как между обеими величинами существует связь. Чтобы ее установить, рассмотрим растяжение маленького кубика с длиной ребра  $dx = \ell$ , как это изображено на рис. 1.9. Обратим внимание на то, что квадратная грань ABCD параллелепипеда, находящегося внутри рассматриваемого кубика, превращается при деформации в ромбическую грань A'B'C'D'. Совершенно ясно, что параллелепипед испытывает сдвиговую деформацию, а его объем при этом практически не изменяется (см. также формулу (1.17)). Величину угла сдвига  $\alpha$  можно легко связать с деформацией удлинения  $\varepsilon = \Delta\ell / \ell$  и коэффициентом Пуассона  $\mu = -\varepsilon_{\perp} / \varepsilon$ . Из треугольника A'OD' следует, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \frac{\frac{\ell}{2} + \frac{\Delta\ell}{2}}{\frac{\ell}{2} - \frac{\Delta\ell}{2}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon_{\perp}} = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon\mu}. \quad (1.21)$$

Поскольку  $\beta \ll 1$ , то

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \approx 1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \beta = 1 + 2\beta. \quad (1.22)$$

Приравнявая правые части (1.21) и (1.22), находим

$$\alpha = 2\beta = \frac{\varepsilon(1 + \mu)}{1 - \varepsilon\mu} \approx \varepsilon(1 + \mu). \quad (1.23)$$

В последней формуле учтено, что  $\varepsilon\mu \ll 1$

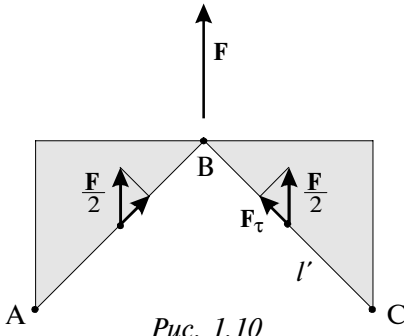


Рис. 1.10

Сила  $F$ , растягивающая кубик (рис. 1.10), создает нормальное напряжение  $\sigma = F / \ell^2$ . Это напряжение передается на грани  $AB$  и  $BC$  параллелепипеда, однако силы, действующие на каждую из граней, имеют не только нормальную к грани, но и направленную вдоль грани составляющую  $F_\tau$ . Касательное напряжение оказывается при этом равным

$$\sigma_\tau = \frac{F_\tau}{\ell \cdot \ell'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \ell \cdot \ell \cos \frac{\pi}{4}}{\ell \cdot \ell'} = \frac{\sigma}{2}. \quad (1.24)$$

Поскольку деформации  $\varepsilon$  в формуле (1.23) пропорциональны напряжениям, а  $\sigma = 2\sigma_\tau$ , то

$$\alpha = \frac{2(1 + \mu)}{E} \sigma_\tau. \quad (1.25)$$

Сравнивая последнее равенство с соотношением (1.20) и учитывая, что  $\gamma = \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ , находим искомую связь между модулями Юнга и сдвига:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.26)$$

В рассмотренном примере следует обратить внимание на то, что величина и направление силы, приложенной к некоторой площадке, зависят от ориентации и величины этой площадки. Так, на грань  $\ell \times \ell$  куба действует сила  $F$ , перпендикулярная к грани, в то время как на грань параллелепипеда  $\ell \times \ell'$  действует сила  $F/2$ , направленная под углом  $45^\circ$  к этой грани. Этот частный вывод получит далее обобщение при обсуждении способов задания сил, действующих на каждый из элементов тела.

Посмотрим, что будет происходить с тем же кубиком, если его растягивать одновременно силами, приложенными ко всем его граням. В этом случае относительные удлинения каждого из его ребер будут определяться соотношениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\varepsilon_2}{\mu} - \frac{\varepsilon_3}{\mu} = \frac{\sigma_1 - (\sigma_2 + \sigma_3) / \mu}{E},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\varepsilon_1}{\mu} - \frac{\varepsilon_3}{\mu} = \frac{\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3) / \mu}{E}, \quad (1.27)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\varepsilon_2}{\mu} - \frac{\varepsilon_1}{\mu} = \frac{\sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_2) / \mu}{E}.$$

Формулы (1.27) описывают деформации кубика при его всестороннем растяжении или сжатии. Если напряжения одинаковы ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ ), то деформации также будут одинаковы:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$ , и

$$\varepsilon = \frac{\sigma(1 - 2/\mu)}{E}.$$

В результате всесторонней деформации объем кубика станет равным

$$V' = \ell^3 (1 + \varepsilon)^3 \approx V(1 + 3\varepsilon),$$

а его относительное изменение составит величину

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon = \frac{3(1 - 2/\mu)}{E} \sigma = \frac{\sigma}{k}. \quad (1.28)$$

Параметр

$$k = \frac{E}{3(1 - 2/\mu)} \quad (1.29)$$

называется модулем всестороннего сжатия и играет важную роль в теории упругости.

Важно отметить, что хрупкие материалы, подвергнутые всестороннему давлению, на которое дополнительно накладывается растяжение, сжатие или сдвиг, обнаруживают значительные пластические деформации. Такие деформации играют существенную роль, например, в процессах образования рельефа земной коры: граниты и базальты, хрупкие в обычных условиях, текут под действием колоссального давления в глубинных слоях Земли.

Деформации растяжения и сдвига возникают в практически важных случаях изгибов балок строительных конструкций и скручивания валов машин и механизмов.

### Изгиб балок.

Балка, т.е. стержень, испытывающий изгиб, деформируется таким образом, что первоначально прямая ось балки  $O_1O_2$  становится криволинейной; эта ось называется нейтральной линией (рис. 1.11). Рассмотрим изгиб балки под действием внешней силы  $F$ , пренебрегая ее весом. Все волокна, лежащие ниже этой линии, удлиняются (в них возникают растягивающие напряжения), а волокна,

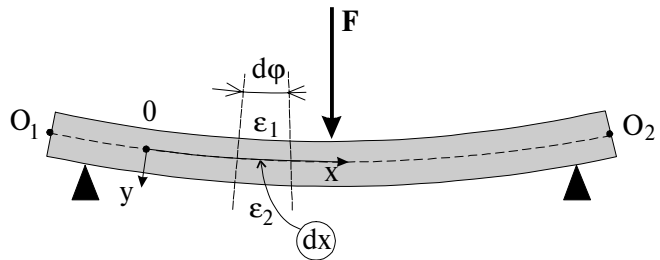


Рис. 1.11

лежащие выше этой линии, сжимаются (в них возникают сжимающие напряжения). Между растянутыми и сжатыми волокнами находится нейтральный слой. При этом два первоначально параллельных и находящихся на расстоянии  $dx$  друг от друга сечения при изгибе образуют некоторый угол  $df$ . Для удобства описания распределения деформаций и напряжений свяжем со стержнем систему координат с началом в некоторой точке  $O$  нейтральной линии  $O_1O_2$  и осями  $x$  и  $y$ , направленными вдоль нейтральной линии и в поперечном сечении соответственно. Легко видеть, что деформации в некотором сечении  $x = \text{const}$  линейно нарастают вдоль оси  $y$  от  $\varepsilon_1 < 0$  до  $\varepsilon_2 > 0$ . Это дает основание в соответствии с законом Гука записать распределение напряжений в виде

$$\sigma(x, y) = \kappa(x) \cdot y, \quad (1.30)$$

где  $\kappa$  — неизвестный коэффициент пропорциональности, меняющийся, вообще говоря, от сечения к сечению. Распределение напряжений (1.30) в произвольном сечении стержня можно изобразить графически. Для этого в каждой точке сечения проведем перпендикулярно к нему вектор, модуль которого равен силе, действующей на площадку  $dS$ :  $df = \sigma \cdot dS$  (рис. 1.12а), т.е.  $\sigma = df / dS$ .

Рассмотрим равновесие части балки, расположенной слева от сечения. Начало координат поместим в плоскости, вдоль которой действует сила реакции опоры.

Предположим, что балка имеет вертикальную плоскость симметрии, как это изображено на рис. 1.12 б, и внешние силы лежат в этой плоскости. Нейтральный слой пересекает сечение балки по прямой  $n_1n_2$ . Для равновесия выделенной части балки необходимо, чтобы выполнялись следующие известные из статики условия.

Во-первых, сумма всех горизонтальных сил должна быть равна нулю, т.е.

$$\int df = \int \sigma \cdot dS = \kappa(x) \int y dS = 0. \quad (1.31)$$

Поскольку интеграл (1.31) вычисляется по площади поперечного сечения балки, то понятно, что нейтральная ось  $n_1n_2$ , на которой лежит начало координат, должна проходить через центр масс этого поперечного сечения.

Во-вторых, сумма всех вертикальных сил может быть равна нулю, если в сечении, кроме нормальных напряжений, будут действовать и касательные напряжения  $\sigma_\tau$ , чтобы скомпенсировать силу реакции опоры  $N$ , т.е.

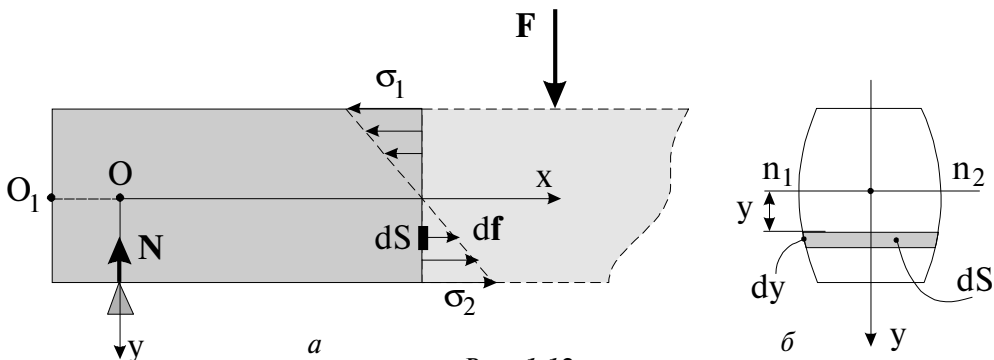


Рис. 1.12



$$N = \int \sigma_{\tau} dS. \quad (1.32)$$

В большинстве случаев касательные напряжения при изгибе малы по сравнению с нормальными и при расчете балки на прочность не учитываются.

В-третьих, сумма моментов всех сил относительно любой точки должна быть равна нулю. Если в качестве такой точки выбрать центр масс рассматриваемого сечения, то это условие запишется в виде:

$$N \cdot x - \int \sigma \cdot y \cdot dS = 0. \quad (1.33)$$

Если подставить сюда распределение напряжений (1.30), в котором коэффициент пропорциональности  $\kappa(x) = \frac{\sigma_2(x)}{y_2}$  ( $y_2$  - расстояние между нейтраль-

ным слоем и наиболее растянутым нижним волокном), то мы приходим к условию

$$M(x) = \frac{\sigma_2(x)}{y_2} \int y^2 dS = \frac{\sigma_2(x)}{y_2} J, \quad (1.34)$$

где

$$J = \int y^2 dS \quad (1.35)$$

— момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси  $n_1 n_2$ ,  $M(x) = N \cdot x$  — момент силы реакции.

Отношение  $J/y_2$  зависит от размеров и формы сечения и называется осевым моментом сопротивления:

$$I = \frac{J}{y_2}, \quad (1.36)$$

а уравнение (1.34) можно представить в виде

$$M = \sigma_2 \cdot I. \quad (1.37)$$

Для расчета прочности балок необходимо знать распределение напряжений  $\sigma$ , возникающих при известных моментах внешних сил. Оно может быть получено из (1.34) в виде

$$\sigma(x, y) = \frac{M(x)}{J} y. \quad (1.38)$$

Моменты инерции прямоугольного и круглого поперечных сечений равны

$$J_{\square} = \frac{1}{12} b h^3, \quad J_{\circ} = \frac{1}{64} \pi d^4, \quad (1.39)$$

а соответствующие им осевые моменты сопротивления —

$$I_{\square} = \frac{1}{6} b h^2, \quad I_{\circ} = \frac{1}{32} \pi d^3. \quad (1.40)$$

Из (1.37) следует, что прочность балок возрастает при увеличении осевого момента сопротивления, причем, как следует из (1.40), прочность

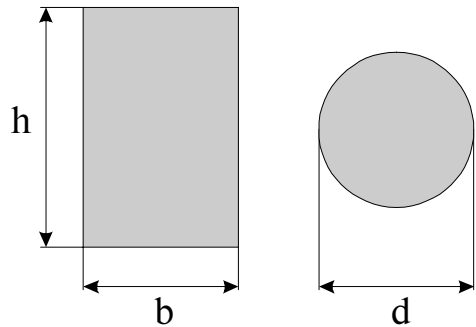


Рис. 1.13

балки прямоугольного сечения достигается эффективнее за счет увеличения ее высоты  $h$ .

Полученные результаты позволяют рассчитать искривление осевой линии балки. Элементарный угол  $d\varphi$ , на который повернулись сечения  $x$  и  $x + dx$ , очевидно, связан с двумя деформациями  $\varepsilon_1 < 0$  и  $\varepsilon_2 > 0$  крайних волокон соотношением

$$d\varphi = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)dx}{y_2 - y_1} = \frac{1}{E} \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)dx}{y_2 - y_1}, \quad (1.41)$$

где  $y_2 - y_1$  — расстояние между крайними волокнами. Подставляя в (1.41) напряжение (1.38), получим

$$d\varphi = \frac{1}{E} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{y_2 - y_1} dx = \frac{M(x)}{E \cdot J} dx. \quad (1.42)$$

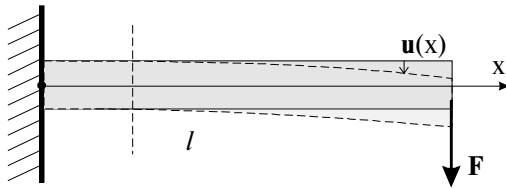


Рис. 1.14

В частности, легко рассчитать изгиб невесомой горизонтальной балки, выступающей из стены (консольной балки) на расстоянии  $\ell$ , к концу которой приложена вертикальная сила  $\mathbf{F}$  (рис. 1.14). Как следует из (1.42), в произвольном сечении  $x$

$$d\varphi = \frac{F(\ell - x)}{E \cdot J} dx. \quad (1.43)$$

Если ось балки в каждом сечении сместилась вниз на расстояние  $u(x)$ , то, очевидно, угол наклона нейтральной линии балки к горизонтальной оси в сечении  $x$

$$\varphi(x) \approx \operatorname{tg}\varphi(x) = \left. \frac{du}{dx} \right|_x. \quad (1.44a)$$

В сечении  $x + dx$  угол наклона становится несколько больше:

$$\varphi(x + dx) = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x+dx}. \quad (1.44b)$$

Приращение этого угла

$$d\varphi = \varphi(x + dx) - \varphi(x) = \frac{d^2u}{dx^2} dx. \quad (1.45)$$

Приравнявая правые части (1.45) и (1.43), получаем уравнение:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{F(\ell - x)}{EJ}. \quad (1.46)$$

Интегрируя два раза при условии, что  $u(0)=0$  (конец закреплен), получаем искомое искривление балки в виде

$$u(x) = \frac{F}{EJ} \left( \frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (1.47)$$

В частности, смещение конца балки под действием силы  $F$ , называемое стрелой прогиба, оказывается равным

$$u(\ell) = \frac{1}{3} \frac{F\ell^3}{EJ}. \quad (1.48)$$

Если балка имеет прямоугольное сечение, то ее стрела прогиба очень быстро уменьшается по мере увеличения высоты балки  $h$ , поскольку  $J \sim h^3$ .

Для экономии материала иногда используют пустотелые балки. Такая балка значительно легче цельной, а ее осевой момент сопротивления (см. 1.36) остается достаточно большим. Для повышения жесткости используют конструкции, называемые фермами (рис. 1.15).

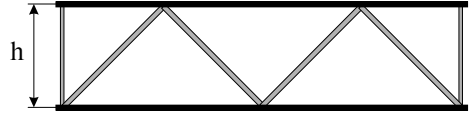


Рис. 1.15

Фермы - это достаточно легкие ажурные конструкции, высота которых, в сильной степени определяющая момент сопротивления, может достигать десятков метров. В качестве примера на рис. 1.16 показана типичная конструкция подвесного моста.

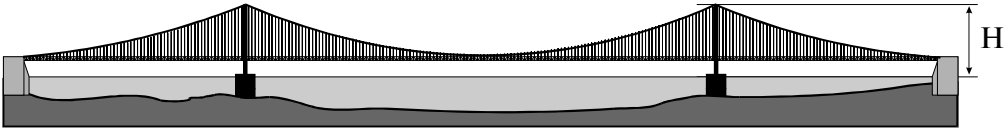


Рис. 1.16

Необходимая жесткость такого моста обеспечивается фермами, состоящими из жестких элементов и тросов. Рекордную длину 3910 метров имеет мост, соединяющий два острова в Японии. Длина его центрального пролета  $L$  составляет 1990 метров при высоте опор  $H = 297$  метров.

### Кручение валов.

Деформации сдвига возникают при скручивании валов машин и механизмов, когда посредством вала передается вращательное усилие от одной части механизма к другой.

Если, например, нижнее основание вала, изготовленного в виде круглого стержня радиуса  $R$  и длины  $\ell$ , закрепить, а к верхнему основанию приложить закручивающий момент внешних сил  $M$ , то вал деформируется. На рис. 1.17 изображены деформируемый вал и деформация сдвига элементарного объема. Очевидно, что угол сдвига  $\alpha$  зависит от удаления этого объема от оси вала. Касательные напряжения  $\sigma_\tau$ , ответственные за эти деформации, создают в сечении момент упругих сил, равный

$$M_{\text{упр}} = \int r df_\tau = \int r \sigma_\tau dS = \int_0^R r G \gamma 2\pi r dr. \quad (1.49)$$

Здесь учтено, что площадь элементарного кольца радиуса  $r$  и шириной  $dr$  равна  $dS = 2\pi r dr$ , а  $\sigma_\tau(r) = \gamma(r)G$ .

Из условия равновесия части вала, находящейся, например, выше от рассматриваемого сечения, следует, что

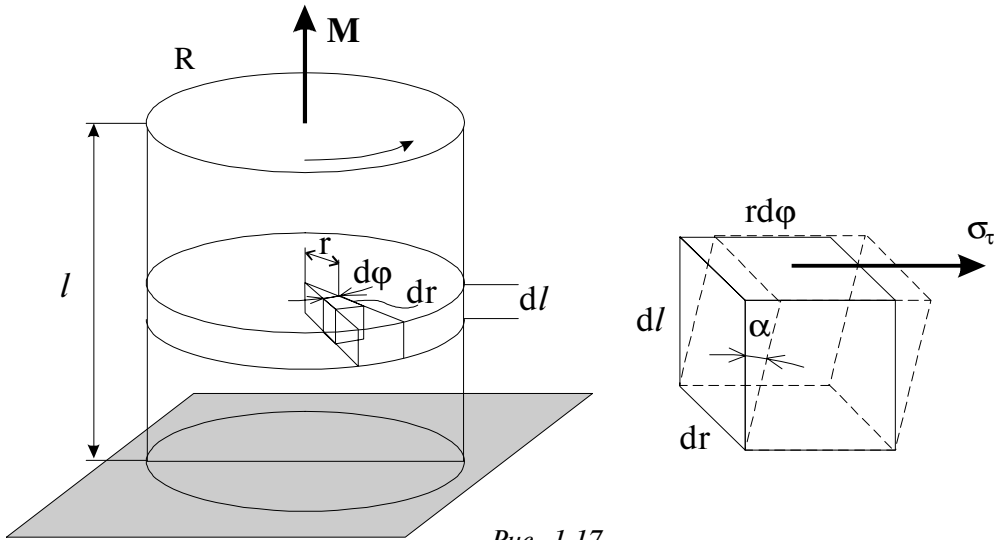


Рис. 1.17

$$M_{\text{упр}} = M \quad (1.50)$$

и  $M_{\text{упр}}$  не зависит от выбора сечения вала.

Зависимость  $\gamma(r)$  должна быть линейной функцией расстояния  $r$ , т.е.

$$\gamma(r) = \kappa \cdot r, \quad (1.51)$$

где неизвестный коэффициент пропорциональности  $\kappa$  может быть определен из (1.49) при учете (1.50):

$$M_{\text{упр}} = M = 2\pi G \kappa \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2} \kappa. \quad (1.52)$$

Таким образом, сдвиговые деформации

$$\gamma(r) = \frac{2M}{\pi G R^4} r. \quad (1.53)$$

Они пропорциональны моменту внешних сил и обратно пропорциональны четвертой степени радиуса  $R$ . Из последнего соотношения легко подсчитать угол кручения  $\vartheta$ , на который повернется верхнее основание стержня относительно нижнего. Из очевидного равенства

$$l \cdot \gamma(R) = R \cdot \vartheta$$

с учетом (1.53) находим

$$\vartheta = \frac{l\gamma(R)}{R} = \frac{M}{B}, \quad (1.54)$$

где  $B = \frac{\pi G R^4}{2l}$  — модуль кручения, зависящий от размеров вала и модуля сдвига материала, из которого вал изготовлен. Для создания жестких валов необходимо увеличивать диаметр и сокращать длину. Для экономии материала

валы часто делают пустотелыми, обеспечивая при этом высокую жесткость вала.

В ряде случаев, наоборот, используют валы, изготовленные в виде тонких нитей, как, например, нити подвеса крутильных весов, использовавшихся Ш. Кулоном в опытах по исследованию электростатического взаимодействия и П.Н. Лебедевым - в опытах по измерению давления света. В этих опытах тонкие кварцевые нити закручивались на заметные углы при действии ничтожно малых моментов сил, что, конечно, обеспечивало высокую чувствительность крутильных весов.

Отметим, что на практике различные строительные конструкции (балки, фермы и др.) часто должны обладать достаточной сопротивляемостью как к изгибу, так и к кручению. Примерами таких конструкций являются железнодорожный рельс, балка двутаврового сечения, швеллер и др.

Интересно отметить, что при растяжении пружин могут одновременно возникать деформации растяжения и сдвига. Пружины с малыми углами наклона витков к горизонтали (рис. 1.18) при их растяжении вдоль оси, в отличие от стержней, испытывают деформации сдвига. При воздействии с силой  $F$  такая пружина удлинится на величину  $\Delta \ell = F / k_1$ , при этом коэффициент ее жесткости зависит от диаметра проволоки  $d$ , числа витков  $n$ , диаметра витка  $D$  и оказывается равным

$$k_1 = \frac{Gd^4}{8nD^3}. \quad (1.55a)$$

При закручивании пружины, подобно валу, вокруг ее оси, когда к торцевому ее сечению прикладывается момент внешних сил  $M$ , витки пружины испытывают деформации растяжения (как при изгибе балки). В этом случае угол закручивания  $\theta = M / k_2$ , где коэффициент пропорциональности

$$k_2 = \frac{Ed^4}{32nD} \quad (1.55b)$$

и зависит от момента инерции круглого сечения  $J_o = \frac{\pi d^4}{64}$  (ф-ла (1.39)), числа витков  $n$  и диаметра витка  $D$ .

### Устойчивость упругого равновесия.

Зная упругие свойства тел, мы всегда можем рассчитать деформации под действием заданных сил. Такие расчеты проводятся в курсе теоретической физики. Их основная идея сводится к следующему.

Под действием внешних сил в теле возникают напряжения. Эти напряжения действуют на элементарный объем через поверхности, его ограничивающие. На рис. 1.19 изображена одна нормальная  $\mathbf{f}_{11}$  и две тангенциальные силы  $\mathbf{f}_{21}$  и  $\mathbf{f}_{31}$ , действующие на заштрихованную грань кубика. Модули этих сил равны

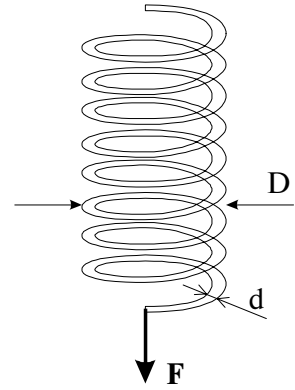


Рис. 1.18

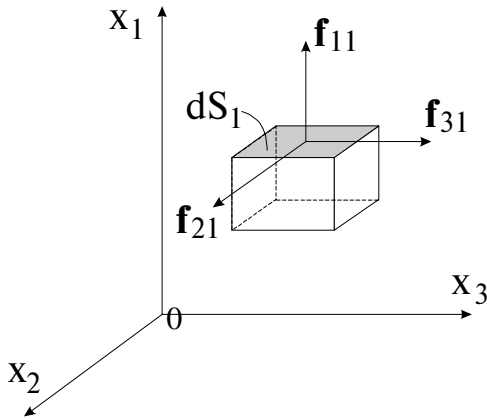


Рис. 1.19

$$\begin{aligned} f_{11} &= \sigma_{11}dS_1; \\ f_{21} &= \sigma_{21}dS_1; \\ f_{31} &= \sigma_{31}dS_1. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Здесь индексы указывают на то, что силы приложены к площадке, перпендикулярной  $x_1$  и действуют в направлении оси  $x_1$  ( $\sigma_{11}$  — нормальное напряжение) и осей  $x_2$  и  $x_3$  ( $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{31}$  — соответствующие тангенциальные напряжения).

Аналогично, но с другими индексами, записываются модули сил, приложенных к площадкам  $dS_2$  и  $dS_3$ . Полная сила, действующая на выделенный объем, зависит как от ориентации площадок, ограничивающих этот объем, так и от внутренних напряжений в той области, где находится рассматриваемый объем. Эти напряжения описываются совокупностью девяти величин  $\sigma_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ), которые составляют тензор напряжений. В упругих телах деформации пропорциональны соответствующим напряжениям. Таким образом, сложные деформации упругих тел описываются системой линейных дифференциальных уравнений, связывающих компоненты тензора деформаций и тензора напряжений. Материальные свойства изотропных сред представлены, как правило, коэффициентом Пуассона  $\mu$  (1.4) и модулем всестороннего сжатия  $k$  (1.29). Анализ такой системы уравнений позволяет не только рассчитать деформацию тел, но и ответить на вопрос, устойчивы эти деформации или нет.

В качестве примера рассмотрим задачу о потере устойчивости стержня при его продольном сжатии силой  $F$  (рис. 1.20). При малых сжимающих силах сжатая стойка находится в устойчивом равновесии, так как при малом случайном отклонении от вертикали стойка, тем не менее, достаточно быстро возвра-

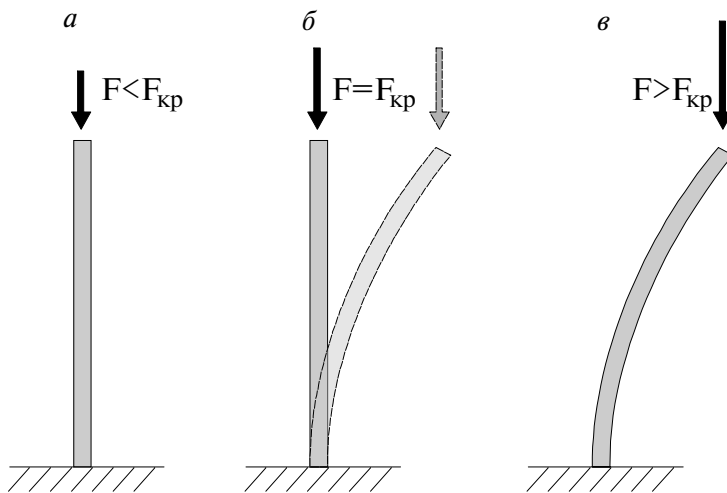


Рис. 1.20

щается в вертикальное положение. С увеличением нагрузки случайные отклонения исчезают медленнее. При  $F = F_{кр}$  наступает состояние безразличного равновесия: прямолинейная форма еще устойчива, но устойчивым уже будет и изогнутое состояние стержня (пунктир на рис. 1.20б). Такое раздвоение

равновесия, характеризующееся двумя его формами, называется бифуркацией. Новая криволинейная форма равновесия при  $F > F_{кр}$  будет устойчивой. Однако в этом случае в стойке возникают недопустимо большие изгибы и напряжения.

Задача о выпучивании стержня при продольном сжатии была решена в XVIII веке выдающимся математиком Леонардом Эйлером. Рассчитаем, следуя Эйлеру, значение критической силы  $F_{кр}$  и форму изогнутого стержня, когда последний шарнирно закреплен за оба конца (рис. 1.21).

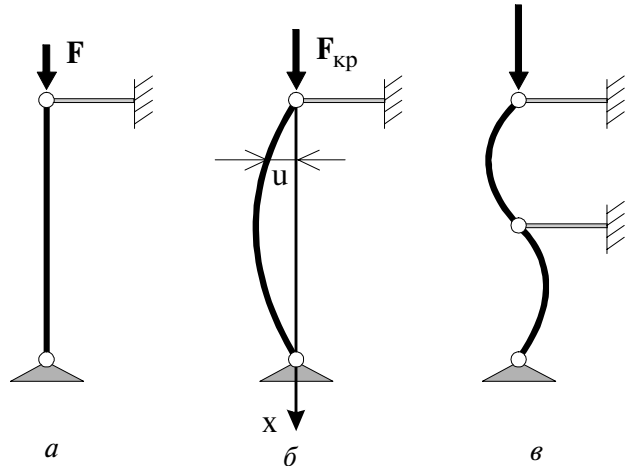


Рис. 1.21

Форма изогнутого стержня  $u(x)$  может быть получена из уравнения (1.46), в котором вместо момента поперечной силы  $F(\ell - x)$  для произвольного сечения  $x = \text{const}$  следует записать момент сдвигивающей силы в виде  $M = F \cdot u$ . Тогда уравнение (1.46) примет вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = - \frac{F \cdot u}{EJ}. \quad (1.57)$$

Если обозначить  $q^2 = \frac{F}{EJ}$  и обратить внимание на то, что уравнение (1.57) аналогично уравнению гармонических колебаний, то можно записать

$$u(x) = u_0 \sin(qx + \Phi). \quad (1.58)$$

Из граничного условия  $u(0) = 0$  следует, что  $\Phi = 0$ . Из другого граничного условия  $u(\ell) = 0$  следует

$$\sin q\ell = 0, \quad \text{или} \quad q_n = \frac{n\pi}{\ell}; \quad n=1, 2, 3... \quad (1.59)$$

Каждому значению  $q_n$  соответствует своя конфигурация изогнутого стержня, представляющая собой синусоиду, имеющую  $n$  полуволн. Эти конфигурации возникают при соответствующих значениях сил, равных

$$F_n = n^2 \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (1.60)$$

При  $n = 1$  формула (1.60) дает значение критической силы

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2}. \quad (1.61)$$

Эта формула была получена Эйлером и носит его имя.

Другие искривленные формы равновесия ( $n = 2, 3...$ ) являются неустойчивыми, однако они могут быть реализованы, если стержень дополнительно закрепить шарнирными опорами в сечениях, где  $u = 0$  (рис. 1.21 в).

Полученный результат имеет большое практическое значение. В силу неустойчивости стержней при их сжатии толкающие рычаги и штоки в машинах делают по возможности короче и большого сечения, в то время как тянущие штоки, имеющие большой запас прочности на разрыв, могут быть и не очень толстыми. По аналогии легко понять, что герметичные емкости, испытывающие нагрузку на разрыв (например, паровые котлы) делают более тонкостенными, чем емкости, подверженные сжатию (оболочки батискафов, подводных лодок и пр.)

**Энергия упругих деформаций.**

При деформации внешние силы совершают работу. Эта работа в общем случае идет на увеличение потенциальной энергии и на нагревание тела. Так, например, если мы будем пытаться переломить проволоку, то место ее многократного изгиба может сильно нагреться, прежде чем проволока переломится.

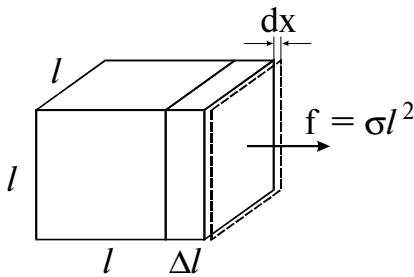


Рис. 1.22

В реальных телах возникающие внутренние напряжения зависят не только от величины деформаций, но и от их скорости. Поэтому работа против таких сил, называемых силами «внутреннего трения», идет на нагревание тела. С этими силами и связаны пластические деформации, когда не выполняется закон Гука и существуют остаточные деформации при прекращении внешнего воздействия.

Вычислим работу, затрачиваемую на малую деформацию элемента объема тела. При растяжении предварительно уже деформированного кубика (рис. 1.22) на величину  $dx$  элементарная работа

$$dA_\epsilon = f \cdot dx = \sigma l^3 d\epsilon. \tag{1.62}$$

В (1.62) учтено, что  $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , а  $d\epsilon = \frac{d(\Delta l)}{l} = \frac{dx}{l}$ .

Поскольку, как следует из рис. 1.7,  $\sigma(\epsilon)$  - нелинейная функция деформаций, то полная работа, затрачиваемая на приведение тела в деформированное состояние, равна

$$A_\epsilon = l^3 \int_0^\epsilon \sigma(\epsilon) d\epsilon. \tag{1.63}$$

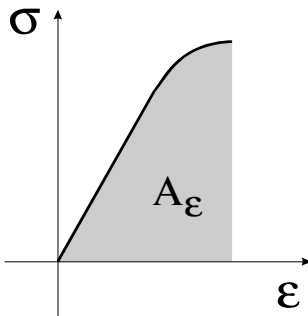


Рис. 1.23

По аналогии, работа при сдвиге задается интегралом вида:

$$A_\gamma = l^3 \int_0^\gamma \sigma(\gamma) d\gamma. \tag{1.64}$$

На диаграмме (1.23) работа  $A_\epsilon$  численно равна заштрихованной площади. Опыт, однако, показывает, что если деформации выйдут за область упругости, то при снятии внешних нагрузок



в теле будут существовать остаточные деформации  $\epsilon_{\text{ост}}$  (рис. 1.24). Чтобы их устранить, надо приложить сжимающую силу ( $\sigma < 0$ ). Такое неоднозначное поведение деформации в зависимости от приложенных напряжений носит название упругого гистерезиса. При периодически повторяющихся деформациях диаграмма  $\sigma(\epsilon)$  будет иметь вид замкнутой кривой, которая называется петлей гистерезиса. Площадь этой петли, очевидно, в соответствии с законом сохранения энергии, равна количеству тепла, идущего на нагревание тела. Когда деформации не выходят за пределы линейного участка  $\sigma(\epsilon)$ , гистерезис отсутствует. На практике детали механизмов, испытывающие многократные, периодически повторяющиеся деформации, делают из материалов с большой величиной предела пропорциональности  $\sigma_{\text{п}}$ . Так, например, для закаленной пружинной стали этот предел, как видно из таблицы, имеет очень большое значение:  $\sigma_{\text{п}} = 7500 \text{ кг/см}^2$ . По этой причине, например, пружины клапанов двигателей делают из закаленной стали.

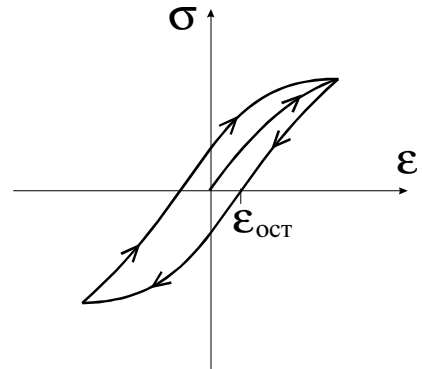


Рис. 1.24

На линейном участке, где  $\sigma = E\epsilon$ ,  $\sigma_{\tau} = G\gamma$ , интегралы (1.63) и (1.64) легко вычисляются:

$$A_{\epsilon} = \ell^3 E \int_0^{\epsilon} \epsilon \cdot d\epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \ell^3, \quad (1.65)$$

$$A_{\gamma} = \ell^3 G \int_0^{\gamma} \gamma \cdot d\gamma = \frac{1}{2} G \gamma^2 \ell^3. \quad (1.66)$$

В этом случае работа затрачивается только на увеличение потенциальной энергии упругой деформации. В единице объема деформированного тела запасается энергия

$$w_{\epsilon} = \frac{A_{\epsilon}}{\ell^3} = \frac{1}{2} E \epsilon^2, \quad w_{\gamma} = \frac{A_{\gamma}}{\ell^3} = \frac{1}{2} G \gamma^2. \quad (1.67)$$

Величины  $w_{\epsilon}$  и  $w_{\gamma}$  носят название объемных плотностей энергии деформации растяжения и сдвига соответственно. Они играют определяющую роль при подсчете количества энергии, переносимой акустической волной в сплошных средах.



## ЛЕКЦИЯ 2

*Жидкость и газ в состоянии равновесия. Условия равновесия. Распределение давлений в жидкости, находящейся во внешнем поле. Плавание тел. Распределение плотности и давления в атмосфере. Воздухоплавание. Центрифугирование.*

Под действием внешних сил в жидкостях и газах, как и в твердых телах, могут возникать внутренние напряжения. Рассматривая жидкости и газы как сплошные среды, мы отметим, что жидкости, не имея определенной формы, сохраняют практически неизменным свой объем. Во многих важных случаях их можно рассматривать как несжимаемые. Газы же не имеют ни определенной формы, ни фиксированного объема.

В жидкости (далее этот термин будет использоваться и для газов, за исключением только отдельно оговариваемых случаев) при сжатии силы отталкивания между молекулами могут быть весьма значительными. По этой причине говорят не о растягивающих и сдвиговых напряжениях  $\sigma_{ij}$ , а о давлениях  $p_{ij} = -\sigma_{ij}$  как об отрицательных напряжениях. Совокупность давлений  $p_{ij}$ , действующих на площадки, перпендикулярные осям координат и ограничивающие кубический элемент жидкости, называется тензором давлений.

Опыт показывает, что в покоящейся или медленно движущейся жидкости тангенциальные напряжения  $p_{ij}$  ( $i \neq j$ ), связанные с вязкостью жидкости, отсутствуют. В этом можно убедиться, заставив, например, массивное тело, плавающее на поверхности жидкости, перемещаться вдоль поверхности под действием сколь угодно малой силы. В этой ситуации касательные напряжения, передаваемые от верхнего (увлекаемого телом) слоя к нижним слоям жидкости, пренебрежимо малы.

### Закон Паскаля.

Если пренебречь вначале силами тяготения, действующими на каждый элементарный объем жидкости (или силами инерции, если таковые существуют), то из условий равновесия этого объема следует, что

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = p, \quad (2.1)$$

при этом давление  $p$ , возникающее вследствие внешнего воздействия, является скалярной величиной и одинаково во всех точках объема, занятого покоящейся жидкостью. Условие (2.1) автоматически обеспечивает не только равенство нулю суммы сил давления, приложенных к данному объему, но и равенство нулю суммарного момента этих сил.

Для доказательства этого условия рассмотрим неподвижную жидкость, помещенную в цилиндрический сосуд с площадью основания  $S_1$ , закрытый сверху поршнем (рис. 2.1, левый сосуд). Если надавить на поршень с силой  $F_1$ , то в жидкости будут созданы внутренние напряжения (давления). Рассмотрим условия равновесия элементарного объема жидкости, имеющего форму кубика. На единицу его поверхности будет действовать сжимающая сила  $\mathbf{f}_{ii} = -p_{ii}\mathbf{n}_i$ , направленная противоположно нормали  $\mathbf{n}_i$  к  $i$ -ой поверхности (на рис. 2.1 указаны лишь две силы). Поскольку силы, действующие на

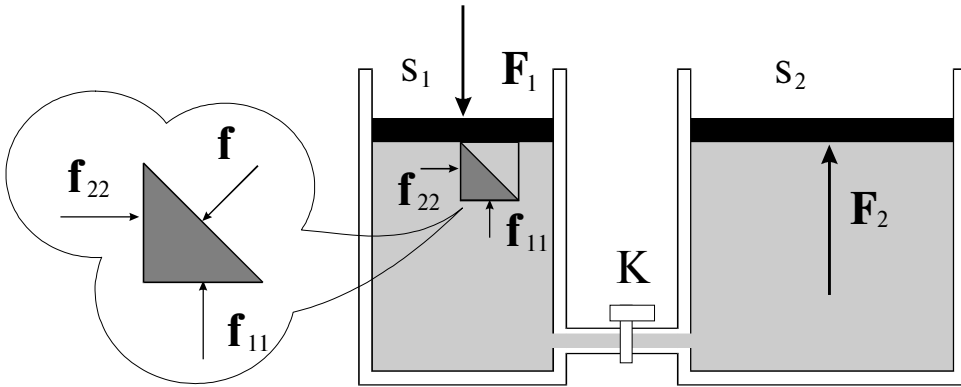


Рис. 2.1

противоположные грани кубика, равны по величине, то  $p_{11} = F_1 / S_1$ . Равенство давлений  $p_{11}$  и  $p_{22}$  следует из условия равновесия половины кубика, выделенного более темным цветом и изображенного на фрагменте. Действительно,  $f_{11} = f_{22} = \frac{f}{\sqrt{2}}$ , поэтому  $p_{22} = p_{11}$ . Рассматривая равновесие элементарных объемов в различных точках жидкости, получим условие:

$$p_{ii} = p = \frac{F_1}{S_1}, \quad (2.2)$$

которое и является математическим выражением закона Паскаля.

Если рассмотренный сосуд соединить при помощи трубки с другим цилиндрическим сосудом с площадью основания  $S_2$ , то при открывании крана К внутренние напряжения в соответствии с законом Паскаля передадутся во второй сосуд (рис. 2.1). На поршень, закрывающий этот сосуд, жидкость будет давить вверх с силой

$$F_2 = pS_2 = \frac{F_1}{S_1} S_2. \quad (2.3)$$

Если  $S_2 > S_1$ , то развиваемое усилие  $F_2 > F_1$ . Этот выигрыш в силе используется во многих гидроприводных устройствах (гидроприводах): в приводе ковша экскаватора, рулей ракет и самолетов. На этом же принципе работает гидравлический пресс, гидравлический домкрат, тормозные системы автомобилей и т.д.

В системе СИ за единицу давления принимается Паскаль (Па), при этом  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ . В технике в качестве единицы давления используется техническая атмосфера:  $1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

### Жидкость во внешнем поле.

Рассмотрим напряжения, возникающие в жидкости, находящейся в поле внешних сил (сил тяжести, инерции и др.)

Пусть к элементу жидкости объемом  $dV = dx dy dz$  приложена внешняя сила  $\mathbf{F}dV$  ( $\mathbf{F}$  - плотность силы, то есть сила, приходящаяся на единицу объема жидкости, (рис. 2.2)). В результате возникающих внутренних напряжений на нижнюю грань кубика с координатой  $x$  и площадью  $dy \cdot dz$  в положительном направлении оси  $x$  действует сила давления  $p(x,y,z)dydz$ , а на верхнюю грань —

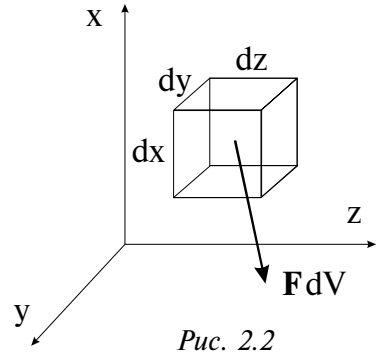
$p(x+dx,y,z)dydz$ . При равновесии кубика, очевидно, необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$p(x,y,z)dydz - p(x+dx,y,z)dydz + F_x dx dy dz = 0. \quad (2.4a)$$

Аналогичные по смыслу равенства должны быть записаны и по двум остальным осям координат:

$$p(x,y,z)dx dz - p(x,y+dy,z)dx dz + F_y dx dy dz = 0; \quad (2.4б)$$

$$p(x,y,z)dx dy - p(x,y,z+dz)dx dy + F_z dx dy dz = 0. \quad (2.4в)$$



Разделив левые и правые части записанных выше равенств на элементарный объем, получаем условия равновесия в виде дифференциальных уравнений

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + F_x = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + F_y = 0; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z = 0. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.5) следует, что давление не остается постоянным и изменяется в тех направлениях, по которым действует внешняя сила. Если ввести вектор градиента давления

$$\text{grad } p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  - единичные векторы вдоль осей координат, то уравнения (2.5) можно записать в более компактном векторном виде:

$$-\text{grad } p + \mathbf{F} = 0. \quad (2.7)$$

В соответствии со смыслом введенного в предыдущих лекциях вектора градиента скалярной величины из (2.7) следует, что давление наиболее быстро нарастает в направлении действия внешней силы  $\mathbf{F}$ , а в перпендикулярных направлениях остается постоянным. Таким образом, можно говорить о поверхностях равного давления, нормаль к которым в каждой точке совпадает с направлением приложенной в этой точке внешней силы. Несложно рассчитать распределение давлений по объему жидкости, если принять во внимание, что компоненты внешней силы  $\mathbf{F}$  выражаются через производные скалярной функции координат  $p(x,y,z)$ . Это означает, что сила  $\mathbf{F}$  - потенциальна и, следовательно, может быть выражена через потенциальную функцию  $U$  (потенциальную энергию единицы объема жидкости во внешнем поле) следующим образом:

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U. \quad (2.8)$$

Подставив (2.8) в (2.7), получим

$$\text{grad } (p + U) = 0, \quad \text{или} \quad p + U = \text{const}. \quad (2.9)$$

Константа в (2.9) определяется из условия нормировки потенциала.

### Жидкость в поле силы тяжести.

Пусть несжимаемая жидкость (например, вода) находится в поле сил тяжести,  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g}$ , плотность жидкости  $\rho = \text{const}$ . Для расчета распределения давлений удобно направить ось  $x$  вдоль силы тяжести, совместив начало оси

со свободной поверхностью жидкости. Поскольку потенциальную функцию можно записать в виде  $U(x) = -\rho gx$  (нормировка потенциала такова, что  $U(0)=0$ ), то распределение давлений по глубине определяется из соотношения

$$p(x) - \rho gx = \text{const} . \quad (2.10)$$

Константа определяется из условия равенства давления на поверхности воды атмосферному давлению  $p_0$ . Следовательно,

$$p(x) = p_0 + \rho gx . \quad (2.11)$$

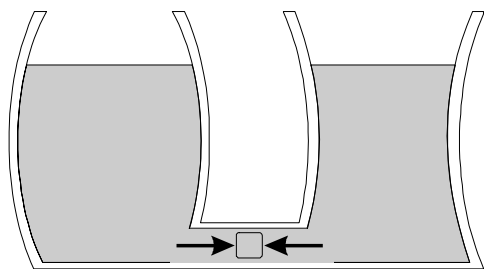


Рис. 2.3

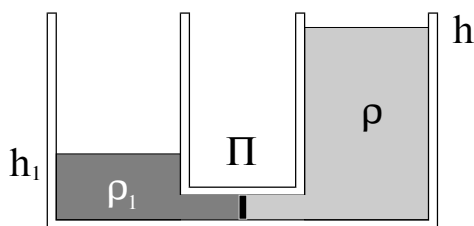


Рис. 2.4

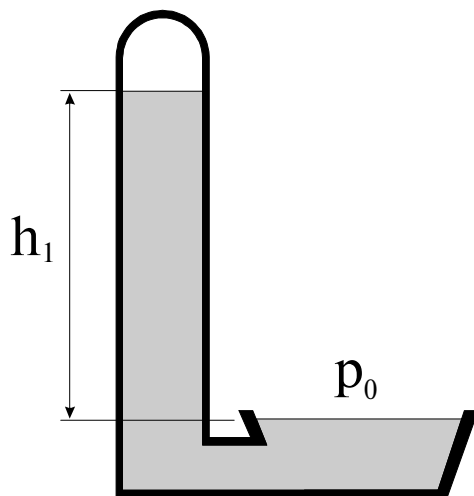


Рис. 2.5

Если принять атмосферное давление  $p_0 \approx 10^5$  Па, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, то из (2.11) легко подсчитать, что с увеличением глубины на каждые 10 метров ( $\Delta x = 10$  м) давление увеличивается на величину атмосферного давления ( $\Delta p = p_0$ ). Важно отметить, что возрастание давления с глубиной не зависит от формы сосуда, в который налита жидкость. Яркой иллюстрацией справедливости этого утверждения является одинаковость уровней жидкости в двух сообщающихся сосудах произвольной формы (рис. 2.3). Действительно, равенство двух горизонтальных сил давления, обеспечивающих равновесие кубика жидкости в нижней части сообщающихся сосудов, возможно лишь при равенстве высот столбов воды в обоих сосудах.

Модифицируем эксперимент с сообщающимися сосудами. Пусть оба колена U-образного сосуда (рис. 2.4) разделены подвижной перегородкой П, при этом правое колено заполнено водой, а левое - ртутью, плотность которой  $\rho_1$  более чем в 10 раз превышает плотность воды  $\rho$  ( $\rho_1 = 13,6\rho$ ). Очевидно, равновесие в этой ситуации достигается при высоте столба

ртути  $h_1 = \frac{\rho}{\rho_1} h$ , значительно мень-

шей высоты  $h$  столба воды. Уместно помнить, что столб ртути высотой  $h_1 = 760$  мм уравнивает давление десятиметрового столба воды, или почти десятикилометрового столба ат-

мосферы. Поэтому для измерения атмосферного давления используют ртутные манометры, а атмосферное давление измеряют в миллиметрах ртутного столба. Такой манометр представляет собой два сообщающихся сосуда, заполненных ртутью. Один из сосудов в виде тонкой трубки запаян сверху и из него удален воздух, а второй сообщается с атмосферой (рис. 2.5).

Если измеряемые давления на 1-2 порядка меньше атмосферного давления, то можно использовать и водяные манометры (см. последующие лекции).

Завершая описание равновесия жидкости, отметим, что в Мировом океане из-за больших глубин формула (2.11) нуждается в уточнении, т.к. плотность увеличивается с глубиной. За исключением нескольких особых мест она может меняться в зависимости от географического положения в пределах 2% от постоянной величины  $\rho = 1035 \text{ кг/м}^3$ . Обычно изменения плотности обусловлены колебаниями температуры и солености воды.

### Жидкость в неинерциальных системах отсчета.

При ускоренном движении сосуда с жидкостью наряду с силой тяжести на частицы жидкости действуют силы инерции. Распределение давлений в покоящейся относительно сосуда жидкости легко определяется из (2.9), где под  $U$  следует понимать потенциальную энергию в поле сил тяжести и инерции.

Если сосуд с жидкостью движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением  $A$  (рис. 2.6), то потенциальная функция имеет вид

$$U(x, y) = -\rho gx - \rho Ay + \text{const} . \quad (2.12)$$

Следовательно, для двумерного распределения давлений  $p(x, y)$  с учетом нормировки  $p(0, 0) = p_0$  получаем

$$p(x, y) = p_0 + \rho gx + \rho Ay . \quad (2.13)$$

Очевидно, что поверхности равного давления (включая поверхность жидкости), перпендикулярные вектору полной силы  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} - \rho \mathbf{A}$ , будут наклонены к горизонту под углом

$$\alpha = \text{arctg} \frac{A}{g} . \quad (2.14)$$

При свободном падении сосуда (в условиях невесомости) давление во всех точках объема, как это следует из закона Паскаля, одинаково и равно внешнему давлению  $p_0$ . В невесомости вследствие действия сил поверхностного натяжения жидкость приобретает шарообразную форму, при которой площадь поверхности становится минимальной.

Пусть теперь цилиндрический сосуд с жидкостью равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси симметрии. Опыт показывает, что поверхность жидкости искривится так, как показано на рис. 2.7. Не представляет труда определить форму поверхностей равного давления. Поскольку наряду с силой тяжести в радиальном направлении действует и центробежная сила инерции  $F_{\text{и}} = \rho \omega^2 r$ , являющаяся также потенциальной, то потенциальная функция  $U$  имеет вид:

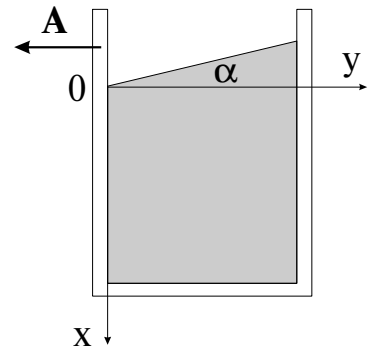


Рис. 2.6

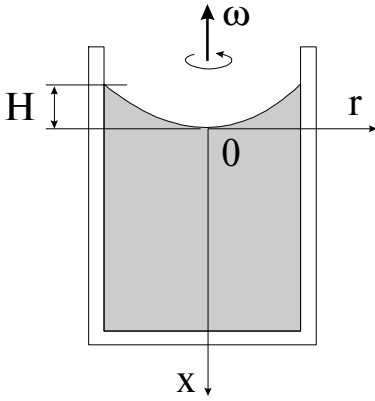


Рис. 2.7

$$U(x, r) = -\rho g x - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + \text{const}, \quad (2.15)$$

где  $r$  — расстояние от оси вращения. Тогда распределение давлений с использованием (2.9) получается равным

$$p(x, r) = p_0 + \rho g x + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2. \quad (2.16)$$

Легко видеть, что поверхности равно-го давления являются параболоидами вращения. В частности, поверхность жидкости, для которой  $p(x, r) = p_0$ , описывается уравнением

$$x = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2. \quad (2.17)$$

Если радиус сосуда равен  $R$ , то разность уровней на периферии и в его центре составляет величину

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}, \quad (2.18)$$

где  $v$  — скорость вращающихся частиц жидкости, прилегающих к стенке сосуда.

**Замечание.** Если сосуд вращать с угловым ускорением, то появится дополнительная составляющая сил инерции, перпендикулярная радиусу и равная  $F'_i = \rho r \frac{d\omega}{dt}$ . Эта сила не будет потенциальной, поскольку ее работа, например, вдоль окружности радиуса  $r_0$  отлична от нуля и равна

$$A_i = F'_i \cdot 2\pi r_0 = 2\pi r_0^2 \rho \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.19)$$

В силу этого равновесие жидкости невозможно: последняя будет вращаться относительно цилиндра, причем распределение скоростей и давлений можно получить, рассматривая уравнения гидродинамики, в которых должны быть учтены силы вязкости.

### Плавание тел. Закон Архимеда.

Из повседневной практики известно, что на тела, погруженные в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх. Эта сила является результатом действия сил давления  $\mathbf{f}_i = -p\mathbf{n}_i$  рис. (2.8) и равна

$$\mathbf{F}_A = \sum_i \mathbf{f}_i \Delta S_i = -\sum_i p_i \Delta S_i \mathbf{n}_i. \quad (2.20)$$

Здесь  $\Delta S_i$  — площадь элемента поверхности тела,  $\mathbf{n}_i$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности, суммирование производится по всем элементам поверхности.

Выталкивающая сила  $\mathbf{F}_A$ , называемая силой Архимеда, может быть подсчитана при учете распределения давления по глубине (2.11) и оказывается равной весу вытесненной жидкости. Предоставляя читателю сделать



такой подсчет самостоятельно, вычислим ее, исходя из более простых соображений. Извлечем из сосуда тело и дольем ту же жидкость, восстановив ее прежний уровень (рис. 2.9). Если затем мысленно выделить часть жидкости, замещающую извлеченное тело, то на нее действуют те же силы давления, что и на погруженное тело (см. формулу 2.20). Их сумма  $F_A$  не только уравнивает силу тяжести ( $F_A = -mg$ ,

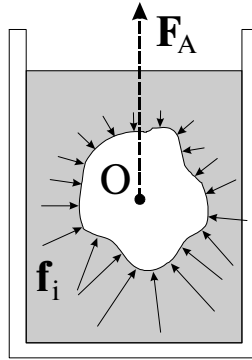


Рис. 2.8

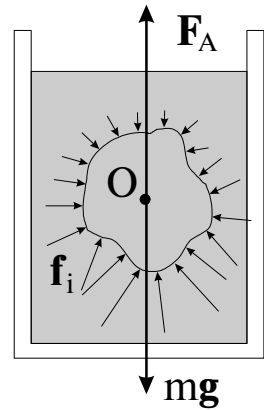


Рис. 2.9

$m$  - масса вытесненной жидкости), но и имеет равнодействующую, приложенную к центру масс вытесненной жидкости, или к центру объема  $O$ . Центр масс погруженного тела  $O_1$  может не совпадать с центром объема  $O$ . Это несовпадение имеет большое значение для устойчивого плавания тел, погруженных в жидкость (в кораблестроении используется термин остойчивость). На рис. 2.10 схематично изображено поперечное сечение батискафа, погруженного в воду, при этом его центр тяжести, к которому приложена сила тяжести  $m_1g$  ( $m_1$  - масса батискафа), находится ниже точки приложения Архимедовой силы. Естественно, что при боковом наклоне батискафа момент указанной пары сил будет возвращать его в вертикальное положение.

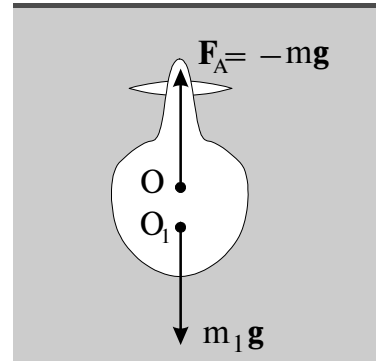


Рис. 2.10

Для тел, плавающих на поверхности жидкости, центр их тяжести всегда будет расположен выше центра объема, погруженного в жидкость, и остойчивость плавания (корабля, например) достигается выбором подобающей формы корабля и его загрузки. Хорошо известно, что карандаш никогда не плавает на поверхности жидкости в вертикальном положении. Пара сил, возникающая при неизбежном случайном отклонении карандаша от вертикали, немедленно “укладывает” его на поверхность (рис. 2.11а). Устойчиво будет плавать «горизонтальный карандаш». При его малейшем наклоне (ситуация б) он будет возвращаться в исходное горизонтальное положение. В судостроении форму судна с учетом его загрузки рассчитывают таким образом, чтобы метацентр  $M$  находился

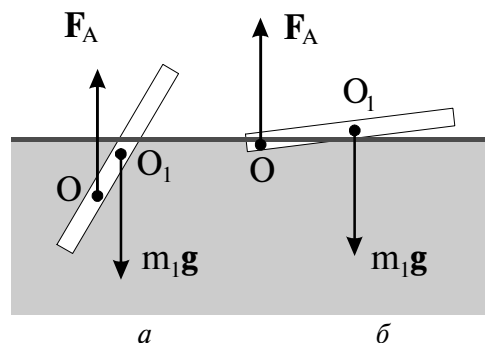


Рис. 2.11

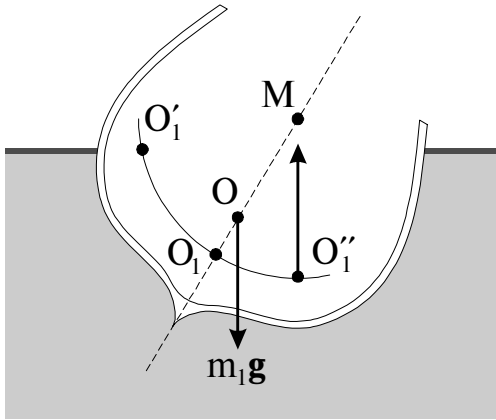


Рис. 2.12

выше центра масс судна в т. О. Этот метациентр является центром кривизны кривой  $O''_1O_1O'_1$ , проходящей через центры объемов погруженных частей корпуса корабля, сменяющих друг друга при его боковой качке (рис. 2.12). Из рисунка видно, что метациентр находится на пересечении плоскости симметрии судна с линией действия Архимедовой силы. При строительстве судов добиваются того, чтобы расстояние  $OM$  в несколько раз превышало расстояние  $OO_1$ .

Рассмотрение гидростатики несжимаемой жидкости было бы не полным, если бы мы не коснулись вопроса о силах давления, действующих на дно и стенки сосуда с жидкостью. Удобно это сделать, обратившись непосредственно к примерам.

**Пример 1.** Если в цилиндрический сосуд с площадью основания  $S$  налита вода, масса которой  $m$ , до уровня  $H$  (рис. 2.13а), то давление жидкости на дно сосуда (без учета силы атмосферного давления) приведет к возникновению силы  $F =$

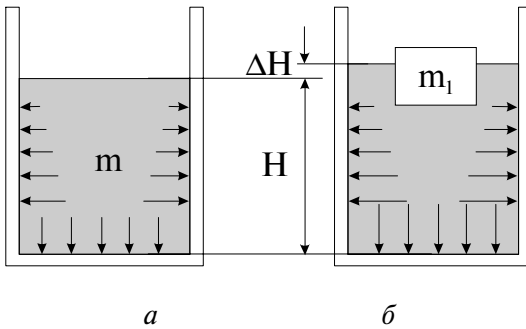


Рис. 2.13

$= pS = \rho gHS = mg$ , равной весу налитой жидкости. Если на поверхность жидкости опустить плавающее тело массы  $m_1$ , то давление на дно жидкости увеличится на величину  $\Delta p = \rho g\Delta H$ , где  $\Delta H$  — высота подъема уровня жидкости (рис. 2.13б). Дополнительная сила, приложенная ко дну,  $\Delta F =$

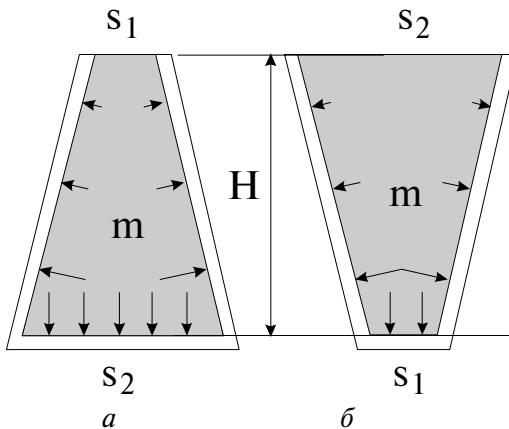


Рис. 2.14

$= \Delta p \cdot S = \rho g\Delta HS$ . Поскольку объем цилиндрического слоя  $\Delta H \cdot S$  равен объему погруженной части тела, то величина  $\Delta F$  равна силе Архимеда и, естественно,  $\Delta F = m_1g$ . Показания весов, на которые поставлен сосуд с водой, при помещении в него плавающего тела возрастут на эту величину.

**Пример 2.** Если два легких конических сосуда одинаковой высоты наполнить водой и расположить их так, как показано на рис. 2.14, то в ситуации (а) сила давления на дно сосуда с площадью сечения  $S_2$  будет

больше веса жидкости:  $\Delta F_2 = \rho g H S_2 > mg$ . В ситуации (б), наоборот,  $\Delta F_1 = \rho g H S_1 < mg$ . Между тем, при взвешивании сосудов весы покажут одинаковый результат. На первый взгляд, мы столкнулись с парадоксом. Парадокс, однако, разрешается просто, если мы примем во внимание, что весы измеряют силу давления сосуда на чашку весов, равную той силе, с которой жидкость действует на весь сосуд, включая действие на его наклонные боковые стенки. В обеих ситуациях сумма всех этих элементарных сил одинакова и равна весу жидкости  $mg$ .

**Равновесие сжимаемой жидкости.**

При внутренних напряжениях плотность газов не остается постоянной. Можно считать, что давление является функцией плотности ( $p = p(\rho)$ ), причем вид этой функции, как будет показано ниже, задается условиями, при которых находится газ. Поэтому в механике сплошных сред в этих случаях оперируют с плотностью силы  $\mathcal{F}$ , то есть с силой, приложенной к единице массы, которая связана с силой  $\mathbf{F}$  в (2.7) соотношением

$$\mathbf{F} = \rho \mathcal{F} . \quad (2.21)$$

Тогда условие равновесия (2.7) примет вид

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \mathcal{F} . \quad (2.22)$$

В левую часть этого равенства входят давление и плотность, являющиеся неизвестными функциями координат, а правая часть обычно известна.

В поле силы тяжести  $\mathcal{F} = \mathbf{g} = \text{const}$ . В этом случае поверхностями равных давлений и плотностей будут горизонтальные плоскости, две из которых  $p(x_1) = p_1$  и  $p(x) = p$  изображены на рис. 2.15. Если мы введем вспомогательную функцию

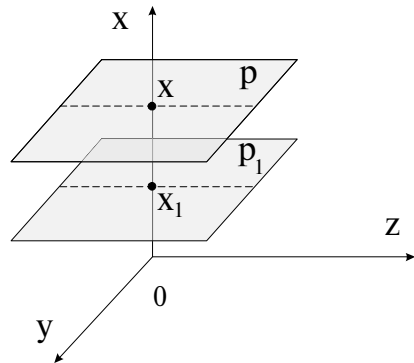


Рис. 2.15

$$p(x) = \int_{p_1}^p \frac{dp}{\rho} , \quad (2.23)$$

то (2.22) может быть переписано в виде, аналогичном (2.7):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx} = \mathcal{F} . \quad (2.24)$$

Вводя далее для единицы массы потенциальную энергию  $U_1$ , с которой внешняя сила связана соотношением

$$\mathcal{F}(x) = - \frac{dU_1}{dx} , \quad (2.25)$$

получаем уравнение, аналогичное (2.9):

$$\frac{d}{dx} (p + U_1) = 0 , \text{ или } p + U_1 = \text{const} . \quad (2.26)$$

**Замечание.** Вспомогательная функция  $\rho(x)$  зависит от верхнего предела  $p$  интеграла (2.23), вычисление которого возможно при известной связи между давлением и плотностью. С другой стороны, если найти зависимость  $\rho(x)$  (с помощью (2.24) или (2.26)), то можно определить функцию  $p(x)$  в (2.23), что позволяет получить распределение давлений.

Очевидно, что поверхности равного значения величины  $\rho$  совпадают с поверхностями равного давления. В задачах с трехмерным распределением давления и плотности вспомогательная функция

$$\rho(x, y, z) = \int_{p_1}^{p(x,y,z)} \frac{dp}{\rho}, \quad (2.27)$$

а условие равновесия имеет вид

$$\text{grad } p = \mathcal{F}. \quad (2.28)$$

Поскольку сила  $\mathcal{F}$  связана с потенциальной энергией единицы массы соотношением

$$\mathcal{F} = -\text{grad } U_1, \quad (2.29)$$

то подстановка (2.29) в (2.28) дает условие

$$\text{grad } (p + U_1) = 0, \text{ или } p + U_1 = \text{const}. \quad (2.30)$$

Следует отметить, что условие равновесия (2.28) является более общим, чем (2.7), т.к. позволяет рассчитать распределение давлений как в жидкостях, так и в газах.

### Атмосфера в поле силы тяжести.

Многочисленные исследования атмосферы, проведенные при помощи аэростатов (см. ниже), ракет и искусственных спутников Земли, показывают, что по мере увеличения высоты давление и плотность монотонно убывают, а температура монотонно убывает лишь в нижнем 10-километровом слое, а в более высоких слоях меняется немонотонно. Параметры атмосферы зависят как от географического положения места, так и от времени года. В качестве иллюстрации к сказанному на рис. 2.16 представлены высотные зависимости параметров среднестатистической атмосферы Москвы, полученные в летнее и зимнее время. Если разница в высотных зависимостях температуры атмосферы составляет десятки градусов, то распределение «зимнего» давления отличается от «летнего» всего лишь на несколько процентов, и на рисунке эта разница неразличима.

Сложная высотная зависимость температуры атмосферы есть результат совместного проявления процессов тепломассопереноса, инициируемых излучением Солнца. Расчеты показывают, что если бы атмосфера и Мировой океан, называемые жидкой оболочкой Земли, не поглощали бы энергию солнечного излучения, то Земля нагрелась бы на экваторе до 270 К, на Южном полюсе — до 150 К и на Северном полюсе — до 170 К. При таких температурах установилось бы радиационное равновесие: нагретая Земля излучала бы в мировое пространство столько энергии, сколько получает от Солнца. Однако поверхность Земли значительно теплее, а контраст температур между экватором и полюсом намного меньше. Это — результат поглощения солнечной энергии самой атмосферой. Кроме того, атмосфера и океан переносят тепло от одной области к другой, что также влияет на энергетический баланс.

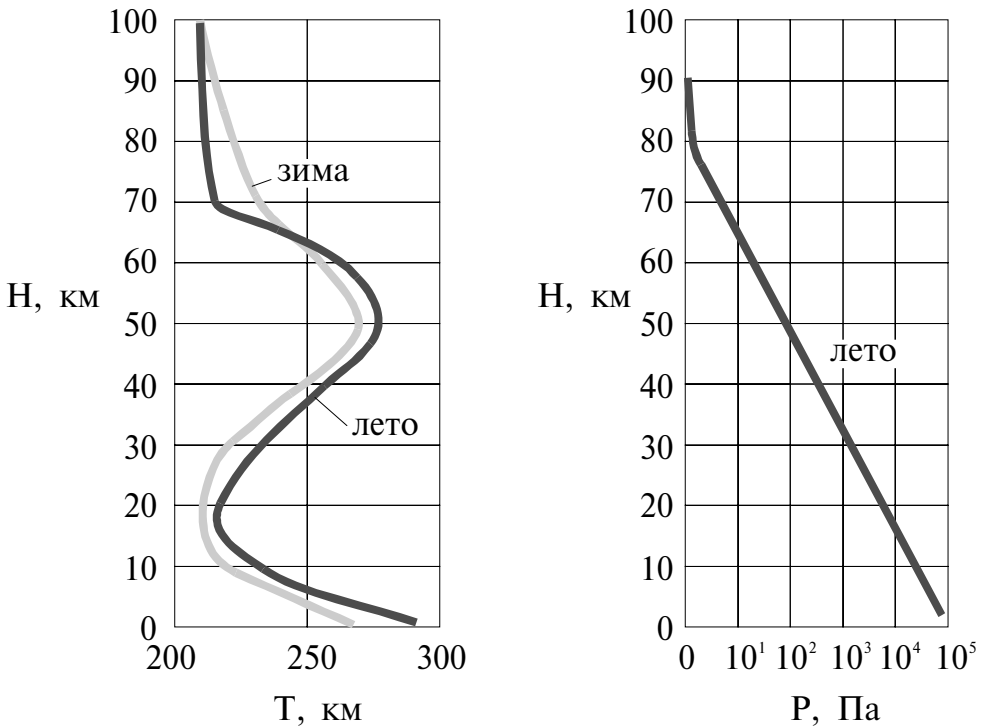


Рис. 2.16

Поглощение солнечной энергии осуществляется главным образом водяным паром, углекислым газом и озоном, вследствие чего создается «парниковый эффект», приводящий к дополнительному нагреванию поверхности Земли. Поскольку воздух вблизи поверхности более теплый и легкий, чем воздух сверху, то он всплывает вверх (вертикальная конвекция), и нижний слой атмосферы перемешивается. Поэтому распределение температуры, изображенное на рис. 2.16, является результатом динамического равновесия атмосферы в поле силы тяжести, при котором соблюдается баланс энергии. Радиационное равновесие можно рассчитать, если принять во внимание, что в нижнем слое атмосферы основным физическим фактором, отвечающим за достижение равновесия, является поглощение радиации водяным паром. На больших высотах доминирующим является поглощение углекислым газом и озоном.

Атмосфера делится на отдельные участки, как это видно из рис. 2.16. Нижний слой атмосферы, называемый тропосферой, содержит 80% массы атмосферы, почти весь водяной пар и облака и характеризуется сильным вертикальным перемешиванием. Сверху тропосфера ограничена тропопаузой, где температура атмосферы меняется очень мало. Выше расположена стратосфера, которая слабо перемешивается. Ее устойчивость обуславливается повышением температуры с высотой в результате радиационного баланса. Возрастание температуры заканчивается в стратопаузе. Выше находится мезосфера, где температура опять падает. Мезосфера содержит лишь 0,1% массы всей атмосферы. Выше мезосферы ( $H > 100$  км) находится термосфера, в которой температура опять растет с высотой, достигая 600 К в период спокойного Солнца и более 2000 К в период солнечной активности.

Для вычисления изменения атмосферного давления с высотой воспользуемся условием равновесия (2.24) в виде:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -g. \quad (2.31)$$

Связь между давлением и плотностью для сухого воздуха задается уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho \frac{RT}{\mu}. \quad (2.32)$$

Справедливость использования этого уравнения обусловлена тем, что влияние влажности на плотность воздуха существенно лишь в тропиках вблизи поверхности Земли, однако даже здесь ошибка при использовании (2.32) не превосходит 2%. Подставляя значение плотности  $\rho$  из (2.32) в (2.31), получаем уравнение

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = - \frac{g}{RT(x)}, \quad (2.33)$$

которое можно проинтегрировать, если известна  $T(x)$ .

В качестве грубого приближения в (2.33) можно использовать среднее значение температуры  $\bar{T} = 250 \text{ K}$ , при этом отклонение максимальной температуры у поверхности или минимальной температуры на высоте  $H = 100 \text{ км}$  от среднего значения составляют около 15%. Интегрируя (2.33), получаем распределение давления изотермической атмосферы

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g x}{R\bar{T}}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{x}{H_0}\right), \quad (2.34)$$

носящее название барометрической формулы. Высота  $H_0$ , на которой давление падает в  $e$  раз, называется приведенной высотой атмосферы и равна:

$$H_0 = \frac{R\bar{T}}{\mu g} = 7,4 \text{ км}. \quad (2.35)$$

Отметим, что если бы плотность не менялась с высотой ( $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ), то интегрирование (2.31) привело бы к линейному (как для несжимаемой жидкости) закону убывания давления с высотой:

$$p(x) = p_0 - \rho_0 g x = p_0 \left(1 - \frac{x}{H_0}\right). \quad (2.36)$$

В этом случае вся атмосфера была бы ограничена высотой  $H_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} = 8,4 \text{ км}$ ,

что, конечно, противоречит реальной ситуации.

Для практических целей используются унифицированные атмосферные параметры и их высотные зависимости. Так, Международная организация гражданской авиации (МОГА) для нужд авиации определила в 1952 г. стандартную атмосферу до высоты 20 км, а в 1963 г. дала новое определение до высоты 32 км. Стандартная атмосфера есть условная атмосфера, для которой давление и температура на уровне моря, градиент температуры и другие значения были выбраны намеренно так, чтобы получить схематичную модель атмосферы, которая наилучшим образом согласуется со средними значениями ее параметров, наблюдаемыми на средних широтах. Эта модель, в частности, широко используется для градуирования альтиметров (приборов для определения высоты летательного ап-

парата). В этой модели принимается, что до высоты  $h = 11000$  стандартных геопотенциальных метров над уровнем моря, где температура воздуха равна  $-56,5^{\circ}\text{C}$ , градиент температуры  $dT/dh$  равен  $-0,0065^{\circ}\text{C}$  на стандартный геопотенциальный метр. До высоты  $20000$  стандартных геопотенциальных метров  $dT/dh=0$ , а выше, вплоть до  $32000$  стандартных геопотенциальных метров, градиент температуры равен  $+0,001^{\circ}\text{C}$  на стандартный геопотенциальный метр.

Геопотенциальный метр является единицей измерения геопотенциала, определяемого уравнением

$$h = \frac{1}{9,8} \int_0^x g(x) dx, \quad (2.37)$$

где ускорение свободного падения

$$g(x) = g \frac{R_3^2}{(R_3 + x)^2}. \quad (2.38)$$

Здесь  $R_3$  — радиус Земли,  $g$  — ускорение свободного падения на среднем уровне моря,  $x$  — высота над уровнем моря. Если бы ускорение  $g$  не менялось с высотой, то высота  $h$  в геопотенциальных метрах была бы равна геометрической высоте над уровнем моря  $x$ .

В модели стандартной атмосферы соотношения между давлением  $p$ , температурой  $T$ , плотностью  $\rho$  и геопотенциалом  $h$  задаются следующим образом:

1) В двух атмосферных слоях с постоянным градиентом температур

$$T(h) = T(0) + \frac{dT}{dh} h,$$

$$\frac{p(h)}{p(0)} = \left( \frac{T(0)}{T(0) + \frac{dT}{dh} h} \right)^{\frac{G\mu}{R(dT/dh)}}. \quad (2.39)$$

2) В изотермическом атмосферном слое, где  $dT/dh = 0$  и  $T(0) = \text{const}$ ,

$$\frac{p(h)}{p(0)} = e^{-\frac{\mu Gh}{RT(0)}}, \quad (2.40)$$

и работает барометрическая формула.

Здесь  $p(0)$  и  $T(0)$  — давление и температура у основания каждого слоя,  $R$  — универсальная газовая постоянная для сухого воздуха,  $h$  — разница геопотенциала между рассматриваемой точкой слоя и его основанием,  $\mu$  — молекулярная масса сухого воздуха, коэффициент  $G = 9,80665$ , если геопотенциал выражен в геопотенциальных метрах. Учет изменения температуры с высотой приводит к высотной зависимости давления (2.39), которая является лучшей аппроксимацией реальной атмосферы, чем барометрическая формула.

Для более глубокого ознакомления с использованием модели стандартной атмосферы для практических целей воздухоплавания и др. рекомендуем читателю обратиться к международным метеорологическим таблицам.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Международные метеорологические таблицы. I - II серии. ВМО - №188 TP.94. Секретариат Всемирной метеорологической организации. Женева - Швейцария. Обнинск, 1975 г., 262 с.

**Воздухоплавание.**

Обратим внимание на тот факт, что плотность атмосферы на уровне стратопазы уменьшается приблизительно на 5 порядков, однако этого оказывается достаточно, чтобы осуществить воздухоплавание с применением аэростатов и стратостатов вплоть до высот  $\sim 50$  км.

Аэростаты — летательные аппараты легче воздуха. Они поддерживаются в воздухе благодаря подъемной силе заключенного в оболочке аэростата газа с плотностью, меньшей плотности воздуха (водород, гелий, светильный газ). Аэростаты, предназначенные для полетов в стратосферу, называются стратостатами.

Аэростаты делятся на управляемые, или дирижабли, снабженные двигателями, и неуправляемые. Неуправляемые аэростаты используются для свободных полетов по ветру (свободные аэростаты). Они также могут «висеть» неподвижно в атмосфере, если их присоединить тросом к закрепленной на земле лебедке (привязные аэростаты).

Конструкция аэростата (рис. 2.17) включает оболочку (1), содержащую легкий газ, гондолу (2) для размещения экипажа и аппаратуры и подвеску (3), крепящую гондолу к оболочке. Для подъема на большие высоты объем оболочки должен составлять  $100000\text{--}800000\text{ м}^3$ . Оболочка аэростата изготавливается из специальных газодержащих полотнищ и меридиональных усилительных лент.

Подъемная сила  $1\text{ м}^3$  водорода у земной поверхности равна приблизительно  $1,15\text{ кГ}$ , а более тяжелого, но безопасного, гелия —  $1\text{ кГ}$ . Это означает, что если вес оснащенного аэростата равен 1 тонне, то в оболочку достаточно закачать  $>1000\text{ м}^3$  гелия, и аэростат взлетит. Избыток подъемной силы

уравновешивают балластом. Заметим, что оболочка заполняется лишь частично, и это позволяет защитить ее от перенапряжения. При подъеме по мере уменьшения давления атмосферы легкий газ в оболочке расширяется. Хотя подъемная сила каждого кубического метра газа в оболочке и падает, однако подъемная сила оболочки остается постоянной. На некоторой высоте легкий газ займет весь объем оболочки, и последняя примет шарообразную форму. При дальнейшем подъеме часть легкого газа будет выходить через открытый рукав (4), и подъемная сила аэростата будет уменьшаться. Подъем будет продолжаться до тех пор, пока не уравниются вес и подъемная сила аэростата. Максимальная высота полета достигается сбрасыванием балласта.

Для спуска открывается газовый клапан (5) в верхней части оболочки. Подъемная сила падает, и аэростат опускается. Поскольку давление атмосферы начинает расти, то оболочка снова теряет форму шара. При приземлении масса легкого газа всегда меньше его начальной массы. Чтобы предотвратить удар гондолы о землю из-за падения подъемной силы, необходимо перед посадкой уменьшить массу аэростата. Это достигается выбрасыванием остающегося балласта.

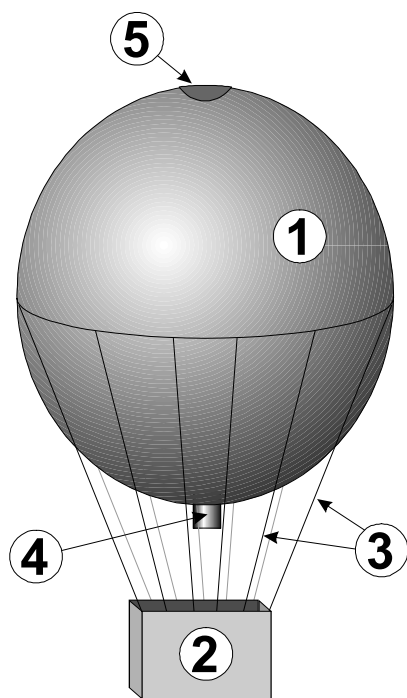


Рис. 2.17



С помощью высотных аэростатов осуществляются многочисленные научные исследования. Развитие техники аэростатных исследований связано с оперативностью проведения научных работ и их сравнительно небольшой стоимостью. Круг научных задач, решаемых при этом, очень широк: физика Солнца и межпланетной среды,  $\gamma$ -астрономия и другие астрофизические исследования, физика космических лучей, процессы в атмосфере Земли и др.

В развитых странах расчет, конструирование и производство аэростатов имеют высокую степень компьютеризации и автоматизации. Производство аэростатных оболочек осуществляется «на заказ» под заданную массу полезного груза. Рядовыми являются полеты аэростатов с оболочками нулевого давления с объемами 350000—850000 м<sup>3</sup> и массой полезного груза 500—900 кг на высотах 38—43 км и продолжительностью полета до 100 часов. Современные аэростаты способны летать на высотах примерно 50 км (рекордная высота составляет 51,7 км), грузоподъемность их достигает нескольких тонн, продолжительность полета — 10÷15 суток.

### Центрифугирование.

В соответствии с барометрической формулой плотность изотермической атмосферы также убывает с высотой по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g x}{RT}}. \quad (2.41)$$

Последняя формула дает распределение средней плотности атмосферы, состоящей из различных газов. Если говорить о парциальной плотности различных компонент, то плотность более тяжелых кислорода O<sub>2</sub> ( $\mu = 32$  г/моль) и азота N<sub>2</sub> ( $\mu = 28$  г/моль) убывает с высотой быстрее, чем плотность легкого гелия He ( $\mu = 2$  г/моль). Это наводит на мысль о возможности разделения легких и тяжелых газов в силовом поле. Наиболее успешно это можно осуществить в быстро вращающихся вокруг вертикальной оси барабанах (центрифугах), заполненных смесью газов. Для расчета парциального давления и плотности каждого газа в центрифуге воспользуемся равенством (2.30). Потенциальная энергия единицы массы в поле центробежной силы и силы тяжести равна:

$$U_1(x, r) = -gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2. \quad (2.42)$$

При постоянной температуре  $T = \text{const}$

$$p = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{RT}{\mu} \ln \frac{p}{p_0}, \quad (2.43)$$

где  $p_0$  — давление газа в некоторой точке на оси барабана. Тогда из условия равновесия (2.30) находим

$$p(x, r) = p_0 e^{\frac{\mu}{RT}(-gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2)}. \quad (2.44)$$

Как видно из (2.44), поверхностями равного давления будут параболоиды вращения, при этом  $p_0$  — это давление на единственном параболоиде вращения, для которого

$$-gx + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = 0. \quad (2.45)$$

Когда барабан современной центрифуги быстро вращается, совершая  $\sim 10^5$  оборотов в минуту, то центробежная сила превосходит силу тяжести также в несколько сот тысяч раз, и

$$p(r) \cong p(0)e^{\frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT}}. \quad (2.46)$$

Смесь на периферии будет обогащаться тяжелой компонентой, так как плотность  $\rho$  пропорциональна давлению. Однако, при малой молярной массе разделение газов посредством центрифугирования не будет эффективным. На практике центрифуги применяют для разделения газообразных соединений изотопов урана, тяжелых молекул (например, белковых молекул,  $\mu \sim 10^4$  г/моль) и других объектов, являющихся предметом изучения биологии и химии.

### Торнадо.

Вращение атмосферы имеет место и в естественных условиях. Наиболее впечатляющим примером такого движения является торнадо. Торнадо представляет собой близкий к вертикали вихрь, в котором воздух, вращаясь, одновременно движется к оси вихря и вверх вдоль нее. Вблизи от вихря (в ядре) давление сильно понижено; это заставляет воздух в слое высотой несколько десятков метров вблизи поверхности Земли устремляться в нижнюю часть вихря. Достигнув его края, воздух начинает подниматься вверх по спирали, пока в верхней части торнадо не сливается с воздушными потоками.

По своей природе торнадо — это продукт взаимодействия сильной грозы с ветром в тропосфере. В процессе образования торнадо часть громадной энергии грозового облака концентрируется в объеме воздуха диаметром не более нескольких сотен метров. Сильная гроза обеспечивает вертикальный подсос воздуха. В самом деле, теплые массы воздуха под действием архимедовой силы могут всплывать вверх. Однако при всплытии из-за падения давления движущиеся вверх массы будут расширяться и охлаждаться. В тропосфере температура может уменьшаться с высотой быстрее, чем охлаждается поднимающийся объем воздуха. Это означает, что атмосфера будет неустойчива, и в ней имеет место свободная вертикальная конвекция.

Ветер с возрастающей с высотой скоростью

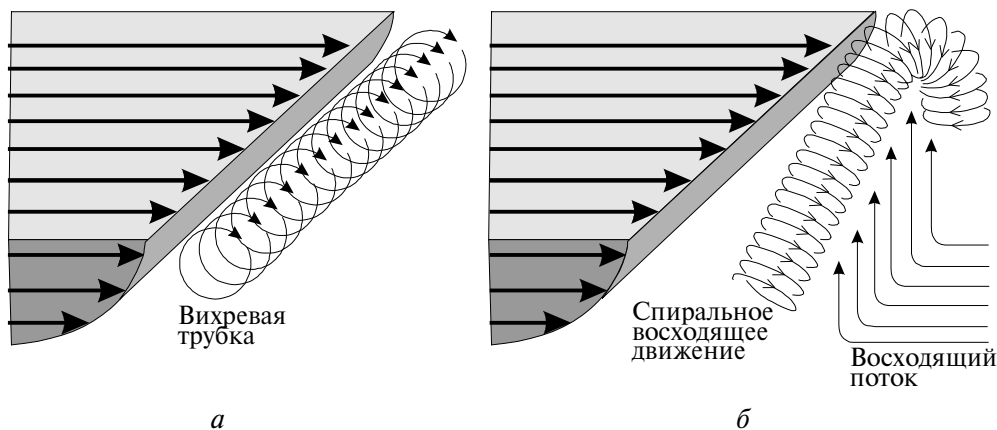


Рис. 2.18

Последняя усиливается в грозовую погоду при возрастании вертикального перепада температур. Однако, для того, чтобы поднимающийся воздух начал вращаться, необходим боковой ветер с возрастающей с высотой скоростью. Вертикальный градиент скорости ветра является причиной вращения воздуха вокруг горизонтальной оси (рис. 2.18а), а наличие вертикального движения воздуха приводит к его спиральному движению (рис. 2.18б).

Согласно современным представлениям, образование торнадо происходит в две ступени. Вначале начинает закручиваться весь столб восходящего воздуха диаметром около 10—20 км, называемый мезоциклоном. Мезоциклон с пониженным давлением на его оси подобен рукаву пылесоса (рис. 2.19). Воздух в приземном слое начинает засасываться в этот мезоциклон, при этом его скорость под вращающимся столбом достигает 100—120 км/ч.

На второй стадии по причинам, которые еще не поняты, внутри мезоциклона, ближе к его периферии, образуется область с диаметром не более одного километра, в которой на высотах порядка нескольких километров происходит усиление вращения (рис. 2.19). Затем это быстрое вращение передается вниз, вихревая трубка вытягивается почти до Земли, «повисая» лишь в нескольких десятках метров над ней. Это и есть торнадо. Вертикальная скорость воздуха на оси торнадо может достигать величины 300 км/ч. Из-за взаимодействия сильного ветра с поверхностью Земли торнадо часто ревут, как реактивный двигатель. На протяжении короткой, не более нескольких часов, жизни торнадо обладает огромной разрушительной силой, сметая все на своем пути.

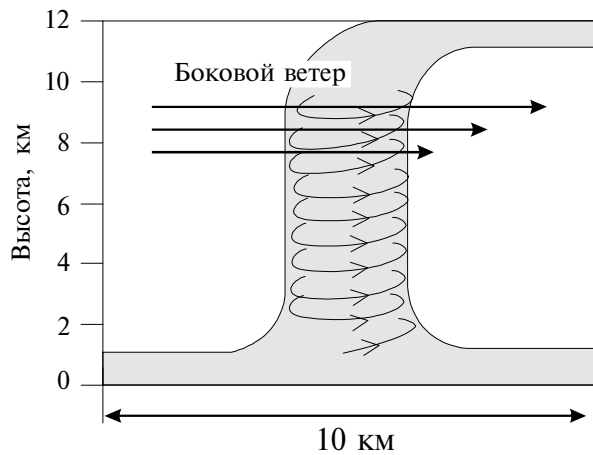


Рис. 2.19

Торнадо зарегистрированы во многих районах мира, однако излюбленное место их обитания — это центральные и юго-восточные области США, а также Австралия. В этих районах весной и несколько реже осенью создаются все условия для возникновения сильнейших гроз, порождающих торнадо. К этим условиям относятся крайне неустойчивое распределение температуры и влажности в атмосфере, резкие холодные атмосферные фронты, обеспечивающие эффективный подъем воздуха, и высотные ветры, способствующие образованию мезоциклонов.

## ЛЕКЦИЯ 3

*Стационарное течение жидкости. Условие несжимаемости. Уравнение Бернулли и его следствия. Понятие о дивергенции вектора. Уравнения Эйлера. Течение сжимаемых газов. Распространение возмущений. Скорость звука. Сверхзвуковые потоки.*

**Стационарное одномерное течение несжимаемой жидкости.**

Равновесие жидкостей и особенно газов, рассмотренное в предыдущей лекции, реализуется далеко не всегда. Обычно жидкость при внешнем воздействии приходит в движение, при этом давление в жидкости и скорость ее частиц, вообще говоря, могут сложным образом меняться от точки к точке.

Поясним сказанное примером. Подключим горизонтальную стеклянную трубку переменного сечения при помощи резинового шланга к водопроводному крану (рис. 3.1). Если напор воды остается постоянным, то течение воды можно считать установившимся (или стационарным). В этом случае масса воды  $m$ , протекающая в единицу времени через сечения с площадями  $S_1$  и  $S_2$ , будет одинаковой, поэтому имеет место равенство

$$m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (3.1)$$

где  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $v_1$ ,  $v_2$  — плотности и скорости жидкости в этих сечениях. Если жидкость несжимаема ( $\rho_1 = \rho_2$ ), то условие (3.1) переходит в условие постоянства объема жидкости (условие несжимаемости), протекающего через сечения  $S_1$  и  $S_2$ :

$$V = v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (3.2)$$

Следует отметить, что условия постоянства массы (3.1) и несжимаемости жидкости (3.2) записаны для случая, когда скорости всех частиц жидкости в поперечном сечении трубки одинаковы.

Для графического изображения течения жидкости удобно использовать линии тока — линии, касательная к которым в каждой точке совпадает с вектором скорости частицы (рис. 3.2). Легко видеть, что в сечении  $S$  скорости частиц различны, и объем протекающей жидкости через это сечение не может быть записан в виде (3.2).

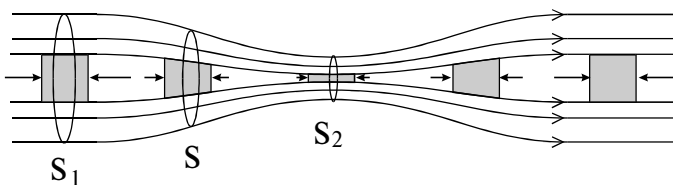


Рис. 3.2

Далее отметим, что по мере приближения к малому сечению  $S_2$  частица, деформируясь, ускоряется (в силу 3.2), а при удалении от  $S_2$  — замедляется. Эти ускорения мо-

гут обеспечить силы давления  $\mathbf{f}_i = -p_i \mathbf{n}$ , показанные на рис. 3.2 маленькими стрелками. Из рисунка ясно, что по мере приближения к  $S_2$  давление в жидкости падает, а затем возрастает.

Это легко проверить, если сравнить уровни  $h_1$  и  $h_2$  жидкости в манометрических стеклянных трубках, впаянных в горизонтальную трубку вблизи сечений  $S_1$  и  $S_2$ . Поскольку  $p_1 = \rho g h_1$ ,  $p_2 = \rho g h_2$ , то  $p_1 > p_2$ , так как  $h_1 > h_2$ . На рис. 3.3 изображено распределение скоростей и давлений вдоль оси трубки (см. рис. 3.2).

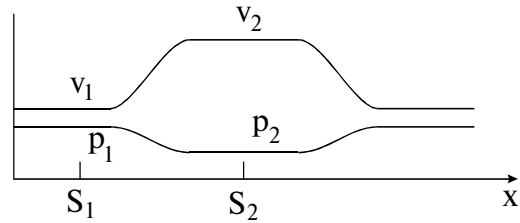


Рис. 3.3

Для количественного описания течения жидкости разобьем поток жидкости по трубе на элементарные трубки тока, образуемые семейством линий тока. В поперечном сечении элементарной трубки тока скорость частиц приблизительно одинакова, и это обстоятельство существенно облегчает анализ течения жидкости.

Найдем связь между скоростью и давлением, качественно отображенную на рис. 3.3. При движении частиц воды вдоль осевой трубки сумма сил, приложенных к единице объема (см. (2.5)), обеспечивает его ускорение. В соответствии со 2-м законом Ньютона можно записать

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (3.3)$$

где  $F_x$  — плотность силы, имеющая размерность Н/м<sup>3</sup>.

Отметим, что в уравнение (3.3) не входят силы вязкого трения, зависящие от скорости движения элемента жидкости. Впоследствии мы учтем их влияние и выясним условия, при которых ими можно пренебречь. Изменение скорости частицы  $dv_x$  и связанное с ним ускорение может происходить и при стационарном движении частицы от широкого сечения к узкому (или наоборот), и при нестационарном изменении скорости течения (например, при медленном увеличении или ослаблении напора воды). Поэтому в общем случае скорость частиц является функцией не только координаты  $x$ , но и времени  $t$ :

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx, \quad (3.4)$$

где  $dx = v_x dt$  — расстояние, пройденное частицей за время  $dt$ . Подставляя (3.4) в (3.3), получаем уравнение Эйлера

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \quad (3.5)$$

описывающее одномерное течение несжимаемой невязкой жидкости. При стационарном течении жидкости по горизонтальной трубе скорость не зависит от

времени  $\left( \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \right)$ , внешние силы отсутствуют ( $F_x = 0$ ). В этом случае уравнение Эйлера принимает простой вид

$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx}. \quad (3.6)$$

Здесь вместо  $\partial / \partial x$  используется символ полной производной  $d/dx$ .

Учитывая, что  $v_x \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{v_x^2}{2} \right)$ ,  $\rho = \text{const}$ , перепишем (3.6) в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho v_x^2}{2} + p \right) = 0, \text{ или } \frac{\rho v_x^2}{2} + p = \text{const}. \quad (3.7)$$

Равенство (3.7), устанавливающее связь между давлением и скоростью, является частным случаем уравнения Бернулли. Константа, входящая в это уравнение, определяется из значений давления и скорости в каком-либо сечении трубки тока.

Используя это уравнение, определим массу воды (расход), проходящую за единицу времени через сечение трубки, изображенной на рис. 3.2. В соответствии с уравнением (3.7) давления и скорости в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  связаны соотношением

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (3.8)$$

Искомый расход воды определяется равенством (3.1):

$$m = \rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2. \quad (3.9)$$

Поскольку давления  $p_1 = \rho g h_1$  и  $p_2 = \rho g h_2$  определяются по показаниям  $h_1$  и  $h_2$  манометрических трубок, то решая систему уравнений (3.8) и (3.9) относительно  $m$ , находим

$$m = \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{S_2^{-2} - S_1^{-2}}}. \quad (3.10)$$

Для измерения расхода воды на практике применяются водомеры, основу которых составляет труба переменного сечения, оснащенная манометрами для измерения давлений  $p_1$  и  $p_2$  в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ .

### Течение жидкости в поле силы тяжести. Уравнение Бернулли.

Рассмотрим задачу о течении жидкости вдоль произвольных трубок тока, которые могут составлять некоторый переменный угол с горизонтом. Одна из таких криволинейных трубок показана на рис. 3.4. Если ввести криволинейную координату  $\ell$ , совпадающую с осью трубки тока, то при стационарном течении скорость и давление жидкости являются функциями этой координаты. Проектируя силу тяжести на ось  $\ell$ , запишем уравнение Эйлера (3.5) в виде:

$$\rho v \frac{dv}{d\ell} = -\frac{dp}{d\ell} + \rho g \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Здесь  $v$  — скорость частиц на оси трубки.

Если элемент жидкости сместился вниз на расстояние  $d\ell$ , то он опустился на высоту  $dh < 0$ , при этом

$\cos \alpha = -\frac{dh}{d\ell}$ . Подставляя значение  $\cos \alpha$  в (3.11) и используя тождество

$$v \frac{dv}{d\ell} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\ell} v^2, \text{ находим}$$

$$\rho \frac{d}{d\ell} \frac{v^2}{2} + \frac{dp}{d\ell} + \rho g \frac{dh}{d\ell} = 0. \quad (3.12)$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$ , и последнее равенство трансформируется к виду

$$\frac{d}{d\ell} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh \right) = 0. \quad (3.13)$$

Интегрируя (3.13) вдоль трубки тока, получаем уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const}. \quad (3.14)$$

Это уравнение описывает стационарное течение несжимаемой жидкости (иногда употребляют термин «идеальная жидкость») и играет фундаментальную роль в гидродинамических исследованиях. Если нам известны давление  $p_1$  и скорость  $v_1$  в некотором сечении трубки тока, находящемся на высоте  $h_1$ , то в любом другом сечении на высоте  $h$  величины  $p$  и  $v$  связаны соотношением

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1. \quad (3.15)$$

Давление  $p$  — это статическое давление, измеряемое манометром, трубка которого ориентирована перпендикулярно линии тока, либо движущимся вместе с жидкостью. Величина  $\frac{\rho v^2}{2}$

называется динамическим давлением, смысл которого будет раскрыт позднее. Заметим, что в покоящейся жидкости равенство (3.15) описывает гидростатическое распределение давлений.

Уравнение Бернулли может быть также получено на основе баланса энергии. В отсутствие сил вязкости приращение суммарной (потенциальной и кинетической) энергии массы воды, находящейся в трубке тока между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 3.5), равно работе сил давления. Из

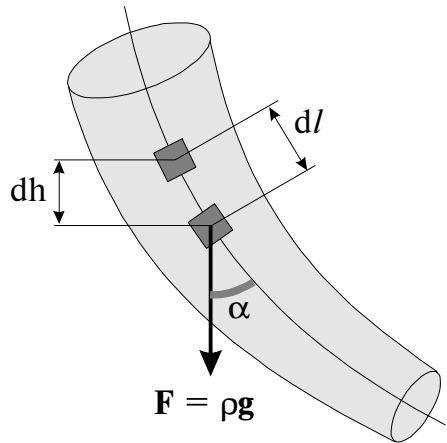


Рис. 3.4

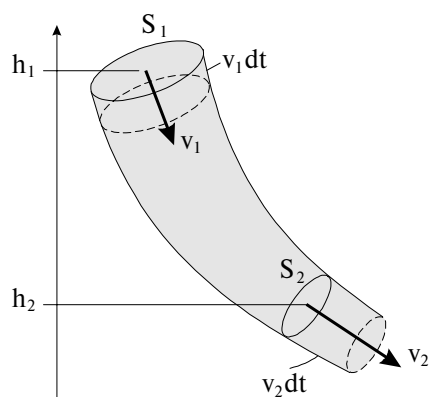


Рис. 3.5

рисунка видно, что за время  $dt$  элемент жидкости массой  $dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt$  опустился с уровня  $h_1$  на уровень  $h_2$ , а его скорость увеличилась от величины  $v_1$  до  $v_2$ .

Приращение кинетической энергии равно

$$dE_K = dm \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \rho (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) dt.$$

Изменение потенциальной энергии составляет

$$dE_{\Pi} = dm \cdot g(h_2 - h_1) = \rho g (S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1) dt.$$

Работа сил давления

$$dA = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt.$$

Записывая уравнение энергетического баланса в виде

$$dE_K + dE_{\Pi} = dA,$$

получаем уравнение Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \quad (3.16)$$

Вывод уравнения Бернулли на основе энергетического баланса делает более понятным физический смысл входящих в него членов. Так, статическое давление  $p$  численно равно работе сил давления, совершаемых над единичным объемом жидкости; динамическое давление  $\frac{\rho v^2}{2}$  есть кинетическая

энергия этого единичного объема, а величина  $\rho g h$  является его потенциальной энергией в поле силы тяжести.

Применим уравнение Бернулли к расчету течения жидкости в ряде интересных физических задач.

### Вытекание жидкости через отверстие в сосуде.

Пусть жидкость, заполняющая сосуд, под действием силы тяжести вытекает из него через отверстие в боковой стенке, расположенное вблизи

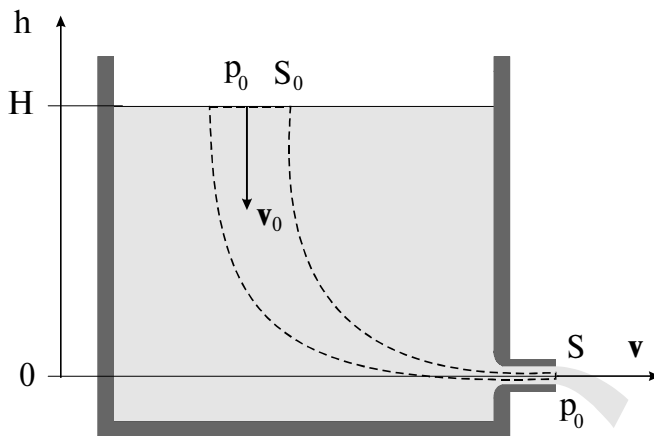


Рис. 3.6

дна сосуда (рис. 3.6). В отверстие вставлена горизонтальная трубка с закругленной внутренней кромкой, направляющая вытекающую струю воды. Закругление кромки обеспечивает полное заполнение трубки вытекающей жидкостью.

Разобьем текущую жидкость на трубки тока. Одна из таких трубок изображена на рисунке 3.6. Хотя мы и



не знаем, как выглядят эти трубки, однако все они начинаются на свободной поверхности жидкости и заканчиваются на выходном торце сливной трубки. Если площадь отверстия трубки  $S$  значительно меньше площади свободной поверхности  $S_0$ , то при истечении жидкости ее поверхность будет оставаться горизонтальной и опускаться с некоторой малой скоростью  $v_0$ . Это означает, что константа, входящая в уравнение Бернулли (3.14), будет одинакова для всех трубок тока:

$$\text{const} = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 + \rho gH.$$

Здесь  $H$  — высота столба жидкости над сливной трубкой. Поэтому скорость истечения жидкости  $v$  определяется из уравнения

$$\frac{\rho v^2}{2} + p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 + \rho gH, \quad (3.17)$$

где  $p_0$  — атмосферное давление на свободной поверхности и у сливной трубки. Поскольку  $S \ll S_0$ , то из условия несжимаемости (3.2) следует, что  $v_0 \ll v$ . С учетом этого скорость истечения получается равной

$$v = \sqrt{2gH}. \quad (3.18)$$

Эта формула носит название формулы Торричелли. Сразу бросается в глаза, что скорость истечения жидкости из сосуда такая же, как и при ее свободном падении с высоты  $H$ . В этом нет ничего удивительного, поскольку вязкостью мы пренебрегли, а работа сил атмосферного давления над трубкой тока равна нулю. Поэтому, как и при свободном падении тел в отсутствие сопротивления воздуха, приращение кинетической энергии равно работе силы тяжести:

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho gH.$$

Справедливость формулы Торричелли можно легко проверить, если на выходную трубку надеть кусок гибкого шланга и вытекающую струю воды направить вверх под небольшим углом к вертикали (рис. 3.7). Струя поднимется практически до уровня поверхности жидкости. Если же струю жидкости направить вертикально вверх, то падающие вниз частицы будут тормозить поднимающиеся, и струя не сможет подняться на высоту  $H$ .

Интересно отметить, что трубки тока жидкости расположены преимущественно ближе к стенке сосуда с отверстием, в то время как у противоположной (левой на рис. 3.8) стенки жидкость практически неподвижна. Это означает, что на левую стенку действуют силы давления, которые легко

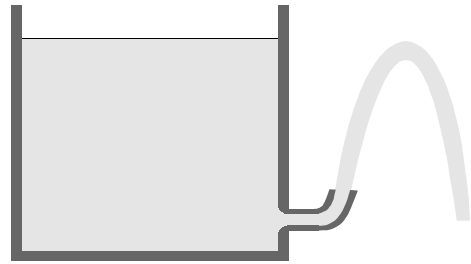


Рис. 3.7

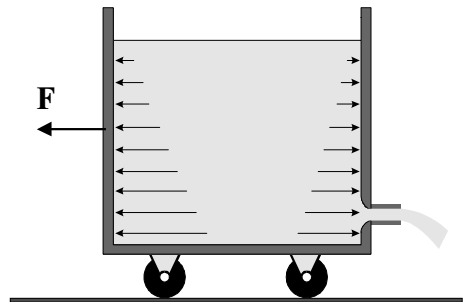


Рис. 3.8

подсчитать, используя линейный закон нарастания гидростатического давления с глубиной. Расчет же сил давления, действующих на правую стенку, требует учета движения жидкости. Однако и без такого расчета ясно, что в трубке тока, примыкающей к правой стенке, давление на каждом уровне будет меньше соответствующего этой глубине гидростатического давления. Это означает, что равнодействующая сил давления, действующих на обе стенки, направлена в сторону, противоположную направлению истечения жидкости. Под действием этой силы, называемой также реактивной, сосуд, поставленный на тележку с колесами, может привести эту тележку в движение. Величину этой силы легко подсчитать, используя формулу Торричелли. По 3-му закону Ньютона искомая реактивная сила равна по величине силе, с которой стенки сосуда действуют на воду, вызывая изменение ее импульса в направлении истечения. Поскольку масса воды, вытекающей в единицу времени через отверстие с сечением  $S$ , равна  $\rho vS$ , то изменение импульса в единицу времени составит величину  $\rho v^2 S$ . Поэтому реактивная сила

$$F = \rho v^2 S = 2\rho gHS. \quad (3.19)$$

Отметим, что если бы мы ошибочно приняли, что распределение давлений с глубиной у правой стенки такое же, как у левой, то реактивная сила получилась бы вдвое меньшей:

$$F' = \rho gH \cdot S, \quad (3.20)$$

где  $\rho gH$  — величина гидростатического давления на глубине  $H$ ,  $S$  — площадь отверстия в правой стенке.

Однако можно добиться одинакового распределения давлений у обеих стенок, если конец трубки с острой кромкой будет отстоять от правой стенки,

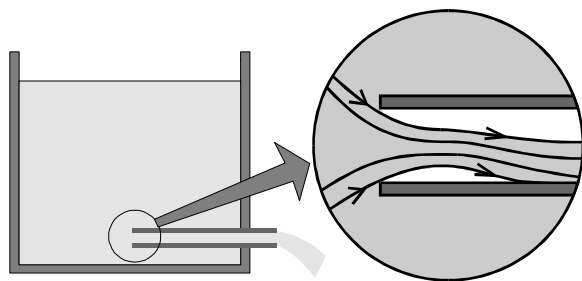


Рис. 3.9

как показано на рис. 3.9. В этом случае реактивная сила определяется по формуле (3.20). В (3.19) вместо сечения трубки  $S$  надо подставить сечение струи воды в трубке  $S_b = kS$ , где коэффициент истечения  $k \approx 1/2$ . Ясно, что при таком истечении трубка будет заполнена жидкостью приблизительно наполовину.

Реактивную силу можно увеличить, если повысить скорость истечения жидкости. Для этого следует использовать замкнутый сверху сосуд, а над свободной поверхностью жидкости создать давление  $p_1 > p_0$ . Тогда скорость истечения жидкости получается равной:

$$v = \sqrt{2\left(gH + \frac{p_1 - p_0}{\rho}\right)}, \quad (3.21)$$

а реактивная сила возрастает линейно с повышением избыточного давления  $\Delta p = p_1 - p_0$  над свободной поверхностью жидкости.

**Гидрорезание.**

Если создать очень высокое избыточное давление, например,  $\Delta p \approx 5000 \text{ атм} = 5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ , то скорость истечения воды  $v = 1000 \text{ м/с}$ . Если такую струю направить на какой-либо твердый материал, то его поверхность

будет подвержена гидродинамическому давлению  $p_d = \frac{\rho v^2}{2} = 5000 \text{ атм}$ . Такое

огромное давление в ряде случаев может превосходить предел прочности  $\sigma_m$  некоторых материалов, и последние будут разрушаться под действием струи. Со второй половины 80-х годов получило развитие новое направление в обработке материалов — гидрорезание. В этой технологии водяной нож — высокоскоростная струя воды с диаметром иглы — легко режет материалы толщиной в несколько сантиметров со скоростью резания несколько десятков сантиметров в минуту. Для резки металлов, твердых сплавов, бетона и других материалов в струю добавляют абразивный порошок. Это позволяет значительно увеличить гидродинамическое давление и повысить производительность и возможности гидрорезания.

**Сосуд Мариотта.**

Весьма поучительным примером является истечение жидкости из сосуда Мариотта. Этот сосуд позволяет обеспечить постоянную скорость вытекания жидкости из сосуда, несмотря на понижение ее уровня. Для этого в сосуд через герметичную пробку в его горловине вводится трубочка, сообщающаяся с атмосферой (рис. 3.10). Скорость вытекания определяется по формуле Торричелли

$v = \sqrt{2gh}$ , где  $h$  — высота нижнего конца трубки над отверстием. Это происходит потому, что при вытекании жидкости из полностью заполненного сосуда давление под пробкой будет меньше атмосферного, воздух будет засасываться в сосуд через трубку, а давление в горизонтальной плоскости, совпадающей с нижним концом трубки, будет равно атмосферному. Скорость вытекания легко регулируется вертикальным перемещением трубки. Если конец трубки находится на уровне  $h = 0$  или ниже отверстия, то жидкость не вытекает вовсе.

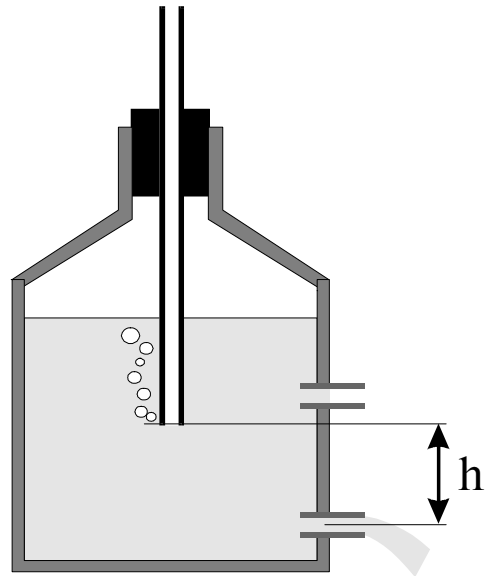


Рис. 3.10

**Условие несжимаемости движущейся жидкости.**

Равенство (3.2), являющееся условием несжимаемости, связывает скорости движущейся жидкости в двух различных сечениях. Между тем, как на это неоднократно обращалось внимание в предыдущих лекциях, в физике

важно оперировать с равенствами или уравнениями, отнесенными к одной точке пространства.

Для этого рассмотрим деформацию движущегося кубического элемента жидкости. Если его объем через малый отрезок времени  $\delta t$  не изменяется, то сумма диагональных элементов тензора деформации равна нулю, т.е.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Здесь  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  — смещения граней кубика в направлении соответствующих осей координат. Однако эти смещения связаны со скоростями движения граней (а точнее, частиц жидкости, находящихся в данный момент на этих гранях):

$$u_x = v_x \delta t, \quad u_y = v_y \delta t, \quad u_z = v_z \delta t.$$

Используя эти равенства, получаем локальное (относящееся к одной точке пространства) условие несжимаемости в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.22)$$

В физике для описания векторных полей, а в нашем случае речь идет о векторном поле скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ , используется понятие дивергенции (источка) поля в данной точке пространства. В декартовой системе координат выражение для  $\text{div } \mathbf{v}$  имеет вид:

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (3.23)$$

Дивергенция вектора является скалярной функцией координат и времени и легко рассчитывается, если известны компоненты векторного поля (в нашем случае  $v_x$ ,  $v_y$  и  $v_z$ ). Поэтому условие (3.22) постоянства объема несжимаемой жидкости записывается кратко:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) является одним из основных уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости.

Заметим, что имеется множество векторных полей, как, например, электрическое  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$  и магнитное  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$  поля и др., при описании которых также широко используется понятие дивергенции:  $\text{div } \mathbf{E}$  или  $\text{div } \mathbf{B}$  и т.д. Хотя она и вычисляется в соответствии с (3.23), определяется, однако, из других соображений, поскольку в электродинамике не идет речь о движении и деформации элемента материальной среды.

На примере векторного поля скоростей  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  поясним смысл понятия дивергенции. Для этого рассмотрим неподвижный элементарный объем  $dV = dx dy dz$  и подсчитаем количество жидкости, втекающей и вытекающей из этого объема за единицу времени.

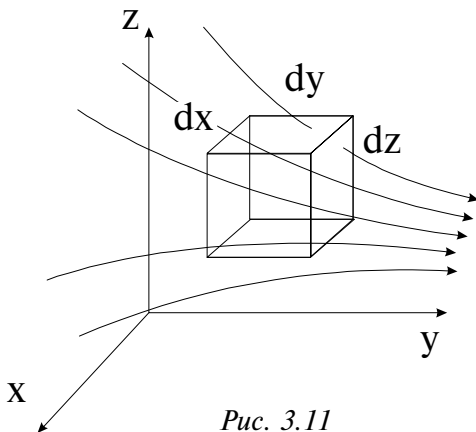


Рис. 3.11

Введем понятие элементарного потока вектора скорости  $\mathbf{v}$  через площадку  $dS$ :

$$dN_v = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \cdot \cos \alpha = \mathbf{v} dS, \quad (3.25)$$

где  $d\mathbf{S} = ndS$  — вектор, направленный по нормали  $\mathbf{n}$  к элементарной площадке. Ясно, что поток (3.25) равен объему жидкости, пересекающей площадку  $dS$  за единицу времени (рис. 3.12). Он допускает также наглядную геометрическую интерпретацию. В самом деле, в соответствии с определением линий тока, данным в начале этой лекции, их густота характеризует скорость течения. Поэтому величине скорости всегда можно поставить в соответствие количество линий тока, пересекающих площадку с  $dS = 1$  и  $\mathbf{n} \parallel \mathbf{v}$ . Тогда поток  $dN_v$  в (3.25) будет определять число линий, пересекающих площадку при ее произвольной ориентации.

Теперь легко подсчитать баланс между втекающей и вытекающей жидкостью для элементарного объема, изображенного на рис. 3.12. Для этого восстановим внешние нормали ко всем шести граням кубика и оценим потоки жидкости через эти грани. Легко понять, что положительное значение потока будет для вытекающей жидкости, а отрицательное — для втекающей. Если скорость в центре кубика  $\mathbf{v}(x, y, z)$  изменяется при приближении к соответствующим граням, то при вычислениях это необходимо учесть. Результирующий поток определится следующим образом:

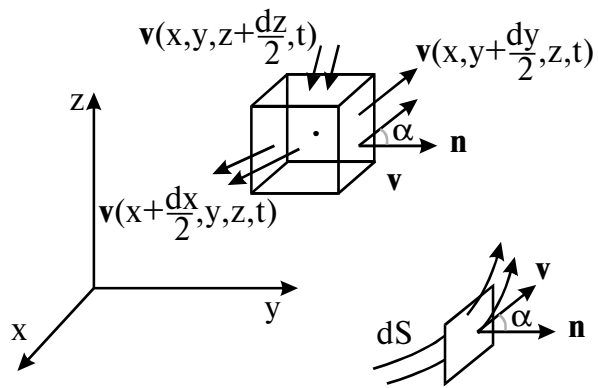


Рис. 3.12

$$dN_v = \left[ v_x \left( x + \frac{dx}{2}, y, z, t \right) - v_x \left( x - \frac{dx}{2}, y, z, t \right) \right] dydz + \left[ v_y \left( x, y + \frac{dy}{2}, z, t \right) - v_y \left( x, y - \frac{dy}{2}, z, t \right) \right] dx dz + \left[ v_z \left( x, y, z + \frac{dz}{2}, t \right) - v_z \left( x, y, z - \frac{dz}{2}, t \right) \right] dx dy. \quad (3.26)$$

Разделив левую и правую части (3.26) на  $dx dy dz$  и разлагая компоненты скорости в квадратных скобках в ряд Тейлора, получаем

$$\frac{dN_v}{dx dy dz} = \text{div } \mathbf{v}. \quad (3.27)$$

Таким образом, дивергенция вектора скорости численно равна потоку жидкости через поверхность единичного объема. Если жидкость несжимаема, то, естественно, этот поток должен быть равен нулю (предполагается, что внутри объема нет истоков и стоков жидкости). Графически последнее интерпретируется как равенство количества входящих и выходящих линий

тока для этого объема. Это, в свою очередь, означает, что в окрестности точки, где  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , линии тока не прерываются. Поэтому равенство  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  называют условием несжимаемости.

Из школьного курса физики известно, что силовые линии электростатического поля (аналог линий тока) прерываются только на зарядах. Поэтому для областей, где заряды отсутствуют, мы также вправе написать

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Силовые линии индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  всегда замкнуты (нет магнитных зарядов), поэтому  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ .

### Уравнения Эйлера для идеальной жидкости.

При заданных внешних силах и известных свойствах жидкости можно записать уравнение движения единицы объема несжимаемой невязкой жидкости:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \operatorname{grad} p, \quad (3.28)$$

где оператор  $\operatorname{grad}$  (градиент) определяется как

$$\operatorname{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.28) записано в векторном виде и является обобщением одномерного уравнения (3.3).

Расписывая (3.28) для трех проекций скорости, получаем систему уравнений, аналогичных (3.5):

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Если эти уравнения дополнить условием несжимаемости

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

то мы получим полную систему уравнений с четырьмя неизвестными функциями координат и времени ( $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  и  $p$ ). Уравнения (3.30) называются уравнениями Эйлера и позволяют, в принципе, рассчитать динамику течения жидкости. Однако с математической точки зрения эта система является

нелинейной из-за наличия членов типа  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ , ...,  $v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$ . Поэтому интегрирование этих уравнений и нахождение искомым функций представляет подчас весьма сложную задачу даже при использовании мощных ЭВМ. Из (3.30) можно получить уравнение Бернулли для стационарного течения, когда

$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ . Однако вывод этого уравнения мы предоставляем читателю проделать самостоятельно, обратившись к рекомендованной литературе. В дальнейшем мы будем использовать уравнения (3.30) для описания волнового движения жидкости и анализа свойств акустических волн.

В заключение отметим, что система (3.30) часто записывается в более компактном виде с использованием оператора градиента. Каждое из трех уравнений (3.30) имеет вид

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) v_{x,y,z} = F_{x,y,z} - (\text{grad } p)_{x,y,z} .$$

Возвращаясь к векторному представлению, получаем возможность записать четыре уравнения Эйлера в виде двух векторных:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right] \mathbf{v} &= \mathbf{F} - \text{grad } p, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

### Уравнение непрерывности для сжимаемой жидкости.

При течении газов, особенно при больших скоростях, их плотность может значительно меняться во времени и в пространстве. Ясно, что объем «жидкости», втекающей через поверхность кубика, изображенного на рис. 3.11, может быть не равен объему вытекающей «жидкости». Если этого равенства нет, то масса газа внутри кубика (а с ней и плотность) будет со временем меняться. Уравнение (3.24) в этом случае становится несправедливым. В этом случае можно записать уравнение непрерывности, которое выводится из условия баланса массы газа. Поток массы газа через площадку  $d\mathbf{S}$  будет равен  $dN_M = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ , а полный поток через поверхность элемента с объемом  $dx dy dz$ , аналогично (3.27), равен

$$dN_M = dx dy dz \cdot \text{div}(\rho \mathbf{v}), \quad (3.32)$$

где  $\rho \cdot \mathbf{v}$  — новое векторное поле. Если этот поток положительный, то масса внутри элемента  $m = \rho dx dy dz$  будет убывать за счет уменьшения во времени плотности  $\rho$ . Поэтому, записывая условие баланса массы в виде

$$dx dy dz \cdot \text{div}(\rho \mathbf{v}) = -dx dy dz \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.33)$$

мы получаем (после сокращения на  $dx dy dz$ ) одно из фундаментальных уравнений гидродинамики — уравнение непрерывности сжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.34)$$

Следует отметить, что при  $\rho = \text{const}$  это уравнение переходит в (3.24).

В электродинамике это уравнение также является фундаментальным. В самом деле, если речь идет о движущихся зарядах, объемная плотность которых равна  $\rho$ , то уравнение (3.34) является математическим выражением универсального закона сохранения заряда.

**Уравнения Эйлера и уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости.**

Динамика сжимаемой жидкости также базируется на 2-м законе Ньютона, записанном для единицы массы жидкости. Равнодействующая сил давления и внешних сил создает ускорение единицы массы, поэтому

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \mathcal{F}, \quad (3.35)$$

где  $\mathcal{F}$  — внешняя сила, действующая на единицу массы. Для определения пяти неизвестных величин ( $v_x, v_y, v_z, p$  и  $\rho$ ) необходимо дополнить (3.35) уравнением непрерывности (3.34) и материальным уравнением, связывающим плотность и давление:

$$p = p(\rho). \quad (3.36)$$

Система (3.34) — (3.36) носит название уравнений Эйлера для сжимаемой жидкости. Огромное количество задач газодинамики решается на основе этих уравнений.

Воспользуемся уравнением (3.35) и получим уравнение Бернулли. Для этого видоизменим правую часть (3.35), введя вспомогательную функцию  $\mathcal{P}$  (2.27), и учтем (2.29), т.е. введем потенциальную энергию единицы массы  $U_1$ . Тогда (3.35) примет вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} \right) \mathbf{v} = -\text{grad}(\mathcal{P} + U_1). \quad (3.37)$$

При стационарном течении  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ . В направлении оси трубки тока (вдоль криволинейной координаты  $\ell$ ) можно записать

$$v \frac{d}{d\ell} v = -\frac{d}{d\ell} (\mathcal{P} + U_1). \quad (3.38)$$

Поскольку потенциальная энергия единицы массы  $U_1(\ell) = U_1(h) = gh + \text{const}$ ,

а  $\mathcal{P}(\ell) = \int_{p_1(\ell_1)}^{p(\ell)} \frac{dp}{\rho}$ , то, по аналогии с (3.13), перепишем (3.38) в виде

$$\frac{d}{d\ell} \left( \frac{v^2}{2} + \int_{p_1(\ell_1)}^{p(\ell)} \frac{dp}{\rho} + gh \right) = 0. \quad (3.39)$$

Интегрируя (3.39) вдоль трубки тока, получаем уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_1(h_1)}^{p(h)} \frac{dp}{\rho} + gh = \text{const}. \quad (3.40)$$

Здесь  $h$  — высота сечения трубки тока с координатой  $\ell$ . Очевидно, что  $p(\ell) = p(h)$ ,  $p_1(\ell_1) = p_1(h_1)$ . Постоянная в (3.40) определяется заданием скорости  $v_1$  и высоты  $h_1$  для фиксированного сечения с координатой  $\ell_1$ . С учетом этого, уравнение (3.40) можно переписать в виде



$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_1(h_1)}^{p(h)} \frac{dp}{\rho} + gh = \frac{v_1^2}{2} + gh_1. \quad (3.41)$$

Для практического использования уравнения Бернулли необходимо знать связь между  $p$  и  $\rho$ . В случае несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) уравнение (3.41) переходит в (3.15).

Если речь идет о потоке газа «сжимаемой» жидкости, то при быстром сжатии (увеличении плотности) газ будет нагреваться. Из-за плохой теплопроводности газа тепло не будет успевать уходить из нагретых областей. Поэтому для установления связи  $p = p(\rho)$  воспользуемся адиабатическим приближением:

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^\gamma, \quad (3.42)$$

где показатель адиабаты  $\gamma > 1$ . Такая связь получается из первого начала термодинамики и уравнения состояния идеального газа (2.32) при условии отсутствия теплообмена между нагретой областью и окружающей средой. Давление в (3.42) возрастает с плотностью быстрее, чем при изотермическом процессе, так как  $\gamma > 1$ . В курсе молекулярной физики будет показано, что  $\gamma = C_p / C_v$  ( $C_p$  и  $C_v$  — теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно). Для воздуха, состоящего главным образом из двухатомных газов,  $\gamma = 1,4$ .

Если подставить (3.42) в (3.41) и выполнить простейшее интегрирование, то можно определить распределение давления вдоль трубки тока:

$$p = p_1 \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_1}{p_1} \left[ \frac{1}{2} (v^2 - v_1^2) + g(h - h_1) \right] \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \quad (3.43)$$

Будем считать трубку тока горизонтальной ( $h = h_1$ ), а скорости течения такими, что

$$\frac{1}{2} |v^2 - v_1^2| < \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\gamma p_1}{\rho_1} = \frac{c_1^2}{\gamma - 1}, \quad (3.44)$$

где  $c_1 = \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}}$  — параметр, имеющий размерность скорости. Как мы увидим несколько позднее, этот параметр определяет скорость звука в газе

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (3.45)$$

При нормальных условиях скорость звука в воздухе  $c = 330$  м/с. В этом случае (3.43) можно разложить в ряд:

$$p = p_1 \left\{ 1 - \frac{\rho_1}{p_1} \left( \frac{v^2 - v_1^2}{2} \right) + \frac{1}{2\gamma} \frac{\rho_1^2}{p_1^2} \left( \frac{v^2 - v_1^2}{2} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (3.46)$$

Если скорости течения газа считать малыми ( $v, v_1 \ll c_1$ ), то в (3.46) можно пренебречь квадратичным и более высокими членами разложения. В этом случае распределение давлений соответствует течению несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_1 = \text{const}$ . Квадратичный член начинает давать вклад в распределение давлений при скоростях потока, соизмеримых со скоростью звука  $c_1$ .

Подставив (3.42) в (3.43), получим распределение плотности вдоль трубки тока:

$$\rho = \rho_1 \left\{ 1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_1}{\rho_1} \left[ \frac{1}{2} (v^2 - v_1^2) + g(h - h_1) \right] \right\}^{\frac{1}{\gamma - 2}}. \quad (3.47)$$

Для горизонтальной трубки тока и при условии (3.44) распределение плотности (3.47) после разложения в ряд примет вид:

$$\rho = \rho_1 \left( 1 - \frac{v^2 - v_1^2}{2c_1^2} + \dots \right). \quad (3.48)$$

Таким образом, изменение плотности газа необходимо учитывать только при скоростях течения, сопоставимых по порядку величины со скоростью звука, определяемой, как следует из (3.45), давлением и плотностью в этом потоке. Если же скорость течения  $v \ll c$ , то сжимаемостью газа можно пренебречь.

### Распространение возмущений давления и плотности.

Если в неподвижной жидкости или газе быстро создать в небольшой области избыточное давление  $\Delta p$ , а значит и избыточную плотность  $\Delta \rho$ , то эти возмущения будут распространяться с некоторой скоростью, последовательно приводя в движение частицы среды, расположенные на пути распространения. Скорость распространения, как показывает опыт, не зависит от конкретного вида возмущения, если только относительные изменения  $\frac{\Delta p}{p} \ll 1$  и  $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$  ( $p$  и  $\rho$  — равновесные значения давления и плотности среды). Важно отметить, что и форма таких малых возмущений в процессе их распространения не меняется.

Рассчитаем скорость распространения возмущений, используя самую простую физическую ситуацию. Пусть труба с площадью поперечного сечения  $S$  заполнена жидкостью или газом с плотностью  $\rho$ , находящимися под давлением  $p$ . Предположим, что в момент времени  $t = 0$  поршень, закрывающий трубу с одного конца, начинает двигаться с постоянной скоростью  $v \ll c$ . Перед поршнем образуется область повышенного давления (рис. 3.13), граница которой будет двигаться со скоростью  $c$ . Импульс силы  $F$ , действующей в течение времени  $\Delta t$ , передается частицам среды в объеме с повышенной плотностью  $\rho + \Delta \rho$ , которые начинают двигаться со скоростью  $v$ . Поэтому можем записать равенство:

$$F \Delta t = \Delta p S \Delta t = (\rho + \Delta \rho)(c - v) \Delta t \cdot S \cdot v, \quad (3.49)$$

или

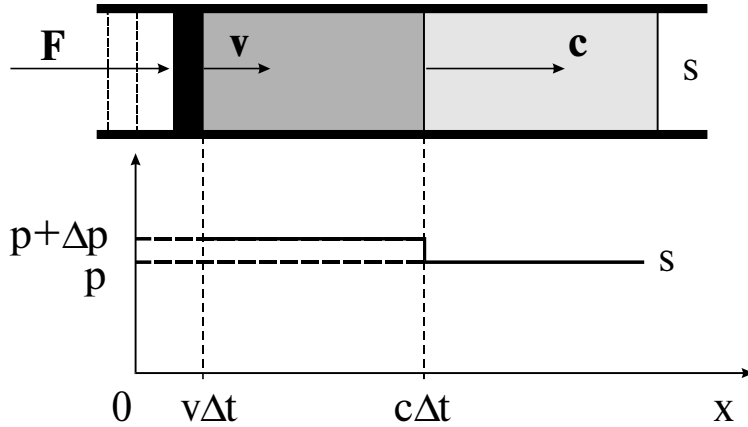


Рис. 3.13

$$\Delta p = (\rho + \Delta\rho)(c - v) \cdot v . \tag{3.50}$$

Из условия постоянства (до и после сжатия) массы воздуха следует, что

$$\rho S c \Delta t = (\rho + \Delta\rho)(c - v) S \Delta t , \tag{3.51}$$

или

$$\rho c = (\rho + \Delta\rho)(c - v) . \tag{3.52}$$

Из уравнений (3.50) и (3.52) находим скорость движения частиц как функцию избыточного давления:

$$v = \frac{\Delta p}{\rho c} . \tag{3.53}$$

В акустике последнее равенство выражает акустический закон Ома. Если проводить аналогию с законом Ома для участка цепи постоянного тока, то  $v$  является аналогом силы тока,  $\Delta p$  — разности потенциалов, а  $\rho c$  так и называется — акустическое сопротивление среды. Равенство (3.52) после раскрытия скобок будет иметь вид:

$$0 = \Delta p \cdot c - \rho \cdot v - v \Delta p . \tag{3.54}$$

Последний член в правой части (3.54) пренебрежимо мал. Подстановка (3.53) в (3.54) приводит к искомому выражению для скорости:

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} . \tag{3.55}$$

Формула (3.55) позволяет рассчитать скорость звука в различных жидкостях и газах, если известна связь между давлением и плотностью. Для воздуха эта связь дается уравнением адиабаты (3.42):

$$p = \text{const} \cdot \rho^\gamma . \tag{3.56}$$

Поскольку  $\Delta p = \text{const} \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1} \cdot \Delta\rho$ , то

$$c = \sqrt{\text{const} \cdot \gamma \cdot \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} . \tag{3.57}$$

При нормальных условиях  $p = 10^5$  Па,  $\rho \approx 1,3$  кг/м<sup>3</sup> и  $c \approx 330$  м/с.

Для воды, сжимаемость которой значительно меньше, скорость звука  $c = 1200$  м/с. Отметим, что скорость звука в воздухе возрастает с увеличением его равновесной плотности  $\rho$  (3.57). Этот факт будет использован далее, когда будет рассматриваться распространение акустических волн большой амплитуды.

### Истечение сжатого газа через сопло.

Рассмотрим одну из важнейших задач газодинамики — истечение газа, сжатого в сосуде до давления  $p_1$  и плотности  $\rho_1$ , через выходную трубку — сопло (рис. 3.14). Скорость истечения  $v$ , согласно равенству (3.43), получается равной

$$v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}. \quad (3.58)$$

Здесь учтено, что  $h \approx h_1$ .

При малом сечении сопла скоростью  $v_1$  движения газа внутри сосуда можно пренебречь. Наконец, будем считать, что давление снаружи  $p \ll p_1$ . Тогда

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1}}. \quad (3.59)$$

Оценка, проведенная по этой формуле, для случая, когда воздух при нормальных условиях вытекает в вакуум, дает величину скорости  $v = 750$  м/с. Эта скорость более чем вдвое превышает скорость звука и, как показывает

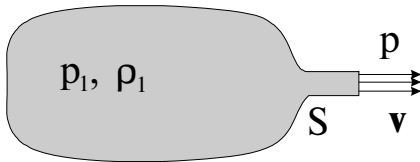


Рис. 3.14

опыт, при использовании сопла постоянного сечения не достигается. Реально скорость газа не превышает скорости звука, поскольку газ, находящийся в сопле под заметным давлением, является своеобразной «аэродинамической пробкой» для газа внутри сосуда — поток как бы запирает сопло. Этот вывод подтверждается и простейшими расчетами. Пусть  $\ell$  — координата, направленная вдоль оси сопла с переменным сечением  $S = S(\ell)$ . Для стационарного течения уравнения Эйлера (3.35) или уравнение Бернулли (3.40) связывают приращения скорости и давления:

$$v dv = -dp/\rho. \quad (3.60)$$

Из условия постоянства массы (3.1) следует, что в любом сечении сопла  $\rho v S = \text{const}$ , или

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0. \quad (3.61)$$

Наконец, согласно (3.55), можем записать

$$dp = c^2 dp, \quad (3.62)$$

где  $c$  — скорость звука в сечении  $S$ , меняющаяся вдоль сопла. Из (3.60) и (3.62) имеем

$$v dv = -c^2 \frac{dp}{\rho}. \quad (3.63)$$

Подставив (3.63) в (3.61), находим

$$\frac{dS}{S} = \frac{dv}{v} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right). \quad (3.64)$$

Таким образом, при дозвуковых скоростях  $\left( \frac{v}{c} \ll 1 \right)$  в сужающемся сопле ( $dS < 0$ ) скорость возрастает ( $dv > 0$ ), а давление (согласно 3.63) — убывает. Однако, по мере приближения к скорости звука приращение скорости  $dv$  стремится к нулю, а сама скорость достигает некоторого максимального значения, близкого к  $c$ . В расширяющемся сопле ( $dS > 0$ ) при начальной скорости  $v \ll c$  также будет иметь место уменьшение скорости потока с одновременным увеличением давления и плотности.

Получить сверхзвуковые скорости можно лишь при использовании сопла, форма которого показана на рис. 3.15. В сужающейся части сопла поток ускоряется. Когда его скорость в самом узком сечении незначительно превысит скорость звука ( $v \geq c$ ), то, согласно (3.64), последующее увеличение сечения ( $dS > 0$ ) будет приводить к дальнейшему ускорению потока при одновременном падении давления и плотности. Такое сопло, получившее

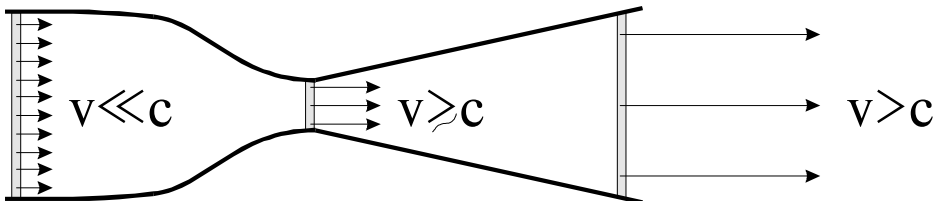


Рис. 3.15

название сопла Лаваля, позволяет получить сверхзвуковые скорости потоков. Эта плодотворная идея используется при конструировании ракетных двигателей. Этот же принцип лежит в основе конструкции аэродинамических труб, используемых для испытания сверхзвуковых летательных аппаратов.



## ЛЕКЦИЯ 4

*Движение вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса. Число Рейнольдса. Формула Пуазейля. Ламинарное и турбулентное течение. Турбулентность атмосферы. Обтекание тел потоком жидкости. Формула Жуковского. Гидродинамическое подобие. Движение тела со сверхзвуковой скоростью.*

**Силы вязкого трения.**

В предыдущих лекциях мы рассматривали движение жидкостей и газов в пренебрежении силами вязкого трения. Между тем эти силы, действующие между частицами движущейся жидкости, могут кардинальным образом повлиять как на распределение скоростей в потоке жидкости, так и на обтекание жидкостью тел, помещенных в движущийся поток.

Еще Ньютон установил опытным путем, что при скольжении друг относительно друга двух параллельных плоскостей, пространство между которыми заполнено жидкостью, силы вязкого трения препятствуют этому скольжению (рис. 4.1). Так, при движении со скоростью  $v$  верхней плоскости относительно нижней возникает сила вязкого трения, направленная против движения и равная

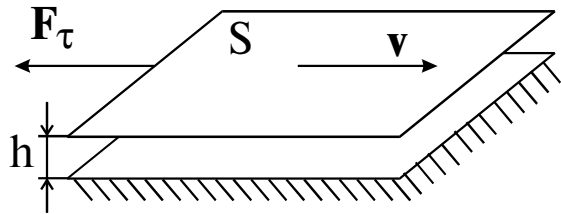


Рис. 4.1

$$F_{\tau} = \mu S \frac{v}{h}. \quad (4.1)$$

Эта сила пропорциональна площади  $S$  и изменению скорости на единицу длины в поперечном направлении  $\frac{v}{h}$  (градиенту скорости в направлении, перпендикулярном движению) и зависит также от вязкости жидкости  $\mu$ .

Формула (4.1) справедлива, если расстояние  $h$  между пластинами значительно меньше их линейных размеров ( $h \ll \sqrt{S}$ ). Важно отметить, что частицы жидкости, прилегающие к верхней пластине, движутся вместе с нею со скоростью  $v$  (увлекаются пластиной). Напротив, частицы жидкости вблизи нижней (неподвижной) пластины находятся в покое (прилипают к пластине). Представим, что жидкость между пластинами состоит из

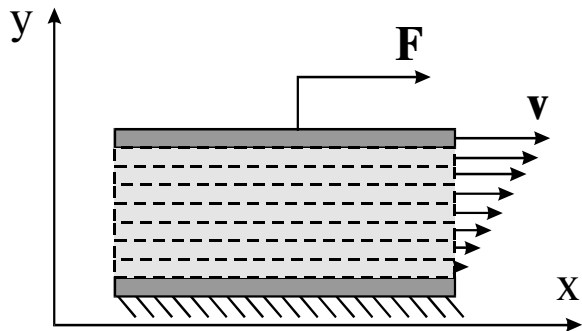


Рис. 4.2

плоских параллельных слоев, движущихся равномерно (рис. 4.2). Нетрудно понять, что каждый вышележащий слой увлекает за собой нижний соседний слой с силой  $F_\tau$ . В свою очередь, этот нижний слой тормозит движение верхнего слоя с той же силой  $F_\tau$ . На каждый слой действуют сверху и снизу две равные, но противоположно направленные силы. Скорость слоев возрастает от нижнего слоя к верхнему линейно (рис. 4.2), а силы трения, действующие на каждый из слоев, одинаковы. Как результат, усилие  $F = F_\tau$ , приложенное к верхней пластине, передается на нижнюю пластину. Коэффициент вязкости жидкости  $\mu$  можно определить экспериментально, например, по скорости ее истечения через трубку известных размеров (см. ниже). Как показывает опыт, при нагревании вязкость жидкостей уменьшается, а газов — увеличивается. Объяснение такого разного поведения коэффициентов вязкости жидкостей и газов будет дано в курсе «Молекулярная физика».

### Течение вязкой жидкости. Уравнение Навье-Стокса.

Для анализа течения вязкой жидкости в правую часть уравнения движения (3.28) необходимо добавить силу вязкого трения, приложенную к единице объема жидкости. Для простоты ограничимся рассмотрением течения жидкости в направлении оси  $x$ , при этом единственная компонента скорости  $v_x$  будет зависеть от поперечной координаты  $y$  (рис. 4.3).

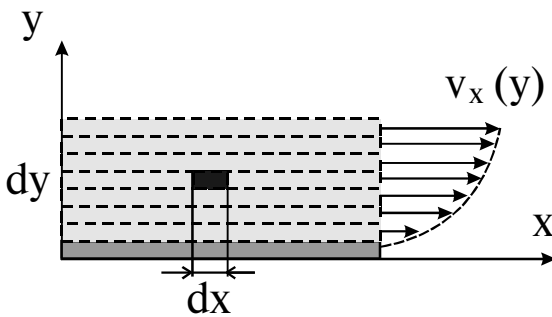


Рис. 4.3

На верхнюю грань  $dx dz$  кубика  $dx dy dz$  (ось  $z$  перпендикулярна плоскости чертежа) в соответствии с (4.1) в направлении оси  $x$  действует увлекающая сила

$$F'_{\tau_x} = \mu dx dz \frac{dv_x}{dy} \Big|_{y+dy}, \text{ а на нижнюю грань — тормозящая сила } F''_{\tau_x} = -\mu dx dz \frac{dv_x}{dy} \Big|_y.$$

Равнодействующая сил вязкого трения, приложенная к выделенному кубичку, равна

$$F_\tau = F'_{\tau_x} + F''_{\tau_x}, \quad (4.2)$$

а сила, приложенная к единичному объему, составит

$$f_{\tau_x} = \frac{F_\tau}{dx dy dz} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (4.3)$$

При линейном изменении скорости от слоя к слою, как на рис. 4.2,  $f_\tau = 0$ .

Если скорость изменяется нелинейно, как на рис. 4.3, то  $f_\tau \neq 0$ . В общем случае сила вязкого трения, вообще говоря, имеет три компоненты

$$\mathbf{f}_\tau = \{ f_{\tau_x}, f_{\tau_y}, f_{\tau_z} \}, \text{ где}$$



$$\begin{aligned}
 f_{\tau_x} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \mu \Delta v_x, \\
 f_{\tau_y} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \mu \Delta v_y, \\
 f_{\tau_z} &= \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \mu \Delta v_z.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

В (4.4) использовано обозначение  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,

применяемый в математике и в физике для сокращения записи. Если теперь компоненты силы трения (4.4) подставить в правые части уравнений (3.30) для соответствующих компонент скоростей, то мы получим систему уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Эти три уравнения могут быть записаны в виде одного векторного уравнения

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} \right] \mathbf{v} = \mathbf{F} - \text{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v}. \tag{4.5}$$

Оно отличается от первого из уравнений (3.31) наличием члена  $\mu \Delta \mathbf{v}$  в правой части. Уравнение (4.5) называется уравнением Навье–Стокса и является основным при расчете движения вязкой несжимаемой жидкости. Общее аналитическое решение этого уравнения не получено, и поэтому для его решения используются численные методы. На практике иногда приходится ограничиваться частными задачами. Одной из таких задач является течение невязкой несжимаемой жидкости. Ранее мы получили условие, при котором сжимаемостью жидкости или газа можно пренебречь. Теперь выясним, в каких случаях можно пренебречь силами вязкости.

#### Число Рейнольдса. Критерий пренебрежения вязкостью.

Рассмотрим течение вязкой жидкости между двумя неподвижными горизонтальными пластинами, расстояние между которыми равно  $h$ , под действием сил давления. Поскольку частицы жидкости «прилипают» к пластинам, то скорости слоев жидкости будут различными. Качественно распределение скоростей слоев изображено на рис. 4.4. Если известна характерная скорость течения (например, скорость  $v$  на оси потока), то легко оценить силы вязкого трения. Согласно (4.3)

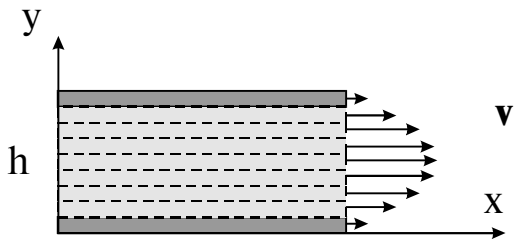


Рис. 4.4

$$f_{\tau_x} = \mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} \sim \mu \frac{v}{h^2} \tag{4.6}$$

Отсюда следует, что силы вязкого трения убывают с увеличением расстояния между пластинами. В общем случае можно считать, что *силы вязкости, возникающие в потоке, обратно пропорциональны квадрату характерного поперечного размера потока и пропорциональны скорости.*

С точки зрения динамики (см. уравнение 4.5) при отсутствии внешних сил  $\mathbf{F}$  вязкостью можно пренебречь, если силы давления  $-\text{grad } p$  значительно превосходят силы вязкости  $\mu \Delta \mathbf{v}$ . Этот случай соответствует ускоренному движению жидкости, как, например, при течении идеальной жидкости по горизонтальной трубе переменного сечения (см. Лекцию 3).

Следует, однако, подчеркнуть, что ламинарное течение жидкости, рассматриваемой в ряде случаев как идеальная, тем не менее обязано наличию вязкости. В отсутствие вязкости течение жидкости будет неустойчивым. В самом деле, из-за флуктуаций скорости частиц линии тока стремятся искривиться, и частицы в них будут двигаться с ускорением. Давления  $p_1$  и  $p_2$  по разные стороны изогнутой трубки тока будут различными:  $p_2 > p_1$  (рис. 4.5). Возникающий градиент давления связан с ускорением частиц жидкости уравнением:

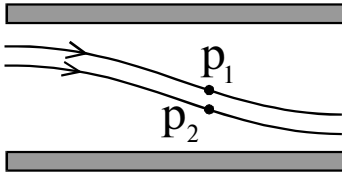


Рис. 4.5

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cong -\text{grad } p. \quad (4.7)$$

Последнее уравнение является приближенным уравнением Навье-Стокса ( $\mu=0$ ) и записано в отсутствии внешних сил. В этом случае критерий малости сил вязкости сводится к неравенству

$$\frac{|\mu \Delta \mathbf{v}|}{|\text{grad } p|} \approx \frac{|\mu \Delta \mathbf{v}|}{\left| \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|} < 1. \quad (4.8)$$

В гидродинамике очень часто используют понятие силы инерции  $\mathbf{F}_i = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . С точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с частицей жидкости, она находится в покое, потому что силы давления, вязкости и инерции уравновешивают друг друга (см. (4.5)):

$$\mathbf{F}_i - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (4.9)$$

Неравенство (4.8) означает, что силы вязкости значительно меньше сил инерции. В случае течения жидкости между пластинами силы инерции при искривлении трубок тока жидкости

$$\mathbf{F}_i = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \sim -\rho \frac{v^2}{h}, \quad (4.10)$$

где  $\frac{v^2}{h}$  — характерное центростремительное ускорение. В общем случае силы инерции обратно пропорциональны поперечному размеру потока и пропорциональны квадрату скорости. С учетом оценок (4.6) и (4.10) условие (4.8) переписывается следующим образом:

$$\frac{\mu \frac{v}{h^2}}{\rho \frac{v^2}{h}} = \frac{\mu}{\rho v h} = \frac{1}{Re} < 1. \quad (4.11)$$

Здесь  $Re = \frac{\rho v h}{\mu}$  — число Рейнольдса, характеризующее отношение сил инерции и сил вязкости. Таким образом, текущую жидкость можно рассматривать как невязкую, если число Рейнольдса для такого течения  $Re > 1$ . Однако и в этом случае вязкость играет вспомогательную роль. При не очень высоких скоростях течения силы вязкости «гасят» компоненты скорости жидкости, поперечные к потоку, препятствуя, тем самым, возникновению неустойчивого течения и обеспечивая ламинарность потока.

Дадим некоторые оценки течения жидкости по круглой трубе радиуса  $R$ .

Число Рейнольдса в этом случае  $Re = \frac{\rho v R}{\mu}$ . Если принять радиус трубы  $R = 1$  см

и скорость течения  $v = 1$  см/с, то для воды ( $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,15 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с) при  $t = 15^\circ\text{C}$ ) число  $Re = 86$ . Это означает, что силы вязкости не существенны, и воду можно рассматривать как невязкую жидкость. Однако это приближение становится несправедливым, если радиус трубки уменьшить на два порядка, и  $Re = 0,86 < 1$ . При таком течении распределение давлений и скоростей в потоке уже не подчиняется уравнению Бернулли. Еще в большей степени это относится к вязкому глицерину ( $\mu = 1,4$  кг/(м·с)). При течении воздуха по трубе ( $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$  кг/(м·с)) число Рейнольдса приблизительно на порядок меньше его значения для воды. Это указывает на то, что силы вязкости при течении воздуха и других газов играют большую роль, чем при течении воды.

### Течение вязкой жидкости. Формула Пуазейля.

Рассмотрим течение вязкой жидкости, обратившись непосредственно к опыту. Подсоединим тонкую горизонтальную стеклянную трубу с впаянными в нее вертикальными манометрическими трубками при помощи резинового шланга к водопроводному крану (рис. 4.6). При небольшой скорости течения хорошо видно понижение уровня воды в манометрических трубках в направлении течения ( $h_1 > h_2 > h_3$ ). Это, в свою очередь, указывает на наличие градиента давления вдоль оси трубки — статическое давление в жидкости уменьшается по потоку. При равномерном прямолинейном течении жидкости силы давления уравновешиваются силами вязкости. Уравнение Навье-Стокса для этого случая запишется в виде

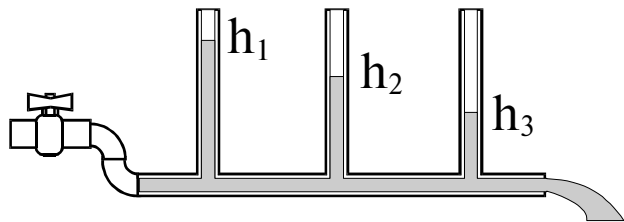


Рис. 4.6

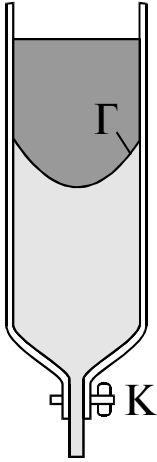


Рис. 4.7

$$-\text{grad } p + \mu \Delta v = 0. \quad (4.12)$$

Распределение скоростей в поперечном сечении потока вязкой жидкости можно наблюдать при ее вытекании из вертикальной трубки через узкое отверстие (рис. 4.7). Если, например, при закрытом кране К налить вначале неподкрашенный глицерин, а затем сверху осторожно добавить подкрашенный, то в состоянии равновесия граница раздела  $\Gamma$  будет горизонтальной. Если кран К открыть, то граница примет форму, похожую на параболоид вращения. Это указывает на существование распределения скоростей в сечении трубки при вязком течении глицерина. Это распределение можно найти, проинтегрировав уравнение (4.12), записанное в цилиндрических координатах  $(x, r)$ . Однако можно поступить и проще. Приравняем нулю сумму сил вязкости и давления, действующих на цилиндрический объем жидкости радиуса  $r$  и длиной  $dx$  (рис. 4.8):

$$(p(x) - p(x + dx))\pi r^2 + \mu 2\pi r dx \frac{dv}{dr} = 0. \quad (4.13)$$

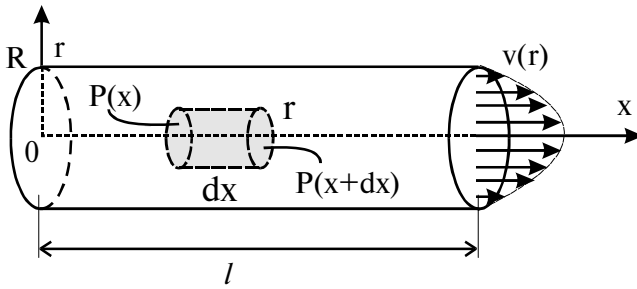


Рис. 4.8

Отметим, что равнодействующая сил давления направлена по потоку (вдоль оси  $x$ ), а сила вязкого трения, приложенная к боковой поверхности выделенного цилиндра — против потока, поскольку  $dv/dr < 0$ . Произведя сокращение и разделив (4.13) на  $dx$ , получаем

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = 0. \quad (4.14)$$

Величина градиента давления  $\frac{dp}{dx}$  в (4.14) не зависит от радиуса  $r$ , т.к. давление  $p = p(x)$  и в поперечном сечении  $x = \text{const}$  не меняется. Это позволяет проинтегрировать (4.14):

$$\frac{dp}{dx} \int_R^r r dr = 2\mu \int_0^v dv. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) дает возможность рассчитать распределение скоростей  $v(r)$  при условии, что у стенок трубы эта скорость равна нулю. Из (4.15) получаем

$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2). \quad (4.16)$$

Давление равномерно падает в направлении оси  $x$ , поэтому  $-\frac{dp}{dx} > 0$

и не зависит от  $x$ . Параболическое распределение скоростей (4.16) в одном из сечений трубы изображено на рис. 4.8. Поток вектора скорости через поперечное сечение трубы, или объем жидкости, протекающей через сечение в единицу времени (на практике употребляют термин «расход жидкости») оказывается равным

$$N_v = \int v dS = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left( -\frac{dp}{dx} \right). \quad (4.17)$$

Для практических целей расход жидкости определяют по формуле Пуазейля

$$N_v = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{\ell}. \quad (4.18)$$

Здесь расход воды  $N_v$  пропорционален разности давлений  $p_1 - p_2$  на концах трубы длиной  $\ell$ . Следует обратить внимание на существенную зависимость пропускной способности трубы от ее радиуса  $R$ . При заданном давлении на входе водопроводной сети увеличение диаметра труб вдвое приводит к увеличению их пропускной способности в 16 раз!

Пользуясь формулой Пуазейля, можно определить вязкость жидкости. Так, например, в опыте, изображенном на рис. 4.6, легко измерить разность давлений и расход жидкости и при известном радиусе горизонтальной трубки рассчитать вязкость жидкости. Однако более удобно вязкость жидкости определять по методу Стокса, измеряя время падения шарика в этой жидкости (см. ниже).

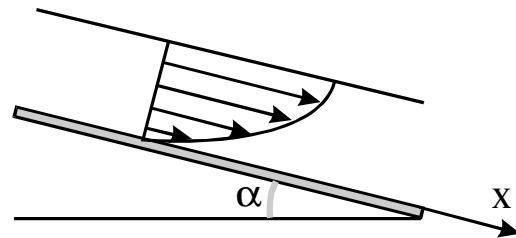


Рис. 4.9

Параболический профиль скорости слоев, как нетрудно подсчитать, будет и при течении жидкости между двумя пластинами, как изображено на рис. 4.4. Если этот рисунок разрезать посередине на высоте  $h/2$  и наклонить нижнюю пластину под углом  $\alpha$ , то мы получим картину течения воды в реке под действием силы тяжести (рис. 4.9). При расчете профиля скоростей

течения вместо градиента давления  $\frac{dp}{dx}$  можно использовать компоненту силы

тяжести  $F_x = \rho g \sin \alpha$ .

### Ламинарное и турбулентное течение.

Обратимся теперь к вопросу об устойчивости течения жидкости по трубам. С этой целью поставим следующий эксперимент. Пусть жидкость вытекает из сосуда через горизонтальную стеклянную трубку (рис. 4.10). Для контроля за характером течения будем при помощи капилляра впускать ту же, но окрашенную жидкость во входное сечение трубки.

В случае малого поперечного сечения трубки и не очень большой скорости течения окрашенная струйка движется прямолинейно строго вдоль оси

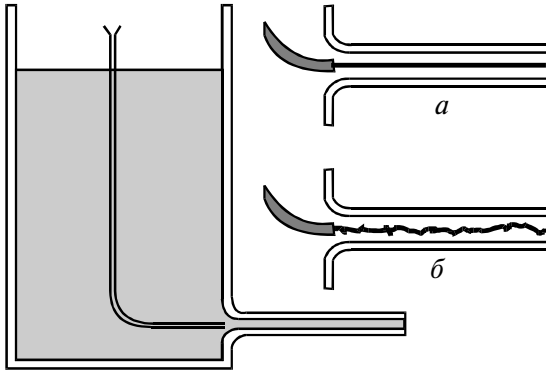


Рис. 4.10

трубки (ситуация *a* на рис. 4.10). При большем сечении или при увеличении скорости наблюдается нерегулярное движение, когда струйка разбивается на множество извилистых струек (ситуация *б*). В первом случае движение называется слоистым, или ламинарным, а во втором — турбулентным. При ламинарном течении силы вязкости сглаживают боковые движения жидкости, возникающие вследствие флуктуаций и различных неровностей стенок

трубы. При недостаточной вязкости случайные боковые движения жидкости усиливаются, способствуя тем самым возникновению турбулентности. Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при некотором числе Рейнольдса, получившем название критического:

$$Re_{кр} = \left( \frac{\rho v R}{\mu} \right)_{кр}. \quad (4.19)$$

Значение этого критического числа сильно зависит от формы входной части трубы. В случае закругленного конца, как показано на рис. 4.10, течение остается ламинарным вплоть до больших чисел Рейнольдса. Область критических чисел  $Re_{кр}$  лежит между значениями 1200 (незакругленный вход) и 20000 (закругленный вход). Поэтому в литературе приводятся весьма различные значения  $Re_{кр}$ .

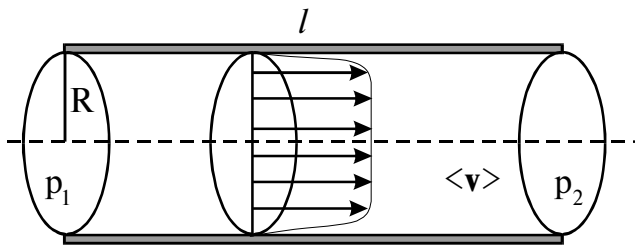


Рис. 4.11

При установившемся турбулентном течении скорость в данной точке случайным образом меняется со временем, однако средняя скорость  $\langle v \rangle$  направлена вдоль оси трубы. Она остается постоянной по сечению трубы,

и только в очень тонком пограничном слое спадает до нуля у ее стенок. На практике для расчета турбулентного течения жидкости по трубе используется формула

$$p_1 - p_2 = k\rho \langle v \rangle^2 \frac{\ell}{R}, \quad (4.20)$$

в которой  $k$  — безразмерный гидравлический коэффициент.

Средняя же по сечению скорость ламинарного течения из формулы Пуазейля (4.18) получается равной

$$\langle v \rangle = \frac{N_v}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{p_1 - p_2}{\ell}. \quad (4.21)$$

Разность давлений как функция скорости определяется формулой

$$p_1 - p_2 = \frac{8\mu}{R} \langle v \rangle \frac{\ell}{R}. \quad (4.22)$$

Если сравнить перепады давлений для турбулентного (4.20) и ламинарного (4.22) течений, то легко видеть, что повышение скорости прокачки жидкости по трубам при турбулентном течении потребует значительно большего увеличения перепада давлений, чем при ламинарном. Известен исторический факт прокладки нефтепровода в России, спроектированного на основе формулы (4.20). Однако при приложенной разности давлений пропускная способность нефтепровода оказалась выше расчетной. Ошибка проекта (к счастью, удачная) состояла в том, что, несмотря на большой диаметр труб, течение вязкой нефти по ним было ламинарным, и пропускная способность нефтепровода должна была бы рассчитываться по формуле (4.22). Формулы (4.20) и (4.22) можно объединить в одну, если принять, что безразмерный гидравлический коэффициент в (4.20) зависит от числа Рейнольдса:

$$k = k_0 + \frac{8}{Re}.$$

Тогда при  $Re > Re_{кр}$  коэффициент  $k \cong k_0$ , и течение турбулентное. Напротив, при  $Re \leq 1$   $k \cong \frac{8}{Re}$ , и формула (4.20) переходит в (4.22). На рис. (4.12) изображен график зависимости перепада давления в трубах от скорости течения. Однако, если двигать трубу относительно неподвижной жидкости, то кривую на рис. 4.12 с известной натяжкой можно интерпретировать как зависимость силы сопротивления, приходящейся на единицу площади боковой поверхности трубы, от скорости ее движения в жидкости. При малых скоростях сила сопротивления пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости.

При свободном ламинарном течении жидкости (в отсутствие направляющих поверхностей) развиваются неустойчивости, и ламинарное течение переходит в турбулентное. На рис. 4.13. представлено изображение струи жидкости (число Рейнольдса  $Re = 250$ ). Хорошо видно, что течение от ламинарного режима через переходный трансформируется в турбулентный. До настоящего времени нет

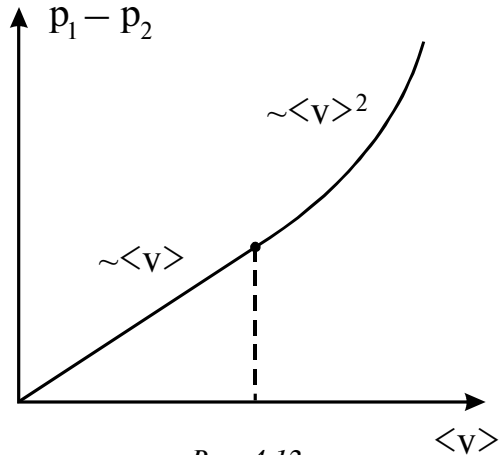


Рис. 4.12



Рис. 4.13

ясного понимания всех стадий развития турбулентности. Классическая линейная теория устойчивости дает качественно верное описание начальной стадии разрушения ламинарности. Ясно, что переход к турбулентному течению является существенно нелинейным процессом, и теория устойчивости должна базироваться на анализе нелинейных уравнений гидродинамики.

Отметим, что в области ламинарного течения линии тока практически параллельны. Поле скоростей является потенциальным (по аналогии с однородным полем силы тяжести). Описание течения может быть значительно проще, если использовать потенциал скоростей

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.23)$$

В ряде задач проще рассчитать сначала потенциал скоростей, а затем и скорость:

$$\mathbf{v} = -\text{grad } \Phi.$$

В области турбулентного течения невозможно однозначно ввести потенциал скоростей. Скорость течения  $\mathbf{v}$  в каждой точке является случайной функцией времени, и необходимо развивать статистический подход к описанию турбулентного течения.

Очень плодотворным является понятие вихря. С математической точки зрения вихревой характер течения имеет место тогда, когда отлична от нуля «работа» вектора скорости  $\mathbf{v}$  по замкнутому контуру, получившая название циркуляции:

$$\Gamma = \oint_{\ell} \mathbf{v} d\ell \neq 0. \quad (4.24)$$

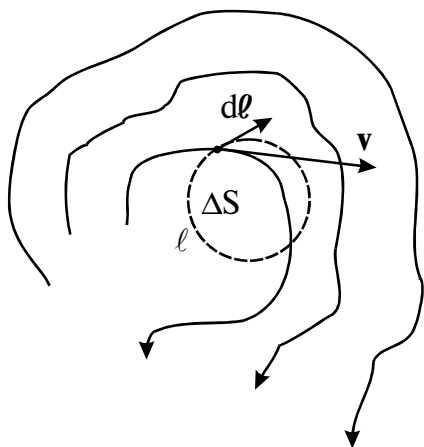


Рис. 4.14

На рис. 4.14 схематично изображены линии тока в фиксированный момент времени при турбулентном течении и показан контур  $\ell$ , по которому вычисляется интеграл (4.24). Символ  $\oint$  означает, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Если размеры контура стягивать в точку, то в этой точке интенсивность вихреобразного течения будет характеризоваться ротором вектора скорости в соответствии с определением

$$(\text{rot } \mathbf{v})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}. \quad (4.25)$$

Здесь  $\Delta S$  — площадь маленького контура,  $\mathbf{n}$  — нормаль к этой площадке, направленная туда же, куда и острие буравчика, рукоятка которого вращается в положительном направлении обхода контура. Формула (4.25) дает лишь значение проекции вектора  $\text{rot } \mathbf{v}$  на направление нормали, поскольку контур ориентирован произвольно. Чтобы рассчитать компоненты вектора  $\text{rot } \mathbf{v}$ , надо вычислить циркуляции по контурам, нормали к которым совпадают с соответствующими осями координат.

В качестве иллюстрации к сказанному подсчитаем ротор вихревого течения воды вблизи выпускного отверстия ванны. Если принять, что части-



цы движутся с угловой скоростью  $\omega$ , то циркуляция вектора скорости по контуру радиуса  $r$  с центром на оси сливного отверстия и лежащему в плоскости, перпендикулярной к этой оси, равна

$$\Gamma = v \cdot 2\pi r = \omega r 2\pi r = 2\pi r^2 \omega. \quad (4.26)$$

При такой ориентации контура вектор  $\text{rot } \mathbf{v}$  будет направлен по нормали  $\mathbf{n}$  к контуру и равен

$$\text{rot } \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{\Delta S} \mathbf{n} = \frac{2\pi r^2 \omega}{\pi r^2} \mathbf{n} = 2\omega. \quad (4.27)$$

Приведем без доказательства формулу для вектора  $\text{rot } \mathbf{v}$  в декартовых координатах:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (4.28)$$

Здесь  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{k}$  - единичные векторы вдоль соответствующих декартовых осей координат. Желающие могут подсчитать (4.27), пользуясь формулой (4.28).

### О турбулентности атмосферы.

При описании атмосферы мы отмечали, что в нижнем (приземном) слое происходит интенсивное конвективное перемешивание воздуха. Скорость воздушных потоков в каждой точке является случайной функцией времени. Это подтверждается, например, оптическим явлением мерцания звезд, свет от которых рассеивается на случайных областях с повышенной и пониженной плотностью атмосферы. Это явление аналогично дрожанию и искажению объектов, наблюдаемых через пространство с сильным испарением воды после дождя в теплую погоду или бензина на автозаправочных станциях.

Вариации скорости в турбулентных потоках атмосферы также являются случайными, поэтому описание движения атмосферы требует статистического подхода. В полном объеме осуществить такое описание невозможно. Очень плодотворным является представление турбулентных потоков в виде совокупности вихрей с размерами от  $\ell_0 \sim 1$  мм до  $L_0 \sim 1$  м. Характерные размеры  $\ell_0$  и  $L_0$  носят название внутреннего и внешнего масштабов турбулентности, причем обе величины возрастают при удалении от поверхности Земли.

Внутренний масштаб возникает как результат последовательного распада больших, но неустойчивых вихрей на более мелкие, которые, в свою очередь, распадаются дальше вплоть до вихрей размером порядка нескольких миллиметров. Оценку величины внутреннего масштаба можно получить из следующих простых соображений. Если в потоке, движущемся со скоростью  $v$ , имеется неоднородность с линейным размером  $\sim \ell$ , то кинетическая энергия, переносимая неоднородностью,

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \sim \rho \ell^3 v^2. \quad (4.29)$$

Из-за наличия вязкости часть этой энергии диссипирует в тепло. Если неоднородность смещается на расстояние  $\sim \ell$ , то количество тепла  $Q$  равно работе сил вязкого трения

$$Q = F_{\text{тр}} \cdot \ell \sim \mu \frac{v}{\ell} S \ell \sim \mu v \ell^2. \quad (4.30)$$

Здесь учтено, что  $\frac{dv}{d\ell} \sim \frac{v}{\ell}$ ;  $S \sim \ell^2$  — площадь поверхности неоднородности, к которой приложена сила вязкости. Отношение кинетической энергии к количеству теплоты приблизительно равно числу Рейнольдса:

$$\frac{E_k}{Q} \equiv \frac{\rho v \ell}{\mu} = Re. \quad (4.31)$$

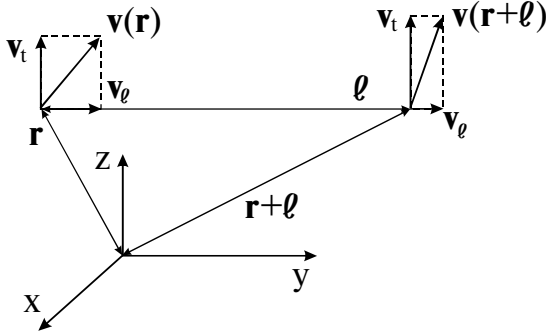


Рис. 4.15

Если  $E_k > Q$  ( $Re > 1$ ), то силы инерции превосходят силы вязкости. В таком интервале скоростей, называемым инерционным интервалом, вихри распадаются на более мелкие, у которых число Рейнольдса  $Re \sim 1$ . При минимальных скоростях течения  $v \sim 1$  см/с такому числу Рейнольдса соответствует  $\ell \sim 1$  мм, что по порядку величины совпадает с внутренним масштабом турбулентности.

А.Н. Колмогоров рассмотрел изменение во времени разности скоростей в точках пространства, разнесенных на расстояние  $\ell$  (рис. 4.15). Он установил, что средний квадрат разности скоростей  $\langle [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \ell) - \mathbf{v}(\mathbf{r})]^2 \rangle$  можно описать универсальной зависимостью в инерционном интервале  $\ell_0 < |\ell| < L_0$ . Для компонент вектора скорости, направленных вдоль  $\ell$ ,

$$D_{\ell\ell} = \langle [v_{\ell}(\mathbf{r} + \ell) - v_{\ell}(\mathbf{r})]^2 \rangle = C_v^2 \ell^{2/3}. \quad (4.32)$$

Функция  $D_{\ell\ell}$  называется структурной функцией пульсаций скорости и описывается универсальной зависимостью  $\ell^{2/3}$ . Она не зависит от  $\mathbf{r}$  вследствие статистической однородности пульсаций скорости, и не зависит также от направления вектора  $\ell$ , а только от его величины  $\ell$ . Последнее является следствием статистической изотропности турбулентности. Структурная функция для поперечных компонент  $v_t$   $D_{tt} = \langle [v_t(\mathbf{r} + \ell) - v_t(\mathbf{r})]^2 \rangle$  с учетом несжимаемости атмосферы ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ) выражается через  $D_{\ell\ell}$  следующим образом:

$$D_{tt} = \frac{1}{2\ell} \frac{d}{d\ell} (\ell^2 D_{\ell\ell}). \quad (4.33)$$

$C_v^2$  называется структурной постоянной скорости и связана с энергией турбулентного движения.

Введенная выше функция скоростей  $D_{\ell\ell}$  позволяет рассчитать структурную функцию флуктуаций температуры, также подчиняющуюся закону «2/3»:

$$D_{TT} = \langle [T(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) - T(\mathbf{r})]^2 \rangle = C_T^2 \ell^{2/3}. \quad (4.34)$$

Вывод этой формулы может быть выполнен на основе усреднения решений уравнений гидродинамики и теплопереноса при учете (4.32), что выходит за рамки нашего курса.

Структурная постоянная температуры  $C_T^2$  может быть рассчитана, если измерить микропульсации температуры с помощью чувствительных датчиков, разнесенных на расстояние  $\ell$ , и усреднить результаты за длительный (порядка 1 часа) отрезок времени. Такие датчики устанавливаются на мачтах, шарах-зондах и самолетах. В настоящее время широкое применение получили методы аку-

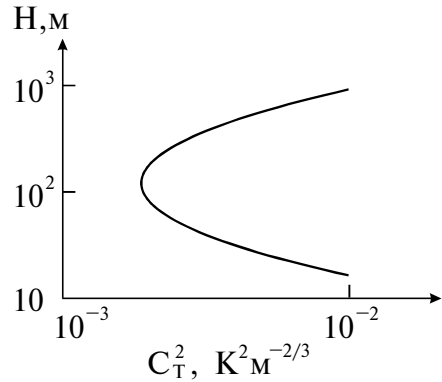


Рис. 4.16

стической локации, позволяющие изучать высотную зависимость  $C_T^2$  вплоть до высот  $\sim 1$  км. Эти методы основаны на том, что участки атмосферы с интенсивными флуктуациями температуры (и, следовательно, плотности) сильнее отражают акустические импульсы, чем участки со слабыми температурными флуктуациями.

Высотная зависимость  $C_T^2$ , полученная акустическим методом, изображена на рис. 4.16. Хотя флуктуации температуры составляют сотые (и даже меньше) доли градуса, тем не менее они приводят к замет-



а



б

Рис. 4.17

ным флуктуациям показателя преломления  $n$ . Структурная функция  $n$  получается из материального уравнения  $n = n(p, T)$  ( $p$  и  $T$  – равновесные значения давления и температуры) и также подчиняется универсальному закону «2/3»:

$$D_{nn} = \left\langle [n(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) - n(\mathbf{r})]^2 \right\rangle = C_n^2 \ell^{2/3}. \quad (4.35)$$

Величина  $C_n^2$  называется структурной постоянной показателя преломления и лежит в пределах  $10^{-15} \text{ м}^{-2/3} < C_n^2 < 10^{-14} \text{ м}^{-2/3}$ . Она легко подсчитывается из уравнения  $n = n(p, T)$ , если известна  $C_T^2$ .

Формула (4.35) играет фундаментальную роль в задачах распространения световых волн через атмосферу, выделенных в самостоятельную науку — атмосферную оптику. На рис. 4.17 (а) приведены результаты компьютерного моделирования мгновенного изображения здания Московского университета, рассматриваемого через турбулентную атмосферу в подзорную трубу с расстояния в 20 километров. С течением времени это изображение, разумеется, будет хаотически меняться. Однако при известном распределении флуктуаций показателя преломления с помощью компьютерных методов обработки изображений можно устранить турбулентные искажения (рис. 4.17 б).

#### Взаимодействие тела с потоком идеальной жидкости.

Одной из важнейших проблем гидро- и аэродинамики является всестороннее исследование и установление основных закономерностей воздействия потоков жидкости и газа на обтекаемые ими тела. Эта область знаний приобрела исключительное значение при проектировании гидроэлектростанций, ветряных двигателей, в турбиностроении, авиации и др.

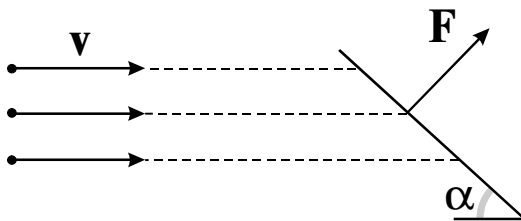


Рис. 4.18

Еще Ньютоном была сформулирована получившая название ударной теории, базирующаяся на представлении воздуха в виде отдельных не связанных друг с другом материальных частиц. Согласно этой теории сила давления воздушного потока на площадку  $S$ , наклоненную под углом  $\alpha$  (углом атаки) к направлению потока, равна

$$F = \rho S v^2 \sin^2 \alpha. \quad (4.36)$$

Эта формула легко получается, если подсчитать импульс, передаваемый площадке в единицу времени струей в результате неупругих ударов составляющих ее материальных частиц (рис. 4.18). Опытная проверка этой формулы показала, что она неверно описывает зависимость силы  $F$  от угла атаки. И только при скоростях потока, значительно больших скорости звука, формула Ньютона оказывается справедливой, что подтверждается опытным путем. На самом деле величина этой силы пропорциональна  $\sin \alpha$ . Если бы формула (4.36) была верна, то это означало бы невозможность полетов на аппаратах тяжелее воздуха. Все это говорит о том, что модель воздуха как совокупности дискретных частиц является неверной. Реальные же силы могут быть подсчитаны на основе гидродинамического подхода, учитывающего обтекание тела движущимся потоком континуальной среды.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере. Пусть в движущемся со скоростью  $v_0$  потоке помещены диск и шар одинакового радиуса  $r$  (рис. 4.19). В центре диска в точке К, называемой критической, поток останавливается ( $v = 0$ ), и давление, согласно уравнению Бернулли, равно

$$p_k = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}. \quad (4.37)$$

Это давление больше статического давления  $p_0$  на величину  $\frac{\rho v_0^2}{2}$ , получившую ранее название гидродинамического давления, или динамического напора. Из-за поворота трубок тока на  $90^\circ$  давление в других точках на поверхности диска будет таким же, как и в точке К. Поэтому, если позади диска давление равно  $p_0$ , то поток действует на диск с силой

$$F_{\parallel} = (p_k - p_0)\pi r^2 = \frac{1}{2}\rho v_0^2 S. \quad (4.38)$$

Гидродинамическая сила  $F_{\parallel}$ , которая может трактоваться как сила лобового сопротивления при движении диска со скоростью  $v_0$  в потоке, вдвое меньше силы, вычисляемой на основе ударной теории (см. (4.36) при  $\sin \alpha = 1$ ). Если теперь в поток поместить шар, то по ударной теории на него будет действовать та же сила, что и на диск. При гидродинамическом подходе эта сила будет отсутствовать вовсе. Действительно, при симметричном потоке относительно сечения  $O_1O_2$  давления в произвольной точке М и симметричной точке М' будут одинаковы, поскольку одинаковы скорости потока в этих точках. Равенство нулю результирующей силы при плавном (безотрывном) обтекании идеальной жидкостью шара, цилиндра и др. называется парадоксом Даламбера. Давление в любой точке потока вблизи поверхности шара можно рассчитать, пользуясь уравнением Бернулли:

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}. \quad (4.39)$$

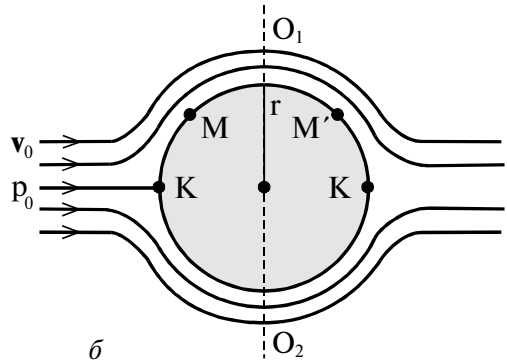
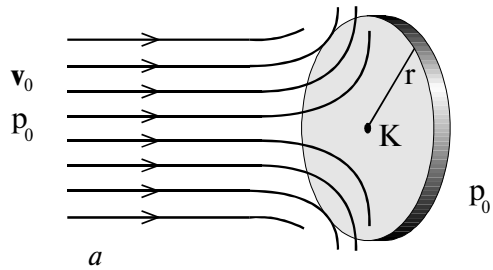


Рис. 4.19

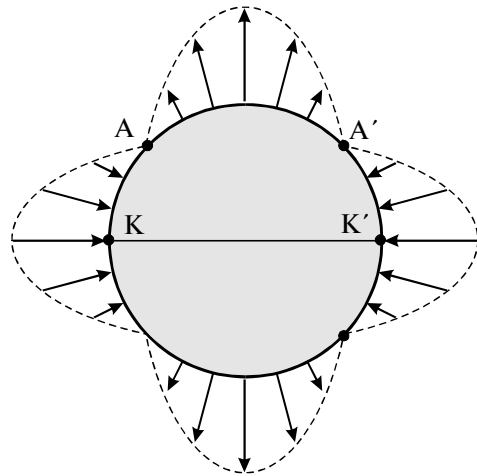


Рис. 4.20

На рис. 4.20 изображено распределение избыточных сил давления  $\sigma_p = p - p_0$ , действующих по нормали к поверхности шара. При этом сила направлена к поверхности, если  $p > p_0$ , и от поверхности при  $p < p_0$ . Отсутствие сил в точках А и А' есть результат равенства скоростей в этих точках исходной скорости потока:  $v_A = v'_A = v_0$ .

### Тело в потоке вязкой жидкости. Лобовое сопротивление.

Из повседневной практики известно, что поток реальной жидкости или газа действует с некоторой силой на тело, помещенное в этот поток. Для осесимметричного тела с осью симметрии, направленной вдоль потока, эта сила также будет направлена вдоль потока. Она получила название силы лобового сопротивления.

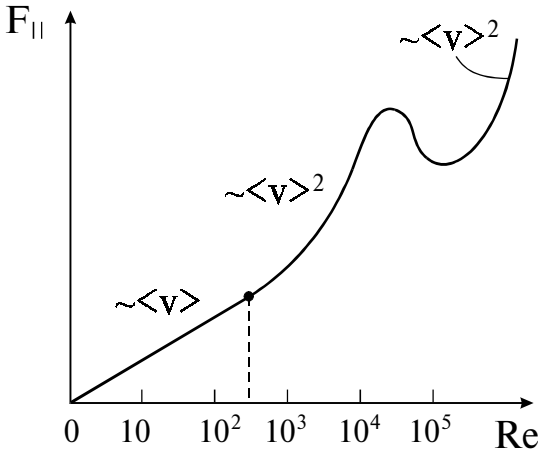


Рис. 4.21

Эта сила возрастает с увеличением скорости потока аналогично росту перепада давлений при увеличении скорости течения жидкости по трубе (см. рис. 4.12). Основные физические причины возникновения лобового сопротивления можно установить наиболее просто, если рассмотреть обтекание потоком шара радиуса  $r$ . На рис. 4.21.

изображена зависимость силы лобового сопротивления от числа Рейнольдса

$Re = \frac{\rho v r}{\mu}$ . При малых скоростях течения, когда  $Re \leq 10^2$ ,  $F_{||} \sim v$ . Это проис-

ходит потому, что на шар действуют силы вязкости, возникающие вследствие существования тонкого пограничного слоя вблизи поверхности шара. При таких скоростях происходит ламинарное (слоистое) течение жидкости. В настоящее время хорошо развита теория пограничного слоя, которая, в частности, позволяет оценить его толщину по формуле

$$\delta \cong \frac{r}{\sqrt{Re}}. \quad (4.40)$$

Линейный участок кривой, изображенной на рисунке (4.21), оканчивается при числах Рейнольдса  $Re \cong 10^2$ . Для таких чисел Рейнольдса толщина пограничного слоя на порядок меньше радиуса шара. Вне этого слоя реальная жидкость течет так же, как и идеальная, обтекая шар симметрично.

Наоборот, при числах  $Re \sim 1$  говорить о пограничном слое некорректно, т.к. градиенты скорости существенны в области, размеры которой значительно больше радиуса шара. Такая ситуация, например, имела место при вязком течении жидкости по трубам при  $Re \leq 1$ . Тогда градиенты скорости (и силы вязкости) были распределены по всему сечению трубы (см. формулу Пуазейля).

При малых числах Рейнольдса сила лобового сопротивления для шара подчиняется закону Стокса:

$$F_{\parallel} = 6\pi\mu r v. \quad (4.41)$$

Как уже упоминалось выше, вязкость жидкости можно измерить, наблюдая за движением тел в этой жидкости. Так, при падении шарика в жидкости его скорость изменяется в соответствии с уравнением:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_A - F_{\parallel}. \quad (4.42)$$

Здесь  $m$  — масса шарика,  $F_A$  — выталкивающая сила и  $F_{\parallel}$  — сила вязкого трения, определяемая формулой (4.41).

По истечении некоторого промежутка времени шарик приобретет максимальную скорость, с которой он практически равномерно будет падать вниз. Легко подсчитать эту скорость, положив сумму сил в правой части (4.42) равной нулю:

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) - 6\pi\mu r v = 0. \quad (4.43)$$

В эксперименте измеряют скорость падающего шарика и из (4.43) определяют вязкость жидкости  $\mu$ . Так, например, скорость падения стального шарика с радиусом  $r = 1$  мм в глицерине при  $40^\circ\text{C}$   $v \approx 0,5$  см/с, и вязкость  $\mu \approx 0,3$  кг/(м·с) Указанной скорости соответствует число Рейнольдса  $Re \approx 0,02$ , поэтому здесь отсутствует пограничный слой.

При скоростях потока, когда  $Re > 10^2$ , симметрия обтекания нарушается — позади шара происходит отрыв линий тока (рис. 4.22). При таких скоростях пограничный слой становится очень тонким,

а поперечные градиенты скорости в нем — большими. Силы вязкости, которые при этом возрастают, тормозят движение частиц среды, движущихся вдоль поверхности шара, настолько, что они не в состоянии полностью обогнуть шар. Хотя течение в тонком пограничном слое остается ламинарным, позади шара образуются вихри. Симметрия давлений в точках А и А' нарушается. Спереди шара течение такое же, как и в отсутствие трения, поэтому давление в точке К

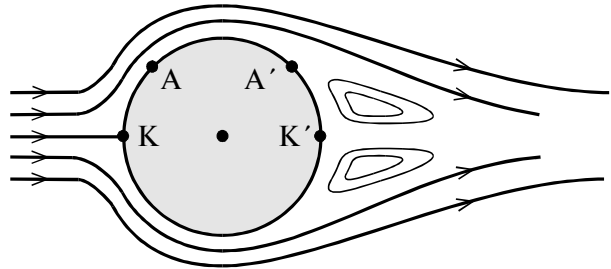


Рис. 4.22

остается ламинарным, позади шара образуются вихри. Симметрия давлений в точках А и А' нарушается. Спереди шара течение такое же, как и в отсутствие трения, поэтому давление в точке К  $p_K = p_0 + \rho v^2/2$ . Однако в точке К' давление  $p'_K \approx p_0$ . Поэтому результирующая сила давления, действующая на шар в направлении потока, будет пропорциональна гидродинамическому напору  $\rho v^2/2$  и площади поперечного сечения шара  $S = \pi r^2$ . На практике силу лобового сопротивления вычисляют по формуле

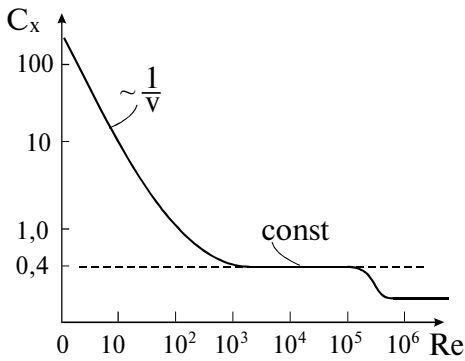


Рис. 4.23

$$F_{\parallel} = C_x \cdot S \frac{\rho v^2}{2}, \quad (4.44)$$

где  $C_x$  — коэффициент лобового сопротивления для тела данной формы. Область квадратичной зависимости силы  $F_{\parallel}$  от скорости  $v$  простирается вплоть до чисел Рейнольдса  $Re \sim 10^5$ . При больших скоростях пограничный слой постепенно турбулизуется, и при

$Re = 3 \cdot 10^5$  он полностью турбулентен. В области постепенной турбулизации пограничного слоя сила сопротивления

с ростом скорости даже уменьшается, поскольку сокращается область срыва потока. Однако затем квадратичная зависимость (4.44) опять восстанавливается, правда, с несколько меньшим коэффициентом  $C_x$ .

Для ламинарного и турбулентного обтекания тел можно использовать единую формулу для расчета силы лобового сопротивления

$$F_{\parallel} = C_x(Re) \cdot S \cdot \frac{\rho v^2}{2}, \quad (4.45)$$

в которой коэффициент лобового сопротивления должен зависеть от скорости так, как это изображено на рис. 4.23. По своему виду эта зависимость очень похожа на зависимость безразмерного гидравлического коэффициента от числа  $Re$  (см. выше).

Таблица  
коэффициентов лобового сопротивления

	тело	$C_x$
	диск	1,11
	полусфера	1,35...1,40
	полусфера	0,30...0,40
	шар	0,4
	каплевидное	0,045
	каплевидное	0,1

Иллюстрацией к возникновению силы лобового сопротивления из-за несимметричного обтекания тела служат представленные в таблице величины коэффициентов лобового сопротивления для тел различной формы. Хорошо видно, что наименьшим коэффициентом лобового сопротивления обладает осесимметричное каплевидное тело, у которого тупой нос и заостренная задняя часть. При обтекании этого тела поток хорошо смыкается позади него, препятствуя, тем самым, падению давления за телом.

### Подъемная сила. Формула Жуковского.

Опыт показывает, что при обтекании идеальной жидкостью несимметричных тел, да еще произвольно ориентированных по направлению к потоку, на эти тела будет действовать сила  $F$ , направленная под некоторым



углом к потоку (см. рис. 4.18). Составляющая этой силы  $F_{\parallel}$ , параллельная потоку, является силой лобового сопротивления.

Другая составляющая  $F_{\perp}$ , направленная поперек потока, носит название подъемной силы. В качестве важнейшего примера рассмотрим возникновение подъемной силы при обтекании воздухом крыла самолета. Типичная картина безотрывного обтекания воздухом профиля крыла самолета при небольшом угле атаки  $\alpha$  изображена на рис. 4.24а. Уже из одного только факта, что поток после обтекания приобрел составляющую импульса, направленную вниз, следует, что такой же импульс, направленный вверх, приобретает крыло. В случае ламинарного обтекания крыла, исходя из структуры линий тока, можно проанализировать распределение сил давления  $\sigma_p = p - p_0$  на основе уравнения Бернулли (рис. 4.24б). Сумма этих сил имеет равнодействующую  $F$ , направленную под небольшим углом к вертикали. Таким образом, создается подъемная сила  $F_{\perp}$ , значительно превосходящая силу лобового сопротивления.

Из распределения сил давления видно, что подъемная сила создается не столько повышением давления под крылом, сколько падением давления над крылом. Эта сила пропорциональна гидродинамическому давлению, площади крыла  $S$  и вычисляется по формуле

$$F_{\perp} = C_y S \frac{\rho v^2}{2} \quad (4.46)$$

где  $C_y$  — коэффициент подъемной силы, зависящий от угла

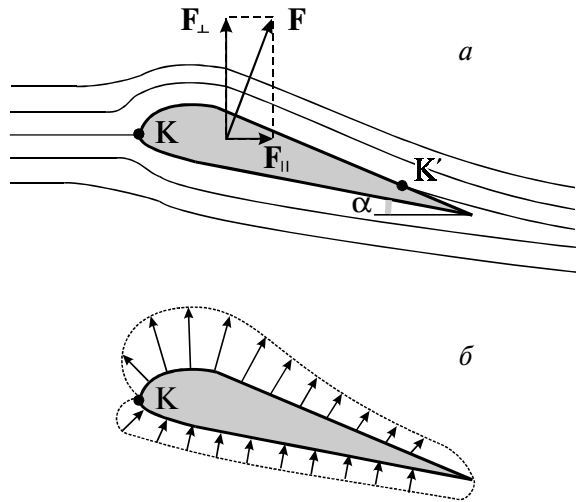


Рис. 4.24

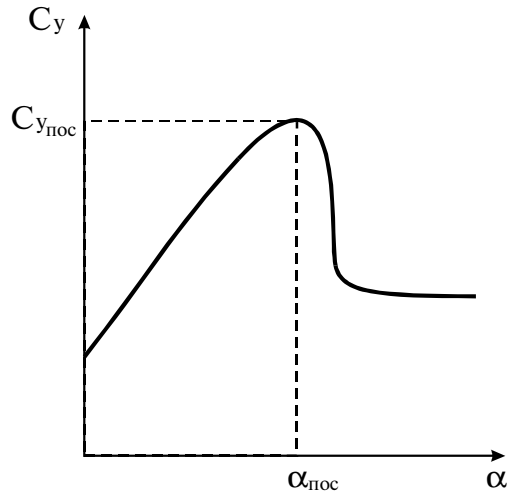


Рис. 4.25

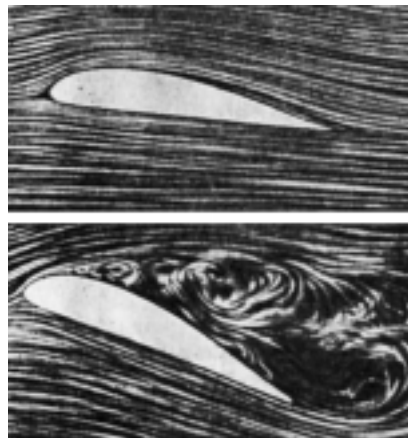


Рис. 4.26

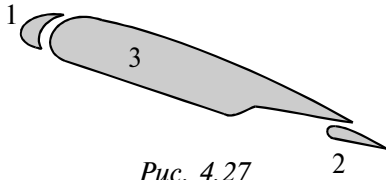


Рис. 4.27

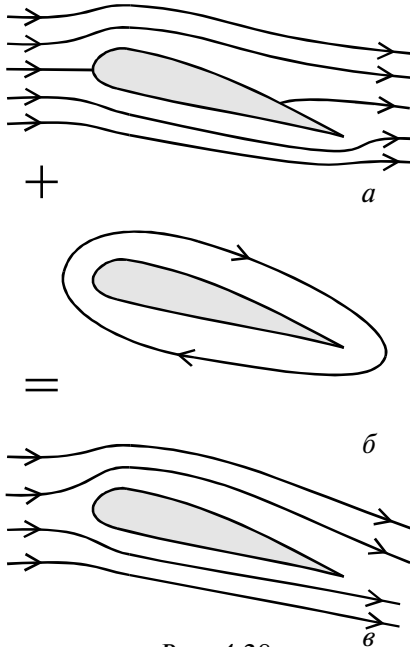


Рис. 4.28

атаки  $\alpha$ . Если бы воздух обтекал крыло безотрывно, то коэффициент  $C_y$  возрастал бы пропорционально  $\alpha$ . Однако опыты показывают, что при углах атаки  $\alpha = 12^\circ \div 18^\circ$  (в зависимости от формы крыла) подъемная сила достигает максимума, а затем начинает падать (рис. 4.25). Угол атаки, при котором коэффициент  $C_y$  максимален, называется посадочным, или критическим, а соответствующий коэффициент также называется посадочным. У обычных крыльев  $C_{y_{\text{пос}}} = 1,2 \div 1,6$ .

На рис. 4.26 представлены фотографии потоков при углах атаки  $\alpha < \alpha_{\text{пос}}$  и  $\alpha > \alpha_{\text{пос}}$ . Хорошо видимый срыв потока и образование завихрений приводят к повышению давления над крылом и уменьшению подъемной силы. Коэффициент  $C_{y_{\text{пос}}}$  определяет посадочную скорость самолета  $v_{\text{пос}}$ , определяемую из равенства подъемной силы (4.46) весу самолета. Для снижения скорости посадки необходимо предотвратить срыв потока при увеличении угла атаки. В современной авиации этого добиваются применением на крыльях посадочных приспособлений — подкрылков (1) и закрылков (2), выдвигаемых механически из крыла (3) при посадке самолета (рис. 4.27).

Выдающаяся роль в разработке теории обтекания тел потоком, имевшей исключительно важное значение для развития авиации, принадлежит Н.Е.Жуковскому. Он показал, что подъемная сила крыла связана с вихрем, названным им присоединенным, обтекающим крыло. Основная идея расчета подъемной силы сводится к следующему. Если бы в воздухе отсутствовали силы вязкости, то картина обтекания крыла была бы такой, как на рис. 4.28(а). Подъемная сила, однако, будет равна нулю, поскольку поток позади крыла не изменил направления движения. Обтекание крыла реальным воздухом, изображенное на рис. 4.28(б), может рассматриваться как суперпозиция невязкого обтекания (а) и вихревого движения воздуха вокруг крыла самолета по часовой стрелке (б). Величина подъемной силы напрямую связана с наличием циркуляции скорости  $\Gamma$  (4.24) по контуру, охватывающему крыло самолета. Этот контур должен находиться вне пограничного слоя (б), толщина которого для движущегося с дозвуковой скоростью самолета составляет несколько сантиметров. Из закона сохранения момента импульса следует, что позади крыла должны образовываться вихри с движением в них воздуха против часовой стрелки. На рис. 4.29 представлена фотография вихревой дорожки, образующейся при обтекании модели крыла самолета. Эта цепочка вихрей появляется потому, что при отрыве от крыла одного вихря циркуляция

вокруг крыла  $\Gamma$  из-за вязкости постоянно уменьшается. Поток «стремится» вернуться к конфигурации (а) на рис. 4.28, при которой частицы воздуха огибают заднюю кромку крыла в направлении снизу вверх. А это,

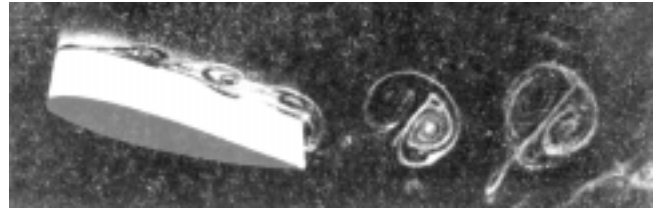


Рис. 4.29

в свою очередь, приводит к образованию нового вихря и восстановлению циркуляции  $\Gamma$  вокруг крыла. При полете самолета вихри периодически отрываются от крыла и уносятся потоком воздуха. Таким образом, вязкость способствует формированию обтекания крыла, соответствующего ситуации (в). Расчет же подъемной силы может быть проведен на основе результирующей сил давления, исходя из теории течения идеальной жидкости. Распределение давлений вблизи пограничного слоя определяется формулой:

$$p = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}. \quad (4.47)$$

Сила, действующая на элемент поверхности крыла длиной  $L$ , равна

$$dF = (p_n - p_v)L \cdot dl \quad (4.48)$$

и зависит от разности давлений снизу и сверху от элемента крыла (рис. 4.30). Эта разность давлений может быть выражена с помощью (4.47) через скорости:

$$p_n - p_v = \frac{1}{2} \rho (v_v^2 - v_n^2) = \frac{1}{2} \rho (v_v + v_n)(v_v - v_n). \quad (4.49)$$

Скорости  $v_n$  и  $v_v$  берутся в симметричных точках относительно хорды крыла длиной  $b$  (наибольшего расстояния между передней и задней кромкой крыла), элемент длины  $dl$  в формуле (4.48) — это элемент длины хорды, поскольку сила  $dF$  направлена перпендикулярно хорде. Подставляя (4.49) в (4.47) и учитывая, что  $v_n + v_v \approx 2v$ , находим полную силу:

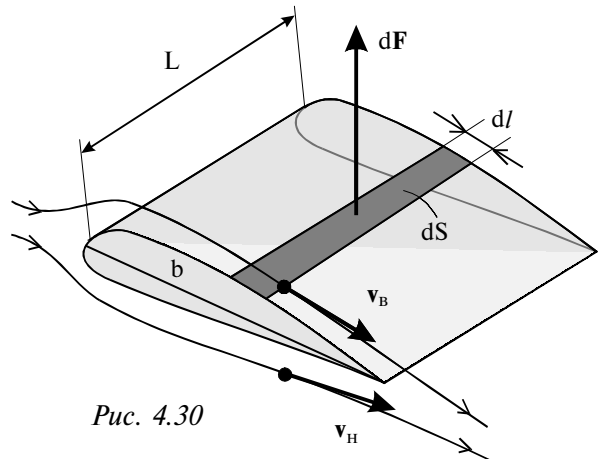


Рис. 4.30

$$F_{\perp} = \int dF = \rho v L \int_0^b (v_v - v_n) dl = \rho v L \Gamma. \quad (4.50)$$

Эта формула получена Н.Е.Жуковским и носит его имя. Циркуляция  $\Gamma$ , определяющая подъемную силу, пропорциональна углу атаки и для плоского крыла

$$\Gamma = \frac{1}{2} \rho b v \alpha. \quad (4.51)$$

Для профильного крыла, изображенного на рис. 4.30, подъемная сила существует и при нулевом угле атаки ( $\alpha = 0$ ) и исчезает, когда угол атаки достигает некоторой отрицательной величины.

Отметим, что при увеличении угла атаки растет и лобовое сопротивление. Отношение полезной подъемной силы к вредной силе лобового сопротивления определяет «качество крыла». Для легких спортивных самолетов и истребителей это отношение находится в пределах 12 ÷ 15, а для тяжелых грузовых и пассажирских самолетов оно достигает величин 17 ÷ 25. Аэродинамическое качество повышается при улучшении обтекания (уменьшении  $C_x$ ) и увеличении отношения размаха крыла  $L$  к длине его хорды  $b$ . Из распределения сил давления следует, что равнодействующая этих сил смещена к передней кромке крыла. Это необходимо принимать во внимание при определении моментов сил, действующих на крыло и определяющих устойчивость самолета. Весьма поучительным является опыт с тонким диском, находящимся в потоке воздуха. Если струю от вентилятора направить на диск, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 4.31), то диск займет устойчивое положение, при котором его плоскость перпендикулярна потоку воздуха. Если диск случайно повернется, и кромка  $K_1$  окажется ближе к вентилятору, чем кромка  $K_2$ , то возникнет подъемная сила, точка приложения которой будет расположена между кромкой  $K_1$  и осью вращения диска. Момент этой силы повернет диск в исходное устойчивое положение. Отметим, что положение, при котором плоскость диска направлена по потоку, является также положением равновесия, однако это равновесие является неустойчивым.

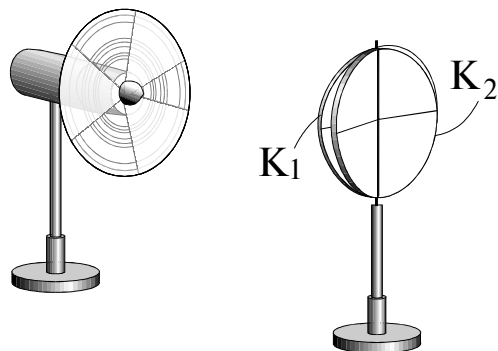


Рис. 4.31

который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 4.31), то диск займет устойчивое положение, при котором его плоскость перпендикулярна потоку воздуха. Если диск случайно повернется, и кромка  $K_1$  окажется ближе к вентилятору, чем кромка  $K_2$ , то возникнет подъемная сила, точка приложения которой будет расположена между кромкой  $K_1$  и осью вращения диска. Момент этой силы повернет диск в исходное устойчивое положение. Отметим, что положение, при котором плоскость диска направлена по потоку, является также положением равновесия, однако это равновесие является неустойчивым.

### Эффект Магнуса.

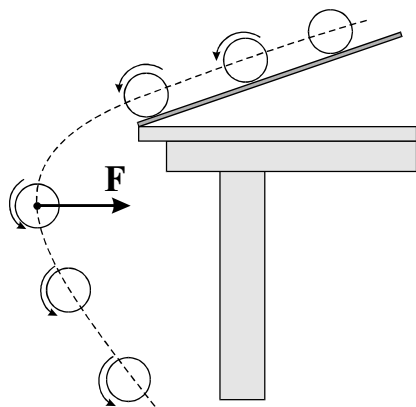


Рис. 4.32

Если расположить цилиндр поперек потока, то на него будет действовать сила лобового сопротивления. Однако если цилиндр привести во вращение вокруг своей оси, то появится также и подъемная сила. В этом легко можно убедиться, если пронаблюдать за траекторией падающего легкого пенопластового цилиндра, скатившегося с наклонной плоскости (рис. 4.32). Цилиндр падает под стол, что свидетельствует о наличии силы  $F$ , направленной перпендикулярно скорости движения оси цилиндра. Эта сила появляется вследствие вращения цилиндра в вязком воздухе. Само явление получило название эффекта Магнуса.

При вращении цилиндра воздух в пограничном слое увлекается поверхностью цилиндра. Обтекание вращающегося цилиндра будет выглядеть так, как показано на рис. 4.33. Скорость воздушного потока над цилиндром будет больше, чем под ним. Величина силы  $F$ , как показывает расчет, возрастает с увеличением как скорости потока, так и угловой скорости вращения цилиндра.

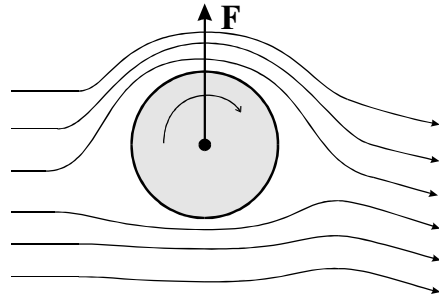


Рис. 4.33

Эффект Магнуса не получил широкого технического применения, хотя предпринимались попытки заменить паруса кораблей вращающимся цилиндром (ротатором Флеттнера). Однако в спортивных играх с мячом последний часто подкручивают, чтобы задать полету мяча нужную траекторию.

### Экранный эффект.

Этот эффект заключается в увеличении подъемной силы, а также в снижении лобового сопротивления на высотах, соизмеримых с длиной хорды крыла летательного аппарата. Прирост подъемной силы крыла вблизи ровного участка Земли или поверхности воды (экрана) вызывается повышением динамического давления на нижней поверхности крыла вследствие близости экрана. Снижение лобового сопротивления связано с уменьшением интенсивности образования вихрей около концов крыльев.

Первыми начали изучать экранный эффект судостроители. Шведский ученый Э. Сведберг в 1716 г. предложил идею использования «воздушной подушки» для уменьшения сопротивления движению судов. Впоследствии эта идея нашла воплощение при строительстве экранопланов — воздушных судов, летающих вблизи экрана. Первый экспериментальный экраноплан был построен в 1935 г. финским инженером Т. Каарно. Разработка и производство экранопланов, не имеющих мировых аналогов, получили широкое развитие



Рис. 4.34

в 80-е годы в СССР. Полет экраноплана «Лунь» (декабрь 1989 г.) показан на фотографии (рис. 4.34). Экраноплан соединяет в себе положительные качества самолетов и кораблей, что позволяет использовать его для перевозки пассажиров и грузов, поисково-спасательных работ, военных целей и др. Скорость движения таких судов у экрана составляет 400–550 км/ч, при полете вне экрана — до 750 км/ч; высота полета вне экрана — до 7500 м; мореходность при посадке в море — до 5 баллов (высота волны до 3,5 м). Экраноплан может принять на борт до 800 человек.

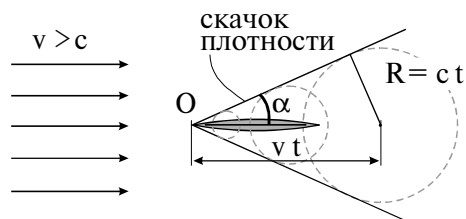
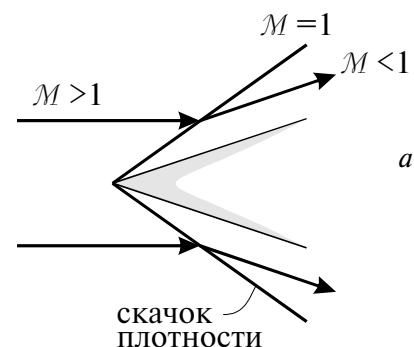
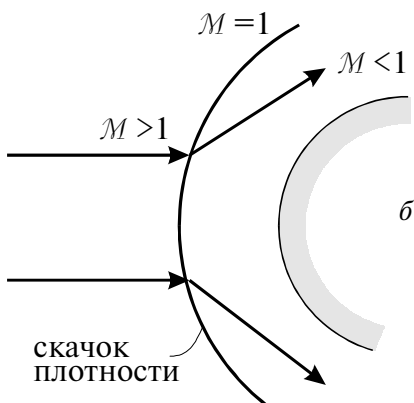


Рис. 4.35



а



б

Рис. 4.36

### Сверхзвуковое обтекание тел.

Обтекание тела воздушным потоком, скорость которого превышает скорость звука в воздухе, имеет ряд специфических особенностей. Рассмотрим вначале обтекание сильно вытянутого вдоль потока тела, напоминающего иглу (рис. 4.35). В непосредственной близости перед острием в т. О возникает возмущение плотности воздуха  $\Delta\rho > 0$ . Это возмущение в неподвижном воздухе распространялось бы в виде сферических волн, радиус которых  $R$  увеличивался бы со временем по закону:  $R = ct$ . В сверхзвуковом потоке эти возмущения будут сноситься потоком и оставаться внутри конуса возмущений — конуса Маха с углом  $\sin \alpha = c / v < 1$ .

Воспользуемся принципом обратимости движения, согласно которому, обтекание тела воздухом эквивалентно движению тела в неподвижном воздухе. С учетом этого можно сказать, что при движении тела со сверхзвуковой скоростью возбуждаются возмущения плотности и давления, локализованные на поверхности движущегося с телом конуса Маха. Когда это возмущение достигает неподвижных частиц воздуха, то последние получают воздействие, подобное удару, и приходят в движение. Поэтому распространение такого возмущения носит название ударной волны.

При обтекании сверхзвуковым потоком конического тела (рис. 4.36а) линии тока «преломляются» на поверхности фронта ударной волны — конуса Маха. Для классификации течения вводят чис-

ло Маха  $M = v / c$ . Оно равно отношению скорости течения к скорости звука в данном месте среды. В невозмущенном сверхзвуковом потоке  $M > 1$ . На поверхности конуса Маха из-за повышения плотности скорость звука возрастает, и  $M = 1$ . Под поверхностью конуса воздух разрежен и его обтекание носит дозвуковой характер ( $M < 1$ ). При обтекании тела с широкой передней частью фронт ударной волны (скачок уплотнений) будет уже не конусом, а более сложной поверхностью, которая отходит от тела (рис. 4.36б).

На образование ударных волн расходуется кинетическая энергия движущегося тела. Поэтому даже в отсутствие вязкости при сверхзвуковых скоростях возникает значительная сила лобового сопротивления. Эта сила существенно зависит от формы головной части движущегося тела. Например, игла (рис. 4.37), помещенная перед цилиндрическим телом, как бы рассекает поток, способствуя отрыву потока от поверхности цилиндра. Этот отрыв потока приводит к уменьшению лобового сопротивления. Этой же цели служат стреловидные (скошенные) и треугольные крылья на сверхзвуковых самолетах.

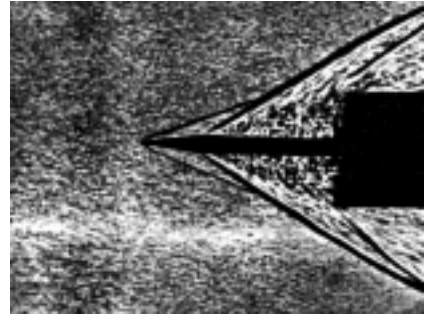


Рис. 4.37

Отдельно следует упомянуть об обтекании с гиперзвуковой скоростью, когда число Маха  $M \gg 1$ . Полет тел в газе с такими скоростями (например, спускаемых космических аппаратов) связан с увеличением температуры газа вблизи поверхности тела до очень больших значений. Это обусловлено адиабатическим нагревом сжимаемого воздуха перед головной частью тела и выделением теплоты вследствие вязкого трения. При изучении гиперзвуковых течений необходимо учитывать не только сжимаемость воздуха, но и нелинейный характер его движения, так как возмущения плотности  $\Delta\rho$  и давления  $\Delta p$  не малы по сравнению с равновесными значениями плотности  $\rho_0$  и давления  $p_0$ . Помимо этого, при высоких температурах необходимо учитывать и изменение физико-химических свойств воздуха. Ограничимся лишь одним важным выводом из такого анализа. При очень больших числах Маха давление воздуха непосредственно перед головной частью может быть пренебрежимо малым по сравнению с давлением воздуха на фронте ударной волны, где  $M \gg 1$ .

На рис. 4.38 представлены экспериментальные зависимости коэффициентов лобового сопротивления для тел в виде шара и цилиндра с конической головной частью от числа Маха. Хорошо видно, что в силу вышеуказанного падения давления перед головной частью коэффициенты лобового сопротивления убывают с рос-

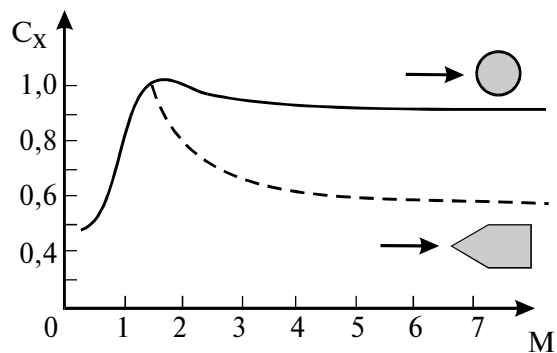


Рис. 4.38

том  $M$ , а начиная с  $M = 4$  меняются мало и сравнимы со значениями коэффициентов при дозвуковых течениях.

При сверхзвуковых скоростях меняется картина обтекания крыла самолета. Над крылом течение отрывается от его поверхности, а под крылом возникает скачок плотности. При таком обтекании, как показывает анализ, величина подъемной силы может быть грубо оценена с использованием теории Ньютона, в которой  $F_{\perp} \sim \sin^2 \alpha$ .

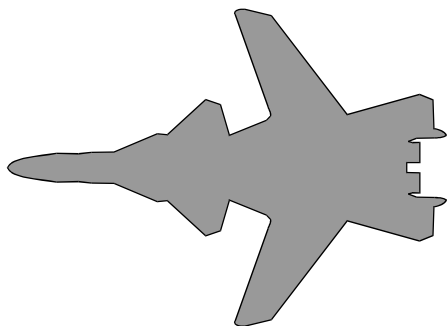


Рис. 4.39

Одним из уникальных достижений современной аэродинамики является создание в России в 1997 г. новейшего истребителя СУ-37, у которого впервые в мире использованы крылья с отрицательной стреловидностью. Контур этого самолета изображен на рис. 4.39. Такой самолет имеет меньшее аэродинамическое сопротивление, чем самолет с обычным стреловидным крылом. Помимо этого, у него увеличенная подъемная сила на малых и высоких скоростях и уникальные взлетно-посадочные характеристики.

#### Экспериментальные аэродинамические исследования.

Взаимодействие летательных аппаратов с потоком воздуха изучают экспериментально в ходе летных испытаний. Для этого на борт аппарата устанавливается разнообразная аппаратура, фиксирующая аэродинамические нагрузки. Однако значительно больший объем информации удастся получить при обдувании потоком воздуха летательного аппарата в натуральную величину или его уменьшенной геометрической копии (модели). Это осуществляется в аэродинамической трубе, схема которой изображена на рис. 4.40. В замкнутом канале переменного сечения с помощью мощного вентилятора 1 создается поток воздуха в направлении, указанном стрелками. В узкой части канала (сопле), где скорость потока наибольшая, помещается исследуемый объект 2 (или его модель). Этот объект связан с аэродинамическими весами 3,

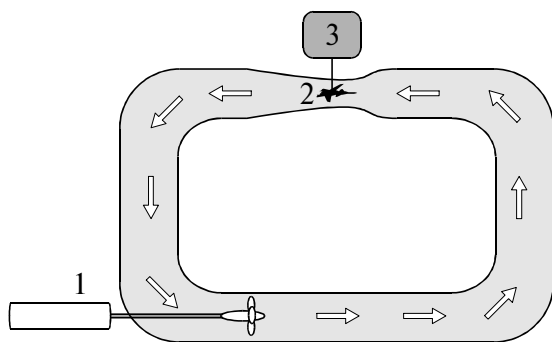


Рис. 4.40

позволяющими измерять аэродинамические силы и моменты сил, действующие на объект. Кроме труб с замкнутым циклом существуют разомкнутые аэродинамические трубы, в которые газ подводится из специальных емкостей. Аэродинамическая труба для экспериментов с объектами в натуральную величину является громадной, сложной и чрезвычайно дорогостоящей установкой. Первая в мире аэродинамическая труба была создана в 1897 г. К.Э. Ци-



олковским при поддержке Н.Е. Жуковского. В этой трубе он провел исследования моделей дирижаблей и самолетов в потоке, скорость которого составляла около 5 м/с. В 1902 г. Н.Е. Жуковский построил при механическом кабинете Московского университета первую аэродинамическую трубу с электрическим приводом.

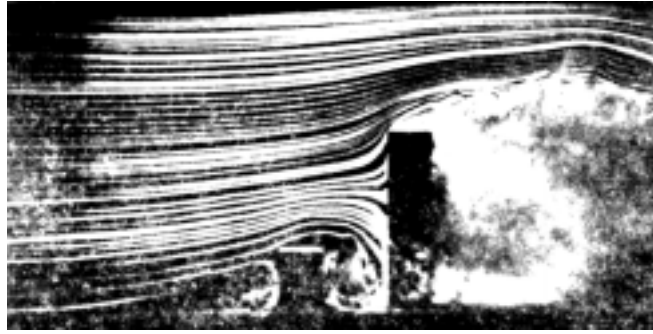


Рис. 4.41

В 1904 г. под его руководством был создан первый в мире аэродинамический институт (ЦАГИ), оказавший огромное влияние на развитие авиации и космонавтики. В настоящее время в мире существуют уникальные аэродинамические трубы, позволяющие проводить испытания летательных аппаратов в натуральную величину при сверхзвуковых скоростях потоков.

В менее дорогостоящих экспериментах с моделями возникает проблема перенесения результатов эксперимента на реальные объекты. Ясно, что модель должна быть точной уменьшенной геометрической копией объекта. Если, например, бугорки на поверхности крыла реального самолета достигают нескольких микрон, то у модели, уменьшенной в 10 раз, крылья должны быть отполированы до долей микрона. Однако одного лишь геометрического подобия недостаточно. Надо также создать такие условия обтекания, при которых соотношения между всеми силами (давления, вязкости и т.д.) в модельных и реальных условиях были бы одинаковы. Для дозвуковых скоростей критерием подобия натуральных и модельных экспериментов является равенство чисел Рейнольдса в обоих случаях:

$$\text{Re} = \frac{\rho_m v_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho_n v_n \ell_n}{\mu_n}. \quad (4.52)$$

Здесь индексы «м» и «н» относятся к параметрам модельного и натурального экспериментов. Если, например, размер модели в 10 раз меньше размеров реального объекта ( $\ell_m = 0,1\ell_n$ ), то подобие обтекания может быть достигнуто либо при десятикратном увеличении скорости потока, либо при таком же увеличении плотности воздуха. Второе чаще оказывается предпочтительнее, поскольку скорость  $v_m$  не может превзойти скорость звука, когда картина становится принципиально другой. Поэтому в аэродинамических трубах воздух сжимается до давления в несколько десятков атмосфер, что позволяет обеспечить условие (4.52).

В качестве иллюстрации на рис. 4.41 показано распределение воздушных потоков, обтекающих модели зданий. Ясно, что такой эксперимент является чрезвычайно полезным при проектировке строительства зданий и облегчает расчеты действующей на них ветровой нагрузки. При сверхзвуковых испытаниях модель помещается в сопло Лаваля, устанавливаемое в аэродинамической трубе. Потери на образование ударных волн в такой трубе весьма велики, поэтому используются мощные многоступенчатые компрессоры. Широкое распространение получили баллонные аэродинамические трубы, в

которые воздух поступает из баллонов высокого давления (несколько тысяч атмосфер). В сверхзвуковом режиме помимо (4.52) необходимо выполнение и второго условия подобия — равенства чисел Маха:

$$M = \frac{v_M}{c_M} = \frac{v_H}{c_H}. \quad (4.53)$$

Отметим, что в трубах, где  $M \gg 1$ , возникает ряд технических проблем, связанных с предотвращением конденсации струи воздуха вследствие понижения температуры при прохождении через сопло Лаваля. С этой целью воздух предварительно подогревают до температур  $\sim 10^3$  К, либо используют газ гелий, конденсация которого происходит при достаточно низких температурах.

---

## Содержание

Предисловие .....	3
ЛЕКЦИЯ 1 .....	5
ЛЕКЦИЯ 2 .....	27
ЛЕКЦИЯ 3 .....	44
ЛЕКЦИЯ 4 .....	63

---

